**0.1** 2 階微分方程式 $2y\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 1$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $p = \dfrac{dy}{dx}$ とおくことにより，$p$ と $y$ についての 1 階微分方程式に変形しなさい.

(2) (1) で得られた 1 階微分方程式を利用して，一般解を求めなさい.

(北海道大 2006)　(m20060101)

**0.2** 次の 3 次実正方行列 $A$ について，以下の問いに答えなさい.　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(1) $A$ の固有値を求めなさい.

(2) $A$ のそれぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めなさい.

(3) $A$ を対角化する行列 $P$ を求め，$A$ の対角化 $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(北海道大 2006)　(m20060102)

**0.3** 図 1 に示す周期が $2\pi$ の関数 $y(x) = \begin{cases} -x & (-\pi < x \leq 0) \\ x & (0 < x \leq \pi) \end{cases}$ のフーリエ級数を求めなさい.

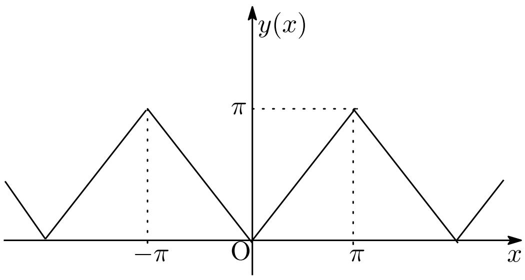



図 1

(北海道大 2006)　(m20060103)

**0.4** 関数 $f$ が $(x, y, z)$ のスカラー関数であるとき，$\mathrm{grad}(f)$ という演算を以下のように定義します.

$$\mathrm{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}$$

ここで，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ $x, y, z$ 方向の単位ベクトルです．以下の問に答えなさい.

(1) $f, h$ が $(x, y, z)$ のスカラー関数であるとき，$h$ が 0 ではない領域で，
$\mathrm{grad}\left(\dfrac{f}{h}\right) = \dfrac{h \cdot \mathrm{grad}(f) - f \cdot \mathrm{grad}(h)}{h^2}$ であることを証明しなさい.

(2) (1) の結果を用いて，点 $(1, 1, 1)$ における $\mathrm{grad}\left(\dfrac{-x^2 + y^2 + z - 2}{x + y^2 - z + 1}\right)$ の値を計算しなさい.

(北海道大 2006)　(m20060104)

**0.5** 次の関数を微分せよ.

(1) $y = x^3 \sin x$　　(2) $y = \log(x^2 + 1)$

(北見工業大 2006)　(m20060201)

**0.6** 次の関数の偏導関数 $z_x,\ z_y$ を求めよ.

(1)　$z = x^3y + y^2$　　　　(2)　$z = \cos(x - 2y)$

(北見工業大 2006)　　(m20060202)

**0.7**　$y = xe^{-x}$ の極値を求めよ.

(北見工業大 2006)　　(m20060203)

**0.8**　次の積分を求めよ.

(1)　$\displaystyle\int_0^1 (1+x)dx$　　　　(2)　$\displaystyle\int \cos^3 x dx$　（ヒント：$t = \sin x$ という置換積分）

(北見工業大 2006)　　(m20060204)

**0.9**　次の行列式の値を求めよ.　$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

(北見工業大 2006)　　(m20060205)

**0.10**　曲線 $C : y = 2\sqrt{x+4}$ , 直線 $l : y = x + a$ , 及び 無理方程式 $2\sqrt{x+4} = x + a$ に関し, 次の問に答えなさい. ただし, $a$ は実定数です.

(1)　$a = 2$ として, 曲線 $C$ と直線 $l$ のおよそのグラフを同じ図の中に描きなさい.

(2)　上の無理方程式が 2 重解をもつとき, $a$ のとる値を求めなさい.

(3)　上の無理方程式が相異なる 2 重解をもつとき, $a$ のとる範囲を求めなさい.

(4)　上の無理方程式が 1 つの実数解しかもたないとき, $a$ のとる範囲を求めなさい.

(5)　$a = 0$ のとき, 上の無理方程式の解を求めなさい.

(岩手大 2006)　　(m20060301)

**0.11**　3 つの行列　$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ ,　$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,　$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

に関し, 次の問に答えよ.

(1)　行列の和 $A + B$ と差 $A - B$ および積 $AB$ を求めなさい.

(2)　行列式 $|B|$ および $|C|$ の値を求めなさい.　　　(3) 行列 $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めなさい.

(岩手大 2006)　　(m20060302)

**0.12**　微分方程式　$(2x - y + 1)dx - (x - 2y + 5)dy = 0$　に関し, 次の問に答えなさい.

(1)　2 直線 $2x - y + 1 = 0$ , $x - 2y + 5 = 0$ の交点の座標を求めなさい.

(2)　(1) で求めた交点を原点とする座標系 $(X, Y)$ を用いて, 上の微分方程式を表しなさい.

(3)　(2) で求めた微分方程式を解きなさい.

(4)　(3) で求めた解を, $(x, y)$ で表しなさい.

(岩手大 2006)　　(m20060303)

**0.13**　重積分　$\displaystyle\int_0^1 \int_0^x e^{x-y} dydx$　に関し, 次の問に答えなさい.

(1)　この重積分の積分範囲を図示しなさい.

(2) この重積分の値を求めなさい.

(3) この重積分の積分順序を変更した式を示しなさい.

(4) 積分順序を変更した式から, 重積分の値を求める計算をしなさい.

(岩手大 2006) (m20060304)

**0.14** 次の式 $(A+B)^3$ , $(A+I)^2$ を展開せよ．ただし，$A, B$ は $n$ 次正方行列，$I$ は $n$ 次単位行列である．

(秋田大 2006) (m20060401)

**0.15** 原点と点 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ を頂点とする空間 $\boldsymbol{R}^3$ 内の立方体を，行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ で変換する．変換後の体積を求めよ．また，$A$ は逆行列をもつか，簡潔な理由を添えて答えよ．

(秋田大 2006) (m20060402)

**0.16** $A$ は 2 次正方行列，$a, b$ は $A$ の固有ベクトルで，固有値はそれぞれ $2$, $\dfrac{1}{2}$ であるとする．
$x_1 = a+b,\ x_2 = Ax_1,\ x_3 = Ax_2,\ \cdots,\ x_n = Ax_{n-1}$ とする．$x_n$ を $a, b$ を用いた式で表せ．

(秋田大 2006) (m20060403)

**0.17** 関数 $f(x,y) = e^{x+2y}$ の 2 次までの偏微分を全て求めよ．さらに原点でこれを Taylor（テイラー）展開したときに，$f(x,y) = (2\text{ 次式}) + (\text{剰余項})$ となる 2 次式を求めよ．剰余項は求めなくてよい．

(秋田大 2006) (m20060404)

**0.18** 次の積分を計算せよ． $\displaystyle\int (\cos x)^r \sin x\, dx,$ $r$ は実数

(秋田大 2006) (m20060405)

**0.19** 円柱面 $x^2+y^2=ax$ と球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ で囲まれ, 不等式 $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ を満たす領域を $R$ として, 次の問に答えよ.

(1) 領域 $R$ の概形を描け.

(2) 変数変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のヤコビアン $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ.

(3) 領域 $R$ の体積 $V$ を求めよ.

(東北大 2006) (m20060501)

**0.20** $x$ を実数とし, 関数 $f(x)$ を $f(x) = x - \sin x$ と定義する．このとき, 以下の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(2) $f'(x)=0$ を満たすすべての実数 $x$ および $f''(x)=0$ を満たすすべての実数 $x$ をそれぞれ求めよ.

(3) 関数 $y=f(x)$ の区間 $-2\pi \leqq x \leqq 2\pi$ における増減, 極値, グラフの凹凸, 変曲点を調べ, 増減表を書き, グラフの概形を描け.

(4) 任意の実数 $x$ について不等式 $|x| \geqq \sin|x|$ が成り立つことを証明せよ.

