[選択項目] 年度：2002 年

0.1 次の $\boxed{\quad}$ 内に当てはまる整数を入れよ．

(1) 有理関数について，$\dfrac{4(3+3x-x^2)}{(x-1)^2(x+1)} = \dfrac{\boxed{\text{(j)}}}{x-1} + \dfrac{\boxed{\text{(k)}}}{(x-1)^2} + \dfrac{\boxed{\text{(l)}}}{x+1}$ である．

(2) 有理関数 $y = \dfrac{4(3+3x-x^2)}{(1-x)^2(1+x)}$ の 6 次導関数は $y^{(6)} = \dfrac{\boxed{\text{(m)}}}{(1-x)^7} + \dfrac{\boxed{\text{(n)}}}{(1-x)^8} + \dfrac{\boxed{\text{(o)}}}{(1+x)^7}$ である．

(秋田大 2002)　(m20020401)

0.2 次の $\boxed{\quad}$ 内に当てはまる整数を入れよ．注意：log は自然対数で，π は円周率である．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \boxed{\text{(p)}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log|\cos x|}{x^2} = \frac{1}{\boxed{\text{(q)}}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log|1-x^2|}{\log|\cos x|} = \boxed{\text{(r)}}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{2^{\sin x}-2}{\log|\sin x|} = \log \boxed{\text{(s)}}$

(秋田大 2002)　(m20020402)

0.3 次の $\boxed{\quad}$ 内に当てはまる整数を入れよ．注意：log は自然対数で，π は円周率である．

(1) $\displaystyle\int_2^3 \frac{4(3+3x-x^2)}{(x-1)^2(x+1)}dx = \log\frac{3}{\boxed{\text{(t)}}} + \boxed{\text{(u)}}$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \log x dx = \boxed{\text{(v)}}$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^4 dx = \boxed{\text{(w)}}$

(4) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-4x}\sin x dx = \frac{1}{\boxed{\text{(x)}}}$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{\boxed{\text{(y)}}}$

(秋田大 2002)　(m20020403)

0.4 次の $\boxed{\quad}$ 内に当てはまる整数を入れよ．

行列 $\dfrac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ の逆行列は $\begin{pmatrix} \boxed{\text{(a)}} & \boxed{\text{(b)}} & \boxed{\text{(c)}} \\ \boxed{\text{(d)}} & \boxed{\text{(e)}} & \boxed{\text{(f)}} \\ \boxed{\text{(g)}} & \boxed{\text{(h)}} & \boxed{\text{(i)}} \end{pmatrix}$ である．

(秋田大 2002)　(m20020404)

0.5 (1) 座標平面上で, 直線 $y=x$ に関する対称変換（線形変換）を表す行列 A を求めよ.

(2) 行列 A の固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) (2) で求めた固有値, 固有ベクトルの幾何的意味を考え, そこから行列 A が直線 $y=x$ に関する対称変換を与えることを説明せよ.

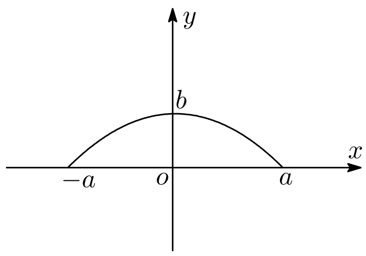
(東京大 2002)　(m20020701)

0.6 図の曲線は点 $(0,b)$ を頂点とする放物線の一部を表している. 以下の問に答えよ.

(1) 曲線を x 軸まわりに回転させる場合にできる立体の体積を求めよ.

(2) 区間 $-a \leq x \leq a$ における曲線の長さを求めよ.

(3) 曲線を y 軸まわりに回転させる場合にできる曲面の凸側面積を求めよ.



(東京大 2002)　　(m20020702)

0.7 (1) $\cos t$, $\sin t$ を e^{it}, e^{-it} の関数として表せ.

(2) 関数

$$f(u) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n \cos(2nu) \tag{1}$$

が与えられたとき,

$$a_n = \frac{1}{2N+1} \tag{2}$$

（ただし $0 \leq n \leq N$）とすると,

$$f(u) = \frac{A}{B} \tag{3}$$

の形に変形することができる. A と B とを求めよ. 途中の計算式も示すこと.

(3) 関数

$$g(u) = 2\sum_{n=1}^{N} a_n \cos\{(2n-1)u\} \tag{4}$$

が与えられている.

$$a_n = \frac{1}{2N} \tag{5}$$

（ただし $0 \leq n \leq N$）としたとき, 関数 $g(u)$ はどのような形に変形することができるか. できるだけ簡単な形で記せ. 途中の計算も示すこと.

(東京大 2002)　　(m20020703)

0.8 方程式

$$z^{17} = 1$$

を満たす複素数のうち, 1 でないものをひとつとり, ω とする. 以下の問に答えよ.

(1) この方程式を満たす 1 でない複素数は,

$$\omega^{\pm 1}, \ \omega^{\pm 2}, \ \omega^{\pm 3}, \cdots, \ \omega^{\pm 8}$$

で全てであることを示せ.

(2)

$$f_n = \omega^n + \omega^{-n}$$

と書くとき, 以下の各式が成り立つことを示せ.

$$f_i f_j = f_{i+j} + f_{i-j}\,,$$

$$f_{-i} = f_i\,,$$

$$f_{i+17} = f_i\,.$$

(3)

$$f_1 + f_2 + f_4 + f_8 = \alpha_0\,,$$

$$f_3 + f_5 + f_6 + f_7 = \alpha_1$$

とおくと, α_0 , α_1 は方程式

$$X^2 + X - 4 = 0$$

の 2 解であることを示せ.

(4)

$$f_1 + f_4 = \beta_0\,,$$

$$f_2 + f_8 = \beta_1\,,$$

$$f_3 + f_5 = \beta_2\,,$$

$$f_6 + f_7 = \beta_3\,,$$

とおくと, β_0 , β_1 は方程式

$$X^2 - \alpha_0 X - 1 = 0$$

の 2 解で, β_2 , β_3 は方程式

$$X^2 - \alpha_1 X - 1 = 0$$

の 2 解であることを示せ.

(5) f_1 , f_4 を 2 解とする 2 次方程式を一つ作れ. さらにこれを用いて, ω の満たす 2 次方程式を一つ作れ, 必要ならば係数に α_0〜α_3 , β_0〜β_3 などを用いてよい.

(東京大 2002) (m20020704)

0.9 0 1 1 0 0 1 0 1 1 . . . のような, 0 と 1 からなる数字列がある. 数字列の先頭から $i+1$ 番目の数字は, 確率 $x(0<x<1)$ で i 番目と同じ数字が現れる. なお数字は, 数字列の先頭を 1 番とする.

(1) 数字列の位置から数えた場合, 同じ数字がちょうど n 個連続してあらわれる確率 $P(n)$ を求めよ.

(2) (1) の場合, 同じ数字が連続する個数の期待値 L を求めよ. ただし,

$$\lim_{n\to\infty} nx^n = 0 \quad (0<x<1)$$

を用いてよい.

(3) 数字列の先頭から j 番目の数字が 0 である確率 Q_j をとするとき, Q_{j+1} を Q_j を用いてあらわせ.

(4) 数字列の先頭が 0 であるとき, Q_j を x, j を用いてあらわせ.

(東京大 2002) (m20020705)

0.10 (1) 次の積分を求めよ. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + 2e^{-x} + 3} dx$

(2) $\varphi(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \log(1 - 2a\cos x + a^2)dx$ なる積分において,

(a) $2\varphi(a) = \varphi(a^2)$ が成り立つことを示せ.

(b) $\varphi(a)$ を求めよ. ただし, $|a| \neq 1$ とする.

