作成責任者：軽井沢数学 IC 数学教育研究所 所長 碓氷長 (91 歳)

0.1 次の計算をせよ．ただし，log は自然対数を，e はその底を表す．

(1) $\dfrac{d}{dx}e^{x^2}$ (2) $\dfrac{d}{dx}\log(\log x)$

（お茶の水女子大 2000） (m20000601)

0.2 $f(x)$ は有界な 3 階導関数を持つ関数とする．$h>0$ が小さいとき, 差分商

$$\frac{af(x)+bf(x+h)+cf(x+2h)}{h}$$

が一階導関数 $f'(x)$ を最も良く近似するように実定数 a,b,c を決定せよ．

（お茶の水女子大 2000） (m20000602)

0.3 平均値の定理は次のように書くことができる．

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\theta h), \quad 0<\theta<1$$

次の各関数に対して θ を x と h の関数として表せ.

(1) $f(x)=x^2$ (2) $f(x)=x^3$ (3) $f(x)=e^x$ (4) $f(x)=\log x\ (x>0)$

$x\neq 0$ で固定したときに各関数について，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\theta$ を求めよ．

一般に $f(x)$ が C^2 級の関数で $f''(x)\neq 0$ のとき $\displaystyle\lim_{h\to 0}\theta$ の値は定まるかどうか調べよ．

（お茶の水女子大 2000） (m20000603)

0.4 次の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty x^3e^{-x}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos x}$

（お茶の水女子大 2000） (m20000604)

0.5 ガンマ関数 $\Gamma(s)$ を次の積分で定義する．但し，$s>0$ とする．

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}\exp(-x)dx$$

(1) $\Gamma(1)$ を求めよ．

(2) 次の関係式を示せ.

$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$

（お茶の水女子大 2000） (m20000605)

0.6 (1) 関数 $\sin x$, $\sin^2 x$ および $x^2-\sin^2 x$ の原点における Taylor 展開を 4 次の項まで示せ．ただし，$\sin^2 x$ は $(\sin x)^2$ の意味である．

(2) 必要なら上の計算を利用して，不定形の極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$ を計算せよ．

（お茶の水女子大 2000） (m20000606)

0.7 (1) 次の展開式を簡単に示せ．

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\cdots$$

(2) 次の無限級数の値を求めよ.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$$

（お茶の水女子大 2000） (m20000607)

0.8 次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D \sqrt{x}dxdy, \qquad D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq x\}$$

（お茶の水女子大 2000） (m20000608)

0.9 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\omega^2u=0$$

（お茶の水女子大 2000） (m20000609)

0.10 (1) 4 次元の実数ベクトル空間 R^4 のベクトル

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix}$$

の中に一次独立なものは何本あるか？

(2) 上のベクトルが張る R^4 の線形部分空間に対する直交補空間を示せ．ただし，内積は通常のユークリッド内積とする.

（お茶の水女子大 2000） (m20000610)

0.11 a を $0\leq a\leq 1$ なる実定数とする． 2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix}1-a & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}$ に対して，A^n を計算し，その $n\to\infty$ における極限を示せ.

（お茶の水女子大 2000） (m20000611)

0.12 実数を成分とする 2 × 2 行列 A に対し，その転置行列 ${}^tA$ を右から掛けると，

$$A\cdot {}^tA$$

が単位行列になるという.

(1) A はどんな行列か.

(2) 平面上の点 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ に対し $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ はどんな点になるか，位置関係を図形的に説明せよ.

（お茶の水女子大 2000） (m20000612)

0.13 次の連立一次方程式の解空間を <u>実数の範囲で</u>求め，その次元を示せ．またその幾何学的意味を述べよ.

$$x+2y+3z=0, \quad 3x+z=0, \quad x-y-z=0$$

（お茶の水女子大 2000） (m20000613)

0.14 (1) 次の対称行列の固有値と固有ベクトルを全て求めよ.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & 3\end{pmatrix}$$

(2) n 行 n 列の実対称行列 A の，n 個の固有ベクトル $b_1, \cdots, b_n$ が，全て求まったとしよう．ベクトル $b_1, \cdots, b_n$ はそれぞれ列ベクトルとし，互いに直交するように取った．次に，列ベクトル $b_1, \cdots, b_n$ を横に並べて作った，n 行 n 列の行列を B としよう．即ち，$B = (b_1, \cdots, b_n)$．このとき，行列の積 $B^T AB$ は対角行列であることを証明せよ．但し，B^T は B の転置行列を表すものとする．

（お茶の水女子大 2000）　　(m20000614)

0.15 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって表される線型写像 $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ を考える．

(1) 空間 $\mathbf{R}^3$ の中の平面 $x - 3y - 2z = 0$ をパラメーターを使って表せ．

(2) (1) の平面はこの線型写像で何に写されるか．

(3) この線型写像で $\mathbf{R}^2$ 内の直線 $2x + 5y = 0$ に写ってくるもとの空間 $\mathbf{R}^3$ の図形（すなわち原像）を求めよ．

（お茶の水女子大 2000）　　(m20000615)

0.16 3 次方程式 $z^3 = 1$ の三つの相異なる解を α, β, γ とする．n を自然数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) α, β, γ を求めよ．

(2) $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ の値は，n が 3 の倍数のとき 3，それ以外のとき 0 になることを示せ．

(東京大 2000)　　(m20000701)

0.17 曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ を S とする．S に $(\pm\ 1, \pm\ 1, \pm\ 1)$ で内接する立方体を U とする．ただし，符号はすべての組み合わせをとる．曲面 S で囲まれた領域から立方体 U を除いた領域を V とする．領域 V に対する積分

$$I = \int_V (x^2 + 2y^2 + 3z^2)dx\,dy\,dz$$

を求めたい．以下の問いに答えよ．

(1) 立方体 U に対する積分

$$J = \int_U (x^2 + 2y^2 + 3z^2)dx\,dy\,dz$$

を求めよ．

(2) 球 $W : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ に対する積分

$$K = \int_W (x^2 + y^2 + z^2)dx\,dy\,dz$$

を極座標 $(x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta)$ を用いて求めよ．体積素片に対して，$dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$ が成立することを利用してよい．

(3) 上の (1) と (2) を利用して，積分 I を求めよ．

(東京大 2000)　　(m20000702)

0.18 次の連立常微分方程式を解け．ただし，$t = 0$ において $x = 1, y = 0$ とする．

$$\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = x \\ \dfrac{dx}{dt} + 2\dfrac{dy}{dt} = y \end{cases}$$

(東京大 2000)　　(m20000703)

0.19 A を 2 次の正方行列とする．A の行列式を $|A|$ で表し，また，その対角成分の和を $\mathrm{tr}(A)$ で表す．さらに A の固有値を λ_1, λ_2 とする．以下の問いに答えよ．

(1) 特性多項式は $\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + |A|$ であることを示せ．

(2) $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$, $|A| = \lambda_1\lambda_2$ であることを示せ．

(3) $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + |A|E = O$ を示せ．ただし，E は単位行列で，O は零行列である．

(4) (3) の結果を用いて，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき，$n \geq 2$ に対して，次の関係が成り立つことを証明せよ．

$$A^n = \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1}A + \frac{\lambda_1^n\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_1}E$$

(東京大 2000)　　(m20000704)

0.20 極座標 (r, θ) で表せる 2 次元領域 $r > 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$ で

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \qquad \text{(i)}$$

を満たし，境界条件

$$u(1, \theta) = \cos 3\theta \quad 0 \leq \theta < 2\pi \qquad \text{(ii)}$$

$$\lim_{r \to \infty} u(r, \theta) = 0 \quad 0 \leq \theta < 2\pi \qquad \text{(iii)}$$

を満たす解 $u(r, \theta)$ を以下の手順で求めよ．

(1) (i) の解として $u(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ と表せるものを考える．これを (i) に代入し，左辺が r のみの関数，右辺が θ のみの関数であるような式を導け．

(2) この式が上記の 2 次元領域に対応する任意の (r, θ) に対して成立するためにはその両辺は r , θ によらない定数でなくてはならない．そこで，この定数を c として f の r に関する微分方程式と g の θ に関する微分方程式を導け．

(3) m を整数として $f(r) = r^m$ とおき，定数 c を m で表せ．次に，これを g の θ に関する微分方程式に代入し，(i) の解で，$u_m(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ の形のものを求めよ．

(4) d_m を定数として，(i) の解で $u(r, \theta) = \sum_m d_m u_m(r, \theta)$ の形の解を考え，それが境界条件 (ii),(iii) をみたすようにして求める解 $u(r, \theta)$ 定めよ．

(東京大 2000)　　(m20000705)

0.21 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を $f(x, y) = (x + y)\, e^{-(x^2+y^2)}$ で定義する．

(1) f は $\mathbf{R}^2$ において最大値，最小値をもつことを示せ．

(2) f の最大値，最小値とそれらを与える点を求めよ．

(東京工業大 2000)　　(m20000801)

