[選択項目] 年度：1998 年

**0.1** 次の式の分母を有理化せよ．$\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

(岩手大 1998) (m19980301)

**0.2** 次の 2 重根号をはずせ．$\sqrt{2+\sqrt{3}}$

(岩手大 1998) (m19980302)

**0.3** 次の不等式を解け．$2x^2-x-3>0$

(岩手大 1998) (m19980303)

**0.4** 2 と 8 の相加平均と相乗平均を求めよ．

(岩手大 1998) (m19980304)

**0.5** 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right), \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\sin x}{x^3}$$

(岩手大 1998) (m19980305)

**0.6** 範囲 $-\infty<x<\infty$ で連続な関数 $f(x)$ が次の関係式を満たすとする．

$$f(x)=\sin x+x\int_0^{\infty}f(t)e^{-t}dt+\int_0^{\pi}f(t)\cos t\,dt$$

次の問いに答えよ．

(1) 次の定積分 $I_1$，$I_2$，$I_3$，$J_1$，$J_2$，$J_3$ の値を求めよ．

$$I_1=\int_0^{\infty}e^{-t}dt\,, \qquad I_2=\int_0^{\infty}te^{-t}dt\,, \qquad I_3=\int_0^{\infty}e^{-t}\sin t\,dt$$

$$J_1=\int_0^{\pi}\cos t\,dt\,, \qquad J_2=\int_0^{\pi}\sin t\cos t\,dt\,, \qquad J_3=\int_0^{\pi}t\cos t\,dt$$

(2) 上記の関係式に含まれる 2 つの定積分を，次のように $A$，$B$ とおく．

$$\int_0^{\infty}f(t)e^{-t}dt=A\,, \qquad \int_0^{\pi}f(t)\cos t\,dt=B$$

$A$，$B$ の値を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ を求めよ．

(岩手大 1998) (m19980306)

**0.7** 次の和を求めよ．$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

(岩手大 1998) (m19980307)

**0.8** $x$-$y$ 平面上の半楕円

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=1 \qquad (x\geqq 0)\cdots\cdots\cdots \text{(i)}$$

と $x$，$y$ の関数

$$z=2+xy+\frac{1}{2}(x^2+y^2) \qquad \cdots\cdots\cdots \text{(ii)}$$

を考える．ただし，半楕円上の点 $(x,y)$ に対し，原点と点 $\left(\dfrac{x}{2},\ y\right)$ を結ぶ線分が $x$ 軸となす角を $\theta$ とする．次の問に答えよ．

(1) $\theta$ を媒介変数とする半楕円 (i) の媒介変数方程式を求めよ．$\theta$ のとる範囲も明示せよ．

(2) 条件 (i) のもとでの関数 (ii) の極値を求めるために，関数 (ii) を $\theta$ のみの関数として表せ．

(3) 前問で得られた $\theta$ の関数 $z=f(\theta)$ が極値をとる $\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ．

(4) $z=f(\theta)$ の極値を求めよ．

(5) $f(0)$，$f\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f\left(\pm\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．

(6) $z=f(\theta)$ のおよそのグラフを描け．

(7) 媒介変数 $\theta$ を用いずに，条件 (i) のもとでの関数 (ii) の極値を，ラグランジュの乗数法で求めたい．極値をとる $(x,y)$ の値を求めるための条件式を書け．

(8) 極値をとる $(x,y)$ の値を求めよ．

(岩手大 1998)　　(m19980308)

**0.9** 次の 2 つのベクトルの和と差が直交するように，$x$ を定めよ．

$\boldsymbol{a}=(9,4)$，$\boldsymbol{b}=(4,x)$

(岩手大 1998)　　(m19980309)

**0.10** 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ の和と積を求めよ．

(岩手大 1998)　　(m19980310)

**0.11** 次のような行列 $A$ 考える．

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

ここで，$a$ は実定数とする．次の問に答えよ．

(1) $A^2, A^3$ を求めよ．

(2) 一般の正の整数 $n$ に対する $A^n$ を求めよ．$A^n$ の形を正しく推定し，数学的帰納法により証明すればよい．

(3) 行列 $A$ に対し，$A^0$，指数関数 $\exp A$ を次のように定義する．

$$A^0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \exp A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n$$

$\exp A$ を求めよ．なお，行列の無限級数の和を求めるためには，各成分ごとに無限級数の和を求めればよい．

(岩手大 1998)　　(m19980311)

**0.12** $n$ 次元における半径 $r$ の “球” の “体積” を考えましょう．3 次元においては半径 $r$ の球の体積は，原点から距離 $r$ 以内の長さにある部分の体積です．3 次元以外でも同様に考えてみましょう．例えば，1 次元における半径 $r$ の “球” の “体積” は，原点から距離 $r$ 以内の部分の長さと考えるのが自然であり，2 次元における半径 $r$ の “球” の “体積” は，原点から距離 $r$ 以内の部分の面積と考えるのが自然ですね．

(1) では 4 次元において，「半径 $r$ の “球” の “体積”」を自分で定義して，それを具体的に求めてください．答えが一意的に決まるとは限りません．自由に発想して下さい．また，計算が最後まで終了しなくても，自分で考えた事・アイディアなど，自由に述べてください．

(2) さらに一般に，任意の正整数次元 $n$ でも同様に考えてください．

(お茶の水女子大 1998)　　(m19980601)

**0.13** $m$ と $n$ を整数として以下の定積分を考えましょう.

$$I(m,n) = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\cos(nx)dx,$$

$$J(m,n) = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)dx,$$

$$K(m,n) = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)dx,$$

(1) 任意の $m,n$ に対して $I(m,n)$ を求めてください.

(2) $m$ と $n$ が異なるときに, $J(m,n), K(m,n)$ を求めてください.

(3) 周期 $2\pi$ の関数 $f(x)$ を三角関数で次のように展開します:

$$f(x) = c_0 + c_1\cos(x) + c_2\cos(2x) + c_3\cos(3x) + \cdots + a_1\sin(x) + a_2\sin(2x) + \cdots$$

このとき, 係数 $c_1, a_2$ を求めてください.

(お茶の水女子大 1998) (m19980602)

**0.14** (1) 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

の一般解を, $b^2 - \omega^2 \leq 0$ の場合について求めよ.