(東北大 2006) (m20060502)

**0.21** 対称行列 $\boldsymbol{A}$ およびベクトル $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ で定義する.

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(3) $\boldsymbol{A}^n$ の逆行列を求めよ．ただし, $n$ は自然数とする．

(東北大 2006)　　(m20060503)

**0.22** (1) $a, b, c, p, q, r$ を実数とし,

$$D = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく．任意の自然数 $k$ に対し,

$$(D+N)^k = D^k + M, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表されることを示せ．ただし, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ は適当な実数である．

(2) ３次正方行列 $A$ がある自然数 $n$ に対して $A^n = O$ を満たすとき, $A^3 = O$ であることを示せ．ただし, $O$ は零行列である．

(東北大 2006)　　(m20060504)

**0.23** ４次元数ベクトル空間の部分空間 $V$ と $W$ を

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + 2x_2 + 4x_4 = 0\,,\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 0\}$$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2 + 5x_4 = 0\,,\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0\}$$

と定義する．以下の設問に答えよ．

(1) $V$ と $W$ の次元を求めよ．

(2) $V \cap W$ の次元を求めよ．

(3) $V + W = \{v + w \mid v \in V\,,\ w \in W\}$ の次元を求めよ．

(東北大 2006)　　(m20060505)

**0.24** $D = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 < 4\,,\ x > 0\,,\ y > 0\}$ とするとき, 重積分 $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ を計算せよ．

(東北大 2006)　　(m20060506)

**0.25** (1) 関数の積の微分に関するライプニッツの公式を述べよ（証明はしなくてよい）．

$\{f(x)g(x)\}^{(n)} =$

(2) $x > 0$ で定義された関数 $h(x) = x^4 \log x$ を考える．　$\displaystyle\lim_{x \to +0} h(x)$ を求めよ．

(3) $0 < m < 4$ であるような自然数 $m$ に対し, (2) で定義した $h(x)$ の $m$ 階導関数 $h^{(m)}(x)$ を求めよ．また, $\displaystyle\lim_{x \to +0} h^{(m)}(x)$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{x \to +0} h^{(4)}(x)$ は存在するか．

(東北大 2006)　　(m20060507)

**0.26** $f(x) = x^2\sqrt{a^2 - x^2}$, $g(x) = x^2 e^{-x}$ として下記の問いに答えよ．ただし，$a > 0$ で，$f(x)$ は区間 $-a \leqq x \leqq a$ で定義される関数である．

(1) $y = f(x)$ のグラフをかけ．　　(2) $y = g(x)$ のグラフをかけ．

(3) $\displaystyle\int_0^a f(x)dx$ を求め，結果を $a$ を用いて表せ．

(4) $\displaystyle\int_0^a f(x)dx = \int_0^\infty g(x)dx$ のとき，$a$ の値を求めよ．

(東京大 2006)　　(m20060701)

**0.27** $p, q$ を任意の実数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列　$A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$　について，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を満たす実数 $\lambda$ と非零ベクトル $\boldsymbol{x}$ の組をすべて求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を，次の漸化式で与える．$\begin{cases} a_{n+1} = (1-p)a_n + qb_n \\ b_{n+1} = pa_n + (1-q)b_n \end{cases}$

ただし，$0 < p < 1$，$0 < q < 1$ とし，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の初項を，それぞれ，$a_0, b_0$ とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を $p, q, a_0, b_0$ を用いて示せ．

(東京大 2006)　　(m20060702)

**0.28** 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = f(x) \tag{a}$$

ただし，　$x = 0$　のとき，　$y = 1$　かつ　$\dfrac{dy}{dx} = 0$　について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = 0$ のときの解を求めよ．

(2) $f(x) = \sin 2x$ のときの解を求めよ．ただし，(a) の特解が $y_p = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$ の形となることを利用してよい．$A, B$ は定数である．

(3) $f(x) = \displaystyle\sum_{N=1}^{100} \sin Nx$ のときの解を $y_s$ とする．$x$ が十分大きいとき，$\dfrac{y_s}{x}$ を $x$ の関数として表せ．

(東京大 2006)　　(m20060703)

**0.29** 複素数平面上で次の式を満たす点 $z = x + yi$ ($x, y$ は実数) の軌跡の名称と概略図を示せ．また，この軌跡の特徴を説明せよ．軌跡の特徴については，特記しない限り，例えば軌跡が円の場合には中心点と半径について説明する程度でよい．

(1) $\left| z - \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \right| = 2$　　(2) $\left| z - \sqrt{2}i \right| = \left| z - \sqrt{2} \right|$

(3) $\left| z - \sqrt{2}i \right| + \left| z - \sqrt{2} \right| = 4$　　(4) $\left| z - \sqrt{2}i \right| - \left| z - \sqrt{2} \right| = 1$

この問 (4) の軌跡の特徴の説明については，軌跡の名称を明記するだけでよい．

(東京大 2006)　　(m20060704)

**0.30** 1 回の試行において事象 $A$ の起こる確率を $p$ とする．この試行を独立に $n$ 回くり返すときに $A$ が起こる回数を $X$ とすると，$X$ は 0 から $n$ までの整数値をとる確率変数であり，この確率分布を二項分布 $B(n, p)$ とよぶ．

例えば，表の出る確率が 0.5 のコインを 3 回投げる場合，表の出る回数は 0 回，1 回，2 回，3 回のいずれかであり，この各回数の確率の分布が二項分布 $B(3\,,\,0.5)$ である．

(1) $A$ が $r$ 回起こる確率を $P(r)$ とする．$P(r)$ を $n, r, p$ を用いて表せ．

(2) 二項定理を用いて $\displaystyle\sum_{X=0}^{n} P(X) = 1$ を証明せよ．

(3) 横軸を $X$，縦軸を $P(X)$ として，二項分布 $B(3\,,\,0.5)$ および $B(8\,,\,0.5)$ のグラフを示せ．ただし，有効数字を二桁とする．

(4) 二項分布 $B(n,p)$ の平均 $\mu$ を $n,p$ を用いて表せ．またその導出過程を示せ．

(東京大 2006)　　(m20060705)

**0.31** $f(x,y)$ を $\boldsymbol{R}^2-\{0\}$ 上の $C^2-$ 級関数，　$x=r\cos\theta\,,\quad y=r\sin\theta$　を $(x,y)\in\boldsymbol{R}^2-\{0\}$ の極座標とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) 次の等式を示せ．　$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$

(2) $f(x,y)$ は $r=\sqrt{x^2+y^2}$ のみの関数で，$\theta$ にはよらないとする．さらに $f$ は条件
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0\,,$　および　$r=1$ のとき $f=0$，$r=2$ のとき $f=1$
を満たすとする．このような $f$ を求めよ．

(東京工業大 2006)　　(m20060801)

**0.32** 次を示せ．

(1) $\boldsymbol{R}$ 上の実数値連続関数 $f$ が周期 $p$ を持つ周期関数ならば次式が成り立つ．

$$\int_x^{x+p} f(t)dt=\int_0^p f(t)dt \quad (x\in\boldsymbol{R})\ .$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b|\sin nx|dx=\frac{2(b-a)}{\pi}\quad (b>a)\ .$

(東京工業大 2006)　　(m20060802)

**0.33** 行列 $A$ を $A=\begin{pmatrix}3&-7&-8\\2&0&-4\\0&-3&-1\end{pmatrix}$ と定める．$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 $P$ を求めよ．

(東京工業大 2006)　　(m20060803)

**0.34** 定数 $a,b,c$ に対し，行列 $B$ を　$B=\begin{pmatrix}2&-1&b\\a&2&-2\\4&-2&c\end{pmatrix}$　と定める．$B$ の階数を求めよ．

(東京工業大 2006)　　(m20060804)

**0.35** 点 $P(1,2,3)$ から平面 $\pi:x+2y+2z=2$ に下ろした垂線の足を $H$ とするとき，線分 $HP$ の長さを求めなさい．

(東京農工大 2006)　　(m20060901)

**0.36** 連立方程式 $\left\{\begin{array}{l}2x+3y+2z=0\\2x+2y+3z=0\\3x+2y+az=0\end{array}\right.$　が $x=y=z=0$ 以外の解をもつような $a$ を求めなさい．

(東京農工大 2006)　　(m20060902)

**0.37** 定積分 $\displaystyle\int_1^e x\log x\,dx$ の値を求めなさい．

(東京農工大 2006)　　(m20060903)

**0.38** $x=t-\sin t\ ,\ \ y=1-\cos t\ \ (0<t<2\pi)$ により定められる関数 $y=y(x)$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を $t$ を用いて表しなさい．

(東京農工大 2006)　　(m20060904)