(東京工業大 2002) (m20020801)

0.11 (1) 次の関数をマクローリン展開し, ゼロでない最初の 3 項を示せ. $\tan^{-1} x$

(2) 次の級数の収束域を求めよ. $\displaystyle\frac{2}{1\cdot 3} + \frac{3x}{2\cdot 4} + \frac{4x^2}{3\cdot 5} + \cdots\cdots$

(東京工業大 2002) (m20020802)

0.12 極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を考える．$(x, y) = (0, 0)$ 以外で定義された C^2 級関数 $f(x, y)$ について　$\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$　を r, θ に関する偏微分を用いて表わせ．

(東京工業大 2002)　(m20020803)

0.13 $a > 0$ に対して積分　$\displaystyle\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$　の値を求めよ．

(東京工業大 2002)　(m20020804)

0.14 a を実数とするとき，次の行列の階数を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(東京工業大 2002)　(m20020805)

0.15 A, B を２次正方行列とする．次の命題が正しければ証明し，正しくなければ反例をあげよ．

(1) λ が A の固有値で，μ が B の固有値のとき，$\lambda\mu$ は AB の固有値である．

(2) A は正則行列とし，λ が A の固有値とすると，$\lambda \neq 0$ であり λ^{-1} は A^{-1} の固有値である．

(東京工業大 2002)　(m20020806)

0.16 ２次曲面

$$2x^2 + y^2 + z^2 - xy + yz - zx + 10x - 9 = 0$$

の標準形を求めよ．

(東京工業大 2002)　(m20020807)

0.17 次の極限値を求めなさい．ただし，与えられた関数 $f(x)$ は，$x = a$ で微分可能とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a + 2h) - f(a - 3h^2)}{h}$

(千葉大 2002)　(m20021201)

0.18 a をパラメータとして，次の定積分を求めなさい．　$I(a) = \displaystyle\iint_D xy\, dxdy$

ここで，$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x + y \leq a\}$

(千葉大 2002)　(m20021202)

0.19 次の微分方程式の初期条件を満たす解を求め，$x \geq 0$ の範囲で解曲線を図示しなさい．

$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 2\cos x$　　初期条件 ： $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

(千葉大 2002)　(m20021203)

0.20 次の２次形式について，以下の問いに答えなさい．

$$f(x, y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2$$

(1) $f(x, y)$ は２次の実対称行列 A とベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いて，次のように書き直すことができる．

$$f(x, y) = F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$$

A を求めなさい．ここで，$\mathbf{x}^T$ は $\mathbf{x}$ の転置を表わす．

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．次に，２次曲線 $f(x, y) = 1$ を，固有ベクトルの方向を新しい座標軸とする座標系 $O - X, Y$ で表わし，その概形を示しなさい．

(千葉大 2002)　(m20021204)

0.21 x を変数とする関数を $f(x)$ とする．複素単位を $i=\sqrt{-1}$ として，

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

によって決まる ω の関数 $F(\omega)$ を関数 $f(x)$ のフーリェ変換という．$F(\omega)$ から逆に $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

によって求めることができる．この変換を逆フーリェ変換という．

関数 $F(\omega)$ を ω で微分することを考える．

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

より微分と積分とを入れ換えると，

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\omega}\Big(f(x)e^{-i\omega x}\Big)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\Big(-ixf(x)e^{-i\omega x}\Big)dx$$

となり，関数 $(-ix)f(x)$ のフーリェ変換が $\dfrac{d}{d\omega}F(\omega)$ であることがわかる．このことを利用して以下の設問に答えなさい．ただし，ここで扱う全ての関数は微分と積分との順序を交換できる性質を満たしていることを仮定する．

(1) ω に関する $F(\omega)$ の決める関数 $\dfrac{d^2}{d\omega^2}F(\omega)$ が関数 $(-x^2)f(x)$ のフーリェ変換であることを示しなさい．

(2) 逆フーリェ変換が $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ になる関数を $F(\omega)$ によって表しなさい．

(3) 微分方程式

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}-x^2f(x)=-(2n+1)f(x)\,,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0 \qquad (*)$$

の解 $f(x)$ のフーリェ変換 $F(\omega)$ が満たす微分方程式を導きなさい．ただし，n は零以上の整数である．

(4) 設問 (3) の結果から，式 $(*)$ の微分方程式の解のフーリェ変換に関する性質を 50 字程度で述べなさい．

(千葉大 2002)　　(m20021205)

0.22 実数 θ に対して　$f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}x^n$　とおく．

(1) 右辺の級数は　$|x|<1$　で収束することを示せ．

(2) $f'(x)=\dfrac{\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$ を示せ．　$\left[\text{ヒント}:\sin t=\dfrac{1}{2i}\left(e^{it}-e^{-it}\right)\right]$

(埼玉大 2002)　　(m20021401)

0.23 n は自然数とする．正の定数 a に対して

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2+y^2\leq a^2\ ,\ y\geq 0\right\}$$

とおく．このとき　$\displaystyle\iint_D x^n y\,dxdy$　を求めよ．

(埼玉大 2002)　　(m20021402)

0.24 $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を次のように定義する．

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

さらに，$\boldsymbol{x}$ の長さを $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ と定義する．

次の (1),(2),(3) に答えよ．

(1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して不等式 $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq ||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}||$ が成り立つことを証明せよ．

(2) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して不等式 $||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|| \leq ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||$ が成り立つことを証明せよ．

(3) 上の (1),(2) において等号が成立するための必要十分条件を求めよ．

(埼玉大 2002)　　(m20021403)

0.25 n 次正方行列 A が次のように与えられているとする．ただし，$n \geq 2$ とする．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & .\cdot^{\cdot} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .\cdot^{\cdot} & .\cdot^{\cdot} & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，$A = LU$ となる下三角行列 L，上三角行列 U は存在しないことを証明せよ．

(埼玉大 2002)　　(m20021404)

0.26 放物線 $y = x^2 + 2x - 2$ を x 軸の方向へ a，y 軸の方向へ b だけ平行移動する．

(1) 平行移動した後の放物線の方程式を a, b を使って示せ．

(2) 平行移動した後も放物線が点 (1, 1) を通るとき，a, b が満たすべき必要十分条件を求めよ．

(3) a, b が (2) で求めた必要十分条件を満たしていれば，平行移動した後の放物線の頂点はある曲線の上に必ず乗る．その曲線の方程式を求めよ．

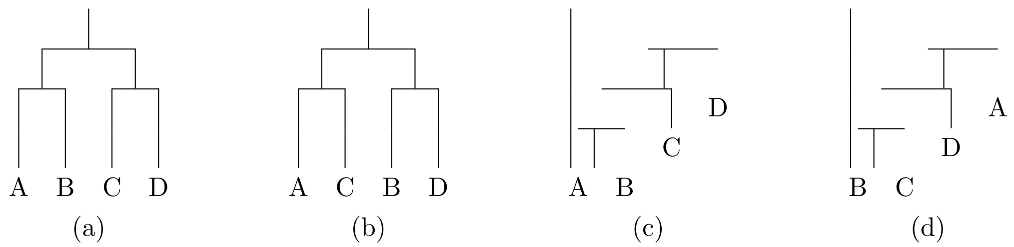
(図書館情報大 2002)　　(m20021601)

0.27 A, B, C, D の 4 人がトーナメント戦で優勝を争う．

A と B，C と D はそれぞれ同程度の強さで，互いに対戦したとき勝つ確率はそれぞれ 0.5 であり，

一方 A，B は C，D より強く，対戦したとき A（または B）が勝つ確率は 0.7 とする．

下の図の (a)-(d) 組み合わせで対戦を進めたとき，それぞれの場合に A が優勝する確率を求めよ．



(図書館情報大 2002)　　(m20021602)

0.28 n 個の数 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ の最大値を $\max(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ で表す．例えば $\max(1,2)=2$, $\max(3,1,3)=3$ である．同様に $\min(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ は $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ の最小値を表す．

