作成責任者：軽井沢数学 IC 数学教育研究所 所長 碓氷長 (91 歳)

0.1 円柱座標 (r, θ, z) が直交座標 (x, y, z) によって定義されるとき (1) から (3) の問いに答えよ．

円柱座標 (r, θ, z) と直交座標 (x, y, z) の関係は以下の通りである．

$$x = r\cos\theta\,,\ \ y = r\sin\theta\,,\ \ z = z \qquad (r \geq 0\,,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

(1) 円柱座標 (r, θ, z) が直交曲線座標であることを示せ．

(2) 円柱座標 (r, θ, z) の基本ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ を求めよ．

(3) 曲面 $z = x^2 + y^2$ と $z = 18 - (x^2 + y^2)$ で囲まれた領域を V とするとき，
積分 $\displaystyle\int_V \sqrt{x^2 + y^2}\, dV$ の値を求めよ．

(北海道大 2003) (m20030101)

0.2 以下の問に答えよ．ただし，$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ である．

(1) 微分方程式 $x^3y' + y^2 = 0$ を解け．

(2) 線形非同次方程式 $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$ の一般解を求めよ．

(北海道大 2003) (m20030102)

0.3 ２次の正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix} \qquad (0 < p < 1\,,\ 0 < q < 1)$$

とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) A の固有値をすべて求め，それぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(2) A を対角化せよ．

(3) A^n を求めよ．

(北海道大 2003) (m20030103)

0.4 $f(x) = |\sin x|$ をフーリエ級数展開せよ．

(北海道大 2003) (m20030104)

0.5 次の関数について，導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい．

(1) $y = x^3e^{-2x}$

(2) $y = \dfrac{2x+1}{\sin x}$

(2) $\begin{cases} x = & \cos t + t\sin t \\ y = & 2\sin t - 2t\cos t \end{cases}$

(4) $x^3y + 3y^2 + 2x^4 = 0$

(秋田大 2003) (m20030401)

0.6 次の問いに答えなさい．

(1) 極座標変換 $x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta$（ただし，$r \geqq 0\,,\ 0 \leqq \theta < 2\pi$）によって，$xy$ 平面上の領域 D が $r\theta$ 平面上の領域 D' に対応しているとする．このとき，関数 f の重積分について，次の式が成り立つことを示しなさい．

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\theta\,,\ r\sin\theta)rdrd\theta$$

(2) xy 平面上の領域 D が $1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 9$ で与えられるとき，次の重積分の値を求めなさい．

$$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy$$

(秋田大 2003) (m20030402)

0.7 平面 $2x+y+2z=0$ と球面 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=12$ が交わってできる円の周の長さを求めなさい．ただし，空間内の点から平面に下ろした垂線の長さを求める公式を用いる場合には，その証明もしなさい．

(秋田大 2003)　　(m20030403)

0.8 a を実数とし，$A=\begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 3 \end{pmatrix}$ とする．

(1) A の固有値が，5 と 1 になるように，a の値を定めなさい．

(2) $a>0$ であり，かつ，A の固有値が 5 と 1 であるとする．このとき，A の固有ベクトルで大きさ 1 のものを求めなさい．

(秋田大 2003)　　(m20030404)

0.9 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は以下のように与えられる．

$$f(x) \sim f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\cdots$$

ただし，f' と f'' は，それぞれ f の導関数と第 2 次導関数を示す．

(1) 関数　$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$　をマクローリン展開し，x^2 の項まで示せ．

(2) 以下の関係が成り立つことを示せ．

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{Tan}^{-1}x\right)=\frac{1}{1+x^2}$$

ただし，関数 $y=\mathrm{Tan}^{-1}x$ は，関数 $y=\tan x$ の逆関数であり，原点を通る．

(3) 関数　$F(x)=\mathrm{Tan}^{-1}x$

について，$-\infty<x<\infty$ での増減・極値・グラフの凹凸・変曲点を調べよ．

(4) $y=F(x)$ のグラフの概形を描け．

(東北大 2003)　　(m20030501)

0.10 関数 $f(x)$ は，微分方程式

$$x^2\frac{d^2f(x)}{dx^2}-2x\frac{df(x)}{dx}+2f(x)=0 \quad (x \geqq 1) \tag{a}$$

および，初期条件

$$x=1 \text{ のとき } \quad f=1,\ \frac{df}{dx}=0 \tag{b}$$

を満たす．このとき，以下の問 (1)〜(5) に答えよ．

(1) 方程式 (a) は，変数変換 $t=\log x$ によって，以下の微分方程式に帰着することを示せ．

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}-3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=0 \tag{c}$$

また，初期条件 (b) は，

$$t=0 \text{ のとき } \quad y=1,\ \frac{dy}{dt}=0 \tag{d}$$

となることを示せ．

(2) 方程式 (c) の一般解は

$$y(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t} \tag{e}$$

で与えられる．方程式 (c) および初期条件 (d) を満たす実数 $\lambda_1,\lambda_2,C_1,C_2$ を求めよ．

(3) 初期条件 (b) のもとで方程式 (a) の解を求めよ．

(4) $z(t)=\dfrac{dy(t)}{dt}$ と定義する．いま，適切な $2\times\ 2$ 行列 A を定義すれば，方程式 (c) は

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dy(t)}{dt} \\ \dfrac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

と表される．行列 A を求めよ．

(5) 行列 A の固有値を求め，問 (2) で求めた λ_1, λ_2 と比較せよ．

(東北大 2003)　　(m20030502)

0.11 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ で定義する．

(1) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 行列 A によって表される xy 平面上の線形変換を f とする．直線 $y = ax$ 上の任意の点の f による像が同じ直線 $y = ax$ 上にあるような a の値を求めよ．

(3) 行列 U を $U = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ で定義する．このとき，$U^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$ が成り立つことを証明せよ．ただし，n は自然数，α は 0 でない実数とする．

(4) 行列 P を $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ で定義する．このとき，$P^{-1}AP$ を求めよ．また，その結果と問 (3) で証明した式を用いて A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(東北大 2003)　　(m20030503)

0.12 $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ $(-\infty < x < \infty)$ の増減・凹凸を調べ，グラフの概形を書け．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030601)

0.13 次の極限が存在するように定数 a, b, c を定め，そのときの極限を求めよ．

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \cos x + a + bx + cx^2}{x^3}$$

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030602)

0.14 次の計算をせよ．　$\dfrac{d}{dx} e^{\sqrt{\log x}}$　　$(x > 1)$

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030603)

0.15 次の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int_0^x (x-t)\sin t dt$　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx$

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030604)

0.16 次の関数のマクローリン展開（原点のまわりのテーラー展開）とその収束半径を書け．ただし，log は自然対数であり，ln とも書く．

(1) $\log(1-x)$　　(2) $\log \dfrac{1+x}{1-x}$

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030605)

0.17 指数関数 $f(x) = e^x$ を考える．

(1) 任意の自然数 n と任意の実数 x に対して，

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^k + \int_0^x \frac{e^t}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} dt$$

となることを示せ．

(2) $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}dt$　　$(|x| < +\infty)$

と表すとき，$R_n(x)$ は実数の任意の有界閉区間 $[a, b]$ 上で一様に 0 に収束することを示せ．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030606)

0.18 (1) 2変数関数 $g(x,y)$ が2回連続微分可能であるとき，それと $x=f_1(r,\theta)=r\cos\theta,\ y=f_2(r,\theta)=r\sin\theta$ の合成関数 $h(r,\theta)=g(r\cos\theta,r\sin\theta)$ について次の等式が成立することを示せ．ただし，$r\neq 0,(x,y)\neq(0,0)$ とする．

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

(2) 2変数関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) の近傍 $V=\{(x,y)|\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<r\}$ で2回連続微分可能であるとする．次の条件

$$\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)=\frac{\partial}{\partial y}f(a,b)=0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a,b)>0\,,\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a,b)\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(a,b)-\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(a,b)\right)^2>0$$

を満たすとき，$f(x,y)$ は (a,b) で極小であることを示せ．すなわち，
$U=\{(x,y)|\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<r'\}$ $(r'\leq r)$ があって，$(x,y)\in U-\{(a,b)\}$ ならば
$f(x,y)>f(a,b)$ が成り立つことを示せ．

(お茶の水女子大 2003) (m20030607)

0.19 (1) 実対称行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値がすべて正である条件を書け．

(2) (1) の条件のもとで次の重積分を計算せよ．ただし，必要なら $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}=\sqrt{\pi}$ を用いてよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}dxdy$$

(お茶の水女子大 2003) (m20030608)

0.20 実数関数 $x=x(t)$ は，次の微分方程式を満足する．

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+bx=0$$

ただし，係数 a と b は正の実数であり，$a^2>4b$ が成り立つものとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) この微分方程式の解を，$x_1(t)$ と $x_2(t)$ の2つ見つけたとしよう．このとき，実数 c_1,c_2 を用いて作られた $x_3(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$ も，この微分方程式の解であることを示せ．

(2) α を定数としたとき $x(t)=e^{\alpha t}$ がこの微分方程式を満足すると考えることにより，上記の微分方程式のもっとも一般的な解を求めよ．

(お茶の水女子大 2003) (m20030609)

0.21 次の正方行列 A,B,C を考える．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

(1) A,B,C の階数を求めよ．

(2) A,B,C に逆行列が存在すれば求めよ．

(3) n 次正方行列 A について，次の2つの命題を考える：

(a) A^{-1} が存在する． (b) A の階数が n である．

この2つの命題の関係は次の 1), 2), 3) のうちのどれか？理由とともに答えよ．

1) 同値

2) 一方が他方の十分条件であるが，必要条件でない．

3) 1),2) のいずれでもない．

(お茶の水女子大 2003) (m20030610)

0.22 次の行列式を計算せよ．

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030611)

0.23 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを計算せよ．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030612)

0.24 (1) 実対称行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値がすべて正である条件を書け．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030613)

0.25 行列 A の固有値 λ と固有ベクトル ψ は，

$$A\psi = \lambda\psi$$

という関係式を満足する．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{ab} \\ \sqrt{ab} & a-b \end{pmatrix}$$

ただし，a, b は正の実数とせよ．

(2) エルミート行列の固有値は，実数であることを証明せよ．ただし，エルミート行列 H とは，複素数の成分をもつ行列であり，転置して複素共役を取った（これをエルミート共役を取るという）行列が，もとの H と一致する行列である．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030614)

0.26 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，次のような複素 n 次正方行列 N, $J_\lambda(n)$ を考える．

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad J_\lambda(n) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

(1) 自然数 k に対して N の k 乗 N^k を求めよ．

(2) 自然数 k に対して $J_\lambda(n)^k$ を求めよ．

(3) 複素正方行列 A が対角化可能であることの定義を述べよ．

(4) 複素正方行列 A がある自然数 k に対して $A^k = E$ を満たすならば A は対角化可能であることを示せ．ただし E は単位行列である．必要ならば次の定理を用いてもよい．

定理 任意の複素 l 次正方行列 A に対して l 次正則行列 P，m 個の複素数 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ および m 個の自然数 $n_1, \dots, n_m$ で $\sum_{i=1}^m n_i = l$ を満たすものが存在して

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1}(n_1) & & & \\ & J_{\lambda_2}(n_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_m}(n_m) \end{pmatrix}$$ と書ける．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030615)

0.27 次のベクトルの張る空間の次元を求めよ.

$$(1,1,2)\,,\ (1,2,3)\,,\ (2,3,5)\,,\ (3,5,8)$$

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030616)

0.28 直交座標空間 (x,y,z) において，$x^2+y^2=a^2\quad(a>0)$ で表される円筒の内部で，xy 平面の上方 $(z\geq 0)$，かつ $z=x$ で与えられる平面の下方 $(z\leq x)$ にある部分の体積を求めよ.

(東京大 2003)　　(m20030701)

0.29 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $3x-y=(x+y)\dfrac{dy}{dx}$

(2) $6x-2y-3+(-2x-2y+1)\dfrac{dy}{dx}=0$

(東京大 2003)　　(m20030702)

0.30 図 1 で示す線形演算装置を考える．この演算装置では，

端子 a のみに大きさ x の入力をしたとき，端子 A,B,C の出力の大きさはそれぞれ $x,x,0$,

端子 b のみに大きさ y の入力をしたとき，端子 A,B,C の出力の大きさはそれぞれ $y,0,y$,

端子 c のみに大きさ z の入力をしたとき，端子 A,B,C の出力の大きさはそれぞれ $0,z,z$

であり，入力と出力の関係は線形関係であるとする.

(1) 演算装置の端子 a,b,c にそれぞれ大きさ $1,2,3$ の入力をしたとき，端子 A,B,C の出力の大きさをそれぞれ求めよ.

(2) 図 2 のように，図 1 と同じ装置を 2 つつなぎ，左端の端子 a,b,c にそれぞれ大きさ $1,2,3$ の入力をしたとき，最終端子（右端）A,B,C の出力の大きさをそれぞれ求めよ.

(3) 図 3 のように，図 1 と同じ装置を N 個つなぎ，左端の端子 a,b,c にそれぞれ $1,2,3$ の入力をしたとき，最終端子（右端）A の出力の大きさを求めよ.

