0.1　次の 2 階の微分方程式：

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \ ,$$

は, $y_1 = y$, $y_2 = dy/dx$ の変数変換により,

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \ ,$$

と表せる．行列：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \ ,$$

の固有値・固有ベクトルを計算することにより, y_1 , y_2 の一般解を求めよ.

(北海道大 2005)　　(m20050101)

0.2　周期が 2π の次の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x \leq 0) \\ 1 & (0 < x \leq \pi) \end{cases}$$

(北海道大 2005)　　(m20050102)

0.3　(1)　次の関係式が成り立つとき, w と z との関係を求めよ. ただし, w と z は複素数である.

$$e^z = e^w$$

(2)　e^z は複素数平面の全域で正則であることを示せ.

(3)　$\dfrac{de^z}{dz} = e^z$ となることを示せ.

(北海道大 2005)　　(m20050103)

0.4　ベクトルの面積分を次の手順に従って求めよ. ただし, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルである. また, “·” はベクトルの内積（スカラー積）, “ × ” は外積（ベクトル積）を表す .

$$\int_S \left(x\boldsymbol{i} + 3y^2\boldsymbol{j}\right) \cdot d\boldsymbol{S} \qquad \text{曲面 } \boldsymbol{S} \ : \ 2x + y + 2z = 6 , \ x \geq 0 , \ y \geq 0 , \ z \geq 0$$

(1)　曲面 $\boldsymbol{S}$ 上の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ とするとき, a , b , c を求めよ.

(2)　曲面 $\boldsymbol{S}$ の接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}$ をそれぞれ求めよ.

(3)　面積素 $d\boldsymbol{S}$ は $d\boldsymbol{S} = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} dxdy$ で与えられる. $d\boldsymbol{S}$ を求めよ.

(4)　$\displaystyle\int_S \left(x\boldsymbol{i} + 3y^2\boldsymbol{j}\right) \cdot d\boldsymbol{S}$ を求めよ.

(北海道大 2005)　　(m20050104)

0.5　次の関数を微分せよ.

(1)　$y = (3x+2)^5$　　　(2)　$y = x^2 \sin x$

(北見工業大 2005)　　(m20050201)

0.6　次の関数の偏導関数 z_x , z_y を求めよ.

(1)　$z = x^3y + 2xy^2$　　　(2)　$z = \log(x^2 + xy)$

(北見工業大 2005)　　(m20050202)

0.7 $y = e^{-x^2}$ とする, y', y'' を求め, グラフの概形を書け.

(北見工業大 2005) (m20050203)

0.8 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$

(北見工業大 2005) (m20050204)

0.9 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A の行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(2) A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2005) (m20050205)

0.10 関数 $y = x^3 + 3x^2 - 1$ の極大値, 極小値を求め, グラフの概形を書け.

(北見工業大 2005) (m20050206)

0.11 (1) $y = x \sin 2x$ を微分せよ.

(2) $z = xy^2 + e^x$ とする. 偏導関数 z_x, z_y を求めよ.

(北見工業大 2005) (m20050207)

0.12 (1) $\displaystyle\int x \log x dx$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ を, $x = \sin\theta$ という置換積分によって求めよ.

(北見工業大 2005) (m20050208)

0.13 次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{cases} x - 2y - 5z + w &= -7 \\ x - y - 3z + 2w &= -3 \end{cases}$$

(北見工業大 2005) (m20050209)

0.14 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ とする.

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めよ. (2) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2005) (m20050210)

0.15 次の連立一次方程式の解をパラメータを用いて表せ.

$$\begin{cases} 2x - y + z &= 0 \\ -x + 2y + z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0 \end{cases}$$

(秋田大 2005) (m20050401)

0.16 方程式 $x + y - z = 0$ を満たす 2 つのベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ で, 互いに一次独立になるものを一組挙げよ.

(秋田大 2005) (m20050402)

0.17 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ.

(2) 問題 (1) の行列 A に対して, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく. このとき,P の各列ベクトルが A の固有ベクトルであることを確かめ, $AP = PX$ となる行列 X を求めよ.

(3) 問題 (1) の行列 A の階数 (rank) と行列式 (determinant) を求めよ.

(秋田大 2005） (m20050403)

0.18 関数 $f(x) = \log(1+x)$ を $x = 0$ で Taylor(テイラー) 展開したとき,
$f(x) =$“ 3 次式 ”+剰余項 $(-1 < x \leqq 1)$ となる 3 次式を求めよ. 剰余項は求めなくてよい.

(秋田大 2005) (m20050404)

0.19 積分 $S = \displaystyle\int_0^R r\sqrt{R^2 - r^2}dr$ を計算せよ. ただし,R は正の定数である. 必要ならば変換 $r^2 = u$ を用いよ.

(秋田大 2005) (m20050405)

0.20 (1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ のとき, 行列 $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$ と, その行列式 (determinant) を計算せよ.

(2) 積分 $I = \displaystyle\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy$ を計算せよ. ただし,R は正の定数で,D は領域 $x^2 + y^2 \leqq R^2$ を表す. 必要ならば問題 (1) の変数変換を用いよ.

(3) 半径 R の球の体積 V を, 上の問題 (2) の積分 I を用いて表せ. 理由も簡潔に述べること.

(秋田大 2005) (m20050406)

0.21 2 次曲線 C : $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 18 = 0$ は, 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$, ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いて, ${}^t\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} - 18 = 0$ と表すことができる. ただし, ${}^t\boldsymbol{p} = (x \quad y)$ である.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1 , λ_2 を求め, それぞれに対応する大きさ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とし, ある行列 $\boldsymbol{U}$ を用いて, 線形変換 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{p}'$ を行えば, 2 次曲線 C は標準形になる. 行列 $\boldsymbol{U}$ を求め, 2 次曲線 C の標準形を x' , y' を用いて表せ.

(3) x 軸と x' 軸のなす角度を求め, x 軸 , y 軸と x' 軸 , y' 軸の関係を図示し，2 次曲線 C の概形を描け.

(東北大 2005) (m20050501)

0.22 x を実数として, 関数 $f(x)$ を $f(x) = x^2e^{ax}$ と定義する. ただし, a は負の定数である.

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$, 第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(2) $x \to +\infty$ のとき, $f(x)$ の極限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ の増減 , 極値 , グラフの凹凸 , 変曲点を調べ, 増減表を書き, $y = f(x)$ の概形を描け.

(東北大 2005) (m20050502)

0.23 x を実数として, 関数 $f(x)$ は微分方程式

$$f''(x) - f(x) = 0$$

の解であり, 初期条件「$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$」を満たすものとする. さらに, この微分方程式の解 $f(x)$ から関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \int_0^x tf(t)dt$$

により定義する.

(1) 与えられた微分方程式の解 $f(x)$ を求めよ.

(2) $g(1)$ および $g(-1)$ を求めよ.

(3) 関数 $h(x)$ を

$$h(x) = \frac{d}{dx}\int_{-x}^{x^2} g(t)dt$$

により定義する. このとき, $h(1)$ を求めよ.

(東北大 2005) (m20050503)

0.24 $m = 1, 2, \cdots$ に対して $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^m e^{-x} = 0$ を示せ.

(東北大 2005) (m20050504)

0.25 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{x} \neq 0$ において関数 f を

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|}, \quad |\boldsymbol{x}| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$$

で定義する. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right)$, および $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_3}^2}$ を求めよ.

(2) $\varepsilon > 0$ に対して, $S_\varepsilon = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\,;\ |\boldsymbol{x}| = \varepsilon\}$ とする. S_ε に沿う表面積分

$$\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S_ε 上の単位外向き法線ベクトルであり, $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} = \nabla f \cdot \boldsymbol{n}$ は f の $\boldsymbol{n}$ 方向への微分を表す.

(3) S を原点 O を内部に含む $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな閉曲面とするとき, S に沿う表面積分

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S 上の単位外向き法線ベクトルである.

(東北大 2005) (m20050505)

0.26 $\mathbb{R}^3$ において x, y の標準内積を (x, y) で表す. 3 次実対称行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

で定める. このとき, 次の問に答えよ.

(1) A は相異なる正の固有値 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ を持つ. λ_1, λ_2, λ_3, および それらに対する長さ 1 の固有ベクトル ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 をそれぞれ求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の一次変換 $f_j \quad (j = 1, 2, 3)$ を

$$f_j \ : \ x \mapsto (x\,,\ \phi_j)\phi_j\,, \quad j = 1, 2, 3$$

で定める. $\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する f_j の表現行列を P_j とするとき,

$$P_j^2 = P_j\,, \quad j = 1, 2, 3$$

$$P_j P_k = O\,, \quad j \neq k \text{ のとき}$$

を示せ. ただし, O は零行列である.

(3) $m = 1, 2, \cdots$ に対して, 行列 B を

$$B = \lambda_1^{\frac{1}{m}} P_1 + \lambda_2^{\frac{1}{m}} P_2 + \lambda_3^{\frac{1}{m}} P_3$$

と定めるとき, $B^m = A$ が成り立つことを証明せよ.

(東北大 2005)　　(m20050506)

0.27 (1) 次の微分方程式を解け.

(a) $(2xy + x^2)y' = 2(xy + y^2)$

(b) $y' + 2y\cos x = \sin(2x)$

(2) 次の微分方程式を示した条件のもとで解け.

$y'' + y' - 2y = 3e^x\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 1$

(東京大 2005)　　(m20050701)

0.28 関数 $y(x)$ は, $x = 1$ を含むある区間で定義された連続関数で, $x = 1$ で極値をとり, $y^3 + 3xy^2 + x^3 y = 1$ を満たすとする. このとき以下の問に答えよ.

(1) $y(1)$ を求めよ.

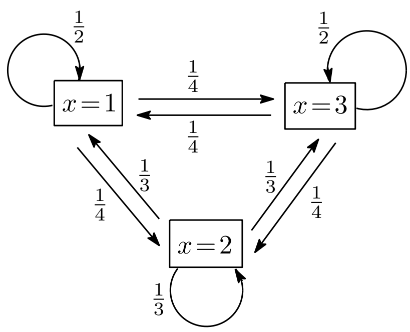
(2) $y(x)$ の $x = 1$ のまわりでのテイラー展開を 2 次の項まで求めよ.

(3) $x = 1$ における極値が, 極大, 極小のいずれかを答えよ.

(東京大 2005)　　(m20050702)

0.29 変数 x は 1, 2, 3 のいずれかの値をとり, その値は単位時間ごとに図に示す確率に従って変化する.

このとき以下の問いに答えよ.



(1) 時刻 0 で $x = 1$ であったとき, その後 $2 \to 3$ と変化して時刻 3 で再び $x = 1$ となる確率を求めよ.

(2) 時刻 0 で $x = 1$ であったとき, 時刻 3 で再び $x = 1$ である確率を求めよ.

(3) 十分長い時間がたった後では, x が 1, 2, 3 をとる確率は, それぞれ, 初期状態によらない値に収束する. これらの確率を求めよ.

(東京大 2005)　　(m20050703)

0.30 (1) 次の不等式の表す立体の体積を求めよ. ただし $a > 0$, $b > 0$, $c > 1$ とする.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 + 1 \leq 0\,, \quad 1 \leq z \leq c$$

(2) 次の不等式の表す立体の体積を求めよ. ただし $a>0$, $b>0$ とする.

$$0 \leq z \leq x^2+y^2\,, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

(東京大 2005)　　(m20050704)

0.31 空間において, xz 平面上の単位ベクトル $(u,0,w)$ を考える.

(1) y 軸まわりの回転を表す行列のうち, ベクトル $(0,0,1)$ をベクトル $(u,0,w)$ に変換するものを求めよ.

(2) (1) で求めた行列を利用して, ベクトル $(u,0,w)$ を軸とする角度 θ の回転を表す行列を求めよ.

(3) (2) で求めた行列の実数の固有値とその固有ベクトルを求めよ.

(東京大 2005)　　(m20050705)

0.32 二変数 x,y の関数　　$z=xy(x^2+y^2-1)$　　の極値を求めよ.

(東京工業大 2005)　　(m20050801)

0.33 a, b を正の数とするとき, 次の積分を計算せよ.

$$\iint_{x^2+y^2 \leqq 1} \left(\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}\right) dxdy$$

(東京工業大 2005)　　(m20050802)

0.34 行列

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

を対角化せよ. A を対角化する正則行列 P も求めよ.

(東京工業大 2005)　　(m20050803)

0.35 行列　　$B=\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$　　について

(1) 行列式を求めよ.　　(2) 階数を求めよ.

(東京工業大 2005)　　(m20050804)

0.36 A は 3 次正方行列で,　$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$,　$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,　$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

を満たすとする. このとき, 行列 A および行列式 $|A|$ を求めよ.

(電気通信大 2005)　　(m20051001)

0.37 $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W_1=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1+\ \ x_2 \qquad -x_4=0 \\ x_1+2x_2+x_3 \qquad =0 \end{array}\right\}, \quad W_2=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

について以下の問に答えよ. ただし, $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ はベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \in \mathbb{R}^4$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を表すものとする.

(1) 部分空間 W_1 , W_2 の基底および次元を求めよ.

(2) 部分空間 $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$ の基底および次元を求めよ.

(電気通信大 2005)　　(m20051002)

0.38 (1) $xy-$平面内の曲線 $f(x,y) = x^3 + 3xy + 4y^4 - x - 4 = 0$ 上の点 $(2,-1)$ におけるこの曲線の接線の方程式を求めよ.

(2) 点 (x,y) が条件 $y^2 - x^2 - 1 = 0$ を満たしながら動くときの関数 $f(x,y) = y^3 + 2x$ の極値を求めよ.

(電気通信大 2005)　　(m20051003)

0.39 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_3^8 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$

(電気通信大 2005)　　(m20051004)

0.40 次の重積分の値を求めよ.

$\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy$,　　$D = \{(x,y)\ :\ 1 \leqq\ x^2 + y^2 \leqq\ 2\ ,\ y \geqq\ |x|\}$

(電気通信大 2005)　　(m20051005)

0.41 次の各複素積分の値を求めよ.

ただし, 積分路は原点を中心として半径 1 の円周上を反時計回りに一周するものとする.

(1) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{z^2}dz$　　(2) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{z(1+2z)}dz$

(電気通信大 2005)　　(m20051006)

0.42 次の実定積分について考える（ただし $a > 1$ とする）.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\cos^2\theta + a - 1} \qquad (*)$$

以下の設問 (1)〜(4) に従って答えよ.

(1) $z = e^{2i\theta}$ とおくとき, $\cos 2\theta$ を z を用いて表せ.

(2) 設問 (1) で示した変数変換 $(z = e^{2i\theta})$ によって, 式 $(*)$ の右辺を変数 z による複素積分にせよ. その際, 積分経路はどうなるかを説明せよ.

(3) 設問 (2) で示した複素積分において, 積分経路内での被積分関数の極と位数ならびに留数を求めよ.

(4) 留数定理を用いて, 実定積分 I の値を求めよ.

(電気通信大 2005)　　(m20051007)

0.43 物質 R_α は時間がたつにしたがって自然に減少していく. その減少する割合はその時点 t で残っている質量 x に比例する. その比例定数を $k(>0)$ とする.

(1) 質量 x と時点 t との関係を微分方程式で書け.

(2) 最初の質量を A とし, 上の微分方程式を解いて質量 x を表す式を求めよ.

(3) 一定の時間 T を経過するごとに質量は等比数列をなして減少することを示せ.

(4) 物質 R_α は, 質量が半減するのに 1600 年かかる. 800 年では初めの量のおよそ何%になるか.

(電気通信大 2005)　　(m20051008)

0.44 下表のように, ロット 1 には合計 100 個の製品の中, 不良品が 3 個あり, ロット 2 には合計 150 個の製品の中, 不良品が 6 個あるとする. このとき, 以下の質問に答えよ.

	良品	不良品	合計
ロット 1	97	3	100
ロット 2	144	6	150
合計	241	9	250

(1) 2 つのロットの中から 1 つのロットを選び, さらにその箱の中から 1 個の製品を選び出すものとする. ただし, 各ロットは等確率で選ばれる. このとき

(a) 不良品が選ばれる確率を求めよ.

(b) 不良品が選ばれたとき, それがロット 1 の製品である確率を求めよ.

(2) ロット 2 の製品を 30 個調べるとき, その中に r 個の不良品が含まれる確率を $P(r)$ $(r = 0, 1, 2, \cdots, 6)$ とする. このとき, $P(r)$ の式を r と 2 項係数を使って表せ. ただし, 2 項係数は

$$ {}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n $$

で定義される.

(電気通信大 2005) (m20051009)

0.45 以下の行列 A の固有値をすべて求めよ.

$$ A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 7 \\ 7 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix} $$

(横浜国立大 2005) (m20051101)

0.46 複素数 z についての次の方程式を解け.

$$ \left(e^z\right)^2 = i - 1 $$

ただし $i^2 = -1$ とする.

(横浜国立大 2005) (m20051102)

0.47 次の微分方程式を解け.

$$ \frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{2x^2y} $$

(横浜国立大 2005) (m20051103)

0.48 次の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin 2x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ （ただし, a, b は定数.）

(千葉大 2005) (m20051201)

0.49 n 次元実ベクトル $\boldsymbol{p}_i$ を n 次元実ベクトル $\boldsymbol{p}_{i+1}$ に移す線形変換

$$ \boldsymbol{p}_{i+1} = A\boldsymbol{p}_i $$

を考える. ただし, A は n 次実正方行列である. 次の設問に答えよ.

(1) この線形変換でベクトルのノルム（大きさ）が変化しないための条件を求めなさい.

(2)　この線形変換で, ゼロベクトルでない, 変化しないベクトルが存在するための条件を求めなさい.

(千葉大 2005)　　(m20051202)

0.50　$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $D=\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\leq a^2\}$ として, 次の 2 重積分の値を求めなさい.

$$I=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

(千葉大 2005)　　(m20051203)

0.51　ある運動している点の時刻 t における座標 $(x(t)\,,\ y(t))$ が微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\alpha y(t)+b \\ \alpha x(t)+a \end{pmatrix}$$

を満たす. ここで, a , b 及び $\alpha(>0)$ は定数である.

この微分方程式の解は

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}(t)\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}-(\boldsymbol{A}(t)-I)\,\boldsymbol{v}$$

と書ける. ただし, $\boldsymbol{A}(t)$ は時刻 t に依存する 2× 2 の正方行列, I は 2× 2 の単位行列, $\boldsymbol{v}$ は初期位置 $(x(0)\,,\ y(0))$ に依らない定ベクトルである. 次の設問に答えなさい.

(1)　$\dfrac{dy(t)}{dx(t)}$ を t を陽に含まない形で表しなさい.

(2)　(1) の微分方程式を解きなさい.

(3)　行列 $\boldsymbol{A}(t)$ を決定しなさい.

(4)　点 $(x(t)\,,\ y(t))$ はどのような運動をするか簡潔に説明しなさい.

(千葉大 2005)　　(m20051204)

0.52　次の関数 y を x で微分しなさい.

(1) $y=x^2-2x-3$　　(2) $y=\dfrac{1}{(x+4)^2}$　　(3) $y=x\sin x$

(千葉大 2005)　　(m20051205)

0.53　次の不定積分を求めなさい.

(1)　$\displaystyle\int(x^2+3)\,dx$　　(2)　$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

(千葉大 2005)　　(m20051206)

0.54　銀行から A 円を年間の利子 r で借り, 毎年の末に R 円を均等に返済します. このとき, 借り入れから 1 年経過後に R 円を返済した直後の残債 $\boldsymbol{L}_1$ は $\boldsymbol{L}_1=A(1+r)-R$ と表されます.

(1)　2 年目の返済直後の残債 $\boldsymbol{L}_2$ を式で表しなさい.

(2)　10 年目の残債 $\boldsymbol{L}_{10}$ が, ちょうどゼロになるためには, R 円をいくらにするとよいですか. A と r を使って式で表しなさい.

(千葉大 2005)　　(m20051207)

0.55　関数　$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax-2}{x-2} & x>2\text{ のとき} \\ b & x\leq 2\text{ のとき}\end{cases}$

がすべての点において連続となるように, 定数 a と b の値を決めよ.

(筑波大 2005)　　(m20051301)

0.56 曲線　$y = 2x^2\sqrt{x} - 5x^2 \quad (x \geq 0)$　について, 次の問いに答えよ.

(1) y が最小値をとる x の値と, その最小値は何か?

(2) y の変曲点における x の値は何か?

(3) y が上に凸である x の範囲と, 下に凸である x の範囲を示せ.

(4) y のグラフの概形を描き, その上に, x 軸と交わる点, 最小値をとる点, 変曲点の座標をそれぞれ示せ.

(5) このグラフの x 軸の下にある部分と x 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ.

(筑波大 2005)　　(m20051302)

0.57 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & a & b \end{bmatrix}$ とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 行列 A が正則であるための a, b の条件を述べよ.

(2) $a = -1$, $b = 1$ のとき, 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(筑波大 2005)　　(m20051303)

0.58 ２つの確率変数 X と Y の結合確率分布 $P\{X = m\,,\ Y = n\}$ $(m = 0, 1, 2, 3\,;\ n = 0, 1, 2, 3, 4)$ が下の表のように与えられている.

