作成責任者：軽井沢数学 IC 数学教育研究所 所長 碓氷長 (91 歳)

0.1 次の微分方程式を解け．

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = t\sin t$$

(北海道大 1997) (m19970101)

0.2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，

(1) 固有値を求めよ．

(2) 単位固有ベクトルを求めよ．

(3) $\exp(X) = E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$ と定義されている時，$\exp(tA)$ を求めよ．ただし，t ： 定数

(北海道大 1997) (m19970102)

0.3 ベクトル場 $\mathbf{a} = (x\cos z, y\log x, -z^2)$ に対して

(1) 発散 div $\mathbf{a}$ を求めよ．

(2) 回転 rot $\mathbf{a}$ を求めよ．

(北海道大 1997) (m19970103)

0.4 z は複素数である．

(1) $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 \geq 1$ を証明せよ．

(2) 方程式 $\sin z = 2$ を解け．

(北海道大 1997) (m19970104)

0.5 $f(x) = \sqrt{x}\log x \quad (x \geq 0)$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ．

(2) $\lim_{x\to 0} f(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ の最小値を求めよ．

(4) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け．

(岩手大 1997) (m19970301)

0.6 $f(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \quad (x > 0)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x+1) = xf(x)$ を部分積分を用いて証明せよ．

(2) x が自然数 n のとき，$f(n) = (n-1)!$ を証明せよ．

(3) $f(5)$ を求めよ．

(4) $f(\frac{5}{2})$ を求めよ．ただし，$f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ である．

(岩手大 1997) (m19970302)

0.7 以下の問に答えよ．

(1) 次の微分方程式の一般解を $y = C_1e^{Ax} + C_2e^{Bx}$ と仮定して求めよ．ただし，C_1 及び C_2 は任意定数とする．

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$

(2) 次の微分方程式の特殊解を $y = Ae^{Bx}$ と仮定して求めよ．

$$y'' - 5y' + 4y = e^x$$

(3) 次の２つの微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x), \quad y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_2(x)$$

の一般解をそれぞれ $y = f(x)$, $y = g(x)$ とするとき，$y = f(x) + g(x)$ は次の微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x) + R_2(x)$$

の解であることを示せ．

(4) (3) の結果を用いて，次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$y'' - 5y' + 4y = e^x + e^{4x}$$

(岩手大 1997)　　(m19970303)

0.8 ３次元空間内の３点 A, B, C の各々の座標を $(a, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$ を２辺とする平行四辺形を $ACBD$ とするとき，点 D の座標を求めよ．

(2) $\angle ACB$ を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ．

(3) $\triangle ABC$ の面積を求めよ．

(4) $\triangle ABC$ に垂直な単位ベクトルを求めよ．

(岩手大 1997)　　(m19970304)

0.9 $y = x^2 \log x$ の増減・凹凸を調べてグラフを描け．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970601)

0.10 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{n^2 - i^2}$ を定積分で表し，
極限値を求めよ．　(お茶の水女子大 1997)　　(m19970602)

0.11 $\displaystyle\int e^x \cos x dx$ を求めよ．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970603)

0.12 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ は $p > 1$ ならば収束し，$p \leq 1$ ならば発散することを証明せよ．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970604)

0.13 $D = \{(x, y)\ ;\ 0 \leq x + y \leq \pi, 0 \leq x - y \leq \pi\}$ としたとき，

$$\iint_D (x - y)\sin(x + y)\, dxdy$$

を求めよ．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970605)

0.14 (1) 微分方程式

$$\frac{dy(t)}{dt} + \lambda y(t) = 0 \qquad \text{(i)}$$

を解け．ただし，λ は定数で，$y(0) = a$ とする．

(2) 微分方程式

$$\frac{dy(t)}{dt} + \lambda y(t) = f(t) \tag{ii}$$

を以下の手順によって解け．ただし，$f(t)$ は既知の関数で，$y(0) = a$ とする．まず，

$$y(t) = e^{-\lambda t} x(t) \tag{iii}$$

とおいて，(ii) を $x(t)$ の方程式に変換し，$x(t)$ を解き，$y(t)$ を求めよ．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970606)

0.15　3 行 3 列の行列 A と B を以下のように与える．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