図 1

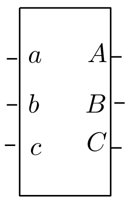


図 2

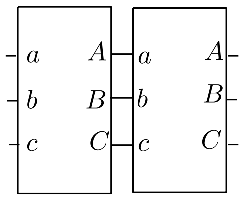
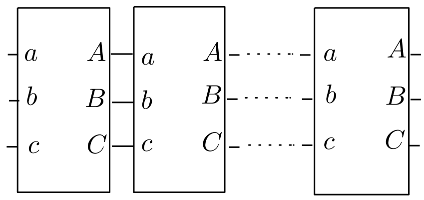


図 3



(東京大 2003)　　(m20030703)

0.31 (1) 変数 t に関して周期 2π の周期関数 $f(t)$ が

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)) \tag{1}$$

と書けたときの a_n , b_n が

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos(nt)dt\,,\qquad n=0,1,2,\cdots \tag{2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin(nt)dt\,,\qquad n=1,2,\cdots \tag{3}$$

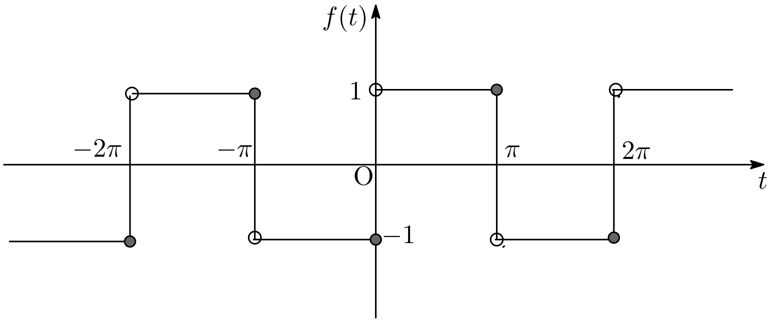
で与えられることを説明せよ．ただし，必要ならば三角関数の公式

$\sin A\sin B=-\dfrac{1}{2}\{\cos(A+B)-\cos(A-B)\}$, $\sin A\cos B=\dfrac{1}{2}\{\sin(A+B)+\sin(A-B)\}$

$\cos A\sin B=\dfrac{1}{2}\{\sin(A+B)-\sin(A-B)\}$, $\cos A\cos B=\dfrac{1}{2}\{\cos(A+B)+\cos(A-B)\}$

を用いよ.

(2) 下図は，値 1 と -1 をとる周期 2π の周期関数 $f(t)$ のグラフを示したものである．この関数 $f(t)$ を式 (1) の形に展開せよ．



(東京大 2003)　　(m20030704)

0.32 フィンランド人，スウェーデン人，ノルウェー人それぞれ一人ずつが次のゲームをする．白いボールが a 個と赤いボールが b 個，合計 $a+b$ 個入っている箱から，フィンランド人，スウェーデン人，ノルウェー人，フィンランド人，スウェーデン人，ノルウェー人，$\cdots$ の順序で，誰かが最初に白いボールを取り出すまで，ボールを 1 つずつ取り出して戻す．白いボールを取り出した人が勝者である．各人が勝つ確率を求めよ．

(東京大 2003)　　(m20030705)

0.33 積分　$I=\displaystyle\int_0^\infty \left\{\int_0^x (x+y)e^{-(x+y)}\frac{dy}{2y+1}\right\}dx$　の値を求めよ．

(東京工業大 2003)　　(m20030801)

0.34 微分方程式 $y''+2y'+y=e^x$ の解で，$y(0)=1$，$y(1)=e/4$ を満たすものを求めよ．

(東京工業大 2003)　　(m20030802)

0.35 次のような n 次正方行列の行列式を Δ_n とする．

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

このとき次の問いに答えよ．

(1) $\Delta_{n+2}=2\Delta_{n+1}-\Delta_n$ が成り立つことを示せ．

(2) Δ_n の値を求めよ．

(東京工業大 2003)　　(m20030803)

0.36 A は 3 次複素正方行列で，$A^2\neq O$，$A^3=O$ を満たすとする．このとき次の問いに答えよ．

(1) 3 次元の複素列ベクトル $\overrightarrow{x}$ を $A^2\overrightarrow{x}\neq O$ ととる．このとき，$\{\overrightarrow{x}, A\overrightarrow{x}, A^2\overrightarrow{x}\}$ は 1 次独立であることを示せ．

(2) 上で与えられた $\overrightarrow{x}$ に対して，3 次正方行列 P を $P=(A^2\overrightarrow{x}\quad A\overrightarrow{x}\quad \overrightarrow{x})$ とおく．このとき，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$　であることを示せ．

(東京工業大 2003)　　(m20030804)

0.37 微分方程式
$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{dy}{dx}-y\right)=x(x-y)$$
を満たし，かつ，$x=0$ で $y=0$ となる関数 $y(x)$（ただし，$x \geq 0$）を求めよ．

(横浜国立大 2003)　　(m20031101)

0.38 次の行列 A の固有値と，その固有値に対する固有空間を求めよ．
$$A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(横浜国立大 2003)　　(m20031102)

0.39 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ を求めなさい．ただし，$a>0$ とする．

(千葉大 2003)　　(m20031201)

0.40 $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$ のとき，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ となることを証明しなさい．ただし，$(x,y)\neq(0,0)$ とする．

(千葉大 2003)　　(m20031202)

0.41 次の 2 重積分を求めなさい．ただし，$a>0$，$b>0$ とする．
$$V=\iint_D \frac{a}{(a^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy \qquad \text{ただし，} D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq b^2\}$$

(千葉大 2003)　　(m20031203)

0.42 次の連立常微分方程式の一般解を求めなさい．
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x-y+1 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x+3y-1 \end{cases}$$

(千葉大 2003)　　(m20031204)

0.43 次の行列 A について答えなさい．
$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式を，A の成分を用いて表しなさい．

(2) 行列 A の成分を用いて，原点を始点とする 3 つの位置ベクトル $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)^T$,$\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)^T$，$\mathbf{c}=(c_1,c_2,c_3)^T$ を定義する．ここに，^{T} は行列の転置を示す．これらのベクトルを用いて，$\mathbf{a}\bullet(\mathbf{b}\times\ \mathbf{c})$ が (1) で表した行列式に等しくなることを示しなさい．ここで，$\bullet$ は内積，$\times$ は外積を意味する．

(3) 行列式の絶対値が，これら 3 つのベクトルを 3 辺とする平行 6 面体の体積と等しいことを示しなさい．

(千葉大 2003)　　(m20031205)

0.44 x が限りなく正の無限大に近づくとき，次の式の値を小さい順に並べよ．
$$\frac{x}{\log x},\ \sqrt{x},\ \frac{1}{\sin(1/x)}$$

(筑波大 2003)　　(m20031301)

0.45 次の問いに答えなさい．

(1) 三角関数 $y=\sin(x)$ を，単位円を用いて定義しなさい．

(2) 関数 $f(x)$ の微分（導関数）は $\quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad$ で定義される．
この定義に基づいて $y = \sin(x)$ の微分を，(1) の定義を用いて導きなさい．

(筑波大 2003)　　(m20031302)

0.46 定積分 $\quad I(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^\infty \exp(-\alpha x)\frac{\sin\beta x}{x}dx \quad (\alpha \geq 0\,,\ \beta \neq 0)$

をパラメータ β について微分することにより $\quad \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\beta x}{x}dx = \mathrm{sign}(\beta)\frac{\pi}{2} \quad$ を導け．
ここで，$\mathrm{sign}(\beta)$ は β の符号 $(\pm)$(β が正値の場合は $+$，負値の場合は $-$) を意味する．

(筑波大 2003)　　(m20031303)

0.47 (x,y) 直交座標系において $x^{2/3} + y^{2/3} = \alpha^{2/3}\quad(\alpha > 0)$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

(筑波大 2003)　　(m20031304)

0.48 次式をグラフに描いたときに，この曲線と x 軸で囲まれる面積を $0 \leqq x \leqq 5$ の範囲で求めよ．

$$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

(筑波大 2003)　　(m20031305)

0.49 次の定積分を行え． $\quad \displaystyle\int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

(筑波大 2003)　　(m20031306)

0.50 不定積分 $\displaystyle\int x^2 e^{-x} dx$ を計算しなさい．

(筑波大 2003)　　(m20031307)

0.51 $\sin x$ のマクローリン多項式を利用して $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ を計算したい．誤差を 0.002 以下にするには，何次のマクローリン多項式を利用すればよいか示せ．

(筑波大 2003)　　(m20031308)

0.52 $e^{kx} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad$ と表したときの a_n を求めなさい．

(筑波大 2003)　　(m20031309)

0.53 数列 $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$ は

$$f_0 = 0\,,\ f_1 = 1\,,\ f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

という漸化式によって生成される．k が十分大きな値になると，$\frac{f_{k+1}}{f_k}$ はどのような値に収束するか．

(筑波大 2003)　　(m20031310)

0.54 以下の設問 (1),(2) に答えなさい．

(1) $f(x,y) = \tan x + \tan y - \tan(x+y) \quad (0 \leq x < \pi\,,\ 0 \leq y < \pi)$ の極値を求めなさい．

(2) 半径 r の円に外接する三角形のうち，最小の面積をもつのはどのような場合か．また，その最小値はいくらか．

(筑波大 2003)　　(m20031311)

0.55 xy 平面上において原点を中心とする半径 b の円周上を等速度で運動する点の時刻 t における位置は $x = b\cos(\omega t + \phi)\,,\ y = b\sin(\omega t + \phi)$ で表すことができる．ここに，ω, ϕ は定数で，それぞれ，角速度，位相と呼ばれる．

(1) 位置を時間に対して微分すると速度ベクトル $\vec{v}$ が得られる．$\vec{v}$ を求め成分表示しなさい．

(2) 速度ベクトルをさらに時間に対して微分すると加速度ベクトル $\overrightarrow{\alpha}$ が得られる．$\overrightarrow{\alpha}$ を求め成分表示しなさい．また，$\overrightarrow{\alpha}$ と $\overrightarrow{v}$ は互いに直交することを示しなさい．

(3) ベクトル $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{v}$ の絶対値 $|\overrightarrow{\alpha}|$, $|\overrightarrow{v}|$ を計算しなさい．

(筑波大 2003)　　(m20031312)

0.56 n 次行列 A について，次のことを証明せよ．ただし，E を n 次の単位行列とする．

(1) $A^k = E$ となる自然数 k があれば，A は正則である．

(2) $A^2 = A$, $A \neq E$ であれば，A は正則でない．

(筑波大 2003)　　(m20031313)

0.57 二次行列 A が $A^2 = E$ (E : 単位行列) を満たすとき，A を求めよ．

(筑波大 2003)　　(m20031314)

0.58 n 次行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ $((i, n-i+1)$ 成分のみ 1, 他の成分は 0) について，

A^{-1}, A^k (k : 自然数) を求めよ．

(筑波大 2003)　　(m20031315)

0.59 行列　$A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$　を考えよう．ここで，パラメータ p, q の変動範囲は $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ であるとする．このとき次の (1),(2),(3) の各問いに答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルはノルムが 1 となるように規格化して示せ．

(2) 行列 A の n 乗，A^n を求めよ．

(3) 行列 A の n 乗の n が大きい場合の極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．

(筑波大 2003)　　(m20031316)

0.60 正方行列の固有値，固有ベクトルに関する以下の 2 つの問いに答えよ．

(1) 次の正方行列 A の固有値および固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) n 次の正方行列 B の固有値とその転置行列 ${}^tB$ の固有値とは同じであることを証明せよ．

(筑波大 2003)　　(m20031317)

0.61 次の行列の逆行列と固有値を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(筑波大 2003)　　(m20031318)

0.62 次の表は，学生 10 人の数学と英語のテストの成績である．数学と英語の成績に相関関係があるか判断せよ．　(筑波大 2003)　　(m20031319)

学生番号	数学	英語
1	58	60
2	35	50
3	65	50
4	42	60
5	85	70
6	30	42
7	45	60
8	46	50
9	90	98
10	45	60

0.63 次の関数を微分しなさい． $\mathrm{sech}^{-1} x \qquad (0 < x < 1)$

(埼玉大 2003) (m20031401)

0.64 実数 α に対し， $f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x^{\alpha} \sin \dfrac{1}{x} & (x > 0) \end{cases}$ とおく．

(1) $\alpha > 1$ のとき，$f(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で微分可能であることを示せ．

(2) $\alpha \leq 1$ のとき，$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能でないことを示せ．

(3) $\alpha > 1$ のとき，$f'(x)$ が $-\infty < x < \infty$ で連続となる α の範囲を求めよ．

(埼玉大 2003) (m20031402)

0.65 曲線 $y = \dfrac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right) \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ の長さ L を求めなさい．

(埼玉大 2003) (m20031403)

0.66 $a > 0$ とするとき，$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin x dx$ を求めよ．

(埼玉大 2003) (m20031404)

0.67 $\cos 46^\circ$ の近似値を有効数字 3 桁の範囲において求めなさい．ただし，$\dfrac{\pi}{180} = 0.01745 \cdots$，$\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である．

(埼玉大 2003) (m20031405)

0.68 以下の問いに答えなさい．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$，$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$，$D = \dfrac{d}{dt}$ である．

(1) 次の 1 階微分方程式の一般解を求めなさい． $2xyy' = x^2 + y^2$

(2) 次の 2 階微分方程式の一般解を求めなさい． $y'' - 7y' + 10y = 6x + 8e^{2x}$

(3) 次の連立微分方程式の一般解を求めなさい． $\begin{cases} Dx = 4x - y \\ Dy = x + 2y \end{cases}$

(埼玉大 2003) (m20031406)

0.69 E を 3 次単位行列とし，

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

とおく．整数 $n \geq 1$ に対し，$A^n = 3^{n-1}(nA - 3(n-1)E)$ であることを証明せよ．

(埼玉大 2003) (m20031407)

0.70 実数 a, b, c, d が

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & -3 & b \\ -1 & 0 & 1 & c \\ 0 & -1 & 1 & d \end{vmatrix} = 0$$