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$
$Y=0$	c	0	0	0
$Y=1$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	0	0
$Y=2$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	0
$Y=3$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$
$Y=4$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	0

ただし, c は定数である. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 定数 c の値を決めよ.

(2) X だけの確率分布 $P\{X = m\}$ $(m = 0, 1, 2, 3)$ を求めよ.

(3) X の平均 $E[X] = \displaystyle\sum_{m=0}^{3} mP\{X = m\}$ を求めよ.

(4) Y の平均 $E[Y]$ を求めよ.

(5) XY の平均 $E[XY]$ を求めよ.

(6) X と Y が独立であるかどうかを, 理由を示して判定せよ.

(筑波大 2005)　　(m20051304)

0.59 関数 $f(x, y) = xy(x + y - 1)$ について以下の設問に答えよ.

(1) $f(x, y)$ が極値を取る可能性のある点 (x, y) を求めよ.

(2) $f(x, y)$ の 2 次偏導関数 f_{xx} , f_{xy} , f_{yx} , f_{yy} を求めよ.

(3) $f(x, y)$ の極値を求めよ.　　注 : 極値は極大値と極小値の総称

(筑波大 2005)　　(m20051305)

0.60 ベクトル $\boldsymbol{u} = (1, -2, -1)$, $\boldsymbol{v} = (2, 3, 1)$, $\boldsymbol{w} = (0, 1, 1)$ について以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ が線形独立であることを示せ.

(2) ベクトル (a,b,c) が $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の線形結合で表されるとき a, b, c の関係を求めよ.

(筑波大 2005)　　(m20051306)

0.61 ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} t+1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ をそれぞれ位置ベクトルとする 3 点 A, B, C を考える. ただし, t は実数である. 以下の設問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は, t の値によらず常に一次独立であることを示せ.

(2) 外積 $(\mathbf{b} - \boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})$ を計算せよ.

(3) 3 点 A, B, C を通る平面 Π の方程式を求めよ.

(4) 実数 t が変化するとき, 平面 Π が通らない点の集合を求めよ.

(筑波大 2005)　　(m20051307)

0.62 (1) 関数 $f(x) = xe^{ax}$（a は定数）の第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x + 4}{(x-1)(x^2+1)}$ の不定積分を求めよ.

(筑波大 2005)　　(m20051308)

0.63 $f(x)$ を $x \geq 0$ で定義された連続な単調増加関数とする. 以下の設問に答えよ.

(1) 任意の正整数 n に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\int_0^n f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n} f(i) \leq \int_0^n f(x+1)dx$$

(2) 実数 s に対して, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{1}{n^s} \sum_{i=1}^{n} f(i)\,, \quad n = 1, 2, \cdots$$

と定義する. $f(x) = x^\alpha$（$\alpha > 0$ は定数）のとき, 数列 $\{a_n\}$ が収束する s の範囲を定めよ.

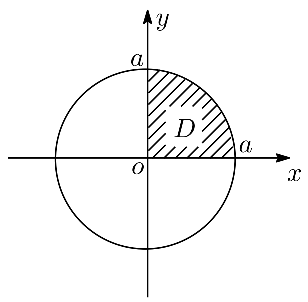
(筑波大 2005)　　(m20051309)

0.64 2 変数関数 $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ の 2 階偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を求めよ.

(筑波大 2005)　　(m20051310)

0.65 (1) 積分 $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy$ を求めよ.
ただし, 積分領域 D は
$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqq a^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ $(a > 0)$ とする.

(2) (1) の結果を利用し, 領域 $D_\infty = \{(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ における広義積分 $\displaystyle\iint_{D_\infty} e^{-x^2-y^2} dxdy$ を求めよ.



(筑波大 2005)　　(m20051311)

0.66 未知数 $x_1, \cdots x_n$ についての連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考える. ここで,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

である. さらに, A の第 i 列の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ とおくことにより $A = [\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n]$ と表す. このとき, 以下の設問に答えよ.

(1) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ が存在するための必要十分条件は $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の 1 次結合で表されることである. このことを示せ.

(2) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ が存在するための必要十分条件は $\mathrm{rank}[\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n] = \mathrm{rank}[\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n \ \boldsymbol{b}]$ が成り立つことである. このことを示せ. ここで, $[\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n \ \boldsymbol{b}]$ は A の右側に列ベクトル $\boldsymbol{b}$ を加えた m 行 $n+1$ 列の行列を表す.

(3) 次の連立 1 次方程式の解が存在するかどうか調べ, 存在するときはそれを求めよ.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -2 \end{array} \right.$$

(4) 次の連立 1 次方程式の解が存在するかどうか調べ, 存在するときはそれを求めよ.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 8x_4 & = & 7 \\ -2x_1 & - & 5x_2 & - & x_3 & + & 13x_4 & = & -12 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & - & 21x_4 & = & 19 \end{array} \right.$$

(筑波大 2005) (m20051312)

0.67 次の数列 $\{a_n\}$ は, ある有限の値に収束することを示せ.

$$a_1 = \sqrt{2}\,, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

(埼玉大 2005) (m20051401)

0.68 (1) 次の行列 A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(2) 行列 A を $P^{-1}AP$ により対角化せよ. 解答では, まず, 行列 P を求めてから A を対角化せよ.

(埼玉大 2005) (m20051402)

0.69 次の微分方程式の一般解を求めよ. ただし, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ である.

(1) $2x^2y' = x^2 + y^2$

(2) $y'' + 2\varepsilon y' + {\omega_0}^2 y = F \sin \omega x$ (ただし, $\varepsilon \neq 0$, ${\omega_0}^2 > \varepsilon^2$)

(埼玉大 2005) (m20051403)

0.70 行列 $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & a & a & 1 \\ a & a & a & a \\ 1 & a & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ.

(1) 行列 A の行列式が 0 となるような実数 a の値を求めよ.

(2) 行列 A が直交行列となるような実数 a の値を求めよ.

(埼玉大 2005)　　(m20051404)

0.71 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値と階数を求めよ.

(2) 行列 A を対角化して得られる行列を書け（結果だけでよい）.

(3) 行列 A^3 のトレースを求めよ.

(埼玉大 2005)　　(m20051405)

0.72 $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ とし, Ω で定義された実数値関数 f を

$$f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

とする. ただし, $\tan^{-1}$ は正接関数 $\tan$ の定義域を $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ に制限したものの逆関数である.
また, $D = \{(x, y) \in \Omega \mid 2 \leqq\ x^2 + y^2 \leqq\ 3,\ 0 \leqq\ y \leqq\ x\}$ とおく. 次の問に答えよ.

(1) f の 1 階の偏導関数をすべて求めよ.

(2) f の 2 階の偏導関数をすべて求めよ.

(3) D を図示せよ.

(4) 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x, y)dxdy$ の値を求めよ.

(埼玉大 2005)　　(m20051406)

0.73 (1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は次を満たすとする.

$$\text{すべての自然数 } n \text{ に対して } a_n \geqq\ 0 \text{ であり, } \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \text{ である.}$$

このとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ は成立するか. 成立するならば証明し, 成立しないならば反例をあげよ.

(2) 次の条件をすべて満たす関数 f の例を挙げよ.

- f は区間 $[0, \infty)$ で定義された連続関数である.
- すべての $x \in [0, \infty)$ に対し $f(x) \geqq\ 0$ である.
- $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx < \infty$ である.
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ が成立しない.

(埼玉大 2005)　　(m20051407)

0.74 繰り返し行われるある実験で, 関心をもっている現象 A が実際に観測される確率は毎回 3 分の 1 であるとする. この実験を独立に 5 回繰り返して行うとき, 以下の 3 問に答えよ.

(1) 5 回の実験のうち, 現象 A が 4 回以上観測される確率はいくらか.

(2) 5 回目の実験で, 初めて現象 A が観測される確率はいくらか.

(3) 5 回目の実験で, 現象 A がちょうど 3 度目に観測される確率はいくらか.

(群馬大 2005)　　(m20051501)

0.75 次の等式が与えられたとする.

$$\log_2 \frac{y}{x} = \frac{\log_2 y}{\log_2 x}$$

この式で, x と y は 2 を整数乗して得られる数である. x と y の値を求めよ.

(群馬大 2005) (m20051502)

0.76 2 つの関数 $y = ax$ と $y = b(x-1)^2+1$ について, 以下の 3 問に答えよ. ($a \geqq 0, b \geqq 0$ とする).

(1) $y = ax$ と $y = b(x-1)^2+1$ が 2 点で交わるとする. このときの交点をそれぞれ a と b を用いて表せ.

(2) $b=1$ とし, $y = ax$ と $y = b(x-1)^2+1$ が 1 点で交わるときの a の値を求めよ.

(3) $f(x) = ax$ と $g(x) = b(x-1)^2+1$ とするとき, $f(x)+g(x)$ が最小のなる x を, a と b を用いて表せ.

(群馬大 2005) (m20051503)

0.77 次の 4 つの不等式が与えられたとき, 以下の 3 問に答えよ.

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+2y & \leqq & a \\ x-y & \leqq & 4 \\ 2x-y & \geqq & -5 \\ 2x+y & \geqq & -7 \end{array}\right.$$

(1) $a=10$ のとき, この 4 つの不等式をすべて満たす x と y の組で, どちらも正の整数となるものは何組あるか.

(2) $a=10$ のとき, この 4 つの不等式をすべて満たす x と y の組で, どちらも負の整数となるものは何組あるか.

(3) 4 つの不等式をすべて満たす x と y のうち, x と y がどちらも正の整数となる組とどちらも負の整数となる組が同数となるように a を変化させるとき, a が最小となる値を求めよ. ただし, $a>0$ とする.

(群馬大 2005) (m20051504)

0.78 3× 3 の行列に関する積は, 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ と表すとき, ベクトル $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し,

$\boldsymbol{Ad} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}$ と定義し, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ に対して,

$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ を $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} \quad (i, j = 1, 2, 3)$ と定義する.

このとき以下の 2 問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 3 \\ -6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2} & -\frac{11}{2} \\ -\frac{19}{7} & 1 & b \\ \frac{41}{14} & c & \frac{19}{2} \end{pmatrix}$ とするとき, $\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ となるときの a, b, c の値を求めよ.

(2) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ とし, $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とするとき, $\boldsymbol{Cd} = -2\boldsymbol{d}$ となるときの x と z を, y を用いて示すと $x = py$, $z = qy$ になる. p, q の値を求めよ.

(群馬大 2005)　　(m20051505)

0.79 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 3 & -2 \\ 4 & -11 & 9 & -6 \end{pmatrix}$ の固有値をすべて求めよ.

(茨城大 2005)　　(m20051701)

0.80 関数 $y = \tan x$ の定義域を $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ に制限すると, その逆関数 $y = \mathrm{Arctan}\, x$ を考えることができる. 次の各問に答えよ.

(1) $y = \mathrm{Arctan}\, x$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ は $\dfrac{1}{1+x^2}$ となることを示せ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \mathrm{Arctan}\, x\, dx$ を求めよ.

(茨城大 2005)　　(m20051702)

0.81 (1) $x = e^t$ とおくとき, x の関数 y に対して,

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}, \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

を満たすことを示せ.

(2) 微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 8y = 0$$

の一般項を求めよ.

(茨城大 2005)　　(m20051703)

0.82 複素数 z の共役複素数を $\overline{z}$ とするとき, 次の各問に答えよ.

(1) 実数 h を 0 に近づけるときの極限　$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\left(\overline{z+hi}\right)^3 - (\overline{z})^3}{hi}$　を計算せよ.

(2) 0 から i までにいたる線分を積分路とする複素積分　$\displaystyle\int_0^i (\overline{z})^2\, dz$　を求めよ.

(茨城大 2005)　　(m20051704)

0.83 下記に示す 4 × 4 行列 $\boldsymbol{A}$ が逆行列をもつための条件を導け.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

(山梨大 2005)　　(m20051801)

0.84 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, A の行列式の値および逆行列を求めよ.

(山梨大 2005)　　(m20051802)

0.85 2 次の実行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とその転置行列（ A の行と列を入れ替えた行列 ）${}^tA$ について次の問いに答えよ.

(1) $A = {}^tA$ となる条件を，a, b, c, d を用いて表せ.

(2) $A = {}^tA$ となるとき，A の固有値は実数であることを示せ.

(山梨大 2005)　　(m20051803)

0.86 (1) $f(x,y) = x^2 \sin y + y^3 \cos x$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を求めよ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \sin^3 x dx$ を求めよ.

(山梨大 2005)　　(m20051804)

0.87 $f(x,y) = x^2 - 2xy - y^2 + 7$ とする. 点 $(1,2)$ での曲面 $f(x,y) = 0$ の接平面の方程式を求めよ.

(山梨大 2005)　　(m20051805)

0.88 k を実数とするとき, 次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{cases} kx_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + (k+1)x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (k+2)x_3 = 0 \end{cases}$$

(信州大 2005)　　(m20051901)

0.89 次の行列の固有値と固有ベクトルを求め, 対角化せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(信州大 2005)　　(m20051902)

0.90 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{e^x + e^y} dxdy$$

(信州大 2005)　　(m20051903)

0.91 (1) 単位円周 $x^2 + y^2 = 1$ 上で定義された関数 $f(x,y) = x^3 + y^2$ の値域を求めよ.

(2) 2 変数関数 $f(x,y) = \sin x \cos y$ のマクローリン展開を 2 次項まで求めよ.

(信州大 2005)　　(m20051904)

0.92 次の級数の和を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{a}{a+1}\right)^n \quad (a > 0)$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{3n-1}{3^n}$

(新潟大 2005)　　(m20052001)

0.93 実数 a に対して, 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

は固有値 1 をもつとする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) a の値を求めよ.

(2) A のすべての固有値を求めよ.

(3) 正則行列 P で, $P^{-1}AP$ が対角行列となるものがあれば, そのような P を 1 つ求めよ.

(新潟大 2005)　　(m20052002)

0.94 自然数 n に対して, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$ とおく. 次の問に答えよ.

(1) 任意の実数 x に対して, $1 + x \leqq e^x$ を示せ.

(2) $(1 - x^2)^n \leqq e^{-nx^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ および $e^{-nx^2} \leqq (1 + x^2)^{-n}$ $(-\infty < x < \infty)$ を示せ.

(3) $x = \cos t$ とおくことにより, $\displaystyle\int_0^1 (1 - x^2)^n dx = I_{2n+1}$ を示せ.

(4) $x = \tan t$ とおくことにより, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1 + x^2)^n} dx = I_{2n-2}$ $(n \geqq 2)$ を示せ.

(5) $\sqrt{n}\, I_{2n+1} \leqq \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx \leqq \sqrt{n}\, I_{2n-2}$ $(n \geqq 2)$ を示せ.

(新潟大 2005)　　(m20052003)

0.95 座標空間において, 3 点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 2)$ を通る平面を α とし, 原点 $O(0, 0, 0)$ から平面 α に下ろした垂線の足を H とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 2 つのベクトル $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ の両方に垂直な単位ベクトルを 1 つ求めよ.

(2) α の方程式を求めよ.

(3) H の座標を求めよ.

(4) H は $\triangle ABC$ の垂心であることを示せ.

(新潟大 2005)　　(m20052004)

0.96 (1) $(1 + i)^{16}$ を求めよ. ただし, i は虚数単位とする.

(2) a を実数とする. xy 平面の 3 直線 : $ax + 3y + 1 = 0$, $2ax - y + 2 = 0$, $2x + ay + 3 = 0$ が 1 点で交わっているとき, a の値を求めよ.

(長岡技科大 2005)　　(m20052101)

0.97 ある人の受け取るすべてのメールのうち $\dfrac{1}{3}$ は広告メールである. メール本文に money という単語が入っている確率は, 広告メールでは $\dfrac{1}{10}$, 広告でないメールでは $\dfrac{1}{100}$ である. 以下の問いに答えよ.

(1) あるメールが広告メールでない確率を求めよ.

(2) あるメールが広告メールであり かつ money という単語が入っている確率を求めよ.

(3) あるメールに money という単語が入っている確率を求めよ.

(4) あるメールに money という単語が入っていたとする. このメールが広告メールである確率を求めよ.

(長岡技科大 2005)　　(m20052102)

0.98 xyz 空間において, 球面 S : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ と点 $A(3, 0, 0)$ について以下の問いに答えよ.

(1) 平面 $x = c$ と球面 S とが交わるような実数 c の範囲を求めよ.

(2) c が前問の範囲を動くとき, 平面 $x = c$ と S との交わりの円を底面とし A を頂点とする円すいの体積を最大とする c の値を求めよ.

(長岡技科大 2005)　　(m20052103)

0.99 xyz 空間において $x^2+y^2 \leqq z \leqq 2$ を満たす部分の体積を求めよ.

(長岡技科大 2005) (m20052104)

0.100 (1) 微分方程式 : $\dfrac{dy}{dx}+ay=0$ の初期条件 $y(0)=b$ を満たす解を求めよ. ここで a,b は定数である.

(2) 微分できる関数 $f(t)$ に対して, $z=f(x+2y)$ とおく. この z が $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0$ を満たし, かつ $f(0)=2$ となる $f(t)$ を求めよ.

(長岡技科大 2005) (m20052105)

0.101 (1) 1 周期が T である関数 $f(t)$ は, 以下のようにフーリエ級数展開される.
$n=0,1,2,3,\cdots$ として C_n および θ_n を, a_n および b_n で表せ. 但し, $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$ とする.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t\Big) \\ &= C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos\big(n\omega_0 t-\theta_n\big) \end{aligned}$$

(2) 上式におけるフーリエ係数 a_n および b_n は, $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$ として,

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \quad , \quad n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin n\omega_0 t\,dt \quad , \quad n=1,2,3,\cdots$$

により計算できる. 1 周期において, 次式で定義される関数 $f(t)$ をフーリエ級数展開せよ.

$$f(t)=\begin{cases} -1 & , \quad -\dfrac{T}{2}\le t<0 \\ 1 & , \quad 0\le t\le\dfrac{T}{2} \end{cases}$$

(3) $\sin^2 t$ および $\sin^3 t$ を, それぞれフーリエ級数展開せよ.

(4) $\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots$ となることを証明せよ.

(長岡技科大 2005) (m20052106)

0.102 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 3 & 2 \\ -a & 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ.

(1) 行列 A が固有値 1 をもつときの a 値を求めよ.

(2) (1) で求めた a について, 行列 A の固有値 1 に対する固有ベクトルを求めよ.

(金沢大 2005) (m20052201)

0.103 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$ とするとき, 次の問に答えよ.

(1) $1+x-\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}<f(x)<1+x-\dfrac{x^2}{2!} \quad \left(0<x<\dfrac{\pi}{4}\right)$ を示せ.

(2) (1) を利用して $\cos(0.1)+\sin(0.1)$ の近似値を小数点以下第 2 位まで求めよ.

(金沢大 2005) (m20052202)

0.104 領域 $D(R)=\left\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\leqq R^2\ ,\ y\geqq |x|\right\}$ $(R>0)$ に対して

$$I(R)=\iint_{D(R)}(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)^2}dxdy$$

とおく. 次の問に答えよ.

(1) $I(R)$ を計算せよ．

(2) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} I(R)$ を求めよ．

(金沢大 2005)　　(m20052203)

0.105 t を実数とし，$A = \begin{pmatrix} 1 & t & t \\ t & 1 & t \\ t & t & 1 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) A の行列式 $\det A$ の値を求めよ．

(2) A の階数を求めよ．

(金沢大 2005)　　(m20052204)

0.106 (1) 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, ある数 k とある零行列と異なる 2 次正方行列 B が存在して，$AB = BA = k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ．

(2) t を実数とする. 連立一次方程式

$$\begin{cases} 3x + 5y + 2z &= 0 \\ x + (t+2)y + z &= 0 \\ tx + y + (t-1)z &= 0 \end{cases}$$

が $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ でない解を持つための t についての必要十分条件を求めよ. また, そのときの解を求めよ．

(金沢大 2005)　　(m20052205)

0.107 関数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(2+\cos x)}{x-\pi} & (x \neq \pi) \\ 0 & (x = \pi) \end{cases}$ について, 次の問に答えよ．

(1) $f(x)$ は $x = \pi$ で連続であるかどうか調べよ．

(2) $x = \pi$ での $f(x)$ の微分係数 $f'(\pi)$ は存在するか. 存在するときにはその値を求め, 存在しないときにはその理由を述べよ．

(金沢大 2005)　　(m20052206)

0.108 a, b は正の実数とする．

(1) $\dfrac{x}{a} = r\cos\theta$, $\dfrac{y}{b} = r\sin\theta$　$(0 < r\,,\ 0 < \theta < 2\pi)$　とおくとき, ヤコビアン

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$ を求めよ．

(2) 積分 $\displaystyle\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dxdy$　を計算せよ. ただし，$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; y \geqq 0\,,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1\right\}$ とする．

(金沢大 2005)　　(m20052207)

0.109 (1) 関数 $\sin x$ を $x = 0$ でテーラー展開したときのテーラー級数の最初の 3 項を求めなさい．

(2) (1) の結果を使い, 次の関数 $f(x)$ の $x = 0$ における導関数の値 $f'(0)$ を求めなさい．

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

(3) 次の関数 $g(x)$ を $x=-\pi/2$ から $x=1$ まで定積分しなさい.

$$g(x)=\begin{cases}\cos^2 x & (x<0)\\ \dfrac{1}{2x+1} & (x\geq 0)\end{cases}$$

(金沢大 2005)　　(m20052208)

0.110　行列 L を

$$L=\begin{pmatrix}0 & 0 & i\\ 0 & 0 & 0\\ -i & 0 & 0\end{pmatrix}$$

と定義します. 行列 L の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(金沢大 2005)　　(m20052209)

0.111　３次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ とします. x,y,z は直交座標系の座標で, $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ は, 規格化された基底ベクトルです. ３次元ベクトル場

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\mathrm{grad}\ U(r)$$

について以下の問に答えなさい. ここで,

$$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\ ,\ \ U(r)=\exp(-ar)$$

で, a は定数です.