(1) max を使って $|a|$ を表す式を示せ．

(2) max を使って $\min(a,b)$ を表す式を示せ．

(3) 絶対値記号を使って $\max(a,b)$ を表す式を示せ．

(4) max, min を使って，a,b,c の 3 数を大きい順に並べた場合，真中にくる値を表す式を示せ．例えば 3 数が 7, 2, 3 であれば 3 が，1, 1, 2 であれば 1 が求める式の値になる．

ただし，式には各問ごとに指定された，max，min 絶対値記号のほか，四則演算記号（単項マイナス：$-a$ を含む）やカッコ類，1,2 のような定数だけを使ってよい．

(図書館情報大 2002)　　(m20021603)

0.29 整数 x の n 乗 x^n を計算するときに，次の漸化式

$$x^k = \begin{cases} x^\ell \times x^\ell & (k=2\ell\text{のとき}) \\ x^{2\ell} \times x & (k=2\ell+1\text{ のとき}) \end{cases}$$

を再帰的に適用すると効率よく求められることが，2200 年以上前から知られている．

(1) $n=15$ のとき，上の漸化式を適用して x^{15} を分解すると，

$$\begin{aligned} x^{15} &= x^{\boxed{ア}} \times x \\ x^{\boxed{ア}} &= x^{\boxed{イ}} \times x^{\boxed{イ}} \\ x^{\boxed{イ}} &= x^{\boxed{ウ}} \times x \\ x^{\boxed{ウ}} &= x^{\boxed{エ}} \times x^{\boxed{エ}} \\ x^{\boxed{エ}} &= x^{\boxed{オ}} \times x \\ x^{\boxed{オ}} &= x^{\boxed{カ}} \times x^{\boxed{カ}} \end{aligned}$$

となるので，これを下の行から逆順にたどれば，x^{15} が 6 回の乗算で求められる．

(2) $n=15$ に対して (1) は実は最短手順ではなく，途中の値を 1 個保存することにより，5 回の乗算で x^{15} を求めることができる．その手順の 1 つは，

$$\begin{array}{lllll} x & \times & x & \longrightarrow & x^2 \\ x^{\boxed{キ}} & \times & x^{\boxed{ク}} & \longrightarrow & x^{\boxed{ケ}} \\ x^{\boxed{コ}} & \times & x^{\boxed{サ}} & \longrightarrow & x^{\boxed{シ}} \\ x^{\boxed{ス}} & \times & x^{\boxed{セ}} & \longrightarrow & x^{\boxed{ソ}} \\ x^{\boxed{タ}} & \times & x^{\boxed{チ}} & \longrightarrow & x^{15} \end{array}$$

（ただし，$x^{\boxed{ツ}}$を保存した.）

と表される.（$\boxed{キ}$～$\boxed{ツ}$には同じ数字が入る箇所もある．また，$\boxed{キ}$と$\boxed{ク}$のように交換可能なものについては，解答順は問わない.）

(図書館情報大 2002)　　(m20021604)

0.30 1～n の番号が書かれた n 個の玉と，1～k の番号が書かれた k 個の箱があり，各箱には任意の個数の玉を入れることができるものとする．このとき,「n 個の玉のすべてを，いずれかの箱に入れる方法」の総数を考える．

(1) 玉の個数 n を固定する．箱の個数 k が以下の各条件を満たすとき,「すべての箱に 1 個以上の玉が入る」ような入れ方はそれぞれ何通りあるか，数値または n の式で表せ．

（ア） $k=1$　　（イ） $k=2$　　（ウ） $k=n-1$　　（エ） $k=n$

(2) 箱の個数 k を固定する．玉の個数 n が以下の各条件を満たすとき,「どの箱にも 2 個以上の玉が入らない」ような入れ方はそれぞれ何通りあるか，数値または k の式で表せ．

（ア） $n=2$　　（イ） $n=k$　　（ウ） $n=k+1$

(図書館情報大 2002)　　(m20021605)

0.31 以下の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{ク}$ にあてはまる式あるいは数値を解答欄に記せ．ただし $\boxed{エ}$ には複数の値が入る．

- 以下で $\log x$ は 10 を底とする常用対数 $\log_{10} x$ を指す．
- 特に $\log 2 = 0.301030$（小数第 7 位を四捨五入したもの）である．
- 実数 x $(x \geq 1)$ に対し，$\log x$ の小数部分を $L(x)$ で表す．例えば $\log 20 = 1 + \log 2$ より $L(20) = L(2)$ であり，これを小数点以下 4 位まで記すと 0.3010 である．

(1) 実数 x $(x \geq 1)$ を 10 進表記したとき，最高位の数字が d, $(d = 1, 2, \ldots, 9)$ であるのは

$$\boxed{ア} \leq L(x) < \boxed{イ}$$

のときである．

(2) 特に $d = 1$，つまり最高位が 1 である場合について考える．実数列 a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ が $\log a_n = 0.3 \times n$ を満たすとき，a_n の最高位が 1 になるのは n を $\boxed{ウ}$ で割った余りが $\boxed{エ}$ のときである．（ $\boxed{エ}$ には条件を満たすものすべてを記せ）．

(3) $L(2^3) = \boxed{オ}$ $\quad L(2^4) = \boxed{カ}$ $\quad L(2^{20}) = \boxed{キ}$

ただし値は小数第 5 位を四捨五入した小数第 4 位までの数値で答えよ．

(4) n が 1 から 50 までの整数値をとるとき，2^n の最高位の数字が 1 になる場合は $\boxed{ク}$ 通りある．

(図書館情報大 2002) (m20021606)

0.32 関数 $g(x) = xe^{-\frac{x}{2}}\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)$ について以下の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{ク}$ にあてはまる値を求めよ．

(1) $g(x) = 0$ を満たす x の値は $\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$ である．

(2) $g(x)$ の傾きが 0 となる x の値は $\boxed{ウ}$, $\boxed{エ}$ である．

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} g(x)dx = \boxed{オ}$ である．

(4) $g(x)$ のマクローリン展開の第 3 次までの項は

$$g(x) \approx \boxed{カ}\, x + \boxed{キ}\, x^2 + \boxed{ク}\, x^3$$

となる．ただし関数 $f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \cdots$$

である．

(図書館情報大 2002) (m20021607)

0.33 平面 π : $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ と点 A:(1,2,3) について，以下の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{オ}$ を求めよ．

(1) π は x 軸と点 $\boxed{ア}$, y 軸と点 $\boxed{イ}$, z 軸と点 $\boxed{ウ}$ でそれぞれ交わる．

(2) π に垂直で長さが 1 の法線ベクトルは $\boxed{エ}$ である．

(3) A と π との距離は $\boxed{オ}$ である．

(図書館情報大 2002) (m20021608)

0.34 以下の (1)-(5) の行列の積が定義されるかどうか判断し，定義されない場合には×を，定義される場合には積の計算結果を，解答欄に記入せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(図書館情報大 2002) (m20021609)

0.35 $A = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$ とする．

(1) A の固有値と，対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) 実対称行列 X で，次の 2 つの条件（ア），（イ）の両方を満たすものを求めよ．

（ア）$X^2 = A$　　　（イ）固有値がすべて正

(図書館情報大 2002)　　(m20021610)

0.36 a, b, c を定数として，3 次関数

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

を考える．このとき以下の問に答えよ．

(1) 関数 $y = f(x)$ のグラフにおいて，点 $(\alpha, f(\alpha))$ における接線と法線の方程式を求めよ．

(2) どのような場合に，関数 $y = f(x)$ が $x = \alpha$ で極値をとるといわれるのかを説明せよ．

(3) 関数 $y = f(x)$ が x のいかなる値でも極値をとらない条件を a, b, c を用いて示せ．

(茨城大 2002)　　(m20021701)