を満たすための必要十分条件は $a + 2b + 3c + 4d = 0$ であることを示せ．

(埼玉大 2003)　　(m20031408)

0.71 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の逆行列を求めなさい．

(2) 次の連立 1 次方程式の解 x, y, z を (1) の結果を用いて求めなさい．

$$\begin{cases} -x - y - z = 3 \\ 4x - 3y - 4z = 2 \\ -4x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

(3) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めなさい．

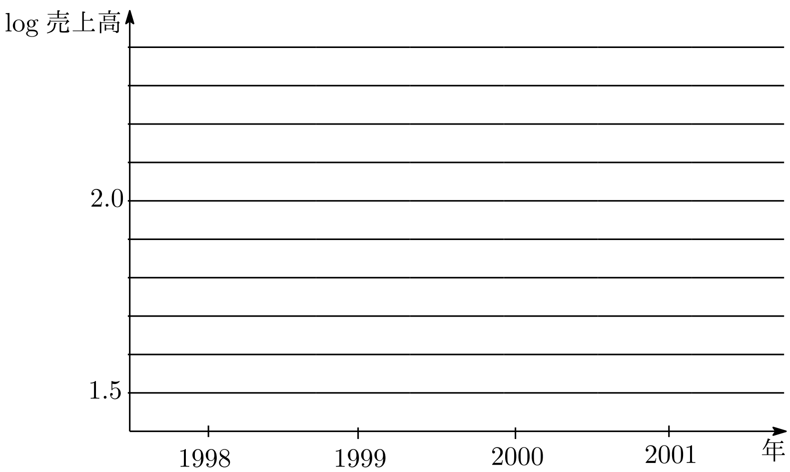
(埼玉大 2003)　　(m20031409)

0.72 ある会社では，３種の商品の過去４年間の売上高が次のようであった．以下の３問に答えよ．

	1998 年	1999 年	2000 年	2001 年
商品 A	91 万円	123 万円	170 万円	229 万円
商品 B	31 万円	51 万円	78 万円	126 万円
商品 C	46 万円	83 万円	141 万円	257 万円

(1) 伸び率を見るために，片対数グラフを作成したい．売上高を 1 万円を単位に対数変換すると，次のようになった．対数の底は 10 とし，小数第 3 位で四捨五入した．図に商品の売上高を点で示し，各商品ごとの売上高の推移がわかるようにもっとも適切な直線を図に書き込め．

売上高（万円）	31	46	51	78	83	91	123	126	141	170	229	257
log 売上高	1.50	1.66	1.71	1.89	1.92	1.96	2.09	2.10	2.15	2.23	2.36	2.41



(2) 売上高を対数にしたときの，商品 B の y 年の売上高 t を近似したら，$\log t = ay + 1.5$ になった．定数 a を求め，y 年の売上高 m を示す式を示せ．

(3) 売上高の伸び率が今後もほぼ一定だと仮定したとき，商品 B の売上高が 1000 万円を超えるのは何年と推測できるか．

(群馬大 2003)　　(m20031501)

0.73 2 つの関数 $f(x) = \dfrac{a}{2}x$ と $g(x) = \dfrac{b}{x}$ について，以下の 2 問に答えよ．($a \geqq 0,\ b \geqq 0$ とする)．

(1) $a = 1,\ b = 2$ のとき，$f(x)$ と $g(x)$ のグラフを描け．

(2) $x > 0$ であるとき，$f(x) + g(x)$ が最小となる x を，a と b を用いて表せ．

(群馬大 2003)　　(m20031502)

0.74 (1) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ を因数分解せよ．

(2) 2 つの関数 $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ と $y = -x^2 + 4x - 3$ の交点を求めよ．

(3) 2 つの関数 $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ と $y = -x^2 + 4x - 3$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

(群馬大 2003)　　(m20031503)

0.75 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & c \end{pmatrix}$ が $A^2 = A + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を満たすとする．以下の 2 問に答えよ．

(1) A を求めよ．　　　(2) A^{10} を求めよ．

(群馬大 2003)　　(m20031504)

0.76 a, b, c, d, e の 5 種類の文字がある．文字が 1 個以上並んだものを単語と呼ぶことにし，n 文字を選んで単語を作ることを考える．同じ文字を何回選んでもよいものとする．以下の 3 問に答えよ．

(1) n が 3 のとき，作ることのできる単語は何種類か．

(2) b を 1 文字だけ含んでできる単語の数を n の式で表せ．

(3) 3 文字の単語ができているとき，1 文字追加して 4 文字の単語とすることを考える．このとき，新たに選んだ文字がこれまでの単語に含まれていない確率を求めよ．

(群馬大 2003)　　(m20031505)

0.77 $y = x + \dfrac{1}{x^2}$ について

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 0$ となる x と，そのときの y の値を求めよ．

(2) $y = x + \dfrac{1}{x^2}$ のグラフの増減，凹凸および漸近線を調べ，グラフの概形をかけ．

(茨城大 2003)　　(m20031701)

0.78 $k > 0$ に対して，微分方程式 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^{k+1} \quad (t \geqq 0) \\ x(0) = 1 \end{cases}$ の解を $x_k(t)$ とする．

(1) $x_k(t)$ を求めよ．　　　(2) $\displaystyle\lim_{k \to 0} x_k(t)$ を求めよ．

(茨城大 2003)　　(m20031702)

0.79 連立方程式 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + az = a - 3 \end{cases}$ について

(1) 係数行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix}$ の行列式の値を求めよ．

(2) 拡大係数行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & a & a-3 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ．

(3) この方程式が解をもつか否かを判定し，解をもつ場合にはその解を求めよ．

(茨城大 2003)　　(m20031703)

0.80 複素関数 $\omega = \dfrac{z-i}{z+i}$ について

(1) $z=1$ のとき，$|\omega|=1$ であることを示せ．

(2) z を ω の式で表せ．

(3) z 平面の円 $|z+1|=\sqrt{2}$ は，ω 平面内のどのような曲線に写るか．

(茨城大 2003)　　(m20031704)

0.81 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$ を求めよ．

(山梨大 2003)　　(m20031801)

0.82 関数 $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ の極値を求めよ．

（山梨大 2003）　　(m20031802)

0.83 (1) 領域 $D = \{(x,y) \mid 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4\}$ を図示せよ．

(2) $\displaystyle\iint_D xydydx$ を求めよ．

(山梨大 2003)　　(m20031803)

0.84 ベクトルの内積 $(2-i, 3+i, 4-i)\cdot(1-i, 2, -3i)$ を求めよ．ただし，i は虚数単位である．

(山梨大 2003)　　(m20031804)

0.85 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，A の行列式の値および逆行列を求めよ．

（山梨大 2003）　　(m20031805)

0.86 2 次元の実座標平面上のベクトルを直線 $y=5x$ に関して線対称移動する変換 f を考える．また，基本単位ベクトルを $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．

(1) 基底となる 2 つの直交するベクトルを $\mathbf{a}_1 = 1\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$，$\mathbf{a}_2 = -5\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2$ とする．また，直線 $y=5x$ に関してベクトル $s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2$ と線対称なベクトルを $S\mathbf{a}_1 + T\mathbf{a}_2$ とする．即ち，$f(s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2) = S\mathbf{a}_1 + T\mathbf{a}_2$ で，S, T, s, t は実数．このとき，S, T を s, t を用いた式で表せ．

(2) 基底であるベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ に対応する変換 f の行列 A を求めよ．

(3) $x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 = s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2$ とするとき，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ となる行列 B を求めよ．

(4) $f(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) = X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2$ とするとき，$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる行列 F を行列 A, B を用いて表し，行列 F を求めよ．

(山梨大 2003)　　(m20031806)

0.87 2 つのベクトル $(-1, 2, 5)$ と $(1, -3, 5)$ との外積を求めよ．

（山梨大 2003）　　(m20031807)

0.88 次の x, y, z, u に関する連立一次方程式を解け.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & 3z & - & 4u & = & 11 \\ x & + & y & + & z & - & u & = & 6 \\ x & + & 3y & + & 5z & - & 7u & = & 16 \end{array}\right.$$

(信州大 2003)　　(m20031901)

0.89 次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(信州大 2003)　　(m20031902)

0.90 A を n 次正方行列とし $\boldsymbol{x}$ を n 次元列ベクトルとする. ある正の整数 k があって $A^{k-1}\boldsymbol{x} \neq 0$, $A^k\boldsymbol{x} = 0$ であるとする. このとき k 個の列ベクトル

$$\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x},\ A^2\boldsymbol{x}, \cdots,\ A^{k-1}\boldsymbol{x}$$

は一次独立であることを証明せよ.

(信州大 2003)　　(m20031903)

0.91 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ 上で 2 回連続微分可能な関数であり, $f(a) = f(b) = 0$, $|f''(x)| \leq M \ \ (x \in [a, b])$ を満たすとする. このとき, $|f(x)| \leq M(b-a)^2 \ \ (x \in [a, b])$ となることを示せ.

(信州大 2003)　　(m20031904)

0.92 $0 < R_1 < R_2$ とする. 次の定積分を求めよ.

$$\int_{R_1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq R_2} \log(x^2 + y^2)\, dxdy$$

(信州大 2003)　　(m20031905)

0.93 $a > 0$ とする．実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_1 = a$ とし，$n \geqq 1$ に対して，　$a_{n+1} = a + \dfrac{1}{a_n}$
と定義する．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 不等式 $a_1 < a_3 < a_4 < a_2$ を示せ.

(2) 数列 $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ はそれぞれ単調増加，単調減少であることを示せ.

(3) $n \geqq 2$ に対して，　$|a_{n+1} - a_n| < \dfrac{1}{1+a^2}|a_n - a_{n-1}|$　が成立することを示せ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在することを示し，その値を求めよ.

(新潟大 2003)　　(m20032001)

0.94 2 変数実数値関数 $f(x, y) = x^3 - 6xy + y^3$ の極値を求めよ.

(新潟大 2003)　　(m20032002)

0.95 次の問に答えよ.

(1) 2 変数実数値関数 $f(x, y) = x^3 - 6xy + y^3$ の極値を求めよ.

(2) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 4\}$ とするとき，2 重積分　$\displaystyle\iint_D x^2y^2 dxdy$　の値を求めよ.

(新潟大 2003)　　(m20032003)

0.96 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求めよ．

(3) 数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ とし，$n \geqq 1$ に対して，

$$\begin{cases} x_n &= 5x_{n-1} - 2y_{n-1} \\ y_n &= -2x_{n-1} + 8y_{n-1} \end{cases}$$

と定義する．このとき，一般項 x_n と y_n を求めよ．

(新潟大 2003)　　(m20032004)

0.97 A を $n\times\ m$ 実行列，$\mathbf{b}$ を実ベクトルとする．このとき，連立 1 次方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{a}$$

と連立 1 次同次方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{b}$$

の解について，次の問に答えよ．

(1) 方程式 (a) の解 $\mathbf{x_0}$ と方程式 (b) の解 $\mathbf{x_1}$ の和 $\mathbf{x_0} + \mathbf{x_1}$ は，方程式 (a) の解であることを示せ．

(2) 方程式 (a) の 1 つの解を $\mathbf{x_0}$ とする．方程式 (a) の任意に解は，方程式 (b) の解 $\mathbf{x_1}$ を用いて，$\mathbf{x_0} + \mathbf{x_1}$ と書けることを示せ．

(3) 方程式 (b) の解の全体 W_1 は，m 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ の線形部分空間になることを示せ．

(4) A の転置行列の列ベクトルによって生成される $\mathbb{R}^m$ の線形部分空間を W_2 とする．W_2 は (3) で与えられた W_1 の直交補空間であることを示せ．

(新潟大 2003)　　(m20032005)

0.98 (1) $y = \cos x$ の第 n 階導関数 $y^{(n)}$ は，

$$y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),\ n = 1, 2, 3, \cdots$$

で与えられることを示せ．

(2) 次の関数の第 n 階導関数 $y^{(n)}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ を求めよ．

(a) $y = (ax+b)\cos x$ $(a, b$ は定数$)$　　　(b) $y = \cos^2 x$

(金沢大 2003)　　(m20032201)

0.99 関数 $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(2) 閉領域 $D(a) = \left\{(x,y) | 1 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ a\right\}$ $(a > 1)$ に対して　$\displaystyle\iint_{D(a)} f(x,y)dxdy = \frac{\pi}{2}$ であるとき，a の値を求めよ．

(金沢大 2003)　　(m20032202)

0.100 行列 $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$，$\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$ となる正則行列 P を 1 つ求めよ．さらに α, β, γ の値を求めよ．

(金沢大 2003)　　(m20032203)

0.101 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2x+3}{\sqrt{2x+1}}\right)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\left(x^{\sin x}\right)$　$(x > 0)$

(富山大 2003)　　(m20032301)

0.102 次の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int x^2 \log x^2 dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{1+\sin x} dx$

(富山大 2003)　　(m20032302)

0.103 $x = a\cos\theta$, $y = b(1+\sin\theta)$ $(\pi \leq \theta \leq 2\pi$, a, b は正の定数$)$ によって描かれる $x-y$ 平面上の曲線 S について，次の問いに答えよ．

(1) θ を消去して，x, y の関係式を導け．

(2) S のおおよその形を描け．

(3) y 軸（鉛直方向）を回転軸としてできる曲線 S の回転面を内壁とする容器 A に水を注ぐ，水位が $b/2$ のときの水量 V を求めよ．ここで，水位とは x 軸からの水面の高さをいう．

(4) 関数 $y = cx^2$ $(c > 0)$ の y 軸を回転軸としてできる回転体 B を，容器 A 内に入れたとき，(3) で注がれた水があふれないための c の条件を求めよ．