(1) div $\boldsymbol{A}$　　(2) rot $\boldsymbol{A}$

(3) ３次元ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を, 中心が座標の原点で半径が R の球の球面上を面積分した値 B を求めなさい.

$$B=\oint \boldsymbol{A}\cdot da$$

(金沢大 2005)　　(m20052210)

0.112　次の関数の導関数を求めよ.

(1) $x\cos x$　　(2) $\sqrt{1+x^2}$　　(3) $\dfrac{1}{1+\sin^2 x}$　　(4) $\mathrm{Tan}^{-1}x$

(富山大 2005)　　(m20052301)

0.113　次の不定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int x(1+x^2)^2dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{1+x^2}$　　(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{1-x^2}$

(富山大 2005)　　(m20052302)

0.114　関数 $f(x,y)=2xy-x^2-y^2$ を考える. 座標平面の点 $(1,2)$ を P とする. 以下の問に答えよ.

(1) 点 P での, x および y に関する偏微分係数を求めよ.

(2) 点 P での, ベクトル $\vec{a}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,,\ \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ 方向の方向微分係数を求めよ.

(3) 点 P での, 曲面 $z=f(x,y)$ の接平面の方程式を求めよ.

(富山大 2005)　　(m20052303)

0.115　行列 $A=\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 0\\ 1 & 0 & a\end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) A の行列式を計算せよ.

(2) A の逆行列が存在する条件を示し, そのときの逆行列を求めよ.

(3) 連立 1 次方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を解け.

解が存在しない場合は, 解なしと答えよ.

(富山大 2005) (m20052304)

0.116 以下の問に答えよ.

(1) 変数変換

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \qquad (r \geq 0)$$

により, $(x, y) = (2, 2)$ に対応付けられる (r, θ) 平面の点の座標を求めよ. また, この変数変換のヤコビ行列式を求めよ.

(2) xy 平面の領域 D を

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

と定める. 定積分

$$\iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dxdy$$

を求めよ.

(富山大 2005) (m20052305)

0.117 次の微分方程式 3 問のうち, 2 問を選択し, それぞれ一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = y + y^2$

(2) $(\sin x)\dfrac{dy}{dx} + (\cos x)y = 0$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$

(富山大 2005) (m20052306)

0.118 n 次元ベクトル空間 V について, 次の問いに答えよ. ただし, $n \geqq 3$ とする.

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が 1 次独立ならば, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ も 1 次独立であることを示せ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ によって張られる部分空間と, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ によって張られる部分空間は一致することを示せ.

(富山大 2005) (m20052307)

0.119 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(富山大 2005) (m20052308)

0.120 2 変数関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で連続であることを示せ.

(2) $f(x,y)$ の点 $(0,0)$ における 1 階偏微分係数を求めよ.

(3) $f(x,y)$ の点 $(0,0)$ における全微分可能性を調べよ.

(富山大 2005) (m20052309)

0.121 $E=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2 \leqq 2x+2y-1\}$ とするとき, 次の重積分を求めよ.

$$\iint_E (xy-y)dxdy$$

(富山大 2005) (m20052310)

0.122 $f(x)=\log\left(\cos^2 x\right)$ を x で微分せよ.

(富山大 2005) (m20052311)

0.123 次の積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)}dx$$

(富山大 2005) (m20052312)

0.124 行列 $S=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$ の固有値と, S を対角化する行列を求めよ.

(富山大 2005) (m20052313)

0.125 次の関数の n 階導関数を求めよ.

(1) x^2e^x (2) $\sin x$ (3) $x^2\sin x$

(福井大 2005) (m20052401)

0.126 (1) 関数 x のマクローリン展開は次式で表される.

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1} \qquad (0<\theta<1)$$

これをもとに, 次の関係式を示せ. （注意： $f^{(n+1)}(\theta x)$ は 'θx' の $(n+1)$ 階導関数である）

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_{n+1}\ ,$$

$$R_{n+1}=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^{n+1} \qquad (0<\theta<1)$$

(2) (1) の関係式で $n=1$ とした関数 x のマクローリン展開は次式で表される.

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2(1+\theta x)^2} \qquad (0<\theta<1)$$

これを用いて, $\log 1.01$ の近似値として 0.01 を採用したときの誤差は 0.00005 より小であることを示せ.

(福井大 2005) (m20052402)

0.127 次の不定積分を求めよ.

$$\int x^2 \sin x dx$$

(福井大 2005) (m20052403)

0.128 次の曲線の長さを求めよ.

$$x = e^{-t}\cos t\,, \quad y = e^{-t}\sin t \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(福井大 2005) (m20052404)

0.129 密度 ρ が一様な半径 a の 1/4 円板

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\}$$

の重心位置を求めよ.

(福井大 2005) (m20052405)

0.130 次の行ベクトル $\boldsymbol{a}$ と行列 $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{D}$ がある. 以下の計算をせよ. ただし, 計算できない場合は, 計算できないと記せ.

$$\boldsymbol{a} = (3 \quad 4 \quad 5) \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 9 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{aB} =$

$\boldsymbol{Ba} =$

$\boldsymbol{CD} =$

$\boldsymbol{DC} =$

(福井大 2005) (m20052406)

0.131 次の二つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を隣接する 2 辺とする平行四辺形がある. この平行四辺形の面積を求めよ. ただし, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ は, 各々 x , y , z 方向の基本ベクトルである.

$\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$

(福井大 2005) (m20052407)

0.132 次の行列に対応する固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(福井大 2005) (m20052408)

0.133 次のような微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dx}{dt} = ax - b \qquad (a\,,\ b > 0)$

(2) $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - a^2 \qquad (a > 0)$

(3) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 9x = 5\sin 4t$

(福井大 2005) (m20052409)

0.134 空中を速度の二乗に比例した空気抵抗を受けながら落下している質量が m $[kg]$ の物体の運動方程式は, 地表から鉛直上向きに x 座標をとれば,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - mg$$

で与えられる. ただし, g $[m/s^2]$ は重力加速度の大きさ, c $[kg/m]$ は比例定数とする.

十分高い上空から落下させたときの終端速度 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{dx}{dt}$ を求めよ.

(福井大 2005) (m20052410)

0.135 2 行 2 列の行列

$$\boldsymbol{A}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

(1) $\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{A}(y) = \boldsymbol{A}(x+y)$

(2) $\boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{B}(y) = \boldsymbol{A}(x-y)$

(3) $\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}(y) = \boldsymbol{B}(x+y)$

(4) $\big(\boldsymbol{A}(x)\big)^n = \boldsymbol{A}(nx)$

(福井大 2005) (m20052411)

0.136 次の微分方程式を解け.

(1) $y' = -2xy^2$ (2) $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$

(福井大 2005) (m20052412)

0.137 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$ (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{3x}\sqrt{1-e^{3x}}dx$

(福井大 2005) (m20052413)

0.138 $y = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$ とすると, y はいくらになるか求めよ. ただし $r \neq 1$ とする.

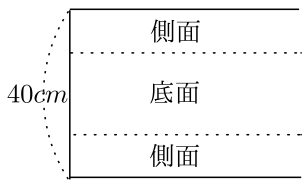
(福井大 2005) (m20052414)

0.139 $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ であって, $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\cos\beta = -\dfrac{8}{17}$ のとき, 次の値を求めよ.

(1) $\sin(\alpha+\beta)$ (2) $\cos(\alpha-\beta)$

(福井大 2005) (m20052415)

0.140 幅 $40cm$ のアルミ板を図の点線のように折り曲げて, 水路を作りたい. 水路の断面積が最大になるようにするには, 端から何 cm のところで折り曲げればよいか. また, このときの断面積を求めよ.



(福井大 2005) (m20052416)

0.141 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-2}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

(福井大 2005) (m20052417)

0.142 次の不定積分および定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

(福井大 2005) (m20052418)

0.143 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \log \dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ (2) $y = (x^2+2x)\log x$ (福井大 2005) (m20052419)

0.144 a, b を正の数とするとき, 以下の関係が成り立つことを証明せよ.

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

(福井大 2005) (m20052420)

0.145 一枚の硬貨を投げたとき, 5 回投げてちょうど 2 回, 表が出る確率を求めよ.

(福井大 2005) (m20052421)

0.146 (1) 関数 $f(x) = x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$ を微分せよ.

(2) 2 変数関数 $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ に対して, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$ を計算せよ.

(3) 2 変数関数 $f(x,y) = e^x(x^2+y^2)$ の極値を求めよ.

(静岡大 2005) (m20052501)

0.147 (1) 有理関数 $\dfrac{1}{x^3+8}$ を部分分数に分解し, 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+8}\,dx$ を求めよ.

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)(2x-y)^2 dxdy$, $D = \{(x,y) \mid 1 \leqq x+y \leqq 2,\ -1 \leqq 2x-y \leqq 1\}$ の値を求めよ.

(静岡大 2005) (m20052502)

0.148 (1) ベクトルの組 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が 1 次独立であることの定義を述べよ.

(2) 次のベクトルの中から 1 次独立なベクトルの組を選び, 残りをそれらの 1 次結合で表せ.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ a_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(3) 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.

(静岡大 2005) (m20052503)

0.149 常微分方程式 $y' + \dfrac{1}{x}y = e^x$, $y(1) = 3\ (x > 0)$ を解け.

(静岡大 2005) (m20052504)

0.150 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{\sin z}{(z-i)^3}\,dz$ の値を求めよ. ここで i は虚数単位, C は複素平面上の原点を中心とする半径 2 の円周で向きは反時計回りとする.

(静岡大 2005) (m20052505)

0.151 次の問に答えよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + \dfrac{1}{x}$ を解け.　　(2) $(2x+y)+(x+2y)\dfrac{dy}{dx} = 0$ を解け.

(3) $x\dfrac{dy}{dx} - y = x\log x$ を解け.

(静岡大 2005)　　(m20052506)

0.152 接線の x 軸, y 軸にはさまれる部分の中点が, ちょうど接点になっている曲線の方程式を求めよ.

(静岡大 2005)　　(m20052507)

0.153 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $4y'' - 4y' - 3y = 0$　　(2) $y' = \dfrac{4xy}{x^2+1}$

(岐阜大 2005)　　(m20052601)

0.154 次の積分値を求めよ. ただし, $a > 0$ とする.

$$I = \int_0^\infty e^{-ax^2}dx$$

(岐阜大 2005)　　(m20052602)

0.155 放物面 $z = 1 - x^2 - y^2$ と平面 $z = 0$ で囲まれる体積を求めよ.

(岐阜大 2005)　　(m20052603)

0.156 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ とするとき, A の逆行列 A^{-1} と行列式 $\det A$ を求めよ.

(岐阜大 2005)　　(m20052604)

0.157 曲線 S が $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 20$ で与えられたとき, S 上の点 $P(1, 2, 3)$ における S の接平面を求めよ.

(岐阜大 2005)　　(m20052605)

0.158 一つのサイコロを投げたとき, 出る目の数の平均値と分散を求めよ.

(岐阜大 2005)　　(m20052606)

0.159 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = |\boldsymbol{r}|$ とするとき, 次の式を証明せよ.

$$\nabla r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

ここで, $\nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$,　$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は直交座標系の基本ベクトルである.

(岐阜大 2005)　　(m20052607)

0.160 次の微分方程式を解け. ただし, $x = 0$ のとき $y = y_0$ とする.

$$\frac{dy}{dx} = a - by \quad (a, b \text{ は定数})$$

(岐阜大 2005)　　(m20052608)

0.161 $e^{i\pi} + 1 = 0$ であることを証明せよ. ここで, $i = \sqrt{-1}$ である.

(岐阜大 2005)　　(m20052609)

0.162 実関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であることの必要十分条件（定義としてもよい）を, “ 極限 ”という言葉を使わずに, $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて書きなさい.

(岐阜大 2005)　　(m20052610)

0.163 $f(x)$, $g(x)$ を微分可能な x の実関数とする. $(f(x)g(x))'$ は, $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ として表されることを示しなさい. ただし, $'$ は, x に関する導関数を表すものとする.

(岐阜大 2005)　　(m20052611)

0.164 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ による $R^2 \longrightarrow R^2$ の線形写像 $A: \boldsymbol{x} \longrightarrow A\boldsymbol{x}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 像 $\mathrm{Im}A$ を示しなさい.

(2) 核 $\mathrm{Ker}A$ を示しなさい.

(3) $A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ の解 $\boldsymbol{x}$ をすべて求めよ. 解が存在しない場合には, その理由を述べよ.

(4) $A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の解 $\boldsymbol{x}$ をすべて求めよ. 解が存在しない場合には, その理由を述べよ.

(岐阜大 2005)　　(m20052612)

0.165 方程式 ${x_1}^2+2x_1x_2+3{x_2}^2=1$ によって表される R^2 内の図形を次のやり方にしたがって求めよ.

(1) 方程式 ${x_1}^2+2x_1x_2+3{x_2}^2=(x_1,x_2)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ となる対称行列 A を求めよ.

(2) A のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) ２次の直交行列 P を使って, PAP^T が対角行列（Λ とする）となるようにしたい. ただし, ^{T} は, 転置行列を表す. 直交行列 P とこの対角行列 Λ を求めよ.

(4) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ によって座標変換を行ない, (y_1,y_2) 座標で先の方程式で表される図形の概形を描きなさい.

(5) (4) の図形の中に, (x_1,x_2) 座標の座標軸を書き入れなさい.

(岐阜大 2005)　　(m20052613)

0.166 ベクトル $\boldsymbol{a}=(6,1,0)$, $\boldsymbol{b}=(3,4,0)$, $\boldsymbol{c}=(1,1,-2)$ について, 次の各問いに答えよ.

(1) $|(\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|$ の値を求めよ.
ただし, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ は, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との内積を示し, $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ は, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との外積を示す.

(2) (1) 式の値の幾何学的意味を述べよ.

(岐阜大 2005)　　(m20052614)

0.167 行列 A を対角化せよ.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(岐阜大 2005)　　(m20052615)

0.168 関数 $y=\sin x$ の n 次導関数を求めよ.

[ヒント１：関数 y を次々に微分していき ($y',y'',\cdots$) , n 次導関数の検討をつける.]

[ヒント２：$\sin x=\sin(x+2\pi)$]

(岐阜大 2005)　　(m20052616)

0.169 関数 $y=\sin 3x\cos 2x$ の不定積分を求めよ.

(岐阜大 2005)　　(m20052617)

0.170 父と, 3人の兄弟, A君, B君, C君がいる. この3兄弟は, 論理的に物事を考えることができる兄弟である. さて, 父は, 赤いボールを3個, 白いボールを2個, の計5個のボールをもっていた.

今, A君, B君, C君の3人がそれぞれ1つの箱を持っていて, 父は, この箱に5個のボールの中から, 任意にボールを選び, 3人の箱にそれぞれ1個ずつわからないように入れた.

しかし, A君は, B君とC君の箱に入れたボールの色をそれぞれ見てしまった.（B君・C君もA君が見てしまったことを知っている）

B君も, C君の箱に入れたボールの色を見てしまった.（A君・C君もB君が見てしまったことを知っている）

そこで, 父は, 兄弟3人を前にして, A君に次の質問をした.「A君, 君は自分の箱に入っているボールの色を知ることができるかね？」A君は, この父の問いかけに,「知ることはできない.」と答えた. B君もこの答えを聞いていた.

次に, 父は, 再び兄弟3人を前にして, B君に次の質問をした.「B君, 君は自分の箱に入っているボールの色を知ることができるかね？」B君も, この父の問いかけに,「知ることはできない.」と答えた.

では, この時, C君の箱には, 何色のボールが入っているか, その理由を説明しながら, 答えなさい（なお, A君, B君とも嘘はついていないとする）.

(岐阜大 2005)　　(m20052618)

0.171 $\left(\dfrac{i}{1-i}+\dfrac{1-i}{i}\right)^2$ を計算すると, $A+Bi$ となる. A および B を求めよ. ただし, i は虚数単位, A と B は実数とする.

(豊橋技科大 2005)　　(m20052701)

0.172 $\displaystyle\int_0^1 x^2e^x dx$ を計算せよ.

(豊橋技科大 2005)　　(m20052702)

0.173 次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} x^2+2xy-15y^2=0 \\ 2x+xy-15y-30=0 \end{cases}$$

(豊橋技科大 2005)　　(m20052703)

0.174 3次元直交座標系における点 A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ

$$\boldsymbol{a}=(1,4,3)\,,\ \boldsymbol{b}=(2,3,1)\,,\ \boldsymbol{c}=(3,p,q)$$

とする. $\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}$ および $\boldsymbol{b}$ と直交している. 以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a}$ とが直交していることから p, q の関係式を求めよ.

(2) $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{b}$ とが直交していることから, もう一つの p, q の関係式を求めよ.

(3) 以上の関係式から p, q の値を求めよ.

(4) $\boldsymbol{c}$ の大きさを求めよ.

(5) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の外積（ベクトル積）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を求めよ.

(6) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を2辺とする平行四辺形の面積 S を求めよ.

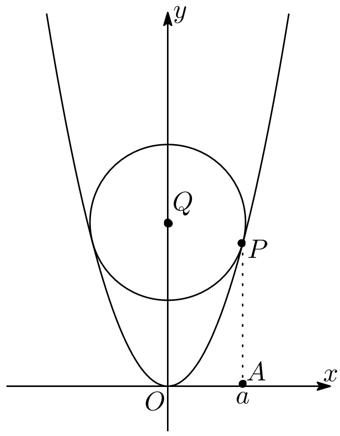
(7) $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ とのなす角 θ を求めよ.

(8) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が作る平行六面体の体積 V を求めよ.

(豊橋技科大 2005)　　(m20052704)

0.175 次式で表される放物線がある.

$$y = x^2$$



図に示すように, y 軸上にある点 Q を中心とする円がこの放物線に接している. $x > 0$ の領域における接点を P とし, 点 P から x 軸に下ろした垂線の x 軸との交点を A とし, その x 座標を a とする.

以下の問いに答えよ.

(1) 点 P を通り, 放物線に接する直線の方程式を a を用いて表せ.

(2) 点 P を通り放物線の法線となる直線の方程式を a を用いて表せ.

(3) 点 Q の y 座標を a を用いて表せ.

(4) 原点 O から点 Q までの距離 $\overline{OQ}$ と点 A までの距離 $\overline{OA}$ の比 $r = \dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OA}}$ が最小となる a の値を求めよ.
また, そのときの r の値を求めよ.

(豊橋技科大 2005)　　(m20052705)

0.176 (1) 2 組の事象群 $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ がある. それぞれの事象群の要素は互いに排他的である. また, x_i が起こる確率を $P(x_i)$, y_j が起こる確率を $P(y_j)$ としたとき, $P(x_1)+P(x_2) = 1$ および $P(y_1)+P(y_2)+P(y_3) = 1$ が成立する. x_i と y_j が同時に起こる確率（同時確率）を $P(x_i, y_j)$ で表す. さらに, x_i を条件としたとき y_j が起こる確率（条件付き確率）を $P(y_j \,|\, x_i)$ で, 逆に y_j を条件としたとき x_i が起こる確率を $P(x_i \,|\, y_j)$ で表す. 同時確率 $P(x_i, y_j)$ が下表で示すように与えられている. このとき次の問いに答えよ.

(a) $P(x_2)$ を求め, ついで $P(y_1 \,|\, x_2)$, $P(y_2 \,|\, x_2)$ および $P(y_3 \,|\, x_2)$ を求めよ.

(b) $P(y_1)$ を求め, ついで $P(x_1 \,|\, y_1)$ および $P(x_2 \,|\, y_1)$ を求めよ.

(c) $P(y_j \,|\, x_i)$ を $P(x_i)$, $P(y_j)$ および $P(x_i \,|\, y_j)$ で表す式を導け. ただし, $P(x_i) \neq 0$ とする.

	y_1	y_2	y_3
x_1	0.1	0.2	0.3
x_2	0.2	0.1	0.1

(2) 1 回の試行で 1 から 10 までの整数からなる一つの乱数を発生する装置がある.

(a) 3 回の試行で得た 3 個の整数がいずれも異なる確率を求めよ.

(b) 試行回数を増やすと, 得た整数の中に重複するものが存在する確率が次第に増加する. この確率が初めて 50 %を超えるのは何回目か.

(豊橋技科大 2005)　　(m20052706)

0.177 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解いて, $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(2) 行列 A の 3 つの固有値 $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ と, 対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ を求めよ. ただし, 固有ベクトルは, 第 3 成分が 1 となるようにして示せ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ. そして, $P^{-1}A^nP$ を求めよ.