0.22 極座標系で表された半直線

$\theta = \alpha$,　$\theta = \beta$　$(0 \leqq \alpha < \beta < 2\pi)$

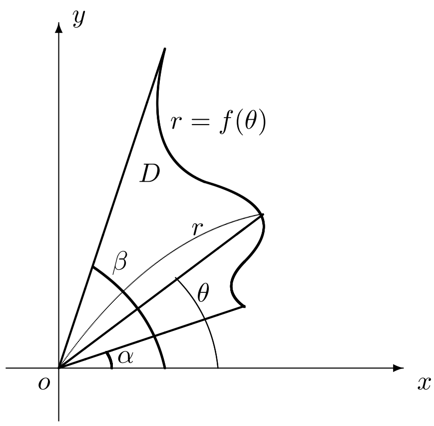
および，連続曲線

$r = f(\theta)$　$(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$

で囲まれた閉領域 D の面積は

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2 d\theta$$

で与えられることを示せ．



(東京工業大 2000)　　(m20000802)

0.23 n を奇数とする，n 次正方行列 B が ${}^tB = -B$ を満たすならば，B は正則行列ではないことを証明せよ．ただし，${}^tB$ は B の転置行列を表すものとする．

(東京工業大 2000） (m20000803)

0.24 $A = \begin{pmatrix} -13 & 12 & 6 \\ -12 & 11 & 6 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ に対し $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を求めよ．

(東京工業大 2000） (m20000804)

0.25 (1) 同じ数字を 3 個並べてできる 10 進 3 桁の整数（例えば，444,　555　など）は 3 で割りきれることを証明せよ．

（a を任意の数字とするとき，$aaa = a \times\ (10^2 + 10^1 + 10^0)$ と表せることに注意せよ．）

(2) 同じ数字を 3^2 個並べてできる 10 進 3^2 桁の整数は 3^2 で割りきれることを証明せよ．

（$aaaaaaaaa = aaa \times\ (10^{2\,\times\,3} + 10^3 + 10^0)$ と表せることに注意せよ．）

(3) 1 以上の任意の整数 n に対して，同じ数字を 3^n 個並べてできる 10 進 3^n 桁の整数は 3^n で割りきれることを，n に関する数学的帰納法で証明せよ．

（$\underbrace{a\cdots a}_{3^{k+1}} = \underbrace{a\cdots a}_{3^k}\underbrace{a\cdots a}_{3^k}\underbrace{a\cdots a}_{3^k} = \underbrace{a\cdots a}_{3^k}\times\ x$ と表したとき，x はどのような数になるかを考えよ．）

(電気通信大 2000) (m20001001)

0.26 関数 $f(x, y) = x^2y + xy^2 + y^3 - y$ について，次の問いに答えよ．

(1) 1 階および 2 階の偏導関数 f_x，f_y，f_{xx}，f_{xy}，f_{yy} を求めよ．

(2) 連立方程式 $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ の解を求めよ．

(3) $z = f(x, y)$ の極値を求めよ．

(電気通信大 2000) (m20001002)

0.27 次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy,\quad D = \{(x, y) : y \leqq\ 3x,\ x \leqq\ 3y,\ x + y \leqq\ 4\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},\quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqq\ 1\}$

(電気通信大 2000) (m20001003)

0.28 3 次の正方行列 A について次の条件が成り立つとする．$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ は固有値 1 の固有ベクトルである．$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は固有値 -1 の固有ベクトルである．$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 0 の固有ベクトルである．このとき以下の問に答えよ．

(1) A を求めよ．

(2) A を対角化する行列 P と対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ．

(電気通信大 2000) (m20001004)

0.29 R^4 内で $a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ によって生成される部分空間 $< a_1, a_2, a_3 >$ を V とし，通常のユークリット内積に関する $< a_1 >$ の直交補空間 $< a_1 >^{\perp}$ を W とする．以下の問いに答えよ．

(1) $xa_1 + ya_2 \in W$ となるための実数 x, y に対する条件を求めよ．

(2) V の次元 $\dim V$ を求めよ．

(3) $V \cap W$ の次元 $\dim V \cap W$ と $V \cap W$ の基底の 1 つを求めよ．

(電気通信大 2000)　　(m20001005)

0.30 複素数 z の複素数値関数 $f(z) = \dfrac{z}{1+z^2}$ について次の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ のマクローリン展開とその収束半径を求めよ．

(2) $f(z)$ の $\{z : 0 < |z - i| < 2\}$ におけるローラン展開を求めよ．

(3) i を中心とし，半径 1 の円を正の向きに一周する曲線 C に沿っての $f(z)$ の積分を求めよ．

(電気通信大 2000)　　(m20001006)

0.31 a を正の実数とするとき，実数 x, y の関数 $u = e^{-ax}\sin(2y)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 u が，すべての x, y について $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ を満たすように，正数 a の値を定めよ．

(2) a を (1) で定めた定数とし，u を実部にもつ $z = x + iy$ の正則関数 $f(z)$ を求めよ.（ひとつ求まればよいものとする．答えは z の式で表すこと.）

(電気通信大 2000)　　(m20001007)

0.32 確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ が独立で，いずれも正規分布 $N(n_1, {\sigma_1}^2)$ に従う．確率変数 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ も独立で，いずれも正規分布 $N(n_2, {\sigma_2}^2)$ に従う．また $\{X_i\}, \{Y_j\}$ も独立とする．$\{X_i\}, \{Y_j\}$ の標本平均および標本分散をそれぞれ $\overline{X}, \overline{Y}, {S_1}^2, {S_2}^2$ とする．

(1) $\overline{X} - \overline{Y}$ の分布を求めよ．

(2) $\dfrac{n_1 {S_1}^2}{{\sigma_1}^2} + \dfrac{n_2 {S_2}^2}{{\sigma_2}^2}$ の分布を求めよ．

(電気通信大 2000)　　(m20001008)

0.33 次の積分を求めよ．

(1) 不定積分　$\displaystyle\int x(\log x)^3 dx$

(2) 定積分　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$

(横浜国立大 2000)　　(m20001101)

0.34 以下の行列 A の固有値と，その固有値に対する固有空間を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(横浜国立大 2000)　　(m20001102)

0.35 無限回微分可能な関数 $f(x)$ を，定数 a の周りで Taylor 級数に展開すると，

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

となる．ただし，

$$f^{(n)}(a) = \left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right]_{x=a}$$

である．この関係を基に以下の設問に答えなさい．

(1) (a) e^x を原点 0 の周りに Taylor 級数に展開しなさい．

(b) $\cos x$ を原点 0 の周りに Taylor 級数に展開しなさい．

(c) $\sin x$ を原点 0 の周りに Taylor 級数に展開しなさい．

(2) (1) の結果を用いて，次の Euler の公式が成り立つことを示しなさい．ただし，i は虚数単位で，$i^2 = -1$ である．

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

(3) (2) の結果を基に，次の等式が成り立つことを示しなさい．

$$e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)}$$

（千葉大 2000） (m20001201)

0.36 以下の設問に答えなさい．

(1) 図 1 のように，太さの無視できる長さ a の棒 4 本で結ばれた平面上の菱形を考える．この図形の各頂点は自由に動く蝶番で結ばれている．対角線を 1 本追加して，図形を固定し，4 本の辺の囲む面積を最大にするには，どれだけの長さの対角線を付加すれば良いかを計算によって求めなさい．

ヒント：座標系を利用して，対角線の長さを頂点の座標を変数として表す．

(2) 図 2 のように，太さの無視できる長さ a の１２本で結ばれる平行六面体を考える．この物体の各頂点は自由に動く蝶番で結ばれている．この物体に対角線を付加して物体を固定したとき１２本の辺が囲む平行六面体の中の体積を最大にすることを考える．このとき，付加すべき対角線のなかで，最小の長さのものを何本付加すれば良いかを計算によって示しなさい．ただし，ある面が対角線によって固定されると，その面と平行な面も固定されることを仮定する．

ヒント：(1) の結果を利用する．

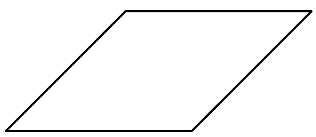


図 1

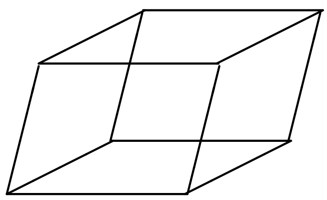


図 2

（千葉大 2000） (m20001202)

0.37 2 次元平面上の直交座標系を x, y とする．原点から点 (a, b) までの距離を r，原点と点 (a, b) を結ぶ直線と，x 軸の正の方向とがなす角度を反時計回りの弧度法で計った角度を θ とする．このとき，曲線 $r = a(1 + \cos\theta)$，$a > 0$ によって囲まれる有限の領域の重心の x 座標を求めなさい．

（千葉大 2000） (m20001203)

0.38 以下の設問に答えなさい．

(1) 次の対称行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) (1) で求めた固有値と固有ベクトルを用いて A^n を求めなさい．
ここで，A^n は $A^n = A \cdot A \cdot A \cdots A$ のように A を n 回掛け合わせることを意味する．
例えば，$A^2 = A \cdot A$，$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A \cdot A$ である．

(千葉大 2000)　　(m20001204)

