[選択項目]　年度：2001 年

0.1　次の有理関数を部分分数に分解しなさい.　$\dfrac{1}{x^4-1}$

(秋田大 2001)　(m20010401)

0.2　沖合い 3 km を岸壁に平行に船舶が航行している．岸壁にある観測点に立つ観測者の正面を通過するとき，船舶と観測者を結ぶ直線は角速度 a (rad/秒) で変化した.

(1)　船の進行方向に x 軸を取り，船と観測者を結ぶ直線と，観測点から岸壁に垂直に沖合いに伸びる直線との角度を θ (rad) とする．船の位置 x と θ の関係式を求めよ.

(2)　船舶が観測者の正面を通過したときの航行速度を求める式を与えよ.

(秋田大 2001)　(m20010402)

0.3　次の積分を計算しなさい.

(1)　$\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^2}\ \ (a>0)$　　(2)　$\displaystyle\int_0^\pi x\sin^2 x dx$

(秋田大 2001)　(m20010403)

0.4　次の定積分を求めよ.

(1)　$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$　　(2)　$\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^n}dx$　(ただし，n は 2 以上の自然数)

(秋田大 2001)　(m20010404)

0.5　$y=\log(1-x)$, $-1<x\leq 1$ の原点 $x=0$ における 3 次の Taylor 展開

$$\log(1-x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+R_4x^4$$

の係数 $a_0,\cdots,a_3$ を求めよ．R_4 は求めなくてもよい.

(秋田大 2001)　(m20010405)

0.6　次の関数の原点におけるテイラー展開を，２次の項まで示しなさい.　$\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

(秋田大 2001)　(m20010406)

0.7　次の微分方程式を解きなさい.　$xy'=y(y-1)$

(秋田大 2001)　(m20010407)

0.8　次の行列の行列式を求めよ.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(秋田大 2001)　(m20010408)

0.9　次の連立 1 次方程式を解け.

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y+2z & = & 1 \\ 2x-y+z & = & -1 \\ x+2y+3x & = & 2 \end{array}\right.$$

(秋田大 2001)　(m20010409)

0.10 N 組の計測データ $(X_1, Y_1), \cdots, (X_N, Y_N)$ がある．いま，変数 a, b を用いて

$$Z = \sum_{i=1}^{N} (Y_i - a - bX_i)^2$$

とする．Z を最小とする a, b の値を，計測データを用いて表しなさい．

(秋田大 2001)　　(m20010410)

0.11 関数　$F(x) = x\log x - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2} - x}$　の導関数を $F'(x)$ と表し，
関数 $f(x)$ を　$f(x) = F'(x)$　と定義する．

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ．　(2) 関数 $f(x)$ の増加・減少を調べよ．

(2) 等式　$f(c) = 0 \quad (1 < c < 3)$　を満たす c が少なくとも 1 つ存在することを示せ．

(東北大 2001)　　(m20010501)

0.12 関数 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ を　$f_1(x) = \dfrac{1}{10}e^{2x}, \quad f_2(x) = x^2\log(x+1)$　と定義する．

(1) 定積分 $S_1 = \displaystyle\int_0^a f_1(x)dx, \quad S_2 = \int_0^b f_2(x)dx$ を求めよ．

(2) $a + b = 1$ という関係があるとき，$S = S_1 + S_2$ を b の関数として表せ．

(3) 変数 a と b は

$$a + b = 1, \quad 0 < a < 1, \quad 0 < b < 1$$

を満たすと仮定する．$S = S_1 + S_2$ が極値をとる条件を a と b により表せ．

(東北大 2001)　　(m20010502)

0.13 点 $X(x, y)$ を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる点を $X'(x', y')$ とする．

(1) OX の長さは r であり，OX の方向は x 軸の正のむきを原点 O のまわりに α だけ回転した方向にあるとする．このとき，x, y, x', y' を r, α, θ により表わせ．ただし，角 θ と角 α の回転の方向は同一であるとする．

(2) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表わすとき，2×2 行列 T は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となることを示せ．

(3) 点 $A(x_1, y_1)$，点 $B(x_2, y_2)$ と原点 O からなる三角形 OAB を考える．三角形 OAB を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる三角形を $OA'B'$ とする．三角形 OAB の面積 S と三角形 $OA'B'$ の面積 S' を与える公式

$$S = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|, \quad S' = \frac{1}{2}|x_1'y_2' - x_2'y_1'|$$

を用いて，$S = S'$ であることを示せ．

(4) 上記 (3) で定義した三角形 $OA'B'$ の辺 $A'B'$ が直線 $y' = 1$ 上に位置し，$S' = \dfrac{1}{2}$ であるとする．この場合に，x_1, y_1, x_2, y_2 が満たすべき条件を示せ．

(5) 上記 (4) において，さらに，$x_1' = 0, \ x_2' > 0, \ \theta = \dfrac{\pi}{4}$ とする．三角形 OAB を図示せよ．

(東北大 2001)　　(m20010503)

0.14 半径 a の円が x 軸に接しながら滑らずに回転してゆくとき，円周上の一点の軌跡をサイクロイドと呼ぶ．

(1) 点の初期位置を原点として，この軌跡の方程式を回転の中心角に関するパラメータ表示で与えよ．ただし，円は常に x 軸の上側にあるものとする．

(2) この点が再び x 軸に戻るまでの一周期分の曲線の弧長を計算せよ．

（お茶の水女子大 2001）　　(m20010601)

0.15 関数 $f(x)$ は実数の開区間 $I=(a,b)$ で連続，関数 $g_1(t), g_2(t)$ は実数の開区間 $J=(c,d)$ で微分可能であり，その値が開区間 I に属するとし，次のような関数を考える．

$$h(t)=\int_{g_1(t)}^{g_2(t)} f(x)dx$$

このような形で定義された関数について以下の問に答えよ．

(1) 次の関数の導関数を具体的に計算せよ．

$$\int_{t^2}^{t^3} x\log x dx \qquad \text{（log は自然対数関数を表す.）}$$

(2) 次の関数の導関数を計算できるまで計算せよ．

$$\int_{t^2}^{t^3} e^x\log x dx \qquad \text{（log は自然対数関数，} e \text{ は自然対数の底を表す.）}$$

(3) 次の関数の導関数を f, g_1, g_2 およびその導関数を用いて表せ．

$$h(t)=\int_{g_1(t)}^{g_2(t)} f(x)dx$$

（お茶の水女子大 2001） (m20010602)

0.16 関数 f は実数の閉区間 $[a,b]$ で連続とし，

$$f_0(x)=f(x), \quad f_n(x)=\int_a^x f_{n-1}(t)dt$$

とおくとき，

$$f_n(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)dt$$

という式が成立することを，どういう事実を使ったか明確に説明しながら示せ．特に，

(1) $f(x)=c$（定数） (2) $f(x)=e^x$

であるとき，$f_n(x)$ を計算せよ．

（お茶の水女子大 2001） (m20010603)

0.17 変数変換 $t=\tan(\theta/2)$ を用いて三角関数の積分を計算してみよう．

(1) $\cos\theta$ と $\sin\theta$ は変数 t を用いて，以下のように表せることを示せ．

$$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$$

(2) 次の関数式を示せ． $\dfrac{dt}{d\theta}=\dfrac{1}{2}(1+t^2)$

(3) 次の不定積分を求めよ． $\displaystyle\int\frac{d\theta}{\sin\theta}, \quad \int\frac{d\theta}{\cos\theta}$

ただし，もし必要であれば以下の公式を用いて良い．

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

（お茶の水女子大 2001） (m20010604)

0.18 $\mathrm{Arctan}\,x$ は $\tan x$ の逆関数で，$x=0$ のとき値が 0 となるものを表すとする．

(1) $\mathrm{Arctan}\,x$ の原点を中心とする Taylor 展開を 5 次の項まで記せ．

(2) $x\,\mathrm{Arctan}(x^2)$ の原点を中心とする Taylor 展開を 11 次の項まで記せ．

（お茶の水女子大 2001） (m20010605)

0.19 v_1, v_2, v_3 を３次元内積空間 $\mathbb{R}^3$ の長さ１のベクトルで，どの２つも互いに直交するものとする．以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}^3$ の任意のベクトル x は，

$$x = (x, v_1)v_1 + (x, v_2)v_2 + (x, v_3)v_3$$

と表されることを示せ．ただし，(　,　) は $\mathbb{R}^3$ の内積を意味する．

(2) $\mathbb{R}^3$ のベクトル a, b を

$$a = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$$

$$b = b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3$$

と表すとき，$(a, b) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ であることを示せ．

（お茶の水女子大 2001）　　(m20010606)

0.20 A を与えられた実係数 n 次正方行列とするとき，以下の問に答えよ．

(1) 零ベクトル o ではないあるベクトル

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

とある自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して $A^m x = o$ が満たされるとき，A は正則行列ではないことを示せ．

(2) $A^n \neq O$（n は行列 A の次数）かつ $x \neq o$ であるが，$A^n x = o$ となるような行列 A とベクトル x の組の例を挙げよ．

(3) あるベクトル $x \neq o$ に対して (1) のような仮定が満たされているとする．

$$k = k(x) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid A^m x = o\}$$

とおくとき，k 個のベクトル $x, Ax, \cdots, A^{k-1}x$ は一次独立であることを証明せよ．

(4) $A^m = O$ がある自然数 m に対して満たされているならば，$k \leq n$ となる自然数 k で $A^k = O$ となるものが存在することを示せ．

（お茶の水女子大 2001）　　(m20010607)

0.21 平面の単位正方形 $\{(x, y) | \, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ を，４点 $(0, 0), (1, 2), (0, 4), (-1, 2)$ を頂点とする菱形に写すような線型写像（ 2×2 型行列）を決定せよ．

（お茶の水女子大 2001）　　(m20010608)

0.22 $P^T P = I$ を満たす行列 P を直交行列と呼ぶ．ここに P^T は P の転置行列を，I は単位行列を表す．

(1) ３次の実直交行列 P が３次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ に線形変換として働くとき，P により位置を変えない直線が少なくとも一本存在することを示せ．

(2) 上の直線を z 軸に取ったとき，P はどのような形となるか？

(3) 上の形をもとに，P の空間への作用の仕方を説明せよ．

（お茶の水女子大 2001）　　(m20010609)

0.23 以下に与えられる３行３列の行列 A を考える．

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

また，xyz 座標系の基底ベクトルを $\overrightarrow{e_x}$，$\overrightarrow{e_y}$，および $\overrightarrow{e_z}$ と表す．

$$\overrightarrow{e_x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{e_y}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{e_z}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(1) $A\overrightarrow{e_x}$，$A\overrightarrow{e_y}$，および $A\overrightarrow{e_z}$ を計算せよ．

(2) 行列式 $detA$ を計算せよ．

(3) 逆行列 A^{-1} を求めよ．

(4) 基底ベクトル $\overrightarrow{e_x}$，$\overrightarrow{e_y}$，および $\overrightarrow{e_z}$ を三辺とする立方体を考える．変換 A によって，その体積は何倍に変換されるか．

（お茶の水女子大 2001）　　(m20010610)

0.24 $A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) $A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$　を満たす実数 λ と非零ベクトル $\boldsymbol{u}$ の組をすべて求めよ.

(2) 2 点 P, Q と原点 O を頂点とする三角形 OPQ の各頂点の位置ベクトルが A によって一次変換されるとき, その三角形の面積が何倍になるか答えよ.

(東京大 2001)　　(m20010701)

0.25 半径 a の球を考える. ただし, 球の中心は原点とする.

(1) 球面上の任意の点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とおくとき, この点で球面に接する平面上の点の位置ベクトル $\boldsymbol{f}$ が満たす方程式を示せ.

(2) 上記 (1) で求めた接平面と x 軸との交点を求めよ. ただし, x 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}_x$ とする.

(3) 上記 (2) で求めた交点の x 座標が $3a$ となるような, 球面上の点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ が満たす方程式を求めよ. また, そのような点 P の集まりはどのような図形を描くか, 図を用いて説明せよ.

(東京大 2001)　　(m20010702)

0.26 (1) 複素変数の指数関数 e^x の級数展開は次式で表される.

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

上式を利用して, $\cos z$, $\sin z$ の級数展開を求めよ.

(2) 次の複素関数を特異点 $z=0$ のまわりでローラン展開し $f(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n$ の形で表せ. また, 特異点の種類を答えよ.

$$f_1(z)=z\sin\left(\frac{1}{z}\right),\qquad f_2(z)=\frac{1-\cos z}{z^2},\qquad f_3(z)=\frac{1}{z^2(1-z)}$$

(3) 次の積分を求めよ.

$$I=\oint_C f_3(z)dz$$

ただし, 積分路 C は複素平面上で原点を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を反時計回りに一周するものとする.

(東京大 2001)　　(m20010703)

0.27 関数 $f(x)$ のラプラス変換 $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-sx}f(x)dx$ を $L\,[f(x)]=F(s)$ と表す.

(1) $L[x]$ を求めよ.

(2) $L\left[e^{ax}f(x)\right] = F(s-a)$ を示せ.

(3) 上記 (2) の定理を用いて, xe^{2x} のラプラす変換を求めよ.

(4) 上記 (2) の定理を用いて, $L\left[2e^{-2x} - xe^{-2x}\right]$ を求めよ.

(東京大 2001)　　(m20010704)

0.28 ある製品は一回の使用後, 確率 p でこわれるとしょう. このとき以下に問に答えよ.

(1) この製品を k 回使用したとき, まだこわれない確率を求めよ.

(2) N 個の製品をそれぞれ一回使用した後の確率を求めよ.

(a) すべてがこわれている確率はいくらか.

(b) すべてがこわれずに残っている確率はいくらか.

(c) M 個がこわれずに残っている確率はいくらか.

(3) N 個の製品をそれぞれ一回使用した後こわれずに残っている個数の期待値を求めよ.