このとき，行列 A と B の和 $(A+B)$，差 $(A-B)$，積 $(A*B)$ を計算せよ．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970607)

0.16　行列 $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ の成分について

$a^2 + b^2 + c^2 = {a'}^2 + {b'}^2 + {c'}^2 = {a''}^2 + {b''}^2 + {c''}^2 = 1$

$aa' + bb' + cc' = aa'' + bb'' + cc'' = a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0$

が成り立っている．このとき

(1) M の行列式の値を求めよ．

(2) $a^2 + {a'}^2 + {a''}^2 = b^2 + {b'}^2 + {b''}^2 = c^2 + {c'}^2 + {c''}^2 = 1$

$ab + a'b' + a''b'' = ac + a'c' + a''c'' = bc + b'c' + b''c'' = 0$

が成り立っていることを示せ．

ヒント：M と，M の転置行列との積を考えよ．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970608)

0.17　2 行 2 列の行列 C と D を以下のように与える．

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 C の特性方程式 $\det(C - xI) = 0$ を書き下し，その根を求めよ．ただし，$\det(C - xI)$ は行列 $C - xI$ の行列式を表し，I は 2 行 2 列の単位行列である．すなわち $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$．

(2) D の n 乗 (D^n) を求め，そのトレース $\mathrm{tr}(D^n)$ を計算せよ．ただし，$\mathrm{tr}D$ とは行列 D の対角成分の和を表す記号である．

(3) C の n 乗 (C^n) のトレース $\mathrm{tr}(C^n)$ の値を $n = 1, 2, 3$ の場合に求めよ．
この結果を (2) と比較し，一般の n の場合のトレース $\mathrm{tr}(C^n)$ の値を予想せよ．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970609)

0.18　3 次対称行列 A を次で与える．　$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A の固有ベクトルから成る $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底を求めよ．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970610)

0.19 実 n 次元ベクトル空間を $\mathbf{R}^n$ で表す．$\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ への線形写像 f，$\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^4$ への線形写像 g は，それぞれ次の行列 A, B で表されるものとする．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) f と g の合成写像 $g \circ f$ によって $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ がうつされる $\mathbf{R}^4$ のベクトルを求めよ．

(2) $f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をみたす $x \in \mathbf{R}^3$ を求めよ．

(3) g による像空間 $\mathrm{Im}\ g$ の次元を求めよ．ここで $\mathrm{Im}\ g$ は

$$\mathrm{Im}\ g = \{g(x) \in \mathbf{R}^4 \mid x \in \mathbf{R}^3\}$$

で定義される．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970611)

0.20

$$x(t) + a\int_0^t x(t)dt = f(t) + b\int_0^t f(t)dt$$

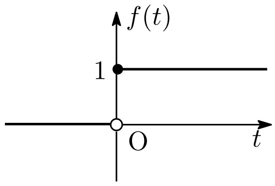
において $f(t)$ は下図のステップ関数とする．ただし，

$$a > b > 0 \ , \ \lim_{t\to+0} x(t) = 1 \ , \ \lim_{t\to-0} x(t) = 0$$

このとき

(1) $x(t)$ を求めよ．

(2) $x(t)$ の概形を図示せよ．



$$f(t) = 1 \qquad t \geqq 0$$
$$f(t) = 0 \qquad t < 0$$

(東京大 1997)　　(m19970701)

0.21 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -9 \\ 2 & 0 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

に対して，次の問に答えよ．

(1) 行列 A を対称行列 S と交代（逆対称，反対称）行列 K の和で表せ．

(2) 行列 $KS + SK$ は対称行列，交代行列，その他の行列の何れか．
又，行列 $KSKS + SKSK$ は上記の三つの行列の何れか．

(3) 行列 A の固有方程式を示せ.

(4) 行列 A の固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ.

(東京大 1997) (m19970702)

0.22 数列 $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ がある．この数列の 隣接した 3 項の間には次のような関係式が成り立つ.

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

(1) $a_0 = a_1 = 1$ として，極限値

$$\tau = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

を求めよ.

(2) 上の漸化式をベクトルおよび行列の関係式を用いると

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

と書かれる．この行列を対角化し，またその時の固有ベクトルを求めることにより，$a_0 = a_1 = 1$ を初期値とした極限値

$$\tau = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

を求めよ．また a_n の一般項はどのように書けるか.