(2) 上式を, 初期条件 $t=0$ で $x=0$, $\dfrac{dx}{dt}=1$ のもとに解き, $b>0$ の時の解の特徴を表す概略グラフを描け.

(東京大 1998) (m19980701)

**0.15** $x$-$y$ 平面上を, ある一つの点が移動している.

時刻 $t=i$ ( $i$ は整数) におけるこの点の位置を $\mathbf{p}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ と表すとき,

$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 50 \\ 35 \end{pmatrix}$ であった.

また, $\mathbf{p}_{i+1} = A\mathbf{p}_i$ ( $A$ は行列 ) に従っているものとする.

(1) 行列 $A$ を求めよ.

(2) $A^n$ を求め, 時刻 $t=n$ ( $n$ は整数 ) におけるこの点の位置 $\mathbf{p}_n$ を求めよ.

(東京大 1998) (m19980702)

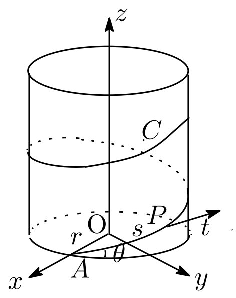
**0.16** 半径 $r$ の円柱の表面に底面と一定の角度 $\theta$ をなすらせん(螺旋)曲線 $C$ がある. 直交座標系 $O$–$xyz$ を図に示すようにとる. また, 円柱の表面と $x$ 軸との交点 $A$ を曲線 $C$ が通るとする. 以下の各問に答えよ.

(1) 点 $A$ からのらせん曲線の長さを $s$ とするとき, らせん上の任意の点 $P$ の直交座標系 $O$–$xyz$ での位置 $\mathbf{r}_p$ を $s$ の関数として表せ.

(2) $\mathbf{t}$ を点 $P$ において曲線 $C$ に接する長さ 1 の接線ベクトルとする. $\mathbf{t}$ を $s$ の関数として表せ. ただし, $\mathbf{t}$ の方向は $s$ が増加する向きを正ととることとする.

(3) $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$ と $\mathbf{t}$ とは直交することを示せ.

(4) 点 $P$ における曲線 $C$ の曲率 $k$ は, $k = \left|\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}\right|$ によって表される. $k$ を $\theta$ の関数としてグラフに表せ. ただし, $0 \leq \theta \leq \pi$ とする.




(東京大 1998）　　(m19980703)

**0.17** (1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx$ を求めよ．なお計算過程も示せ．ただし，$m, n$ は $m, n > 0$ の整数とする．

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx$ を求めよ．なお計算過程も示せ．ただし，$m, n$ は $m, n > 0$ の整数とする．

(3) フーリエ級数 $f(x) \approx \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$ について，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[{a_n}^2 + {b_n}^2\right]$$ を証明せよ．

(東京大 1998）　　(m19980704)

**0.18** 原点 $O$ から出発して数直線上を動く点 $P$ がある．点 $P$ は硬貨を投げて表が出たら $+m$ ，裏が出たら $-n$ だけ移動する．硬貨は $k$ 回投げるとする．

(1) $m = 4$ ，$n = 2$ ，$k = 6$ のとき，下記の値を求めよ．

(a) 点 $P$ の座標が原点である確率．

(b) 点 $P$ の座標の期待値．

(2) $m = n = 1$ ，$k = 5$ のとき，下記の値を求めよ．

(a) 点 $P$ の座標の期待値，および点 $P$ がその期待値の座標に在る確率．

(b) 原点から点 $P$ までの距離の期待値．

(c) 「点 $P$ が負の座標に移動すれば，点 $P$ は原点に戻りそこで終了する．」というルールを付加した場合，点 $P$ の座標の期待値．

(東京大 1998）　　(m19980705)

**0.19** $(x, y)$ 平面内の領域 $D = \{\, 0 \leqq y \leqq x \leqq 1 \,\}$ における重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{2x^2 - y^2}\, dx\, dy$ を計算せよ．

(東京工業大 1998）　　(m19980801)

**0.20** 微分方程式 $(*)$ $\dfrac{dy}{dx} = y + xy^2$ を考える．

(1) $z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$ は どんな微分方程式を満たすか．

(2) $(*)$ の一般解を求めよ．

(東京工業大 1998）　　(m19980802)

**0.21** $A = \begin{pmatrix} -13 & 12 & 6 \\ -12 & 11 & 6 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 $P$ をみつけよ．

(2) 実直交行列 $P$ で上の性質をもつものは存在するか？　YES ならば 例をみつけよ．NO ならば その理由を記せ．

(東京工業大 1998)　(m19980803)

**0.22** $\mathbf{0}$ でない どんな実ベクトル $(x,y,z)$ に対しても

$$(x,y,z)\begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ a & 1 & a \\ -a & a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} > 0$$

となるのは，$a$ が どんな実数のときか．

(東京工業大 1998)　(m19980804)

**0.23** 次の関数の極値を求めよ．　$f(x,y)=(ax^2+by^2)e^{-x^2-y^2}\quad(a>b>0)$

(電気通信大 1998)　(m19981001)

**0.24** 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_y^1 e^{-x^2}\,dx\right)dy$

(2) $\displaystyle\iint_D (x-y)\sin(x+y)\,dx\,dy,\quad D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : 0\leqq x-y\leqq\pi,\ 0\leqq x+y\leqq\pi\}$

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2},\quad D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ 1\leqq x^2+y^2\leqq 4\}$

(電気通信大 1998)　(m19981002)

**0.25** 次の連立方程式を解け．

(1) $\begin{cases} x+y+z+w=6 \\ 2x+2y+z+w=8 \\ -x-2y+2z+w=3 \\ x+y+2z-2w=0 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=a \\ ax+y+z=a^2 \end{cases}$

(電気通信大 1998)　(m19981003)

**0.26** 行列

$$A=\begin{pmatrix} a & -a & a & -a \\ -a & 1 & -a & 1 \\ a & -1 & a^2 & -1 \\ -a & 1 & -a^2 & -a \end{pmatrix}$$

について次の問いに答えよ．

(1) $\det A$ を求めよ．

(2) $A^{-1}$ が存在するための条件を求めよ．

(3) $\operatorname{rank} A=3$ である条件を述べよ．

(4) (3) の条件がなりたつとき $A$ によってきまる線形変換の核の基底を示せ．

(電気通信大 1998)　(m19981004)

**0.27** $C_r$ は円 $z=re^{i\theta},\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi$ を正の向きに一周するものとする．次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{C_1}\frac{1}{z(z-\pi)}dz$　(2) $\displaystyle\int_{C_4}\frac{1}{z(z-\pi)}dz$

(3) $\displaystyle\int_{C_1}\frac{\cos z}{z(z-\pi)}dz$　(4) $\displaystyle\int_{C_4}\frac{\cos z}{z(z-\pi)}dz$

(電気通信大 1998)　(m19981005)

**0.28** 次の微分方程式について答えよ.

$$\frac{dx}{dt} + \lambda x = f(t)$$

但し, $t = 0$ のとき $x = a$ であり, また $\lambda$ は実の定数とする.