次に, この製品は使用しなくても単位時間あたり α の確率でこわれるとしよう.

(つまり, 非常に短い時間 Δt 後に確率 $\alpha\Delta t$ でこわれる.) このとき, 以下の問に答えよ.

(4) ある製品をまったく使用しない場合, 時刻 t においてそれがこわれていない確率を $P(t)$ とするとき, $P(t)$ の従う微分方程式を記せ.

(5) $t=0$ で $P(t)=1$ として, $P(t)$ を求めよ.

(6) この製品を, 完成後時間 t の間に k 回使用したとき, まだこわれていない確率を求めよ. ただし, 使用に要する時間は t に比べて非常に短いとする.

(東京大 2001)　　(m20010705)

0.29 (1) 関数 $x\cos x,\ \log(1+3x)$ をそれぞれ 3 次の項まで Maclaurin 展開せよ.

(2) 次の極限を求めよ.
$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{\log(1+3x)} - \frac{1}{3x\cos x}\right\}$$

(東京工業大 2001)　　(m20010801)

0.30 条件 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ の下で,

$F(x,y,z) = lx+my+nz \qquad (l,m,n$ は定数) の最大値，最小値を求めよ.

(東京工業大 2001)　　(m20010802)

0.31 $G(x,y,t)$ は次のように定義される関数である.

$$G(x,y,t) = \frac{1}{t}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right) \quad (t>0)$$

(1) 偏微分 $\dfrac{\partial G}{\partial x},\ \dfrac{\partial G}{\partial t}$ をそれぞれ求めよ.

(2) 各 $t>0$ に対して，次の積分 $I(t)$ を計算せよ.

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t)\,dx\,dy$$

(東京工業大 2001)　　(m20010803)

0.32 (1) 次の積分をせよ. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \qquad D: 0\le x\le y\le 1$

(2) 二つの曲面 : $z^2=4ay$, $x^2+y^2=ay$ に囲まれた立体の第 1 象限にある部分の体積を求めよ.

(東京工業大 2001)　　(m20010804)

0.33 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ に対して

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．

(東京工業大 2001)　　(m20010805)

0.34 行列 $A = \begin{bmatrix} -8 & -2 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \\ -6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ について，

(1) 固有値を求めよ．

(2) 固有値に対する基底ベクトルを求めよ．

(東京工業大 2001)　　(m20010806)

0.35 次の行列の階数を求めよ．ただし，x は複素数とする．

$$\begin{pmatrix} x & x+1 & x^2 \\ 1 & x^2+1 & 1 \\ x & x^2+x & x^2 \end{pmatrix}$$

(東京工業大 2001)　　(m20010807)

0.36 $A = \{0, 1, 2\}$ とする．A^n を，A の要素を n 個並べてできる列全てからなる集合とする．さらに A^n の要素のうち，n 個の数の総和を 3 で割った剰余が k $(k = 0, 1, 2)$ になるものの集合を $A^n(k)$ とする．

例：$A^2 = \{00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22\}$

$A^3 = \{000, 001, 002, \cdots, 221, 222\}$

$A^2(0) = \{00, 12, 21\}, \quad A^2(1) = \{01, 10, 22\}, \quad A^2(2) = \{02, 11, 20\}$

(1) $A^3(0), A^3(1), A^3(2)$ の全ての要素を上の例のように列挙せよ．

(2) 任意の正整数 n に対し，$|A^n(0)| = |A^n(1)| = |A^n(2)| = 3^{n-1}$ となることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) $n \geq 4$ のとき，$A^n(0)$ の要素のうち，ちょうど 2 個の 0 で始まる（3 個以上ではいけない）列の個数を n を用いて表せ．

(電気通信大 2001)　　(m20011001)

0.37 生産・経営問題に関連した下記の関数

$$f(x) = \frac{ax^n}{2} + \frac{b}{x^n}, \quad x \geq 0, \quad a, b \geq 0, \quad n = 1, 2, \cdots$$

について，以下の設問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ を最小にする最適解 x^* を，極値条件を用いて求めよ．

(2) 相加平均と相乗平均の関係を用いて，最適解 x^* と $f(x^*)$ を求めよ．

(3) 以上の結果を用いて，関数の右辺第 1 項目，第 2 項目，および $f(x)$ の概形を描け．

(電気通信大 2001)　　(m20011002)

0.38 方程式 $y + e^{1-xy} = 0$ を満たし，$y(0) = -e$ であるような微分可能な関数 $y = y(x)$ について，次の問に答えよ．

(1) 導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ および，2 次導関数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を x, y の有理式で表し，それらの $x = 0$ における値を求めよ．

(2) $y(x)$ が定義される最大区間を $(-\infty, a)$ とするとき，a の値を求め，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to a-0} y(x)$ を求めよ．

(電気通信大 2001)　　(m20011003)

0.39 次の重積分および 3 重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2 d, dy, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqq\ 2x\}$

(2) $\displaystyle\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz, \quad V = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqq\ 1\}$

(電気通信大 2001)　　(m20011004)

0.40 定義域を $0 \leqq\ u \leqq\ 2\pi,\ 0 \leqq\ v \leqq\ 1$ とするベクトル関数

$$\overrightarrow{r}(u,v) = \left(\sqrt{1+v^2}\cos u, \sqrt{1+v^2}\sin u, v\right)$$

が表す曲面を S とする．曲面 S 上の (u,v) に対応する点における法線単位ベクトルを求めよ．また，曲面 S の面積を求めよ．

(電気通信大 2001)　　(m20011005)

0.41 次の 3 次正方行列 A に対して，その行列式 $|A|$ および，その逆行列 A^{-1} を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

(電気通信大 2001)　　(m20011006)

0.42 $3\times\ 3$ 行列 M が

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

と与えられたとして，次の (a)〜(d) の計算を考える．

(1) M^{-1} を求める．

(2) M を下三角行列 L と上三角行列 U の積 $M = LU$ に分解する．
但し，L または U のいずれかは，対角要素がすべて 1 に等しい行列とする．

(3) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．
$Mx_1 = e_1, Mx_2 = e_2, Mx_3 = e_3$ を満たすベクトル x_1, x_2, x_3 を求める．

(4) 連立方程式

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 + 4z_3 = 3 \\ z_1 + z_2 + 3z_3 = 2 \\ 2z_1 + z_2 + 6z_3 = 2 \end{cases}$$

を満たす z_1, z_2, z_3 を求める．

(1) (a)〜(d) のすべての計算を行う場合の，適切な計算の順序を示し，手順を簡単に説明せよ．

(2) 前問の解答の手順に従って，(a)〜(d) の各々の解を求めよ．

(電気通信大 2001)　　(m20011007)

0.43 $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ とし，線形写像 $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ を，$f(x) = 6x - < v, x > v \quad (x \in \mathbf{R}^3)$ で定義するとき，次の問に答えよ．ただし，$<, >$ は，$\mathbf{R}^3$ の通常のユークリッド内積とする．

(1) $< f(x), v >= 0$ を示せ．

(2) $f(x) = Ax$ と表すとき，行列 A を求めよ．

(3) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元，および f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求めよ．

(4) $\mathrm{Im}\, f \ni x \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たし，$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と直交するベクトル $x \in \mathbf{R}^3$ が存在するならば，それを 1 つ求めよ．もしそのようなベクトルが存在しないならば，それを証明せよ．

(電気通信大 2001)　　(m20011008)

0.44 次の問いに答えよ．

(1) $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{1+z^2}$ の特異点をすべて求め，そこでの留数を計算せよ．

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} dx$ の値を求めよ．

(電気通信大 2001)　　(m20011009)

0.45 $z = x + iy$（z は複素数，x, y は実数，i は虚数単位）に対して，指数関数 e^z と対数関数 $\log_e z$ を

$$e^z := e^x(\cos y + i \sin y),$$

$$\log_e z := \mathrm{Log}_e |z| + i \arg z,$$

と定義する．ただし，e は自然対数の底，Log_e は，実数に対して，既に定義されている対数関数，$\arg z$ は z の偏角を表すものとする．

(1) この指数関数を用いて，三角関数 $\sin z, \cos z$ を定義せよ．また，これらの指数関数と対数関数を用いて，一般の巾乗関数 α^β（α, β は，2 つの複素数）を定義せよ．

(2) $\cos z = -2$ を満たす複素数 z を，すべて求めよ．

(3) $i^{(-i)}, (-i)^{\frac{1}{3}}$ の 2 つの値を計算せよ．(答えは，複素数 $a + ib$ の形になるまで計算すること）

(電気通信大 2001)　　(m20011010)

0.46 確率変数 X, Y, U が互いに独立で，各々正規分布 $N(\mu_1, {\sigma_1}^2), N(\mu_2, {\sigma_2}^2), N(\mu_3, {\sigma_3}^2)$ に従うとする．

(1) 任意の定数 a, b, c に対して，$W = aX + bY + cU$ の分布を求めよ．

(2) $V = \left(\dfrac{X - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 \Big/ \left(\dfrac{Y - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2$ の分布を求めよ．

(3) $P\left(-3 \leq \dfrac{X - \mu_1}{\sigma_1} \leq 3\right)$ を求めよ．

ただし，標準正規分布 $N(0, 1)$ の分布関数を

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

とおくと，次表の値をとる．

z	0.0	1.0	2.0	3.0
$\Phi(z)$	0.5000	0.8413	0.9772	0.9987

(電気通信大 2001)　　(m20011011)

0.47 a を正の定数とし，関数 $f(x)$ を

$$-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \quad \text{のとき，} \quad f(x) = \frac{1}{a}$$

$$x < -\frac{a}{2} \text{ および } x > \frac{a}{2} \quad \text{のとき，} \quad f(x) = 0$$

と定義する．微分方程式

$$x \neq \pm\frac{a}{2} \quad \text{のとき，} \quad \frac{d^2y}{dx^2} - y = f(x)$$

$$x = \pm\frac{a}{2} \quad \text{のとき，} \quad \frac{dy}{dx} \quad \text{は連続}$$

$$x \to \pm\infty \quad \text{のとき，} \quad y = 0$$

について，次の問に答えよ．

(1) 微分方程式の解を $y(x)$ とするとき，$y(-x) = y(x)$ を示せ．

(2) 上記の微分方程式の解を求めよ．

(3) a を 0 に近づけると，解はどのような関数に近づくか？

(横浜国立大 2001) (m20011101)

0.48 次の行列 A の固有値と，その固有値に対する固有ベクトルをすべて求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(横浜国立大 2001) (m20011102)

0.49 ３次元空間中に球 $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ と円柱 $x^2 + y^2 = 2ax$ がある．球が円柱によって切り取られる立体の体積 V を以下の設問に答えることによって求めなさい．

(1) V が次のような重積分になることを図を書いて示しなさい．

$$V = 2\iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy \ , \ D = \{(x, y) \mid (x - a)^2 + y^2 \leq a^2\}$$

(2) x-y 座標系の原点を中心とする極座標 (r, θ) を用いると，領域 D が次のように表されることを示しなさい．

$$D = \left\{ (r, \theta) \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \ , \ 0 \leq r \leq 2a\cos\theta \right\}$$

(3) 設問 (1) の重積分を極座標に変換して体積 V を求めなさい．

(千葉大 2001) (m20011201)

0.50 微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = 1 \ \ , \ \ y(x)\Big|_{x=1} = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = 0 \qquad \text{(i)}$$

に関する以下の設問に答えなさい．

(1) 変数変換 $x = e^t$ を考える．変数 x の定義域が $[1, \infty]$ であるとき，変数 t の定義域を求めなさい．

(2) 合成関数 $y(x(t))$ の微分公式は $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt}$ で与えられる．合成関数 $y(x(t))$ の２階微分 $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ を $\dfrac{d^2y}{dx^2}$，$\dfrac{d^2x}{dt^2}$，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{dx}{dt}$ を用いて表しなさい．

(3) 変数変換 $x = e^t$ を用いることによって，式 (i) の微分方程式が

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 1 \ , \ \ y(t)\Big|_{t=0} = \frac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \qquad \text{(ii)}$$

に変換できることを示しなさい．

(4) 式 (ii) の微分方程式を解きなさい．

(5) 設問 (4) で求めた微分方程式 (ii) の解から微分方程式 (i) の解 $y(x)$ を求めなさい．

(千葉大 2001)　　(m20011202)

0.51 原点を O とする左手系の直交座標を，x-O-y とする．原点 O を，$(x, y) = (1, 2)$ に平行移動した座標系を X-O'-Y とする．座標系 X-O'-Y をその原点 O' の周りに反時計方向に，$\pi/4$ 回転した座標系を x'-O'-y' とする．原点 O の周りに反時計方向に，座標系 x-O-y を $\pi/4$ 回転した座標系を X'-O-Y' とする．X'-O-Y' の原点を $(X', Y') = (1, 2)$ に平行移動した座標系を x''-O''-y'' とする．これらの座標系に関して以下の設問に答えなさい．

(1) 座標系 x-O-y と座標系 x'-O'-y' との関係を図示しなさい．

(2) 座標系 x-O-y と座標系 x''-O''-y'' との関係を図示しなさい．

(3) x-y 座標系の原点を中心とする半径 1 の円を C とする．座標系 x'-y', x''-y'' において，この図形を式で表しなさい．

(千葉大 2001)　　(m20011203)

0.52 x を変数とする関数を $f(x)$ とする．複素単位を $i = \sqrt{-1}$ として，

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx$$

によって決まる ω の関数 $F(\omega)$ を関数 $f(x)$ のフーリエ変換という． $F(\omega)$ から逆に $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x} d\omega$$

によって求めることができる．この逆を逆フーリエ変換という．

関数 $F(\omega)$ を ω で微分することを考える．

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega) = \frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx$$

より微分と積分を入れ換えると，

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\omega}\big(f(x)\, e^{-i\omega x}\big)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\big(-ixf(x)\, e^{-i\omega x}\big)dx$$