0.39 実数直線 $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(t)$ が以下のように定義されているとする．

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & 1 \leq t \leq 5, \\ (t-6)^2, & 5 \leq t \leq 6. \end{cases}$$

以下の問に答えよ．

(1) 区間 $[0,6]$ 上の f のグラフを描け．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^6 f(t)dt$ を求めよ．

(3) $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)ds$ とおくとき，すべての t に対して $F(t)$ を求め，区間 $[0,6]$ 上の F のグラフを描け．

(4) 区間 $(0,6)$ 内の t に対して一階の導関数 $F'(t)$ を求めよ．

(5) 関数 $F_1(t)$ と $F_2(t)$ を以下のように定義する．

$$F_1(t) = \int_2^t f(s)ds\ ,\ F_2(t) = \int_3^t f(s)ds\ .$$

このとき，$F_1(t) - F_2(t)$ を求めよ．

(筑波大 2000)　　(m20001301)

0.40 テーラー展開を用い，$e^{iz} = \cos z + i \sin z$ の関係があることを示せ．

(筑波大 2000)　　(m20001302)

0.41 $f(x,y) = r^n$ とするとき，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を次の手順に従って求めよ．
ただし，$r = \sqrt{x^2+y^2}$，n は整数とする．
変数の組 (x,y) を $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ により，(r,θ) の組に変数変換することを考える．

(1) $\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -\dfrac{\sin\theta}{r}$ および $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$ であることを示せ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial \theta} = 0$ であることに注意し，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos^2\theta\, \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\sin^2\theta}{r}\, \frac{\partial f}{\partial r}$$

であることを示せ．
同様に，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ についても求め，整理することにより，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial f}{\partial r}\Big)$$

となる．

(3) $f(x,y) = r^n$ のとき， $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を具体的に計算せよ．

(筑波大 2000）　(m20001303)

0.42 楕円面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ について以下の問いに答えよ．

(1) 楕円面上の点 (x_0, y_0, z_0) における外向き単位法線ベクトルを求めよ．

(2) 楕円面上の点 (x_0, y_0, z_0) における接平面の方程式を求めよ．

(3) 楕円面を平面 $z = z_0$ で切断した時にできる図形が囲む部分の面積を求めよ．ただし， $-c < z_0 < c$ である．

(4) 問い (3) で得られた面積を z_0 で積分することによって楕円面で囲まれた部分の体積を計算せよ．

(筑波大 2000）　(m20001304)

0.43 X をベクトル空間とする．n 個のベクトル $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ が X で線形独立（ 1 次独立ともいう）とする．このとき，要素 $x \in X$ が $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ の線形結合（ 1 次結合ともいう）で表せるとすると，その線形結合の係数は一意に定まることを示せ．

(筑波大 2000)　(m20001305)

0.44 次の行列の逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(筑波大 2000)　(m20001306)

0.45 次の行列式を計算しなさい．

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(筑波大 2000)　(m20001307)

0.46 正方行列 A に関して，以下の問いに答えよ．

(1) $A \neq O$ であるとき， A が $A^2 = O$ を満足するなら（つまり， A がべき零行列なら）， $I + A$ は正則である（逆行列を持つ）ことを示せ．ただし，行列 O , I はそれぞれ零行列，単位行列である．

(2) A として次のような 2 行 2 列の行列を考える．

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

この行列の固有値を求めよ．ただし， a, b, c, d は一般には複素数である．

(3) (2) において， A の固有値が重根となるための条件を示し，これに対する規格化された固有関数をすべて求めよ．

(4) (2) における行列 A が，べき零行列であるための条件を求めよ．この条件と (3) の結果に基づいて， A の固有値は重根 0 となることを示し，これに対する規格化された固有関数をすべて求めよ．

(筑波大 2000)　(m20001308)

0.47　２次曲線 $-{x_1}^2+4x_1x_2+2{x_2}^2=1$ を行列で表すと

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=1\cdots(*)$$

となる．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値 $\lambda_1,\lambda_2\ (\lambda_1<\lambda_2)$ を求めよ．

(2) 固有値 λ_1,λ_2 について，それぞれの正規化された固有ベクトル $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2$ を求めよ．

(3) 行列 $P=[\,\mathbf{p}_1\ \ \mathbf{p}_2\,]$ を用いた変換

$$\mathbf{x}=P\mathbf{y}\ ,\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\ ,\quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

によって，式 $(*)$ を $y_1,y_2,\lambda_1,\lambda_2$ のみで表せ．
ヒント: P が直交行列（${}^tP=P^{-1}$，上付き添字の t は行列の転置）であることを利用する．

(4) 式 (1) で表される図形の種類は何か．

(筑波大 2000）　　(m20001309)

0.48 (1) X をベクトル空間とする．S,T を X の部分空間とする．このとき，$S\cap T$ が X の部分空間となることを示せ．

(2) X をベクトル空間とする．S,T を X の部分空間とする．このとき，$S\cup T$ は必ずしも X の部分空間とならない．そのような X,S,T の例をあげ，部分空間にならないことを示せ．

(筑波大 2000)　　(m20001310)

0.49 $\sin z=\dfrac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)$ であることを利用して，その逆関数である $\arcsin z$ が

$$\arcsin z=-i\log\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)$$

と表されることを示せ．

(筑波大 2000）　　(m20001311)

0.50 (1) サイコロを投げたとき表に出る数字を X で表現することにしよう．また，このサイコロには歪みがなく，各面が表に出る確率は同等に等しいとしよう．このとき，X が従う確率分布を記しなさい．また，X の期待値を計算しなさい．

(2) ある母集団について，分散が 4 であり，分布が正規分布に従うことが分かっているとしよう．また，この母集団から，任意抽出法によって大きさ 4 の標本 13.8, 10.6, 8.2, 11.4 を得たとしよう．このとき，信頼係数 95% の，母平均 μ の信頼区間を求めなさい．ただし，解答に際しては，標準正規分布に従う確率変数 Z に関して

$$P(Z>1.96)=0.025\ ,\ P(Z>1.64)=0.05\ ,\ P(Z>1.28)=0.10$$

が成立するという性質を用いても良い．

(筑波大 2000)　　(m20001312)

0.51 閉区間 $[0,2\pi]$ 上の関数

$$f(x)=\sqrt{1+a^2+b^2-2a\cos x-2b\sin x}$$

を考える．ただし，a,b は正の定数とする．

(1) $f(x)$ の最大値 M と最小値 m を求めよ．

(2) 関係式

$$\begin{cases} a = 1 + \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2}} \\ b = 1 + \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

があるとき，積 Mm の最大値を求めよ．

(埼玉大 2000)　　(m20001401)

0.52　$f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^2}$ とする．

(1) 正数 R に対し，次が成り立つことを示せ．

$$\int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)dx \right) dy \leqq \int_0^R \left(\int_0^R f(x,y)dx \right) dy \leqq \int_0^{\sqrt{2}R} \left(\int_0^{\sqrt{2R^2-y^2}} f(x,y)dx \right) dy$$

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_0^R \left(\int_0^R f(x,y)dx \right) dy$ の値を求めよ．

(埼玉大 2000)　　(m20001402)

0.53　３つの空間ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2a \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

が一次従属（線形従属）であるような a を求めよ．

(埼玉大 2000)　　(m20001403)

0.54　実数を成分とする m 行 n 列の行列 A の第 i 行第 j 列成分を a_{ij} で表す．

(1) A の転置行列を ${}^tA$ とするとき，行列の積 ${}^tAA$ の第 i 行第 j 列成分を求めよ．

(2) ${}^tAA$ の対角成分のすべての和が 0 であるとき，もとの行列 A はどんな行列か決定せよ．

(埼玉大 2000)　　(m20001404)

0.55　１辺の長さが６で，２本の対角線の長さが２だけ違うひし形の面積を求めよ．

(図書館情報大 2000)　　(m20001601)

0.56　(1) 辺の長さが　a　の正方形の四隅を図 (A) のように切り落としてできる正８角形の辺の長さを求めよ．

(2) 同じ正方形の各辺の中点に頂点を持つ正８角形（図 (B)）の面積は，図 (A) の正８角形の面積の何倍か．

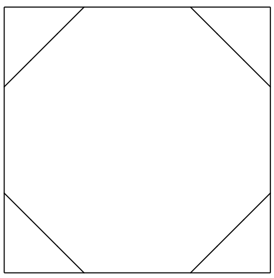


図 (A)

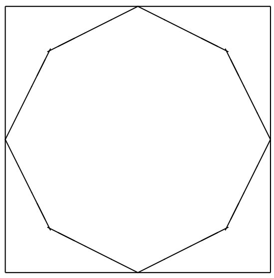


図 (B)

(図書館情報大 2000)　　(m20001602)

0.57 ２つのチームが対戦して必ず勝敗が決まる（引き分けがない）試合によって優勝者を決めるとき，以下の問に答えよ．トーナメント，リーグ戦については下の注を参照．