(1) この方程式の一般解を求めよ.

(2) 関数 $f(t)$ が $\sin t$ である時の解を求めよ.

(3) この解が周期関数となるための条件を求めよ.

(横浜国立大 1998) (m19981101)

**0.29** (1) 次の行列 $A$ の固有値を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 上の行列 $A$ の各固有値に対する固有空間の正規直交基底を求めよ.

(横浜国立大 1998) (m19981102)

**0.30** (1) 次の等式を証明せよ.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

ただし, $n$ は自然数とする.

(2) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$$

(千葉大 1998) (m19981201)

**0.31** 次の積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

(千葉大 1998) (m19981202)

**0.32** 次の線形微分方程式の解 $y = y(x)$ を求めよ.

$$\frac{d}{dx}y(x) + 2y(x) = x\ ,\ y(0) = 1$$

(注) $w(x) = e^{2x}y(x)$ とおき, $w$ に関する微分方程式を考えよ.

(千葉大 1998) (m19981203)

**0.33** (1) 下記に与えられた行列 $A$ に対して, 行および列に関する基本変形を何回か施すことによって, 次の標準形 $I$ に変形されることを示せ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) (1) と関連して, 次の関係式 : $PAQ = I$ が成り立つような正則 3 次正方行列 $P$ と正則 4 次正方行列 $Q$ を求めよ.

(注) 行に関する基本変形とは (I) 一つの行を $k$ 倍する $(k \neq 0)$ ; (II) 一つの行に他の一つの行の $k$ 倍を加える $(k \neq 0)$ ; (III) 一つの行と他の行とを交換する, という変形の総称. 列についても同様.

(千葉大 1998) (m19981204)

**0.34** $\dfrac{1}{\cos x - \sin x}$ を積分せよ．

（筑波大 1998） (m19981301)

**0.35** $f(x,y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ で $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

（筑波大 1998） (m19981302)

**0.36** $\omega$ は 1 の立方根で $\omega \neq 1$ であるとする．

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega & \omega^2 & \omega^3 & 1 \\ \omega^2 & \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^3 & 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix} = \pm 3\sqrt{3}i$$ を証明せよ．

（筑波大 1998） (m19981303)

**0.37** $D$ を $xy$ 平面上の領域とするとき，曲面 $z = f(x,y)$ $\big((x,y) \in D\big)$ の面積は

$$\iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\ dxdy$$

で表される．このことを用いて半径 $R$ の球の表面積の公式を導け．

（埼玉大 1998） (m19981401)

**0.38** (1) $n$ 次正方行列 $A$ について， $A$ の固有値，固有ベクトルの定義を述べよ．

(2) $B$ は 3 行 3 列の行列で，次の (a)(b)(c) を満たしている．

(a) $B$ の固有値は 1 と 2 である．

(b) $B$ の 1 に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ がとれる．

(c) $B$ の 2 に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ がとれる．

上の条件 (a)(b)(c) を満たす行列 $B$ を求めよ．

（埼玉大 1998） (m19981402)

**0.39** (1) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^3$ を展開せよ．

(2) $1 + 2 + \cdots + 999 + 1000$ は次のどれに最も近いか．

(a) 100,000 (b) 500,000 (c) 1,000,000 (d) 5,000,000 (e) 10,000,000

(3) $0, 1, 2, 3, 4$ の 5 個の数字の中から異なる 3 個の数字を用いて作られる 3 桁の整数のうち，奇数はいくつあるか．

(図書館情報大 1998) (m19981601)

**0.40** アミダくじは図 1 のように何本かの縦線とそれをつなぐ横線からできており，縦線の上端から出発して下端に到着するまでをたどる．たどる道筋は：

- 縦線に沿って下に進み，
- 横線との分岐点にであったらその横線に沿って進み，
- 横線が縦線に出会ったところで再び下に進む．

これを下端に到着するまで繰り返す．

縦線には左から順に番号をふり,「縦線 $i$ 」という呼び方で左から $i$ 本目の縦線を指す ( $i=1,2,\cdots,n$ : $n$ は縦線の本数 ). 図 1 の上端に記したのがこの番号である. また下端の番号は, 上端の同じ番号から出発した道筋の到着先を表している. 例として, 図の点線は番号 3 のたどる道筋を示している.

図 2 の (a) のように, 縦線と横線の交点は必ず $T$ 字型で, (b) のように十字で交わったり, 横線が途中で途切れたりすることはない. また普通のアミダくじでは, 横線は (c) のように縦線を飛び越えたり, (d) のように斜めになったりすることは許されず, 隣り合った縦線を水平につなぐだけである. これらの条件を満たすものを「正しい横線」と呼ぶ.

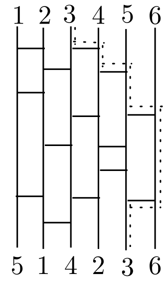



図 1

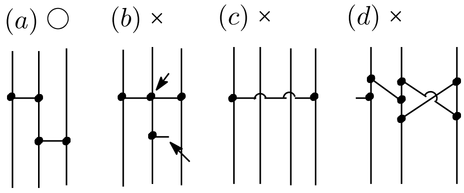
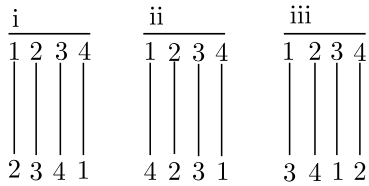



図 2

(1) 次のそれぞれについて,(正しい) 横線を適当にいれて, 上端・下端の同じ番号が道筋で結ばれるアミダくじを作れ.