となり，関数 $(-ix)f(x)$ のフーリエ変換が $\dfrac{d}{d\omega}F(\omega)$ であることがわかる．このことを利用して以下の設問に答えなさい．ただし，ここで扱う全ての関数は微分と積分の順序を交換できる性質を満たしていることを仮定する．

(1) ω に関する $F(\omega)$ の決める関数 $\dfrac{d^2}{d\omega^2}F(\omega)$ が関数 $(-x^2)f(x)$ のフーリエ変換であることを示しなさい．

(2) 逆フーリエ変換が $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ になる関数を $F(\omega)$ によって表しなさい．

(3) 微分方程式

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} - x^2 f(x) = -(2n+1)f(x)\ , \ \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \qquad (*)$$

の解 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が満たす微分方程式を導きなさい．ただし， n は零以上の整数である．

(4) 設問 (3) の結果から，式 $(*)$ の微分方程式の解のフーリエ変換に関する性質を５０字程度で述べなさい．

(千葉大 2001)　　(m20011204)

0.53 面積が a 平方センチメートルの正方形がある．この正方形の四隅から合同な４つの正方形を切り取り，残りの部分を折り曲げて接合することにより，上部の開いた箱を作ることにする．箱の容量（体積）を最大化するためにはどうすればよいか．また $a = 36$ のときの最大容量を求めよ．

(筑波大 2001)　　(m20011301)

0.54 関数 $f(x) = a\sin x \quad$ (ただし, $-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2$) を考える．

(1) $y = f(x)$ の逆関数 $x = f^{-1}(y)$ を求めよ．

(2) 逆関数 $x = f^{-1}(y)$ の導関数 $\dfrac{dx}{dy}$ を求めよ．

(筑波大 2001)　　(m20011302)

0.55 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

(筑波大 2001)　　(m20011303)

0.56 $f(x) = \log(a^2 + x^2)$ のマクローリン展開の一般項を求め，収束半径を計算せよ．ただし，$a > 0$ とする．

（筑波大 2001）　　(m20011304)

0.57 $x^2 + (y-b)^2 = a^2 \quad$ (ただし, $a > 0,\ b > 0$) を x 軸回りに回転してできる回転体を考える．

(1) 体積を求めよ．　　(2) 表面積を求めよ．

(筑波大 2001)　　(m20011305)

0.58 (1) 次の積分の値を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-a(x^2+y^2\}dxdy$$

(2) 関数 $f(a)$ を $f(a) = \displaystyle\int_0^{\infty}\exp(-ax^2)dx$ と定義する．$f(a)$ を微分することにより，次の積分の値を求めよ．ただし，n は正の整数とする．

$$\int_0^{\infty}x^2\exp(-x^2)dx \qquad\qquad \int_0^{\infty}x^{2n}\exp(-x^2)dx$$

(筑波大 2001)　　(m20011306)

0.59 ベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ が１次独立か否かを判定せよ．

(筑波大 2001)　　(m20011307)

0.60 実数の定数 $\alpha,\ \beta$ に対し，行列 $A,\ P$ を

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix},\quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) $P^n\ (n \geqq 2)$ を求めよ．

(2) $A,\ A^2$ を $\alpha,\ \beta,\ I,\ P,\ P^2$ を用いて表せ．ただし，I は３次の単位行列を表す．

(3) $A^n\ (n \geqq 2)$ を $n,\ \alpha,\ \beta,\ I,\ P,\ P^2$ を用いて表せ．A^n はどのような行列になるか．

(4) $\exp A$ を $\alpha,\ \beta$ を用いてできるだけ簡単な行列の形に直せ．ただし，$\exp A$ は，

$$\exp A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots$$

で定められる行列を表す．

(5) $\exp(-A)$ を $\alpha,\ \beta,\ I,\ P,\ P^2$ を用いて表し，$(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$ であることを証明せよ．

(筑波大 2001)　　(m20011308)

0.61 次の行列式の値を計算せよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

(筑波大 2001)　　(m20011309)

0.62 行列 $A = \begin{bmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{bmatrix}$ に関して，以下の問に答えよ．ただし，$0 < a < 1$ かつ $0 < b < 1$ とする．

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化する必要はない．

(2) 上で求めた固有ベクトルのもとで行列 A を対角化したときの対角行列 B を求めよ．

(3) 行列 A の対角化を用いて，A^n を求めよ（n は自然数）．

(筑波大 2001)　　(m20011310)

0.63 すべての成分が実数の 4 次元ベクトルの全体はベクトル空間となる．この空間を R^4 で表す．このときに

(1) R^4 の元 (x_1, x_2, x_3, x_4) で，$x_1 = 2x_2,\ x_3 = x_4 = 0$ という性質を満たすものの全体 W は R^4 の部分空間となるかを説明せよ．

(2) R^4 の元 (x_1, x_2, x_3, x_4) で，${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 = 1$ という性質を満たすものの全体 W は R^4 の部分空間となるかを説明せよ．

(筑波大 2001)　　(m20011311)

0.64 今Ａ社とＢ社の株式 1 株を今から 1 ヶ月保有したときに得られる収益率をそれぞれ R_A, R_B とする．R_A は平均 μ_A%，標準偏差 σ_A% の正規分布に，R_B は平均 μ_B%，標準偏差 σ_B% の正規分布に従い，R_A と R_B の相関係数を ρ とする．h を $1 \geq h \geq 0$ の実数として，Ａ社の株式を h，Ｂ社の株式を $(1-h)$ の比率で保有したときに得る収益率 $(R_A h + R_B(1-h))$ の平均と標準偏差を求めよ.（単位はパーセントとする.）

(筑波大 2001)　　(m20011312)

0.65 次の関数の導関数を求めさない．

(1) $y = \sin^{-1} x$ ($y = \arcsin x$ を意味する)

(2) $y = x^{\sin x}$

（埼玉大 2001）　　(m20011401)

0.66 周の長さ l が一定の扇形のうちで，面積が最大になる場合の中心角 x を求めなさい．

（埼玉大 2001）　　(m20011402)

0.67 $y = \tan^{-1} x^2$ について，次の問に答えよ．

(1) グラフの概形を描け．

(2)　$x=0$ における 2 次の微分係数 $y''(0)$ を求めよ．

（埼玉大 2001）　　(m20011403)

0.68　次の不定積分を求めなさい．

(1)　$\displaystyle\int \frac{x^3-3x^2-2x}{x^2-4x+3}dx$　　　(2)　$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

(2)　$\displaystyle\int (2x+1)\ln x dx$

（埼玉大 2001）　　(m20011404)

0.69　(1)　次の等式を満たす実数 a,b,c,d を求めよ．　$\displaystyle\frac{1}{x^4+4}=\frac{ax+b}{x^2-2x+2}+\frac{cx+d}{x^2+2x+2}$

(2)　不定積分　$\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+4}$　を求めよ．

（埼玉大 2001）　　(m20011405)

0.70　次のベクトルについて，以下の問に答えよ．

$$\overrightarrow{PA}=\boldsymbol{a}=(2,1,1),\quad \overrightarrow{PB}=\boldsymbol{b}=(1,2,1),\quad \overrightarrow{PC}=\boldsymbol{c}=(1,1,2)$$

(1)　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を求めなさい．　　　(2)　$\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ を求めなさい．

(2)　PA, PB, PC で張られた平行六面体の体積を求めなさい．

（埼玉大 2001）　　(m20011406)

0.71　行列 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$　について以下の問いに答えよ．

(1)　rank $A=3$ となる a の実数値を求めなさい．

(2)　$a=2$ のとき，A の行列式を求めなさい．

(3)　$a=1$ のとき，A の逆行列を求めなさい．

（埼玉大 2001）　　(m20011407)

0.72　次の 4 つの行列 A,B,C,D を考える．

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1)　行列 $A,\ B,\ AB$ の行列式を求めよ．

(2)　行列 $C+D$ の階数を求めよ．

（埼玉大 2001）　　(m20011408)

0.73　$\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と線形写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を考え，$a_i=f(e_i)\quad(1\le i\le 3)$ とおく．

このとき，次の (1), (2) は互いに同値であることを示せ．

(1)　ベクトル a_1,a_2,a_3 は一次独立である．

(2) f は逆写像 $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ をもつ.

（埼玉大 2001） (m20011409)

0.74 (1) $(x^2+2x+3)(x^2+2x+4)-6$ を因数分解せよ.

(2) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+x-6} \times \dfrac{x^2+4x+3}{x^2-2x+4} \div \dfrac{x^2-4}{x^3+8}$ を簡単にせよ.

(群馬大 2001) (m20011501)

0.75 等差数列をなす4つの数がある．これらの和は 40 で，第2項と第3項の積は初項と末項の積より 8 大きい．このような等差数列をすべて求めよ.

(群馬大 2001) (m20011502)

0.76 $0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ のとき，等式 $2\cos^2 x = 3\sin x$ を満たす x の値を求めよ.

(群馬大 2001) (m20011503)

0.77 2次関数 $y = x^2-2x-4$ について，以下の質問に答えよ.

(1) この関数が最小値をとるときの x の値，および，そのときの最小値を求めよ.

(2) この関数と原点に関して対称な2次関数の式を求めよ.

(3) この関数と，(2) で求めた関数のグラフにおいて，交点の座標を求めよ.

(4) この関数と，(2) で求めた関数のグラフにおいて，二つの曲線により囲まれる領域（境界を含む）に，格子点（座標が整数値であるもの）はいくつあるか.

(群馬大 2001) (m20011504)

0.78 12 人で旅をしている．A町からB町まで 30 キロメートルあるので，1台のレンタカーを運転者付きで借りることにする．レンタカーは運転手を含めて5人乗りなので，一度には4人の旅人しか乗れない．12 人が同時にA町を出発して，同時にB町に着けるように計画を立てた．計画は以下の通りである.

8人は徒歩で出発する．同時に，残りの4人は自動車でA町を出発する．この4人は途中でおろして，後は歩いてもらう．運転手はすぐさま引き返し，途中で出会う8人のうちの4人を乗せてB町へ向かうが，この4人も途中でおろし，後は歩いてもらう．運転手はまたすぐさま引き返し，途中で出会う4人を乗せてB町へ向かう．自動車がB町に着くのと同時に，途中でおろされた8人もB町に着く.

徒歩は時速4キロメートル，自動車は時速 60 キロメートルとし，自動車の方向転換や自動車の乗り降りにかかる時間は無視できるとする.

(1) 最初に自動車に乗るグループは，B町の何キロ手前で自動車からおりることになるか.

(2) 旅人たちは，A町を出発してから何時間後にB町に着きことができるか.

(群馬大 2001) (m20011505)

0.79 (1) $y = 2\sqrt{1+x} + \log\left|\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\log x}{\sqrt{1+x}}\,dx$ を求めよ.

(茨城大 2001) (m20011701)

0.80 次の定積分を求めよ．ただし，m と n は0以上の整数とする.

(1) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^n dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$

（ヒント：階乗を利用すると結果を簡潔に表示できる．$0! = 1$ である.）

(茨城大 2001)　　(m20011702)

0.81 集合 S を　$S = \left\{ a \;\middle|\; a = \dfrac{p}{10^k},\ k \text{ は } 1 \text{ 以上の整数},\ p \text{ は } 1 \leq p < 10^k \text{である整数} \right\}$
と定義するとき，次の各問に答えよ．

(1) $a \in S$ の小数表示を，a に対応する k と p を用いて説明せよ．

(2) S は無限集合であることを示せ．

(3) 任意の $a \in S$ に対して，$x_n \notin S$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = a$ となる数列 $\{x_n\}$ が構成できることを示せ．

(茨城大 2001)　　(m20011703)

0.82 次の微分方程式を解け．　$y' + y\tan x = \dfrac{1}{\cos x}$ ，$y(0) = 1$

(茨城大 2001)　　(m20011704)

0.83 (1) 行列　$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{bmatrix}$　の行列式を求めよ（どのように計算したかも書くこと）．

(2) 次の四つのうちから一つを選び，それについて知っていることを説明せよ．

(i) 基本行列　(ii) 置換　(iii) 行列式　(iv) 線形空間

(茨城大 2001)　　(m20011705)

0.84 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．次の各問に答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A を対角化するユニタリー行列を求めよ．

(3) A^6 を求めよ．

(茨城大 2001)　　(m20011706)

0.85 z を複素数とするとき，$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ ，$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ である．次の各問いに答えよ．

(1) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ を示せ．

(2) y を実数とするとき，$\cos(iy) \geqq 1$ を示せ．

(3) $\cos z$ が実数となる z の条件を求めよ．

(茨城大 2001)　　(m20011707)

0.86 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left\{ \sqrt{x^2+4x} - \sqrt{x^2+x} \right\}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log_2(1+x)}{x}$

(新潟大 2001)　　(m20012001)

0.87 非負の整数 n に対して，　$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$　とする．このとき，$n > 1$ に対して I_n と I_{n-2} の関係式を求めよ．さらに I_3, I_4 の値を求めよ．

(新潟大 2001)　　(m20012002)

0.88 $y = \sin^2 x$ を $x = 0$ のまわりでテーラー展開して，x の 4 次の項まで求めよ．

(新潟大 2001)　　(m20012003)

0.89 実変数の実数値関数 $f(x)$ を $\quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \text{ の場合} \\ 0 & , \quad x = 0 \text{ の場合} \end{cases}$

によって定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ となることを示せ． (2) $x \neq 0$ に対して，$f'(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ を求めよ． (4) $f'(x)$ は $x = 0$ で連続でないことを示せ．

(3) $F(x, y) = f(xy)$ とおくとき，$xy \neq 0$ に対して，x に関する偏導関数 $\dfrac{\partial F}{\partial x}$，および，$y$ に関する偏導関数 $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ を求めよ．