(富山大 2003)　　(m20032303)

0.104 二つの箱 1 と 2 がある．はじめに，箱 1 には大量の粒子が入っており，その粒子の数を N_0 とする．また，箱 2 には粒子が入っていないものとする．いま，箱 1 の中の粒子は単位時間あたり α の確率で箱 2 に移るものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 箱 1 の粒子数を N_1 とすると，単位時間あたり箱 1 から箱 2 に $N_1\alpha$ 個の粒子が移ると考えられる．ことことをふまえ，箱 1 の粒子数の時間的変化を求めるための微分方程式を立てよ．ただし，時刻は t で表し，$t = 0$ から粒子の移動が始まるものとする．

(2) 上の微分方程式を解いて，箱 1 の粒子数 N_1 を時刻 t の関数として求めよ．

(3) いまあらたに，箱 2 に移った粒子は単位時間あたり β の確率で箱 1 に移るものとする．箱 1 の粒子数 N_1 と箱 2 の粒子数 N_2 の間には $N_1 + N_2 = N_0$ の関係があることに注意して，箱 1 の粒子数 N_1 の時間的変化を求めるための微分方程式を立てよ．

(4) 上の微分方程式を解いて，時刻 t における箱 1 の粒子数 N_1 を求めよ．ただし，時刻 $t = 0$ における箱 1 の粒子数は前の問題と同様 N_0，箱 2 の粒子数は 0 とする．

(5) 十分時間が経過した後の箱 1 の粒子数はいくらか．

(富山大 2003)　　(m20032304)

0.105 次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{dy}{dx} + y = 1$ の一般解を求めよ．

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+y}{y}$ の一般解を求めよ．

(3) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x+xy^2}{2y+x^2y}$ の一般解を求めよ．

(4) (3) で求めた一般解から，$y(1)=3$ を満たす特解を求めよ．

(富山大 2003)　　(m20032305)

0.106 $2\times\ 2$ 行列 σ_1 が $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられるとき，次の問いに答えよ．

(1) σ_1 の固有値と大きさが 1 の直交固有ベクトルを求めよ．

(2) σ_1 を対角化する変換行列 P を求め，σ_1 を対角化せよ．

(3) 対角化した行列を σ_3 とするとき，$\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 = 2i\sigma_3$ および $\sigma_2\sigma_2 = I$ を満たす行列 σ_2 を求めよ．ここで，i は虚数単位，I は $2\times\ 2$ の単位行列である．

(富山大 2003)　　(m20032306)

0.107 行列 $A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{4} \\ \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{5} \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) 行列 A は対角化可能か.

(3) 行列 A^3 は直交行列を用いて対角化可能か.

(富山大 2003)　　(m20032307)

0.108 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が $a_n \to 2\ (n\to\infty)$ と $b_n \to 1\ (n\to\infty)$ を満たすとき,

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\, b_n \to 2 \qquad (n\to\infty)$$

を示せ.

(富山大 2003)　　(m20032308)

0.109 微分方程式

$$y' = 36\left(\frac{x+y}{11x+y}\right)^2$$

を解け.

(富山大 2003)　　(m20032309)

0.110 集合 X から集合 Y への写像 $f: X \to Y$ を考える. X の部分集合 A に対して, $f^{-1}\left(f(A)\right) = A$ はつねに成り立つか.

(富山大 2003)　　(m20032310)

0.111 点 (x_1, y_1) から，直線 $ax+by+c=0$ に下ろした垂線の長さは
$\dfrac{|\ ax_1+by_1+c\ |}{\sqrt{a^2+b^2}}$ で表されることを証明せよ．

(福井大 2003)　　(m20032401)

0.112 3 直線 $4x-3y+3=0$，$x-4y+4=0$，$-3x-y+14=0$ によって作られる三角形について，次のものを求めよ．

(1) 面積　　　　(2) 外心の座標

(福井大 2003)　　(m20032402)

0.113 下記の関数 $y = f(x)$ の導関数を求めよ．ただし，a, b は定数とする．

(1) $f(x) = e^{ax}(\cos bx + \sin bx)$ (2) $f(x) = x^{ax+b}$

(福井大 2003) (m20032403)

0.114 次の関数のグラフを描きなさい． $y = \sqrt[3]{x(x^2-1)}$

(福井大 2003) (m20032404)

0.115 次の関数を微分しなさい．

(1) $y = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$ (2) $y = \sin(3x+2)$ (3) $y = \log(\sin x^2)$

(福井大 2003) (m20032405)

0.116 一般に，関数 $y = f(x)$ について，x の微小増加量 Δx にともなう y の微小増加量を Δy とすると，導関数 dy/dx は近似的に $\Delta y/\Delta x$ を表す．このことを利用して，下記の問いに答えよ．

(1) 空気中の音速 u と絶対温度 T との間に，$u = \sqrt{kRT}$ の関係が成り立つものとする．ただし，比熱比 k と気体定数 R は定数である．このとき，du/dT を求めよ．

(2) 空気の絶対温度を 2% 増やすと，音速は近似的に何 % 増加するか答えよ．

(福井大 2003) (m20032406)

0.117 下記の関数 $y = f(x)$ について，極値を求めよ．

$$f(x) = \frac{ax}{x^2 + a^2} \qquad \text{（ただし，}a\text{ は正の定数）}$$

(福井大 2003) (m20032407)

0.118 底面の半径 1，高さ 1 である直円柱がある．この底面の半径を含み，底面と 45° をなす平面で直円柱を 2 分するとき，小さいほうの体積を求めなさい．

(福井大 2003) (m20032408)

0.119 次の関数を積分しなさい．

(1) $y = \dfrac{\sqrt{\log x}}{x}$ (2) $y = x\sin x^2$ (3) $y = \dfrac{1}{\cos x}$

(福井大 2003) (m20032409)

0.120 次式に示す微分方程式に対して下記の設問に答えよ．

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t) \qquad (x(0) = 0)$$

(1) $u(t) = 1$ としたときの解 $x(t)$ を求めよ．

(2) $u(t) = -2x(t) + 1$ としたときの解 $x(t)$ を求め，(1) の結果との違いについて述べよ．

(福井大 2003) (m20032410)

0.121 次式に示す微分方程式に対して下記の設問に答えよ．

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - ax(t) = 0 \qquad \text{（}a\text{ は非零の実定数）}$$

(1) 次に示す初期条件の下で解 $x(t)$ を求めよ．また，$a > 0$，$a < 0$ に対する解 $x(t)$ の特徴を明らかにせよ．

$$x(0) = x_0\ , \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0$$

(2) $a > 0$ とする．このとき $\displaystyle\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ を満たす非零の初期条件を求めよ．

(福井大 2003) (m20032411)

0.122 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき，$\mathbf{AX} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$ となる正方行列 $\mathbf{X}$ を求めなさい．

(福井大 2003)　　(m20032412)

0.123 次の行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ がある．

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) $4\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$ を計算しなさい．

(2) $\mathbf{CD}$ と $\mathbf{DC}$ の計算をしなさい．

(福井大 2003)　　(m20032413)

0.124 次の同次連立一次方程式がある．

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

(1) 係数行列のランク (rank) はいくらか．

(2) この連立方程式の解の自由度はいくらか．

(3) この同次連立一次方程式の非自明な解を求めなさい．

(福井大 2003)　　(m20032414)

0.125 次の行列 $\mathbf{B}$，ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ がある．3 次元の空間でベクトル $\mathbf{a}$ は (x_1, y_1, z_1) の点を表し，ベクトル $\mathbf{b}$ は $(1, 0, 0)$ の点を表し，ベクトル $\mathbf{c}$ は直線を表す．

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix},\ \text{ここで}t\text{は任意の実数},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & 0 & \sin\frac{\pi}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\frac{\pi}{6} & 0 & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

(1) 線形変換（一次変換）$\mathbf{y_1} = \mathbf{Bb}$ によって，ベクトル $\mathbf{b}$ は 3 次元座標でどこに移されるかわかるように図に描きなさい．

(2) 線形変換（一次変換）$\mathbf{y_2} = \mathbf{Bc}$ によって，ベクトル $\mathbf{c}$ は 3 次元座標でどこに移されるか．ベクトル $\mathbf{y_2} = \mathbf{Bc}$ を図に描き，どのような形か説明しなさい．

(福井大 2003)　　(m20032415)

0.126 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ の表わす 1 次変換によって，直線 $x - y + 1 = 0$ が直線 $x + 2y + 3 = 0$ に写されるとき，a, b の値を求めよ．

(福井大 2003)　　(m20032416)

0.127 (1) 次の定積分を示せ．m と n は整数とする．

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx dx = 0$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos nx dx = 0$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0\,(m \neq n) \\ \pi\,(m = n) \end{cases}$

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0\,(m \neq n) \\ \pi\,(m = n) \end{cases}$

(2) $x(t)$ を周期 T の周期関数とするとき，$x(t)$ を次のように書くことができる．

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2\pi k}{T}t + b_k \sin\frac{2\pi k}{T}t\right)$$

このとき，(1) の知見を活用し，$a_k\ (k \geq 0)$, $b_k\ (k \geq 1)$ を $x(t)$ を用いて表せ．

(福井大 2003)　　(m20032417)

0.128 10 本のくじの中に当たりくじが 3 本ある．このくじを A, B の順に 2 人が 1 本づつ引くとき，次の確率を求めなさい．

(1) A が当たる確率　　(2) A, B が共に当たる確率

(2) A が当たらず，B が当たる確率　　(4) B が当たる確率

(福井大 2003)　　(m20032418)

0.129 次の不定積分，定積分，広義積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2 - x - 2}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \log(1+x)dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx$

(岐阜大 2003)　　(m20032601)

0.130 2 変数の関数 $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ に対して $\displaystyle\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(岐阜大 2003)　　(m20032602)

0.131 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ によって極座標 (r, θ) を導入するとき，x, y の関数 $f(x, y)$ の x についての偏導関数 $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}$ を r および θ についての偏導関数 $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \theta}$ を用いて表せ．

(岐阜大 2003)　　(m20032603)

0.132 3 点 $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$ を頂点とする三角形を D とする．次の重積分を求めよ．

$$\iint_D xy\ dxdy$$

(岐阜大 2003)　　(m20032604)

0.133 初期条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ を満たす，次の微分方程式の解を求めよ．

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

(岐阜大 2003)　　(m20032605)

0.134 座標平面の点 $(3, 4)$ を通り，直線 $2x + y - 3 = 0$ と角度 45° で交わる直線の方程式を求めよ．

(岐阜大 2003)　　(m20032606)

0.135 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して $P^{-1}AP = D$ が成立するような正則行列 P および対角行列 D を求めよ．

(岐阜大 2003)　　(m20032607)

0.136 次の等式を (1),(2) に従って証明せよ．ただし，$a > 0\ (a \neq 1)$, $b > 0\ (b \neq 1)$, $Q > 0$ とせよ．

$$\log_a Q = \frac{\log_b Q}{\log_b a}$$

(1) $x = \log_a Q$ のとき，Q を指数関数で表現せよ．

(2) 上で求めた式の両辺に対して，底を b とする対数をとることで，$\log_a Q = (\log_b Q)/(\log_b a)$ になることを示せ．

(豊橋技科大 2003)　　(m20032701)

0.137 次の不等式を満たす x の最大の整数を (1)，(2) に従って求めよ．

$$(x^2-3x-6)^2-6(x^2-3x-6)+8 \leq 0$$

(1) $t=x^2-3x-6$ として，$t^2-6t+8 \leq 0$ を満たす t の範囲を求めよ．

(2) t の範囲を満たす x の最大の整数を求めよ．

(豊橋技科大 2003) (m20032702)

0.138 曲線 $y=x^3+ax^2+bx+c$ について答えよ．

(1) $x=0$ で極大となり，点 $(1,3)$ に変曲点を持つ．このとき a,b,c の値を求めよ．

(2) 極小点の座標を求めよ．

(豊橋技科大 2003) (m20032703)

0.139 曲線 $y=x^3-2x^2+3$ について答えよ．

(1) $y=x+1$ の条件の下で，この曲線の y 座標が最大となる点の座標を求めよ．

(2) x の閉区間 $[-1,2]$ に対して，平均値の定理が成立する点の x 座標をすべて求めよ．

[平均値の定理] $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続で，開区間 (a,b) で微分可能ならば，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

であるような c が (a,b) の中に少なくとも一つ存在する．

(豊橋技科大 2003) (m20032704)

0.140 関数 $f(t)=ae^{-bt}\sin(\omega t+c)$ について，次の問いに答えよ．ただし，a,b,c,ω は正の定数とする．

(1) $t \geq 0$ での関数 $f(t)$ の概略図を描け．

(2) 関数 $f(t)$ の極大，極小が $\tan(\omega t+c)=\dfrac{\omega}{b}$ を満たす t のときに生ずることを示せ．

(豊橋技科大 2003) (m20032705)

0.141 列ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ を用いて，列ベクトル $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}8\\9\end{pmatrix}$ を表せ．

(豊橋技科大 2003) (m20032706)

0.142 次の連立 1 次方程式が非自明解 ($x=y=0$ 以外の解) をもつように k の値を定め，その一般解を求めよ．

$$\begin{cases} 3x+(2-k)y=0 \\ x+ky=0 \end{cases}$$

(豊橋技科大 2003) (m20032707)

0.143 列ベクトル $\mathcal{X}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ が平面上の点の座標 (x,y) に対応するとき，次の行列 A を用いて $A\mathcal{X}$ で表される 1 次変換について，以下の問に答えよ．

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\4 & 0\end{pmatrix}$$

(1) 平面上の点 $(1,2)$ はどんな点に移るか．

(2) 平面上の直線 $x+4y-1=0$ はどのような直線に移るか．

(豊橋技科大 2003) (m20032708)

0.144 サイコロを 3 回投げるとき，次の確率を求めよ．

(1) 出た目の最大値が 3 以下となる確率．

(2) 出た目の最大値が 3 になる確率.