(2) 縦線 $i$ から出発した道筋が縦線 $j$ に到着することは,「 $j=f(i)$ 」という関数関係として表せる. $f$ をそのアミダくじの「表現関数」と呼ぶ. 図 1 では縦線 3 からの道筋は縦線 5 に到着するから $f(3)=5$ であり, $f$ 全体は次のようになる.

$$f(1)=2, \quad f(2)=4, \quad f(3)=5, \quad f(4)=3, \quad f(5)=1, \quad f(6)=6$$

縦線が $n$ 本で縦線 $a, a+1$ をつなぐ横線が 1 本あるだけのアミダくじの表現関数 $f_1$ を答えよ. またその横線より下に, 縦線 $b, b+1$ をつなぐ横線を追加したアミダくじの表現関数 $f_2$ を, $b=a, a-1, a+1$ , それ以外の場合に分けて答えよ.

(3) さらに一般に, 2 つのアミダくじ $A, B$ について, $A$ の下端を $B$ の上端につなぐと新しいアミダくじ $AB$ ができる. それぞれの表現関数を $f_A, f_B, f_{AB}$ とするとき, $f_{AB}(i)$ を $f_A, f_B$ を使って表せ.

(4) 図 2(c) のような縦線を飛び越える横線は, 正しい横線を何本か組み合わせることによって同じ働きを実現できる. 問 (1) の結果を参考に, その実現方法を述べよ.

(5) 下端に $1,2,\cdots,n$ をどのような順番に並べても, それを実現するアミダくじが必ず作れることを示せ.

(図書館情報大 1998) (m19981602)

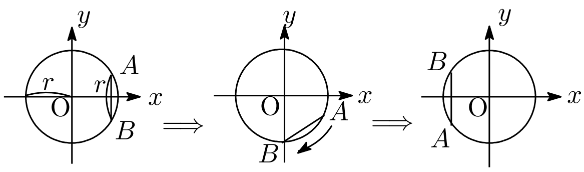
**0.41** 関数 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+x^2-2x}{x^{2n}+1}$ について,

(1) $f(-1), f(0), f(1)$ の値を求めよ.

(2) $y=f(x)$ のグラフを描け.

(図書館情報大 1998) (m19981603)

**0.42** 原点を中心とする半径 $r(r>0)$ の円の円周に両端が接する長さ $r$ の線分 $AB$ がある. 図のように $AB$ がはじめ $y$ 軸と平行に置かれ, 線分の両端を円に接したまま時計回りの方向に再び $y$ 軸と平行になるまで移動する. このとき次の問に答えよ.




(1)　線分 $AB$ が通る領域を図示し，その面積を求めよ．

(2)　(1) の図形を $y$ 軸を中心として回転してできる立体の体積を求めよ．

(図書館情報大 1998)　　(m19981604)

**0.43**　次のような行列 $A$ と $B$ がある．

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

今，成分が整数からなる $2\times\ 2$ の行列 $C$ と次のような関係がある．

$$CAC^{-1}=B$$

(1)　行列 $C$ の成分を

$$C=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とした場合，$a,b,c,d$ の間にはどのような関係があるか．

(2)　その関係を満たす行列 $C$ の一般形を求めよ．

(3)　$C$ の逆行列 $C^{-1}$ を求めよ．

(図書館情報大 1998)　　(m19981605)

**0.44**　$D=\{(x,y)\mid y\geqq 0\ ,\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq\dfrac{2x}{a}\}$ のとき，
次の 2 重積分の値を求めよ．ただし，$a$ , $b$ は正の定数とする．

$$\iint_D y\,dx\,dy$$

(茨城大 1998)　　(m19981701)

**0.45**　次の微分方程式を解け．

$$y''+2y'+10y=e^{-t}\sin t\ ,\ \ y(0)=1\ ,\ y'(0)=0$$

(茨城大 1998)　　(m19981702)

**0.46**　次に与える行列の固有値，および行列式の値を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(茨城大 1998)　　(m19981703)

**0.47**　次の各問に答えよ．

(1)　複素平面で，$i$ を中心とした，原点を通る円の方程式を求めよ．

(2)　複素関数 $w=\dfrac{1}{z}$ によって，(1) で求めた円がどのような図形に移るか具体的に答えよ．

(茨城大 1998)　　(m19981704)

**0.48**　関数 $f(x) = e^x \sin(x+\alpha)$ の第 $n$ 階導関数は

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin(x + \alpha + \frac{n\pi}{4})$$

であることを証明せよ.

(信州大 1998)　　(m19981901)

**0.49**　自然数 $n$ に対して, $P_n(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n\}$ とする. このとき, $n \neq m$ に対し, 次が成立することを証明せよ.

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0$$

(信州大 1998)　　(m19981902)

**0.50**　円周 $x^2+y^2=1$ , 直線 $y=x$ 及び $y$ 軸によって囲まれた第 1 象限内の平面領域を $D$ とする. 次の 2 重積分を計算せよ.

$$\iint_D x^3 y\,dx\,dy$$

(信州大 1998)　　(m19981903)

**0.51**　(1) 次の行列式を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} {a_1}^2 & a_1 & 1 \\ {a_2}^2 & a_2 & 1 \\ {a_3}^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix}$$

(2) 1 直線上にない平面上の 3 点 $(a_1, b_1)$ , $(a_2, b_2)$ , $(a_3, b_3)$ の $x$ 座標が相異なるとき, この 3 点を通る放物線 $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ は存在し, ただ 1 つであることを証明せよ.

(信州大 1998)　　(m19981904)

**0.52**　次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{cases} 2x+y+3z+5w=3 \\ x+2y-9z-2w=6 \\ 3x+y+8z+9w=3 \\ 7x+5y \quad +13w=15 \end{cases}$$

(信州大 1998)　　(m19981905)

**0.53**　行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対し, 適当な正則行列 $P$ を求めて $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにせよ.

(信州大 1998)　　(m19981906)

**0.54**　楕円 $C$ : $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 点 $F(\sqrt{3}, 0)$ と $C$ 上の点 $P(x,y)$ を結ぶ線分 $FP$ の長さを $r$, 線分 $FP$ と $x$ 軸の正の方向とのなす角を $\theta$ とするとき

$$r = \frac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}$$

が成り立つことを示せ.

(2) 点 $F$ を通る $C$ の任意の弦 $PQ$ に対して, 線分 $FP, FQ$ の長さをそれぞれ $p, q$ とするとき, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ の値は一定であることを示せ.