0.37 (1) 次の等式が $x = -1$ を除くすべての実数 x について成立するように，4 つの定数 A, B, C, D を求めよ．

$$\frac{3x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)(x + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x + 1} + \frac{D}{(x + 1)^2}$$

(2) 次の定積分を求めよ．　$\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)(x + 1)^2} dx$

(茨城大 2002)　　(m20021702)

0.38 (1) 関数 $f(x) = \sin x$ に対して，$f^{(n)}(0)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ．

(2) $\sin x$ のマクローリン展開（0 のまわりでのテイラー展開）をかけ．

(3) $\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{1}{x^\alpha} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = 0$ となる正の定数 α の条件を求めよ．

(茨城大 2002)　　(m20021703)

0.39 (1) $P(x, y) = 2x^m(y + x^2)$, $Q(x, y) = -x^{m+1}(1 + x^2) + y$ とするとき，$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ となるように m を定めよ．

(2) (1) で求めた m を考えるとき，微分方程式 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ の一般解を求めよ．

(茨城大 2002)　　(m20021704)

0.40 (1) 下記の方程式をみたす x の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 2 - x & 1 & 0 \\ 1 & 2 - x & 1 \\ 0 & 1 & 2 - x \end{vmatrix} = 0$$

(2) 次の連立 1 次方程式をクラメルの公式を用いて解け．

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & & +2x_3 & = & -1 \end{cases}$$

（この公式を知らないときは，公式を用いないでよい．）

(茨城大 2002)　　(m20021705)

0.41 行列 $A = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$ について

(1) A の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(2) ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を A の固有ベクトルの 1 次結合で表せ．

(3) 自然数 n に対して，$A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ．

(茨城大 2002)　　(m20021706)

0.42 次の複素積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_C \mathrm{Re}(z)dz,\ C: 0$ から $1+i$ に至る線分，ただし，$\mathrm{Re}(z)$ は z の実部を表す．

(2) $\displaystyle\int_{|z+1|=1} \frac{1}{z^2-1}dz$, ただし，積分路は正の向きにとる．

(茨城大 2002)　　(m20021707)

0.43 $\dfrac{d\sin^{-1}x}{dx}$ を計算せよ．

(山梨大 2002)　　(m20021801)

0.44 $\displaystyle\int \frac{\sin^{-1}x}{x}dx$ を計算せよ．

(山梨大 2002)　　(m20021802)

0.45 $f(x,y)=x^2y$ として，次の問に答えよ．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) 領域 $D=\{(x,y)\mid y \geqq x,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ を xy–平面上に図示せよ．

(3) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dy\,dx$ を求めよ．

(4) D での $f(x,y)$ の最大値を求めよ．

(山梨大 2002)　　(m20021803)

0.46 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=y^2$ の解を求めよ．

(山梨大 2002)　　(m20021804)

0.47 (1) $1+x^3$ を実数の範囲で因数分解せよ．

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^3}dx$ を求めよ．

(3) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=(x+y+1)^3$ を解け．

(山梨大 2002)　　(m20021805)

0.48 微分可能な関数を成分とする n 次正方行列 $A=(f_{ij}(x))$ の微分を，$\dfrac{dA}{dx}=\left(\dfrac{df_{ij}(x)}{dx}\right)$ となる n 次行列と決める．このとき，次の問に答えよ．

(1) 微分可能な関数を成分とする n 次正方行列 A,B に対し，$\dfrac{dAB}{dx}=\dfrac{dA}{dx}B+A\dfrac{dB}{dx}$ が成立することを示せ．

(2) $\dfrac{dA^{-1}}{dx}=-A^{-1}\dfrac{dA}{dx}A^{-1}$ が成立することを示せ．

(山梨大 2002)　　(m20021806)

0.49 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，A の行列式の値および逆行列を求めよ．

(山梨大 2002)　　(m20021807)

0.50 (1) $y = |x-1|$ のグラフを描け．

(2) $y = \big||x-1|-1\big|$ のグラフを描け．またこのグラフと軸とで囲まれる図形の面積を求めよ．

(3) $y = \Big|\big||x-1|-1\big|-1\Big|$ のグラフを描け．またこのグラフと x 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ．

(新潟大 2002)　　(m20022001)

0.51 (1) $y = x^x (x > 0)$ を微分せよ．　　(2) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x \log x$ の値を求めよ．

(新潟大 2002)　　(m20022002)

0.52 数列 $\{a_n\}$ に対して，$a_n \to \alpha \ \ (n \to \infty)$ の定義は,「任意の $\varepsilon > 0$ に対してある番号 n_0 があって，$n \geq n_0$ である任意の n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ」である．

$a_n \to \alpha \ \ (n \to \infty)$, $a_n \to \beta \ \ (n \to \infty)$ であるとき，$a_n + b_n \to \alpha + \beta \ \ (n \to \infty)$ が成り立つことを上の定義に従って証明せよ．ただし，α, β は実数とする．

(新潟大 2002)　　(m20022003)

0.53 次の問いに答えよ．

(1) A を n 次正方行列とし，E, O をそれぞれ n 次単位行列，n 次零行列とする．このとき，次の (a),(b) を示せ．

(a) 正の整数 m に対して
$$E - A^m = (E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{m-1})$$
が成り立つ．

(b) ある正の整数 m に対して $A^m = O$ となるとき，$E - A$, $E + A$ は共に正則（逆行列を持つこと）である．

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$A^3 = O$ であることを示せ．さらに $(E-A)^{-1}$ および $(E+A)^{-1}$ を求めよ．

(新潟大 2002)　　(m20022004)

0.54 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値を λ_1, λ_2 ($|\lambda_1| > |\lambda_2|$) とし，対応する固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ とする．

(1) λ_1, λ_2, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ を求めよ．

(2) 正の実数 a, b をとり，
$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
と定める．このとき a, b の選び方によらずに極限値 $L = \displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$ が定まることを示し，その値 L を求めよ．

(新潟大 2002)　　(m20022005)

0.55 関数 $f(x) = \log(1+x)$, $x > -1$ について，次の問いに答えよ．ただし，$\log$ は自然対数とする．

(1) $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ にマクローリンの定理を当てはめ，次の不等式を証明せよ．

$$\left|\log 1.1 - 0.095\right| < \frac{1}{3000}$$

(金沢大 2002)　　(m20022201)

0.56 不等式 $\displaystyle\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy < \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ を利用して次の問いに答えよ．

ただし，$D_1 = \{(x, y) : 0 \leqq\ x \leqq\ 1\ ,\ 0 \leqq\ y \leqq\ 1\}$，$D_2 = \{(x, y) : x \geqq\ 0\ ,\ y \geqq\ 0\ ,\ x^2 + y^2 \leqq\ 2\}$ とする．

(1) $\displaystyle\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy < \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$ を示せ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx < \sqrt{\frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)}$ を示せ．

(金沢大 2002)　　(m20022202)

0.57 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x + ay + az = 0 \\ ax + y + az = 0 \\ ax + ay + z = 0 \end{cases}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $x = y = z = 0$ 以外の解をもつように a の値を定めよ．

(2) 上で定めた a の値に対して，この方程式の解を求めよ．

(金沢大 2002)　　(m20022203)

0.58 次の関数のすべての極値を求め，グラフの概形をかけ．

(1) $y = -\cos 2x + 2\cos x \qquad (0 \leq x \leq 2\pi)$

(2) $y = e^{1-x^2}$　　　　(3) $y = x^3 e^{-x}$

(名古屋大 2002)　　(m20022801)

0.59 3 次元空間内の原点を O，点 A の位置ベクトルを $a = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ で表す．

点 A を通り，方向ベクトルが $\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$ $(\neq 0)$ である直線 l が与えられている．