(名古屋大 2005)　　(m20052801)

0.178 関数 $y = e^{\sqrt{3}x}(\sin x + 1)$ の第 n 次導関数が $y^{(n)} = e^{\sqrt{3}x}\left\{2^n \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}n\right) + \left(\sqrt{3}\right)^n\right\}$ となることを証明せよ.

(名古屋大 2005)　　(m20052802)

0.179 領域 D : ${r_1}^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq {r_2}^2 \quad (0 < r_1 < r_2)$ における重積分
$\displaystyle\iint_D (a + bx + cx^2 + fxy + cy^2)dxdy$ を求めよ. ただし, a, b, c, f は定数である.

(名古屋大 2005)　　(m20052803)

0.180 以下の常微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2} + 3\dfrac{dy(x)}{dx} + 2y(x) = 0$　　(2) $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2} + y(x) = \cos x$

(名古屋大 2005)　　(m20052804)

0.181 つぼ U には白球 1 個と黒球 1 個の計 2 個, つぼ V には白球 2 個と黒球 1 個の計 3 個が入っている. 各つぼから 1 球ずつ取って, U のつぼから取った球は V のつぼへ, V のつぼから取った球は U のつぼへ入れる手続きを n 回行なうとき, U に白球が 2 個ある確率を p_n, 白球, 黒球が 1 個ずつある確率を q_n, 黒球が 2 個ある確率を r_n とする. 以下の問に答えよ.

(1) p_1, q_1, r_1 を求めよ.

(2) p_n, q_n, r_n を p_{n-1}, q_{n-1}, r_{n-1} を用いて表せ.

(3) この手続きを無限回行なうと確率 p_n, q_n, r_n がそれぞれ一定値 p, q, r になること（すなわち, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n = p$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n = q$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r_n = r$）が分かっているとする. このとき p, q, r の値を求めよ.

(名古屋大 2005)　　(m20052805)

0.182 N を正の数として, xyz 空間の部分集合

$$T_N = \{(x, y, z) \,|\, x + y + z = N,\ 0 < x, y, z < N\}$$

を考える. そして, 正の数 p, q, r を用いて関数

$$f_{p,q,r}(x, y, z) = \left(\frac{p}{x}\right)^x \cdot \left(\frac{q}{y}\right)^y \cdot \left(\frac{r}{z}\right)^z$$

を T_N 上で定義する.

(1) $f_{p,q,r}$ の自然対数として定義される関数

$$\log_e f_{p,q,r}(x, y, z)$$

の極値を, ラグランジュの未定乗数法を用いて求めよ.

(2) T_N 上で定義された関数 $f_{p,q,r}$ は, T_N 上のある点 (x, y, z) において最大値をとる事が知られている. この事を用いて, $f_{p,q,r}$ の最大値を求めよ.

(名古屋工業大 2005)　　(m20052901)

0.183 実数 a, b, c, d, e, f を用いて表される次の 4 次正方行列を考える.

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

(1) この行列の行列式を求めよ.

(2) $be = af + cd$ の時, この行列式の値を可能な限り簡単にせよ.

(名古屋工業大 2005) (m20052902)

0.184 次の定数係数 2 階線形微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^2$$

(名古屋工業大 2005) (m20052903)

0.185 xyz 空間内の半円柱面 $y^2 + z^2 = 1\,,\ z \geqq 0$ を 2 つの平面 $x = 0$ と $x = 1$ によって切ったときに得られる曲面

$$S = \{(x, y, z)\,|\,y^2 + z^2 = 1\,,\ z \geqq 0\,,\ 0 \leqq x \leqq 1\}$$

に対し, ベクトル場 $\boldsymbol{F} = yz\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ が外向きに（つまり S 上の $z > 0$ なる点では z の正方向に）貫く流束 (flux) を求めよ.

(名古屋工業大 2005) (m20052904)

0.186 $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{(x^3+4)^2}dx$ を計算せよ.

(三重大 2005) (m20053101)

0.187 微分方程式 $\left(1 + x^2\right)\dfrac{dy}{dx} = xy$ を解け.

(三重大 2005) (m20053102)

0.188 ベクトル $\vec{a} = (3, 2, 1)\,,\ \vec{b} = (4, 5, 6)$ に対して, $\vec{b} - k\vec{a}$ と $\vec{a}$ が垂直となる k の値を求めよ.

(三重大 2005) (m20053103)

0.189 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) 行列式 $|A|$ を計算せよ.

(2) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(三重大 2005) (m20053104)

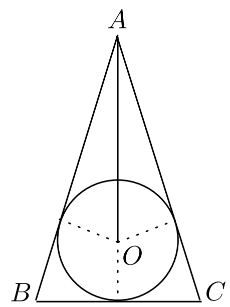
0.190 行列 $\begin{pmatrix} a & 1/\sqrt{5} \\ b & 2b \end{pmatrix}$ が直交行列であるとき, 実数 $a\,,\ b$ の値を求めよ.

(三重大 2005) (m20053105)

0.191 図のように $AB = AC$ となる二等辺三角形 ABC が, 半径 1, 中心 O の円に外接する. 次の問に答えよ.

(1) $AO = x$ として, 二等辺三角形 ABC の面積 S を x で表せ.

(2) 面積 S が最小となる場合の各辺の長さを求めよ.



(三重大 2005) (m20053106)

0.192 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えなさい.

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めなさい.

(2) 行列 A のすべての固有値と, 各固有値に対する固有ベクトルを求めなさい.

(3) 正則行列 P によって行列 A を対角化したい. このような正則行列 P と, その逆行列 P^{-1}, および対角化された行列 $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(4) 行列 $P^{-1}A^nP$ を求めなさい. ただし, n は自然数とする.

(三重大 2005)　　(m20053107)

0.193 次の不定積分を求めなさい. ただし, e は自然数の底, ω は実定数とする.

$$\int e^x \cos \omega x dx$$

(三重大 2005)　　(m20053108)

0.194 次の常微分方程式に関する以下の問に答えなさい. ただし, e は自然対数の底, a, b はともに実定数とする.

$$\frac{dy}{dx} + ay = f(x)$$

(1) $f(x) = 0$ の場合の一般解を求めなさい.

(2) $f(x) = e^{bx}$ の場合の一般解を求めなさい.

(三重大 2005)　　(m20053109)

0.195 (1) 複素行列 $\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ.
ここで, a, b, c, d は実数であり (ただし, $c \neq 0$), $i^2 = -1$ である.

(2) λ_1, λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を求め, エルミート内積 $(\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2) = \displaystyle\sum_{j=1}^{2} x_{1j}{}^* x_{2j}$ を計算せよ. ただし, x_{ij} は $\boldsymbol{x}_i$ の j 成分であり $(i, j = 1, 2)$, α^* は α の複素共役を表す.

(三重大 2005)　　(m20053110)

0.196 (1) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ であることを導け. ただし, $\alpha > 0$ とする.

(2) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx$ を求めよ.

(三重大 2005)　　(m20053111)

0.197 以下の (1)〜(3) の設問に答えよ.

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log_e x}{x^2} dx$ 　の値を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta}{\sin\theta + \cos\theta} d\theta$ 　の値を求めよ.

(3) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.
$f(x) = 2 \cdot x - \displaystyle\int_0^{\pi} f(t) \cdot \cos t \cdot dt$

(三重大 2005)　　(m20053112)

0.198 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ に対して, 連立一次方程式 $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が $x = y = 0$ 以外の解をもつように k の値を定めよ.

(三重大 2005)　　(m20053113)

0.199 $f(x) = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x + x$ が $x = \pi/3$ で極大値をとる. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) 係数 a, b の満足する条件を求めよ.

(2) この極大値のとりうる範囲を求めよ.

(三重大 2005) (m20053114)

0.200 円に内接する四角形 $ABCD$ があり, $AB = 4$, $BC = 3$, $CD = 2$, $DA = 1$ のとき, 次の問に答えよ.

(1) $\cos A$ の値を求めよ.

(2) 四角形 $ABCD$ の面積を求めよ.

(三重大 2005) (m20053115)

0.201 (1) 3 次元空間において, 直線

$$l_1 \;:\; \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-2}{3}$$

および点 $P(0, 1, 2)$ を含む平面の式を求めよ.

(2) l_1 および原点 $O(0, 0, 0)$ を含む平面の式を求めよ.

(3) この二つの平面が成す角を θ とするとき, $\cos\theta$ の値を求めよ. ただし, $\theta \leq 90^\circ$ とする .

(三重大 2005) (m20053116)

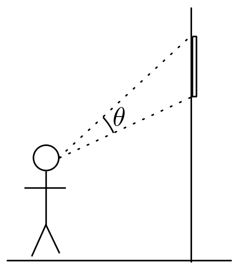
0.202 次の行列のランク（階数）を求めよ. また, 正則な場合は逆行列を求めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad (2) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

(三重大 2005) (m20053117)

0.203 (1) 関数 $y = \dfrac{x}{x^2+2}$ のグラフの概形を書きなさい.

(2) 美術館の壁にかけてある絵は, その上端と下端が, 観覧者の目の高さの上方 $2m$ および $1m$ のところにある. 絵画を最も観やすくするためには, 観覧者と壁との距離を何 m にすれば良いか？（ここでは, 最も観やすいとは, 観覧者の縦方向の視角 θ が最大になれば良いとする.）



(三重大 2005) (m20053118)

0.204 $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{c}{(1+x+y)^4} & (x \geq 0\,,\ y \geq 0) \\ 0 & (\text{その他の } x\,,\ y) \end{cases}$

の確率密度をもつ同時確率分布について以下の問に答えよ.

(1) $f(x, y)$ が確率密度になるように c の値を求めよ.

(2) $f(x, y)$ の周辺確率密度 $f_1(x)$ を求めよ.

(3) 条件付き確率密度 $f(y \mid x)$ を求めよ.

(三重大 2005) (m20053119)

0.205 交通事故が一日に平均 2 回起こり, 火事が平均 1 回起こる町がある. 交通事故と火事はそれぞれ独立にポアソン分布 $f(x) = \dfrac{\mu^x}{x!}e^{-\mu}$ に従って起こるものとして以下の問に答えよ. ただし, μ はポアソン分布の平均である.

(1) この町で交通事故も火事も起こらない日は 1 年 (365 日) に何日あるか, その期待値を求めよ.

(2) この町で交通事故と火事があわせて 2 回起こる日は 1 年に何日あるか, その期待値を求めよ.

e^{-x} の値は右の表の値を使用せよ.

x	e^{-x}
1	0.37
2	0.14
3	0.050
4	0.018
5	0.0067

(三重大 2005) (m20053120)

0.206 3 次行列 $A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -9 \\ 5 & -4 & 6 \\ 7 & 8 & -12 \end{pmatrix}$ と三つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$ に対して次の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は 1 次独立か. (2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ は 1 次独立か. (3) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は 1 次独立か.

(4) A の行列式の値を求めよ. (5) A は逆行列をもつか.

(奈良女子大 2005) (m20053201)

0.207 次の各数列は収束するか. 収束する場合はその極限値を求めよ.

(1) $(-1)^n$ (2) $\dfrac{n}{n+1}$ (3) $\dfrac{(-1)^n n}{n+1}$

(奈良女子大 2005) (m20053202)

0.208 開区間 $(0,1)(=\{x \,|\, 0 < x < 1\})$ 上の関数

$$f(x) = -x \log x$$

に対して次の問に答えよ.

(1) $0 < a < 1$ のとき微分係数 $f'(a)$ を求めよ.

(2) $(0,1)$ における関数 $f(x)$ の最大値を求めよ.

(3) $0 < a < 1$ のとき $f(a^2) = 2af(a)$ が成り立つことを示せ.

(4) $\displaystyle\lim_{a \to +0} f(a^2) = 0$ が成り立つことを示せ.

(5) $(0,1)$ における関数 $f(x)$ のグラフの概形を描け.

(6) $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{1} f(x)dx$ を求めよ.

(奈良女子大 2005) (m20053203)

0.209 次の 2 行 2 列の行列 $F(\theta)$ について以下の問に答えよ.

$$F(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) $F(\theta)$ について次の関係が成立することを示せ.

$$F(\theta_1)F(\theta_2) = F(\theta_1 + \theta_2)$$

(2) 行列 A を次の 2 行 2 列の行列であるとする.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき, $F(-\theta)AF(\theta)$ が対角行列 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ の形になる θ の値と, そのときの対角要素 λ_1 , λ_2 を求めよ.

(奈良女子大 2005)　　(m20053204)

0.210 (1) 次の極限値を求めよ. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left\{\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-2x\right\}$

(2) 次の不定積分を求めよ. $\displaystyle\int\frac{x}{x^2+2x+2}dx$

(京都工芸繊維大 2005)　　(m20053401)

0.211 関数 $f(x,y)=x^4+y^4-4xy$ の極値および極値を与える点を求めよ.

(京都工芸繊維大 2005)　　(m20053402)

0.212 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy\,,\qquad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq 8,\ y\geqq 0\}$$

(京都工芸繊維大 2005)　　(m20053403)

0.213 行列 $A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\p&q&r\end{pmatrix}$ が直交行列となり, その行列式が 1 となるように p,q,r を定めよ.

(京都工芸繊維大 2005)　　(m20053404)

0.214 行列 $A=\begin{pmatrix}-1&1&-3\\9&-2&9\\5&-2&7\end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ. ただし, E は 3 次の単位行列を表す.

(1) A の固有多項式 $f_A(x)$ および A の固有値をすべて求めよ. ただし, $f_A(x)$ は行列 $xE-A$ の行列式のことである.

(2) 自然数 $n\geqq 1$ に対して, 多項式 $(x-1)^{n+2}$ を $f_A(x)$ で割った余りを求め, 行列 $(A-E)^{n+2}$ を求めよ.

(京都工芸繊維大 2005)　　(m20053405)

0.215 a,b を異なる定数とするとき, 行列

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\a&x&-b&a\\b&a&x&-a\\a&a&b&x\end{pmatrix}$$

が逆行列を持たないような x の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2005)　　(m20053406)

0.216 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2005)　　(m20053407)

0.217 $0\leqq x<1$ のとき, 不等式 $\sin^{-1}x\geqq x+\dfrac{x^3}{6}$ が成り立つことを示せ.
ただし, $\sin^{-1}$ は $\sin$ の逆関数の主値である.

(京都工芸繊維大 2005)　　(m20053408)

0.218 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x^4}{x^3+1}dx$ を求めよ.

(京都工芸繊維大 2005) (m20053409)

0.219 微分方程式 $y'' + 2y' + 5y = 10\sin x$ を考える.

(1) $a\cos x + b\sin x$ がこの微分方程式の解になるように定数 a, b を定めよ.

(2) 初期条件 $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ を満たす解を求めよ.

(京都工芸繊維大 2005) (m20053410)

0.220 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問に答えよ.

(1) λ を実数とするとき, 行列式 $|\lambda A - B|$ を極大ないし極小とする λ の値をすべて求めよ.

(2) 方程式 $\lambda A\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = B\overrightarrow{\boldsymbol{x}}$ が $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \overrightarrow{\boldsymbol{o}}$ 以外のベクトルを解に持つときの λ の値と対応する解 $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}$ をすべて求めよ. ただし, $\overrightarrow{\boldsymbol{o}}$ は零ベクトルである.

(大阪大 2005) (m20053501)

0.221 xy 平面上で, 曲線 C は媒介変数 θ を用いて,

$x = 2a\cos\theta + a\cos 2\theta$

$y = 2a\sin\theta - a\sin 2\theta$

で表される. ただし, $a > 0$ とする.

この曲線 C によって表される図形について, 次の問いに答えよ.

(1) 曲線 C の概略図を示せ.

(2) 曲線 C に囲まれる図形の面積を求めよ.

(大阪大 2005) (m20053502)

0.222 3 次元空間内の定点 O から定点 A への位置ベクトル $\overrightarrow{OA}$ を $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$ と記すことにして, 以下の問いに答えよ.

(1) 定点 A を中心とする半径 r の球面の方程式が, 次式で表されることを示せ.

$(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{a}})\cdot(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{a}}) = r^2$

(2) 上式で表された球面上の 1 点 P の位置ベクトルを $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ とすると, 点 P における球の接平面の方程式が次式で表されることを示せ.

$(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{a}})\cdot(\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{a}}) = r^2$

(3) 定点 O を通って上記の球面と交わる直線 l を考える. l 上の長さ 1 のベクトルを $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ として, l と球との交点の一つを Q, $\overrightarrow{OQ} = t\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ とする. $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$, $t\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ および半径 r の関係式を求め, その式から得られる t の 2 つの値を $t_1,\ t_2$ とすれば積 $t_1\cdot t_2$ は一定になることを示せ.

(大阪大 2005) (m20053503)

0.223 ある変数 x (ただし $x \geqq 0$) の確率密度関数が $p(x) = \dfrac{\pi}{2}x\cdot e^{-\frac{\pi}{4}x^2}$ で表されるとき, 以下の問に答えよ.

(1) 1 以下の x が出現する確率を求めよ.

(2) 確率密度が最も大きくなる x の値はいくらか? また, $y = p(x)$ のグラフを図示せよ.

(3) 実験によりこの変数 x を発生させ, 十分な数の測定を行った. データを整理するにあたり, 測定された x を大きいものから順に並べて上位 1/3 だけを用い, x の小さい値はカットした. このとき, データ整理に用いた上位 1/3 の x がとり得る範囲の下限はいくらか？

(大阪大 2005)　　(m20053504)

0.224 以下の設問に答えよ, ただし $\log x$ は自然対数, e は自然対数の底を表すものとする.

(1) 関数 $y(x)$ に関する微分方程式 :

$$y'' + 2y' + y = 0$$

の一般解を求めよ.

(2) 関数 $z(x)$ $(x > 0)$ に関する微分方程式

$$x^2 z'' + 3xz' + z = 0 \qquad (*)$$

を考える. $x = e^t$, すなわち $t = \log x$ と変数変換したとき $z(e^t) = w(t)$ の満たす微分方程式を求めよ.

(3) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めよ.

(4) $(*)$ の解で更に条件 :

$$z(1) = 0\,, \quad \int_1^e z(x)dx = 1$$

を満たすものを求めよ.

(大阪大 2005)　　(m20053505)

0.225 行列 $A = \begin{bmatrix} b & 1-a \\ a & b \end{bmatrix}$ として, 以下の設問に答えよ. ただし a, b は実数である.

(1) 行列 A の 2 つの固有値を求めよ. また, 固有値が異なる実数値となるための a と b に関する必要十分条件を示せ.

(2) 行列 A の 2 つの固有値が異なる実数値である場合に, それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ. また, 2 つの固有ベクトルが直交するための a と b に関する必要十分条件を示せ.

(3) 行列 A の 2 つの固有値が異なる実数値である場合に, $P^{-1}AP$ を対角行列とする正則行列 P, 対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ. また, A^n を求めよ. ただし n は正の整数である.

(4) 行列 A の 2 つの固有値が異なる実数値となり, かつ, 零ベクトルではない 2 次元ベクトル x に対して

$$^t x A x > 0$$

を満たすための a と b に関する必要十分条件を示せ. ここで $^t x$ は x の転置ベクトルを表す.

(大阪大 2005)　　(m20053506)

0.226 n 枚のコインを 1 列に並べる. 各コインは表, 裏のどちらを上にして置くかの 2 通りの置き方があるものとする. ただし, コインは区別できないものとする. このとき, 以下の設問に答えよ.

(1) n 枚のコインを置く場合の数を $f(n)$ とする. 例えば, 表を H, 裏を T で表すと, $n = 1$ のときは $(H), (T)$ の 2 通り置き方があるので $f(1) = 2$ であり, $n = 2$ のときは (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) の 4 通りの置き方があるので $f(2) = 4$ である. $f(n)$ を n の関数として表せ.

(2) 裏のコインを 2 枚以上続けて置くことを許さない場合の, n 枚のコインを置く場合の数を $g(n)$ とする. 例えば, $n = 1$ のときは $(H), (T)$ の 2 通りの置き方があるので $g(1) = 2$ であり, $n = 2$ のときは $(H, H), (H, T), (T, H)$ の 3 通りの置き方があるので $g(2) = 3$ である（ここで, (T,T) の置き方は裏が 2 枚続いているので許されないことに注意）. このとき, 以下の設問に答えよ.

(a) すべての並べ方を列挙することによって, $g(3)$, $g(4)$ を求めよ.

(b) n を 3 以上の整数とする. このとき, $g(n)$ を $g(n-1)$, $g(n-2)$ を用いて表せ.

(c) (b) の漸化式より,

$$g(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}$$

となることを, 数学的帰納法を用いて証明せよ.

(大阪大 2005)　　(m20053507)

0.227 α および β を実数とするとき, 常微分方程式

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) = 0 \qquad (*)$$

を考える. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $(*)$ 式の一般解を求めよ.

(2) $\phi(x)$ をある実数 x_0 に対して $\phi(x_0) = \phi'(x_0) = 0$ を満たす $(*)$ 式の解とする. このとき, $\phi(x) = 0$ であることを示せ.

(3) (2) の結果を用いて, ある実数 x_0, C_1, C_2 に対して $\phi(x_0) = C_1$ および $\phi'(x_0) = C_2$ を満たす $(*)$ 式の解は唯一であることを示せ.

(大阪大 2005)　　(m20053508)

0.228 関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ （$z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$, x と y は実数, $u(x,y)$ と $v(x,y)$ は実関数）は $z = z_0 = x_0 + iy_0$ で正則である. 以下の問に答えよ.