(1) 48 チームでトーナメントをする場合，全部で何試合行われることになるか．

(2) 48 チームでトーナメントをする場合，１回戦を戦うチームは何チームあるか．

(3) 48 チームを 6 チームずつのリーグに分けてリーグ戦を行い，各リーグの一位どうしで決勝トーナメントを行う場合，全部で何試合行われることになるか．

(4) n は自然数で，$n = 2^k$ (k は 0 以上の整数) の形には表せないとする．n チームでトーナメントをするとき，一回戦から戦うチーム数を n で表せ．ただし，通常の演算・関数記号のほか，次の関数 $f(x)$ を用いてよい．

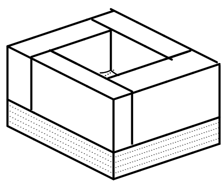
$$f(x) = [x \text{ を超えない最大の整数 }] \quad \text{例：} f(1) = 1, f(2.5) = 2, f(-2.5) = -3$$

(1) トーナメント : 勝ち抜き戦によって優勝者を決める方式で，優勝までの試合数が一番多い対戦を１回戦，以下順に２回戦，３回戦等と呼ぶ．１回戦に勝ったチームは２回戦に，２回戦に勝ったチームは３回戦に進む（以下同様）．ただし出場チームによっては１回戦は戦わず，２回戦から登場するチームもある．

(2) リーグ戦 : リーグに属するすべてのチームが互いに１回ずつ必ず対戦し，勝ち数の多い順に順位をつける．同率１位がある場合にはくじ引きなど，試合以外の方法で１位を決める．

(図書館情報大 2000)　　(m20001603)

0.58 厚さ $1\,cm$ の板で内側が縦・横・深さ $1\,cm$ のマス M_1 を作る．
同じ板を使って M_1 がぴったりと入るように M_2 をつくる．
以下同様にして $M_3, M_4, \cdots, M_k, \cdots$ を作る．



(1) M_k の容積を求めよ．

(2) マス M_k の板の部分の体積がその容積よりも初めて小さくなるときの k の値を求めよ．

(図書館情報大 2000)　　(m20001604)

0.59 １から 100 までの番号がついた空の箱が 100 個ある．これに対し：

- １回目にすべての箱に玉を１つずつ入れる．
- ２回目には $2, 4, 6, \cdots, 100$ の箱に玉を１つずつ入れる．

　$\cdots\cdots\cdots$

- n 回目には $n, 2n, 3n, \cdots, kn, \cdots$ の箱に玉を１つずつ入れる ($kn \leq 100$).

この操作を n が 100 になるまで繰り返す．このとき以下の問に答えよ．

(1) 箱 47 と箱 96 に入っている玉の数はいくつか．

(2) 玉がちょうど 9 個入っている箱をすべて答えよ．

(図書館情報大 2000)　　(m20001605)

0.60 (1) 半径 r の円盤を，円盤と同じ中心をもつ３つの同心円で切って４つの部分に分ける（一番内側は円形，他の３つはドーナツ型になる）．各部分の面積が互いに等しくなるようにするには，３つの同心円の半径をいくらにすればよいかを答えよ．

(2) 底面の半径が r，高さが h の円錐を水平に切って体積が等しい n 個の部分 ($n \geq 2$) に分けたとき，一番上の小さい円錐のすぐ下にある円錐台の厚さを求めよ．

(図書館情報大 2000)　　(m20001606)

0.61 (1) 正確に長方形の形をした土地があり，その縦・横の長さを測ったところ，小数点以下を四捨五入して $517m$ と $483m$ であった．この土地の正確な面積は何 m^2 以上，何 m^2 以下かを，小数点以下を四捨五入した整数値で答えよ．

(2) 正確に直方体の形をした箱があり，その縦・横・高さの長さをミリ単位で測ったところ，小数点以下を四捨五入して $200mm$, $300mm$, $500mm$ であった．この箱の正確な体積は何 cm^3 以上，何 cm^3 以下かを，小数点以下を四捨五入した整数値で答えよ（単位の違いに注意）．

(図書館情報大 2000)　　(m20001607)

0.62 あるバス営業所の燃料消費量は 1 年間に $R(l)$ で，消費の割合は一定である．燃料を保管するのに必要な費用は燃料の量，保管期間のそれぞれに比例し，1 l の燃料を 1 年間保管するには a 円の費用がかかる．燃料の注文は在庫がなくなったときだけ行い，注文した量に関係なく，1 回当たり b 円の費用がかかる．なお，年度の初めと終わりでの在庫量は同じとする．

(1) 毎回の注文量が一定（$x(l)$）のとき，1 年間で注文にかかる費用はいくらか．

(2) 毎回の注文量が一定（$x(l)$）のとき，1 年間で保管にかかる費用はいくらか．

(3) 毎回の注文量を一定としたとき，1 年間の注文にかかる費用と保管にかかる費用の和を最小にする注文量 $x_{\mathrm{opt}}(l)$ を求めよ．

(図書館情報大 2000)　　(m20001608)

0.63 以下の 3 次関数のグラフの概形を示せ．ただし，x 軸，y 軸との交点の座標をグラフの中に明記すること．

(1) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$　　(2) $y = -x^3 - x^2 - x - 1$　　(3) $y = x^3 - 7x - 6$

(図書館情報大 2000)　　(m20001609)

0.64 2 つの放物線 $y = x^2$ と $x = 8y^2$ の交点を求めよ．また，その 2 つの放物線に囲まれた部分の面積を求めよ．

(図書館情報大 2000)　　(m20001610)

0.65 以下の値を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と，最小固有値に対する固有ベクトル．

(図書館情報大 2000)　　(m20001611)

0.66 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，$f(r) = \log r$ とする．次の各問に答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \dfrac{1}{r^2}$ を示せ．

(茨城大 2000)　　(m20001701)

0.67 次の微分方程式を解け．　$y' = \dfrac{y}{x}\log\dfrac{y}{x}$

(茨城大 2000)　　(m20001702)

0.68 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ とする．次の各問に答えよ．

(1) A が正則であるための a の条件を求めよ．

(2) A が正則であるとき，A^{-1} の $(1,2)$ 成分を求めよ．

(茨城大 2000） (m20001703)

0.69 ２つの曲線

$$C_1 : z = e^{i\theta} \qquad (\,0 \leqq \theta \leqq \pi\,)$$
$$C_2 : z = \frac{3}{2}e^{i\theta} - \frac{1}{2} \qquad (\,0 \leqq \theta \leqq \pi\,)$$

が与えられているとする．次の各問に答えよ．

(1) C_1, C_2 を図示せよ．

(2) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z}dz$ を求めよ．

(3) コーシーの積分定理を使って，$\displaystyle\int_{C_2} \frac{1}{z}dz$ を求めよ．

ただし，(2) と (3) における積分路の向きは，$\theta = 0$ のときの点から $\theta = \pi$ のときの点にむかう向きを正の向きとする．

(茨城大 2000） (m20001704)

0.70 次の問いに答えよ．

(1) どんな無理数 p に対しても，有理数の列 $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n = p$ となるものが存在する．その理由を述べよ．

(2) どんな有理数 q に対しても，無理数の列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n = q$ となるものが存在する．その理由を述べよ．

(3) 関数 f を次のように定義する．

$$f(x) = \begin{cases} x & (\, x \text{ が無理数のとき }) \\ 0 & (\, x \text{ が有理数のとき }) \end{cases}$$

このとき，f の連続性を述べよ．

(新潟大 2000) (m20002001)

0.71 次の問いに答えよ．

(1) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とすると，$\sin x$, $\cos x$, dx は，それぞれ次のように t で表されることを示せ．

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{3\sin x + 4\cos x}dx$ を求めよ．

(新潟大 2000) (m20002002)

0.72 正方行列 X, Y に対して，$|XY| = |X||Y|$ が成り立つことは知っているものとする．ただし，$|*|$ は行列式を表す．A, B, C, D を n 次正方行列，I, O をそれぞれ n 次の単位行列，ゼロ行列とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 行列の積 $\begin{pmatrix} I & O \\ -C & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & B \\ C & D \end{pmatrix}$ を求めよ．

(2) $\begin{vmatrix} I & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D - CB|$ となることを示せ．

(3) A が正則（逆行列をもつこと）であるとき，次の各問いに答えよ．

(a) 次の式を満たす n 次正方行列 X を求めよ．

$$\begin{pmatrix} I & O \\ X & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

(b) さらに，$AC = CA$ ならば，

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$$

が成り立つことを示せ．

(新潟大 2000)　　(m20002003)

0.73 $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$，　$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (θ は実数) とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 行列 P の逆行列 P^{-1} 及び，行列 A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように θ $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$ の値を定めよ．

(3) 曲線 $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 2$ の概形を描け．

(新潟大 2000)　　(m20002004)

0.74 自然数 n に対して，数列の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ を n の式で表す公式を以下の手順で求める．下記の $\boxed{}$ にあてはまる数を記入せよ．

数列 a_k，b_k，c_k $(k = 1, 2, \cdots)$ を $a_k = k$，$b_k = k(k-1)$，$c_k = k(k-1)(k-2)$ と定義すると

$$b_{k+1} - b_k = \boxed{\text{ア}}\, a_k\ , \qquad c_{k+1} - c_k = \boxed{\text{イ}}\, b_k$$