(東京大 1997) (m19970703)

0.23 次の積分を計算せよ.

$$\int_0^1 \frac{2\pi j e^{2\pi jt}}{e^{2\pi jt} - \alpha} \cdot \left\{ \frac{2\pi j e^{2\pi jt}}{e^{2\pi jt} - \alpha} \right\}^* dt$$

ただし，α は $|\alpha| \neq 1$ なる任意の複素数，j は虚数単位，“ $*$ ” は複素共役を表すとする.

(東京大 1997) (m19970704)

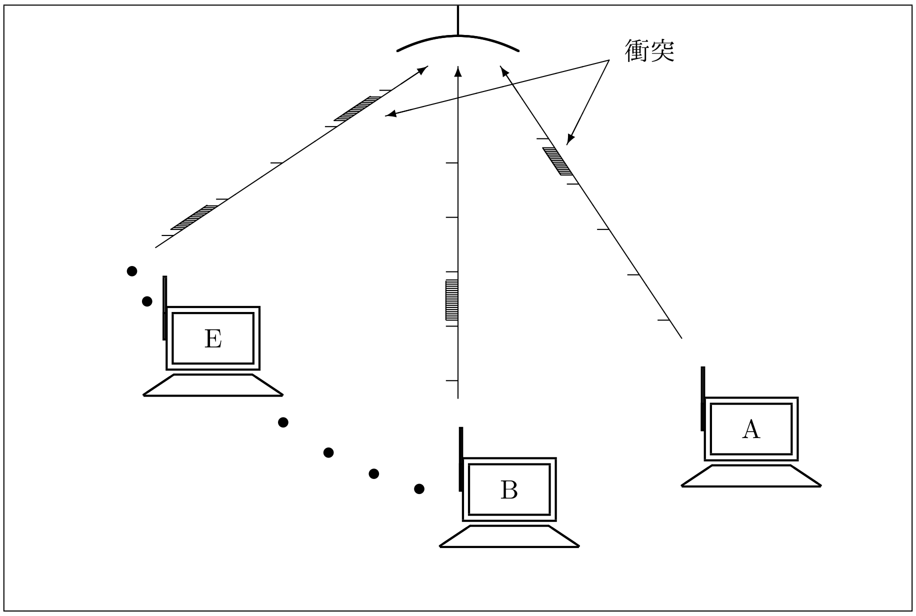
0.24 複数のコンピュータが長さ 1 秒の無線信号を中央のアンテナに送信するネットワークを考える（下図参照）．無線信号の交信は 1 秒ごとに行われ，$T-1$ (秒) から T (秒) の間に生起した無線信号は T (秒) の時点で送信される．また，2 台以上のコンピュータが同時に無線信号送信を行った場合には信号衝突（送信失敗）が起こり，後の時点で再送される．ここで，コンピュータ A 以外のコンピュータから生起された無線信号は，再送信号までも含めて次式の確率で送信されるものとする．このとき，以下の問に答えよ．なお，$P_r[k, n]$ は n 秒の間に k 個の無線信号が生起する確率であり，G は定数である.

$$P_r[k, n] = \frac{(Gn)^k}{k!} \exp(-Gn)$$

(1) コンピュータ A が無線信号を送信した際，信号衝突が起こらない確率を求めよ.

(2) コンピュータ A の信号送信が $j-1$ 回の信号衝突の後で成功する確率，すなわち送信回数が j 回となる確率を求めよ.

(3) 無線信号の送信回数の期待値を求めよ.



(東京大 1997)　　　(m19970705)

0.25　区間 $[-1,1]$ 上の連続関数 $f(x)$ で，次の 2 条件 (1),(2) を同時に満たす例をあげよ.

(1)　$f(0)=0,\ \ f(\frac{1}{n})=0\quad(\ n=1,2,\cdots\ )$

(2)　$f(x)$ は $0,\ \dfrac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)$ において微分可能で $f'(0)=0,\ \ f'(\frac{1}{n})=1\ \ (n=1,2,\cdots)$

(東京工業大 1997)　　　(m19970801)

0.26　実数列 $a_1,\,a_2,\,\cdots,\,a_n,\,\cdots$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ を満たすならば，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=0$ となることを示せ.