(1) コーシー・リーマンの方程式

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

を示せ.

(2) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ となる正則関数 $f(z)$ を求めよ.

(大阪大 2005)　　(m20053509)

0.229 関数 $f(x)$ を近似する三角多項式

$$P_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

の中で誤差

$$E_N = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (P_N(x) - f(x))^2\, dx$$

を最小にする

$$\{a_0\,,\ a_1\,, \cdots,\ a_N\,,\ b_1\,, \cdots,\ b_N\}$$

は $f(x)$ のフーリエ係数であることを示せ.

(大阪大 2005)　　(m20053510)

0.230 3 つの確率変数 X, Y, Z のとりうる値をそれぞれ $\{x_1, x_2\}$, $\{y_1, y_2\}$, $\{z_1, z_2\}$ とする. また, $(X,Y) = (x_i, y_j)$ である確率を $\mathrm{pr}(x_i, y_j)$ と記し, $\mathrm{pr}(x_i, y_j) > 0$ $(i, j = 1, 2)$ とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\mathrm{pr}(x_1, y_1)\,\mathrm{pr}(x_2, y_2)}{\mathrm{pr}(x_2, y_1)\,\mathrm{pr}(x_1, y_2)} = 1$ 　ならば, X と Y は独立であることを示せ.

(2) $(X, Y) = (x_i, y_j)$ を与えたときの $Z = z_k$ の条件付き確率を $\mathrm{pr}(z_k | x_i, y_j)$ $(i, j, k = 1, 2)$ と記し, 他の条件付き確率についても同様に記す.

確率 $\mathrm{pr}(x_i, y_j)$ $(i, j = 1, 2)$ が

$$\mathrm{pr}(x_1, y_1) = 1/2\,,\ \mathrm{pr}(x_1, y_2) = 1/4\,,\ \mathrm{pr}(x_2, y_1) = 1/6$$

で与えられ, 条件付き確率 $\mathrm{pr}(z_k | x_i\,,\, y_j)$ $(i, j, k = 1, 2)$ が

$$\mathrm{pr}(z_1 | x_1\,,\, y_1) = 1/2\,, \quad \mathrm{pr}(z_1 | x_1\,,\, y_2) = 1/2$$

$$\mathrm{pr}(z_1 | x_2\,,\, y_1) = 1/2\,, \quad \mathrm{pr}(z_1 | x_2\,,\, y_2) = 2/5$$

で与えられるとき, 「X と Y は独立であるが, Z を与えたとき X と Y は条件付き独立ではない」ことを示せ. ここに, Z を与えたとき X と Y が条件付き独立であるとは, 「X, Y, Z のとりうる任意の値 (x, y, z) に対して 　$\mathrm{pr}(x, y | z) = \mathrm{pr}(x | z)\,\mathrm{pr}(y | z)$ 　が成り立つ」ことをいう.

(大阪大 2005) 　　(m20053511)

0.231 次のような行列 A について, 以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $(aI - A)$ が正則でないための必要条件を求めよ. ここで, a はスカラー数, I は $3\times\ 3$ の単位行列とする.

(大阪府立大 2005) 　　(m20053601)

0.232 次の微分方程式を解きなさい.

(1) $\dfrac{5xy + 4}{y} dx = \dfrac{3y + 4x}{y^2} dy$ 　　(2) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 2y = e^{2x}$

(大阪府立大 2005) 　　(m20053602)

0.233 (1) $z = (1 + i)^n - (1 - i)^n$ とするとき, $|z|$ を求めよ. ただし, i を虚数単位 $(i^2 = -1)$, n は自然数とする.

(2) i を虚数単位 $(i^2 = -1)$, $z_m = e^{-imx}$ とするとき 　$\left| \displaystyle\sum_{m=0}^{n-1} z_m \right|^2 = \dfrac{\sin^2 \dfrac{nx}{2}}{\sin^2 \dfrac{x}{2}}$ 　となることを示せ.

ただし, m, n は整数, x は実数である.

(大阪府立大 2005) 　　(m20053603)

0.234

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 3 & 7 & 11 & 15 & 19 \\ 2 & 6 & 10 & 14 & 18 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

とする. 次の問に答えよ.

(1) 連立方程式 $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ が解をもつための b の条件を求めよ.

(2) $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ が解をもつとき, その解を求めよ.

(関西大 2005) (m20053701)

0.235 $m,\ n$ は 2 以上の整数とし,

$$f(x, y) = x^m + y^n$$

とする.

(1) 偏導関数 f_x , f_y , f_{xx} , f_{yy} , f_{xy} , f_{yx} を求めよ.

(2) $f(x, y)$ が極値をもつための $m,\ n$ の条件を求めよ. 極値をもつときは, 極値を求めよ.

(関西大 2005) (m20053702)

0.236 サイコロを 4 回投げて, 出た目の数を順に a_1 , a_2 , a_3 , a_4 とする.

(1) a_1 , a_2 の最大値が 1 となる確率 p_1 を求めよ.

(2) a_1 , a_2 の最大値が 2 となる確率 p_2 を求めよ.

(3) a_1 , a_2 の最大値が 3 となる確率 p_3 を求めよ.

(4) 2 次元ベクトル $\begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ のすカラー倍となる確率 p_4 を求めよ.

(5) 2 次正方行列 $\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}$ が正則となる（すなわち, 逆行列をもつ）確率 p_5 を求めよ.

(関西大 2005) (m20053703)

0.237 (1) 次の行列式を因数分解しなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

(2) 次の連立一次方程式の解を全部求めよ. 解全体を解空間と呼ぶ. この解空間の次元はいくらか？

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(神戸大 2005) (m20053801)

0.238 次の計算をしなさい.

(1) $\sin^{-1} x$ を sin の逆関数とするとき
$\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1})^2$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx \quad (m, n \in Z)$

(3) $\displaystyle\iint_{x,y\geq 0,\, x+y\leq 1} xydxdy$

(4) $\displaystyle\iint_V e^{-x^2-y^2} dxdy$
ここで V は第 1 象限 $V = \{(x, y) \mid x \geq 0\,,\ y \geq 0\}$ を表す.

(神戸大 2005)　　(m20053802)

0.239 (1) a, b を定数とする. y を未知関数とする微分方程式

$$y'' - (a+b)y' + aby = 0$$

の一般解を求めよ.

(2) 微分方程式 $y' = y^2$ の一般解を求めよ. 解のグラフの概形を書きなさい.

(神戸大 2005)　　(m20053803)

0.240 a, b, c, d を $ad - bc = 1$, $0 < |c| < 1$ を満たす実数とし, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える. 次の漸化式で定義される行列の列を考える.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = A,$$

$$A_{n+1} = A_n A_0 A_n^{-1} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

とおく. $M = \dfrac{1}{1 - |c|}$ とおいて, 以下 $|a| < M$ を仮定する.

(1) $a_n d_n - b_n c_n = 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示せ.

(2) c_n を計算しなさい.

(3) $|a_n| < M$ を証明せよ.

(神戸大 2005)　　(m20053804)

0.241 a, b を $a \geq b > 0$ を満たす実数とする. $a_0 = a$, $b_0 = b$ より出発して, 漸化式

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \ b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$$

で数列 a_n , b_n を定める.

(1) $a_n \geq b_n$ を示せ（相加平均 $\geq$ 相乗平均 を示せ）.

(2) a_n は単調減少, b_n は単調増加であることを証明せよ.

(神戸大 2005)　　(m20053805)

0.242 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}(2x+3)^n$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\sin^2(x/3)$　　(3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

(鳥取大 2005)　　(m20053901)

0.243 次の計算をせよ.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2}$$

(鳥取大 2005)　　(m20053902)

0.244 次の計算をせよ.

$$\iint_D (1 - x^2 - y^2)\,dxdy \quad \bigl(\text{ただし } D = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}\bigr)$$

(鳥取大 2005)　　(m20053903)

0.245 $f(x)$ は x の 2 次以上の多項式である． $f(x)$ を $(x-2)^2$ で割った余りを $\alpha x+\beta$，商を $g(x)$ とする（ すなわち $f(x)=(x-2)^2 g(x)+\alpha x+\beta$ ）． $f(2)=3$，$f'(2)=4$ の場合，α，β の値を求めよ．

(鳥取大 2005)　　(m20053904)

0.246 n 回連続微分可能な関数 $f(x)$ は x が 0 に近い範囲では

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

で近似することができる（ $f^{(n)}(0)$ は $f(x)$ を n 回微分し $x=0$ としたもの ） これを利用して, 以下の関数の 5 次の近似式の $a_0, \cdots, a_5$ と $b_0, \cdots, b_5$ を求めよ.

$$e^x \text{ の近似式} = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$$
$$\cos x \text{ の近似式} = b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4+b_5x^5$$

(鳥取大 2005)　　(m20053905)

0.247 負でない整数 n に対し， $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^n x dx$ とおくとき, 以下の問に答えよ.

(1) I_0 および I_1 を求めよ.

(2) $n \geq 2$ に対し, $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ が成り立つことを示せ.

(3) I_n を求めよ.

(鳥取大 2005)　　(m20053906)

0.248 y は x の関数とする, 次の微分方程式を解け.

(1) $y'=xy$， $y(0)=2$.

(2) $y''-2y'+2y=0$， $y(0)=1$， $y'(0)=0$.

(鳥取大 2005)　　(m20053907)

0.249 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&2\\1&1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&-1&1\\-1&1&2\end{bmatrix}$ のとき， $2(A+B)+X=A+3B$ 　となる行列 X を求めよ.

(鳥取大 2005)　　(m20053908)

0.250 $A=\begin{bmatrix}a&h&g\\h&b&f\\g&f&c\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}$ について， ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ 　を計算せよ.

(鳥取大 2005)　　(m20053909)

0.251 n 次の対称行列 A, B に対して, AB が対称行列であるための必要十分条件は $AB=BA$ であることを示せ.

(鳥取大 2005)　　(m20053910)

0.252 次の連立一次方程式を消去法（掃き出し法）によって解け.

$$\begin{cases} x-y+2z=4 \\ x+y+z=1 \\ 3x+y+4z=6 \end{cases}$$

(鳥取大 2005)　　(m20053911)

0.253 次の行列式を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

(鳥取大 2005)　　(m20053912)

0.254 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 10 & 7 & 10 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して, $A^2-5A+6E$ を計算せよ. ただし E は単位行列を表す.

(2) 整式 $f(x)=x^8$ を 2 次式 $g(x)=x^2-5x+6$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $R(x)$ とおく. このとき $f(x)$, $g(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ たちが満たす関係式を述べよ. また $Q(x)$ と $R(x)$ の次数はいくつか？

(3) (1) の行列 A に対して A^8 を求めよ.

(岡山大 2005)　　(m20054001)

0.255 (1) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\tan^{-1} x}{x^2}dx$ を求めよ.

(2) 2 つの関数 $\dfrac{\tan^{-1} x}{x}$ と $\dfrac{\frac{\pi}{2}-\tan^{-1} x}{x}$ は各々区間 $[1,\infty)$ で広義積分可能かどうかを答えよ.

(岡山大 2005)　　(m20054002)

0.256 曲線 $x^2-2xy+3y^2=1$ の上の点で, 原点から最も近い点と最も遠い点を求め, それぞれの点の原点からの距離を求めよ.

(岡山大 2005)　　(m20054003)

0.257 次の問に答えよ. ただし, 被積分関数が連続になる範囲のみを考えればよい.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$（$C$ は積分定数）を示せ.

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} x + C$（$C$ は積分定数）を示せ.
ただし, $y=\tan^{-1} x$ $\left(|y|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ は $x=\tan y$ の逆関数を表す.

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2}$ を求めよ.

(4) $\alpha<\beta$ のとき $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ を求めよ.

(5) $a>0$, $D=b^2-4ac<0$ のとき $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ を求めよ.

(広島大 2005)　　(m20054101)

0.258 $n=0,1,2,\cdots$ とし, 積分 $I_n(t)=\displaystyle\int_0^t e^{-x}(1+x)^n dx$ を考える. 次の問に答えよ.

(1) すべての n に対して, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(1+x)^n}{e^x}=0$ を示せ.

(2) すべての n に対して, 極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty} I_n(t)$ が存在することを示せ.

(3) $a_n=\displaystyle\lim_{t\to\infty} I_n(t)$ とおく. $n \geqq 1$ のとき, $a_n-na_{n-1}=1$ が成り立つことを示せ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n!}$ を求めよ.

(広島大 2005)　　(m20054102)

0.259 (1) 関数 $F(x,y)$ は連続かつ x, y に関して偏微分可能で, さらに, 各偏導関数 $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ が連続であるとする．関数 $f(t)$, $g(t)$ は t に対して微分可能であるとする．このとき, 関数 $G(t) = F\big(f(t),\ g(t)\big)$ の導関数 $G'(t)$ を F の各偏導関数と f, g の導関数を用いて表せ. ただし, 公式の証明を行う必要はない.

(2) 2 変数関数 $F(x,y) = x^2 + xy + y^3 - 1$ に対して, $x = 1$ に十分近い x に対して定義された 3 回微分可能な関数 $y = g(x)$ で

$$g(1) = 0\ , \qquad F\big(x, g(x)\big) \equiv 0$$

をみたすものがあるとする. このとき $g'(1)$, $g''(1)$, $g'''(1)$ を求めよ.

(広島大 2005) (m20054103)

0.260 (1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が一次独立であるための必要十分条件は, $ad - bc \neq 0$ であることを示せ.

(3) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ によって定まる線形写像

$$A\ :\ \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

に対し, 核空間 $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\boldsymbol{x} = 0\}$ の次元と, 像空間 $W = \{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\}$ の次元を求めよ.

(広島大 2005) (m20054104)

0.261 正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値と対応する固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を一つ求めよ.

(3) 零ベクトルではないベクトル $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ に対して, 次のように帰納的に $\boldsymbol{x}_n$ を定義する.

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \frac{1}{||A\boldsymbol{x}_n||} A\boldsymbol{x}_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$n \to \infty$ とするとき, $\boldsymbol{x}_n$ が A の絶対値が一番大きな固有値に対する固有ベクトルに収束するならば, $\boldsymbol{x}_0$ は絶対値が一番大きな固有値に対する固有ベクトルと直交しないことを示せ. ただし, $||\cdot||$ は, ベクトルの大きさを表すものとする.

(広島大 2005) (m20054105)

0.262 (1) P は $P^2 = P$ を満たす $n \times\ n$ 実行列とする. $Q = I - P$ とおくと, 次を満たすことを示せ.

$$PQ = QP = O \qquad Q^2 = Q$$

(2) (1) の P, Q に対して $V = \{P\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$, $W = \{Q\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$ とおく. このとき, $\mathbb{R}^n$ は V と W の直和に分解される, すなわち, 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \qquad \boldsymbol{v} \in V\ , \quad \boldsymbol{w} \in W$$

と一意的に表されることを示せ.

(3) (2) における V と W の任意の元は $\mathbb{R}^n$ の内積

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{j=1}^{n}x_jy_j \qquad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

に関して互いに直交しているとする. このとき, P は対称行列であることを示せ.

(広島大 2005) (m20054106)

0.263 3 次元ベクトル $\overrightarrow{A},\overrightarrow{B},\overrightarrow{C}$ に関する次の公式を証明せよ.

$$\left(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}\right)\times\overrightarrow{C}=\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C}\right)\overrightarrow{B}-\left(\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C}\right)\overrightarrow{A}$$

ここで $\times$は外積 , $\cdot$ は内積である.

(広島大 2005) (m20054107)

0.264 $n\times n$ 複素行列に対し,

$$(AB)^\dagger=B^\dagger A^\dagger$$

を証明せよ. ただし, $A^\dagger=({}^tA)^*$（A の転置かつ複素共役）である.

(広島大 2005) (m20054108)

0.265 次の積分を以下の手順に従って求めよ.

$$\int_0^1\frac{x^\alpha-1}{\ln x}dx$$

ここで $\alpha>-1$ は定数, ln は自然対数である.

(1) 求める積分を $I(\alpha)$ とおき,

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}$$

を求めよ.

(2) 上の答えを利用して $I(\alpha)$ を求めよ.

(広島大 2005) (m20054109)

0.266 (1) 次の定積分が収束するかどうかを判定し, 収束する場合はその値を求めよ.

$$\int_1^\infty\frac{dx}{x^\alpha} \qquad (\ \alpha\text{は正の定数とする})$$

(2) $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 4,\ x+y\geq 2\}$ とするとき, 重積分 $\displaystyle\iint_D xdxdy$ の値を求めよ.

(広島市立大 2005) (m20054201)

0.267 x,y は実変数, k は, 実定数とする. 関数 $f(x,y)=x^3+y^3+k(2x+y)$ について以下の問に答えよ.

(1) $k=0$ のとき, $z=f(x,y)$ は極値を持たないことを示せ.

(2) $z=f(x,y)$ が極値を持つための k に関する必要十分条件を求めよ.

(3) $z=f(x,y)$ が極小値を持つとき, その値, およびそのときの x,y の値を求めよ.

(広島市立大 2005) (m20054202)

0.268 次の対称行列について以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) (1) で求めた各固有値に対する A の正規化された固有ベクトルを求めよ.

(3) ${}^tPAP$ が対角行列となる直交行列 P を求め対角化せよ.（${}^tP$ は P の転置行列を表す）

(広島市立大 2005)　　(m20054203)

0.269 $A^k = O$ となる自然数 k が存在するような正方行列 A を「べき零行列」という.

(1) A を正方行列とし, λ を A の固有値とするとき, λ^k は A^k の固有値となることを示せ.

(2) (1) の関係を用いて, べき零行列の固有値は, 0 に限られることを示せ.

(3) 逆に正方行列 A の固有値が 0 に限られるとき, A はべき零行列であることを示せ.

(広島市立大 2005)　　(m20054204)

0.270 次の微分方程式を解きなさい（$u = x^{-1}$ とおいて変数変換を行う）.

$$\frac{dx}{dt} = tx^2$$

(山口大 2005)　　(m20054301)

0.271 次の直線と円で囲まれた図形の面積を積分して求めなさい.

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$$

(山口大 2005)　　(m20054302)

0.272 x の範囲が $\dfrac{1}{2} \leq x \leq 2$ のとき, 以下の関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めなさい. また, この x の範囲における関数 $f(x)$ のグラフを書きなさい.

$$f(x) = \log(x^2+1) - \log(2x)$$

(山口大 2005)　　(m20054303)

0.273 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい. ただし, 固有ベクトルはひとつの固有値に対してひとつ求めればよい.

(山口大 2005)　　(m20054304)

0.274 次の行列式の値を計算しなさい.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 5 & 8 \\ -5 & 4 & -7 & 9 \\ 6 & 3 & -2 & 13 \end{vmatrix}$$

(山口大 2005)　　(m20054305)

0.275 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x dx$

(2) $\displaystyle\int x \cos ax dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$

(山口大 2005)　　(m20054306)

0.276 微分とは, 導関数を求めることをいう. 導関数とは, 関数 $f(x)$ における微分係数を, x の関数で表した関数 $\dfrac{df(x)}{dx}$ のことをいう. 微分係数とは, x から $x+\Delta x$ の区間における関数 $f(x)$ の平均変化率において, $\Delta x \to 0$ の極限を取った値をいう. そのような定義に従って

(1) $y = x^2$ を x について微分すると, $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ となることを示しなさい.

(2) $y = \sqrt{x+1}$ を x について微分すると, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ となることを示しなさい.

(山口大 2005)　　(m20054307)

0.277 次の微分方程式を解きなさい.

(1) $x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

(2) $x\dfrac{dy}{dx} + y = x\log x$　を (1) の結果を利用して解きなさい.

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 5y = e^x \cos 2x$

(山口大 2005)　　(m20054308)

0.278 定積分

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を求めなさい.

(山口大 2005)　　(m20054309)

0.279 粘性流体中の粒子の運動は, 微分方程式

$$\frac{d\nu}{dt} + \alpha\nu = -\beta\nu^2 \qquad \text{初期条件 } \nu(0) = \nu_0$$

で記述される. 変数変換 $u = 1/\nu$ を実行して, この解 $\nu(t)$ を求めなさい.

(山口大 2005)　　(m20054310)

0.280 $f(x) = \tan^{-1} x$ のとき, 次の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の導関数を求めよ.

(2) 次の等式を数学的帰納法により証明せよ. ただし, $y = f(x)$ とする.

$$\frac{d^ny}{dx^n} = (n-1)! \cos^n y \sin\left(ny + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(3) $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^ny}{dx^n}$ とすると, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$f^{(2m)}(0) = 0, \quad f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m (2m)! \qquad (m = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

(4) 関数 $f(x)$ をマクローリン展開せよ.

(5) 次の等式を証明せよ.

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1}$$

(山口大 2005)　　(m20054311)

0.281 次の問に答えよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 10 \\ 15 & 42 & 46 \\ 21 & 66 & 85 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ とする. $A = BC$ となる 3 次正方行列 C を求めよ. また行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(2) 次の方程式を解け. ここで左辺は行列式を表す.

$$\begin{vmatrix} x^2 & 1-x & x^2-2x & x^3 \\ 0 & x-2 & 1-x & x^2-2x \\ x^2 & 1-x & 1-2x & 1-x+x^3 \\ -x^2 & x-1 & 2x-x^2 & 2-x^3 \end{vmatrix} = 0$$

(徳島大 2005)　　(m20054401)

0.282 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ について, 次の問に答えよ.