である．これらの両辺を $k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について和を取り整理すると

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \boxed{\text{ウ}}\, b_{n+1}\ , \qquad \sum_{k=1}^{n} b_k = \boxed{\text{エ}}\, c_{n+1}$$

が得られる．一方，$k^2 = \boxed{\text{オ}}\, a_k + \boxed{\text{カ}}\, b_k$ と表せるので

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \boxed{\text{キ}}\, b_{n+1} + \boxed{\text{ク}}\, c_{n+1} = \boxed{\text{ケ}}\, n^3 + \boxed{\text{コ}}\, n^2 + \boxed{\text{サ}}\, n$$

である．

(長岡技科大 2000)　　(m20002101)

0.75 自然数 n について，定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} x \cos nx\, dx$ の値を求めよ．

(長岡技科大 2000)　　(m20002102)

0.76 $f(x)$ を 2 回微分可能な関数とする．関数 $u(x, y) = f(x)e^{-2y}$ が偏微分方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ を満たしているとき，$f(x)$ を求めよ．

(長岡技科大 2000)　　(m20002103)

0.77 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 AB を計算せよ．

(2) 行列式 $|A|$ を求めよ．

(3) $AX = E$ となる行列 X を求めよ．

(長岡技科大 2000)　　(m20002104)

0.78 つぼの中に赤玉 n 個，白玉 $10-n$ 個の合計 10 個の玉が入っている．このつぼから玉を 1 個取り出して色を確かめてから元に戻す試行について，以下の問いに答えよ．

(1) 1 回の試行で赤玉が取り出される確率を n で表せ．

(2) 3 回の試行で赤玉が 2 回，白玉が 1 回取り出される確率 P を n で表せ．

(3) 前問で (2) の P を最大にする n とその最大値を求めよ．

(長岡技科大 2000)　　(m20002105)

0.79 (1) マクローリンの展開

$$\sqrt{1-x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

の係数 a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ．

(2) $\sqrt{1-x} \fallingdotseq a_0 + a_1 x$ を用いて，積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - c\sin^2\theta}\, d\theta \quad (0 < c < 1)$$

の値がおよそ $\dfrac{\pi}{2}\left(1 - \dfrac{c}{4}\right)$ であることを示せ．

(金沢大 2000)　　(m20002201)

0.80 変数変換 $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ $(a, b$ は正定数$)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，(x, y) の動く領域 D を図示せよ．

(2) ヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\, dxdy$ を求めよ．

(金沢大 2000)　　(m20002202)

0.81 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) (1) で求めた各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(3) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$, $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$ となる直交行列 P と α, β, γ を求めよ．

(金沢大 2000)　　(m20002203)

0.82 直角三角形の各辺の長さをそれぞれ a, b, c (c は斜辺) として，次の問に答えよ．

(1) $a^2 + b^2 = c^2$ であることを証明せよ．

(2) $a^2 + b^2 = c^2$ を満たす整数の組 (a, b, c) を 2 つ示せ．

(3) 正の整数 n に対して，$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$ であることを証明せよ．

(4) (3) で示した結果を用いて，$a^2 + b^2 = c^2$ を満たす整数の組 (a, b, c) が無限個存在することを証明せよ．

(富山大 2000)　　(m20002301)

0.83 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(x^x\right)$　　(2) $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n x^3 e^x$

(富山大 2000)　　(m20002302)

0.84 次の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int \sqrt{3x+1}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx$

(富山大 2000)　　(m20002303)

0.85 y 軸は鉛直方向，座標軸の単位は cm であるとして，次の問に答えよ．ただし，水位とは x 軸からの水面の高さのこととする．

(1) 関数 $y = x^2$ の y 軸を回転軸としてできる回転面を内壁とする容器 A に水を注ぐ．水位が $h\ cm$ のときの水量を求めよ．

(2) 関数 $y = |x^2 - 1|$ の y 軸を回転軸としてできる回転面を内壁とする容器 B は，上げ底の器のようになる．この器に水を注いで水位が $h\ cm$ になったときの水量を求めよ．

(3) B の容器に毎秒 $V\ cm^3$ の割合で水を注いだとき，水面の上昇速度を水位 h の関数として求めよ．

(富山大 2000)　　(m20002304)

0.86 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $P(x, y)$ における接線が常に x 軸との交点 Q，y 軸との交点 R を持つとき，次の問に答えよ．

(1) P が常に線分 QR の中点であるという条件を，$y = f(x)$ に関する微分方程式で表せ．

(2) 線分 PR が常に x 軸で 2 等分されるという条件を，$y = f(x)$ に関する微分方程式で表せ．

(3) (2) の微分方程式の，点 $(1, 4)$ を通る解曲線 $y = f(x)$ を求めよ．

(富山大 2000)　　(m20002305)

0.87 次の問に答えよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$　を示せ．

(2) 連立方程式 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + az = 1 \\ x + 4y + a^2 z = 1 \end{cases}$ がただ 1 組の解 (x, y, z) を持つための a に関する必要十分条件を求め，そのときの解を求めよ．

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$ を因数分解せよ．

(富山大 2000)　　(m20002306)

0.88 次の曲線に与えられた点から引いた接線の方程式を求めなさい．

(1) $y = \log x$ ， 点 $(0, 0)$

(2) $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ ， 点 $(2, 2)$

(福井大 2000) (m20002401)

0.89 関数 $y = \dfrac{bx+1}{x^2+ax}$ が 2 つの極値 -1 および -4 を持つように a, b の値を定めなさい．

(福井大 2000) (m20002402)

0.90 区間 $0 \leq x \leq \pi/2$ において，以下の不等式が成り立つことを示せ．

$\sin x \leq x$

(福井大 2000) (m20002403)

0.91 次の関数の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}\, dx$

(2) $\displaystyle\int \log(x^2-1)\, dx$

(3) $\displaystyle\int e^x \sin x\, dx$

(4) $\displaystyle\int \sqrt{x}\log x\, dx$

(福井大 2000) (m20002404)

0.92 倒立した円錐形の容器に水を注ぐ．いま，容器の上面の半径を R cm，深さを H cm とする．水は，t 秒後には $at^2\mathrm{cm}^3/\mathrm{sec}$ の割合で注がれる．

(1) t sec 後の容器内の水面の上昇率を求めなさい．

(2) 何秒後に容器は水で満たされるか．

(福井大 2000) (m20002405)

0.93 関数 $f(X) = \sqrt{3}\sin X + \cos X$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 関数 $f(X)$ の導関数 $f'(X)$ を求めなさい．

(2) 関数 $f(X)$ の区間 $0 \leq X \leq \pi$ における最大値 f_M と最小値 f_m を求めなさい．

(3) 関数 $f(X)$ の定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(X)dX$ を求めなさい．

(4) 関数 $f(X)$ の区間 $0 \leq X \leq \pi$ でのグラフの概略を示しなさい．

(福井大 2000) (m20002406)

0.94 k を正の整数，α を複素数とするとき，微分方程式

$$x\frac{d}{dx}f(x) - \alpha\frac{d}{dx}f(x) + kf(x) = 0$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) この微分方程式を解け．

(2) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$ の値が有限となるような解 $f(x)$ をもつための， α の条件を求めよ．

(福井大 2000) (m20002407)

0.95 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x-3}$ を解け．さらに，解曲線を図示せよ．

(福井大 2000) (m20002408)

0.96 微分方程式 $x \cdot \cos\dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{dy}{dx} = -x + y \cdot \cos\dfrac{y}{x}$ を解け．

(福井大 2000) (m20002409)

0.97 ベクトル $a = \begin{pmatrix} 4 \\ 2+i \\ i \end{pmatrix}$ ， $b = \begin{pmatrix} 1+0.5i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$

であるとき，$a+b, a-b,\ (a,b), (b,a), \|a+b\|,\ \|a-b\|, \|a\|, \|b\|$ を計算し，三角不等式 ($\|(a,b)\| \leqq\ \|a\|+\|b\|$) およびシュワルツの不等式 ($|(a,b)| \leqq\ \|a\| \cdot \|b\|$) が成り立つことを示せ．

(福井大 2000) (m20002410)

0.98 ２つのベクトル $\boldsymbol{a} = (1,2,2)$ ， $\boldsymbol{b} = (2,0,-1)$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさを求めよ．

(福井大 2000) (m20002411)

0.99 ３つの点 $A(0,1,1),\ B(-1,-1,2),\ C(2,3,1)$ を頂点とする三角形 ABC の面積を求めなさい．

(福井大 2000) (m20002412)

0.100 $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}$ とするとき，$AX = B, YA = B$ を満たす行列 X, Y を求めなさい．

(福井大 2000) (m20002413)

0.101 直線が $y = x - 1$ ある．

(1) この直線を原点のまわりに角 θ ($0° \leqq \theta \leqq\ 180°$) だけ回転して得られる直線を求めなさい．

(2) この回転した直線が曲線 $x^2 - y^2 = 1$ と交わらないための角 θ の範囲を求めなさい．

(福井大 2000) (m20002414)