(1) 直線 l を表す方程式を書け．

(2) 空間内に位置ベクトル $p = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ である点 P が任意に与えられたとき，点 P に最も近い直線 l 上の点を Q とする．点 Q の位置ベクトル $q = \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ を，$q = Lp + b$ の形で表せ．

ただし，L, b は直線 l だけで定まり，p, q には無関係な行列およびベクトルをそれぞれ表す．

(3) 行列 L の階数を求めよ．

(4) 行列 L のすべての固有値と固有ベクトルを求めよ．

(名古屋大 2002)　　(m20022802)

0.60 次のようにサイコロを振る場合を考える．各問いに答えよ．

(1)　1つのサイコロを振り，最初に出た目が偶数のときはもう1度，奇数のときはもう2度振る．出る目の数の合計の期待値を求めよ．

(2)　1つのサイコロを振り，1が出たら再びサイコロを振り，1が出る限りサイコロを振り続け，2から6が出たら終了する．出る目の数の合計の期待値を求めよ．

(3)　2つのサイコロを同時に振って，出る目の数の和が素数である確率を求めよ．

(名古屋大 2002)　　(m20022803)

0.61　次の式を因数分解せよ．

(1) $pqx^2-(p^2-q^2)x-pq$　　　(2) $x^3-2x^2-16x+32$

(三重大 2002)　　(m20023101)

0.62　$a \leq x \leq a+1$ において関数 $f(x)=x^2-10x+8a$ の最小値を $g(a)$ とするとき，$g(a)$ を最小にする a の値と最小値を求めよ．

(三重大 2002)　　(m20023102)

0.63　2次方程式 $x^2-12x+k=0$ の1つの解が他の解の2乗になるとき，定数 k の値を定めよ．

(三重大 2002)　　(m20023103)

0.64　点 $\mathrm{P}(x, x^2)$ は，放物線 $y=x^2$ 上の点で2点 $\mathrm{A}(-1,1)$, $\mathrm{B}(3,9)$ の間にある．このとき，$\triangle\mathrm{APB}$ の面積の最大値を求めよ．

(三重大 2002)　　(m20023104)

0.65　a を実数とする放物線 $C: y=x^2+2ax-a^2+5a+4$ が与えられたとき，以下の問いに答えよ．

(1)　a が動くとき，放物線 C の頂点の軌跡が描く放物線の式を求めよ．

(2)　放物線 C が他の放物線 $y=-x^2-6x$ と2点で交わるときの a の範囲を求めよ．

(三重大 2002)　　(m20023105)

0.66　3次関数 $f(x)=-x^3+ax^2+x$ が，区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ で極大値，極小値をとるような定数 a の値の範囲を定めよ．

(三重大 2002)　　(m20023106)

0.67　関数の微分の定義は次式で与えられる．

$$h'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}$$

この極限値が存在するとき，関数 $h(x)$ は微分可能であるという．

上の定義を用いて，次の定理を証明しなさい．

【定理】
関数 $f(x)$ と $g(x)$ が微分可能であれば，$f(x)+g(x)$ は微分可能であり，次の公式が成り立つ．

$$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$$

(三重大 2002)　　(m20023107)

0.68　関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ は，$x=1$ で極小値 $y=-5$ をとる．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　a と b を求めよ．　　　(2)　関数 $f(x)$ の極大値を求めよ．

(三重大 2002)　　(m20023108)

0.69 任意の 1 次関数 $g(x)$ に対して

$\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$ および $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)dx = 2$ の 2 つの条件を満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ．

(三重大 2002)　　(m20023109)

0.70 次の不定積分を計算しなさい．　$\displaystyle\int x^2 e^x dx$

(三重大 2002)　　(m20023110)

0.71 底面の半径が a，高さが a の直円柱がある．この底面の直径 AB を含み，底面と $30°$ の傾きをなす平面で直円柱を 2 つの部分に分けるとき，小さいほうの立体の体積を求めよ．

(三重大 2002)　　(m20023111)

0.72 区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ で定義された 2 つの関数 $s_1(x), s_2(x)$ が次の性質をもつとしょう．

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{s_1(x)\}^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \{s_2(x)\}^2 dx = 1\ , \quad \int_{-\pi}^{\pi} s_1(x)s_2(x)dx = 0$$

(1) 定積分 $f(a,b) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \{x - as_1(x) - bs_2(x)\}^2 dx$ を最小にする a, b を与える表式を求めなさい．(定積分の形になる．)

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \{x - a\sin x - b\sin 2x\}^2 dx$ を最小にする a, b の値を求めなさい．

(三重大 2002)　　(m20023112)

0.73 $y = f(x)$ に関して，次の微分方程式の一般解を求めなさい．　$x^2 \dfrac{dy}{dx} = y$

(三重大 2002)　　(m20023113)

0.74 次の 4 つのベクトルの中から，一次独立な 3 つのベクトルの組を全てあげ，その理由を示しなさい．

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(三重大 2002)　　(m20023114)

0.75 m は実数とする．

$A = \begin{pmatrix} m & m+3 \\ 1-m & -m \end{pmatrix}$ について

(1) A が逆行列を持たないとき，A^2 を求めよ．

(2) A の逆行列が A 自身であるように，m の値を定めよ．

(三重大 2002)　　(m20023115)

0.76 連立方程式 $\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$ を，逆行列を用いて解きなさい．

(三重大 2002)　　(m20023116)

0.77 ベクトル $(1, 2)$ に行列を掛けると

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

のように（一般には）向きと大きさが異なるベクトル $(-3, -3)$ が得られるが，他方

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のようにその方向を変えない特殊なベクトル (x, y) が存在することもある．後者のようなベクトルは，この行列の**固有ベクトル**と呼ばれ，その長さが何倍となったか

（a の値）は**固有値**と呼ばれる．このような方向をもったベクトル (x,y) を求めよ．また，ベクトルの長さは何倍になっているか．

(三重大 2002)　　(m20023117)

0.78　次の関数の導関数を求めよ．

(1)　$y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$　　(2)　$y=\tan^{-1}(1+x)$

(奈良女子大 2002)　　(m20023201)

0.79　$f(x)=|x-1|$ とおく．

(1)　関数 $f(x)$ のグラフを描け．　　(2)　$a\neq 1$ のとき微分係数 $f'(a)$ を求めよ．

(2)　関数 $f(x)$ は $x=1$ で微分可能か．

(奈良女子大 2002)　　(m20023202)

0.80　次の定積分を求めよ．

(1)　$\displaystyle\int_0^1(1+x)\sqrt{1-x}dx$　　(2)　$\displaystyle\int_0^{\pi/2}x\sin x dx$

(奈良女子大 2002)　　(m20023203)

0.81　$t>0$ に対して，$F(t)=\displaystyle\int_0^t(2x^3-3x^2-x+1)dx$ とおく．

(1)　$F(1)$ を求めよ．　　(2)　導関数 $F'(t)$ を求めよ．

(2)　$G(s)=\displaystyle\int_0^{e^{-s}}(2x^3-3x^2-x+1)dx$ とおく．導関数 $G'(s)$ を求めよ．

(奈良女子大 2002)　　(m20023204)

0.82　次の各数列は収束するか，収束する場合はその極限値を求めよ．

(1) $\dfrac{2n^2-n}{n^2+1}$　　(2) $\dfrac{(-1)^n}{n}$　　(3) $(-1)^n\dfrac{n-1}{n}$　　(4) $\dfrac{2^n}{n!}$

(奈良女子大 2002)　　(m20023205)

0.83　次の微分方程式を解け．初期条件として，$t=0$ のとき位置は $x=x_0$，速度を v_0 とする．ここで，k は実数である．

(1)　$\dfrac{d^2x}{dt^2}-k^2x=0$　　(2)　$\dfrac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0$

(奈良女子大 2002)　　(m20023206)