(3) 点 $F$ において互いに直交する $C$ の二つの弦の長さの逆数の和は一定であることを示せ.

ここで楕円 $C$ の弦とは $C$ 上の異なる 2 点を結ぶ線分のことである.

(新潟大 1998)　　(m19982001)

**0.55** $f(x)$ はすべての実数で定義された何回でも微分可能な関数で，$f(0)=1, f'(0)=-1, f''(0)=1$ かつ相異なる実数 $u, v$ に対して等式

$$\frac{f(u)-f(v)}{u-v}=f'(\frac{u+v}{2})$$

を満たしているものとする．このとき次の問いに答えよ.

(1) 任意の実数 $x, y$ $(y \neq 0)$ に対して，

$$f(x+y)-f(x-y)=2f'(x)y$$

が成り立つことを示せ.

(2) 任意の実数 $x, y$ $(y \neq 0)$ に対して，

$$f''(x+y)=f''(x-y)$$

が成り立つことを示せ．さらに $f''(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ を求めよ.

(新潟大 1998)　　(m19982002)

**0.56** 自然対数の底を $e$ とする.

(1) 任意の正整数 $k$ に対して，$\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda}\lambda^k=0$ を証明せよ.

(2) 任意の正整数 $n$ に対して，$\displaystyle g_n(\lambda)=\int_0^\lambda x^n e^{-x}dx$ と置くとき，$g_n(\lambda)$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty} g_n(\lambda)$ を求めよ.

(新潟大 1998)　　(m19982003)

**0.57** (1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ は収束することを示せ.

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^k}{k}$ は $a \in [0,1)$ のとき収束することを示せ.

(新潟大 1998)　　(m19982004)

**0.58** $n$ を 2 以上の自然数として $n\times\ n$ 行列 $A_n=(a_{ij})$ を次で定める.

$$\begin{array}{ccll} a_{ii} & = & 1 & (i=1,2,\cdots,n) \\ a_{i,i+1} & = & 1 & (i=1,2,\cdots,n-1) \\ a_{i+1,i} & = & -1 & (i=1,2,\cdots,n-1) \\ a_{ij} & = & 0 & (|i-j|\geq 2) \end{array}$$

たとえば

$$A_5=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

である.

(1) $D_n = \det A_n$ とおく．$A_n$ の第 $n$ 列で余因子展開し，$D_n$ に関する漸化式を求めよ．

(2) $D_5$ を求めよ．

(新潟大 1998)　　(m19982005)

**0.59** (1) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ の階級 (rank) を計算せよ．

(2) 3次元ユークリッド空間内の集合

$$\left\{ x_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_i \ (i = 1, 2, 3, 4) \text{ は実数} \right\}$$

の概形を描け．

(新潟大 1998)　　(m19982006)

**0.60** 自然数 $n$ の各位の数の和を $f(n)$ とする．たとえば $f(2053) = 2 + 0 + 5 + 3 = 10$ である．次の各問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} f(n)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} f(n)$ を求めよ．

(3) $k$ を自然数とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{10^k} f(n)$ を求めよ．

(長岡技科大 1998)　　(m19982101)

**0.61** $a > b > 0$ とする．$y$ 軸上に 2 点 $A(0, a), B(0, b)$ を取り，点 $P$ が $x$ 軸の正の部分を動くとき，$\angle APB$ を最大にする $P$ の位置を求めよ．

(長岡技科大 1998)　　(m19982102)

**0.62** $f(x)$ を連続関数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\frac{d^2}{dx^2} \int_0^x (x - t) f(t) dt$ を求めよ．

(2) 次の等式が成り立つような $f(x)$ を求めよ．

$$-f(x) = x + \int_0^x (x - t) f(t) dt$$

(長岡技科大 1998)　　(m19982103)

**0.63** (1) $xy$ 平面における領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x + y \leqq 1,\ 0 \leqq x - y \leqq 1\}$ を図示せよ．

(2) (1) の $D$ に対して重積分 $\displaystyle\iint_D (x - y)\, e^{x+y}\, dxdy$ を求めよ．

(長岡技科大 1998)　　(m19982104)

**0.64** 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $A$ が正則であるための条件を求めよ．

(2) $A$ が正則であるとき，その逆行列 $A^{-1}$ を求めよ．

(長岡技科大 1998)　　(m19982105)

**0.65** 次の微分方程式を解け．

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=\cos t$$

ただし，$t=0$ のとき，$y=e^{2\pi}+e^{\pi}+0.1$ であり，$t=\pi$ のとき，$y=1.9$ である．

(岐阜大 1998) (m19982601)

**0.66** 次の連立方程式を解け． $\begin{cases} 2^{y-x+1}=8 \\ 4^x+60=4^y \end{cases}$ (豊橋技科大 1998) (m19982701)

**0.67** $\sin A+\cos A=\sqrt{2}$ のとき，$\sin A\cos A$ および $\sin^4 A+\cos^4 A$ の値を求めよ．

(豊橋技科大 1998) (m19982702)

**0.68** 以下の二つの問に答えよ．

(1) 次の３点が一直線上にあるように定数 $a$ の値を定めよ．

$(3-2a,\ 4)$，$(3,\ a)$，$(1,\ 3)$

(2) 原点を通り，上の直線に直交する直線の方程式を求めよ．

(豊橋技科大 1998) (m19982703)

**0.69** 直線上を運動する点 $P$ の出発してから $t$ 秒後の位置が，$x=e^{-\pi t}\cos\pi t$ で表されるとき，出発してから３秒後の速度を求めよ．

(豊橋技科大 1998) (m19982704)

**0.70** $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ の逆関数を求めよ．

(豊橋技科大 1998) (m19982705)

**0.71** 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

(豊橋技科大 1998) (m19982706)

**0.72** 以下の問いに答えよ．

(1) $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\,d\theta$ とする．この式の右辺に部分積分の公式を適用することにより，$n$ が２以上の整数ならば $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ なる関係が成立することを示せ．

(2) 解答用紙中に記したア〜エのうち，次の媒介変数表示で与えられる曲線 $x=a\cos^3\theta$ ， $y=a\sin^3\theta$ （ただし， $a>0$ ）の概略を描いた図として最も適当なものを選び，図の記号ア，イ，ウ，エのいずれかに○を付けよ．(図略)