(新潟大 2001) (m20012004)

0.90 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x^2 + 2y^2) dxdy$ の値を求めよ．ただし，領域 D は

$D = \{(x, y) : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ y \leqq -2x + 1\}$ とする．

(新潟大 2001) (m20012005)

0.91 $f(x) = e^{\lambda x}$ として λ を求めることにより，次の微分方程式を解け．但し，a は正の定数である．

$$\frac{d^4}{dx^4} f(x) - a^4 f(x) = 0$$

(新潟大 2001) (m20012006)

0.92 以下の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．ここで $i^2 = -1$ である．

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

(新潟大 2001) (m20012007)

0.93 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & -10 & 14 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -6 & 7 \end{pmatrix}$ として，次の問に答えよ．

(1) 行の基本変形を行うことにより，A の階数 (rank) を求めよ．

(2) 連立方程式 $\quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ の全体のなすベクトル空間の基底を求めよ．

(新潟大 2001) (m20012008)

0.94 次の公式を示せ．

$$\vec{\nabla} \times\ (\vec{\nabla} r) = 0$$

ここで，$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ であり，$\vec{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z} \right)$ である．

(新潟大 2001) (m20012009)

0.95 周期 2π の関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

と書かれた時，$f(x)$ はフーリエ級数展開されたという．一般に，係数 a_n, b_n は

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

として求められる．今，$f(x)$ が，区間 $-\pi < x \leq \pi$ で

$$f(x) = x$$

である時，フーリエ級数の係数 a_n, b_n を求めよ．

(新潟大 2001)　　(m20012010)

0.96　$f(x)$ を微分可能な関数とし，$g(x) = \log f(x)$，$f(0) = \dfrac{1}{2}$，$f'(0) = \dfrac{8}{3}$ とする．曲線 $y = g(x)$ 上の点 $(0,\ g(0))$ における接線の方程式を求めよ．

(長岡技科大 2001)　　(m20012101)

0.97　不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$ を求めよ．

(長岡技科大 2001)　　(m20012102)

0.98　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 2^n}$ を求めよ．

(長岡技科大 2001)　　(m20012103)

0.99　球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の $z \leqq 0$ の部分でできる容器について以下の問いに答えよ．

(1)　水深 $h\,(0 < h \leqq 1)$ まで水を入れたとき，水の量を求めよ．

(2)　水をいっぱいに満たしてから静かに角度 $\theta\,(0 < \theta \leqq 90^\circ)$ 傾けるとき，こぼれる水の量を求めよ．

(長岡技科大 2001)　　(m20012104)

0.100　$y = e^{-2x}\sin 3x$ とする．

(1)　導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ および 2 階導関数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．

(2)　y が微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a\dfrac{dy}{dx} + by = 0$ の解となるような定数 a, b の値を求めよ．また，そのときの一般解を求めよ．

(長岡技科大 2001)　　(m20012105)

0.101　連立方程式 $\begin{cases} ax - y + 3z = 0 \\ x + y + az = 0 \\ x - ay + z = 0 \end{cases}$ が $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ 以外の解をもつような a を求めよ．

(長岡技科大 2001)　　(m20012106)

0.102　２人で行うゲームで A が勝つ確率を p，B が勝つ確率を q とし，引き分けはないものとする．A は 3 回勝ったら優勝，B は 2 回勝ったら優勝する．このとき以下の問いに答えよ．

(1)　A が優勝する確率 $P(A)$ を求めよ．

(2)　B が優勝する確率 $P(B)$ を求めよ．

(3)　$p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3}$ のとき $P(A)$ と $P(B)$ はどちらが大きいか．

(長岡技科大 2001)　　(m20012107)

0.103　(1)　関数 $\sin\dfrac{1}{x}$ を微分せよ．　　(2)　関数 $\sin^{-1} x$ を微分せよ．

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin^{-1}\frac{1}{x}$ を求めよ．

(金沢大 2001)　　(m20012201)

0.104　重積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{x}{y\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dxdy$ について次の問に答えよ．

ここに　$D = \left\{(x, y)\ :\ y \geq x \geq 0\ ,\ \dfrac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\right\}$　とする．

(1) D の形を図示せよ．

(2) 極座標変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ を用いて重積分 I の値を求めよ．

(金沢大 2001)　　(m20012202)

0.105 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ が成立するような行列 P と α, β, γ $(\alpha < \beta < \gamma)$ を求めよ．

(2) (1) で求めた行列 P とある対角行列 B に対し $X = PBP^{-1}$ とおく．$X^2 = A$ が成立するように行列 B を定めよ．

(金沢大 2001)　　(m20012203)

0.106 次の各問いの計算をせよ．

(1) $x = \log(y + \sqrt{y^2+1})$ を y について解け

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 1+0} \frac{x}{1-x^2}$，　$\displaystyle\lim_{x \to 1-0} \frac{x}{1-x^2}$　　(3) $\displaystyle\frac{d}{dx} e^{x \log x}$

(富山大 2001)　　(m20012301)

0.107 $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ a, b$ は正の定数）によって描かれる $x-y$ 平面上の図形 S について，以下の問いに答えよ．

(1) θ を消去して x, y のみたす関係式を導け．

(2) S の概形を描け．

(3) S 上の点 P $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ における S の接線 l の方程式を求めよ．

(4) l が x 軸，y 軸の両方に交わるとき，その交点をそれぞれ A, B とする．線分 AB の長さを求めよ．

(5) 線分 AB の長さの最小値を求めよ．

(富山大 2001)　　(m20012302)

0.108 次の各問いの計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{(x^2-1)^2}$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

(富山大 2001)　　(m20012303)

0.109 (1) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1} dx$ を求めよ．

(2) 微分方程式　$\displaystyle\frac{dy}{dx} = -\frac{x(y^2+1)}{y(x^2+1)}$　の一般解を求めよ．

(富山大 2001)　　(m20012304)

0.110 行列　$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　について以下の問いに答えよ．

(1) A の行列式を求めよ．

(2) $A^2,\ A^3,\ A^4$ を求めよ．

(3) A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(富山大 2001)　　(m20012305)

0.111 行列 $A=\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ．

(1) A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ．ただし，$\lambda_1 > \lambda_2$ とする．

(2) λ_1, λ_2 に対する固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ のうちで，長さが 1，第 1 成分が正のものを求めよ．

(3) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ は直交することを証明せよ．

(4) $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ とするとき，$\mathbf{x}=k_1\mathbf{v}_1+k_2\mathbf{v}_2$ をみたす実数 k_1, k_2 を求めよ．

(富山大 2001)　　(m20012306)

0.112 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$ を求めよ．

(福井大 2001)　　(m20012401)

0.113 以下の関数の 1 次導関数を求めなさい．

(1) $x^n e^{-x}$　　(2) x^x　　(3) $\cos^{-1} x^3$　　(4) $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}$　　(5) $\sin^{-1}(n\sin x)$

(福井大 2001)　　(m20012402)

0.114 口の直径 $8cm$，高さ $12cm$ の円錐形のろ過器に毎秒 $3cc$ の割合で注入される溶液が毎秒 $1cc$ の割合でろ過されるものとすれば，溶液の深さ $6cm$ となった瞬間において液面の上がる速さは毎秒何 cm か．

(福井大 2001)　　(m20012403)

0.115 以下の関数の増減，凹凸，極値を調べ，このグラフの概形を描け．また，このグラフに変曲点があればそれも調べよ．

$$f(x)=\frac{x}{x^2-1}$$

(福井大 2001)　　(m20012404)

0.116 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x^3-x}dx$　　(2) $\displaystyle\int e^{kx}x^3dx$　　(3) $\displaystyle\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$

(福井大 2001)　　(m20012405)

0.117 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\log(1+\tan\theta)d\theta$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cos x^2 dx$

(福井大 2001)　　(m20012406)

0.118 $f(x)$ が $x=a$ で 2 回微分可能のとき，テーラーの定理を用いて，以下の式が成立することを示しなさい．

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a)$$

(福井大 2001)　　(m20012407)

0.119 曲面 $z=x^2+y^2$ 上の点 (1,2,5) における単位法線ベクトルを求めよ．

(福井大 2001)　　(m20012408)

0.120 次の２重積分を求めよ．

$$\iint_D 2x|y|\ dxdy, \quad D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqq 1,\ x^2+y^2 \leqq 2x\}$$

(福井大 2001)　　(m20012409)

0.121 質量の m 物体が，速度の二乗に比例する抵抗力を受けながら重力場を落下しているとする．落下し始めてから十分時間が経ったときの落下速度を求めなさい．ただし，重力の加速度を $g = 9.8\ m/s^2$，抵抗力の比例係数を $c = 2\ Ns^2/m^2$ とする．

(福井大 2001)　　(m20012410)

0.122 次のような微分方程式の一般解を導きなさい．

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$　　(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + 2x = 0$

(福井大 2001)　　(m20012411)

0.123 次の微分方程式を解け．

(1) $2xydy + (1-y^2)dx = 0$　　(2) $xdy/dx + 2y = x^2$

(2) $d^2y/dx^2 - 3dy/dx + 2y = e^{3x}$　　(4) $d^2y/dx^2 + y = \cos x$

(福井大 2001)　　(m20012412)

0.124 ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の長さおよび $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めなさい．

(福井大 2001)　　(m20012413)

0.125 三つのベクトル $\mathbf{A}\ (2,-3,4)$, $\mathbf{B}\ (1,2,-1)$, $\mathbf{C}\ (3,-1,2)$ を３辺とする平行六面体の体積を求めよ．

(福井大 2001)　　(m20012414)

0.126 $(0,-2,0)$ を中心とする球上の点 $(1,-3,\sqrt{2})$ における接平面の方程式を求めよ．また，この接平面が３つの座標軸と交わる点をそれぞれ A, B, C とするとき，立体 $OABC$ の体積を求めよ．

(福井大 2001)　　(m20012415)

0.127 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を，対称行列と交代行列の和として表しなさい．

(福井大 2001)　　(m20012416)

0.128 以下の行列式を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} a & a^2 & b+c \\ b & b^2 & c+a \\ c & c^2 & a+b \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & 5 \end{vmatrix}$

(福井大 2001)　　(m20012417)

0.129 以下に二つの線型変換がある．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

(1) これらの行列による変換は平面上でどのような幾何学的意味を持つか説明せよ．

(2) $A,\ B$ による合成変換の行列を求めよ．

(3)　(2) で求めた合成変換の行列の逆変換行列を求めよ．

(4)　(2) で求めた合成変換によって，直線 $y = 3x + 2$ はどのような図形に変換されるか．

(福井大 2001)　　(m20012418)

0.130　行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(福井大 2001)　　(m20012419)

0.131　次の行列について以下のことを答えなさい．

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(1)　ベクトル $v = (1, 2)$ としたときの，Av を求めなさい．

(2)　A の行列式 $|A|$ を計算しなさい．

(3)　A の逆行列 A^{-1} を求めなさい．

(4)　A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(福井大 2001)　　(m20012420)

0.132　次の連立方程式を解け．$\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$

(岐阜大 2001)　　(m20012601)

0.133　$z = (ax^2 + bx + c)^n$ を微分せよ．

(岐阜大 2001)　　(m20012602)

0.134　(1)　関数を $x = a\sin t$，$y = b\cos t$ とするとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(2)　次の関数の概略図を描け．

(a) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$　　(b) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$　　(c) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(3)　ある曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

(岐阜大 2001)　　(m20012603)

0.135　２次曲線 $y = (x + 3)(x - 1)$ と直線 $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$ で囲まれた領域の面積を求めよ．

(岐阜大 2001)　　(m20012604)

0.136　次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $\cos^2 x$　　(2) $\dfrac{1}{a^2 - x^2}$

(岐阜大 2001)　　(m20012605)

0.137　３本の直線 $y = x$, $y = 2x$ および $x = 2$ で囲まれた３角形の不均質平板がある（長さの単位は [m] とする）．点 (x, y) における面密度が xy [kg/m^2] で与えられる時，この平板の質量 [kg] を求めよ．

(岐阜大 2001)　　(m20012606)

0.138　微分方程式 $y'' + y' - 2y = 0$ に対して，

(1)　一般解を求めよ．

(2)　初期値 $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$ が与えられたときの解を求めよ．

(岐阜大 2001)　　(m20012607)

0.139 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $9y\dfrac{dy}{dx}+4x=0$ (2) $x\dfrac{dy}{dx}+y=\sin x$

(岐阜大 2001) (m20012608)

0.140 二つの平面 $x+y+z=1$ と $x+3y-z=1$ との交線を表す方程式を求めよ．

(岐阜大 2001) (m20012609)

0.141 行列 $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\3&1&0\\0&1&4\end{bmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(岐阜大 2001) (m20012610)

0.142 行列 $A=\begin{bmatrix}5&4\\1&2\end{bmatrix}$ の行列式の値，固有値および固有ベクトルを求めよ．

(岐阜大 2001) (m20012611)

0.143 x の 2 次以下の多項式 $f(x)$ の作る線型空間を P_2 とする．P_2 の基底を $\{1,x,x^2\}$ とする時，線型変換

$$T:f(x)\to f(\alpha x+\beta)$$

を表現する行列を求めよ．

(岐阜大 2001) (m20012612)

0.144 ベクトル解析に関して以下の問いに答えよ．

(1) $f=e^x\sin y$ に対する勾配（grad f）を求めよ．

(2) ベクトル $\mathbf{v}=3xz\mathbf{i}+2xy\mathbf{j}-yz^2\mathbf{k}$ の発散（div $\mathbf{v}$）を求めよ．
(ただし，$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ はそれぞれ x-, y-, z- 方向の単位方向成分を表すものとする．)

(岐阜大 2001) (m20012613)

0.145 $\dfrac{2x+11}{x^2+x-6}$ を部分分数に分解せよ．

(豊橋技科大 2001) (m20012701)