(東京工業大 1997)　　　(m19970802)

0.27　3× 3 行列 A が

$$A\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

を満たすとき，次の問に答えよ.

(1)　A を求めよ.

(2)　A^n を求めよ.

(東京工業大 1997)　　　(m19970803)

0.28　$A=\begin{pmatrix}\sqrt{3}&0&0\\0&0&0\\0&0&-\sqrt{3}\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0&0&\sqrt{3}\\0&0&0\\\sqrt{3}&0&0\end{pmatrix}$ とするとき，次の問に答えよ.

(1)　$S_\theta=\cos\theta A+\sin\theta B$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2)　$v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とする．θ を固定するとき，2 次形式 ${}^t vS_\theta v=c$ (c は 0 でない定数，${}^t v$ は v の転置) の表わす図形は何か？

(東京工業大 1997)　　　(m19970804)

0.29 xy 平面上の点 $P(x,y)$ が， $t \geq 0$ の範囲で，次の連立微分方程式に従って移動する．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}$$

(1) この連立微分方程式の一般解を求めよ．

(2) $t = 0$ で $x = 1$, $y = 3$ とするとき x と y を t で表せ．

(3) $x = 0$ となる y と t を求めよ．

(4) 点 P の描く曲線の方程式を求め，略図を描け．

(横浜国立大 1997） (m19971101)

0.30 (1) 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは長さ 1 となるように表せ

(2) 数ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ を，問 (1) で求めた固有ベクトルの一次結合で表せ．

(横浜国立大 1997） (m19971102)

0.31 $y = \dfrac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}(2 - x) \quad (-1 \leq x \leq 2)$ のグラフを描け．

(千葉大 1997） (m19971201)

0.32 次の初期値問題を解け．

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + x = \sin 2t \quad (t > 0), \\ x(0) = 0, \\ \dfrac{dx}{dt}(0) = 0 \end{cases}$$

(千葉大 1997） (m19971202)

0.33 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1, λ_2 を求め，λ_1, λ_2 に対して，長さが 1 となるように正規化した固有ベクトル ν_1, ν_2 を求めよ．さらに，ν_1, ν_2 を相隣る 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ．

(千葉大 1997） (m19971203)

0.34 複素数 α に対する複素関数 $f(\alpha)$ を次のように定義する．

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{z - \alpha}dz$$

ただし，C は複素平面上の単位円：$|z| = 1$ である．このとき，$f(2)$ と $f(0.5 + 0.5i)$ を求めよ．

(千葉大 1997） (m19971204)

0.35 $a > 0,\ b > 0$ とする．定点 (a, b) を通り x 軸の正の部分および y 軸の正の部分と交わる直線を考える．この直線が x 軸 , y 軸と交わる点をそれぞれ P, Q とする．次の各問いに答えよ．

(1) この直線と原点 O との距離の最大値を求めよ．

(2) 三角形 OPQ の面積の最小値を求めよ．

(長岡技科大 1997) (m19972101)

0.36 任意の 2 次関数 $f(x)$ に対して

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = af(-1) + bf(0) + cf(1)$$

となるような定数 a, b, c を求めよ．

(長岡技科大 1997) (m19972102)

0.37 条件 $x^2 + xy + y^2 = 1$ のもとで $x^2 + y^2$ のとる値の範囲を求めよ．

(長岡技科大 1997) (m19972103)

0.38 微分方程式 $y'' - 2y' + 2y = 0$ の一般解を求めよ．

(長岡技科大 1997) (m19972104)

0.39 $a > 0$ とする．

(1) 平面において，x 軸からの距離と点 $(0, a)$ からの距離が等しいような点からなる曲線の方程式を求めよ．

(2) 空間において，xy 平面からの距離と点 $(0, 0, a)$ からの距離が等しいような点からなる曲面 S_1 の方程式を求めよ．

(3) 空間において，平面 $x + y + z = 0$ からの距離と点 $(1, 1, 1)$ からの距離が等しいような点からなる曲面を S_2 とする．S_2 と平面 $x + y + z = 3$ とで囲まれる部分の体積を求めよ．

(長岡技科大 1997) (m19972105)

0.40 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(長岡技科大 1997) (m19972106)