(3) また，この曲線によって囲まれる図形の面積 $S$ を求めよ．なお，問 (1) で求めた関係を利用すると計算が容易になる．

(豊橋技科大 1998) (m19982707)

**0.73** $x>0$ であるとき，以下の不等式が成り立つことを示せ．ただし，log は自然対数を表す．

(1) $\log(x+1)<x$

(2) $\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-1<\displaystyle\int_0^x\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt$

(豊橋技科大 1998) (m19982708)

**0.74** 半径 $a$ の球に内接し，体積が最大になる直円柱の高さ，および直径を求めよ．

(豊橋技科大 1998)　　(m19982709)

**0.75** 以下の問に答えよ．

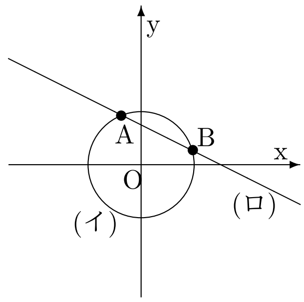
(1) 以下の式で表される円 (イ) と直線 (ロ) は交わっている．図に示すように，
円と直線の交点をそれぞれ $A$，$B$ とする．

$x^2 + y^2 = 5$ $\cdots$ （イ）

$x + 2y = 3$ $\cdots$ （ロ）

(a) 原点 $O$ から直線 (ロ) におろした垂線の長さを求めよ．

(b) 線分 $AB$ の長さを求めよ．




(2) 以下の式で表される球 (ハ) と平面 (ニ) は交わっている．

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ $\cdots$ （ハ）

$x + 2y + 3z = 7$ $\cdots$ （ニ）

(a) 原点 $O$ から平面 (ニ) におろした垂線の長さを求めよ．

(b) 平面 (ニ) と球 (ハ) が交わってできる円の面積を求めよ．

(豊橋技科大 1998）　　(m19982710)

**0.76** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ とするとき，

$A$ の転置行列 ${}^tA$ と $A^2$ および逆行列 $A^{-1}$ を求めよ．

(豊橋技科大 1998）　　(m19982711)

**0.77** 平面上で直線 $y = 3x + 2$ 上の点は，変換行列が $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ である一次変換により，どのような図形上に写像されるか答えよ．

(豊橋技科大 1998)　　(m19982712)

**0.78** (1) 親と子が各々一つずつサイコロを振り，親の出した目と同じ目を子が出せば子が勝ち，親の出した目と子の出した目が異なると親の勝ちとする．ただし，サイコロは 1 から 6 までの整数 (目) が各々 $\dfrac{1}{6}$ の確率で出るものとする．

(a) 3 回勝負し，子が勝ち越す確率を求めよ．

(b) 子が勝てば子に 1 点与えられ，親が勝てば子の点が 1 点減ぜられる．このとき，子の得る点の期待値を求めよ．

(2) 親は二つのサイコロを振り，子は一つのサイコロを振るものとする．親の出した目の少なくともどちらか一つと同じ目を子が出したときに子の勝ち，それ以外のときに親の勝ちとする．ただし，サイコロは 1 から 6 までの整数（目）が各々 $\dfrac{1}{6}$ の確率で出るものとする．

(a) 子が勝つ確率を求めよ．

(b) 子が勝てば子に 2 点与えられ，親が勝てば子の点が 1 点減ぜられる．このとき，子の得る点の期待値を求めよ．

(豊橋技科大 1998）　　(m19982713)

**0.79** 関数 $f(x) = \dfrac{x^2}{\sin x}$ に対し，$\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$ を求めよ．

(名古屋工業大 1998）　　(m19982901)

**0.80** $\sin^2 x$ の $n$ 次導関数を求めよ．

(名古屋工業大 1998) (m19982902)

**0.81** 曲面 $x^2 + y^2/4 + z^2 = 1$ 上の点 $(1/2, \sqrt{2}, 1/2)$ における接平面の方程式を求めよ．

(名古屋工業大 1998) (m19982903)

**0.82** $D = \{(x, y) : y^2 \leq x \leq y\}$ として次の積分の値を求めなさい．

$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

(名古屋工業大 1998) (m19982904)

**0.83** 関数 $f(x, y)$ が

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\ , & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0\ , & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

で与えられるとき，重積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy$$

を求めよ．

(名古屋工業大 1998) (m19982905)

**0.84** 次の行列式を求めよ．

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 1 \\ a & x & b & 1 \\ a & b & x & 1 \\ a & b & c & 1 \end{vmatrix}$$

(名古屋工業大 1998) (m19982906)

**0.85** 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して，以下の各問に答えよ．ただし，$a \geq 0$ である．

(1) $A$ の二つの固有値 $\lambda_1$ , $\lambda_2$ を求めよ．

(2) $\lambda_1$ , $\lambda_2$ にそれぞれ対応する固有ベクトル $\mathbf{x}$ , $\mathbf{y}$ のどちらにも直交するベクトルは $0$ ベクトルのみであることを示せ．

(3) 上の問 (2) における固有ベクトル $\mathbf{x}$ , $\mathbf{y}$ が互いに直交するときの $a$ の値を求めよ．

(名古屋工業大 1998) (m19982907)

**0.86** (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(2) 行列 $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 $P$ を求めよ．

(3) 二つの関数 $x(t)$ , $y(t)$ が次の微分方程式を満たすとする．

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

この時，$P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$ とおくと $\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$ はどんな微分方程式を満たすか．

(4) (3) の $X(t)$ , $Y(t)$ の微分方程式を解き $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ を求めよ．

(名古屋工業大 1998) (m19982908)

**0.87** Nim という複数個の石を２人で交互に取るという簡単なゲームがある．１回に取る石は，１～３個で最後に石を取った方が負けである．以下の問いに答えよ．

(1) 残っている石が２～４個のとき，次に石を取る方が必ず勝つ事が出来る事を示せ．

(2) 残っている石が５個の時，次に石を取らない方が必ず勝つ事が出来る事を示せ．

(3) 残っている石が６～８個の時，次に石を取る方が必ず勝つ事が出来る事を示せ．

(4) 残っている石が $4n+1$ 個の時，次に石を取らない方が必ず勝つ事が出来る事を数学的帰納法で示せ．また，それ以外の時は次に石を取る方が必ず勝つ事が出来る事を示せ．

(京都大 1998)　　(m19983301)