**0.39** 関数 $z = x^3 - 3xy + y^3$ の表す曲面を $S$ とする．$S$ 上の点 $P(-2, 1, -1)$ における $S$ の接平面の方程式を求めなさい．

(東京農工大 2006)　　(m20060905)

**0.40** 累次積分 $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy$ の値を，積分の順序を変更して求めなさい．

(東京農工大 2006)　　(m20060906)

**0.41** 微分方程式 $y' = \dfrac{y}{x^2+1}$ の解 $y = y(x)$ で，初期条件 $y(1) = e^{\frac{\pi}{2}}$ を満たすものを求めなさい．

(東京農工大 2006)　　(m20060907)

**0.42** 図 1 に示すような関数 $f(x)$ が単調関数である場合，$x$ の区間 $[a, b]$ における最小値 $f(x_m)$ を与える $x_m$ を求めなさい．関数 $f(x)$ は，$a < x < x_m$ で単調減少し，$x_m < x < b$ では単調増加するので，$[a, b]$ 間に，$a < x_1 < x_2 < b$ なる $x_1, x_2$ をある方法で選び，$f(x_1)$ と $f(x_2)$ の値を比較する．次に同様な方法で $x_3$ を選び，$[x_1, b]$ 間を分割する．同様の手順で $[x_1, x_3]$ 間に $x_4$ を選んでいく．これを繰り返すことにより，区間を狭めて $x_m$ の範囲を絞り込む．

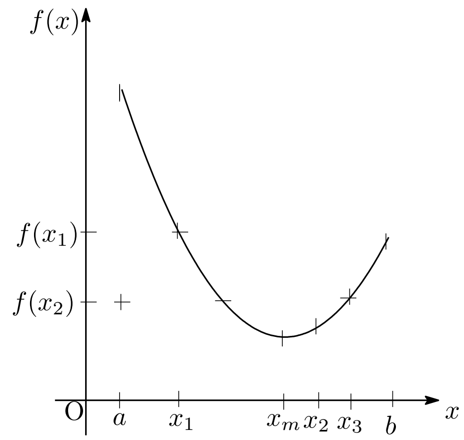



図 1．区間 $[a, b]$ 上で定義された関数 $f(x)$

(1) ある方法とは，図 2 に示すように，$[a, b]$ 間に $x_1, x_2$ を，$u : v = v : w$ になるように選ぶ方法である．このような線分の分割を黄金分割と呼ぶ．このときの $v/u$ の値を示せ．

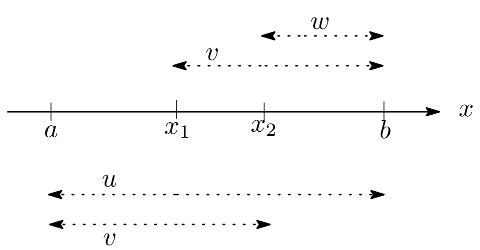



図 2．区間 $[a, b]$ の分割

関数 $f(x)$ が単調関数であることから，以下のようにして区間を狭めていく．まず，$f(x_1)$ と $f(x_2)$ を比較する．図 1 のように，$f(x_1) > f(x_2)$ なら $x_1 < x_m < b$ のはずであるから，$x_2 < x_3 < b$ を満たす $x_3$ を選び，$f(x_3)$ と $f(x_2)$ を比べる．このとき $f(x_2) < f(x_3)$ なら $x_1 < x_m < x_3$ であるはずであるので $x_1 < x_4 < x_2$ なる $x_4$ を，$f(x_2) > f(x_3)$ なら $x_3 < x_m < b$ であるはずであるので $x_3 < x_4 < b$ なる $x_4$ を選び，区間を狭める．区間が十分小さくなるまで狭めていくことで，最小値を与える $x_m$ が得られる．

(2) これを利用したプログラムを $C$ 言語で記述した．$\boxed{\text{2-1}}$〜$\boxed{\text{2-3}}$ に入るコードを示せ．ただし，$\boxed{1}$ には，問 (1) で求めた $v/u$ の値が入る．

```
double f(double x);/* f(x) の値を返す関数 */
double searchmin(double a,double b)    /* 関数 f(x) の区間 [a,b] での最小値をとる xm を返す関数 */
{       double x1, x2, fx1, fx2, t, s, upper, lower;
        double tolerance = 1.0e-5; /* 区間の最小幅 */
        upper=b; lower=a;
        t=[2-1]*(1-[1]);
        x1=[2-2]+t; x2=[2-3]-t; fx1=f(x1); fx2=f(x2);
        while(1){
                if(fx1>fx2){ /* f(x1)>f(x2) の場合 */
                        lower=x1; x1=x2; fx1=fx2; t=[2-1]*(1-[1]);
                        x2=[2-2]-t;
                        if(x2-x1<=tolerance)return x1;
                        fx2=f(x2);
                }eles{        /* f(x1)<f(x2) の場合 */
                        upper=x2; x2=x1; fx2=fx1; t=[2-1]*(1-[1]);
                        x1=[2-3]+t;
                        if(x2-x1<=tolerance)return x2;
                        fx1=f(x1);
                }
        }
}
```

(東京農工大 2006)　　(m20060908)

**0.43**　実数を要素とする集合の間の演算★を下のように定義する．

$$A \bigstar B = \{a+b \mid a \in A\,,\ b \in B\}$$

(1)　次の集合の要素をすべて示せ．　$\{-1,0,1\} \bigstar \{1,4,7\} \bigstar \{0,10\}$

(2)　次の式を証明せよ．ただし，$\cup$ は和集合を作る演算である．　$A \bigstar (B \cup C) = (A \bigstar B) \cup (A \bigstar C)$

(3)　どんな $A$ に対しても，　$X \bigstar A = A \bigstar X = A$　となるような $X$ を求めよ．

(4)　どんな $A$ に対しても，　$Y \bigstar A = A \bigstar Y = Y$　となるような $Y$ を求めよ．

(5)　いま，一円玉，五円玉，十円玉，五十円玉, 百円玉, 五百円玉, 千円札，二千円札，五千円札，一万円札をそれぞれ一枚ずつ持っているとする．このとき，釣り銭なしで，一度に払える金額の集合を★を用いて示せ．集合に 0 を含んでいてよい．

(東京農工大 2006)　　(m20060909)

**0.44**　$f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}x}{x^2+1}\right)$ について，次の問に答えよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$,　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$,　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$　の値を求めよ．

(2)　$f'(x)$ を計算せよ．　　(3) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(電気通信大 2006)　　(m20061001)

**0.45** 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{4(x-y)}{1+(x+y)^2}dxdy\,,\quad D: y \geqq\ 0,\ x-y \geqq\ 0,\ x+y \leqq\ 1\,.$

(2) $\displaystyle\iiint_E xydxdydz\,,\quad E: x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0,\ x^2+y^2+z^2 \leqq\ 1\,.$

(電気通信大 2006)　　(m20061002)

**0.46** 4次の単位行列を $E$ とし，4次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考える．さらに $\lambda$ を実数とし，$W(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = \lambda x\}$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\det(\lambda E - A)$ を求めよ．

(2) $W(\lambda) \neq \{0\}$ となるような $\lambda$ をすべて求めよ．

(3) (2) で求めた各 $\lambda$ に対し，$W(\lambda)$ の基底を求めよ．

(電気通信大 2006)　　(m20061003)

**0.47** 行列 $A$，ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ および未知ベクトル $\boldsymbol{x}$ を次のようにおく．

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 12 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(1) 3つのベクトル $\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u}, A^2\boldsymbol{u}$ が一次独立かどうか判定せよ．

(2) 3つのベクトル $\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}, A^2\boldsymbol{v}$ が一次独立かどうか判定せよ．

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，3つのベクトル $A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x}, A^3\boldsymbol{x}$ は一次独立でないことを示せ．

(電気通信大 2006)　　(m20061004)

**0.48** (1) 関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z+1}$ の極をすべて求め，それらを複素平面上で図示せよ．

(2) (1) の関数 $f(z)$ について次の積分を計算せよ．

$(a)\quad \displaystyle\int_{|z-i|=\frac{1}{2}} f(z)dz\,.$　　　$(b)\quad \displaystyle\int_{|z-i|=\frac{3}{2}} f(z)dz\,.$

(電気通信大 2006)　　(m20061005)

**0.49** 次の手順によって，任意の正数 $X$ の平方根 $\sqrt{X}$ の近似値を求めることができる．

① $\sqrt{X}$ に近い数 $x$ を選ぶ．

② $x$ と $\dfrac{X}{x}$ の平均値 $x' = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{X}{x}\right)$ を計算する．