0.146 2 次方程式 $x^2-ax+9=0$ が，以下のような二つの異なる実数解を持つように a の値の範囲を求めよ．

(1) 共に 1 より大きい実数解となる．

(2) 共に 1 より小さい実数解となる．

(3) 1 より大きい実数解と小さい実数解を一つずつ持つ．

(豊橋技科大 2001) (m20012702)

0.147 放物線 $y=x^2+x+2$ を x 軸方向に a, y 軸方向に b だけ平行移動したところ，$y=x^2-3x+5$ になった．a,b の値を求めよ．

(豊橋技科大 2001) (m20012703)

0.148 (1) $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=5$ のとき，$x+x^{-1}$ の値を求めよ．

(2) $(321)^a=1000,\quad (3210)^b=1000$ のとき，$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$ の値を求めよ．

(豊橋技科大 2001) (m20012704)

0.149 $\alpha,\ \beta$ が共に鋭角であり，$\sin\alpha = \dfrac{1}{3},\ \sin\beta = \dfrac{2}{3}$ のとき，$\tan(\alpha+\beta)$ を求めよ．

(豊橋技科大 2001) (m20012705)

0.150 以下に示す関数について次の各問に答えよ．

$$f(x) = \cos x + x\sin x$$

(1) 関数 $f(x)$ を微分せよ．

(2) $[-2\pi\,,\ 2\pi]$ の区間における関数 $f(x)$ の極値を求め，増減表を作成せよ．また，この関数の概形を描け．

(3) $[-2\pi\,,\ 0]$ および $[0\,,\ 2\pi]$ の区間における関数 $f(x)$ のそれぞれの最小点を結ぶ，直線の式 $g(x)$ を求めよ．そして，この直線 $g(x)$ と関数 $f(x)$ で囲まれる領域の面積を求めよ．

(豊橋技科大 2001) (m20012706)

0.151 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+4+6+\cdots+2n}{n^2}\right)$

(豊橋技科大 2001) (m20012707)

0.152 2 直線 $A: y = mx,\ B: y = -mx\ (m>0)$ と，y 軸上 $(y>0)$ に中心をもつ円を考える．

(1) 半径 r_0 の円を 2 直線に接するように描くとき，その中心の座標 $(0, y_0)$ を求めよ．

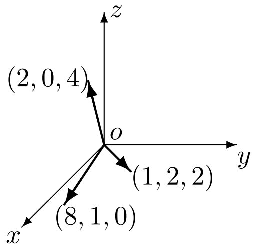
(2) 上の円の下に，この円と 2 直線に接するように半径 r_1 の円を描くことができる．この円の半径 r_1 を求めよ．

(3) 上の操作を順次行えば，無限個の円を描くことができる．$r_0 = 1$ から始めたとき，すべての円の面積の総和を求めよ．

(豊橋技科大 2001) (m20012708)

0.153 3 本のベクトル：

$$a = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

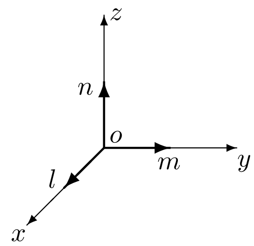


を 3 辺とする平行 6 面体を，これらを列ベクトルとする行列 A

$$A = (a, b, c) = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

で表すとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) この平行 6 面体と体積の等しい立方体を，下図に示す基底ベクトル (l, m, n) を用いて，上と同様に行列 $B = (l, m, n)$ で表せ．



(2) 平行 6 面体 A を，変数 $PA = B$ により体積の等しい立方体 B に変換する行列 P を求めよ．

(豊橋技科大 2001)　　(m20012709)

0.154 トランプの中からスペードの 1 から n までとハートの 1 から n までの合計 $2n$ 枚取り出して以下の遊びをする（ n は 13 以下の自然数）． $2n$ 枚の中から無作為に 2 枚取り出して，その 2 枚が同じ数字である場合には「ペア」と呼び，2 枚が同じマーク（すなわち 2 枚ともスペードであるか，2 枚ともハートであるかのどちらか）である場合には「フラッシュ」と呼び，2 枚が「1 と 2」,「2 と 3」, $\cdots$,「$n-1$ と n」のように続きの数字である場合には「ストレート」と呼ぶことにする．ただし，$n \neq 2$ の場合は,「n と 1」はストレートとは考えない．なお取り出した順番は関係ない．ストレートとフラッシュが同時に起こることもある．以下の問に答えよ．

(1) ペアになる確率を n を用いて表せ．

(2) ストレートになる確率を n を用いて表せ．

(3) フラッシュになる確率を n を用いて表せ．

(4) ペアになる確率とストレートになる確率とが等しくなるような n が存在するか否かを調べ，存在する場合はその n の値を求めよ．

(5) ペアになる確率よりストレートになる確率が高く，かつ，ストレートになる確率よりフラッシュになる確率が高いような n が存在するか否かを調べ，存在する場合はその n の値を求めよ．

(豊橋技科大 2001)　　(m20012710)

0.155 $\alpha > 1$ とする．a_1 を $\sqrt{\alpha}$ より大きい数とし，　$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + \dfrac{\alpha}{a_n})$　$(n = 1, 2, 3, \ldots)$
によって，数列 $\{a_n\}$ を定義する．次の問いに答えよ．

(1) $a_n \geq \sqrt{\alpha}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ を示せ．

(2) この数列 $\{a_n\}$ は収束することを示し，その極限値を求めよ．

(名古屋工業大 2001)　　(m20012901)

0.156 関数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ の領域 $x^2 + y^2 \leq 1$ における最大値，最小値を求めよ．

(名古屋工業大 2001)　　(m20012902)

0.157 曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ の xy 平面の上にある部分の面積を求めよ．

(名古屋工業大 2001)　　(m20012903)

0.158 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x,\ x^2 + y^2 \leq a^2\}$ のとき，　$I = \displaystyle\iint_D y\sqrt{x^2 + y^2}\ dxdy$
を求めよ．ただし a は正の定数とする．

(名古屋工業大 2001)　　(m20012904)

0.159 x の連続関数 y は次の等式を満たすとする．

$$y = -1 + \int_1^x (t - y(t))dt$$

(1) y は微分可能であることを示せ.

(2) y を求めよ.

(名古屋工業大 2001)　　(m20012905)

0.160 次の行列 A が対角化可能である必要十分条件は $a \neq b$ であることを示し，対角化可能な場合に $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2001)　　(m20012906)

0.161 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．ただし，a は実数とする.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の階数 (rank) を求めよ.

(2) $\overrightarrow{x}$ を列ベクトルとするとき，$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ となる $\overrightarrow{x}$ $(\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0})$ を求めよ.

(名古屋工業大 2001)　　(m20012907)

0.162 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(2) $y = \sinh^{-1}(x)$　　（ただし, $\sinh(y) = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$ である）

(奈良女子大 2001)　　(m20013201)

0.163 次の極限値は存在しますか．存在する場合はその極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x \log x$　　(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

(奈良女子大 2001)　　(m20013202)

0.164 次の関数のグラフの概形を描きなさい.

(1) $y = 2x^3 - 9x^2 + 18x$　　(2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$　　(3) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

(奈良女子大 2001)　　(m20013203)

0.165 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2(nx)dx$　　（n は正の整数）　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \log x\, dx$

(奈良女子大 2001)　　(m20013204)

0.166 $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ $(s > 0)$ に対して以下の等式を証明せよ.

(1) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$　　(2) $\Gamma(n) = (n-1)!$　（n は正の整数）

(2) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$　　（必要ならば $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}$ を使ってもよい）

(奈良女子大 2001)　　(m20013205)

0.167 次の定積分の値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int_0^1 (5x+7x^3)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-2}^1 |x|dx$

(奈良女子大 2001)　　(m20013206)

0.168 次の各数列は収束しますか，収束する場合はその極限値を求めなさい．

(1) $1+(-1)^n$　　(2) $\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2+n}$

(奈良女子大 2001)　　(m20013207)

0.169 式 (a) の微分方程式について以下の問いに答えよ．

$$\frac{dI(t)}{dt}+\lambda I(t)=v_0 \quad \cdots \quad (a)$$

ここで，$t \geq 0$，λ は正の定数，v_0 は正または 0 の定数である．

(1) $v_0=0$ の解は任意定数 C を用いて以下のように与えられることを示せ．

$$I(t)=C\exp(-\lambda t)$$

(2) $v_0 \neq 0$ の解は定数 C が時間に依存するものとして式 (a) に代入することによって得られる．初期条件 $I(0)=0$ を満たすような解を求め，$I(t)$ を t の関数として図示せよ．

(奈良女子大 2001)　　(m20013208)

0.170 ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ を次のように定めます．

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}5\\2\\6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}x\\y\\x\end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は一次独立ですか．

(2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は一次独立ですか．

(3) x と y の間にどのような関係があれば $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}$ は一次従属ですか．

(奈良女子大 2001)　　(m20013209)

0.171 ２次行列 A, B を次のように定めます．

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&5\\0&2\end{pmatrix}$$

(1) $AB=BA$ が成り立つことを確かめなさい．

(2) $AC=CA$ を満たすような行列 C をすべて求めなさい．

(奈良女子大 2001)　　(m20013210)

0.172 次の行列が逆行列を持つかどうか調べなさい．持つ場合にはその逆行列を求めなさい．

$$\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2001)　　(m20013211)

0.173 n 行 n 列の正方行列 A の転置をとり，さらに全ての成分の複素共役をとった行列を行列 A のエルミート共役といい，$A^\dagger$ と書く．つまり，

$$(A^\dagger)_{ij}=A^*_{ji} \quad (1 \leq i,j \leq n)$$

また，$A^\dagger=A$ であるとき，行列 A をエルミート行列と言う．エルミート行列に関して以下の問いに答えよ．

(1) エルミート行列の固有値は実数であることを証明せよ．

(2) エルミート行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交することを示せ．

(3) 下に示す行列 A はエルミート行列である．行列 A の固有値と固有ベクトルを求め，上記 (1)，(2) が成り立つことを確かめよ．

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2001)　　(m20013212)

0.174 $y=x^2\log x\ (x>0)$ のグラフの概形を描け．ただしグラフの凹凸は考えなくてよい．

(京都工芸繊維大 2001)　　(m20013401)

0.175 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^2\tan^{-1}x dx$ の値を求めよ．ただし $\tan^{-1}$ は $\tan$ の逆関数の主値である．

(京都工芸繊維大 2001)　　(m20013402)

0.176 自然数 $n\geqq 2$ に対して，
$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx,\ J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$$
とおく．次の (1),(2) を証明せよ．

(1) $I_n=J_n$　　(2) $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$

(京都工芸繊維大 2001)　　(m20013403)

0.177 (1) 自然数 $n=1,2,...$ に対して $n!\geqq 2^{n-1}$ が成り立つことを示せ．

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ は収束して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\leqq 2$ を満たすことを示せ．

(京都工芸繊維大 2001)　　(m20013404)

0.178 条件 $x^2+y^2-1=0$ の下で，関数 $f(x,y)=3x-y$ が極値をとり得る点をすべて求めよ．また，その点で極大か極小かも判定せよ．

(京都工芸繊維大 2001)　　(m20013405)

0.179 直線 $y=x$ と放物線 $y=-x^2+2x$ で囲まれた領域 D を図示し，D 上の重積分 $\displaystyle\iint_D y\,dxdy$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2001)　　(m20013406)

0.180 微分方程式 $y''-y'-2y=0$ の，初期条件 $y(0)=2,\ y'(0)=1$ を満たす解を求めよ．

(京都工芸繊維大 2001)　　(m20013407)

0.181 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(京都工芸繊維大 2001)　　(m20013408)

0.182 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 1 & 0 & a & 3 \\ 1 & 2 & a+2 & a \end{pmatrix}$ を考える．ただし，a は定数である．

(1) 行列 A の階数を求めよ．

(2) 次の連立 1 次方程式が解をもつように a の値を定め，その解を求めよ．

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & (a+1)z & = & 2 \\ x & & & + & az & = & 3 \\ x & + & 2y & + & (a+2)z & = & a \end{array}\right.$$

(京都工芸繊維大 2001)　　(m20013409)

0.183 行列 $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ 2 & 1 & -1 \\ a^2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ が固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ を持つような a の値を求めよ．また，このとき行列 A のすべての固有値及びの行列式を求めよ．

(京都工芸繊維大 2001)　　(m20013410)

0.184 行列に対する新たな演算子 $\otimes$ を考え，式の集合 $\mathcal{Z}$ を以下のように定義する．

(1) 各行列 $A_1,\ A_2, \ldots$ は $\mathcal{Z}$ に属する．

(2) $\mathcal{Z}$ に属する任意の式 $F,\ G$ に対し，式 $(F\otimes G)$ は $\mathcal{Z}$ に属する．

(3) $\mathcal{Z}$ は，上の２条件に該当する式だけを要素として含む．

このとき，式 $A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_n$ に対し，それが $\mathcal{Z}$ の要素となるように「括弧づけ」を行うことを考える．例えば，式 $A_1\otimes A_2\otimes A_3$ に対しては

$$((A_1\otimes A_2)\otimes A_3),\quad (A_1\otimes(A_2\otimes A_3))$$

の２通りの「括弧づけ」が存在する．また，式 $A_1\otimes A_2\otimes A_3\otimes A_4$ に対しては

$$(((A_1\otimes A_2)\otimes A_3)\otimes A_4),\quad ((A_1\otimes A_2)\otimes(A_3\otimes A_4))\quad ((A_1\otimes(A_2\otimes A_3))\otimes A_4)$$

$$(A_1\otimes((A_2\otimes A_3)\otimes A_4)),\quad (A_1\otimes(A_2\otimes(A_3\otimes A_4)))$$