0.102 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式の値および固有値を求めよ．

また，この行列の対角化は可能かどうか調べよ．

(福井大 2000) (m20002415)

0.103 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ がある．

(1) 行列 A の固有値を λ とすると，λ は $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ を満たさなければならないことを示しなさい．

(2) 前問の行列 A の固有値を求めなさい．

(3) その行列 A の固有ベクトルを求めなさい．

(福井大 2000) (m20002416)

0.104 次の 2 つのベクトルがある．

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

外積 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ が $\begin{pmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ a_3b_1 - b_3a_1 \\ a_1b_2 - b_1a_2 \end{pmatrix}$ となることを誘導しなさい．

(福井大 2000)　　(m20002417)

0.105 次の複素数を極形式で表せ．ただし，$j = \sqrt{-1}$ である．

(1) $1 + j$

(2) $(1 + \sqrt{3}j)/(1 + j)$

(福井大 2000)　　(m20002418)

0.106 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

について，以下の問に答えよ．

(1) 一般解を求めよ．

(2) 初期条件

$$y(0) = \frac{1}{2}, \qquad \frac{dy}{dx}(0) = 2$$

を満たす特殊解を求めよ．

(3) 一般に，微分方程式（a, b は定数とする）

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$$

の 2 つの解を $y_1(x), y_2(x)$ とするとき，

$$f(x) = \frac{dy_1}{dx}y_2 - y_1\frac{dy_2}{dx}$$

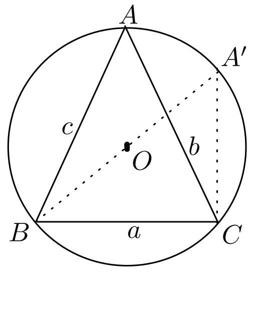
が満たす微分方程式を求めよ．また，この $f(x)$ が，ある x_0 で $f(x_0) \neq 0$ ならば，すべての x で $f(x) \neq 0$ であることを示せ．

(岐阜大 2000)　　(m20002601)

0.107 図に示す三角形 ABC の外接円の中心を O，半径を r，各辺の長さを a, b, c，各頂点の内角 $\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle ACB$ の大きさを A, B, C で表す．このとき次の問いに答えよ．

(1) 外接円の点 B を通る直径を $BA' = 2r$ とするとき，$\angle BA'C = \angle BAC$, $2\angle BAC = \angle BOC$ であることを示せ．

(2) 三角形 ABC の面積 S は，$S = \dfrac{r^2}{2}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$ と表せる．このことを，外接円の中心 O が三角形 ABC の内部にある場合について示せ．



(豊橋技科大 2000)　　(m20002701)

0.108 はじめ，容器には 10 %の食塩水が 500 g 入れてある．以下の問いに答えよ．

(1) 容器から食塩水を 100 g 取り出して捨て，次に容器に 5 %の食塩水を 100 g 入れて，よく攪拌（かくはん）するという操作を考える．この操作を n 回行ったときの容器中の食塩水の濃度を a_n %とする．a_1 を求めよ．また，a_n と a_{n+1} との間の関係式を求めよ．

(2) a_n を n を用いて表せ．また，(1) で示した操作を無限回行った極限では，容器中の食塩水の濃度はどのようになるか答えよ．

(豊橋技科大 2000)　　(m20002702)

0.109 関数 $y = -\dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) この関数のグラフの概形を書け．

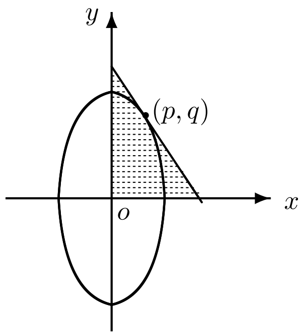
(2) この関数が描く曲線と直線 $y = mx$ とが交わるような m の範囲を求めよ．

(豊橋技科大 2000)　　(m20002703)

0.110 以下の各問いに答えよ．

(1) $4x^2 + y^2 = 4$ で表される楕円上の点 (p, q) における接線の方程式は，$4px + qy = 4$ となることを示せ．

(2) $p > 0, q > 0$ のとき，問 (1) の接線と x 軸および y 軸で囲まれる面積（下図の斜線部）を最小にしたい．この面積が最小になる楕円上の点 (p_0, q_0) を求める場合の計算方法を示し，その点 (p_0, q_0) の値を示せ．



(豊橋技科大 2000)　　(m20002704)

0.111 次の微分方程式の一般解 $y(x)$ を示せ．ただし，任意定数として新たな記号を用いた場合には，その記号が任意定数であることを明記せよ．また，$i = \sqrt{-1}$ とする．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

(豊橋技科大 2000)　　(m20002705)

0.112 次の連立一次方程式に対して，解が存在するための定数 b の条件を求めよ．また，その条件のもとで，この連立方程式を解け．

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= b \\ 2x + 3y - 2z &= 2 \\ -x - y + 5z &= 1 \end{cases}$$

(豊橋技科大 2000)　　(m20002706)

0.113 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするとき，以下の二つの問いに答えよ．

(1) ベクトル $\mathbf{d}$ をベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の 1 次結合として表せ．

(2) 一次変換 f に対して，

$$f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad f(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

であるとき，$f(\mathbf{d})$ を求めよ．

(豊橋技科大 2000)　　(m20002707)

0.114 次の対称行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．また，A を直交変換によって対角行列になおす直交行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(豊橋技科大 2000)　　(m20002708)

0.115 白球が 5 個，黒球が 3 個，赤球が 2 個入った袋がある．以下の問いに答えよ．

(1) 同時に 3 個の球を取り出すとき，次の確率を求めよ．

(a) 全ての球が同じ色である確率．

(b) 全ての球が異なる色である確率．

(2) 順番に一つずつ球を取り出すとき，次の確率を求めよ．ただし，取り出した球は袋に戻さないものとする．

(a) 1 個目に赤球，2 個目に白球が出る確率．

(b) 2 個目に黒球が出る確率．

(3) 同時に 2 個取り出すとき，赤球と白球が一つずつであれば 250 円，赤球と黒球であれば 300 円，赤球二つであれば 1100 円の賞金がもらえるとする．ただし，これ以外の組み合わせでは賞金はもらえない．このときの賞金の期待値を求めよ．

(豊橋技科大 2000)　　(m20002709)

0.116 $\tan x = t$ とするとき，$\sin 2x, \cos 2x$ を t で表わせ．次に，dx を t 及び dt で表わせ．

(名古屋大 2000)　　(m20002801)

0.117 $f(x), g(x)$ を区間 $[a, b]$ 上の連続関数とするとき，$[a, b]$ における部分積分法を $f(x), g(x)$ を用いて説明せよ．次に，$[0, 1]$ における $x\log(1+x)$ の定積分の値を求めよ．

(名古屋大 2000)　　(m20002802)

0.118 A, B, C を同じ次数の正則行列とする．このとき，それらの積 ABC は正則行列か．もし ABC が正側であれば，その逆行列は何か．

(名古屋大 2000)　　(m20002803)

0.119 次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & x & 1 & 0 \\ c & 0 & x & 1 \\ d & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

(名古屋大 2000)　　(m20002804)

0.120 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan(3x)}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} (x - \sqrt{1 + x + x^2})$

(名古屋工業大 2000)　　(m20002901)

0.121 (1) 逆三角関数 $y = \arcsin x$ (ただし，$-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$) の導関数は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

であることを示せ.

(2) 次の定積分の値を部分積分法を用いて求めよ.

$$\int_0^1 (\arcsin x)^2 dx$$

(名古屋工業大 2000)　　(m20002902)

0.122 $\Gamma(a) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx$ をガンマ関数という.

(1) $a > 0$ のとき，$\Gamma(a + 1) = a\Gamma(a)$ が成り立つことを示せ.

(2) a が自然数である時，$\Gamma(a) = (a - 1)!$ が成り立つことを示せ.

(名古屋工業大 2000)　　(m20002903)

0.123 (1) オイラーの微分方程式

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + px\frac{dy}{dx} + qy = R(x)$$

は，独立変数を $x = e^t$ によって x から t に変換すると，2 階線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (p - 1)\frac{dy}{dt} + qy = R(e^t)$$

に書き換えられることを示せ.

(2) 次のオイラーの微分方程式

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = x^2$$

の一般解を求めよ.

(名古屋工業大 2000)　　(m20002904)

0.124 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．更に，行列 ${}^tTAT$ が対角行列になるような直交行列 T を求めよ.

(名古屋工業大 2000)　　(m20002905)

0.125 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ.

(1) A の固有値，固有ベクトルを求めよ.

(2) $A = PBP^{-1}$ となるように行列 P, B を定めよ．ここで，行列 B はある実数 a, b について $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ の形となるように定めよ.

(3) A^n を求めよ.