0.84　2 次行列 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1)　$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$ を満たす $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を求めよ．

(2)　零行列でない 2 次行列 B で $AB=O$ を満たすものを求めよ．

(3)　零行列でない 2 次行列 C で $AC=CA=O$ を満たすものを求めよ．

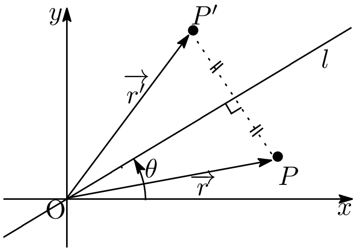
(奈良女子大 2002)　　(m20023207)

0.85　原点 O を通る角度 θ 方向の直線 l に関して，空間の点 P（位置ベクトルを $\overrightarrow{r}$）を点 P'（位置ベクトルを $\overrightarrow{r'}$）へ反転させる作用（R_θ と記す）を考える．

$$\overrightarrow{r}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\quad\longrightarrow\quad\overrightarrow{r'}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=R_\theta\overrightarrow{r}$$

このとき，反転の作用は次のように表わせることを示せ．

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$



(奈良女子大 2002)　　(m20023208)

0.86 次の行列について以下の問いに答えよ．

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) 固有値を求めよ．

(2) 得られた各々の固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(奈良女子大 2002)　　(m20023209)

0.87 $\mathbf{R}^3$ のベクトル a, b, c を次のように定める．

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) a, b は一次独立であることを示せ．

(2) a, b, c は一次従属であることを示せ．

(3) $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^2$ への線形写像 f で

$$f(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(c) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を満たすものが存在しないことを示せ．

(奈良女子大 2002)　　(m20023210)

0.88 (1) 関数 $f(x)$ および $g(x)$ は $x = a$ において，$f(a) = g(a) = 0$ であり，$f'(a)$ および $g'(a)$ が存在する．このとき，$g'(a) \neq 0$ であれば，次の式が成り立つことを示せ．

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

(2) 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x}$

(京都大 2002)　　(m20023301)

0.89 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = 7\cos 3x$ を　$\left(\dfrac{d}{dx} + 3i\right)\left(\dfrac{d}{dx} - 3i\right) y = 7\cos 3x$　と書く．

$z = \left(\dfrac{d}{dx} - 3i\right) y$ と置くことにより，上の微分方程式は $\left(\dfrac{d}{dx} + 3i\right) z = 7\cos 3x$ となる．これを用いて，上の微分方程式の一般解を以下の問いに従って求めよ．

(1) $\dfrac{dz}{dx} + 3iz = 7\cos 3x$ の解 z を求めよ．

(2) 上の解 z を使って，$\dfrac{dy}{dx} - 3iy = z$ の解 y を求めよ．

(京都大 2002)　　(m20023302)

0.90 n 行 n 列の行列 A が対角化可能とは，ある正則行列 P とその逆行列 P^{-1}，および，ある対角行列 Λ を用いて

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

と表現できることである．

(1) 対角化可能な行列 A があるとき，これを対角化する手順について説明せよ．

(2) 次で与えられる 3 行 3 列の行列 A を実際に対角化し，行列 P と対角行列 Λ を与えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(京都大 2002)　　(m20023303)

0.91 z 平面（のある領域）で定義された 1 次分数変換 $w = f(z)$ で，領域 $\{z \mid |z-1| < 1\}$ を $\{w \mid \mathrm{Im}w > 0\}$ に写像し，かつ $f(\frac{1}{2}) = i$，$f(0) = 0$ であるようなものを求めよ．

次に，この写像による領域 $V = \{w \mid 0 < \mathrm{Im}w < 1\}$ の現像 $f^{-1}(V)$ を図示せよ．

(京都大 2002)　　(m20023304)

0.92 関数 $f(z)$ を次のように定義する．

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{e^z - 1} & (z \neq 0) \\ 1 & (z = 0) \end{cases}$$

この関数は $|z| < 2\pi$ において解析的である．テイラー展開を

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

のように表し，ベルヌーイ数 B_n，$n = 0, 1, 2, \cdots$ を定義する．$B_0 = 1$，$B_1 = -\frac{1}{2}$ を示せ．さらに，$(e^z - 1)f(z) = z$ のべき級数展開から，B_n が次の漸化式を満たすことを示せ．

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0$$

ただし，$\binom{n}{k}$ は 2 項係数を表す．

(京都大 2002)　　(m20023305)

0.93 関数 $f(z)$ は $z = a$ において m 位の極 (m は正の整数) をもつとする．

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = \lim_{z \to a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big((z-a)^m f(z)\Big)$$

を証明せよ．ただし，C は $z = a$ を囲む適当なサイズの単純閉曲線である．

(京都大 2002)　　(m20023306)

0.94 N を 0 または正の整数をとる確率変数とする．ポアソン分布では $N = n$ となる確率が次の分布関数で与えられる．

$$p(N = n) = a^n e^{-a}/n!$$

(1) ポアソン分布の平均値 $< n >= \sum_0^\infty np(N=n)$ が a となることを示せ.

(2) 面積 S の運動場に全部で M 粒の雨滴が落ちたとする．運動場の微少な部分（面積 A）に落ちた雨滴の数を L とするとき，その確率分布 $p(L=l)$ は $p=A/S$ として次の 2 項分布で与えられる．

$$p(L=l)=[M!/l!(M-l)!]p^l(1-p)^{M-l}$$

$a=(M/S)A$ を導入し，適切な極限を考えることにより 2 項分布からポアソン分布を導け.

(京都大 2002)　　(m20023307)

0.95 $y=x^{\frac{1}{x}}$ の $x>0$ での最大値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2002)　　(m20023401)

0.96 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2002)　　(m20023402)

0.97 不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4-1}$ を計算せよ.

(京都工芸繊維大 2002)　　(m20023403)

0.98 実数 $p>0$ について　$\displaystyle\Gamma(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$　とおく．次の (1), (2) を証明せよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{e^x}=0$　（ただし，a は実数）　(2) $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$

(京都工芸繊維大 2002)　　(m20023404)

0.99 2 変数関数 $z=f(x,y)$ は，2 階までのすべての偏導関数が存在して，それらがすべて連続であるとする．x,y が別の 2 変数 u,v の関数として　$x=u-v$, $y=u+v$

と表されるとき，次の各問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を用いて表せ.

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$ を $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を用いて表せ.

(京都工芸繊維大 2002)　　(m20023405)

0.100 媒介変数表示された曲線 C : $x=3\cos t$, $y=2\sin t$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ を図示し，この曲線で囲まれた図形 D 上の重積分 $\displaystyle\iint_D(xy+1)dxdy$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2002)　　(m20023406)

0.101 微分方程式 $xyy'=x^2+y^2$ を解け.

(京都工芸繊維大 2002)　　(m20023407)

0.102 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないような実数 x の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2002)　　(m20023408)

0.103 行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，A^2 , A^3 および，$E-A$ の逆行列 $(E-A)^{-1}$ を求めよ.

ただし，E は 3 次の単位行列である.