の５通りの「括弧づけ」が存在する．以下では，式 $A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_n$ (ただし $n\ge 2$) に対する「括弧づけ」の個数を T_n と表す．

(1) 式 $A_1\otimes A_2\otimes A_3\otimes A_4\otimes A_5$ に対する「括弧づけ」を５通り示せ．

(2) $T_n\ge 2T_{n-1}$ が成り立つことを示せ．

(3) $T_n\ge 2T_{n-1}$ の結果および数学的帰納法を用いて, $T_n\ge 2^{n-2}$ が成り立つことを示せ．

(4) 式 $A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_n$ には $\otimes$ が $n-1$ 個現れていることに注意して，$T_n\le(n-1)!$ が成り立つことを示せ．

(大阪大 2001)　　(m20013501)

0.185 微分方程式　$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0$　の解 $y=y(x)$ を

(1) $b=-2a^2$,　　(2) $b=\dfrac{a^2}{4}$,　　(3) $b=2a^2$

の場合にそれぞれ求めよ．ただし，a は定数（実数）とする．

(大阪大 2001)　　(m20013502)

0.186 関数 $a(t),\ b(t)$ はある区間 I で連続であり，関数 $x_1(t)\neq 0$ は２階線形常微分方程式

$$x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=0$$

の区間 I における解である．このとき

(1) 下の関数 $x_2(t)$ もまた区間 I における解であることを示せ．

$$x_2(t)=x_1(t)\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\{x_1(\tau)\}^2}\exp(-\int_{t_0}^{\tau}a(s)ds)d\tau.$$

(2) ２つの解 $x_1(t),\ x_2(t)$ は互いに独立であることを示せ．

(大阪大 2001)　　(m20013503)

0.187 区間 $(0, \infty)$ 上で定義された実数値関数 $x(t)$ が次の積分方程式

$$x(t) = \int_0^t \sin(2(t-u)) \cdot x(u) du + t$$

を満たすとする．このとき，$x(t)$ を求めよ．

(大阪大 2001)　　(m20013504)

0.188 行列 $A = \begin{pmatrix} -t & t+1 \\ -t+1 & t \end{pmatrix}$ とする．

(1) A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) $C^{-1}AC$ が対角行列となるような正則行列 C，および，そのときの対角行列 $C^{-1}AC$ を求めよ．

(3) A^n を求めよ．ただし，n は正の整数である．

(大阪大 2001)　　(m20013505)

0.189 X_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ は 3 次の正方行列で，$X_{k+1} = AX_k + E$ が成り立つとする．

ここに，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，　$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，　$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　である．

このとき，X_n を求めよ．

(大阪大 2001)　　(m20013506)

0.190 A を正則行列とする．A の固有値の一つが λ のとき，$\frac{1}{\lambda}$ が A の逆行列 A^{-1} の固有値になることを示せ．

(大阪大 2001)　　(m20013507)

0.191 C は複素数平面上の円 $|z - i| = 1$ を表すとするとき，次の複素積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z-i} dz + \int_C \frac{1}{z+i} dz.$

(2) $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-i)^2} dz + \int_C \frac{i}{(z-i)(z+2i)} dz.$

(大阪大 2001)　　(m20013508)

0.192 X, Y は独立で，いずれも平均 0，分散 σ^2 を持つ確率変数であり，s, t, λ は実定数とする．2 つの確率変数

$$S = X \cos \lambda s + Y \sin \lambda s, \quad T = X \cos \lambda(s+t) + Y \sin \lambda(s+t)$$

を考えるとき，次の問に答えよ．

(1) S, T の平均，分散，共分散を求めよ．

(2) S, T の相関係数を求めよ．

(大阪大 2001)　　(m20013509)

0.193 $x > 0$ のとき $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$ が成り立つことを示せ．

（大阪府立大 2001）　　(m20013601)

0.194 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1\ ,\ 0 \leq y \leq 1 - x\}$ とするとき，次の積分を求めよ．

$$\iint_D e^{(x+y)^2} dx dy$$

（大阪府立大 2001）　　(m20013602)

0.195 $y=y(x)$ は

$$y''(x)-(x^2-1)y(x)=0\ ,\quad y(0)=1\ ,\ y'(0)=0$$

を満たすとする．

(1) $z(x)=y'(x)+xy(x)$ とおく．z が満たす微分方程式と $z(0)$ を求めよ．

(2) $z(x)$ を求めよ．

(3) 問い (2) を利用して，$y(x)$ を求めよ．

（大阪府立大 2001）　(m20013603)

0.196 次の行列 A に対して，以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{bmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A の各固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(3) A を対角化する行列 P を求めよ．

（大阪府立大 2001）　(m20013604)

0.197 V を n 次元実ベクトル空間とする．以下の問いに答えよ．

(1) V のすべてのベクトルが，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\cdots,\mathbf{a}_n$ の 1 次結合で表せるならば，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\cdots,\mathbf{a}_n$ は 1 次独立であることを示せ．

(2) f を V 上の 1 次変換とする．f が 1 次独立なベクトルの組を 1 次独立なベクトルの組に移すならば，f は同型写像であることを示せ．

（大阪府立大 2001）　(m20013605)

0.198 確率変数 X の確率密度関数が　$f(x)=\begin{cases} c(x^2-2x) & ,\quad 0\leq x\leq 2\ \text{のとき} \\ 0 & ,\quad \text{それ以外のとき} \end{cases}$

であるとする．以下の問いに答えよ．

(1) 定数 c の値を求めよ．　(2) 期待値 $E(X)$ を求めよ．

(2) 分散 $V(X)$ を求めよ．

（大阪府立大 2001）　(m20013606)

0.199 p を素数とする．任意の自然数 d は，

$$d=p^n m,\quad m\ \text{は}\ p\ \text{で割りきれない整数},\ n\ \text{は負でない整数}$$

と表せる．この n を $\mathrm{ord}_p(d)$ と表すことにする．次の各問いに答えよ．

(1) $\mathrm{ord}_p(ab)=\mathrm{ord}_p(a)+\mathrm{ord}_p(b)$ を示せ．

(2) $\mathrm{ord}_p(\mathrm{lcm}(a,b))=\max(\mathrm{ord}_p(a),\mathrm{ord}_p(b))$ を示せ．ここで，$\mathrm{lcm}(a,b)$ は a,b の最小公倍数，また $\max(\mathrm{ord}_p(a),\mathrm{ord}_p(b))$ は $\mathrm{ord}_p(a)$ と $\mathrm{ord}_p(b)$ の大きい方を表す．

(3) $\mathrm{ord}_p(a+b)\geq\min(\mathrm{ord}_p(a),\mathrm{ord}_p(b))$ を示せ．また $\mathrm{ord}_p(a)\neq\mathrm{ord}_p(b)$ のとき，等号が成立することを示せ．ここで，$\min(\mathrm{ord}_p(a),\mathrm{ord}_p(b))$ は $\mathrm{ord}_p(a)$ と $\mathrm{ord}_p(b)$ の小さい方を表す．

（神戸大 2001）　(m20013801)

0.200 $(-\infty, \infty)$ 上で定義された実数値関数 $f(x)$ が任意の $a \leq b,\ 0 < t < 1$ に対し

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

を満たすとき下に凸であるという．$f(x)$ を $(-\infty, \infty)$ 上で定義された微分可能な実数値関数とするとき，$f'(x)$ が単調増加なら $f(x)$ は下に凸であることを上の定義に基づいて示せ．

（神戸大 2001）　(m20013802)

0.201 関数 $f(x) = \sqrt{1+x},\ |x| < 1$ とするとき，次の各問に答えよ．

(1) n 次導関数 $f^{(n)}(x),\ n \geq 1$ を求めよ．

(2) $f(x)$ のマクローリン (Maclaurin) 展開を求めよ．

(3) (2) を利用して，$\sqrt{101}$ を小数第 5 位まで求めよ．

（神戸大 2001）　(m20013803)

0.202 次の関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y$ を求め，それらが原点で連続かどうか調べよ．

$$f(x,y) = xy \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

（神戸大 2001）　(m20013804)

0.203 $f(x,y)$ は何回でも微分できる関数とする．$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ g(r,\theta) = f(x,y)$ とするとき，以下の等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

（神戸大 2001）　(m20013805)

0.204 次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D (x+y)^4 dxdy, \qquad D = \{(x,y) \,|\, x^2 + 2xy + 2y^2 \leq 1\}$$

（神戸大 2001）　(m20013806)

0.205 次の微分方程式を解け．

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) - 3\frac{df}{dx}(x) + 2f(x) = 0, \qquad f(0) = \frac{df}{dx}(0) = 1$$

（神戸大 2001）　(m20013807)

0.206 次の行列 A の余因子行列 $\tilde{A}$ を求めよ．また A が正則であれば，その逆行列 A^{-1} を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（神戸大 2001）　(m20013808)

0.207 次の等式を示せ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ {x_0}^2 & {x_1}^2 & {x_2}^2 & \ldots & {x_n}^2 \\ {x_0}^3 & {x_1}^3 & {x_2}^3 & \ldots & {x_n}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_0}^{n-1} & {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \ldots & {x_n}^{n-1} \\ {x_0}^n & {x_1}^n & {x_2}^n & \ldots & {x_n}^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

（神戸大 2001）　(m20013809)

0.208 次の 3 元連立一次方程式の解を求めよ．

$$\begin{cases} ax+y+z &= 3a \\ x+ay+z &= 2a+1 \\ x+y+az &= a+2 \end{cases}$$

（神戸大 2001）　　(m20013810)

0.209 行列 A を次のようにするとき，次の各問に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) A^n $(n \geq 2)$ を求めよ．

（神戸大 2001）　　(m20013811)

0.210 A, B を $AB = BA$ を満たす n 行 n 列の行列とする．$\overrightarrow{u}$ を行列 A の固有ベクトルとするとき，$B\overrightarrow{u}$ が 0 ベクトルでなければ $B\overrightarrow{u}$ も行列 A の固有ベクトルであることを示せ．

（神戸大 2001）　　(m20013812)

0.211 次の各積分を求めよ．ただし $a > 0$ とする．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^a}$　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

(鳥取大 2001)　　(m20013901)

0.212 自然数 n に対し，$P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ とおく．このとき次の各問いに答えよ．

(1) $P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x)$ を求めよ．

(2) 自然数 n を固定する．各 $j = 0, 1, ..., n-1$ に対し，多項式 $\dfrac{d^j}{dx^j}(x^2-1)^n$ は x^2-1 で割り切れることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) 次の関係式が成り立つことを示せ．

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1} & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

ただし必要ならば $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\ dt = \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}$ を用いてよい．

(鳥取大 2001)　　(m20013902)

0.213 (1) $x > 0$ において，不等式 $\sqrt{1+x} < 1 + \dfrac{x}{2}$ を証明せよ．

(2) $\sin x$ をマクローリン展開し，はじめの 4 項を書け．

(3) 前問 (2) の結果をも使って，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ を求めよ．

(鳥取大 2001)　　(m20013903)

0.214 $x^2 - xy + y^2 = 1$ のとき，関数 $z = x + y$ の最大値および最小値を求めよ．

(鳥取大 2001)　　(m20013904)

0.215 次の積分を求めよ．ただし $a > 0$ とする．$\displaystyle\int_{x^2+y^2 \leqq 2ax} (x^2+y^2)^2\ dxdy$

(鳥取大 2001)　　(m20013905)

0.216 微分方程式 $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+6y=0$ の解のうちで，多項式で表わされるものを求めよ．

(鳥取大 2001) (m20013906)

0.217 区間 I 上の関数 $f(x)$ が，$x<y<z$ なる I の任意の 3 点 x,y,z に対して不等式
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$
を満たすとき，$f(x)$ は上に凸であるという．

(1) $f(x)$ が I 上で 2 回微分可能であり，$f''(x) \leq 0$ が任意の x で成り立つならば，$f(x)$ は上に凸であることを示せ．

(2) $f(x)$ が上に凸であれば，$x<y$ なる I の任意の 2 点 x,y と $0<a<1$ なる任意の実数 a に対して次の不等式が成り立つことを示せ．
$$f(ax+(1-a)y) \geq af(x)+(1-a)f(y)$$

(3) $\alpha,\beta>0, \alpha+\beta=1$ であれば，任意の $x,y>0$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ．
$$x^\alpha y^\beta \leq \alpha x+\beta y$$

(岡山大 2001) (m20014001)

0.218 点 (x,y) が原点を中心とする半径 1 の円周上を動きまわるとき，$x \geq 0,\ y \geq 0$ の範囲で以下の値の最大・最小を求めよ．

(1) $x+y$ (2) $x+y-rxy$ （ただし，r は正の実数）

(岡山大 2001) (m20014002)

0.219 正の数 a,b,c が $a+b+c=1$ を満たすとき，行列
$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$
に対し，次の問に答えよ．

(1) 1 は A の固有値であることを示せ．

(2) 1 以外の A の固有値を求め，それらの絶対値は 1 より小さいことを示せ．

(3) $\mathbf{x}$ を 3 次元のベクトルとするとき，n を限りなく大きくすれば，$A^n\mathbf{x}$ はある 3 次元ベクトルに限りなく近づくことを示せ．

(岡山大 2001) (m20014003)

0.220 次の関数を x で微分せよ． $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

(広島大 2001) (m20014101)

0.221 (1) 次の積分を計算せよ．ただし，n,m は自然数である．
$$\int_{-1}^{1} x\sin n\pi x dx \qquad \int_{-1}^{1} \sin n\pi x \sin m\pi x dx$$

(2) 次の等式を示せ．
$$\int_{-1}^{1}\left\{x-\sum_{k=1}^{n}\frac{2(-1)^{k-1}}{k\pi}\sin k\pi x\right\}^2 dx=\frac{2}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

(広島大 2001) (m20014102)

0.222 $F(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t} (x>0)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $F(x)$ は $x>0$ において強い意味での単調増加関数であることを示せ．