③ あらかじめ定めておいた小さい数 $\ell$ に対して，$|x - x'| < \ell$ となれば，$x'$ を $\sqrt{X}$ の近似値とする．そうでない場合は，$x'$ を新しい $x$ として ② に戻り計算を繰り返す．

(1) この手順によって $\sqrt{X}$ の近似値が得られることを説明せよ．

(2) $X = 7$ として，その平方根 $\sqrt{X}$ の近似値を求めよ．ただし，$\ell = 0.001$, $x$ の初期値を 3 とする．

(3) 区間 $[0, 7]$ において，関数 $f(x) = A\sqrt{x} + B$ を一次関数 $g(x) = ax + b$ で最小二乗近似する．この時，$g(x) = \dfrac{\sqrt{7}}{7}x$ になるとすると，元の関数 $f(x) = A\sqrt{x} + B$ の $A, B$ の値はいくらであるか？小数点以下三桁まで求めよ．

(電気通信大 2006)　　(m20061006)

**0.50** (1) 集合 $\{1,2,3\}$ の空でない部分集合をすべて書け．それらの部分集合を，3 を含むものと含まないものに分けよ。

(2) $n=3$ のとき $\{1,2,3\}$ のすべての空でない部分集合 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，$1 \leq k \leq 3$ の和

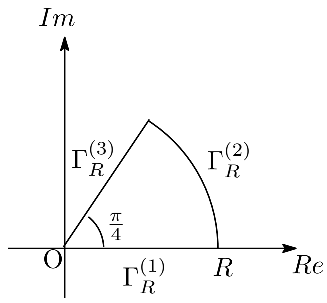
$$\sum_{\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}} \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_k}$$ を計算せよ（計算過程も書け）．

(3) $n(n \geq 1)$ に関する帰納法により $$\sum_{\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}} \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_k} = n$$

を示せ．ただし，左辺は $\{1,2,\cdots,n\}$ の空でないすべての部分集合 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，$1 \leq k \leq n$ に対して和を計算するものとする．

(電気通信大 2006)　　(m20061007)

**0.51** 右図に示すように，複素平面上にある中心角 $\pi/4$，半径 $R(>0)$ の領域の周囲を反時計回りに 1 周する経路 $\Gamma_R$ を考える．また，図にあるように経路 $\Gamma_R$ の各部分を $\Gamma_R^{(1)}, \Gamma_R^{(2)}, \Gamma_R^{(3)}$，と名付ける．




以下の 3 つの問いに順に答えよ．

(1) 経路 $\Gamma_R$ では式 ① が成立する．

$$\int_{\Gamma_R} e^{-z^2} dz = 0 \qquad ①$$

次式のように $G_R$，$P_R$，$C_R$，$S_R$ を定義するとき，式 ① をこれらを用いて表せ．

$$G_R = \int_0^R e^{-x^2} dx\ , \qquad P_R = \int_{\Gamma_R^{(2)}} e^{-z^2} dz\ ,$$

$$C_R = \int_0^R \cos r^2 dr\ , \qquad S_R = \int_0^R \sin r^2 dr\ ,$$

(2) $P_R$ について次の不等式 ② が成立することを示すとともに，

$$|P_R| \leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2\theta} R d\theta \qquad ②$$

$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$ では $0 \leq 1 - \dfrac{4}{\pi}\theta \leq \cos 2\theta$ となることを使って，$\displaystyle\lim_{R\to\infty} P_R = 0$ を示せ．

(3) 小問 (1), (2) で求めた結果を使って，定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^2 dx$ と $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2 dx$ を計算せよ．ただし、$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明なしに用いてよい．

(電気通信大 2006)　　(m20061008)

**0.52** <u>微分の定義に基づいて</u>，次の各関数を $x$ について微分せよ．

(1) $\cos x$　　　(2) $\sqrt[3]{x}$

(電気通信大 2006)　　(m20061009)

**0.53** $f(x) = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{10}$ のとき，次の値をそれぞれ求めよ．但し，$f'(x)$ は $f(x)$ の $x$ に関する 1 階の微分を表す.

(1) $f'(0)$ (2) $\dfrac{f'(1)}{f(1)}$ (3) $f'(1)f'(-1)$

(電気通信大 2006) (m20061010)

**0.54** コイン投げを 1 回行い，その結果に応じた $X$ を

$$X = \begin{cases} 1 & （裏が出たとき） \\ 2 & （表が出たとき） \end{cases}$$

のように定めてから，偏りのないサイコロを $X$ 回投げる．このときのサイコロの 1 の目の出現回数を $Y$ とする．

コインの表の出る確率を $p$ として．以下の問いに答えよ．

(1) $X$ の確率 $P(X = i)$ $(i = 1, 2)$, $X$ の期待値 $E(X)$, $X$ の分散 $V(X)$ を $p$ を使って表せ．

(2) 条件つき確率 ($X = i$ という条件の下での $Y$ の確率 ) $P(Y = j \mid X = i)$ を可能な $(i, j)$ の組み合わせに対しすべて求めよ．

(3) 条件つき期待値 ($X = i$ という条件の下での $Y$ の期待値 ) $E(Y \mid X = i)$ $(i = 1, 2)$ を求めよ．

(4) $Y$ の確率 $P(Y = j)$ $(j = 0, 1, 2)$, $Y$ の期待値 $E(Y)$ を $p$ を使って表せ．

(電気通信大 2006) (m20061011)

**0.55** 次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 6y = 6x^3 + 3x^2 - 14x + 3$ (2) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = \dfrac{x}{y^2}$

(横浜国立大 2006) (m20061101)

**0.56** (1) 以下の行列 $A$ の行列式を求めよ． $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 2 & 2 \\ x & y & 3 & 3 \\ x & y & z & 4 \end{bmatrix}$

(2) 以下の行列 $B$ の $B^n$ を求めよ． $B = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}$ 但し，$n = 1, 2, 3, \cdots,$ とする．

(横浜国立大 2006) (m20061102)

**0.57** $f(x) = e^{-x} \sin x$ について以下の問いに答えなさい．

(1) $f'(x)$ を求め，$0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で $f'(x) = 0$ となる点をすべて挙げなさい．

(2) $y = f(x)$ の概略図をグラフで示しなさい． (3) 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を求めなさい．

(筑波大 2006) (m20061301)

**0.58** 環境中における生物の増殖速度は条件が良好な場合，個体数濃度 $(x)$ に比例する．すなわち，比例定数（マルサス指数）を $m$ として，

$$\frac{dx}{dt} = mx \qquad (式 1)$$

と書くことができる．この数理モデルについて以下の問いに答えなさい．

(1) (式 1) を初期条件 $t = 0$ において $x = x_0$ として解き，グラフに図示しなさい．

(2) 環境容量の有限性を考えると (1) の答えは，時間が経過していくと不合理である．この場合，増殖速度は個体数濃度 $(x)$ と空き容量 $(K-x)$ の積に比例するとして

$$\frac{dx}{dt} = mx(K-x) \qquad \text{(式 2)}$$

と変更される．$K$ は環境容量を表す定数．(式 2) を初期条件 $t=0$ において $x=x_0$ として解き，$x$ の時間変化の概略をグラフに示し，$x \to \infty$ の挙動を説明しなさい．

(筑波大 2006)　　(m20061302)

**0.59** クーロンポテンシャル $\phi = \dfrac{1}{r}$ は原点以外の領域においてラプラスの方程式　$\Delta\phi = 0$ を満たすことを示しなさい．ただし，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ である．

(筑波大 2006)　　(m20061303)

**0.60** 関数　$f(x) = \exp\left[-\dfrac{(x-a)^2}{2}\right]$　について，次の問いに答えなさい．

(1) $f(x)$ の 1 次導関数 $f'(x)$ を求め，$f'(x)=0$ となる $x$ の値を示せ．

(2) $f(x)$ の 2 次導関数 $f''(x)$ を求め，$f''(x)=0$ となる $x$ の値を示せ．

(筑波大 2006)　　(m20061304)

**0.61** 関数　$f(x,y) = x^{0.6}y^{0.4}$　の値を，条件　$x+y=4$,　$x \geq 0$,　$y \geq 0$　のもとで最大化する $x$ と $y$ の値を求めよ．

(筑波大 2006)　　(m20061305)