(京都工芸繊維大 2002)　　(m20023409)

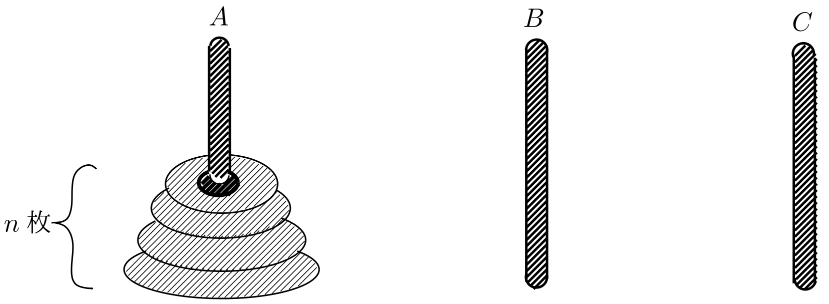
0.104　行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の各問いに答えよ．ただし，a は定数である．

(1)　A の行列式の値が -2 となるように定数 a を定めよ．

(2)　(1) で得られた定数 a の値に対して，A の固有値とその固有ベクトルをすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2002)　　(m20023410)

0.105　以下の問題は，ハノイの塔と呼ばれる問題である．以下の設問 (1)-(3) に答えよ．



ハノイの塔の問題

図のように，n枚の円盤を積んだ塔がある．最初，３本の棒A,B,Cのうち，Aに全ての円盤を大きいものから小さいものへ順に積んである．このn枚の円盤全てを,Cの棒に移動したい．ただし，移動は，棒の最上の円盤１枚を別の棒の最上に動かすことしかできない（1回に２枚以上動かせない）．また，大きい円盤を小さい円盤の上に置いてはいけない．さらに，棒以外のところに円盤を置いてはいけない．

例えば n が 2 のとき，$A \to B$, $A \to C$, $B \to C$ と 3 回円盤を動かすことで，全てを移動できる．（$A \to B$ は，A の棒の最上の円盤を B の棒の最上に移動して置くことを意味する.）

(1)　n が 3 のとき，全ての円盤を移動する最小の手順を $A \to B$, $\cdots$ のように記述せよ．

(2)　一般に n 枚 $(n \geq 1)$ の円盤全てを最小の手順で移動したときの，円盤の総移動回数を $X(n)$ とする．$X(n)$ を漸化式で表し，その一般項を求めよ．

(3)　ハノイの塔の問題に，$A \to C$ および $C \to A$ の移動を禁止する制約を追加する（他の制約は同じ）．この制約下で，n 枚 $(n \geq 1)$ の円盤全てを最小の手順で移動したときの円盤の総移動回数を $Y(n)$ とする．$Y(n)$ を漸化式で表し，その一般項を求めよ．

(大阪大 2002)　　(m20023501)

0.106　(1)　関数 $f(x)$ は，任意の実数 x に対して 2 次導関数 $f''(x)$ が存在して $f''(x) \geqq 0$ を満たすとする．$x_1 < x_2$ として次の問いに答えよ．

(a)　$x_1 < x_3 < x_2$ を満たす任意の x_3 に対して，次の不等式が成立することを示せ．

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqq \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}$$

(b)　$0 \leqq \alpha \leqq 1$ を満たす任意の α に対して，次の不等式が成立することを示せ．

$$f\bigl(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\bigr) \leqq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

(2)　$f(x) = \log(1 + \exp x)$ は任意の実数 x に対して，$f''(x) \geqq 0$ を満たすことを示せ．

(3)　(1) と (2) の結果を用いて，$0 \leqq \alpha \leqq 1$ を満たす任意の α と任意の正数 y_1, y_2, z_1, z_2 に対して次の不等式が成り立つことを示せ.（ヒント：$x_i = \log y_i - \log z_i$, $i = 1, 2$ とせよ.）

$${y_1}^{\alpha}{y_2}^{1-\alpha} + {z_1}^{\alpha}{z_2}^{1-\alpha} \leqq (y_1 + z_1)^{\alpha}(y_2 + z_2)^{1-\alpha}$$

(大阪大 2002)　　(m20023502)

0.107 $a, b > 0$, $a \neq b$ とし，常微分方程式の初期値問題，

$$\begin{cases} u'(t) + a\,u(t) = 0 \quad (0 < t < \infty) \\ v'(t) + b\,v(t) - a\,u(t) = 0 \quad (0 < t < \infty) \\ u(0) = 1 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

を考える．

(1) 解 $u(t)$, $v(t)$ を求めよ．

(2) $v(t)$ の増減を調べ，グラフの概形を描け．

(3) $v(t)$ の最大値を求めよ．

(大阪大 2002)　　(m20023503)

0.108 行列 $\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}$ が表す平面上の一次変換を f とする．点 P, Q, R, S をそれぞれ $(1,0), (0,1),$ $(-1,0), (0,-1)$，さらに円 $C : x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}$ とし，円 C が f によって移される図形を C' とおく．次の問いに答えよ．

(1) $t = \dfrac{1}{2}$ のとき f によって四辺形 $PQRS$ はどのような図形に移されるか．

(2) (1) で求めた図形との位置関係に留意して，$t = \dfrac{1}{2}$ のときの図形 C' の概形を描け．

(3) t がすべての実数を動くとき C' が通過しうる点 (x, y) の集合を求めよ．

(大阪大 2002)　　(m20023504)

0.109 (1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を用いて，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - x^2} dx$ を計算せよ．

(2) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)(x^2+1)} dx$ の値を求めよ．

(大阪大 2002)　　(m20023505)

0.110 (1) 関数 $f(x) = x^2$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)$$

とフーリエ級数展開したとき，$a_n (n \geqq 0)$, $b_n (n \geqq 1)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ を示せ．

(大阪大 2002)　　(m20023506)

0.111 X, Y を平均 0，分散 1 の正規分布に従う独立な確率変数とする．

(1) $Z = |X| + |Y|$ とおく．Z の平均，分散を求めよ．

(2) $W = \max(|X|, |Y|)$ とおく．W の平均を求めよ．ただし，$\max(a, b)$ で a と b の大きい方の数を表す．

(大阪大 2002)　　(m20023507)

0.112 $y = f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．　　(2) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け．

(関西大 2002)　　(m20023701)

0.113 2 変数の関数 $f(x,y)=x^4-4xy+y^4$ について，次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 f_x , f_y , f_{xx} , f_{yy} , f_{xy} , f_{yx} を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極大値，極小値を与える (x,y) を決定せよ．

(関西大 2002)　　(m20023702)

0.114 2 変数の関数 $f(x,y)=x^4-4xy+y^4$ について，次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 f_x , f_y , f_{xx} , f_{yy} , f_{xy} , f_{yx} を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極大値，極小値を与える (x,y) を決定せよ．

(関西大 2002)　　(m20023703)

0.115 次の 4 次正方行列 A について，下の問いに答えよ．

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有多項式および固有値を求めよ．

(2) A は対角化可能（すなわち，ある正則行列 P をとると，$P^{-1}AP$ は対角成分以外はすべて 0 とできる）か否か，理由をつけて答えよ．

(関西大 2002)　　(m20023704)

0.116 a, b を実数とするとき，以下の等式を示せ．

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\log\left(e^{\frac{a}{\varepsilon}}+e^{\frac{b}{\varepsilon}}\right)=\max\{a,b\}$$

(神戸大 2002)　　(m20023801)

0.117 R を正の実数とし，$D_R=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq R^2\}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の積分を計算せよ．　$I_R=\displaystyle\iint_{D_R}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}I_R$ を求め，それを用いて，次の積分の値を計算せよ．　$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

(神戸大 2002)　　(m20023802)

0.118 t の関数 $x(t)$ が次の微分方程式を満たすとする．

$$x'+x^2+a(t)x+b(t)=0$$

但し，$x'=\dfrac{dx}{dt}$ である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $x(t)=\dfrac{u'(t)}{u(t)}$ のとき，関数 $u(t)$ の満たす微分方程式を求めよ．

(2) 微分方程式 $x'=x(1-x)$ の一般解を求めよ．

(神戸大 2002)　　(m20023803)

0.119 n を 3 以上の自然数とする．n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ のベクトル $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ が全て零ベクトルでなく，内積 $\vec{x}\cdot\vec{y}$, $\vec{y}\cdot\vec{z}$, $\vec{z}\cdot\vec{x}$ は全て 0 とする．このとき $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ は一次独立であることを示せ．

(神戸大 2002)　　(m20023804)

0.120 n を 2 以上の自然数とするとき，次の行列の行列式を求めよ．ただし，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ は実数とする．

$$\begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{pmatrix}$$

(神戸大 2002)　　(m20023805)

0.121 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ とするとき，$\Delta(x^2+y^2+z^2)^s$ を求めよ．但し，s は実数とする．

(神戸大 2002)　　(m20023806)

0.122 関数 $f(x) = \dfrac{1}{2x^2+3x+1}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{1}{ax+b}$ の n 次導関数 ($n \geqq 1$) が $\dfrac{a^n \cdot (-1)^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$ であることを示せ．ただし，a, b は 0 でない定数とする．

(2) 等式 $f(x) = \dfrac{p}{x+1} + \dfrac{q}{2x+1}$ を満たす定数 p, q を求めよ．

(3) $f(x)$ の n 次導関数 ($n \geqq 1$) を求めよ．

(4) $f(x)$ の $x=0$ を中心とするテイラー級数展開をせよ.（一般項も記すこと）.