(2) $F(xy) = F(x) + F(y)$, $F(x/y) = F(x) - F(y)$ を示せ．

(3) $F(x^n) = nF(x)$（n : 有理数）を示せ．

(広島大 2001)　　(m20014103)

0.223　次の積分をせよ．　$$\int \frac{dx}{x^2+4}$$

(広島大 2001)　　(m20014104)

0.224　数列 $\{a_n\}$ の極限値が存在すれば，数列　$$\left\{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right\}$$
の極限値も存在し，両者は相等しいことを示せ．

(広島大 2001)　　(m20014105)

0.225　$z = xy$ なる面上の点 $P(2,-1,-2)$ において，この面の単位法線ベクトルを求めよ．

(広島大 2001)　　(m20014106)

0.226　三角形 OAB において，ベクトルを $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$ と定義し，$\angle OAB = \alpha$ とする．ベクトルの内積を用いて，三角形の 2 辺の長さの和は他の 1 辺より長くなることを示せ．

(広島大 2001)　　(m20014107)

0.227　4 点 $A(1,0,7)$, $B(2,1,8)$, $C(1,0,3)$, $D(2,2,9)$ を頂点とする 4 面体の体積を求めよ．

(広島大 2001)　　(m20014108)

0.228　行列 P の転置を ${}^tP$ と表す．n 次正方行列 P が ${}^tP = P$ を満たすとき対称行列といい，${}^tP = -P$ を満たすとき交代行列という．次の問いに答えよ．

(1) n 次正方行列 A に対して，次を示せ．

$$B = \frac{1}{2}(A + {}^tA), \quad C = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$$

とおくとき，B は対称行列，C は交代行列である．

(2) 次の正方行列 A を対称行列と交代行列の和で表せ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \\ 10 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

(広島大 2001)　　(m20014109)

0.229　n 次正方行列 A に対して固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とするとき，次を示せ．

$$|A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

(広島大 2001)　　(m20014110)

0.230　A を 3 次正方行列でその成分はすべて実数であり，$A^3 = I, A \neq I$ を満たすものとする．ただし，I は 3 次単位行列を表す．次の問いに答えよ．

(1) 行列 $A^2 + A + I$ は逆行列を持たないことを示せ．

(2) $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ を $A^2 + A + I$ の固有値 0 に対する固有ベクトルとする．ベクトルの組 $\mathbf{v}, A\mathbf{v}$ は 1 次独立であることを示せ．

(広島大 2001)　　(m20014111)

0.231　関数 $f(x) = x^2e^{-x}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の n 次導関数 $(n \geqq 1)$ が　$$(-1)^n\{x^2 - 2nx + n(n-1)\}e^{-x}$$
であることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(2) $f(x)$ の $x=0$ におけるテーラー級数展開を求めよ（一般項も記すこと）．

(広島市立大 2001)　　(m20014201)

0.232 2変数関数　$f(x,y)=x^3-3xy+3x+y^3-3y^2+3y$
の極値を求めよ．ただし，x,y は実変数とする．

(広島市立大 2001)　　(m20014202)

0.233 $D=\{(x,y)\mid 1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 4,\ y\geqq\ x,\ y\geqq\ -x\}$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) xy 座標平面上に D を図示せよ．

(2) 極座標変換により，D は D' にうつされる．D' を極座標を用いて表せ．

(3) 重積分　$\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy$　の値を求めよ．

(広島市立大 2001)　　(m20014203)

0.234 A,B を3次正方行列とし，それぞれの (i,j) 成分（第 i 行と第 j 列の交点にある成分）を $a_{ij},\ b_{ij}$ とする $(i,\ j=1,2,3)$．また，(i,i) 成分を対角成分とよび $(i=1,2,3)$，3次正方行列 X の対角成分の総和を $tr(X)$ と書く．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $C=AB$ とおく．C の (i,j) 成分を c_{ij} と書くとき，c_{ij} を A と B の成分を用いて表せ．

(2) $tr(AB)=tr(BA)$ を示せ．

(3) P を正則な3次正方行列，Q を3次正方行列とする．$tr(P^{-1}QP)=tr(Q)$ を示せ．

(広島市立大 2001)　　(m20014204)

0.235 次の行列 A について，以下の問い答えよ．

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & x \\ -5 & a & -2 \\ x & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) すべての実数 x に対して，A が正則であるための実数 a の範囲を求めよ．

(3) $a=3,\ x=-2$ のときの A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(広島市立大 2001)　　(m20014205)

0.236 次の2次方程式が2重解をもつように m の値を定め，そのときの解を求めよ．

$$x^2+(m-2)x+m-2=0$$

(山口大 2001)　　(m20014301)

0.237 $\sqrt{3}\sin x+\cos x$ を $r\sin(x+\alpha),\ r>0$ の形に表せ．

(山口大 2001)　　(m20014302)

0.238 次の連立方程式を解きなさい．　$x^2+xy=15$　,　$y^2+xy=12$

(山口大 2001)　　(m20014303)

0.239 次の方程式を解きなさい．　$\cos 3\theta+\cos\theta=0$　$(0\leqq\theta<2\pi)$

(山口大 2001)　　(m20014304)

0.240 次の式を因数分解せよ．　$x^2+y^2+2xy-2x-2y+1$

(山口大 2001)　　(m20014305)

0.241 次の式を $r\sin(x+\alpha),\ -\pi < \alpha \leqq \pi$ の形に表せ． $\sin x - \sqrt{3}\cos x$

(山口大 2001) (m20014306)

0.242 (1) $y = \log\left(x + (x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)$ で $\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい．

(2) $x = 1 - t^2,\ y = t^3$ の関係が成り立っているとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい．

（山口大 2001） (m20014307)

0.243 双曲線関数 $\sinh(x), \cosh(x)$ および $\tanh(x)$ は次のように定義される．

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

(1) $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$ を証明しなさい．

(2) $y = \tanh(x)$ のグラフを描きなさい．

(山口大 2001) (m20014308)

0.244 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{2x}$

(山口大 2001) (m20014309)

0.245 (1) 不定積分 $\displaystyle\int x\log x\ dx$ を求めなさい．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^3 x\,dx$ を求めなさい．

(山口大 2001) (m20014310)

0.246 x が非常に小さいとき，x の 3 次の項までの展開式で次の関数を近似しなさい．

(1) $\sin x$ (2) e^x

(山口大 2001) (m20014311)

0.247 次の微分方程式を解け． $xy' + y = x^2$

(山口大 2001) (m20014312)

0.248 次の微分方程式の一般解を求めなさい． $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$

(山口大 2001) (m20014313)

0.249 $y = xu$ とおいて，次の微分方程式の一般解を求めなさい．

$$x(x-y)\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

(山口大 2001) (m20014314)

0.250 (1) 次の行列式を展開して因数分解しなさい．

$$\begin{vmatrix} 1 & y+z & yz \\ 1 & z+x & zx \\ 1 & x+y & xy \end{vmatrix}$$

(2) 次の行列式の値を計算しなさい．

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 8 & 11 \\ 5 & 6 & 7 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{vmatrix}$$

(山口大 2001) (m20014315)

0.251 座標中の任意の点をある 2 行 2 列の行列 A で変換したとき，$y = ax$ に対して対称移動しました．この時の行列 A を求めなさい．

(山口大 2001)　(m20014316)

0.252 次の行列の固有値，固有ベクトルを求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(山口大 2001)　(m20014317)

0.253 次の行列の固有値，固有ベクトルを求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(山口大 2001)　(m20014318)

0.254 自然数 n に対し，$f_n(x) = nx^n - nx^{2n}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ とする．

(1) $f_n(x)$ の最大値を求めよ．　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ が成立することを示せ．

(徳島大 2001)　(m20014401)

0.255 (1) $f(x)$ は $0 \leqq x \leqq a$ において連続として

$$\iint_{D_a} f(x+y)dxdy = \int_0^a xf(x)dx,\quad D_a = \{(x,y);\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq a\}$$ を示せ．

(2) 次の積分を計算せよ．

$$\iint_{D_1} e^{-(x+y)^2}dxdy,\quad D_1 = \{(x,y);\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1\}$$

(徳島大 2001)　(m20014402)

0.256 微分方程式 $x^2y' + 2xy = 1$ $(x > 0)$ を考える．

(1) すべての解について $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x)$ を求めよ．

(2) $y(1) = y(2)$ となる解 $y(x)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた $y(x)$ のグラフを描け．

(徳島大 2001)　(m20014403)

0.257 (1) 次の行列の固有値を求めよ．

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(2) 最小な固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(徳島大 2001)　(m20014404)

0.258 実数 x の関数 $\varphi(x)$ および $\varphi_N(x)$ を

$$\varphi(x) = e^{-x^2},\quad \varphi_N(x) = N_\varphi(Nx) \qquad (N = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定義する．実係数の多項式 $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$ が与えられたものとして，次の各問いに答えなさい．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_N(x)p(x)dx$ の値を求めなさい．

(2) 実数 c に対して，極限 $\displaystyle \lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_N(x-c)p(x)dx$ の値を求めなさい．

なお，解答に必要なら $\displaystyle \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\sqrt{\pi}$ を用いてもよい．

（高知大 2001）　(m20014501)

0.259 自然数 n に対して $\displaystyle H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{H_n\}$ は発散することを示せ．　(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{H_n}{\log n}=1$ であることを示せ．

（高知大 2001）　(m20014502)

0.260 実数 x の関数 $\displaystyle S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k$ について，次の各問いに答えなさい．

(1) 等式 $\displaystyle S_n(x)=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ が成り立つことを示しなさい．

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}S_n(x)$ が収束する x の範囲を求めなさい．

(3) $S_n(x)$ の導関数 $S_n'(x)$ を求めなさい．

(4) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}S_n'(x)$ が収束する x の範囲を求めなさい．

（高知大 2001）　(m20014503)

0.261 3次元数ベクトル e_1,e_2,e_3（基本ベクトル）および a,b,c を

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad a=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$$

できめる．このとき，次の各問いに答えなさい．

(1) 実数を成分にもつ3次正方行列 A が，

$$Aa=e_1,\quad Ab=e_2,\quad Ac=e_3$$

を満たすとする．このとき，A,A^{-1} を求めなさい．

(2) 実数を成分にもつ3次正方行列 B が，

$$Ba=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\quad Bb=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\quad Bc=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

を満たすとする．このとき，B を求めなさい．

（高知大 2001）　(m20014504)

0.262 以下の問に答えよ．ただし，計算過程は書かなくともよい．

(1) 2次行列 $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めよ．

(2) 2次行列 $B=\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めよ．

(3) 4次行列 $C=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\1&0&3&2\\2&3&0&1\\3&2&1&0\end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めよ．

（高知大 2001 ）　(m20014505)

0.263 A を複素数を成分とする２次正方行列とし，ω を１の３乗根の一つとする．さらに

$$Ax_1 = \omega x_1, \quad Ax_2 = \omega^2 x_2$$

を満たすベクトル $x_1, x_2 (\neq 0)$ があったとする．このとき，次の各問いに答えなさい．

(1) $AP = P\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$ を満たす行列 P があることを示しなさい．

(2) $\omega \neq 1$ のとき，x_1, x_2 は一次独立であることを示しなさい．

(3) $\omega \neq 1$ のとき，A^3 を求めなさい．

（高知大 2001） (m20014506)

0.264 次の積分の計算をしなさい．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x}\log(1+\sin x)dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\infty} t^2 e^{-t} dt$

（九州大 2001） (m20014701)

0.265 次の積分の計算をしなさい．

$$\iint_D (x^2+y^2)^{1/4} dxdy, \quad ただし, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 4\}.$$

（九州大 2001） (m20014702)

0.266 $x(t)$ に関する微分方程式 $\displaystyle\frac{d^2x}{dt^2} + 20\frac{dx}{dt} + \alpha x = 0$ について考える．ただし，$\alpha > 0$ であるとする．

(1) $\alpha = 64$ とし，初期条件を $t = 0$ で $x = 1$，$\displaystyle\frac{dx}{dt} = 8$ としたときの微分方程式の解を求めよ．

(2) $t = 0$ で，$x = 1$，$\displaystyle\frac{dx}{dt} = -15$ であるとする．このとき，常に $x(t) > 0$ が成り立つような α の範囲を求めよ．

(九州大 2001) (m20014703)

0.267 a, b, c を実数とし $ac \neq 0$ とする．$xyz-$ 空間において，３点 $A(a, 0, 0), B(b, c, 0), C(0, 0, 1)$ を通る平面の方程式を $z = f(x, y)$ とする．次の設問に答えなさい．

(1) 関数 $f(x, y)$ を a, b, c を使って表しなさい．

(2) (x, y) が単位円周 $S = \{(x, y, 0) \,|\, x^2+y^2 = 1\}$ を動くとき，関数 $f(x, y)$ が最大値をとる点を $P \in S$ とし，原点を O とすると，２直線 OP と AB が互いに直交することを示しなさい．

（九州大 2001） (m20014704)

0.268 行列 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & a & 0 \\ a & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ について以下の各問いに答えよ．ただし，a は正の実数であるとする．

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) 行列の列 $A,\ A^2,\ A^3, \ldots$ が零行列でない定数行列 C に収束したとする．このとき，次の問いに答えよ．

(a) a の値を求めよ．

(b) 最大固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(c) 行列 C を求めよ．

(九州大 2001) (m20014705)

0.269 $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 3x_2 + x_3 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

について次の問に答えなさい．

(1) $\varphi(x) = Ax$ となる 3 次平方行列 A を求めなさい．

(2) A の行列式 $\det A$ を求めなさい．

(3) $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．$\varphi(e)$ を求めなさい．

(4) $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる $x \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めなさい．

(5) $V = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_3 = 0\}$ とする．$\varphi(V) = \{\varphi(x) \,|\, x \in V\}$ は部分空間であることを示し，さらにその次元を求めなさい．

（九州大 2001）　　(m20014706)

0.270 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

が与えられている．次の問に答えなさい．

(1) 4 次元複素ベクトル $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$ に対し，

$$z^* A z = |z_1|^2 + |z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_4|^2 + |z_4|^2$$

となることを示しなさい．ただし，$\overline{z_i}$ を z_i の共役複素数とするとき，$z^* = (\overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{z_3}, \overline{z_4})$.