(1) $1 < a_n < 2$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示せ.

(2) $a_n < a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示せ.

(3) 極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(徳島大 2005)　　(m20054402)

0.283 累次積分 $I = \int_0^1 \left(\int_y^1 y^2 e^{x^2} dx \right) dy$ について, 次の問に答えよ.

(1) 2 重積分を用いると $I = \iint_D y^2 e^{x^2} dxdy$ と書ける. このときの積分領域 D を図示せよ.

(2) I を求めよ.

(徳島大 2005)　　(m20054403)

0.284 $y = y(x)$ が微分方程式 $y'' + 2y' + 5y = 0$ を満たす. 次の問に答えよ.

(1) 微分方程式の一般解を求めよ. ただし, 最終結果に複素数が現れてはならない.（必要ならオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いてもよい.）

(2) 初期条件 $y(0) = y'(0) = -e^{\frac{3}{4}\pi}$ を満たす微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた $y(x)$ に対し, $y\left(\frac{3}{4}\pi\right)$ と $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ を求めよ.

(徳島大 2005)　　(m20054404)

0.285 $f(x)$ を閉区間 $I = [a, b]$ 上の連続関数とする. I 上に $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$ を

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

となるように選び, I の分割と呼び Δ で表す. また

$$|\Delta| = \max_{1\leq i\leq n} (x_i - x_{i-1})$$

とする. さらに $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ を満たす ξ_i をとり, $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ をこの分割の代表系と呼び,

$\xi(\Delta)$ で表す. このとき

$$S\left(f, \xi(\Delta)\right) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

を分割 Δ とその代表系 $\xi(\Delta)$ に関するリーマン和と呼ぶ. 任意の分割の列と任意の代表系に対して

$$\lim_{|\Delta| \to 0} S\left(f, \xi(\Delta)\right)$$

が一意に存在する. その極限 S を $f(x)$ の I における積分といい

$$\int_a^b f(x)dx = S$$

とかく. この定義を用いて次の問に答えよ. ただし, 以下において $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で正値連続な関数とし

$$f_{in} = f(a + i\delta_n)\,, \qquad \delta_n = \frac{b-a}{n}$$

とする.

(1) 次の式を示せ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{1n} + f_{2n} + \cdots f_{nn}}{n} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

(2) 次の式を示せ.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_{1n}f_{2n}\cdots f_{nn}} = \boldsymbol{e}^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f(x)dx}$$

(3) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)}$$

(高知大 2005) (m20054501)

0.286 4 次行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 1 & y \\ x & 1 & y & 1 \\ 1 & y & 1 & x \\ y & 1 & x & 1 \end{pmatrix}$$

の行列式を計算し, その結果を因数分解せよ.

(高知大 2005) (m20054502)

0.287 次の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ は, $|x| < K$ で少なくとも $(n+1)$ 回微分可能であるとする. このとき, $f(x)$ の n 次のマクローリン展開式（すなわち, $x = 0$ を中心とする n 次のテーラー展開式）を求めよ（証明は不要）.

(2) $|x| < 1$ における関数 $f(x) = (1+x)^{-1}$ の n 次のマクローリン展開式において, ラグランジュの剰余項 $R_{n+1}(x)$ を求め, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ を示せ.

(3) (2) の $f(x)$ のマクローリン級数展開を求めよ.

(高知大 2005) (m20054503)

0.288 次の問に答えよ. ただし, I は n 次単位行列, O は n 次零行列である.

(1) n 次正方行列 A に対して, $(I-A)B = I - A^4$ を満たす B を一つ求めよ.

(2) $A^4 = O$ を満たす n 次正方行列 A に対して, $I - A$ の逆行列を求めよ.

(3) $X = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対して, X^k $(k \geq 2)$ を求めよ.

(4) $\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(高知大 2005)　　(m20054504)

0.289 V を線形空間とし, $f : V \longrightarrow V$ を線形写像とするとき, 次の問に答えよ.

(1) $\mathrm{Ker}\, f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ 及び $\mathrm{Im}\, f = \{w \in V \mid w = f(v)\,,\ v \in V\}$ はともに V の部分線形空間であることを示せ.

(2) $f \circ f = f$ ならば, $V = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Im}\,(1_V - f)$ が成り立つことを示せ.
ここで, $\mathrm{Im}\,(1_V - f) = \{w \in V \mid w = v - f(v)\,,\ v \in V\}$ とする.

(3) V が有限次元線形空間とする. このとき, $f \circ f = f$ であるための必要十分条件は
$\dim \mathrm{Im}(1_V - f) = \dim \mathrm{Ker}\, f$ であることを示せ.

(高知大 2005)　　(m20054505)

0.290 (1) 次の関数を微分せよ.

(a) $\log(1 + x^4)$　　(b) $\sin^{-1} x^2$

(2) α, β を定数とし ,

$$f(x) = \begin{cases} \tan^{-1} x & (x > 1) \\ \beta & (x = 1) \\ \alpha x - \alpha + \beta & (x < 1) \end{cases}$$

とおく. ただし $\tan^{-1} x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2}\,,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする. 次の問いに答えよ.

(a) $f(x)$ が $x = 1$ で連続になるように β を定めよ.

(b) $\displaystyle\lim_{x \to +0} f'(x) = \lim_{x \to 1-0} f'(x)$ となるように α を定めよ.

(愛媛大 2005)　　(m20054601)

0.291 関数 $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^3 + x}$ について, 次の問に答えよ.

(1) 等式 $f(x) = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx + C}{x^2 + 1}$ が成り立つように定数 A, B, C を定めよ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ.

(3) 定積分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} f(x)dx$ の値を求めよ.

(愛媛大 2005)　　(m20054602)

0.292 (1) 関数 $f(x, y) = x - x^3 - 2xy^2$ の極値を求めよ.

(2) $D = \{(x, y) : 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ 2 \leqq x^2 + y^2 \leqq 3\}$ のとき, 次の積分の値を求めよ.

$$\iint_D x^2 y dx dy$$

(愛媛大 2005)　　(m20054603)

0.293 行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & a & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は 0 を固有値として持つとする. ただし, a は定数とする.

(1) 定数 a を求めよ.

(2) A の 0 でない固有値をすべて求めよ.

(3) 固有値 0 に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

(愛媛大 2005) (m20054604)

0.294 定数 a, b が $a > b > 0$ を満たすとき, パラメータ表示された曲線

$$\begin{cases} x = & a\cos t \\ y = & b\sin t \end{cases} \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

を考える.

(1) この曲線の概形を描け.

(2) $t = \dfrac{\pi}{4}$ に対応する点におけるこの曲線の接線の方程式を求め, (1) で描いた図に書き入れよ.

(3) もとの曲線を y 軸を中心に回転したときにできる図形の体積を求めよ.

(愛媛大 2005) (m20054605)

0.295 A, B を 2 次の正方行列, また O を零行列, E を単位行列とする. 次の (1), (2), (3) は正しいか? 正しければ証明し, 正しくなければ反例（成り立たないような A, B の例）をあげよ.

(1) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ が成り立つ.

(2) $AB = O$ ならば $A = O$ または $B = O$ である.

(3) $A^2 + 2A - E = O$ が成り立てば A は正則行列である.

(愛媛大 2005) (m20054606)

0.296 次の行列式を計算せよ. (2) は因数分解せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$

(愛媛大 2005) (m20054607)

0.297 $f(x)$ を $(0, \infty)$ 上で 2 回微分可能な関数とする. $0 < a < b$ とし,

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{K}{2}(b-a)^2$$

を満たす定数を K とする.

(1) $F(x) = f(b) - \{f(x) + f'(x)(b-x) + \dfrac{K}{2}(b-x)^2\}$ とおくとき, $F'(x)$ を求めよ.

(2) $K = f''(a + \theta(b-a))$ を満たす $0 < \theta < 1$ が存在することを示せ.

(3) すべての $x > 0$ に対して $f''(x) \geqq \delta$ を満たす定数 $\delta > 0$ が存在するとき,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

であることを示せ.

(愛媛大 2005) (m20054608)

0.298 $a>0,\ x>0$ のとき, 関数 $f(x)$ は等式

$$\int_a^{\sqrt{x}} f(t)dt = -2+\log x$$

を満たす. このとき, $f(x)$ と定数 a の値を求めよ.

(愛媛大 2005) (m20054609)

0.299 次の積分 I の値を求めよ.

$$I=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{dx}{\sin 2x}$$

(愛媛大 2005) (m20054610)

0.300 ベクトル y がベクトル x と行列 A によって次のように関係づけられる.

$$y=Ax \quad \text{ここで},\ y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(1) 次の 3 つのベクトルが行列 A の固有ベクトルであることを示せ.

$$p_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix} 1 \\ z_0 \\ {z_0}^2 \end{pmatrix},\ p_3=\begin{pmatrix} 1 \\ {z_0}^2 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

ここで, $z_0=e^{i2\pi/3}$ である.
（ i : 虚数単位 ）
（ ヒント : ${z_0}^3=1$ ）

(2) 行列 A の固有値 λ_k $(k=1,2,3)$ を求めよ.

(3) a,b,c を行列 A の固有値 λ_k と z_0 を用いて表せ. （ヒント : $1+z_0+{z_0}^2=0$）

(4) $a=c=0$, $b=1$ となる場合の, 行列 A の（イ）固有値, （ロ）固有ベクトル を求めよ.

(5) （イ）ベクトル $p=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を固有ベクトル $p_1,\ p_2,\ p_3$ の線形和で表せ.

（ロ）上記のベクトル p を x とするとき, ベクトル y を求めよ.

(九州大 2005) (m20054701)

0.301 次の連立定数係数線形同次微分方程式

$$\frac{dy_1(x)}{dx}+2y_1(x)-y_2(x)=0$$

$$\frac{dy_2(x)}{dx}-y_1(x)+2y_2(x)=0$$

を, 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ を用いて,

$$\frac{dy(x)}{dx}+Ay(x)=0 \quad \text{ただし},\ y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

のように表現する. 解 $y(x)$ を行列 A の対角化を利用して以下の設問に沿って求めよ.

(1) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 と固有ベクトル c_1, c_2 を求めよ.

(2) c_1, c_2 を列ベクトルとする行列を $P=(c_1,\ c_2)$ とする. $P^{-1}AP$ を求めよ.

(3) $z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} = P^{-1}y(x)$ とするとき, $z(x)$ に関する微分方程式を導き, $z(x)$ の一般解を求めよ.

(4) $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき, $y(x)$ を求めよ.

(九州大 2005)　　(m20054702)

0.302 複素変数の関数 $f(z) = \dfrac{1}{2z^2 - 5z + 2}$ について次の問いに答えよ. ただし, 積分路 C は, 単位円周 $|z| = 1$ を反時計回りに一周する閉曲線とする.

(1) $f(z)$ の各極における留数を求めよ.

(2) 積分 $I = \displaystyle\int_C f(z)dz$ の値を求めよ.

(3) $z = e^{i\theta}$ (θ : 実数, i : 虚数単位) のとき, $\cos\theta = \alpha z + \beta z^{-1}$ を満たす実数 α, β を求めよ.

(4) 積分路 C のパラメータ表示 C : $z = e^{i\theta}$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ を用いることにより, (2) の積分 I は, 次のように変換できる.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{a}{b\cos\theta + c} d\theta \quad (a, b, c\ :\ \text{定数})$$

a, b, c を求めよ.

(九州大 2005)　　(m20054703)

0.303 ある銀行には, 1 分間あたり平均で 0.2 人の来客がある. 来客の到着がランダムであると考えると, 単位時間あたりの来客数は, ポアソン分布に従うことが知られている. この銀行の場合, 1 分間あたりの来客数は $\lambda = 0.2$ のポアソン分布に従う. ポアソン分布の式は, 次式で与えられる.

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

(1) 1 分間の来客数が 4 である確率はいくらか.

(2) 1 分間に来客が 1 人も来ない確率はいくらか.

(3) 5 分間に来客が 1 人も来ない確率はいくらか.

(4) 3 分間に来客が 1 人だけ来る確率はいくらか.

(九州大 2005)　　(m20054704)

0.304 平面上の異なる 2 つの定点 A, B に至る距離の比が $m : n$ $(m, n > 0)$ である点の軌跡 (そのような点全体のなす図形) を求めよ.

(九州大 2005)　　(m20054705)

0.305 A_n を対角成分がすべて a でそれ以外はすべて 1 の n 行 n 列の行列とする.

(1) A_n の行列式を因数分解された形で求めよ.

(2) 次の連立一次方程式を解け (a, b は定数).

$$\left\{\begin{array}{ccc} ax_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n & = & b \\ x_1 + ax_2 + x_3 + \cdots + x_n & = & b \\ \cdots & & \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + ax_n & = & b \end{array}\right.$$

(九州大 2005)　　(m20054706)

0.306 $R[x]_n$ を x に関する高々n 次の実数係数の多項式全体とする.

(1) $U_n = \{p(x) \in R[x]_n \mid p(0) = 0\,,\ p'(0) = 0\}$
はベクトル空間になることを示せ. ただし, p' は p の導関数である.

(2) U_n の次元と, 一組の基底を求めよ.

(九州大 2005) (m20054707)

0.307 (1) 区間 $[0, 1]$ で定義された関数 g の積分（区分求積法）の定義を述べよ.

(2) 関数 $g(x) = x^3$ を区間 $[0, 1]$ で, 上で与えられた定義に従って, 積分した値を求めよ.

(九州大 2005) (m20054708)

0.308 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\,,\quad x < 1$ について以下の問に答えよ.

(1) $x = 0$ の周りで最も $f(x)$ に近い 1 次式 $f_1(x)$ を求めよ.

(2) $x = 0$ の周りで最も $f(x)$ に近い 2 次式 $f_2(x)$ を求めよ.

(3) $y = f(x)\,,\ f_1(x)\,,\ f_2(x)$ のグラフ 3 つを重ねて xy 平面上に描け.

(4) $f(x)$ を $x = 0$ を中心に Taylor 級数に展開せよ. x^n の項まで展開したときの剰余項の評価を一つ与えよ.

(九州大 2005) (m20054709)

0.309 (1) 関数 $f(x) = \sin x$ の n 次導関数を求めよ.

(2) 関数 $g(x) = x^3 \sin x$ の n 次導関数を求めよ.

(九州芸術工科大 2005) (m20054801)

0.310 積分 $\displaystyle\int_0^1 \log x dx$ は広義積分である. これを計算せよ.

(九州芸術工科大 2005) (m20054802)

0.311 (1) 3 次正方行列 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(2) a を実数とする. このとき, 3 次正方行列 $\begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$ が逆行列を持つための条件を求めよ.

(九州芸術工科大 2005) (m20054803)

0.312 E を 3 次単位行列とし, A, X, Y を 3 次正方行列で

$$AX = E\,,\quad YA = E$$

を満たすものとする. このとき, $X = Y$ となることを証明せよ.

(九州芸術工科大 2005) (m20054804)

0.313 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x \cos x}{1-\cos x}$ を求めよ.

(九州芸術工科大 2005) (m20054805)

0.314 (1) $x^2 \log x$ を積分せよ.

(2) 微分方程式　$x^2y' + y^2 = 0$　を解け.

(九州芸術工科大 2005)　(m20054806)

0.315 (1) $F(x) = \int_a^x (x-t)^2 f(t)dt$ のとき $\dfrac{dF}{dx}$ を求めよ.

(2) $\sin(\pi - x) = \sin x$ を利用して
$\displaystyle\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$ を証明せよ.

(九州芸術工科大 2005)　(m20054807)

0.316 以下の問に答えよ. ただし, ${}^tC$ は行列 C の転置行列, $\mathrm{tr}(C)$ は正方行列 C の対角成分の和を表す.

(1) 行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ に対して, AB の第 i 行第 j 列の要素がどのように表せるか示せ.

(2) 正方行列 A, 正則行列 P に対して, $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$ となることを示せ.

(3) $m\times\ n$ 行列 A に対し $\mathrm{tr}(A{}^tA) = \mathrm{tr}({}^tAA)$ であることを示せ.

(九州芸術工科大 2005)　(m20054808)

0.317 次の行列式を因数分解せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} b+c & a & a^2 \\ c+a & b & b^2 \\ a+b & c & c^2 \end{vmatrix}$

(九州芸術工科大 2005)　(m20054809)

0.318 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(九州芸術工科大 2005)　(m20054810)

0.319 楕円 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を原点を中心とし半径 2 の円に写像する線形変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の定数 a, b を求めよ.

(九州芸術工科大 2005)　(m20054811)

0.320 何回でも微分できる関数 $f(x), g(x)$ をそれぞれ f, g と書く. 次の等式がすべての自然数 n に対して成り立つことを証明せよ.

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

ただし, 一般に, 関数 h の第 n 次導関数を $h^{(n)}$ と書き,$h^{(0)} = h$ とする.

(佐賀大 2005)　(m20054901)

0.321 次の (1),(2) に答えよ.

(1) 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ のなす角は鋭角であるか鈍角であるかを判定せよ.

(2)　２つのベクトル

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \\ x \\ -1 \end{pmatrix}$$

が直交するときの x の値を求めよ.

(佐賀大 2005)　　(m20054902)

0.322　行列の基本変形（掃き出し法）を用いて, 連立方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

を解け.

(佐賀大 2005)　　(m20054903)

0.323　辺の長さの総和が 1 の直方体のうち, 体積が最大になるものを求めよ.

(佐賀大 2005)　　(m20054904)

0.324　球 $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ と円柱 $x^2+y^2 \leq x$ の共通部分の体積を求めよ.

(佐賀大 2005)　　(m20054905)

0.325　次の行列式に関する等式を示せ.

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2 & bc & ac \\ bc & a^2+c^2 & ab \\ ac & ab & b^2+c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}^2$$

(佐賀大 2005)　　(m20054906)

0.326　行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & c \end{pmatrix}$ について，次の (1),(2),(3) に答えよ．ただし, $a \neq 0$ または $c \neq 0$ とする.

(1)　A の固有値を求めよ.

(2)　ベクトル

$$\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x_3} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$$

は A の固有ベクトルであることを示し, それぞれのベクトルに対する固有値を答えよ.

(3)　$a+c \neq 0$ のとき, A は対角化可能であることを示せ.

(佐賀大 2005)　　(m20054907)

0.327　次の等式を証明せよ. 但し，$A(x) = (A_x(x,y,z), A_y(x,y,z), A_z(x,y,z))$ は 3 次元空間のベクトル場である.

(1)　$\nabla \cdot (\nabla \times\ A(x)) = 0$　　　　(2)　$\nabla \times\ (\nabla \times\ A(x)) = \nabla(\nabla \cdot A(x)) - \nabla^2 A(x)$

(佐賀大 2005)　　(m20054908)

0.328 次の問に答えよ.

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(3) (2) の行列を直交行列によって対角化せよ.

(佐賀大 2005) (m20054909)

0.329 次の定積分を求めよ, a は正の定数である.

(1) $\displaystyle\int_1^2 dx\ \log x$ (2) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ax^2}$ (4) $\displaystyle\int_0^{\infty} dx\ \frac{\sin x}{x}$

(佐賀大 2005) (m20054910)

0.330 次の定積分を求めよ.

$$\iint_D dxdy\ x^2y \qquad D = \{(x,y) \mid x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ x+y \leq 1\}$$

(佐賀大 2005) (m20054911)

0.331 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $x^2y'(x) + y(x)^2 = 0$

(2) $y''(x) + 4y(x) = 0$

(佐賀大 2005) (m20054912)

0.332 次の問に答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin x}{x^3 - x}$ を求めよ.

(2) 逆三角関数 $\cos^{-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ $(x > 0)$ の導関数を求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054913)

0.333 $\displaystyle\int_0^1 x \log x\, dx$ を計算せよ.

(佐賀大 2005) (m20054914)

0.334 $z = x^y$ $(x > 0)$ の偏導関数 $z_x\,,\ z_y$ を求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054915)

0.335 重積分 $\displaystyle\iint_D y\, dxdy\,,\quad D = \{(x,y) \mid y^2 \leq x \leq y+2\}$ を計算せよ.

(佐賀大 2005) (m20054916)

0.336 微分方程式

$xy' + y = x\log x$ $(x > 0)$

を解け. ただし, 解は陽形式 $y = f(x)$ の形で求めること.

(佐賀大 2005) (m20054917)

0.337 以下の問に答えよ.

(1) 次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列式を計算せよ．答えはなるべく簡単に因数分解した形で書け.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

(佐賀大 2005) (m20054918)

0.338 平面上の直線 l を $l\ :\ y=(\tan\theta)x\ \ (-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$ とし，f を平面上の与えられたベクトル $\boldsymbol{a}$ を l と線対称な位置に移すという線形写像とする．このとき以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするとき, $f(\boldsymbol{e}_1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)$ を求めよ.

(2) 線形写像 f を表す行列を求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054919)

0.339 次の関数の 1 次微分を求めなさい.