(名古屋工業大 2000)　　(m20002906)

0.126 (1) 2 変数の関数 $f(x,y)=x^4-4x^3y+ax^2y^2+bxy^3+cy^4$ が次の 2 階偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

をみたすとき，実定数 a,b,c の値を求めよ．

(2) 上の関数 $f(x,y)$ に対して次の関係式

$$\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial y}\,,\quad \frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}$$

をみたす 2 変数の関数 $g(x,y)$ を求めよ．

(3) $w=f(x,y)+ig(x,y)$ を $z=x+iy$ を用いて表せ．ただし，i $(i^2=-1)$ は虚数単位である．

(名古屋工業大 2000) (m20002907)

0.127 2 回偏微分可能な関数 $f(x,y)$ に対して，$g(r,\theta)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ と定義する．

(1) $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ 及び $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ 及び $\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ を求めよ．

(3) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ が成り立つことを示せ．

尚，導出の過程で次の公式を用いて良い．

【公式】$z=f(x,y)$ として，関数 $x=x(u,v), y=y(u,v)$ がいずれも偏微分可能ならば，

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\quad,\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

が成り立つ．

（愛知県立大 2000） (m20003001)

0.128 微分方程式 $y''+3y'+2y=3$ の一般解を求めよ．但し，y', y'' はそれぞれ関数 $y=y(x)$ の 1 次及び 2 次の導関数とし，$y(0)=1,\ y'(0)=2$ を満たすとする．

（愛知県立大 2000） (m20003002)

0.129 $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

$c\neq 0$ に対して，次の 3 種類の行列

$P_i(c): I$ の第 i 行を c 倍した行列

$P_{ij}(c): I$ の (i,j) 成分に c を加えた行列 $(i\neq j)$

$P_{ij}: I$ の第 i 行と第 j 行を入れ換えた行列 $(i\neq j)$

を基本行列という．

(1) $P_i(c)A,\ P_{ij}(c)A,\ P_{ij}A$ はそれぞれ行列 A にどのような操作を加えたものといえるか述べよ．

(2) $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) (2) の A^{-1} を基本行列の積として表せ．

(4) (2) の A を基本行列の積として表せ．

（愛知県立大 2000） (m20003003)

0.130 確率分布が以下の (1),(2) の場合について，確率変数 X の定める分布関数 $F(x)$ と $\alpha > 0$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{F(x) - F(x-\alpha)\}\, dx = \alpha$$

が成り立つことを示せ．

(1) $P(X=0) = p > 0,\ P(X=1) = q > 0,\ p+q=1$ の場合．

(2) 確率変数 X が連続型で，密度関数 $f(x)$ をもつ場合．

（愛知県立大 2000） (m20003004)

0.131 次の行列式の値を求めよ．但し，その導出過程も書くこと．

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \end{vmatrix}$$

(京都大 2000) (m20003301)

0.132 (1) 行列 A，固有値 λ，それに対応する固有ベクトル x の間の関係式を書け．

(2) 行列 A，固有値 λ が満たすべき方程式を固有方程式という．固有方程式を書け．

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，A の固有値を求めよ．

(4) (3) の固有値に対する固有ベクトルの中で，互いに直交な単位ベクトルを求めよ．

(京都大 2000) (m20003302)

0.133 次の複素積分を行え．ただし，$i = \sqrt{-1}$（虚数単位）とする．

(1) $I = \displaystyle\int_C (z-z_0)^n dz \qquad C : |z-z_0| = r$

(2) 留数定理を用いて，次の積分を行え．

$$I_1 = \int_{C_1} \frac{3z+1}{z^2+1} dz \qquad C_1 : |z-i| = 1$$

$$I_2 = \int_{C_2} \frac{(z^2+2)^2}{(2z^2-z)(z+3)} dz \qquad C_2 : |z| = 1$$

(京都大 2000) (m20003303)

0.134 以下の設問に答えよ．

(1) 中世のフランス貴族メイは，2 個のサイコロを 24 回振って 6 のぞろ目（両方のサイコロの目が共に 6 であること）が出るかという賭けで，出る方に賭けた．彼は，次のように考えた．1 回振ったとき，6 のぞろ目が出る確率は $1/36$ なので，24 回振れば $24 \times 1/36 = 2/3$ である．しかし，彼は大損をした．正しい計算方法を示せ．

(2) 箱 A には，白球 5 個，赤球 1 個が入っている．箱 B には，白球 1 個，赤球 5 個が入っている．今，任意に箱を選び球を 1 個取り出したら赤球であった．その球を元の箱に戻し，同じ箱から球をとり出したとき，再び赤球である確率を求めよ．

(3) ある小売店では商品を A 社から 7 割，B 社から 3 割仕入れている． A 社からの納入品のうち 2 割は純毛， B 社からの納入品のうち 4 割は純毛である．その小売店で適当に純毛の品を選んだとき， A 社の品である確率はいくらか．

(京都大 2000)　　(m20003304)

0.135 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})^x$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2000)　　(m20003401)

0.136 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2000)　　(m20003402)

0.137 $x>0$ での方程式 $x\log x=1$ は唯一つの解をもち，その解は 1 と 2 の間にあることを示せ．

(京都工芸繊維大 2000)　　(m20003403)

0.138 不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x}$ を計算せよ．

(京都工芸繊維大 2000)　　(m20003404)

0.139 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2000)　　(m20003405)

0.140 関数 $f(x,y)=x^3+y^3-9xy$ が極値をとる点をすべて求め，その点で極大か極小かを判定せよ．

(京都工芸繊維大 2000)　　(m20003406)

0.141 領域 $D=\{(x,y):\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ 1\leqq\sqrt{x^2+y^2}\leqq 2\}$ に対して重積分

$$\iint_D\frac{2xy}{x^2+y^2}dx\,dy$$

の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2000)　　(m20003407)

0.142 微分方程式 $y'-y=e^x$ を解け．

(京都工芸繊維大 2000)　　(m20003408)

0.143 3 次元ベクトル $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ と $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ に対して，行列

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\-1&-2&1\end{pmatrix}$$

を用いて，$f(\mathbf{x},\mathbf{y})={}^t\,\mathbf{x}A\mathbf{y}$ と定める．ここで ${}^t\mathbf{x}$ は $\mathbf{x}$ の転置を表す．

(1) A の逆行列 B を求めよ．

(2) 任意の 3 次元ベクトル $\mathbf{x},\mathbf{y}$ に対して，$f(\mathbf{x},B\mathbf{y})=f(C\mathbf{x},\mathbf{y})$ を満たす 3 次正方行列 C を求めよ．

(京都工芸繊維大 2000)　　(m20003409)

0.144 行列式を含む方程式 $\begin{vmatrix}x&1&1\\1&x&1\\1&1&x\end{vmatrix}=0$ を解け．

(京都工芸繊維大 2000)　　(m20003410)

0.145 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2k & 3 \end{pmatrix}$ について以下の各問に答えよ．

(1) 行列 A が 2 を固有値として持ち，かつ正則行列となるように k を定めよ．

(2) (1) で求めた k に対して，A の固有値 2 に対応する固有ベクトルを求めよ．

(京都工芸繊維大 2000) (m20003411)

0.146 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ であることを証明せよ．

(神戸大 2000) (m20003801)

0.147 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ とする．$\Delta \log(x^2 + y^2)$ を求めよ．

(神戸大 2000) (m20003802)

0.148 xy 平面 $\mathbf{R}^2$ 上に x 座標が互いに相異なる 4 点 (u_i, v_i) $(i = 1, 2, 3, 4)$ が与えられたとき，関数

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

のグラフがこの 4 点を通るような実数 A, B, C, D がただ一つ定まることを示せ．

(神戸大 2000) (m20003803)

0.149 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

また $T^{-1}AT$ が対角行列になるような正則行列 T は存在するか．存在するならそれを求め，存在しないならその理由を述べよ．

(神戸大 2000) (m20003804)

0.150 次の不定積分を計算せよ．(積分定数は省略してよい)

(1) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x(x^2-1)} dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx$

なお，必要であれば，公式 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$ $(a \neq 0)$ を用いてもよい．

(鳥取大 2000) (m20003901)

0.151 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

(鳥取大 2000) (m20003902)

0.152 以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ がべき級数展開可能であるとき，$f(x)$ を点 a のまわりでテイラー級数に展開せよ．

(2) (1) で求めた結果を利用して，$f(x)$ が $x = a$ で極値をとるための必要条件と十分条件を示し，その理由を説明せよ．ただし，$f''(a) \neq 0$ とする．

(3) $f(x) = \sin x$ を $x = 0$ のまわりでテイラー級数展開せよ．

(鳥取大 2000) (m20003903)

0.153　$z = f(x,y),\ x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ f$ は C^1 級なるとき，次式を証明せよ．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(鳥取大 2000)　　(m20003904)

0.154　次の重積分 I の値を求めよ．

$$I = \iint_K y\,dxdy\ ,\quad K : 0 \leq y - x \leq 1,\ 0 \leq x + y \leq 1$$

(鳥取大 2000)　　(m20003905)

0.155　次の連立方程式を解け．$\begin{cases} 3x^2 + 4x - 4 < 0 \\ x^2 + 4x - 1 > 0 \end{cases}$

(山口大 2000)　　(m20004301)

0.156　次の微分方程式を，与えられた初期条件のもとで解け．

$$\frac{dy}{dx} = \log x \quad \text{初期条件「}x = 1 \text{ のとき } y = 1\text{」}$$

(山口大 2000)　　(m20004302)