(2) 行列 A は正定値行列であることを示しなさい．

（九州大 2001）　　(m20014707)

0.271 次の積分の値を求めたい．

$$I(p) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2p\cos\theta + p^2} d\theta, \quad 0 < p < 1$$

(1) 関係式

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad \text{および} \quad \frac{d}{d\theta} e^{i\theta} = i e^{i\theta}$$

を利用して，$I(p)$ を複素平面内の単位円周 C に沿っての線積分

$$I(p) = \int_C F(z) dz$$

と書き換えるには，$F(z)$ をどう定めたらよいか．

(2) 積分 $I(p)$ の値を求めよ．

(九州大 2001) (m20014708)

0.272 次の問いに答えよ．

(1) $\cos\omega t$ のラプラス変換を求めよ．

(2) $e^{at}\sin\omega t$ のラプラス変換を求めよ．

(3) 上記の結果を利用して，方程式

$$\int_0^t f(t-\tau)\cos\omega\tau d\tau = e^{at}\sin\omega t$$

を満たす関数 $f(t)$ を求めよ．

(九州大 2001) (m20014709)

0.273 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ を求めよ．

(2) 以下に順に答えよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を示せ．

(b) $1+\cos x = 2\left(\sin\dfrac{\pi-x}{2}\right)^2$ を示せ．

(c) 上の (a) と (b) を使って，$\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}$ を求めよ．

(3) $\dfrac{d}{dx}e^{x^x}$ を求めよ．

（九州芸術工科大 2001） (m20014801)

0.274 $y=\tan x$ $\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数（逆正接関数）を $y=\tan^{-1}x$ と書く．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $y=\tan^{-1}x$ の導関数を求めよ．

(2) $y=\tan^{-1}x$ の不定積分を部分積分法を用いて求めよ．

(九州芸術工科大 2001) (m20014802)

0.275 (1) $x^n\log x$ を積分せよ．ただし，log は自然対数．

(2) $I_1=\displaystyle\int e^{ax}\sin bx dx,\quad I_2=\int e^{ax}\cos bx dx$ を求めよ．

(3) 次を証明せよ． $\displaystyle\int_0^\pi xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$

（九州芸術工科大 2001） (m20014803)

0.276 $a_1=2$, $a_{n+1}=3\sqrt{a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で与えられる数列が収束することを,「上に有界な単調増加列は収束する」という定理を用いて示し，その極限値を求めよ．

(九州芸術工科大 2001) (m20014804)

0.277 E を 4 次単位行列とし，A を $A^2=O$ (O は零行列) なる 4 次正方行列とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 行列 $E+A$ が逆行列を持つことを示し，その逆行列が $E-A$ で与えられることを示せ．

(2) 上の問 (1) を利用して，次の行列 B の逆行列を求めよ．

$$B=\begin{pmatrix}1&0&a&b\\0&1&0&c\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

ただし，a,b,c は定数とする．

(九州芸術工科大 2001) (m20014805)

0.278 以下が成り立つことを示せ.

(1) A が正則のとき，$(A+B)A^{-1}(A-B)=(A-B)A^{-1}(A+B)$.

(2) 正方行列 A が正則行列 P によって対角化され，$P^{-1}AP=D=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ となるとき，自然数 n に対して，$P^{-1}A^nP=D^n$.

(3) 正方行列 A,B に対し $AB=A, BA=B$ のとき自然数 n に対して，$A^n=A$.

（九州芸術工科大 2001）　　(m20014806)

0.279 次の行列式を x について因数分解した形で求めよ．ただし，a,b,c は定数とする.

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 1\\ a & x & b & 1\\ a & b & x & 1\\ a & b & c & 1\end{vmatrix}$$

(九州芸術工科大 2001)　　(m20014807)

0.280 次の連立 1 次方程式に対して係数行列の行列式の値，係数行列の逆行列，および，解を求めよ.

$$\begin{cases} 2x+y+3z &= -1\\ x-y &= 2\\ -2x+y+z &= 1\end{cases}$$

（九州芸術工科大 2001）　　(m20014808)

0.281 行列 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ に対して固有値と固有ベクトルを求め，A を対角化せよ．また，A^n を求めよ.

（九州芸術工科大 2001）　　(m20014809)

0.282 以下の関数の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$

（佐賀大 2001）　　(m20014901)

0.283 以下の関数の 1 次常微分を求めなさい.

(1) $y=(2-x^2)^3$　　(2) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$　　(3) $y=\dfrac{1}{\log x}$　　(4) $y=\log|\sin x|$

（佐賀大 2001）　　(m20014902)

0.284 以下の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int\sin(2x+1)dx$　　(2) $\displaystyle\int e^{2x}\sin(3x)dx$　　(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-5x+6}$

(4) $\displaystyle\iint e^{(3x+2)}dxdx$　　(5) $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$　　(6) $\displaystyle\int\frac{\log x}{x}dx$

（佐賀大 2001）　　(m20014903)

0.285 x と y の関数 $z=e^{(x^2+y^2)}$ について偏微分 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を求めなさい.

（佐賀大 2001）　　(m20014904)

0.286 以下の常微分方程式を解きなさい.

(1) $\dfrac{dy}{dx}=x^2y^2$　　(2) $\dfrac{dy}{dx}-2y=3e^{5x}$

（佐賀大 2001）　　(m20014905)

0.287 $x > 0$ のとき，$0 < x\log(1+\dfrac{1}{x}) < 1$ であることを示せ．

（熊本大 2001）　(m20015201)

0.288 (1) 連続関数の中間値の定理について述べよ．

(2) $f(x)$ は区間 $I = [a, b]$ 上で定義されている連続関数とする．このとき，$f(x)$ が I 上単射であるための必要十分条件は $f(x)$ が I 上単調増加関数または単調減少関数であることを示せ．

注：$f(x)$ が I 上単調増加関数であるとは，$x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ ならば，$f(x_1) < f(x_2)$ であるとき，また単調減少関数であるとは，$x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ ならば，$f(x_1) > f(x_2)$ であるときをいう．さらに，I 上単射であるとは，$x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ ならば，$f(x_1) \neq f(x_2)$ であるときをいう．

（熊本大 2001）　(m20015202)

0.289 $\displaystyle\int_0^1 \sin^{-1} x dx$ の値を求めよ．

（熊本大 2001）　(m20015203)

0.290 $\displaystyle\iint_D \frac{1+x-y}{1+x+y}dxdy$ の値を求めよ．$D = \{(x, y)\,|\,0 \leqq\ x + y \leqq\ 1,\ 0 \leqq\ x - y \leqq\ 1\}$

（熊本大 2001）　(m20015204)

0.291 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 行列 A が逆行列をもつための $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ の条件を求めよ．

(2) A の逆行列を求めよ．

(3) A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(熊本大 2001)　(m20015205)

0.292 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して，

$$V_i = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\,|\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i) = 0\}\ (i = 1, 2), \qquad V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\,|\,\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2,\ (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})\}$$

とするとき，次のことを示せ．ここに，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の内積を表す．

(1) V_1, V_2 は $\mathbb{R}^3$ のベクトル部分空間である．

(2) $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\,|\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0\ ({}^\forall\boldsymbol{y} \in V_1 \cap V_2)\}$

（熊本大 2001）　(m20015206)

0.293 $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad ((x, y, z) \neq (0, 0, 0))$ において，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ を計算せよ．

(宮崎大 2001)　(m20015301)

0.294 関数 $f(x, y) = x^3 - 12xy + 6y^2$ の極値を求めよ．

(宮崎大 2001)　(m20015302)

0.295 重積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{x}{(x^2 + y)^2}dxdy$ に対して，次の各問に答えよ．

ただし，$D = \{(x, y)|\max(1, x^2) \leqq\ y \leqq\ 4, x \geqq\ 0\}$ とする．

(1)　D を図示せよ．　　　　　(2)　I の値を求めよ．

(宮崎大 2001)　　(m20015303)

0.296　(1)　次の微分方程式の一般解を求めよ．　$\dfrac{dx}{dt}+t^2x=0$

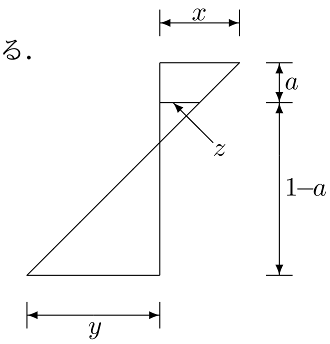
(2)　次の微分方程式を解け．　$\dfrac{dx}{dt}+t^2x=t^2\ ,\ x(0)=a$

(宮崎大 2001)　　(m20015304)

0.297　3 点 $O(0,0,0), A(1,2,1), B(2,0,-1)$ がある．2 つのベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ で張られる平面上の点で点 $C(6,1,5)$ までの距離を最小にする点 X の座標を求めよ．

(宮崎大 2001)　　(m20015305)

0.298　右の図形の長さ z を x, y, a を用いて求めよ．
ただし，z の位置は上部の三角形にあるものとする．



（鹿児島大 2001）　　(m20015401)

0.299　次の極限値を求めよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}$

（鹿児島大 2001）　　(m20015402)

0.300　関数 $y=x\sqrt{x-x^2}$ の増減，極値，凹凸を調べ，グラフの概形を示せ．

（鹿児島大 2001）　　(m20015403)

0.301　次の関数を微分せよ．

(1)　$y=(3x+2)(3x^2+6x+1)$　　(2) $y=2x/(x^2+5)$　　(3) $y=\sin^2 5x$

（鹿児島大 2001）　　(m20015404)

0.302　次の関数の増減を調べ，極値を求めよ．また，そのグラフの概形をかけ．

$y=x(1-x)^{2/3}$

（鹿児島大 2001）　　(m20015405)

0.303　関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$ の x に関する 3 次の導関数 $f^{(3)}(x)$ を示し，$f^{(3)}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ．

（鹿児島大 2001）　　(m20015406)

0.304　置換積分法を用いて，次の不定積分を求めよ．ただし，$a\neq0$

(1)　$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$　　$(x=a\sin\theta$とおく$)$　　(2)　$\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}dx$　　$(x=a\sin\theta$とおく$)$

(2)　$\displaystyle\int\frac{1}{1+\cos x}dx$　　$\left(t=\tan\dfrac{x}{2}\right.$とおく$\left.\right)$

（鹿児島大 2001）　　(m20015407)

0.305　次の関数を積分せよ（不定積分を求めよ）．

(1)　$7x^2+5x-1$　　　(2) e^x-5/x

（鹿児島大 2001）　(m20015408)

0.306　定積分　$\displaystyle\int_0^2 |e^x-e|dx$　を求めよ．

（鹿児島大 2001）　(m20015409)

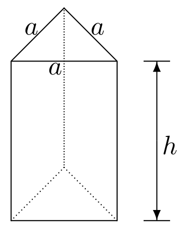
0.307　積分 $\displaystyle\int t^2\cos t dt$ を求めよ．

（鹿児島大 2001）　(m20015410)

0.308　$\tan\dfrac{x}{2}=t$ と置くとき，積分 $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}dx$ を求めよ．

（鹿児島大 2001）　(m20015411)

0.309　断面の一辺の長さ a，長さが h の三角柱の体積が最大になるように a と h を定めるとき，a と h の比を求めよ．
ただし，$a+h=20$ とする．



（鹿児島大 2001）　(m20015412)

0.310　$O-x,y,z$ 座標系における二つの平面

$$x+2y+2z=3 \qquad\qquad 3x+3y+z=1$$

に関して以下の問いに答えよ．

(1)　二つの平面の交線の方向ベクトルを求めよ．

(2)　二つの平面の交角を求めよ．

（鹿児島大 2001）　(m20015413)

0.311　ベクトル $\boldsymbol{a}=(4,3)$ に垂直な単位ベクトルを求めよ．

（鹿児島大 2001）　(m20015414)

0.312　行列 $[A]=\begin{bmatrix} a & 10 & 2 \\ b & 5 & 1 \\ 15 & c & 5 \end{bmatrix}$ $(a,b,c$ は実数$)$ に関して以下の問いに答えよ．

(1)　行列 $[A]$ が正則となる条件を，a,b,c を用いて表せ．

(2)　行列 $[A]$ が正則でないのは，平面上の三直線

$$l_1: ax+10y=2 \qquad\qquad l_2: bx+5y=1 \qquad\qquad l_3: 15x+cy=5$$

に対して，どのような場合か．この場合の a,b,c の値を求めよ．

（鹿児島大 2001）　(m20015415)

0.313　次の行列 $[A]$ とベクトル $\{C\}$ が次のように与えられているとき，$[A][A],[A]\{C\}$ を求めよ．

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \{C\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

（鹿児島大 2001）　(m20015416)

0.314 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & 4 \end{pmatrix}$ のとき，A と B が可換（すなわち $AB = BA$）であるように a, b の値を定めよ．このとき $C = (AB)^2 - A^2B^2$ の値を求めよ．

（鹿児島大 2001）　(m20015417)

0.315 行列 $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ が $[A]^2 - 4[A] + 5[I] = [O]$ を満たすとき，

$[A]^5$ および $[A]^{-1}$ をそれぞれ求めよ．

ただし，$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$[O] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とする．

（鹿児島大 2001）　(m20015418)

0.316 a, b, c をそれぞれ任意の数とするとき，次の行列式に関して

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)$$

となることを示せ．

（鹿児島大 2001）　(m20015419)