(豊橋技科大 2003)　　(m20032709)

0.145 あるサッカー選手のシュートの成功する確率が 1/3 のとき，この選手が 4 回シュートをしたとき次の確率を求めよ.

(1) シュートが 3 回成功する確率.

(2) シュートが少なくとも 1 回成功する確率.

(豊橋技科大 2003)　　(m20032710)

0.146 次の曲線 (asteroid) に対して，以下の問いに答えよ.　$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\quad(a>0)$

(1) 曲線の長さを求めよ.

(2) 曲線の接線と両座標軸との交点を求め，その 2 点間の長さを求めよ．ただし，接点の座標を (x_0,y_0) で表し，$x_0y_0\neq 0$ とする.

(3) 曲線が囲む図形の面積を求めよ.

(名古屋大 2003)　　(m20032801)

0.147 行列　$A=\begin{pmatrix}3&1\\2&4\end{pmatrix}$　について次の問いに答えよ.

(1) A を適当な正則行列 P によって対角化せよ.

(2) A^n を求めよ（ただし，n は正整数とする）.

(3) A によって 1 次変換　$f:\begin{cases}x'=3x+y\\y'=2x+4y\end{cases}$　を定める.
f は任意の直線を直線に，平行な直線を平行な直線に移すことを証明せよ.

(4) 頂点が $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ である正方形の写像 f による像を Z とする．Z の面積を求めよ.

(名古屋大 2003)　　(m20032802)

0.148 赤玉が r 個，白玉が w 個入っているつぼの中からランダムに一つの玉を取り出し，取り出した玉と同色の玉を c 個加えて一緒に戻すという試行を繰り返すことを考える（一回の試行終了後には玉が c 個増えることになる．ただし，r, w, c は全て正整数で，赤玉が出るという事象を R，白玉が出るという事象を W とする．二つの事象 A, B がこの順番に連続して起こる確率を $P\{AB\}$，事象 A が起こったという条件のもとで事象 B が起こる条件付確率を $P\{AB|A\}$ と表す．以下の確率を求めよ.

(1) 1 回目に赤玉を取り出す確率 $P\{R\}$.

(2) 1 回目に赤玉が出たという条件のもとで，2 回目に赤玉が出る条件付確率 $P\{RR|R\}$.

(3) 上記条件のもとで，3 回目に白玉が出る条件付確率 $P\{RRW|RR\}$.

(4) 3 回目に初めて白玉が出る確率 $P\{RRW\}$.

(5) n 回目に初めて白玉が出る確率 $P\{R^{n-1}W\}$.

(名古屋大 2003)　　(m20032803)

0.149 $f(x,y)=x^2-x^4-y^2$ を領域 $R:x^2+y^2\leqq 1$ で考える.

(1) 領域 R の内部における $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(2) R における関数 $f(x,y)$ の最大値最小値を求めよ.

(名古屋工業大 2003)　　(m20032901)

0.150 $x > 0$ で微分方程式 $(*)x^2y'' + xy' - y = 0$ を考察する．

(1) $y_1 = x$ は方程式 $(*)$ の解であることを示せ．

(2) $y = y_1 z$ とおく．y が $(*)$ の解であるとき，z の満たすべき方程式を求めよ．

(3) y_1 と独立な微分方程式 $(*)$ の解を求めよ．

(名古屋工業大 2003) (m20032902)

0.151 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とする．

(1) 方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつための必要十分条件は $a + b + c = 0$ であることを示せ．

(2) 任意のベクトル $\mathbf{x}$ に対して $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ となる非自明な 3 次元のベクトル $\mathbf{y}$ を求めよ．ただし，$(,)$ は空間ベクトルの内積である．

(名古屋工業大 2003) (m20032903)

0.152 xyz 空間で円柱 $x^2 + y^2 = 4$，xy 平面，放物面 $z = x^2 + y^2$ で囲まれた領域を D とし，D の境界を S とする．$\mathbf{F} = y\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ とする．

(1) ベクトル場 $\mathbf{F}$ の発散を求めよ．

(2) 発散定理を用いて，ベクトル場 $\mathbf{F}$ の曲面 S を貫く外向きの流束 (flux) を求めよ．

(名古屋工業大 2003) (m20032904)

0.153 関数 $y = f(x) = \sqrt[3]{x^2(x+3)}$ について，以下の問に答えなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \{y - (mx + b)\} = 0$ となるように，係数 m, b の値を決定しなさい．極限値を求めるときには，途中の計算過程もわかるようにしなさい．「$x = 1/t$ への変形，テイラー展開，ロピタルの定理」等の工夫のうち，一部，または全部の工夫をすることにより，答えを求める方法もある．

(2) (1) で求めた直線 $y = mx + b$ は，一般に何と呼ばれるか？答えなさい．(漢字で書くと，より望ましい)．

(3) $f(x)$ を 1 回微分，2 回微分した式を，それぞれ，求めなさい．

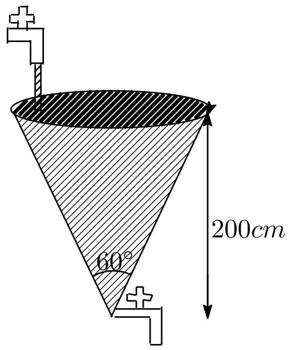
(4) (1)〜(3) をもとに，$f(x)$ のグラフの概形を書きなさい．途中の手順も示しなさい．また，極大値，極小値，変曲点，x 軸，y 軸との交点などが，もしあれば，それぞれ，その座標をグラフ中に示しなさい．

(三重大 2003) (m20033101)

0.154 次の関数の第 1 次導関数を求めなさい． $y = a^x$ （ただし，$a > 0$）

(三重大 2003) (m20033102)

0.155 高さ 200cm，開き角 60° の直円錐状の容器がある．頂点を逆さにして，上からホースで，毎秒 300cc の水を入れる．最初，容器に高さ 100cm のところまで水が入っていた．容器の厚さは無視できるとして，以下の問に答えよ．



(1) 水が一杯になるには，何秒を要するか？

(2) 水を入れ始めてから t 秒後に，容器の水の高さは h cm となった．t と h の関係式を示せ．

(3) 水が一杯になったので，水を入れるのを止めた．次に底の蛇口を開いて容器内の水を流した．流出する水の量は，高さ h cm に比例して，毎秒 $20h$ cc であった．底の蛇口を開いてから s 秒後に容器の水の高さは h cm となったとして，s と h の関係式を示せ．

(4) 容器が空になるには，何秒を要するか？

(三重大 2003)　　(m20033103)

0.156 次の関数の不定積分を求めなさい． $y=\cos^2 x$

(三重大 2003)　　(m20033104)

0.157 曲線 $f(x)=x^3-a^2x$ と直線 $g(x)=a^2x$ がある（a は正の定数）．

(1) $f(x)$ と $g(x)$ の概略図を描け（x 軸との交点と極大・極小点を明示せよ）．

(2) $f(x)$ と $g(x)$ の交わる３つの交点 $A_1(x_1,y_1)$，$A_2(x_2,y_2)$，$A_3(x_3,y_3)$ を求めよ $(x_1<x_2<x_3)$.

(3) ３つの交点のうち，点 A_2 点 A_3 と曲線によって囲まれる面積 S を求めよ．

(三重大 2003)　　(m20033105)

0.158 ２変数関数 $f(x,y)=x^3+3xy^2-3x$ の極大値，及び，極小値の値と，その点の座標の値を求めよ．次に曲線 $f(x,y)=0$ のグラフの概形を x−y 平面上に描け．また，同じ x−y 平面上に極値も書き込め．

(三重大 2003)　　(m20033106)

0.159 次の微分方程式の一般解を求めなさい． $\dfrac{dy}{dx}+y=x$

(三重大 2003)　　(m20033107)

0.160 ３点 $P_1(3,-2,-1),P_2(1,3,4),P_3(2,1,-2)$ を通る平面の方程式を求めよ．また，その平面と原点 O との最短距離を求めよ．

(三重大 2003)　　(m20033108)

0.161 空間ベクトル $\boldsymbol{a}=(3,2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(4,1,2)$ について，以下の値を求めよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$

(2) ベクトル積 $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を隣りあう２辺とする平行四辺形の面積 S

(三重大 2003)　　(m20033109)

0.162 $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるとき，x,y,z および w を求めよ．

(三重大 2003)　　(m20033110)

0.163 次の行列の行列式を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

(三重大 2003)　　(m20033111)

0.164 (1) 次の行列の行列式を $\det A$ とする．

$$A=\begin{pmatrix} x-a & y-b & z-c \\ d-a & e-b & f-c \\ l & m & n \end{pmatrix}$$

ここで，a,b,c,d,e,f,l,m,n は定数として，方程式 $\det A=0$ が３次元空間（xyz 空間）上の平面の式を与えることを示せ．また，この平面の法線ベクトルを求めよ．

(2) この平面に直線 $\dfrac{x-d}{l}=\dfrac{y-e}{m}=\dfrac{z-f}{n}$ が含まれることを示せ．

(三重大 2003)　　(m20033112)

0.165 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 8 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ．

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めなさい．

(2) 行列 A のすべての固有値を求めなさい．

(三重大 2003) (m20033113)

0.166 ある $3 \times\ 3$ の行列 A とベクトル $\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ がある．これらの間に，$A\mathbf{a_1} = 2\mathbf{a_1}$, $A\mathbf{a_2} = \mathbf{a_2}$, $A\mathbf{a_3} = 3\mathbf{a_3}$ の関係が成り立つとして，以下の問に答えよ．

(1) $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ は互いに直交するベクトルであることを証明せよ．

(2) ベクトル $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ を，$\mathbf{r} = \alpha_1\mathbf{a_1} + \alpha_2\mathbf{a_2} + \alpha_3\mathbf{a_3}$ で分解した．定数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,$ を求めよ．

(3) $A\mathbf{r}$ および $A^2\mathbf{r}$ を求めよ．

(4) $A^n\mathbf{r}$ の一般形を求めよ．

(三重大 2003) (m20033114)

0.167

$$y = \begin{cases} c(1 - \sqrt{x}) & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (x < 0\,,\ 1 < x) \end{cases}$$

が確率密度になるように c を求め，その分布の平均と分散を計算しなさい．

(三重大 2003) (m20033115)

0.168 (1) 表が出る確率が p の硬貨を n 回投げたとき，x 回表が出る確率 $f(x;p)$ を求めよ．

(2) $f(x;p)$ が最大となる p の値 p_0 を求めよ．

(3) p_0 の x に関する期待値を $E[p_0]$ と書くとき，$E[p_0] = p$ となることを示せ．

ただし， $E[p_0] = \displaystyle\sum_{x=0}^{n} p_0 f(x;p)$ である．

(三重大 2003) (m20033116)

0.169 次の関数の導関数を求めよ． $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(奈良女子大 2003) (m20033201)

0.170 次の関数 $y = e^x \sin x$ について以下の問に答えよ．

(1) 第 1 次導関数 $y^{(1)}$ が $y^{(1)} = \sqrt{2}e^x \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ となることを示せ．

(2) 第 n 次導関数 $y^{(n)}$ が $y^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{4}\right)$ となることを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(奈良女子大 2003) (m20033202)

0.171 以下では e は自然対数の底とする．

(1) $x \geq 1$ のとき，次の不等式が成立することを証明せよ． $e^x > x^2$

(2) 上の (1) における不等式の両辺を積分することによって，$x \geq 1$ のとき次の不等式が成立することを証明せよ． $e^x > \dfrac{x^3}{3} + 2$

(奈良女子大 2003) (m20033203)

0.172 次の各数列は収束するか．収束する場合はその極限値を求めよ．収束しない場合はそのことを証明せよ．

(1) $\dfrac{2n^3+n+2}{n^3-n^2+n+1}$， (2) $\dfrac{\sin n}{n}$， (3) $\dfrac{(-1)^n n+1}{n}$

(奈良女子大 2003) (m20033204)

0.173 x の関数 $f(x)$ に関する 2 階の微分方程式

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}+\frac{df(x)}{dx}-2f(x)=e^x \qquad (*)$$

を考える．この方程式の一般解 $f(x)$ は，この方程式の任意の解（特解）$g(x)$ と，式 $(*)$ の右辺を 0 とおいた微分方程式

$$\frac{d^2h(x)}{dx^2}+\frac{dh(x)}{dx}-2h(x)=0$$

の一般解 $h(x)$ との和，

$$f(x)=g(x)+h(x)$$

で与えられる．以下の手順で一般解を求めよ．

(1) $g(x)=Axe^x$ (A : 定数) の形の特解を求めたい．A を決定せよ．

(2) $h(x)$ を求めよ．

(奈良女子大 2003) (m20033205)

0.174 $\mathbf{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}$ を次のように定める．

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}=\begin{pmatrix}x\\x\\y\end{pmatrix}$$

(1) $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ は一次独立であることを示せ．また，$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}\}$ は一次従属であることを示せ．

(2) $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{e}\}$ が一次独立になるための x,y についての条件を求めよ．

(奈良女子大 2003) (m20033206)

0.175 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 を実数とするとき，次の不等式を証明せよ．

(1) $\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}\geq a_1b_1+a_2b_2$

(2) $\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geq a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

(奈良女子大 2003) (m20033207)