0.41 ２人でさいころを交互に投げて 1 の目を先に出した人を勝ちとする．最初に投げた人が勝つ確率を求めよ

(長岡技科大 1997) (m19972107)

0.42 変数 (r, θ) $(r \geq 0\ ,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ から変数 (x, y) への変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

を考える．また領域 D を

$$D = \{(x, y) \quad ;\ -x \leq y \leq x\}$$

によって定義する．

(1) (x, y) が領域 D を動くとき (r, θ) が動く範囲を求めよ．また，その対応が 1 対 1 であることを示せ．

(2) 次の積分の値を上記の変数変換を用いて求めよ．

$$\iint_D \exp(-x^2 - y^2 - xy)dxdy$$

ここで積分の範囲は領域 D である．

(岐阜大 1997) (m19972601)

0.43 $\sin 2\alpha$ を $\sin\alpha$ と $\cos\alpha$ を用いて表せ．

（豊橋技科大 1997）　(m19972701)

0.44 $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

（豊橋技科大 1997）　(m19972702)

0.45 以下の文章の空欄に適当な式を記入せよ．

(1) 連続関数 $f(x)$ の微分は次の公式で定義される．

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\boxed{\ 1\ } - f(x)}{h}$$

この公式に基づき e^x の微分を求めよう．

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{\boxed{\ 2\ }}{h}$$

ここで，$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ と展開できることを利用すると，

$$(e^x)' = e^x \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \cdots + \frac{\boxed{\ 3\ }}{n!} + \cdots\right)$$

$$= e^x \lim_{h\to 0}\left(1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \cdots + \frac{\boxed{\ 4\ }}{n!} + \cdots\right)$$

$$= \boxed{\ 5\ }$$

と求まる．

(2) x^x の微分を次の手順で求めよう．ただし，$x > 0$ とし，また自然対数を $\log$ で表すものとする．

$y = x^x$ の両辺の対数をとると，

$$\log y = \boxed{\ 6\ }$$

この式の両辺を x で微分すると，

$$\boxed{\ 7\ } = \boxed{\ 8\ } + x\cdot\frac{1}{x} = \boxed{\ 9\ } + 1$$

この式から，y' を x で表すと，

$$y' = \boxed{\ 10\ }$$

と求まる．

（豊橋技科大 1997）　(m19972703)

0.46 関数 $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 40$ の $0 \leqq x \leqq 5$ における最大値と最小値を求めよ．

（豊橋技科大 1997）　(m19972704)

0.47 $0 \leqq x \leqq \pi$ で定義された関数 $f(x)$ が以下のように与えられている．

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ -1 & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi\right) \end{cases}$$

$f(x)$ を $g(x)$ で近似するとき，近似誤差 I は以下の積分と考えるものとする．

$$I = \int_0^{\pi} \bigl(f(x) - g(x)\bigr)^2\,dx$$

(1) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\, dx$ を計算せよ．

(2) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} (\cos x)^2\, dx$ を計算せよ．

(3) 定数 a を用いて， $g(x) = a \cdot \cos x$ で近似するとき，誤差 I を計算せよ．

(4) $g(x) = a \cdot \cos x$ で近似するとき，誤差 I を最小にする a を計算せよ．

公式 $\cos a \cdot \cos b = \dfrac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$ を利用してもよい．

(豊橋技科大 1997）　　(m19972705)

0.48 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は次の式で表される．

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{1}{2!}f^{(2)}(0)x^2 + \cdots \frac{1}{n!}f^{(n)}x^n + \cdots$$

ただし， $f^{(n)}(0)$ は $x = 0$ での n 階微分である．このとき，次の関数のマクローリン展開を，$n = 2$ まで表せ．

(1) $f(x) = \sin x$

(2) $f(x) = \cos x$

(豊橋技科大 1997）　　(m19972706)

0.49 行列 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の (1) P^2 (2) P^{-1} を求めよ．

(豊橋技科大 1997）　　(m19972707)

0.50 箱の中に 7 個の白球と 7 個の黒球が入っている．

(1) この箱から無作為に 4 個の球を取り出す．ただし，一度取り出した球は戻さない．

(a) 4 個の球が全て黒球である確率を求めよ．

(b) 4 個の球の色が全て同じである確率を求めよ．

(2) 1 個の球を取り出して，色を調べた後，元の箱に戻す操作を 4 回繰り返すとする．4 回の試行により取り出された球が全て黒球である確率を求めよ．

(豊橋技科大 1997）　　(m19972708)