(1) $y=\sqrt{2x^2+3}$ (2) $y=\dfrac{1}{\cos x}$ (3) $y=e^{-x}\sin(5x+2)$ (4) $y=\log\dfrac{x-1}{x+1}$

(佐賀大 2005) (m20054920)

0.340 x と y の関数 $z=\log x-3x^2y+6$ について, 1 次偏微分 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ および 2 次偏微分 $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$ と $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ を求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054921)

0.341 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int(3x^2+\frac{1}{x})\,dx$ (2) $\displaystyle\int x\cos(x^2+1)\,dx$ (3) $\displaystyle\int 10^x\,dx$

(4) $\displaystyle\int\log x\,dx$ (5) $\displaystyle\int x\sin(2x+1)\,dx$ (6) $\displaystyle\int\frac{1}{1+e^x}\,dx$

(佐賀大 2005) (m20054922)

0.342 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

(1) $-\dfrac{dy}{dx}=3y$ (2) $-\dfrac{dy}{dx}=5y-2e^{-2x}$

(佐賀大 2005) (m20054923)

0.343 次の問に答えよ.

(1) 三角関数の加法定理より

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

を導出せよ.

(2) 導関数の定義

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

を利用して $(\sin x)'=\cos x$ であることを示せ.

(佐賀大 2005)　　(m20054924)

0.344 次の問に答えよ.

(1) r を中心からの距離, θ を x 軸とのなす角とする.　いま曲線が極座標 $r=f(\theta)$ で与えられる場合, 曲線と直線 $\theta=\theta_1$ および $\theta=\theta_2$ とで囲まれる図形の面積 S が次式で与えられることを証明せよ.

$$S=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\{f(\theta)\}^2\,d\theta$$

(2) 曲線 $r=a(1+\cos\theta)$, $a>0$ の囲む面積を求めよ．ただし $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ とする.

(3) 極座標 r の直交座標の微分量（変分）について，その二乗和の平方根を考慮することにより $r=a(1+\cos\theta)$, $a>0$ の境界線の全長を求めよ．ただし $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ とする.

(佐賀大 2005)　　(m20054925)

0.345 次の問に答えよ.

(1) 行列 $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(2) 行列 A を対角化せよ.

(3) (2) で得られた対角行列を B とすると $P^{-1}AP=B$（ただし P は正則行列）の関係が成り立つ. この関係を利用して A^n を求めよ.

(佐賀大 2005)　　(m20054926)

0.346 微分方程式　$m\dfrac{d^2x}{dt^2}+r\dfrac{dx}{dt}+kx=0$　を条件　$r^2-4mk=0$　および　初期条件 $(t=0)$

$x=-1$,　$\dfrac{dx}{dt}=1$　のもとで解け.

(佐賀大 2005)　　(m20054927)

0.347 行列 $A=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ について以下の問に答えよ.

(1) A の行列式を求めよ.

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) A の固有多項式 $g_A(t)$ を求めよ.

(4) A の固有値 λ を求めよ.

(5) A の各固有値の固有ベクトル $\boldsymbol{p}$ を求めよ.

(佐賀大 2005)　　(m20054928)

0.348 $\boldsymbol{\nu}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$,　$\boldsymbol{\nu}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$,　$\boldsymbol{\nu}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ のときに以下の問に答えよ.

(1) 内積 $(\boldsymbol{\nu}_1\,,\,\boldsymbol{\nu}_2)$ を計算せよ.

(2) ベクトルの長さ $||\boldsymbol{\nu}_2||$ を計算せよ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{\nu}_1$ と $\boldsymbol{\nu}_3$ のなす角を求めよ.

(佐賀大 2005)　　(m20054929)

0.349 (1) 関数 $f(x)=\sin^2 x$ を微分せよ.

(2) $y = e^{-t}$, $t = x^2$ のとき, $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054930)

0.350 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \sin^2 x\, dx$ を求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 xe^x\, dx$ を計算せよ.

(佐賀大 2005) (m20054931)

0.351 $\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおく. 以下の問に答えよ.

(1) $\dfrac{dx}{dt}$ を求めよ. ただし, 答えは t の関数として表せ.

(2) $\cos x$ を t で表せ.

(3) 変数変換 $\tan\dfrac{x}{2} = t$ を行って, 積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\, dx$ を求めよ.

(4) 曲線 $y = -\log|\cos x|$, $\left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}\right)$ の長さを求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054932)

0.352 以下の各問に答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \quad (a > 0)$ を計算せよ.

(3) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = -30\sin 4x$ の一般解を求めよ.

(4) $y = 2Cx - C^2$ が解となるような微分方程式を作れ. ただし, C は任意の定数とする.

(佐賀大 2005) (m20054933)

0.353 放物面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $z = 2x$ で囲まれた立体の体積を求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054934)

0.354 $x = 0$ を含む開区間で無限回微分可能な関数 $f(x)$ のマクローリン展開は以下のようになる.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

これを用いて, ネイピアの数 e を小数点以下第 3 位まで計算せよ.

(佐賀大 2005) (m20054935)

0.355 ニュートンの冷却法則によれば, 室温 $X°C$ の室内にある物体の時間 t における温度を $x°C$ とすれば, 冷却速度 $\dfrac{dx}{dt}$ は, 温度差 $x - X$ に比例する.
いま, 入れたときに $73°C$ だったコーヒーが 30 分後には $37°C$ になったとする. 入れてから 1 時間後にはコーヒーは何 $°C$ になっているか. なお, 室温は常時 $25°C$ であるとする.

(佐賀大 2005) (m20054936)

0.356 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ とするとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{AB}$ および $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}$ を求めよ.

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(佐賀大 2005)　　(m20054937)

0.357　x を $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$ の実数とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1)　$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ を用いて, 次の公式

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

を導きなさい.

(2)　$y = \tan^{-1} x$ に対して, 逆関数の微分の公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)}$$

を用いて, $\dfrac{dy}{dx}$ を x を用いて表しなさい.

(3)　n を自然数とし,

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$$

とおく. この I_n に対して, $n=1$ のときの I_1 を求めなさい.

(4)　(3) で与えられた I_n を

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = \int 1 \times \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$$

と考え, 部分積分法を用いて

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) I_n$$

が成り立つことを示しなさい.

(5)　(3) で与えられた I_n に対して, $n=3$ のときの I_3 を求めなさい.

(長崎大 2005)　　(m20055001)

0.358　一辺の長さが 1 であるような正方形の折り紙があり (fig.1), これを図のように折る場合を考える.

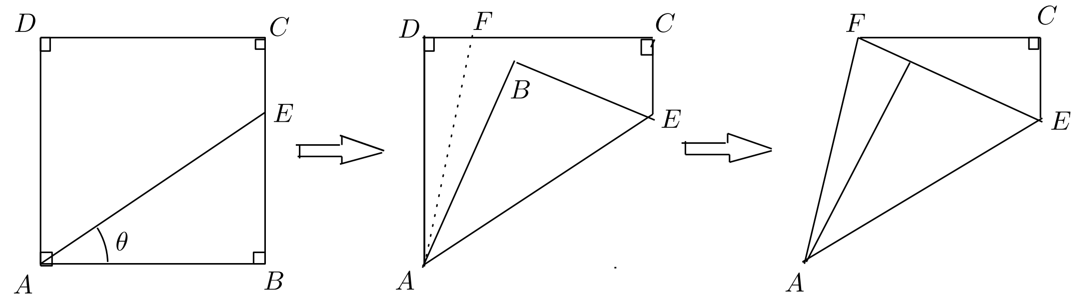


fig.1　　fig.2　　fig.3

(1)　fig.1 の状態から $\angle BAE$ が θ であるような折り目 AE に沿って折ると fig.2 のようになった. 三角形 ABE の面積を求めよ.

(2)　fig.2 の状態で三角形 ABE の面積が五角形 $ABECD$ の面積と等しいとき $\tan\theta$ の値はいくらか.

(3)　次に fig.2 の状態から $\angle BAD$ の二等分線 AF に沿って折ると fig.3 のようになった. 四角形 $AECF$ の面積を求めよ.

(長崎大 2005)　　(m20055002)

0.359　$a > 0$ の範囲で定義された関数 $f(x) = x + \sqrt{a^2+x^2}$ について以下の問に答えよ.

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(2) $\sqrt{a^2+x^2}$ を $f(x)$ と $f'(x)$ で表せ.

(3) 定積分 $I=\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ を計算せよ.

(4) 定積分 $J=\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2+x^2}dx$ を (3) で求めた I を用いて表せ.

(長崎大 2005)　　(m20055003)

0.360 図 1 に示すように, xy 平面上に原点 $O(0,0)$ および点 $A(1,1)$, 点 $B(x,y)$ を考える. また, $2\times\ 2$ 行列を $M=\begin{bmatrix}1&1\\x&y\end{bmatrix}$ とする. また, ベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ の長さを $|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{OB}|$ で表し, ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積を $<\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}>$ で表す.

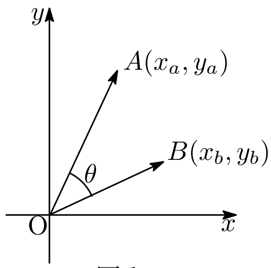


図 1

(1) $<\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}>$ を $|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{OB}|$ および図中の θ を用いて表しなさい.

(2) $|\overrightarrow{OB}|$ と $<\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}>$ を x,y で表しなさい。

(3) $\triangle OAB$ の面積を S とすると, $S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta$ で表される.
このことを用いて,
$$4S^2=|M|^2$$
が成り立つことを示しなさい. ただし $|M|$ は, 行列 M の行列式の値を表す.

(4) $\triangle OAB$ が正三角形となるとき, 点 B の座標を求めよ.

(長崎大 2005)　　(m20055004)

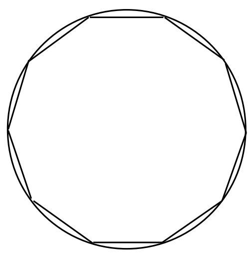
0.361 図 2 に示すように半径 1 の円に内接する正十角形の頂点を次の手順で 1 つずつ選び, 合計 3 個選ぶ.

- 10 個の頂点から勝手に 1 つの頂点を選び, その頂点を P_1 とする.
- P_1 を除いた 9 個の頂点の中から勝手に 1 つ選び, その頂点を P_2 とする.
- P_1 , P_2 を除いた 8 個の頂点の中から勝手に 1 つ選び, その頂点を P_3 とする.

このとき以下の問に答えなさい.

(1) 頂点 P_1 , P_2 , P_3 を選ぶ際の選び得るすべての場合の数を求めよ.

(2) 上の手順で選んだ P_1 , P_2 , P_3 で三角形を作るとき,
$\triangle P_1P_2P_3$ が直角三角形になる確率を求めよ.



単位円に内接する正 10 角形

(長崎大 2005)　　(m20055005)

0.362 以下の問に答えよ.

(1) xy 平面内の円の方程式は一般に
$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0 \qquad ①$$
で表されることを示せ. ただし, A,B,C,D は実数である.

(2) 複素平面内の円の方程式は一般に
$$\alpha z\overline{z}+\beta z+\overline{\beta}\overline{z}+\gamma=0 \qquad ②$$
で表されることを示せ. ただし, $z=x+iy$, α, γ は実数, β は複素数である.

(長崎大 2005)　　(m20055006)

0.363 関数 $f(t)$ に関するフーリエ変換を $F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$ で定義するとき, 以下の問に答えよ.

(1) $f(t)$ が実数で偶関数の時 $F(\omega)$ が実数になることを証明せよ.

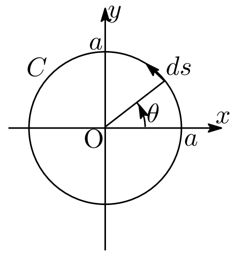
(2) $f(t)$ が $f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad |t| \leq T \\ 0 & , \quad |t| > T \end{cases}$ 　ただし T は正の実数　で与えられるとき, フーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ.

(3) 上で求めたフーリエ変換 $F(\omega)$ を, 横軸を ω, 縦軸を $|F(\omega)|$ として図示せよ.

(長崎大 2005)　　(m20055007)

0.364 ベクトル関数 $\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{f} = 4y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$ で与えられるとき, 右に示す円 $C\left(x^2 + y^2 = a^2\,,\ z = 0\right)$ 上で次の線積分を行え. ただし, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は, それぞれ, x , y , z 方向の単位ベクトルである.

$$I = \oint_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{s}$$



(長崎大 2005)　　(m20055008)

0.365 次の行列 A について, 以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) 行列 A の固有ベクトルを求めよ.

(3) 行列 A を以下のように

$$B = P^{-1}AP$$

対角化する行列 P と対角行列 B を求めよ.

(長崎大 2005)　　(m20055009)

0.366 次の関数が与えられている.

$$f(x) = 1 - \cos x$$
$$g(x) = x \sin x$$

(1) これらの関数をそれぞれ x の 4 乗までの多項式に展開せよ.

(2) これらの関数を次式に代入し, その極限を求めよ. また, その結果がロピタルの定理を用いた結果と一致することを示せ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

(長崎大 2005)　　(m20055010)

0.367 不定積分 $\displaystyle\int x^2 \log x dx$ を計算せよ.

(長崎大 2005)　　(m20055011)

0.368 以下の問に答えよ. ただし, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする.

(1) 微分方程式 $y' - y = 0$ を解け.

(2) 初期条件 $y(0) = 1$ を満たす微分方程式 $y' - y = e^{2x}$ の解を求め, この解のグラフを描け.

(長崎大 2005) (m20055012)

0.369 次の行列 $\boldsymbol{A}$ について以下の問に答えよ.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ.

(2) 固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) 大きさを 1 に規格化した固有ベクトルを列ベクトルとして並べてできる行列 $\boldsymbol{P}$ の逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ を求めよ.

(4) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ を計算せよ.

(長崎大 2005) (m20055013)

0.370 以下の問に答えよ.

(1) (x,y,z) 空間内の 3 点を $A(x_1,y_1,z_1), B(x_2,y_2,z_2), C(x_3,y_3,z_3)$ とするとき, ベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ をこれらの座標で示せ.

(2) $f(r)=\dfrac{1}{r}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とするとき, $f(r)$ の傾き $\nabla f(r)$ およびその発散 $\nabla\cdot\Big[\nabla f(r)\Big]=\nabla^2 f(r)$ を求めよ. 但し, $r\neq 0$ とする.

(長崎大 2005) (m20055014)

0.371 次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

(長崎大 2005) (m20055015)

0.372 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$$

(長崎大 2005) (m20055016)

0.373 ベクトル $\vec{A}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ と $\vec{B}=4\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ がある. ここで $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルである.

(1) 内積 $\vec{A}\cdot\vec{B}$ を求めよ.

(2) 外積 $\vec{A}\times\vec{B}$ を求めよ.

(長崎大 2005) (m20055017)

0.374 次の式 Ψ についてその偏導関数 $\partial\Psi/\partial r$ および $\partial\Psi/\partial\theta$ を計算しなさい.

$$\Psi=\cos\theta\exp(-r)$$

(長崎大 2005) (m20055018)

0.375 次の式について偏微分 $\partial S/\partial a$ と $\partial S/\partial b$ を求めよ.

$$S=\sum_{i=1}^{n}\Big(y_i-a-bx_i\Big)^2$$

(長崎大 2005) (m20055019)

0.376 ある県の交通安全週間 7 日間の交通死亡数は以下の表の通りであった. 平均死亡者数とその標準偏差を求めよ.

	1 日目	2 日目	3 日目	4 日目	5 日目	6 日目	7 日目
死亡者数	0 人	1 人	3 人	6 人	1 人	1 人	3 人

(長崎大 2005) (m20055020)

0.377 次の行列の逆行列を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(長崎大 2005) (m20055021)

0.378 次の関数を x について（不定）積分せよ.

$$\sin x + x^2$$

(長崎大 2005) (m20055022)

0.379 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

(長崎大 2005) (m20055023)

0.380 次の一階常微分方程式の解の公式を求めなさい.

(1) $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ (2) $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

(大分大 2005) (m20055101)

0.381 次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x)dx$$

(大分大 2005) (m20055102)

0.382 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{x+6}{x^2-3x-4}dx$$

(大分大 2005) (m20055103)

0.383 次の二重積分を求めなさい.

$$\iint_D xydxdy \qquad \text{ただし,} \quad D : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 4$$

(大分大 2005) (m20055104)

0.384 次の各問に答えよ.

(1) 平面上の点 $P(2,3)$ および点 $Q(1,4)$ を点 $P'(8,3)$ および点 $Q'(9,4)$ にそれぞれ移す 1 次変換を表す行列 A を求めよ.

(2) (1) で求めた行列 A の固有値と固有ベクトルをそれぞれ求めよ.

(宮崎大 2005) (m20055301)

0.385 2 変数関数 $f(x,y) = x^2 + 2\alpha xy + y^2$ について, 次の各問に答えよ. ただし, α は $\alpha^2 \neq 1$ を満たす定数とする.

(1) $f(x,y)$ の 2 階までの偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ を全て求めよ.

(2) $f(x,y)$ に極値があれば, 全て求めよ.

(宮崎大 2005)　　(m20055302)

0.386 変数 x , y , z から, 変数 u , v , w への変数変換を

$$u = x\cos z - y\sin z\ , \qquad v = x\sin z + y\cos z\ , \qquad w = z$$

と定めたとき, 以下の各問に答えよ.

(1) 次の恒等式が成立することを示せ.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 1$$

(2) 関数 $f = e^{-\sqrt{u^2+v^2}}\cos w$ に対して, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ を x , y , z の関数として求めよ.

(宮崎大 2005)　　(m20055303)

0.387 以下の各問に答えよ.

(1) 平面内の集合 D を

$$D = \left\{(x, y)\ \middle|\ 1 \leq x \leq e\,,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}$$

と定義する. 集合 D を xy 座標平面上に図示せよ. ただし, e は自然対数の底である.

(2) (1) の集合 D 上で次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D xy dx dy$$

(宮崎大 2005)　　(m20055304)

0.388 次の連立微分方程式は, 騎馬数 100 騎の X チームと騎馬数 60 騎の Y チームが, 騎馬戦を行ったときの双方の騎馬数の変化を,「自軍の騎馬数の減少速度はその時点での敵の騎馬数に比例し, その比例定数は 1/10 である」との仮定のもとでモデル化したものである.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{10}y \quad , \qquad x(0) = 100\ , \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{10}x \quad , \qquad y(0) = 60\ , \end{cases}$$

ここで, $x = x(t)$, および $y = y(t)$ は, それぞれ X チーム, および Y チームの時刻 $t \geq 0$ における騎馬数を表す. 以下の問に答えよ.

(1) 上の連立微分方程式を解け.

(2) Y チームが全滅したときに生き残っている X チームの騎馬数を求めよ.

(宮崎大 2005)　　(m20055305)

0.389 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int (ax+b)^n dx \quad (n \neq -1)$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} \quad (a \neq b)$

(3) $\displaystyle\int \sin^2 dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2}$

(鹿児島大 2005)　　(m20055401)

0.390 微分方程式に関する以下の問に答えよ.

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(a) $ydy = 3(x^2y^2 + xy^2)dx$

(b) $ye^{y-x}dy = dx$

(2) 次の微分方程式が, 右に示す解をもつことを示せ. ただし, a, b は任意の定数とする.

$$y'' + 4y' + 8y = 0 \qquad : \quad y = ae^{-2x}\cos 2x + be^{-2x}\sin 2x$$

(鹿児島大 2005)　　(m20055402)

0.391 以下の問いに答えよ.

(1) 空間内の一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ を通り, 方向を示す単位ベクトル（方向余弦）が (λ, μ, ν) である直線の方程式は, 次式 $(*)$ で与えられることを示し, パラメーター s は点 P_0 から点 (x, y, z) までの有向距離を表すことを示せ.

$$\frac{x - x_0}{\lambda} = \frac{y - y_0}{\mu} = \frac{z - z_0}{\nu} = s \qquad (*)$$

(2) 空間内の異なる二点 (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) を通る直線の方程式は, 次式で与えられることを示せ.

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

(3) 空間内の一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ から直線 $(*)$ への垂直距離 h は, 次式で与えられることを示せ.

$$h^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 - \{\lambda(x_1 - x_0) + \mu(y_1 - y_0) + \nu(z_1 - z_0)\}^2$$

(鹿児島大 2005)　　(m20055403)

0.392 以下の連立斉一次方程式が, $(0, 0, 0)$ と異なる解をもつように定数 a を定めて, この方程式を解け.

$$ax + 2y + 3z = 0\,, \quad 4x - 3y + 2z = 0\,, \quad 5x + 7y - 4z = 0$$

(鹿児島大 2005)　　(m20055404)

0.393 次の微分, 積分を求めなさい.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\log x}{\sqrt{x^2 + 2}}\right)$

(2) $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\sin^3 x\right)$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x^4 - 2\sin x\right)dx$

(4) $\displaystyle\int xe^{-x}dx$

(鹿児島大 2005)　　(m20055405)

0.394 曲線 $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$ と直線 $g(x) = -x + c$ (c は定数) が第 1 象限で接しているとき定数 c の値を求め, さらに $f(x)$, $g(x)$ と縦軸 y で囲まれる面積 S_1 および $f(x)$, $g(x)$ と横軸 x で囲まれる面積 S_2 を求めなさい.