**0.62** 積分　$\displaystyle\iint_D (4-x-y)dxdy$ ,　$D=\{(x,y) \mid x+y \leq 2,\ 0 \leq x \leq 1,\ y \geq 0\}$　の値を計算せよ．

(筑波大 2006)　　(m20061306)

**0.63** 3 つのベクトル　$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,　$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,　$\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ b \end{pmatrix}$　について，次の問に答えよ．ただし，$a$ 及び $b$ は実数値パラメータとする．

(1) この 3 つのベクトルが $\mathbb{R}^3$ の基底になるための $a$ と $b$ の条件を求めよ．

(2) この 3 つのベクトルが $\mathbb{R}^3$ の直交基底になるように $a$ と $b$ の値を定めよ．

(3) (2) のとき，ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ をこの 3 つのベクトルの線形結合で表せ．

(筑波大 2006)　　(m20061307)

**0.64** あるコインを投げるとき，確率 $p$ で表，確率 $1-p$ で裏が出るものとする．このとき，次の問に答えよ．ただし，$0<p<1$ とする．

(1) このコインを 3 回投げるときに表が出る回数 $X$ の確率分布 $P(X=k)$, $k=0,1,2,3$ を求めよ．

(2) $X$ の平均 $E[X]$ を求めよ．

(3) $X$ の分散 $E\Big[\big(X-E[X]\big)^2\Big]$ を求めよ．

(4) 同様にして，このコインを $n$ 回投げるときに表が出る回数 $Y$ の確率分布を示せ．

(5) $Y$ の平均を導出せよ．

(筑波大 2006)　　(m20061308)

**0.65** $z=f(x,y)$ が全微分可能で，$x=r\cdot\cos\theta$，$y=r\cdot\sin\theta$ であるとする．このとき，次式が成立することを証明せよ．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(筑波大 2006) (m20061309)

**0.66** 2 次元 $x-y$ 直交平面上で原点を中心とする半径 $a$ の円の第一象限内にある部分を $D$ とする．このとき，次の二重積分を求めよ． $\displaystyle\iint_D xydxdy$

(筑波大 2006) (m20061310)

**0.67** 単位行列とは異なる $n$ 次の正方行列 $A$ に対し，$A^k\ \ (k=1,2,\cdots)$ を $k$ 個の $A$ の積 $A^k=\underbrace{AA\cdots A}_{k}$ と定義する．次の 2 つの問いに答えよ．

(1) $A^2=A$ ならば，$A$ は正則ではないことを証明しなさい．

(2) $A$ が正則ならば，任意の自然数 $k(=1,2,\cdots)$ に対して $A^k$ も正則となり，$A^k$ の逆行列 $(A^k)^{-1}$ は $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を使って $(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$ と表せることを証明しなさい．ただし，$(A^{-1})^k$ は $A^k$ の定義と同様に $k$ 個の $A^{-1}$ の積を表すものとする．

(筑波大 2006) (m20061311)

**0.68** $x=\cos t$，$y=\sin t$ のとき，次の関数を $t$ で微分せよ．ただし，$f(x,y)$ は $x,y$ に関して偏微分可能な関数である．

(1) $\cos x+\cosh y$　　(2) $f(x,y)$

(筑波大 2006) (m20061312)

**0.69** 正方行列 $M$ の対角成分の和を $tr(M)$ と表すとき，$n$ 次正方行列 $A,B$ に対して $tr(AB)=tr(BA)$ であることを示せ．

(筑波大 2006) (m20061313)

**0.70** 関数 $f(x)=e^{\frac{x}{2}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ について，以下の設問に答えよ．

(1) 第 $n$ 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．　　(2) 関数 $f(x)$ の原始関数を 1 つ答えよ．

(3) $x\leq 0$ において，曲線 $y=f(x)$ と $x$ 軸で囲まれた全領域の面積が有限か否か，理由をつけて答えよ．

(筑波大 2006) (m20061314)

**0.71** 集合 $P=\left\{p(x)\ \middle|\ p(x)=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0\\ 0 & x & -1 & 0\\ 0 & 0 & x & -1\\ a & b & c & d\end{vmatrix},\quad a,b,c,d \text{ は実数}\right\}$ および $f(p(x))=p(x-1)$ で定義される写像 $f\ :\ P\to P$ について，以下の設問に答えよ

(1) $P$ は 3 次以下の実係数多項式の集合を表す．上記の $p(x)$ を，行列式を展開して $x$ の多項式の形に表せ．

(2) $f$ が線形写像であることを示せ．

(3) 基底 $\{x^3,x^2,x,1\}$ に関する $f$ の表現行列を求めよ．

(筑波大 2006) (m20061315)

**0.72** (1) $f(x)=\ln(1+x)$, $(-1<x\leq 1)$ のテイラー展開を $x^n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ の項まで求めよ（剰余項は含まない）．$\ln x$ は $x$ の自然対数を示す。

(2) $g(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, $(|x|<1)$ のテイラー展開を $x^n$ の項まで求めよ（剰余項は含まない）．

(3) $\ln 2$ を近似する場合，少ない数の展開項で誤差をより小さくするには，上記のテイラー展開の内、どちらを用いればよいか．理由を記して答えよ．

(筑波大 2006)　　(m20061316)

**0.73** (1) $(x-a)^2+y^2=r^2$ で与えられる図形の概略を描け $(a>r>0)$.

(2) この図形を $y$ 軸の周りに回転して得られるドーナッツ型の回転体（トーラス）の体積 $V$ を求めよ．

(筑波大 2006)　　(m20061317)

**0.74** 空間（３次元のユークリッド空間）の中で，３つのベクトル $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ をそれぞれ $\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ に写す，つまり，

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

とするような線形写像（行列）$A$ を考える．

(1) $A$ を具体的な数行列の形で表せ．

(2) $A$ の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．固有ベクトルは正規化（規格化）せよ．

(筑波大 2006)　　(m20061318)

**0.75** 平面（２次元のユークリッド空間）の中に，直交（デカルト）座標 $x,y$ をとり，この座標を使って $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ の形でベクトルを表現することにする．

この平面の中で，直線 $\ell: y=ax$ に関して折り返すという線形写像を $P$ としたとき，$P$ の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．固有ベクトルは正規化（規格化）せよ．

(筑波大 2006)　　(m20061319)

**0.76** $A=\begin{pmatrix}3&4\\6&8\end{pmatrix}$,　$B=\begin{pmatrix}2&5&3\\4&1&6\end{pmatrix}$,　$O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ とする．

(1) $AB$, $B^TA$ を求めなさい．ただし，$B^T$ は $B$ の転置行列である．

(2) $X\neq O$, $AX=XA=O$ となる行列 $X$ を求めなさい．要素が整数となる行列を１つだけ解答すればよい．

(筑波大 2006)　　(m20061320)

**0.77** 曲線 $y=x^2$ 上の点 $(t,t^2)$ における接線を $C(t)$，直線 $x=2$ の $y>0$ の部分を $m$ とする．

(1) $C(t)$ の方程式を求めなさい．

(2) $C(t)$ と $m$ が交点をもつための $t$ の範囲を求めなさい．

(3) $C(t)$, $m$ および $x$ 軸で囲まれてできる三角形の面積を $S(t)$ とする．$S(t)$ を $t$ の式で表しなさい．

(4) $S(t)$ の最大値を求めなさい．

(筑波大 2006)　　(m20061321)

**0.78**　次の極限を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^2+4x+3}{x^2-1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\log(x+1)+\log(\sqrt{3x+2}-\sqrt{3x})\right\}$

(筑波大 2006)　　(m20061322)

**0.79**　(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x dx$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle I(a)=\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\sin x+1)^2dx$ を最小にするような $a$ の値を求めなさい．

(筑波大 2006)　　(m20061323)

**0.80**　(1) 2つのベクトル $\vec{a}=(\sqrt{2},1,1)$ , $\vec{b}=(0,-1,-1)$ のなす角を求めなさい．

(2) 2つのベクトル $\vec{x}=(1,0,3)$ , $\vec{y}=(2,-1,1)$ の両方に直交する単位ベクトルを求めなさい．解答する単位ベクトルは一つでよい．

(3) 3点 $A(2,1,-3)$ , $B(3,1,-1)$ , $C(1,4,4)$ を通る平面の方程式を求めなさい．

(筑波大 2006)　　(m20061324)