0.51 (1) $f(x) = \log(1+x)$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(2) $\log(1+x)$ を x のべき級数（マクローリン級数）に展開した式を書き，その収束半径を求めよ．

(名古屋工業大 1997）　　(m19972901)

0.52 (1) 微分方程式 $y'' + 2y' - 3y = e^x x$ を解くために， $y = e^x z$ とおくと，微分式方程式 $z'' + az' + bz = x$ が導かれる．定数 a, b の値を求めよ．

(2) 上で導かれた微分方程式 $z'' + az' + bz = x$ の一般解を求めよ．

(名古屋工業大 1997）　　(m19972902)

0.53 (1) 次の行列 A の固有多項式 $|\, xE - A \,|$ を計算して， A の固有値を求めよ．但し， E は単位行列を表す．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 上で得られた固有値の固有ベクトルを求めよ．

(名古屋工業大 1997）　　(m19972903)

0.54 次の 2×2 の行列 A について以下の問に答えよ．本問題において，ベクトルは２次元の縦ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を意味する．

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値とそれぞれの固有値に対する一つの固有ベクトルを求めよ．

(2) (1) で求めた固有値と固有ベクトルを用いて行列 E と B を適当に定め，行列 A を

$$A = EBE^{-1}$$

の形で表せ．ここで，E^{-1} は E の逆行列で B は $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ のような形である．

(3) (2) で定めた E と B を用いて，A^n はどのように表すことができるか．ここで，A^n は n 個の A を掛け合わせたものである．
（ヒント）まず，$A = EBE^{-1}$ の表現を用いて A^2 がどのようになるかを調べよ．

(4) ベクトル全体の集合を V と書く．V の任意の二つの要素 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$，$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$，に対して，

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

とする．ベクトルの列 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \cdots$ が一つのベクトル $\mathbf{x}$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) = 0$$

を満たすとき，この列は $\mathbf{x}$ に収束すると言う．
$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ を一つのベクトルとし，行列 A を用いて，
$\mathbf{a}, A\mathbf{a}, A^2\mathbf{a}, A^3\mathbf{a}, \cdots$ なる列をつっくたとき，この列が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に収束ことを示せ．(3) で求めた A^n の表現を用いよ．

(名古屋工業大 1997)　　(m19972904)

0.55 $y = ax^2$ と $y = x + k$ 　$(k > 0\ ,\ a > 0)$ があり，負の交点を A，他方を B とする．原点 O と A と B を通る円がある．O 以外での x 軸と交わる円の交点を C とする．このとき CB は x 軸と垂直である．次の各問に答えよ．

(1) a と k の関係を求めよ．

(2) 円の方程式を a で表せ．

(3) 四角形 $OACB$ の面積は円の内接四角形の最大の面積の何倍か．

(大阪大 1997)　　(m19973501)

0.56 $I_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{(\sqrt{x})^{n-1}}{1+\sqrt{x}}dx$ に対し，

(1) $I_0\ ,\ I_1$ を求めよ．

(2) $I_n + I_{n-1}$ を求めて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ を示せ．

(3) (1),(2) より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2$ を証明せよ．

(大阪大 1997)　　(m19973502)

0.57 x の関数 $y = y(x)$ に関する定数係数線形常微分方程式について以下の問に答えよ．

(1) $y'' - 2y' + 5y = 0$ の一般解を求めよ．

(2) $y'' - 2y' + 5y = 4e^x$ の解を一つ求めよ．

(3) $y'' - 2y' + 5y = 4xe^x$ の解を一つ求めよ．

(4) $y'' - 2y' + 5y = 4e^x + 4xe^x$ の解で $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ となる解を求めよ．

(大阪大 1997)　　(m19973503)

0.58 平面上に２点 A , B がある．線分 AB を直径とする円を考え，その中心を C ，半径を R とする．

(1) ２点 A , B の位置ベクトルを $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ とし，円周上の任意の点 P の位置ベクトルを $\overrightarrow{p}$ としたとき，

$$(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a})\cdot(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{b}) = 0$$