**0.88** 関数 $r=a(1+\cos\theta)$ が領域 $A\{-\pi \leq \theta \leq \pi\}$ で定義されている．以下の問いに答えよ．

(1) この閉曲線の長さ $L$ を求めよ．

(2) この閉曲線に囲まれた面積 $S$ を求めよ．

(京都大 1998)　　(m19983302)

**0.89** 次の微分方程式に関する問いに答えよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ を解け．

(2) 上の解で $x=0$ で $y=0$ , $\dfrac{dy}{dx}=0$ (or 0.5) のとき，曲線の概形を描け．

(京都大 1998)　　(m19983303)

**0.90** 行列 $A$ が次のように定義されている．以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $A$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) $A$ を対角化する正則行列 $P$ を求めよ．

(京都大 1998)　　(m19983304)

**0.91** $f(x)=\tan^{-1}x-\tan^{-1}\dfrac{x}{3}$ の最大値を求めよ．ただし，$\tan^{-1}$ は正接関数 $\tan$ の逆関数の主値である．

(京都工芸繊維大 1998)　　(m19983401)

**0.92** 曲線（asteroid）

$$|x|^{\frac{2}{3}}+|y|^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

（$a$ は正の定数）の長さを求めよ．

(京都工芸繊維大 1998)　　(m19983402)

**0.93** $n$ 個の実数 $a_i$ が $0<a_i<1$ $(i=1,2,\ldots,n)$ を満たしているとする．このとき

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)<\frac{1}{1+a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

が成り立つことを示せ．

(京都工芸繊維大 1998)　　(m19983403)

**0.94** 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 1998) (m19983404)

**0.95** 行列式 $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 1 & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & x & -1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 1998) (m19983405)

**0.96** $S$ は $x \geq 0$ , $y \geq 0$ , $x^2+y^2 \leq a^2$ となる領域である．ただし， $a>0$ とする．

(1) 次の関係が成り立つことを示せ．

$$\iint_S f(x)\,dx\,dy = \iint_S f(y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_S \bigl(f(x)+f(y)\bigr)\,dx\,dy$$

(2) $\displaystyle\iint_S x^4\,dx\,dy$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\iint_S x^6\,dx\,dy$ を求めよ．

(大阪大 1998） (m19983501)

**0.97** 実数値未知パラメタ $\alpha$ を含む次の連立一次方程式を考える．未知パラメタ $\alpha$ の値によって，この連立一次方程式の解の性質がどのようになるかを示せ．

$$\begin{cases} \alpha x+y-z=2 \\ 2x+y+\alpha z=1 \\ x+y-z=2 \end{cases}$$

(大阪大 1998） (m19983502)

**0.98** 二つの $n$ 次正方行列 $A$ , $B$ に対して，それらの積 $AB$ の固有値は積の順序を入れ換えた $BA$ の固有値でもあることを示せ．

(大阪大 1998） (m19983503)

**0.99** 袋の中に赤球 $x$ 個，白球 $y$ 個，青球 $z$ 個，合わせて $(x+y+z)$ 個の球が入っている．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $x=3$ , $y=2$ , $z=1$ とする．1 個ずつ 3 回球をとり出すとき，赤，白，青の順に出る確率を求めよ．ただし，とり出した球は袋に戻さないとする．

(2) $x=3$ , $y=2$ , $z=1$ とする．1 個ずつ 3 回球をとり出すとき，赤，白，青の順に出る確率を求めよ．ただし，とり出した球は 1 回ずつ袋に戻すとする．

(3) 3 球を同時にとり出すとき，赤，白，青の球が 1 個ずつである確率を $x$ , $y$ , $z$ を使って表せ．

(4) 球の総数は 100 個である．1 個ずつ 3 回球をとり出すとき，赤球，赤球以外，赤球の順に球が出る確率を最大とする $x$ , $y$ , $z$ を決定せよ．ただし，白球，青球はほぼ同程度の確率で現れ，白球の数は青球の数より少ないことはないとする．導出の過程を示すこと．

(大阪大 1998） (m19983504)

**0.100** 公式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を使って，次の (1)〜(3) を示せ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=1$

(3) $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$

（神戸大 1998） (m19983801)

**0.101** $y = \sin^{-1} x$ のとき，等式 $(1-x^2)y'' - xy' = 0$ が成り立つかどうか調べよ．

（神戸大 1998） (m19983802)

**0.102** 関数 $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)(x+2)^2}$ について，積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の値を求めよ．

（神戸大 1998） (m19983803)

**0.103** $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} |\,t\,|\,dt \quad (x \in R)$ とおくとき，次の問に答えよ．

(1) $F(x)$ を求めよ（すなわち $x$ の式で表せ）．そして，$y = F(x)$ のグラフを描け．

(2) $\dfrac{d}{dx}F(x)$ を求めよ．

(3) 実数全体 $R$ で定義された関数 $G(x)$ で 2 次導関数 $G''(x)$ はあるが 3 回は微分可能でない点があるような関数を作れ．

（神戸大 1998） (m19983804)

**0.104** $A = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$，$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき，次の (1)〜(4) に答えよ．

(1) $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ （ $n$ は任意の整数）を示せ．

(2) $AT^n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ とするとき，$0 < d_1 < |\,c_1\,|$ をみたす $n$ を求めよ．
（以下の (3)，(4) ではこの $n$ を使う）

(3) $AT^nST^m = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ とするとき，$d_2 = 0$ となる $m$ を求めよ．

(4) $A$ を $S$ と $T$ を用いて表せ．

（神戸大 1998） (m19983805)

**0.105** 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

（神戸大 1998） (m19983806)

**0.106** 次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ -1 & -5 & -3 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 9 & -2 & 8 \\ 2 & -4 & 6 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 7 & 9 & 4 \end{vmatrix}$$

（神戸大 1998） (m19983807)

**0.107** 行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ のとき，

(1) $A$ の階数を求めよ．

(2) 連立一次方程式 $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{bmatrix}$ が解を持つように $a$ を定めよ．

(3) 定めた $a$ に対して，上の連立一次方程式を解け．

(神戸大 1998)　　(m19983808)

**0.108** $f_i(x)$, $g_i(x)$, $h_i(x)$ を微分可能な関数とし，

$F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix}$ とするとき，

$$\frac{dF(x)}{dx} = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) & g_3'(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1'(x) & h_2'(x) & h_3'(x) \end{vmatrix}$$