**0.81**　(1) 1から11までの番号のついた11枚の札の中から，無作為に1枚の札を選んだとき，その札の番号が2または3の倍数である確率を求めなさい．

(2) 1枚の銅貨を10回投げたとき，裏が少なくとも2回出る確率を求めなさい．

(3) 箱 $A$ には黒ボールが5個，白ボールが2個入っており，箱 $B$ には黒ボールが3個，白ボールが2個入っている．1つの箱を無作為に選び，その箱から無作為に1つのボールを選ぶ．選んだボールが白である確率を求めなさい．

(4) 1組のトランプ(52枚)から無作為に13枚のカードを引く．引いた13枚のカードに4枚のエースが含まれている確率を求めなさい．

(筑波大 2006)　　(m20061325)

**0.82**　次の関数を微分せよ．

(1) $y=\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}$　　(2) $y=\sqrt{1+\cos x}$

(3) $y=x^e e^x\quad(x>0)$　　(4) $y=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

(埼玉大 2006)　　(m20061401)

**0.83**　(1) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とするとき，$\sin x,\ \cos x$ および $\dfrac{dt}{dx}$ を $t$ の式で表せ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\cos x}$ を求めよ．

(埼玉大 2006)　　(m20061402)

**0.84**　(1) 変数 $x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,z_1,z_2$ の間に，$x_1=3y_1+y_2+2y_3$ , $x_2=-y_1+2y_3$ , $y_1=3z_1-2z_2$ , $y_2=az_2$ , $y_3=z_1+4z_2$ の関係があるとき，$x_1,\ x_2$ を $z_1,\ z_2$ で表す式を求め，さらに，任意の $z_1,\ z_2$ において，$x_1=kx_2$ となるための定数 $a$ および $k$ を求めよ．ただし，$k\neq 0$ とする．

(2) 次の行列式を求めよ． $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -6 & 3 \end{vmatrix}$

(埼玉大 2006) (m20061403)

**0.85** 関数 $f = {x_1}^2 + {x_2}^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ に関連した以下の問に答えよ．ただし，$\boldsymbol{M}^T$ は，行列 $\boldsymbol{M}$ の転置を表すものとする．

(1) $f$ は，列行列 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ 及び，対称行列 $\boldsymbol{A}$ を用いて，$f = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ と表す事が出来る．対称行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ．

(2) 対称行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値，および固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ を求めよ．ただし，固有ベクトル（列ベクトル）は，大きさが 1 となるように規格化せよ．

(3) $(x_1, x_2, x_3)^T = y_1\boldsymbol{p}_1 + y_2\boldsymbol{p}_2 + y_3\boldsymbol{p}_3 = (\boldsymbol{p}_1,\, \boldsymbol{p}_2,\, \boldsymbol{p}_3)(y_1,\, y_2,\, y_3)^T$ の関係を用いて，関数 $f$ を変数 $y_1, y_2, y_3$ で表せ．ただし，$(\boldsymbol{p}_1,\, \boldsymbol{p}_2,\, \boldsymbol{p}_3)$ は $3 \times\ 3$ の正方行列の各列が，$\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ および $\boldsymbol{p}_3$ で表される行列であることを表す．

(埼玉大 2006) (m20061404)

**0.86** 次の微分方程式を解け．

(1) $x(x-y)\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 0$ (2) $\dfrac{dy}{dx} - xy = x$ (3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 2\sin x$

(埼玉大 2006) (m20061405)

**0.87** 写像 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x+4y+3z \\ x+2y+z \end{pmatrix}$ により定義する．

$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ と

$\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ．

(1) $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ．

(2) $(T(\boldsymbol{a}_1),\ T(\boldsymbol{a}_2),\ T(\boldsymbol{a}_3)) = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2)A$ を満たす 2 行 3 列の行列 $A$ を求めよ．

(埼玉大 2006) (m20061406)

**0.88** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求め，$A$ を対角化せよ． (2) 自然数 $n$ に対して，$A^n$ を求めよ．

(埼玉大 2006) (m20061407)

**0.89** $n$ を自然数とし、$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$ とおく．

(1) $I_2$ を求めよ． (2) $n \geqq\ 3$ のとき，$I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ を示せ．

(埼玉大 2006) (m20061408)

**0.90** $f(x,y)=x^2-x\sin y-\cos^2 y$ とする．

(1) 偏導関数 $f_x$，$f_y$，$f_{xx}$，$f_{xy}$，$f_{yx}$，$f_{yy}$ を求めよ．

(2) $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を満たす点 $(x,y)$ をすべて求めよ．

(3) $f$ の極値を求めよ．

(埼玉大 2006) (m20061409)

**0.91** (1) $x+\dfrac{1}{x}=a$ として，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$ を $a$ で表せ．

(2) $x$ についての不等式 $|2x-1|-|x+2|>-1$ を解け。

(群馬大 2006) (m20061501)

**0.92** $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})$，$g(x)=\dfrac{1}{2}(a^x-a^{-x})$ について，以下の 2 問に答えよ．

(1) $a^x$，$a^{-x}$ を $f(x)$，$g(x)$ を用いて表せ． (2) $f(x+y)$ を $f(x)$，$g(x)$，$f(y)$，$g(y)$ を用いて表せ．

(群馬大 2006) (m20061502)

**0.93** 点 $(x,y)$ を点 $(x',y')$ に対応づける $xy$ 平面上の写像は，その対応づけが行列の計算として，下式のように書けるとき，1 次変換と呼ばれる（ここで $a,b,c,d$ は定数であり，下式は「 $x'=ax+by$ かつ $y'=cx+dy$ 」と同値）．

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2k & k \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 $f$ について，以下の 2 問に答えよ．

(1) この 1 次変換 $f$ が原点以外にも「変換の影響を受けない点」（すなわち，変換によって位置が変わらない点）をもつように $k$ の値を定めよ．

(2) 前問 (1) の 1 次変換で「変換の影響を受けない点」の全体は，$xy$ 平面上の直線を形成する．この直線の方程式を求めよ．

(群馬大 2006) (m20061503)

**0.94** 1 から 7 の 7 つの数字をそれぞれ 1 度ずつ用いて 7 けたの数を作ることを考える．

(1) 7 けたの数は全部で何通りあるか答えよ．

(2) 2 と 5 が隣り合わない 7 けたの数は何通りあるか答えよ．

(群馬大 2006) (m20061504)

**0.95** 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ．

(1) $A$ の行列式 $|A|$ を求めよ． (2) $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めよ．

(3) $AX=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす行列 $X$ を求めよ．

(茨城大 2006) (m20061701)

**0.96** $t>0$ とする．$xy$ 平面内の領域 $D(t):t^2 \geqq x^2+y^2 \geqq 4t^2$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ 上の二重積分 $F(t)=\displaystyle\iint_{D(t)}\frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy$ について，次の問に答えよ．

(1) 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算し，$F(t)$ を $r\theta$ 平面内の領域上の二重積分に変換せよ．

(2) $F'(t)$ を計算せよ．

(茨城大 2006)　　(m20061702)

**0.97** 次の微分方程式の一般解を求めよ．　$(1+y^2)\dfrac{y}{x} + (1-y)^2\left(\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x}\right) = 0$

(茨城大 2006)　　(m20061703)

**0.98** 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\bigl(e^{i\theta}-1\bigr)d\theta$　　　(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\bigl|e^{i\theta}-1\bigr|d\theta$

(茨城大 2006)　　(m20061704)

**0.99** 数列 $\{a_n\}$ を　$a_1 = 1$　$a_{n+1} = \dfrac{3a_n+4}{2a_n+3}$　$(n = 1, 2, \cdots)$　で定義する．次の各問に答えよ．

(1) ${a_n}^2 < 2$　$(n = 1, 2, \cdots)$ を示せ．　　(2) 数列 $\{a_n\}$ は単調増加であることを示せ．

(3) 数列 $\{{a_n}^2\}$ は収束することを示せ．また，その極限値を求めよ．

(茨城大 2006)　　(m20061705)

**0.100** (1) $V$ をベクトル空間とし，$W_1$, $W_2$ をその部分ベクトル空間とする．このとき、$W_1 \cap W_2$, $W_1 + W_2$ は $V$ の部分ベクトル空間であることを示せ．

(2) 実 4 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の 4 個のベクトルを

$$a_1 = (1,0,1,2)\ ,\quad a_2 = (0,1,1,-2)\ ,\quad a_3 = (1,1,0,2)\ ,\quad a_4 = (1,1,-1,3)$$