(広島市立大 2002)　　(m20024201)

0.123 $g(t)$ は t について 1 回微分可能な 1 変数関数とし，x, y についての 2 変数関数を $z = x \cdot g\left(\dfrac{y}{x}\right)$ とする．このとき，　$x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} - z$　を計算せよ．

(広島市立大 2002)　　(m20024202)

0.124 2 変数関数 $f(x,y) = 2x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 3y^3 - 3x^2$ の極値について調べよ．ただし，x, y は実変数とする．

(広島市立大 2002)　　(m20024203)

0.125 xy 平面上の領域 $D = \{(x,y) \,|\, x \geqq 0, y \geqq 0, x^2+y^2 \leqq 1\}$ に対し，重積分
$\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy$　の値を求めよ．

(広島市立大 2002)　　(m20024204)

0.126 A を行数 m，列数 n の行列とし，B を行数 s，列数 t の行列とする．以下の条件を満たすときの m, n, s, t の関係をそれぞれ答えよ．

(1) 積 AB が定義可能である．

(2) 積 AB および BA が定義可能であり，等式 $AB = BA$ が成り立つ．

(広島市立大 2002)　　(m20024205)

0.127 A, B を n 次の正方行列とする．このとき，以下の問いに答えよ．なお，$|X|$ は正方行列 X の行列式を表す．

(1) AB が正則行列ならば，B も正則行列となることを示せ．

(2) A が正則行列であるとき，等式 $|B| = |A^{-1}BA|$ を示せ．

(広島市立大 2002)　　(m20024206)

0.128 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & a \\ 3 & 3 & a \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値の 1 つが 3 であるとき，a を求めよ．

(2) (1) で求めた a に対し，A の固有値をすべて求めよ．

(3) (2) で求めた A のそれぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(広島市立大 2002) (m20024207)

0.129 積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx$ を求めなさい．

(山口大 2002) (m20024301)

0.130 ラジウムの同位元素の放射エネルギーは 1 年間に 9.8% ずつ減少する．以下の問いに答えなさい．

(1) I_0 を最初の強さとすると 3 年後にはエネルギー強度はいくらになるか求めなさい．

(2) この強度が 1／2 になるには何年かかるか求めなさい．

(山口大 2002) (m20024302)

0.131 行列 $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ について

(1) 逆行列 $A(\theta)^{-1}$ を求めなさい．

(2) $A(\theta_1+\theta_2) = A(\theta_1)A(\theta_2)$ を示しなさい．

(3) $A(\theta)A(-\theta) = I$（I は単位行列）を示しなさい．

(山口大 2002) (m20024303)

0.132 $f_i(x)$, $g_i(x)$, $h_i(x)$ を微分可能な関数とし，

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix}$$ とするとき，

$$\frac{dF(x)}{dx} = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) & g_3'(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1'(x) & h_2'(x) & h_3'(x) \end{vmatrix}$$

を示しなさい．ただし，$f_i'(x)$, $g_i'(x)$, $h_i'(x)$ はそれぞれの関数の微分である．

(山口大 2002) (m20024304)

0.133 A さんがある花の種を多数まいたところ，赤，白，黄，紫の色の花がそれぞれ比率（２：２：１：１）で咲いた．A さんから 1 粒の種をもらって育てた．

以下の問いに答えなさい．ただし，種は外見が同じで区別がつかないものとする．

(1) 花の色が赤色かまたは白色になる確率を求めなさい．

(2) 赤，黄色の花を B グループ，白，紫色の花を C グループとする．花の色が B グループになったときに得られる情報量を求めなさい．(途中の計算式も求めなさい．)

(山口大 2002) (m20024305)

0.134 いま，2 次元平面上の任意の点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) の間で，$\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2} \le \sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}$ が成り立つとき，この 2 点間の関係を，$(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ と表現するものとする．このとき，下記の問いに答えよ．

(1) ２点間の関係 L について，下記の①～③は成り立つかについて，それぞれ答えよ．

① $(x_1, y_1)L(x_1, y_1)$

② $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2)L(x_3, y_3)$ ならば，必ず $(x_1, y_1)L(x_3, y_3)$

③ $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ ならば，必ず $(x_2, y_2)L(x_1, y_1)$

(2) $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2)L(x_1, y_1)$ が成り立つとき，この２点間の関係を $(x_1, y_1)E(x_2, y_2)$ と表すものとする．このとき，点 $(1, 1)$ に対して，$(1, 1)E(x, y)$ が成り立つ点 (x, y) の集合は，２次元平面上でどのような図形を描くか図示せよ．

(3) 任意の点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) について $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ が成り立つものとする．また，$(x_1, y_1)E(x_3, y_3)$ を満足する点 (x_3, y_3) と，$(x_2, y_2)E(x_4, y_4)$ を満足する点 (x_4, y_4) について考える．

このとき，$(x_3, y_3)L(x_4, y_4)$ が必ず成り立つことを，以下の手順で証明する．

[　ア　] と [　イ　] に，(1) における①～③のいずれかを入れよ．

関係 E の定義より，$(x_1, y_1)E(x_3, y_3)$ から $(x_3, y_3)E(x_1, y_1)$ が成り立つ．

さらに，仮定より，$(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ が成り立つ．

ここで，[　ア　] より，$(x_3, y_3)L(x_2, y_2)$ が成り立つ．

また，関係 E の定義より，$(x_2, y_2)E(x_4, y_4)$ から $(x_2, y_2)L(x_4, y_4)$ が成り立つ．

以上により，[　イ　] により，$(x_3, y_3)L(x_4, y_4)$ が成り立つ．

(大分大 2002)　　(m20025101)

0.135 半径 R の半球状のドームがある．

このドーム内に納めることの出来る，最大の体積を持つ円柱を求めたい．

(1) この円柱が半球に接しているとき，高さ h の円柱の体積 V を，R と h を用いて示せ．

(2) このとき h に対して円柱の体積 V はどの様に変化するか示せ．

(3) 円柱の体積が最大となる時，円柱の半径と高さを各々R を用いて示せ．

また，最大となる円柱の体積と半球状のドームの体積との比はいくらか．

(大分大 2002)　　(m20025102)

0.136 $y = x^2 - \dfrac{4}{3}x - \dfrac{4}{3}$ と $y = -x^2 + \dfrac{2}{3}x + \dfrac{8}{3}$ で示される二つの曲線がある．

(1) 二つの曲線の交点の座標を求めよ．

(2) 二つの曲線で囲まれた領域の面積を求めよ．

(大分大 2002)　　(m20025103)

0.137 平面上の線型変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

について次の問いに答えよ．

(1) この変換により点 $(3, 0)$ にうつされる点を求めよ．

(2) この変換により直線 $x - 3y + 2 = 0$ がどのような図形にうつされるかを述べよ．

(大分大 2002)　　(m20025104)