0.176 2次行列 $A=\begin{pmatrix}0&1\\a&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b&0\\0&c\end{pmatrix}$

に対して，$AB\neq BA$ となるための a,b,c の条件を求めよ．

(奈良女子大 2003) (m20033208)

0.177 行列 $A=\begin{pmatrix}1&\varepsilon\\\varepsilon&1\end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ．ただし，ε は実数で，$\varepsilon\neq\pm1$, $\varepsilon\neq 0$ であるとする．

(1) 逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 行列 A の固有値を求めよ．

(3) 各固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(奈良女子大 2003) (m20033209)

0.178 m と n が整数のとき，次の式を証明せよ．

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta(m-n)}d\theta = \delta_{m,n}$$

ただし，$i=\sqrt{-1}$ である．また，$\delta_{m,n}$ はクロネッカーのデルタで，

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$ と定義されている．

また，必要なら公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ を用いよ．

(奈良女子大 2003) (m20033210)

0.179 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right\}$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2003) (m20033401)

0.180 n を自然数とする．$1 \leqq k \leqq n$ を満たす各自然数 k に対して

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^n = P_k(x)(x^2-1)^{n-k}$$

となる x の多項式 $P_k(x)$ が存在することを示せ．

(京都工芸繊維大 2003) (m20033402)

0.181 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{xe^x - \sin x}{x^2}$

(京都工芸繊維大 2003) (m20033403)

0.182 積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{2x}{(2x^2+1)(x^2+1)}dx$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2003) (m20033404)

0.183 次の定積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

(京都工芸繊維大 2003) (m20033405)

0.184 2 変数関数 $\varphi(x,y) = x - y + e^y\sin x$ と全微分可能な関数 $\psi(x,y)$ に対して，次の各問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$，$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ を求めよ．

(2) $x=0$ の近傍で定義された微分可能な関数 $f(x)$ が $\varphi(x,f(x))=0$ を満たすとし，$g(x)=\psi(x,f(x))$ とおく．微分係数 $f'(0)$ を求めよ．また，$a=\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(0,0)$，$b=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}(0,0)$ とおくとき，$g'(0)$ を a,b を用いて表せ．

(京都工芸繊維大 2003) (m20033406)

0.185 領域 $D=\{(x,y): 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq \sqrt{x}\}$ 上で重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{x}(x+y)dxdy$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2003) (m20033407)

0.186 微分方程式 $x^2y' = x^2 + xy + y^2$ を解け．

(京都工芸繊維大 2003) (m20033408)

0.187 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -x & 3 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ x & -x & 4 \end{pmatrix}$ に対して，行列の積 AB を求め，次に AB の行ベクトルが 1 次従属となるように x を定めよ．

(京都工芸繊維大 2003) (m20033409)

0.188 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ a & 2 & b \\ -1 & b & 2 \end{pmatrix}$ が固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ をもつとする．

(1) 成分 a,b の値を求めよ．　　(2) A の固有値をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2003)　　(m20033410)

0.189 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2003)　　(m20033411)

0.190 実数全体で定義された連続関数 $f(x)$ に対して $g(x)$ を
$$g(x)=\int_0^x tf(x-t)dt$$
で定めるとき，次の (1), (2), (3) に答えよ．

(1) $f(x)$ が奇関数ならば $g(x)$ も奇関数であり，$f(x)$ が偶関数ならば $g(x)$ も偶関数であることを示せ．

(2) $f(x)=\cos x$ のとき，$g(x), g'(x), g''(x)$ を求めよ．

(3) $f(0)>0$ のとき，$g(x)$ は $x=0$ で極小値をとることを示せ．

(大阪大 2003)　　(m20033501)

0.191 次のような 4 つの未知変数 x_1，x_2，x_3，x_4 をもつ連立一次方程式を考える．
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 &= 0 \\ 2x_1+5x_2-x_3+3x_4 &= 0 \\ x_1+3x_2-x_3+2x_4 &= 0 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4 &= 0 \end{cases}$$
次の (1), (2) に答えよ．

(1) 上述の連立一次方程式の係数行列
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
の列ベクトルのうちで，なるべく少ない個数の列ベクトルを用いて，それらの一次結合（線形結合）によって，その他の列ベクトルを表現せよ．

(2) 上述の連立 1 次方程式の解 x_1, x_2, x_3, x_4 のうちで，
$$(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+(x_3-1)^2+(x_4-1)^2$$
を最小にするものを求めよ．

(大阪大 2003)　　(m20033502)

0.192 赤い玉 3 個が一列に並んでいるとする．この列に対して次のような操作を繰り返し行う．

> 列の先頭，2 番目，3 番目の 3 つの玉のうちから 1 つを等確率で選ぶ．選んだ玉が赤い玉なら，それをそのまま置いておき，列の先頭に白い玉を 1 つ付加する．選んだ玉が白い玉なら，それを取り去り，玉が抜けたために隙間ができれば，玉の順序が変わらないように玉を移動して隙間をなくす．

例として 1 回目の操作と 2 回目の操作について述べる．1 回目の操作で当然赤い玉を選ぶことになり，操作の結果として白い玉が 1 つ，列の先頭に付加され，3 つの赤い玉と合わせて 4 つの玉が並ぶことになる．2 回目の操作では，それらの 4 つの玉のうちの先頭，2 番目，3 番目の 3 つの玉のうちから 1 つを等確率で選ぶ．このとき，確率 $\frac{2}{3}$ で赤い玉が選ばれ，確率 $\frac{1}{3}$ で白い玉が選ばれる．赤い玉

が選ばれた場合には，白い玉が１つ先頭に付加され，結果として白い玉が２つ並び，その後に赤い玉が３つ続いた列ができる．また，白い玉が選ばれた場合には，白い玉は取り去られ，結果として列には赤い玉が３つ残ることになる．

n 回目の操作の終了時に列にある白い玉の個数を $w(n)$ と書くことにする．明らかに $w(n)$ は $0,1,2,3$ のいずれかの値を（それぞれある確率を持って）とる．特に $n=0$ の場合には確率は１で $w(0)=0$ であると定義しておく．

$i=0,1,2,3$ について，$w(n)$ が i である確率を $p_i(n)$ で表す．上で述べたことにより，
$p_1(0)=p_2(0)=p_3(0)=0$, $p_0(0)=1$ である．

次の (1)～(4) に答えよ．

(1) $p_0(1), p_1(1), p_2(1), p_3(1)$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) $p_1(2m)=p_3(2m)=0$ であることを示せ．ただし，m は非負整数とする．

(3) m を１以上の整数とするとき，$p_0(2m)$ と $p_2(2m)$ を $p_0(2m-2)$ と $p_2(2m-2)$ を用いて表せ．

(4) 非負整数 m について，$p_0(2m)$ を求めよ．

(大阪大 2003)　　(m20033503)

0.193　次の微分方程式の一般解を定数変化法で求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx}+4y=\cos(x)$　　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=\cos(x)$

(大阪府立大 2003)　　(m20033601)

0.194　$A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & -6 & -3 \\ -2 & -2 & -2 & -4 & 4 \\ 5 & -6 & -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$ であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -2 & -2 & -2 \\ 5 & -6 & -3 \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

(2) 行列 A の階数 (rank) を求めよ．

(大阪府立大 2003)　　(m20033602)

0.195　(1) 次の値をそれぞれ $re^{i\theta}$ の形で表せ．

(a) $\dfrac{5-i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+i3}$　　　(b) $\sqrt[3]{1-i}$

(2) 次の積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{2}{5+4\cos\theta}d\theta$

(大阪府立大 2003)　　(m20033603)

0.196　関数　$f(x)=\dfrac{1-2x+x^2}{1+x^2}$　について，次の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) 閉区間 $[\,0,2\,]$ における $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(関西大 2003)　　(m20033701)

0.197　パラメータ表示の曲線 $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$　$0 \leqq t \leqq 2\pi$　の長さを求めよ．

(関西大 2003)　　(m20033702)

0.198 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) B の階数 $(= \mathrm{rank})$ r を求めよ．

(2) B の 4 個の列ベクトルから r 個の 1 次独立ベクトルの取り出し方は何通りあるか求めよ．ただし，r は (1) で求めた r である．

(関西大 2003) (m20033703)

0.199 $f(x) = \sin^{-1} x$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f'(x), f''(x)$ を求めよ．

(2) f の n 階微分を $f^{(n)}$ と書くとき，

$$(1 - x^2) f^{(n+2)}(x) - (2n+1) x f^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0$$

となることを示せ．

(3) $f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0)$ を示せ．

(4) $f^{(n)}(0)$ を求めよ．

(神戸大 2003) (m20033801)

0.200 $f(x), g(x)$ を何回でも微分可能な関数とする．このとき

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

を証明せよ．ここで，$h^{(l)}(x)$ は関数 $h(x)$ の l 階導関数を表す．

(神戸大 2003) (m20033802)

0.201 $L_n = \displaystyle\int \log^n x \, dx$ とする．

(1) $L_n = x \log^n x - n L_{n-1} \quad (n \geq 1)$ を示せ． (2) L_n を求めよ．

(神戸大 2003) (m20033803)

0.202 $x = u\cos\alpha - v\sin\alpha$, $y = u\sin\alpha + v\cos\alpha$（$\alpha$ は定数）のとき，x, y に関して 2 階偏微分可能な $z = z(x, y)$ について

(1) $z_u^2 + z_v^2$ を z の x, y に関する偏導関数を用いて表せ．

(2) $z_{uu} + z_{vv}$ を z の x, y に関する第 2 次偏導関数を用いて表せ．

ただし，z_u, z_{uu} は z の u に関する第 1 次および第 2 次偏導関数を表す．

(神戸大 2003) (m20033804)

0.203 次の積分を計算せよ．

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \qquad \left(D = \{(x, y) \in \mathbf{R^2} \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\} \right)$$

(神戸大 2003) (m20033805)

0.204 次の重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x dxdy, \qquad D : \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \leq 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0,$ ただし, $a, b > 0$

(2) $\displaystyle\iint_D \sin(x + y) dxdy, \qquad D$ は 3 直線 $x = 0, y = 0, x + y = \pi/2$ で囲まれる三角形の内部

(3) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy, \qquad D: x^2+y^2 \leq a^2$

(神戸大 2003)　　(m20033806)

0.205　次の微分方程式を解け．　$y''+4y'+4y=x^3$

(神戸大 2003)　　(m20033807)

0.206　A を，対角成分 $a_1,\cdots,a_n$ が相異なる n 次実対角行列とする．このとき $AX=XA$ を満たす $n\times n$ 実行列 X をすべて求めよ．

(神戸大 2003)　　(m20033808)

0.207　$a_1,\cdots,a_n$ を実数とするとき，次の $n\times n$ 行列の行列式を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{pmatrix}$$

(神戸大 2003)　　(m20033809)

0.208　行列 A を次のように定めるとき，以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) A^n を求めよ．

(神戸大 2003)　　(m20033810)

0.209　$\mathbf{R^3}$ の基底 $\{e_1,e_2,e_3\}$，行列 B を次のように定める．

$$e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

φ を基底 $\{e_1,e_2,e_3\}$ に関して B で表現される $\mathbf{R^3}$ 上の線形変換とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 基底 $\{e_1+e_2,e_2,e_3\}$ に関する φ の表現行列を求めよ．

(2) どの基底に関しても φ が B で表現されているときの a,b,c の値を求めよ．

(神戸大 2003)　　(m20033811)

0.210　(1) n を正の整数とする．このとき，

$$\sin^{2n+1}x \leqq \sin^{2n}x \leqq \sin^{2n-1}x \qquad (0\leqq x\leqq \pi/2)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\sin^0 x=1$ $(0\leqq x\leqq\pi/2)$ と定め，$n=0,1,2,\cdots$ に対して　$\displaystyle I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx$　とおく．

このとき，　$\displaystyle I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ $(n\geqq 2)$　が成り立つことを示せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\right)^2$ を求めよ．

(岡山大 2003)　　(m20034001)

0.211　実数 x に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}$ を求めよ．

(岡山大 2003)　　(m20034002)

0.212 連立一次方程式

$$\left\{\begin{array}{rcl} y-2z &=& 1 \\ 2x+2y+az &=& b \\ 4x+3y &=& b \\ 2x+y+z &=& c \end{array}\right. \tag{$*$}$$

に関して，以下の問いに答えよ．ただし，a, b, c は実数であるとする．

(1) 方程式 $(*)$ の解がただ一つ存在するとき，a, b, c の間に成り立つ関係を述べよ．また，その解を求めよ．

(2) 方程式 $(*)$ の解の全体が 3 次元ユークリッド空間内の直線になっているとき，a, b, c の間に成り立つ関係を述べよ．また，その直線のあらわす式を求めよ．

(岡山大 2003)　　(m20034003)

0.213 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_1=3$，$b_1=1$，$c_1=-1$，

$$a_{n+1}=3a_n+b_n+c_n\,,\ b_{n+1}=a_n+2b_n\,,\ c_{n+1}=a_n+2c_n \qquad (n \geqq 1)$$

によって定義する．これらの数列の一般項を求めよ．

(岡山大 2003)　　(m20034004)

0.214 $n=1,2,3,\cdots$ に対し，$\mathbb{R}$ 上の関数 $f_n(x)$ を　$f_n(x)=\sqrt{\dfrac{1}{n^2}+x^2}$　で定める．次に答えよ．

(1) $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ で連続であることを示せ．

(3) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ での微分可能性を調べよ．

(広島大 2003)　　(m20034101)

0.215 次の関数を x で微分せよ．　$f(x)=\ln\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$　($\ln$ は自然対数)

(広島大 2003)　　(m20034102)