と定める．また，$a_1$ と $a_2$ で張られる（生成される）部分ベクトル空間を $W_1$ とし，$a_3$ と $a_4$ で張られる部分ベクトル空間を $W_2$ とする．このとき，$W_1 \cap W_2$, $W_1 + W_2$ の次元および基底を求めよ．

(茨城大 2006)　　(m20061706)

**0.101** (1) 2 次元ユークリット空間（即ち平面）$\mathbb{R}^2$ の部分集合に関する次の性質を考える：

**(1)** 開集合である；**(2)** 閉集合である；**(3)** コンパクトである；**(4)** 連結である．

次の条件を満たす空でない部分集合の例をひとつずつあげよ：

(a) **(1)** かつ **(2)**　　(b) **(1)** であるが **(2)** ではない

(c) **(1)** ではないが **(2)** である　　(d) **(1)** でも **(2)** でもない

(e) **(3)** でないがその閉包（closure）は **(3)**　　(f) **(4)** でないがその内部（interior）は **(4)**

(2) 整数全体からなる加法群 $\mathbb{Z}$ の部分群をすべてあげよ．

(3) 実数全体からなる集合 $\mathbb{R}$ の 2 つの部分集合 $[0,1]$ と $[0,1]\cup[2,3]$ の間には全単射対応（即ち 1 対 1 かつ上への対応）が存在し得るか否か，その理由もこめて，述べよ．

ここで，$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leqq\ x \leqq\ b\}$ である．

(茨城大 2006)　　(m20061707)

**0.102** 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式の値および逆行列を求めなさい．

(山梨大 2006)　　(m20061801)

**0.103** 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$ と行列 $B = \begin{pmatrix} d & e \\ 1 & f \end{pmatrix}$ が $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を満たしているとき, 次の問に答えなさい.

(1) $b = c = 0$ のとき, $CA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる零行列でない 2 次の正方行列 $C$ を一つ求めなさい.

(2) ある零行列でない 2 次の正方行列 $D$ で $DA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となることを示しなさい.

(3) 行列 $A$ の行列式の値を求めなさい.

(4) $A$ の固有値を求めなさい.

(山梨大 2006) (m20061802)

**0.104** 不定積分 $\displaystyle\int xe^x dx$ を求めなさい.

(山梨大 2006) (m20061803)

**0.105** (1) 領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 2,\ 1 \leqq y \leqq 3\}$ を $xy-$ 平面に図示しなさい.

(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を求めなさい.

(山梨大 2006) (m20061804)

**0.106** 次の行列の固有値と固有ベクトルを求め, 対角化せよ. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(信州大 2006) (m20061901)

**0.107** 次の連立 1 次方程式を Cramer の公式により解け. $\begin{cases} x + 5y + 2x = 6 \\ 3x - y + z = -2 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$

(信州大 2006) (m20061902)

**0.108** 2 つの円柱面 $y^2 + z^2 = 1$, $z^2 + x^2 = 1$ で囲まれた部分の体積を求めよ.

(信州大 2006) (m20061903)

**0.109** 変数 $x, y, z$ が条件 $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 1$ を満たしながら動くときの

関数 $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$ の最大値と最小値を求めよ. また, 対応する $x, y, z$ の値も記せ.

(信州大 2006) (m20061904)

**0.110** 次の級数が収束するときはその和を求めよ. 発散するときはその理由を述べよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

(新潟大 2006) (m20062001)

**0.111** 関数 $f(x) = x \sin 2x$ の第 2 次導関数を求めよ.

(新潟大 2006) (m20062002)

**0.112** 関数 $g(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ の偏導関数 $g_x(x, y)$, $g_y(x, y)$ を求めよ.

(新潟大 2006) (m20062003)

**0.113** (1) 整数 $a$ に対して，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & a & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．また，$A$ の逆行列の成分がすべて整数であるとする．このとき，$a$ の値と $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めよ．

(2) 実数 $b$, $c$ に対して，行列 $B = \begin{pmatrix} 5 & b \\ c & 4 \end{pmatrix}$ は，異なる固有値をもつとする．さらに，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$b$ と $c$ の値および $B$ の固有値を求めよ．

(新潟大 2006) (m20062004)

**0.114** $n$ を 2 以上の自然数とする．閉区間 $[0, 1]$ で定義された関数 $f_n(x)$ と $g_n(x)$ を

$$f_n(x) = e^{-nx} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}\ , \qquad g_n(x) = e^{-(n-1)x} - e^{-nx}$$

により定める．このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ なる任意の実数 $x$ に対して，不等式 $f_n(x) \leqq g_n(x)$ が成立することを示せ．

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ なる任意の実数 $x$ に対して，不等式 $g_n(x) \leqq \dfrac{1}{n}$ が成立することを示せ．

(3) 不等式 $\displaystyle\int_0^1 f_n(x^2)dx \leqq \frac{1}{n}$ が成立することを示せ．

(新潟大 2006) (m20062005)

**0.115** $\mathbb{R}^3 = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ をユークリッド空間とする．このとき，以下の各問に答えよ．

(1) $A$ を 3 次の実正則行列とする．$\mathbb{R}^3$ の線型変換 $T$ を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ によって定義する．点 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$ を通り，零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{v}$ に直交する平面を $W$ とする．このとき，$T(W)$ は点 $A\boldsymbol{p}$ を通り，ベクトル ${}^t(A^{-1})\boldsymbol{v}$ に直交する平面であることを示せ．ここで，${}^t(A^{-1})$ は，$A$ の逆行列 $A^{-1}$ の転置行列である．

(2) $a, b, c$ を正の実数とし，楕円面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ を $C$ とする．$C$ 上の点 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ における $C$ の接平面の方程式を求めよ．

(新潟大 2006) (m20062006)

**0.116** 次の関数について問 (1)〜(4) に答えよ $\qquad y = x^3 - 6x^2 + 9x$

(1) この関数の導関数を求めよ． (2) この関数の極大値と極小値を求めよ．

(3) この関数の増減表を書け． (4) この関数の概略図を書け．

(新潟大 2006) (m20062007)

**0.117** 問 (1)〜(4) の不定積分および定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int x dx$ (2) $\displaystyle\int \cos x dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx$ (4) $\displaystyle\int_1^4 (2x^2 + 3x + 1)dx$

(新潟大 2006) (m20062008)

**0.118** 18 $m/s$ の速さで走っている列車にブレーキをかけた．ブレーキをかけてから $t$ 秒後の列車の速さ $\nu\ m/s$ は，$\nu(t) = 18 - at$ で求められる．問 (1)〜(3) に答えよ．ただし，$a$ は定数である．

(1) 列車がブレーキをかけてから停止するまでの時間を求めよ．

(2) 物体の速さ $\nu(t)$ は位置 $P(t)$ の時間変化に等しくなる．
$\nu(t) = \dfrac{dP(t)}{dt}$ を考慮して，列車がブレーキをかけてから停止するまでの距離を，$a$ を用いて表せ．

(3) 列車はブレーキをかけてから 135 $m$ 走って停止した，$a$ を求めよ．

(新潟大 2006)　　(m20062009)

**0.119** 以下の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int (x^2+1)(x-1)dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+q}dx \quad (q>0)$　　(3) $\displaystyle\int e^{-x}\cos(ax)dx \quad (a>0)$

(新潟大 2006)　　(m20062010)

**0.120** (1) 次の行列式の値を求めよ． $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(2) 行列 $A$ の行列式の定義は，例えば，

$$|A| = \sum_{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{smallmatrix}\right] \in S_n} \mathrm{sgn}\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

で与えられる．ここで，$S_n$ は $n$ 次の置換のすべての集合であり，sgn は置換の符号である．このとき次式を証明せよ．

$$\begin{vmatrix} a & 0 \cdots 0 \\ * & \\ \vdots & B \\ * & \end{vmatrix} = a|B|$$

ただし，$B$ は $(n-1)$ 次の正方行列とする．

(新潟大 2006)　　(m20062011)

**0.121** 空間 $(R^3)$ において，次の各問に答えよ．

(1) ベクトルの組　$\vec{b_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\vec{b_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\vec{b_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ について，$\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ は $R^3$ の基底を作ることを示せ．