0.157　$\boldsymbol{a} = (1,2),\ \boldsymbol{b} = (3,1),\ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ とするとき，

(1)　$|\boldsymbol{c}| = 5$ であるような t の値を求めよ．

(2)　$|\boldsymbol{c}|$ が最小となるような t の値とその最小値を求めよ．

(山口大 2000)　　(m20004303)

0.158　次の行列の固有値，固有ベクトルを求めよ．

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(山口大 2000)　　(m20004304)

0.159　(1)　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^2}$ を求めよ．

(2)　自然数 n と 0 でない定数 c に対して $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^n} = c$ となるとき，自然数 n と 0 でない定数 c の値を求めよ．

(徳島大 2000)　　(m20004401)

0.160　$D = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2\ ,\ 1 \leq xy \leq 2x\}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1)　D を xy 平面に図示せよ．

(2)　二重積分 $\displaystyle\iint_D ye^{xy}\,dxdy$ の値を求めよ．

(徳島大 2000)　　(m20004402)

0.161　連立微分方程式 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 2y \end{cases}$ について，次の問に答えよ．

(1)　上の微分方程式を満たす x, y に対して，$\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt} - 2x$ と $\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} - 2y$ の値を求めよ．

(2) 上の微分方程式の解 $x = x(t),\ y = y(t)$ で $x(0) = 3,\ y(0) = 6$ となるものを求めよ．

(徳島大 2000) (m20004403)

0.162 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ と行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ．

(1) 行列式 $|A - \lambda E|$ の値を求めよ．ただし，λ は定数とする．

(2) $|A - \lambda E| = 0$ を満たす λ の値をすべて求めよ．

(3) (2) で求めたそれぞれの λ に対して，$Ax = \lambda x$ を満たす 3 次元列ベクトル x のうち長さ 1 であるものを求めよ．

(徳島大 2000) (m20004404)

0.163 $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ とする．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to-0} f(x)$ を求めよ．

(4) $y = f(x)$ の増減を調べて，グラフを描け．

(愛媛大 2000) (m20004601)

0.164 $0 < a < 1$ とする．

(1) $\displaystyle\int_a^1 \log x dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{a\to0}\int_a^1 \log x dx$ を求めよ．ただし，計算途中で不定形の極限ができた場合，その計算過程も明記すること．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log k - \log n\right)$ を求めよ．

(愛媛大 2000) (m20004602)

0.165 $z = \log(x^2+y^2), x = u+v, y = u-v$ とする．$\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ．

(愛媛大 2000) (m20004603)

0.166 $D = \left\{(x,y); y^2 \leqq x \leqq y, 0 \leqq y \leqq 1\right\}$ とする．

(1) D を図示せよ．

(2) $\displaystyle\iint_D x^2 y dx dy$ を求めよ．

(愛媛大 2000) (m20004604)

0.167 行列 A を $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ とする．

(1) A の行列式を計算せよ．

(2) A の逆行列の成分がすべて整数となるような整数 k の値を求めよ．

(愛媛大 2000) (m20004605)

0.168 xy 平面上の点 (x, y) と，uv 平面上の点 (u, v) との間に

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$$

という対応関係がある．このとき，xy 平面上の 3 点 $A(0,0), B(1,0), C(1, \frac{\pi}{2})$ を頂点とする三角形 ABC を，上の対応関係によって uv 平面上に移した図形を P として，次の問いに答えよ．

(1) 図形 P がどのような図形であるかを示せ．

(2) 図形 P の面積を求めよ．

(九州大 2000) (m20004701)

0.169 連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} & = & -x(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} & = & x(t) - ay(t) \end{cases}$$

に関して以下の問いに答えよ．ただし，$x(0) = 1$, $y(0) = 0$ とし，a は正の定数とする．

(1) $x(t)$ と $y(t)$ を求めよ．

(2) $y(t)$ を最大にする t の値とその最大値を求めよ．

(九州大 2000) (m20004702)

0.170 次の問いに答えよ．

(1) z を複素数とし，複素平面上の閉曲線 C を $|z - a| = r$ (r は正の実数, a は複素数) とする．このとき積分

$$\oint_C \frac{dz}{(z-1)^n}$$

を $n = 1, n = 2, n = 3$ の各々の場合について計算せよ．ただし，一周積分は正の向き（反時計回り）とする．

(2) 上の結果を用いて $\displaystyle\oint_C \frac{3z^2 - 4z}{(z-1)^3} dz$ を計算せよ．ただし，C は $|z - 1| = 2$ とする．

(九州大 2000) (m20004703)

0.171 1 つのさいころを続けて振るとき，以下の問いに答えよ．

(1) k 回目に初めて 1 の目が出る確率 p_k $(k = 1, 2, \cdots)$ を求めよ．また $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kp_k$ を求めよ．

(2) k 回目に 2 度目の 1 の目が出る確率 q_k $(k = 2, 3, \cdots)$ を求めよ．

(九州大 2000) (m20004704)

0.172 以下に答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を示し，これを使って $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{a^2 + x} - \sqrt{a^2 - x}}{x}$ を求めよ．

(3) $\dfrac{1}{1 + \sqrt{x}}$ を微分せよ．

（九州芸術工科大 2000） (m20004801)

0.173 次の問に答えよ．ただし，log は自然対数を表す．自然対数の底は $e = 2.718\cdots$ である．

(1) 次の積分（広義積分）の値を求めよ．

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon > 0,\ \varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

(2) 極限値に関する次の二つの等式が成り立つことを証明せよ．

$$\lim_{x>0,\ x\to 0} x\log x = 0 \quad , \qquad \lim_{x>0,\ x\to 0} x^x = 1$$

(3) 閉区間 $[0,1]$ 上の関数 f,g を次のように定義する．

$$0 < x \leq 1 \text{ のとき } f(x) = x\log x, \quad g(x) = x^x, \quad f(0) = 0, \quad g(0) = 1$$

このとき，f,g の各々について，$[0,1]$ における最大値と最小値を求めよ．

(4) 次の積分（広義積分）は有限値に収束するか，それとも無限大に発散するか，いずれであるか判定せよ．その理由も示せ．

$$\int_0^1 \frac{x^x}{\sqrt{x}}dx$$

（九州芸術工科大 2000 ）　(m20004802)

0.174 以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2} |2-x-x^2|dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int x\log x dx$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$ を証明せよ．

(4) $F(x) = \displaystyle\int_a^{-x^2} f(t)dt$ のとき，$F'(x)$ を求めよ．

（九州芸術工科大 2000）　(m20004803)

0.175 微分方程式 $xy + y\,' = 0$ を解け．

（九州芸術工科大 2000）　(m20004804)

0.176 n 次単位行列を E，すべての成分が 1 である n 次正方行列を J で表す．a,b は正の実数として，$A = aE + bJ$ とおく．$\mathbf{x}$ は n 次元列ベクトル（縦ベクトル）で，その第 i 成分を x_i とする $(i = 1,2,\cdots,n)$．次の問に答えよ．

(1) J^2 および $J\mathbf{x}$ を求めよ．

(2) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を未知数とする連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ （零ベクトル）の解は $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ のみであることを証明せよ．ただし，A の逆行列が存在することを用いずに示すこと．

(3) A の逆行列は $sE + tJ$ の形で与えられることがわかっている（s,t は実数）．これを用いて，A の逆行列を求めよ．

（九州芸術工科大 2000）　(m20004805)

0.177 以下に答えよ．

(1) 次の行列が直交行列になるような a,b,c の値を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & a \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ b & c & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列の行列式と逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

また，次式を満たす x, y, z を求めよ．

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

（九州芸術工科大 2000）　(m20004806)

0.178 α が行列 A の固有値であるとき，以下が成り立つことを証明せよ．

(1) α は ${}^tA$ の固有値である．ただし，${}^tA$ は A の転置行列である．

(2) k が自然数のとき，α^k は $A^k = \overbrace{A\cdots A}^{k}$ の固有値である．

(3) A が正則であるとき，α^{-1} は A^{-1} の固有値である．

（九州芸術工科大 2000）　(m20004807)

0.179 以下の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x-1}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

（佐賀大 2000）　(m20004901)

0.180 以下の関数の 1 次微分を求めなさい．

(1) $y = e^x\sin x$　(2) $y = \dfrac{\sin x}{e^x}$　(3) $y = \dfrac{\log x}{x}$　(4) $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

（佐賀大 2000）　(m20004902)

0.181 次の関数の増減の状態を調べて，$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ の範囲でグラフを書きなさい．

$f(x) = \sin x(1+\cos x)$

（佐賀大 2000）　(m20004903)

0.182 以下の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \sin(3x+3)dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+3}dx$　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{4+x^2}$

(4) $\displaystyle\int x\log x dx$　(5) $\displaystyle\int e^x\sin 2x dx$

（佐賀大 2000）　(m20004904)

0.183 球の内部の微小部分での密度が，中心からの距離に反比例するとき，球全体の平均密度は表面の密度の 3/2 倍であることを示しなさい．

（佐賀大 2000）　(m20004905)