(鹿児島大 2005)　　(m20055406)

0.395 次の微分方程式の解を求めなさい. ここで, 初期条件は, $x = 0$ のとき $y = 0,\ y' = 0$ を満たすものとする.

$$y'' - 2y' - 3y = 4$$

(鹿児島大 2005) (m20055407)

0.396 (1) ベクトル $\boldsymbol{a}\ (3, -1, -2)$ とベクトル $\boldsymbol{b}\ (2, 4, 1)$ があるとき, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は直交しているかどうかを説明しなさい. また, $\boldsymbol{a} \times\ \boldsymbol{b}$ を求めなさい.

(2) 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, 行列 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ があるとき, $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2$ と $\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA}$ を求めなさい.

(鹿児島大 2005) (m20055408)

0.397 次の x に関する関数において, 1 階の導関数を求めなさい.

(1) $\dfrac{1}{1-x}$

(2) $\sin 2x + \cos x$

(3) $e^x \log x$

(鹿児島大 2005) (m20055409)

0.398 次の定積分を実施しなさい.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left(4x^3 - 6x^2 + 1\right) dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x+1}\, dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x\ dx$

(鹿児島大 2005) (m20055410)

0.399 平面内にある直交直線座標系で規定したベクトルの変換行列 $\boldsymbol{A}$ において, 次の問に答えなさい.

(1) 原点の周りに反時計回りに $\dfrac{\pi}{6}$ ラジアン回転させるベクトルの変換行列 $\boldsymbol{A}$（直交行列）は次のように与えられる.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

行列 $\boldsymbol{A}$ を用いてベクトル $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を回転変換させるには, $\boldsymbol{Ar}$ の演算をすればよい. 回転変換によって得られるベクトルを求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ をベクトル $\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$ に変換する 2 行 2 列の変換行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ. ただし, a, b は実数とする.

(鹿児島大 2005) (m20055411)

0.400 次の級数について, 収束・発散を調べよ. 収束する場合, その値を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$

(鹿児島大 2005)　　(m20055412)

0.401　$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\dfrac{2}{\pi} < \dfrac{\sin x}{x}$ であることを証明せよ．

(鹿児島大 2005)　　(m20055413)

0.402　頂点の座標が, A 点 $(1, 0, 1)$, B 点 $(2, 0, 1)$, C 点 $(3, 3, 5)$ で与えられる $\triangle ABC$ の面積と法線方向の単位ベクトルを求めなさい.

(鹿児島大 2005)　　(m20055414)

0.403　行列 $K = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ について.

固有値方程式 : $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ を解いて.

行列 K の固有値 λ_1, λ_2 と対応する規格化された固有ベクトル $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ を求めなさい.

$*$　規格化とは, ベクトルの大きさを 1 にとることである.

(鹿児島大 2005)　　(m20055415)

0.404　$y = \sin x \ \ (0 \leq x \leq \pi)$ を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ.

(室蘭工業大 2005)　　(m20055501)

0.405　微分方程式　$(xy^2 + 2y^2)dx + (3x^2 + x^2 y)dy = 0$　の一般解を求めよ.

(室蘭工業大 2005)　　(m20055502)

0.406　次の関数を微分せよ.

$y = \sin^4 3x$

(室蘭工業大 2005)　　(m20055503)

0.407　次の不定積分を求めよ.

$\displaystyle\int x \sin x dx$

(室蘭工業大 2005)　　(m20055504)

0.408　$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 9 & 14 \\ 8 & 16 & 33 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 92 \\ 209 \\ 449 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,

$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$,　$U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　とする.

方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を次の手順に従って解け.

(1)　$A = LU$ を満たすような行列 L および U を求めよ.

(2)　$L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ を満たすような $\boldsymbol{y}$ を求めよ.

(3)　$U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ を満たすような $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(室蘭工業大 2005)　　(m20055505)

0.409　次式で定義される双曲線関数 :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

について, 以下を示しなさい.

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(2) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

(室蘭工業大 2005)　　(m20055506)

0.410 以下の微分方程式：

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{5}{2}\frac{df(x)}{dx} - \frac{3}{2} f(x) = 0$$

を, 初期条件：

$$f(0) = 1\,, \qquad f'(0) = 1$$

のもとで解きなさい.

(室蘭工業大 2005)　　(m20055507)

0.411 ベクトル場　$\boldsymbol{A} = x^2 y^3 \boldsymbol{i} + 2xy^2 z^4 \boldsymbol{j} - y^3 z^5 \boldsymbol{k}$　について,

$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\ \boldsymbol{A})$

を求めなさい. ここで, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は直交座標系の x 軸, y 軸, z 軸上で正の向きを持つ単位ベクトルである.

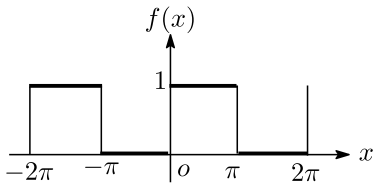
(室蘭工業大 2005)　　(m20055508)

0.412 以下の不定積分を求めなさい.

(1) $I = \displaystyle\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$　　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x} dx$

(室蘭工業大 2005)　　(m20055509)

0.413 右図のような周期が 2π の関数 $f(x)$ を
フーリエ級数展開しなさい.



(室蘭工業大 2005)　　(m20055510)

0.414 行列 E および J を以下のように定義する.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき, 行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$ および $B = \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix}$ として, 以下が成り立つことを示しなさい.

(1) $J^2 = -E$

(2) $AB = (a_1 b_1 - a_2 b_2)E + (a_1 b_2 + a_2 b_1)J$

(3) $A^t A = \left({a_1}^2 + {a_2}^2\right)E$　（ただし，A^t　は，A の転置行列を表す）

(室蘭工業大 2005)　　(m20055511)

0.415 関数 $y = \log(x^2+3)$ について次の問いに答えよ. ただし，log は e を底とする自然対数である.

(1) 関数 y の導関数を求めよ.

(2) 関数 y の第 2 次導関数を求めよ.

(室蘭工業大 2005)　　(m20055512)

0.416 $x>0$ で α が実数のとき, 公式 $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ を証明せよ.

(室蘭工業大 2005)　　(m20055513)

0.417 次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2e^x + \cos x\right) dx$$

(室蘭工業大 2005)　　(m20055514)

0.418 行列 $C = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 10 & a \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) C が正則であるための条件を求めよ.

(2) C が正則のとき C の逆行列を求めよ.

(室蘭工業大 2005)　　(m20055515)

0.419 $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ のとき AB, BA を求めよ.

(室蘭工業大 2005)　　(m20055516)

0.420 次の各問に答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x \log x$ を求めよ.

(2) $f(x) = \sin^{-1} \sqrt{1-x^2}$ を微分せよ.

(3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$ を求めよ.

(岡山県立大 2005)　　(m20055601)

0.421 2 次元ベクトル空間 R^2 上の線形変換 f は, ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ に移し, ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ をベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$ に移すとする. ただし, t は定数である. このとき, f を表す行列を求めよ. また, その行列が逆行列をもたないような t の値を求めよ.

(岡山県立大 2005)　　(m20055602)

0.422 関係式 $x^3 - 3xy + y^3 + 2 = 0$ で定まる x の関数 y について, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ.

(岡山県立大 2005)　　(m20055603)

0.423 球 $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 4$ と円柱 $x^2 + y^2 \leqq 1$ の共通部分の体積を求めよ.

(岡山県立大 2005)　　(m20055604)

0.424 以下の設問に答えよ. なお, 解答には導出過程を含むこと.

領域 $D : |x-2y| \leq 1$, $|x+3y| \leq 1$ のとき, 次の手順にしたがって, $\displaystyle\iint_D (x+y)^2 dxdy$ を求めよ.

(1) $x - 2y = u$, $x + 3y = v$ とし, x, y を, u と v を用いて表せ.

(2) $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\iint_D f(x,y) dxdy = \iint_E f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) |J| dudv$ の関係を用いて, $\displaystyle\iint_D (x+y)^2 dxdy$ を求めよ.

(香川大 2005)　　(m20055701)

0.425 行列 A について, 以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) $|A|$ の値を求めよ.

(2) A の逆行列を求めよ.

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(香川大 2005)　　(m20055702)

0.426 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) 行列式 $|A|$ を第 1 列について余因数展開して, 2 行 2 列の行列式にして計算せよ.

(2) 行列 A の逆行列を求めよ.

(3) 行列 A の固有値 λ_i とその固有ベクトル x_i $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ.

(4) 適当な行列 P と相似変換 $(P^{-1}AP)$ を利用して, A を対角化せよ.

(島根大 2005)　　(m20055801)

0.427 非負の整数 x , y に対して関数 f を次のように定義する.

$$\begin{cases} f(0, y) = y + 1 \\ f(x + 1, 0) = f(x, 1) \\ f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y)) \end{cases}$$

(1) $f(1, 3)$ の値を計算せよ. ただし, その計算過程も示せ.

(2) $f(0, y) = y + 1$ の例のように, y に関する多項式として $f(1, y)$ を表現せよ. そして, その正しさを帰納法により示せ.

(3) $f(x, y) \geq x + y + 1$ であることを示せ.

(島根大 2005)　　(m20055802)

0.428 行列 $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$ の階数が 1 となる (a, b, c) の組を, すべて求めよ.

(島根大 2005)　　(m20055803)

0.429 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & b & c \\ a & b & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}$$

(島根大 2005)　　(m20055804)

0.430 $\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ で $x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0$ を満たすもの全体の集合 W は $\boldsymbol{R}^n$ の線形部分空間となることを示し, その基底を一組求めよ.

(島根大 2005)　　(m20055805)

0.431 逆正弦関数 $\sin^{-1} x$ と逆余弦関数 $\cos^{-1} x$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 次の値を求めよ.

(i) $\sin^{-1}(-1)$, (ii) $\cos^{-1} 0$, (iii) $\sin^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (iv) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

(2) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ.

(3) $y = \sin^{-1} x$ の微分と不定積分を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}$ の値を求めよ.

(島根大 2005) (m20055806)

0.432 逆正弦関数 $\sin^{-1} x$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^{-1}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ を求めよ.

(2) $z = \sin^{-1}(xy)$, $x = \sin(u+v)$, $y = \sin(u-v)$ とするとき, 合成関数の偏微分 $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を変数 u と v を用いて表せ.

(島根大 2005) (m20055807)

0.433 関数

$$f(x) = a^2x^2 - b(x+1) + \sin ax + \cos ax$$

について, 以下の設問に答えよ. ただし, a, b は実数である.

(1) 第 1 次導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を導け.

(2) 全ての実数 x に対し, $f''(x) > 0$ であることを示せ.

(3) 設問 (2) の結果から, $f'(x)$ は増加関数であることがわかる. このとき, 領域 $x > 0$ において, $f'(x) > 0$ が成立するためには a と b の間にどのような関係があればよいか. 関係式を導け.

(4) 設問 (3) の条件のもとで, 領域 $x > 0$ において $f(x) > 0$ が成立するためには, さらにどのような条件が必要か.

(島根大 2005) (m20055808)

0.434 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ について, 以下の設問に答えよ.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルの第 1 成分の大きさが 1 となるように定めよ.

(2) 設問 (1) で求めた固有ベクトルと, それらを行列 $\boldsymbol{A}$ によって 1 次変換したベクトルを, 直交座標系 $O - xy$ 上に原点 O を始点として描け.

(3) ある四辺形を行列 $\boldsymbol{A}$ によって 1 次変換した像が, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1. -1)$ を頂点とする正方形になった. 変換前の四辺形のすべての頂点を求め, その四辺形を直交座標系 $O - xy$ 上に描け.

(4) 設問 (3) で求めた四辺形の面積を求めよ.

(島根大 2005) (m20055809)

0.435 次の問に答えよ.

(1) 次の連立 1 次方程式が解をもつような a, b の値を求めよ. また, その時の解も求めよ.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 1 \\ -4x_1 + 2x_2 - 10x_3 + 12x_4 = a - 7 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = b + 2 \end{cases}$$

(2) 次の連立 1 次方程式が自明でない解をもつような a の値を求めよ.

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + (a+2)x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + ax_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 2ax_4 = 0 \end{cases}$$

(3) 次の解空間の次元と 1 組の基を求めよ.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 0 \end{array} \right\}$$

(島根大 2005) (m20055810)

0.436 関数 $f(x) = (ax+b)e^{cx} \quad (c \neq 0)$ を考える. 以下の問に答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$, 2 階導関数 $f''(x)$, さらに n 階導関数 $f^{(n)}(x) \ (n = 1, 2, \cdots)$ を求めよ.

(3) $0 < c < 1$ のとき , $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nc^n = 0$ を証明せよ.

$\left(\text{ヒント : } c = \dfrac{1}{1+\alpha} \quad (\alpha > 0) \quad \text{とおいて} \ (1+\alpha)^n \ \text{の 2 項展開を考えよ.} \right)$

(4) $0 < c < 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} \left(f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(n)}(x) \right)$$

を求めよ.

(島根大 2005) (m20055811)

0.437 次の問に答えよ.

(1) 次の関数の 2 次偏導関数を求めよ.

(a) $z = 2x^3 - 3x^2y + 4xy^2$

(b) $z = \sin(2x + 3y)$

(2) $z = f(x, y)$, $y = g(x)$ のとき, 次の式を証明せよ.

$$\frac{dz}{dx} = f_x + f_y \frac{dy}{dx}$$

(島根大 2005) (m20055812)

0.438 次の問に答えよ.

(1) 原点 O を中心とし, 半径 a の円の上半分を D とする. 次の 2 重積分を求めよ $(a > 0)$.

$$I = \iint_D y \, dxdy$$

(2) 平面 $z = y$ と xy 平面の間で, xy 平面上の半円 $x^2 + y^2 \leq a^2$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ の上にある立体の体積 V を求めよ $(a > 0)$.

(島根大 2005)　　(m20055813)

0.439 以下の設問に答えよ.

(1) 次の定積分の値を求めよ.

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x dx$　　(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$

(2) $n \geqq 3$ の整数 n に対し, $\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$ の関係を用いて, 部分積分を行うことにより, 次の等式が成立することを示せ.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = (n-1) \int_0^{\pi/2} (\sin^{n-2} x - \sin^n x) dx$$

(3) 設問 (1) および (2) の結果を用いて, 次の定積分の値を求めよ.

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$　　(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$

(島根大 2005)　　(m20055814)

0.440 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ について, 以下の設問に答えよ.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1 , λ_2 を求めよ.

(2) 固有値 λ_1 , λ_2 それぞれに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ を, 長さ 1 となるように求めよ.

(3) 設問 (2) で求めた $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ を列ベクトルとみなして構成された行列 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1 \ \ \boldsymbol{p}_2)$ と, その逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ を求めよ.

(4) $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}^{-1}$ を用いて $\boldsymbol{A}$ を対角行列に変換せよ.

(島根大 2005)　　(m20055815)

0.441 (1) 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式の値を求めよ.

(2) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ が与えられたとき，$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ を満たす行列 $\boldsymbol{B}$ を求めよ.
ただし，$\boldsymbol{I}$ は単位行列である.

(首都大 2005)　　(m20055901)

0.442 $\boldsymbol{V}$ が 2×2 行列のベクトル空間であるとき, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \boldsymbol{V}$ が線形従属であるか, または線形独立であるかを判定せよ（その理由も記述せよ）.

(首都大 2005)　　(m20055902)

0.443 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ が与えられているとき，次の問に答えよ.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を全て求めよ.

(2) その全ての固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) 二次形式 $\Phi = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ の標準形が $\Phi = a{\xi_1}^2 + b{\xi_2}^2$ で与えられるとき，係数比 $\dfrac{b}{a}$ を求めよ．
ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$，$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^T$ は直交行列 $\boldsymbol{U}$ を用いて $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\xi}$ で表されるベクトルとする．

(首都大 2005) (m20055903)

0.444 次の微分方程式は完全形であることを示し, さらに一般解を求めよ，ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．

$$(2x + y - 4)y' = x - 2y + 3$$

(首都大 2005) (m20055904)

0.445 次の微分方程式について特性方程式を示し，さらに一般解を求めよ，ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．

$$y'' - y' - 2y = 2x^2 + 2x$$

(首都大 2005) (m20055905)

0.446 次の関数の不定積分を求めよ．

$$\frac{1}{\sin^2 x}$$

(首都大 2005) (m20055906)

0.447 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$

(首都大 2005) (m20055907)

0.448 $y = \sinh x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ の逆関数 $y = \sinh^{-1} x$ について，次の式を示せ．

$$y = \sinh^{-1} x = \log\bigl(x + \sqrt{x^2 + 1}\bigr), \qquad y' = \frac{d}{dx}\sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

(滋賀県立大 2005) (m20056001)

0.449 (1) 未知関数 $y = f(x)$ に対する 2 階同次線形常微分方程式

$$y'' - 2\sqrt{3}y' + 3y = 0$$

の一般解を求めよ．

(2) 2 階非同次線形常微分方程式

$$y'' - 2\sqrt{3}y' + 3y = \sin x$$

の特殊解を求めよ．その結果を使って，一般解を書き下せ．

(滋賀県立大 2005) (m20056002)

0.450 次の行列が逆行列をもつかどうか判定し，もつ場合はそれを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(滋賀県立大 2005) (m20056003)

0.451 領域 $D: x^2+y^2<4$ における関数 $z=x^2+2xy+2y^2+2y$ の極値を求めよ．

(滋賀県立大 2005)　　(m20056004)

0.452 (1) 行列 A を $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．A の階数（ランク）を求めよ．

(2) 行列 B を $B=\begin{pmatrix} \alpha & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ とする．

(a) $\det B=0$ となるように α を求めよ．

(b) この α に対する B の固有値および対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルの第 1 成分が 1 となるようにせよ．

(宇都宮大 2005)　　(m20056101)

0.453 関数 $F_n(x)=x^ne^{-x}$ について，以下の問に答えよ．ただし，$n \geq 2$ とする．

(1) $x \geq 0$ において $F_n(x)$ が最大・最小となる x の値をそれぞれ求めよ．

(2) $x>0$ において $F_n(x)$ の変曲点となる x の値を求めよ．

(3) $x \geq 0$ における $y=F_n(x)$ のグラフの概形を描け．

(4) $n=3$ の場合について，

$$I_n=\int_0^\infty F_n(x)dx$$

の値を求めよ．

(宇都宮大 2005)　　(m20056102)

0.454 (1) 次の関数を微分せよ．ただし $a>0$ とする．

$$y=\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\ \right|$$

(2) m と n を正の整数とするとき，次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\ dx$$

(宇都宮大 2005)　　(m20056103)

0.455 ある製品において，任意に 1 回抜き出したとき，それが良品である確率が $\dfrac{1}{2}$ とする．このとき，n 回抜き出した結果，良品と不良品が交互に出る確率を求めよ．

(工学院大 2005)　　(m20056201)

0.456 $y=\sin^2\theta+\sin 2\theta+3\cos^2\theta$ $(0^\circ \leqq \ \ \theta<90^\circ)$ の最大値とそのときの θ の値を求めよ．

(工学院大 2005)　　(m20056202)

0.457 $a<1$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n(1-a)a^n=\frac{a}{1-a}$ となることを証明せよ．

(工学院大 2005)　　(m20056203)

0.458 $\displaystyle\int_0^1\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ を解け．

(工学院大 2005)　　(m20056204)

0.459 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2) 求められた逆行列 A^{-1} を用いて，次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

(工学院大 2005) (m20056205)

0.460 ベクトル $\vec{a} = (1, 2, 3),\ \vec{b} = (2, -1, 1),\ \vec{c} = (4, -2, 1)$ において次の計算を行え.

(1) $\vec{a} + 2\vec{b}$

(2) $|\vec{a} + 2\vec{b}|$

(3) $4\vec{a} - 3\vec{b} - 2\vec{c}$

(工学院大 2005) (m20056206)

0.461 行列 $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ において次の計算を行え.

(1) AB

(2) BA

(3) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(工学院大 2005) (m20056207)

0.462 $A = 3 + 3i,\ B = 2 - 2i$ (i は虚数単位) のとき $\dfrac{A}{B}$ を計算せよ．ただし，答えは分母を有理化した値を記すこと.

(工学院大 2005) (m20056208)

0.463 $x = \sqrt{t+1},\ y = t^2 + 2t + 3$ で表される関数において $\dfrac{dx}{dy}$ を t の式で表せ.

(工学院大 2005) (m20056209)

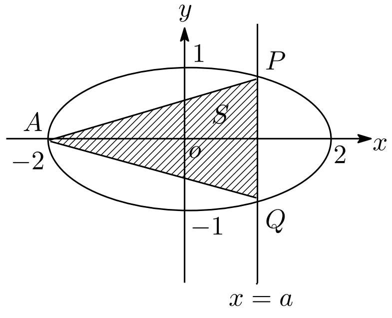
0.464 次の不定積分を求めよ.

(1) $y = \displaystyle\int \frac{e^x}{e^x + 2}\, dx$

(2) $y = \displaystyle\int \frac{2x^2 + 3x + 4}{x}\, dx$

(工学院大 2005) (m20056210)

0.465 図のように楕円 $\dfrac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$ と y 軸に平行な直線 $x = a$ が 2 点 P, Q で交わるとき，点 $A(-2, 0)$ を頂点とする三角形 APQ の面積 S が最大となるときの面積 S_{max} とそのときの a の値を求めよ.



(工学院大 2005) (m20056211)