0.216 $n=0,1,2,\cdots$ に対し，$I_n=\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^n x dx$ とおく．次に答えよ．

(1) I_2, I_3 を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ に対し，$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ を示せ．

(3) $n \geqq 4$ に対し，I_n を求めよ．

(広島大 2003)　　(m20034103)

0.217 次の関数を $x=1$ のまわりでテイラー展開し，3 次項まで示せ．

$f(x)=a^x$　ただし　$a>0$　の定数

(広島大 2003)　　(m20034104)

0.218 (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \leqq 1+\int_1^{\infty}\frac{1}{t^2}dt$ を示せ．

(2) 正の実数 x に対し，無限級数　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n}\right)$　が収束することを示せ．

(3) 正の実数 x に対し　$f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n}\right)$　とおく．r を正の整数とするとき

$f(r)=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{r-1}+\dfrac{1}{r}$　を示せ．

(広島大 2003)　　(m20034105)

0.219 次の定積分を導け（計算せよ）．ただし，$a > 0$ とする．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

ヒント：$\displaystyle\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy$ であるから，

x, y の 2 重積分を求めればよい．

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx$

(広島大 2003)　　(m20034106)

0.220 行列と複素数に関する次の問いに答えよ．

(1) 実数成分をもつ次の行列　$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

は $a = b = 0$ でない限り正則である（逆行列をもつ）ことを示せ．

(2) A にその $(1,1)(2,1)$ 成分から構成された複素数 $a + ib$ $(i^2 = -1)$ を対応させる．このとき，行列の積，逆行列には複素数の積，逆数がそれぞれ対応することを示せ．

(広島大 2003)　　(m20034107)

0.221 行列 A を　$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　と定める．次に答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) A を正則行列で対角化せよ．

(広島大 2003)　　(m20034108)

0.222 $\mathbb{R}^3$ の部分集合 V を　$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}$　と定める．次に答えよ．

(1) V は $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間であることを示せ．

(2) V の正規直交基底を一組求めよ．

(3) 写像 $f : V \to V$ を　$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ z \\ x \end{bmatrix}$　と定める．f が線形写像になることを示せ．

(4) (2) で求めた V の一組の基底を e_1, e_2 とする．$f(e_1)$ と $f(e_2)$ をそれぞれ，e_1, e_2 を用いて表せ．

(広島大 2003)　　(m20034109)

0.223 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ と $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を写像とする．このとき，次の命題について正しいときは証明を与え，正しくないときは反例を与えよ．

(1) g と合成写像 $g \circ f$ が線形写像で g が単射ならば，f は線形写像である．

(2) f と合成写像 $f \circ g$ が線形写像ならば，g は線形写像である．

(広島大 2003)　　(m20034110)

0.224 θ の範囲が $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき，θ の関数　$y = 2\cos 2\theta + 4\sin\theta + 1$

の最大値と最小値を求めなさい．また，そのときの θ の値を求めなさい．

(山口大 2003)　　(m20034301)

0.225 x についての 2 次方程式 $x^2 - 4ax + 5a^2 = 20$ の解が，異なる 2 つの正の解を持つように定数 a の値に範囲を求めなさい．

(山口大 2003)　　(m20034302)

0.226 x の 2 次方程式 $ax^2 - 2ax - a^2 - 1 = 0$（a は実数）の 2 つの解が実数を持つとき，解の存在する a の範囲を求めなさい．

(山口大 2003)　　(m20034303)

0.227 ド・モアブルの法則 $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ を数学的帰納法で証明しなさい．

(山口大 2003)　　(m20034304)

0.228 (1) $y = e^x \sin x$ の dy/dx を求めなさい．

(2) $y = (x + \log x)^2$ の dy/dx を求めなさい．

(山口大 2003)　　(m20034305)

0.229 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \tan x dx$ を求めなさい．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int x\cos ax dx$ を求めなさい．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int dx/(x^2(1-x))$ を求めなさい．

(山口大 2003)　　(m20034306)

0.230 (1) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$ を変数分離により解きなさい．

(2) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$ を，$u = \dfrac{y}{x}$ の変数変換を行うことにより解きなさい．

(山口大 2003)　　(m20034307)

0.231 次の微分方程式の一般解を求めなさい．

(1) $xy' + y + 1 = 0$　　(2) $y'' - 2y' + y = e^{5x}$　　(3) $x^2y'' - 2y = 2x^2 \quad (x > 0)$

(山口大 2003)　　(m20034308)

0.232 行列式 A の値を求めなさい．

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 8 & 11 \\ 5 & 6 & 7 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{vmatrix}$$

(山口大 2003)　　(m20034309)

0.233 xy 平面上での次の変換に対応する行列を求めなさい．

(1) 直線 $y = 2x$ に関する対称移動に対応する変換行列

(2) 原点を中心として $60°$ 回転移動に対応する変換行列

(山口大 2003)　　(m20034310)

0.234 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ に対する固有値 λ および固有ベクトル $\vec{v}$ を求めよ．ただし，固有ベクトル $\vec{v}$ は 1 つ示せばよい．

(山口大 2003)　　(m20034311)

0.235 $f(x) = x \ (-\pi \leqq x < \pi)$，$f(x + 2\pi) = f(x)$ の Fourier 級数を求めなさい．

(山口大 2003)　　(m20034312)

0.236 関数 $f(x) = x^{\frac{1}{x}} \quad (x > 0)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \log f(x)$ を求めよ． (2) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{d}{dx} f(x)$ を求めよ．

(徳島大 2003) (m20034401)

0.237 $D = \{(x, y) \,:\, y \geqq x^2 \,,\, y \leqq x + 2\}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) D を xy 平面に図示せよ．

(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ の値を求めよ．

(徳島大 2003) (m20034402)

0.238 $y = y(x)$ に対する微分方程式 $y'' + y' - 2y = 0$ を考える．

(1) 一般解を求めよ．

(2) a を定数として，初期条件 $y(0) = 1 \,,\, y'(0) = a$ を満たす解を求めよ．

(3) (2) の解が $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$ となるように，a の値を定めよ．

(徳島大 2003) (m20034403)

0.239 $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 1 - \cos\theta & 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$ とする．

(1) $A(\theta)$ が正則であることを示せ．

(2) 1 が $A(\theta)$ の固有値であることを示せ．

(3) $A^2(\theta)(= A(\theta)A(\theta))$ に対して，$A^2(\theta) = A(m\theta)$ となる自然数 m を求めよ．

(徳島大 2003) (m20034404)

0.240 S を平面上の円とする．

(1) $A \,,\, B$ が S 上にあり，P が円弧 AB の上を動くとき，$\triangle APB$ の面積はいつ最大になるか答えよ．

(2) S に内接する n 角形 $(n \geq 3)$ の面積はいつ最大になるか，理由を付けて答えよ．

(九州大 2003) (m20034701)

0.241 $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$ として，次の各設問に答えよ．

(1) xyz 空間で $z = f(x, y)$ で定義される曲面の点 $(a, b, c) \,,\, c = f(a, b),$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) 関数 $f(x, y)$ の極値を求めよ．

(九州大 2003) (m20034702)

0.242 xyz 空間内の円柱面 $T \,:\, x^2 + y^2 = x$ と曲面 $S \,:\, z = \sqrt{x^2 + y^2}$ について，次の設問に答えよ．

(1) $T \,,\, S$ と xy 平面で囲まれる立体の体積を求めよ．

(2) 曲面 S の円柱面 T で切れ取られた部分の曲面積を求めよ．

(九州大 2003) (m20034703)

0.243 y を x の関数，$a \,,\, b$ を定数とする．また，微分方程式 $y'' + ay' + by = f(x)$ に対する特解を y_1 とし，$y'' + ay' + by = g(x)$ に対する特解を y_2 とする．このとき，

(1) 微分方程式 $y'' + ay' + by = f(x) + g(x)$ に対する一つの特解は $y_1 + y_2$ となることを示せ．

(2) 微分方程式 $y'' + y' - 2y = \cos x + e^{-x}$ に対する一般解を求めよ．

(九州大 2003)　　(m20034704)

0.244 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 つの空間ベクトルとする．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の面積を S とする．

(1) S は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の長さ $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$ と内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を用いて

$$S = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$$

と表されることを示せ．

(2) 以下の設問では，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，S を求めよ．

(3) $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を含む平面上にあるベクトル $\boldsymbol{d}$ で，$\boldsymbol{c} - \boldsymbol{d}$ がその平面と直交するものを求めよ．

(4) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を隣り合う 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ．

(九州大 2003)　　(m20034705)

0.245 次の問に答えよ．

(1) 行列 A の階数の定義について，以下の下線部に適切な単語を記入せよ．

(a) A の 0 でない小行列式の __________．

(b) A の __________ な列ベクトルのの最大個数．

(c) A の __________ な行ベクトルのの最大個数．

(d) A で定まる線形変換の値域の __________．

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ．

(3) 次の連立方程式に解があれば，そのすべてを求めよ．

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

(九州大 2003)　　(m20034706)

0.246 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，正則行列 $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ で，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

を満たすものが存在すると仮定する．次の各設問に答えよ．

(1) λ, μ は A の固有値でなければならないことを示せ．

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して上の条件を満たす P を直交行列で求めよ．

(九州大 2003)　　(m20034707)

0.247 z を複素数とする．複素平面上の経路 C に沿う積分 $\displaystyle\int_C \frac{e^{az}}{1+e^z}dz$ 　$(0 < a < 1)$ について次の問に答えよ．

(1) 積分路 C を 4 点 $-R, R, R+i2\pi, -R+i2\pi \quad (R>0)$ を頂点とする長方形にとるとき，C で囲まれる領域内にある特異点，およびその点における留数を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \quad (0<a<1)$ を計算せよ．

(九州大 2003) (m20034708)

0.248 1つのサイコロを続けて投げる動作を考える．偶数の目が k（k は自然数，正の整数，0 は含まないとする）回出た時点で，この動作を終了するとする（必ずしも連続して k 回出る必要はない）．このとき，n 回目で動作が終了する確率を，$p_n(k)$, $n \geq k$ とする．次の問に答えよ．

(1) $k=5$ とした，$p_n(5)$ を求めよ（n を用いて $p_n(5)$ を表現せよ）．

(2) 一般的な k（k は自然数，正の整数，0 は含まないとする）の場合において，$p_n(k)$ を求めよ（n と k を用いて $p_n(k)$ を表現せよ）．

(3) 一般的な k（k は自然数，正の整数，0 は含まないとする）の場合において，確率 $p_n(k)$ を最大にする n をすべて求めよ（k を用いて n を表現せよ）．

(九州大 2003) (m20034709)

0.249 (1) $e = \displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ を使って以下を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

(2) (a) $a>0, x>0$ のとき，$e^{ax} \geq 1+ax+\dfrac{a^2x^2}{2}$ であることを使って $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-ax}$ を求めよ．

(b) 上の結果を使って $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^5 e^{-x}$ を求めよ．

(c) 同じく (a) の結果を使って $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$ を求めよ．

(九州芸術工科大 2003) (m20034801)

0.250 (1) 次の関数 $F(x)$ を x で微分せよ． $F(x) = \displaystyle\int_a^x (x-t)^2 f(t) dt$

(2) 次を求めよ． $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+3x+2} dx$

(九州芸術工科大 2003) (m20034802)

0.251 曲面 $z = x^2+y^2$ の点 $(3,4,25)$ における接平面と法線の式を求めよ．

(九州芸術工科大 2003) (m20034803)

0.252 ベクトル $\boldsymbol{a} \neq 0$, $\boldsymbol{b} \neq 0$ に対して $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$ とおくとき，λ, $\boldsymbol{c}$ を求めよ．

(九州芸術工科大 2003) (m20034804)

0.253 (1) 正方行列 C の対角成分の和を $\mathrm{tr}(C)$ と記す，$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ を示せ．

(2) $AB=BA$，また，C が直交行列であるとき，${}^tCAC$ と ${}^tCBC$ の積が交換可能であることを示せ．

(3) n 次の正則な正方行列 A, B に対して，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ であることを示せ．

(九州芸術工科大 2003) (m20034805)

0.254 行列式 $\begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix}$ を 2 乗して，$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$ を示せ．

(九州芸術工科大 2003) (m20034806)

0.255 $a > b > 0$ のとき，線形変換 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ によって円 $x^2 + y^2 = 1$ がどのような図形に写像されるか式と図で示せ．また，それに続けて線形変換 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ をほどこすとき，どのような図形に写像されるか式と図で示せ．

(九州芸術工科大 2003)　　(m20034807)

0.256 2 次形式 $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz$ の標準形を求めよ．

(九州芸術工科大 2003)　　(m20034808)

0.257 1 辺の長さが a の正方形がある．その 4 隅から正方形を切り取って，その残りで箱を作る．箱の容積が最大になるときの切り取るべき 4 隅の正方形の 1 辺の長さを求めよ．

(佐賀大 2003)　　(m20034901)

0.258 曲線 $y = 2\sin x$ において，

(1) $x = \pi/3$ [rad] の点における接線の傾きを求め，この接線と直交する直線が曲線 y と接する点 (x, y) の値を求めなさい．ただし，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ とする．

(2) 接線と直交する直線が曲線と接点を持たない x の範囲を式および図で示しなさい．

(佐賀大 2003)　　(m20034902)

0.259 関数 $f(x) = x^3$ が $x = 1$ で連続であることを $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて証明せよ．

(佐賀大 2003)　　(m20034903)

0.260 $x > 0$ の範囲で定義された関数 $f(x) = x^x$ について，次の問いに答えよ．ただし，計算の際は $x^x = e^{x \log x}$ と変形せよ．また，$\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x) = 1$ は既知としてよい．