の関係が成り立つことを証明せよ．

(2) この点 P における接線を l とする．接線 l 上の任意の点 Q の位置ベクトルを $\overrightarrow{q}$ とし，円の中心点 C の位置ベクトルを $\overrightarrow{c}$ としたとき，

$$(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{c})\cdot(\overrightarrow{q} - \overrightarrow{c}) = R^2$$

の関係が成り立つことを証明せよ．

(3) ２点 A , B の座標をそれぞれ $(2,4)$, $(4,2)$ とする．接線 l が原点を通るときの接点 P の座標を求めよ．

(大阪大 1997)　　(m19973504)

0.59 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，

(1) 固有値と単位固有ベクトルを求めよ．

(2) 対角化するための直交行列 P とその逆行列 P^{-1} を求めよ．

(3) $B = A^9 + 3A$ を求めよ．

(大阪大 1997)　　(m19973505)

0.60 次の各問いに答えよ．

(1) サイコロ２つを一度に振る動作を N 回行う．このとき同じ目の出る確率が 0.5 以上になる最小の N を求めよ．

(2) ２つの目の差（絶対値）の期待値を求めよ．

(3) ２つの目の和の期待値を求めよ．ただし，ぞろ目の時はもう一度振り，この２回の和を値とし，たとえば，$(6,6)$, $(4,4)$, $(2,2)$, $(1,4)$ と出たら数字は 29 である．

(大阪大 1997)　　(m19973506)

0.61 以下の問 (1)〜(4) に答えよ．

(1) 正６角形の頂点を結んで出きる３角形のうち，この正６角形と辺を共有しない（すなわち，正６角形の対角線で構成される）３角形はいくつあるか求めよ．

(2) 正 n 角形（ n は６以上の整数）の頂点を結んで出きる３角形のうち，この正 n 角形と辺を共有しない３角形の数を n を用いて表せ．

(3) 正 n 角形（ n は６以上の整数）の頂点を結んで出きる３角形のうち，この正 n 角形と辺を共有しない３角形の数が，それ以外の３角形の数より大きくなるのはどのような場合か n を用いて表せ．

(4) 1 から n （n は 6 以上の整数）までの整数を 1 つずつ書いた n 枚のカードがある．もとに戻すことなくカードを 3 回引き，それらの番号を順に a , b , c とする.，このとき a , b , c が互いに 2 以上離れた整数となる確率を n を用いて表せ．

(大阪大 1997）　　(m19973507)

0.62 x の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解が，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

で与えられることを説明（証明・解説）せよ．

(神戸大 1997）　　(m19973801)

0.63 次の微分計算をせよ．

$$(1)\frac{d}{dx}\big(x\log x-x\big)\qquad(2)\frac{d}{dx}\big(e^{\sin x}\big)\qquad(3)\frac{d^2}{dx^2}\big(e^{-x^2}\big)$$

(神戸大 1997）　　(m19973802)

0.64 積分 $\displaystyle\int_1^e\log x\,dx$ を計算せよ．

(神戸大 1997）　　(m19973803)

0.65 $a_1=2$ ， $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{2}{a_n}\right)$ で定められた数列 $\{a_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ について，次の各問に答えよ．

(1) $a_n\geq a_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$ であることを示せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示し， $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

(神戸大 1997）　　(m19973804)

0.66 次の微分計算をせよ． $\dfrac{\partial}{\partial x}\big(x^2y^3\big)$

(神戸大 1997）　　(m19973805)

0.67 次の積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1(x+y)^2\,dx\,dy$

(2) $\displaystyle\iint_A(\,|x|+|y|\,)\,dx\,dy\quad\Big(A=\big\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\ \big|\ |x|+|y|\leq 1\big\}\Big)$

(神戸大 1997）　　(m19973806)

0.68 $D=\big\{(x,y)\,\big|\,x^2+y^2\leq x,y\geq 0\big\}$ とするとき，

$$\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

を求めよ．

(神戸大 1997）　　(m19973807)

0.69 次のベクトルの組は一次独立かそれとも一次従属であるか調べよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\9\\27\end{pmatrix}\qquad(2)\ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$$

$$(3)\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

(神戸大 1997）　　(m19973808)