を示しなさい．ただし，$f_i'(x)$, $g_i'(x)$, $h_i'(x)$ はそれぞれの関数の微分である．

(山口大 1998)　　(m19984301)

**0.109** $f(x) = \sin(\sin(\sin x))$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(徳島大 1998)　　(m19984401)

**0.110** 次の極限値を求めよ．(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$

(徳島大 1998)　　(m19984402)

**0.111** $g(x, y) = x^y$ $(x > 0)$ の偏導関数 $g_x(x, y)$, $g_y(x, y)$ を求めよ．

(徳島大 1998)　　(m19984403)

**0.112** 次の行列式の値を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

(徳島大 1998)　　(m19984404)

**0.113** 関数 $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^2 + 2}{x^2 + 1}$ について次の問に答えよ．

(1) $-1 < x < 1$ における $f(x)$ の最小値を求めよ．

(2) $f(x)$ は $-1 < x < 1$ では最大値を持たないことを説明せよ．

(九州大 1998)　　(m19984701)

**0.114** 不定積分 $\displaystyle\int te^{-t^2}dt$ を求めよ．

(九州大 1998)　　(m19984702)

**0.115** 次の各問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ は 2 回偏微分可能な関数とし，$f_y \neq 0$ となる点の近くで $f(x, y) = 0$ により定義される関数を $y = \varphi(x)$ とする．そのとき，

(a) $\varphi'(x)$ を $f_x, f_y$ を用いて表せ．

(b) $\varphi'(x)=0$ となる点での $\varphi''(x)$ を $f$ の 2 階までの偏微分を用いて表せ.

(2) 曲線 $C: f(x,y)=xy+y^2-x^3=0$ 上の $f_y \neq 0$ なる部分における関数 $y$ の極値を求め，極大か極小かを判定せよ.

(九州大 1998) (m19984703)

**0.116** 次の関数の極値を求めよ. $f(x,y)=x^3-6xy+8y^3$

(九州大 1998) (m19984704)

**0.117** 重積分 $\displaystyle\iint_D (y^2-x^2)e^{-(x+y)^2}\,dx\,dy$ の値を求めよ.
ただし, $D=\{\,(x,y)\mid 0\leq y-x\leq y+x<+\infty\,\}$ である.

(九州大 1998) (m19984705)

**0.118** 次の各問いに答えよ.

(1) $z(t)$ に関する微分方程式 $\dfrac{d^2z}{dt^2}+mz=0$ の一般解を求めよ．ただし，$m$ は正定数とする.

(2) 連立微分方程式 $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+2x-y=0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}-x+2y=0 \end{cases}$ の解を求めたい．そのため，この微分方程式に一次変換 $\begin{cases} x=x_1+x_2 \\ y=ax_1+bx_2 \end{cases}$ を施す．$x_1$ に関する方程式が $x_2$ を含まないように，$x_2$ に関する方程式が $x_1$ を含まないようにするための $a,\ b$ の値を求めよ．ただし，$a\neq b$ とする.

(3) $x_1, x_2$ の一般解を用いて，初期条件 $t=0$ で，$x=2,\ \dfrac{dx}{dt}=0,\ y=0,\ \dfrac{dy}{dt}=0$ のときの解 $x,\ y$ を求めよ.

(九州大 1998) (m19984706)

**0.119** 正則行列 $A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & b \end{bmatrix}$ について以下の各問いに答えよ.

(1) 行列 $A$ の逆行列 $A^{-1}$ の $(2,3)$ 要素を求めよ.

(2) 行列 $A$ の固有値を求めよ.

(3) $A^2=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \\ 0 & 2i & 0 \end{bmatrix}$ を満たす $a,b,c$ の各値を求めよ．ただし，$i$ は虚数単位を表す.

(4) $A^n(2,2)+A^n(3,2)$ を $n,b,c$ を用いて表せ．ただし，$A^n(i,j)$ は行列 $A^n$ の $(i,j)$ 要素を表し，$n$ は 1 以上の整数とする.

(九州大 1998) (m19984707)

**0.120** $a_1$ , $a_2$ , $a_3$ は一次独立なベクトルとする.

(1) 次は一次独立であるか.

(a) $b_1=a_1+a_3$ , $b_2=-a_1+a_2-2a_3$ , $b_3=2a_1+a_2+a_3$

(b) $c_1=a_1+a_2+a_3$ , $c_2=a_1-2a_2+a_3$ , $c_3=a_1+a_2-a_3$

(2) $a_1$ , $a_2$ , $a_3$ を正規直交基底とするとき，(1) の (a) で与えられる $b_1$ , $b_2$ , $b_3$ によって張られる空間 $W$ の正規直交基底を $a_1$ , $a_2$ , $a_3$ を用いてつくれ.

(九州大 1998) (m19984708)

**0.121** 次の $4 \times 4$ 型行列 $A$ と，$\mathbf{R}^4$ のベクトル $\mathbf{x}$ , $\mathbf{0}$ について，以下の問に答えよ．ただし，行列 $A$ の成分 $a$ は実数の定数である．

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) $A$ の行列式を求めよ．

(2) $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ , $x_4$ を未知数とする方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が自明でない解を持つための $a$ の条件を求めよ．

(3) 次の集合は $\mathbf{R}^4$ の部分線形空間となることを証明せよ．

$$V = \{ \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \} \ , \quad W = \{ A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 \}$$

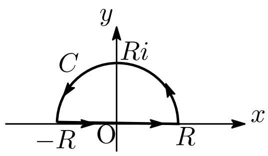
(九州大 1998） (m19984709)

**0.122** 次の各問に答えよ．

(1) 次の問に答えよ．

(a) $z^4 + \alpha^2 = 0$ を満たす複素数 $z$ を求めよ．ただし，$\alpha > 0$ とする．

(b) 積分 $\displaystyle\int_C \frac{z^4}{1+z^4} dz$ の値を求めよ．ただし，$C$ は図のような線分と半円をつないだ曲線であり，$R > 1$ とする．




(2) $u(x, y) = x^2 + \alpha xy + \beta y^2$ とする．複素平面全体で正則関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が存在する条件を示し，そのときの $v(x, y)$ を求めよ．ただし，$i$ は虚数単位であり，$z = x + yi$，また，$\alpha, \beta$ は定数とする．

(九州大 1998) (m19984710)