(1) 導関数 $f'(x)$ を計算し，$f(x)$ の最小値を求めよ．

(2) $y = f(x)$ のグラフの概形を図示せよ．

(佐賀大 2003)　　(m20034904)

0.261 以下の関数の 1 次微分を求めなさい．

(1) $y = (x^2 - 1)/(3x^2 + 1)$　　(2) $y = (2x + 3/x)^2$

(2) $y = e^{3x-2} \sin(3x - 2)$　　(4) $y = x/(x^2 + 1)^{1/2}$

(佐賀大 2003)　　(m20034905)

0.262 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 3})$　　(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - 5\sin 2x}{x \cos x}$

(佐賀大 2003)　　(m20034906)

0.263 次の関数の 2 次導関数を求めよ．

(1) $x^3 e^x$　　(2) $e^{-x} \sin x$

(佐賀大 2003)　　(m20034907)

0.264 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x \log x dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x} dx$

(佐賀大 2003)　　(m20034908)

0.265 $y = ax^2$ $(a > 0\,,\ x \geqq\ 0\,,\ y \geqq\ 0)$ 上に点 $P(x_p, y_p)$ がある．また，点 P の接線と x 軸との交点を点 A とする．

(1) 点 P を中心点として x 軸に接する円を描く．この円に対して，原点 $(0,0)$ を通る接線 $(y = kx)$ を求めよ．

(2) 交点 A の x 座標値を求めよ．

(3) $y = ax^2$，点 P の接線，x 軸で囲まれる面積 S を求めよ．

(4) 点 P と x 軸の両方に接する円の中心点 $Q(x_q, y_q)$ の座標値 x_q を求めよ．

(佐賀大 2003)　　(m20034909)

0.266 二次曲線 $y = ax^2 + b$ と直線 $x = -1\,,\ x = 1$ および $y = 0$ とで囲まれる部分を面 D とする．このとき，以下の各問いに答えなさい．ただし，a, b は定数であり，$a > 0\,,\ b \geqq\ 0$ とする．

(1) 面 D の部分に斜線を施して図示しなさい．

(2) 二次曲線の $-1 \geqq\ x \geqq\ 1$ の部分を，曲線が x 軸に接するまで y 軸と平行に移動したとき，この曲線の移動部分がつくる面の面積 S を求めなさい．

(3) 面 D を y 軸を中心に回転させたときの回転体の体積 V_y，および x 軸を中心に回転させたときの体積 V_x を求めなさい．ただし，$a = b = 1$ とする．

(4) $b = 0$ のとき，$V_y = V_x$ が成り立つ a の値を求めなさい．

(佐賀大 2003)　　(m20034910)

0.267 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$ が収束することを示せ．

(佐賀大 2003)　　(m20034911)

0.268 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^3+x} dx$ を計算せよ．

(佐賀大 2003)　　(m20034912)

0.269 置換積分法を用いて，次の定積分を計算せよ．ただし，逆三角関数 $\tan^{-1} x = \mathrm{arctan} x$ について，$(\tan^{-1} x)' = 1/(1 + x^2)$ となることに注意する．

(1) $\displaystyle\int_{2/\pi}^{6/\pi} \frac{\cos(1/x)}{x^2} dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{1+x^4} dx$

(佐賀大 2003)　　(m20034913)

0.270 以下の関数の不定積分を求めなさい．

(1) $1/(9x^2 - 4)$　　(2) $1/(4x^2 + 1)$

(2) $x\cos(3x - 1)$　　(4) $\sin^2(3x + 2)$

(佐賀大 2003)　　(m20034914)

0.271 直線上を時刻 t における速度が $v = \sin 2\pi t$ で与えられる点 P が動く．$t = 0$ から $t = 5$ までに点 P が移動する距離を求めよ．また実際に動いた道のりを求めよ．

(佐賀大 2003)　　(m20034915)

0.272 2 変数関数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ について

(1) 偏導関数 $f_x\,,\ f_y$ を計算せよ．　　(2) $f_{xy} = f_{yx}$ を示せ．

(佐賀大 2003)　　(m20034916)

0.273 以下に示す x と y の関数である z の偏微分を求めなさい．

(1) $z = y/x + x/y$ であるとき，$\partial z/\partial x$

(2) $z = y\sin(2x+3y)$ であるとき，$\partial z/\partial y$

(佐賀大 2003)　　(m20034917)

0.274 関数 $f(x,y) = 1 - 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 3y$ の極値を求めよ．

(佐賀大 2003)　　(m20034918)

0.275 次の 2 重積分を求めよ． $I = \iint_D y\,dxdy \qquad D = \{(x,y)\ :\ y^2 \leq x \leq y+2\}$

(佐賀大 2003)　　(m20034919)

0.276 重積分 $\displaystyle\iint_{\{-1\leq x+y\leq 1\,,\ -1\leq x-y\leq 1\}} (x^2-y^2)e^{-(x+y)}dxdy$ を計算せよ．

(佐賀大 2003)　　(m20034920)

0.277 次の微分方程式を解け． $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y}{x+y}$

(佐賀大 2003)　　(m20034921)

0.278 以下の微分方程式を解き，一般解を求めなさい．

(1) $(1-x)y + (1-y)x(dy/dx) = 0$　　(2) $dy/dx - 3y = e^{-x}$

(佐賀大 2003)　　(m20034922)

0.279 次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 4$　　(2) $y^2 + (x^2 - xy)\dfrac{dy}{dx} = 0$

(佐賀大 2003)　　(m20034923)

0.280 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，次のものを計算せよ．

(1) $A+B$　　(2) $B\ {}^tA$

(佐賀大 2003)　　(m20034924)

0.281 次の行列 $A = (0,1)$，$B = (2,3)$，$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ に関して，行列の計算を行え．

ただし，^{t} は転置，C^{-1} は逆行列を表す．

また，行列の演算が約束されていないものについては ‘ 不能 ’ とかくこと．

(1) $A+B$　　(2) AB　　(3) $(A^t)B$　　(4) $A(B^t)$　　(5) C^{-1}

(佐賀大 2003)　　(m20034925)

0.282 次の行列の行列式を求めよ．

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2003)　　(m20034926)

0.283 次の行列 B について，以下の問いに答えよ．

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|B|$ を計算せよ．

(2) ２つのベクトル $(1,-2,4),(-2,4,-3)$ が１次独立であることを示せ．

(3) B の階数 $\mathrm{rank}B$ を求めよ．

(佐賀大 2003)　　(m20034927)

0.284 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) A^2 および A^3 を計算せよ．

(2) 上の計算結果より，逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) 次の連立方程式を解け．

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2003)　　(m20034928)

0.285 次の連立方程式を逆行列を用いて解け．

$$\begin{cases} 2x+2y+z & = & 3 \\ 3x-2y+2z & = & -1 \\ -x+2y & = & 4 \end{cases}$$

(佐賀大 2003)　　(m20034929)

0.286 F の直交行列 P を求めて，$P^{-1}FP$ を対角行列にする．

$$F=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

以下の手順に従って求めよ．

(1) F の固有値を求め，

(2) 長さ１の固有ベクトルを求め，

(3) 直交行列 P を求め，

(4) 対角行列 $P^{-1}FP$ を求めよ．

(佐賀大 2003)　　(m20034930)

0.287 次の問いに答えよ．

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ のすべての固有値と，各固有値に対する固有空間の基底を求めよ．

(2) 複素数 λ が実正方行列（すなわち実数を成分とする正方行列）A の固有値ならば，λ の共役複素数 $\overline{\lambda}$ も A の固有値になることを証明せよ．

(3) 実対称行列のすべての固有値は実数になることを証明せよ．

(4) n を偶数とするとき，すべての固有値が 0 でない純虚数になるような n 次実正方行列の例を与えよ．また n が奇数ならばそのような例が存在しないことを証明せよ．

(佐賀大 2003)　　(m20034931)

0.288 実数を成分とする n 次縦ベクトルのなす線形空間を $\mathbf{R^n}$ とし，$\mathbf{R^4}$ から $\mathbf{R^3}$ への写像 f を

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ 11x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 5x_4 \end{pmatrix}$$

で定義するとき，次の問いに答えよ．

(1) $\mathbf{R^4}$ の任意のベクトル x に対して $f(x) = Ax$ を満たす行列 A を求めよ．

(2) 写像 f が線形写像になることを証明せよ．

(3)
$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in \mathbf{R^4} \mid f(x) = \mathbf{0}\},$$
$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid \ x \in \mathbf{R^4}\}$$
がそれぞれ $\mathbf{R^4}, \mathbf{R^3}$ の線形部分空間になることを証明せよ．ただし，$\mathbf{0}$ は $\mathbf{R^3}$ の零ベクトルを表す．

(4) $\mathrm{Ker}(f)$ と $\mathrm{Im}(f)$ の次元と基底をそれぞれ求めよ．

(佐賀大 2003) (m20034932)

0.289 極座標 (r, θ, ϕ) における「面積素」および「体積素」を求め，これらの結果を用いて，半径 a の球の面積 S，および体積 V を計算しなさい．

(佐賀大 2003) (m20034933)

0.290 行列 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき．

(1) 行列式 $\det \boldsymbol{A}$ を求めよ．

(2) 逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めよ．

(3) 平面 $-3x + 2y + 2z = 1$ は，一次変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

によって，どのような図形に移るか．その方程式を示せ．

(首都大 2003) (m20035901)

0.291 次の行列式を因数分解せよ．

(1) $\begin{vmatrix} 2a+b+c & b & c \\ a & a+2b+c & c \\ a & b & a+b+2c \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$

(首都大 2003) (m20035902)

0.292 行列 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき．

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値及び固有ベクトルを求めよ．

(2) 行列 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ が対角行列となるような，行列 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ を求めよ．

(3) $\boldsymbol{A}^k$ を求めよ．

(首都大 2003)　　(m20035903)

0.293 次式を示せ．ただし，e^x のテイラー展開を利用せよ。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=\infty \qquad (\alpha:\text{定数})$$

(首都大 2003)　　(m20035904)

0.294 次の関数を積分せよ．

(1) $x\big(x^2+1\big)^\alpha$

(2) $\big(\cos x\big)^\alpha\sin x$

(首都大 2003)　　(m20035905)

0.295 次の微分方程式を解け（一般解を求めよ）．

(1) $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\dfrac{dy}{dx}=0$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+xy^2}{2y+x^2y}$

(首都大 2003)　　(m20035906)

0.296 $\log_{16}2+\log_8 4+\log_2 a=1$ のとき，実数 a を求めよ．

(工学院大 2003)　　(m20036201)

0.297 半径 r の円に内接する長方形のうち，面積最大のものは正方形であることを証明し，そのときの面積を求めよ．

(工学院大 2003)　　(m20036202)

0.298 $\displaystyle\int_0^a e^{x^2}\cdot x^3\,dx$ のとき，実数 a を求めよ．

(工学院大 2003)　　(m20036203)

0.299 微分方程式，$y+x\dfrac{dy}{dx}=xy\dfrac{dy}{dx}$ の一般解を求めよ．

(工学院大 2003)　　(m20036204)

0.300 (1) 行列 $A=\begin{bmatrix}3&2\\1&4\end{bmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 行列の演算，$\begin{bmatrix}3&2\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}60\\70\end{bmatrix}$ が成立するとき，(1) で求めた逆行列 A^{-1} を用いて，x と y の値を求めよ．

(工学院大 2003)　　(m20036205)

0.301 図 1 のように，点 A,B,C,D が xy 軸平面上にある．原点 O とし，

各座標を $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ と示すとき，$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ である．

また，$\overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OA}$ を原点を中心として，反時計方向に角度 θ 回転させた

ものである．$\overrightarrow{OD}$ は $\overrightarrow{OC}$ を同様に角度 θ 回転させた点である．

以下の問に答えよ．

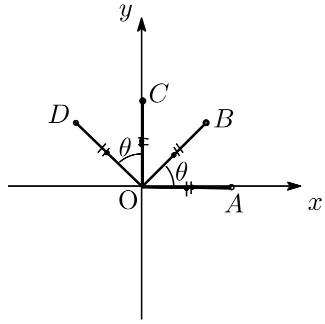


図 1:xy 軸平面

(1) 点 B, D の座標を求めよ．

(2) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$ を計算せよ．

(3) 原点を中心とした長さ 1 である任意のベクトル $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ は，

$\overrightarrow{OA}$ を角度 α 回転させることによって得られる．角度 α 回転させる一次変換を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

と表すとき，a, b, c, d を求めよ．

(4) $\cos(\alpha + \beta)$ を $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta$ を用いて表せ．

(工学院大 2003)　　(m20036206)

0.302 複素数 $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{1}{2}$ に対し，共役複素数 $\overline{z}$, $\arg \dfrac{z}{\overline{z}}$ を求めよ．但し，$i = \sqrt{-1}$ とする．

(工学院大 2003)　　(m20036207)

0.303 (1) 曲線 $y = \cos 2\pi x$ に $x = \dfrac{1}{6}$ で接する直線の傾き（勾配）を求めなさい.（図 2 参照）

(2) x, y 軸と曲線 $y = \cos 2\pi x$，直線 $x = \dfrac{1}{6}$ に囲まれる図形の面積を求めよ．

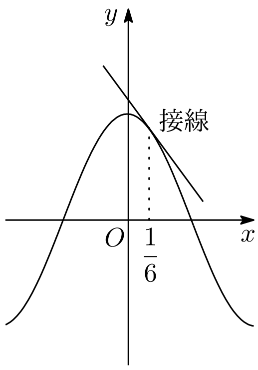


図 2:曲線 $y = \cos 2\pi x$

(工学院大 2003)　　(m20036208)