0.70　A を n 次の正則行列，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ を 1 次独立な n 次元列ベクトルとし，$\boldsymbol{c} = A\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{d} = A\boldsymbol{b}$ とおくとき，ベクトル $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ も 1 次独立であることを示せ．

(神戸大 1997)　　(m19973809)

0.71　次の各行列式の値を求めよ．

$$(1)\ \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & -1 & 0 \\ b & 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(神戸大 1997)　　(m19973810)

0.72　次の行列 A の固有値及び固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(神戸大 1997)　　(m19973811)

0.73　$y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ の微分係数 $\dfrac{dy}{dx}$ が次式で与えられることを証明せよ．ただし，a は定数で $a > 0$ である．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{a^2 + x^2}$$

(鳥取大 1997)　　(m19973901)

0.74　$f(x) = ax^5 - x^4 + x^3 + b$ は $x = 1$ のとき極大値 2 をもつという．

(1)　a, b の値を求めよ．

(2)　$f(x)$ が，他に極大，極小を持っているならば，それを与える x の値と極値を求めよ．

(3)　$f(x)$ のグラフの概形を書け．

(鳥取大 1997)　　(m19973902)

0.75　$I = \displaystyle\int_0^{\log 5} \frac{e^x\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3}dx$ を求めよ．

(鳥取大 1997)　　(m19973903)

0.76　関数 $z = \dfrac{u^2(x, y)}{v(x, y)}$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を求めよ．

(鳥取大 1997)　　(m19973904)

0.77　マクローリンの定理により，関数 $f(x, y) = e^{ax-by}$ を 2 次の項まで展開せよ．ただし，a, b は定数である．

(鳥取大 1997)　　(m19973905)

0.78　次の積分を計算せよ．ただし，a は定数で，$a > 0$ である．

$$\iint_D x^2y\, dxdy \qquad D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

(鳥取大 1997)　　(m19973906)

0.79　$P_n(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n$，　$-1 \leq x \leq 1$，$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$　と定義する．このとき次の問に答えよ．

(1)　$P_0(x)$，$P_1(x)$，$P_2(x)$ を計算して求めよ．

(2) 任意の $0 \le k \le n$ について $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^k P_{n+1}(x)\,dx = 0$ を示せ.

(3) 任意の n 次多項式 $Q(x)$ について $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(x)P_{n+1}(x)\,dx = 0$ を示せ.

(4) $P_n(1)$ の値を計算せよ.

(九州大 1997） (m19974701)

$\{a_n\}$ を数列とする.

0.80 (1) $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = a$ となることを示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = a$ であっても $\lim_{n\to+\infty} a_n$ が存在するとは限らないことを反例によって示せ.

(九州大 1997） (m19974702)

0.81 (1) 領域 $D = \{(x,y) \mid 0 \le x+y \le 1\,,\ 0 \le x-y \le 1\}$ を座標平面に図示せよ.

(2) 積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x-y}{1+x+y}\,dx\,dy$ の値を計算せよ.

(九州大 1997） (m19974703)

0.82 a , b , c を実定数とするとき

$$Q = Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \ , \quad -\infty < x, y < +\infty$$

について，次の問に答えよ.

(1) $Q = (x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる実対称行列 A を求めよ.

(2) $(x,y) \neq (0,0)$ ならば $Q < 0$ となる a , b , c の条件を求めよ.

(3) (2) で求めた条件のもとで A の固有値がすべて負になることを示せ.

(九州大 1997） (m19974704)

0.83 線形写像 $T : R^4 \to R^2$ について

$$\mathrm{Ker}\ T = \{\ x \in R^4 \mid T(x) = 0\ \}$$

$$\mathrm{Im}\ T = \{\ T(x) \mid x \in R^4\ \}$$

と定義する. T が条件

$$\mathrm{Ker}\ T = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle|\ x_1 + 2x_3 = x_2 - x_4 = 0 \right\}$$

$$\mathrm{Im}\ T = R^2$$

を満足するとき，次の問に答えよ.

(1) Ker T の基底を 1 組求めよ.

(2) 上で求めた Ker T の基底を含む R^4 の基底を 1 組求めよ.

(3) $T(x) = Ax$ となる 2 行 4 列の行列 A を一個求めよ.

(4) 上の A について rank A を求めよ.

(九州大 1997） (m19974705)