(2) $R^3$ の基本ベクトルを $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ とし，線形変換 $f:\ R^3(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) \to R^3(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ の表現行列が $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 5/2 \\ 3/2 & -3/2 & 7/2 \end{bmatrix}$ で与えられるとき，$f$ を $f : R^3(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}) \to R^3(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ なる線形変換と考えたときの表現行列を求めよ．ただし、$R^3(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ は $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ を基底とするベクトル空間 $R^3$ を意味する．

(新潟大 2006)　　(m20062012)

**0.122** すべての辺の長さの総和が $4\ell$ の直方体について，以下の問いに答えよ．

(1) 図 1 のように，直方体の 2 辺の長さを $x, y$ とするとき，直方体の体積 $V$ を $x, y, \ell$ を用いて表せ．

(2) $V$ の $x$ に関する偏導関数 $V_x$ および $y$ に関する偏導関数 $V_y$ を求めよ．

(3) 直方体の体積の最大値を求めよ．

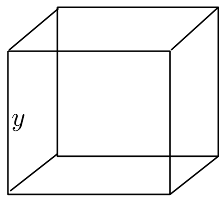


図 1

(新潟大 2006)　　(m20062013)

**0.123** $0 < x$ において定義された関数 $f(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{C}{x^n}$ が $x = p\ (0 < p)$ において極値をとるとき，以下の問いに答えよ．ただし，$C$ は正の実数，$n$ は 2 以上の整数である．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$ を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(4) $C$ の値を，$p$ および $n$ を用いて表せ．

(5) この関数の極値を，$p$ および $n$ を用いて表せ．

(6) この関数の概形をグラフで示せ．

(新潟大 2006)　　(m20062014)

**0.124** 3 つの箱 $A, B, C$ がある．箱の中に入っている玉は，次の規則に従うものとする．ただし，$n$ は 0 以上の整数とする．

a. 時刻 $n$ に箱 $A$ の中にある玉は，それぞれ独立に，時刻 $n+1$ に確率 $\dfrac{1}{2}$ で箱 $A$ にとどまり確率 $\dfrac{1}{2}$ で箱 $B$ に移る．

b. 時刻 $n$ に箱 $B$ の中にある玉は，それぞれ独立に，時刻 $n+1$ に確率 $\dfrac{1}{3}$ で箱 $B$ にとどまり確率 $\dfrac{2}{3}$ で箱 $C$ に移る．

c. 箱 $C$ にある玉は，そのまま箱 $C$ にとどまり続ける．

時刻 0 に箱 $A$ の中に 2 個の玉があり，箱 $B, C$ の中には玉はないとする．以下の問に答えよ．

(1) 時刻 1 に箱 $B$ の中に 2 個の玉がある確率 $P_1$ を求めなさい．

(2) 時刻 2 に箱 $C$ の中に 2 個の玉がある確率 $P_2$ を求めなさい．

(3) 時刻 2 に箱 $C$ の中に 1 個の玉がある確率 $P_3$ を求めなさい．

(4) 時刻 2 に箱 $B$ の中に 1 個の玉がある確率 $P_4$ を求めなさい．

(長岡技科大 2006)　　(m20062101)

**0.125** $xyz$ 空間に 4 点 $O(0,0,0),\ A(1,-2,-1),\ B(-2,-5,0),\ C(2,1,0)$ をとる．以下の問に答えよ．

(1) 直線 $AB$ と $yz$ 平面との交点を求めなさい．

(2) 3 点 $A, B, C$ を通る平面と $x$ 軸との交点を求めなさい．

(3) 三角形 $OBC$ の面積を求めなさい．

(4) 四面体 $OABC$ の体積を求めなさい．

(長岡技科大 2006)　　(m20062102)

**0.126** 曲線 $y = x^2$ と直線 $y = x + 2$ が与えられている．以下の問いに答えなさい．

(1) 曲線と直線の交点 $A, B$ の座標を求めなさい．

(2) 曲線と直線で囲まれた図形の面積を求めなさい．

(3) 点 $P$ が曲線上の $A$ と $B$ の間を動くとき，三角形 $PAB$ の面積の最大値を求めなさい．

(長岡技科大 2006)　　(m20062103)

**0.127** 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+ay=0$ ($a$ は $a>1$ なる定数) について、以下の問に答えなさい.

(1) 一般解を求めなさい.

(2) 初期条件 $y(0)=1$, $y'(0)=-1$ を満たす解を求めなさい.

(3) 前問で求めた解が $y(\pi)=0$ を満たすような定数 $a$ の値を求めなさい.

(長岡技科大 2006) (m20062104)

**0.128** 連続時間 $t[s]$ の関数 $f(t)$ のフーリエ変換は,

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

により計算される．このことを利用して以下の問に答えよ．ただし，$j=\sqrt{-1}$ であり，$\omega$ [rad/s] は角周波数を表す．また，$a$ は正の実数とする.

(1) 関数 $f(t)=\begin{cases}1 & , \quad 0<t<a\\ 0 & , \quad t<0,\ t>a\end{cases}$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，$f(t)$ と $|F(\omega)|$ をそれぞれ図示せよ．ただし，$|F(\omega)|$ は複素関数 $F(\omega)$ の絶対値を意味する.

(2) $f(t)=\begin{cases}\exp(-at) & , \quad t>0\\ 0 & , \quad t<0\end{cases}$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，$f(t)$ と $|F(\omega)|$ をそれぞれ図示せよ.

(3) $f(t-a)$ のフーリエ変換が $F(\omega)e^{-j\omega a}$ となることを証明せよ.

(4) $f(at)$ のフーリエ変換が $a>0$ に対して $\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$ となることを証明せよ.

(長岡技科大 2006) (m20062105)

**0.129** 行列 $A=\begin{pmatrix}k & \frac{1}{3}\\ 1-k & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ ($k$ は定数, $0<k<1$) について, 次の問に答えよ.

(1) $A$ の固有値を求めよ. (2) $A$ を対角化せよ.

(3) $A^n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}$ $(n=1,2,\cdots)$ とするとき, 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n+d_n)$ を求めよ.

(金沢大 2006) (m20062201)

**0.130** (1) 関数 $e^{-x}$ にマクローリンの定理をあてはめた式を書け.

(2) 上を用いて, $m$ を 2 以上の自然数とするとき, 不等式

$$0<e^{-1}-\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots-\frac{1}{(2m-1)!}\right)<\frac{1}{(2m)!}$$

が成立することを示せ.

(3) $m$ を 3 以上の自然数とするとき, 不等式

$$0<e^{-1}-\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots-\frac{1}{(2m-1)!}\right)<\frac{1}{500}$$

が成立することを示せ.

(金沢大 2006) (m20062202)

**0.131** 関数 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $((x,y)\neq(0,0))$ について, 次の問に答えよ.

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を計算せよ.

(2) $0 < \varepsilon < 1$ とする. 積分 $I(\varepsilon) = \displaystyle\iint_{\varepsilon \leqq \sqrt{x^2+y^2} \leqq 1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dxdy$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} (\sin \varepsilon) I(\varepsilon)$ を求めよ.

(金沢大 2006)　　(m20062203)

**0.132** 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{d}{dx} \tan^{-1}(2x)$　　(2) $\dfrac{d}{dx} x e^{-x^2}$

(富山大 2006)　　(m20062301)

**0.133** 次の計算をせよ.　$\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log(x^2 + y^2)$

(富山大 2006)　　(m20062302)

**0.134** 次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx$

(富山大 2006)　　(m20062303)

**0.135** ３次元空間 $O - xyz$ に相異なる点 $A, A'$ を通る直線と相異なる点 $B, B'$ を通る直線がある．２つの直線はねじれの位置にあるものとし, その間の距離 $l$ を考える．２つの直線の距離とはそれぞれの直線上の２点間の距離の最短距離であって, 最短距離となる２点は互いに他方の直線への垂線の足（交点）となっている．ここで, $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BB'}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{s} = \overrightarrow{OB}$ として以下の問いに順次答えよ.

(1) ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に垂直な単位ベクトル $\vec{n}$ をベクトルの外積（ベクトル積）を用いて書け.

(2) 原点を通りベクトル $\vec{n}$ に平行な直線への点 $A, B$ からの垂線の足を $P, Q$ とする．長さ $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ をベクトルの内積（スカラー積）を用いて書け.

(3) 点 $P$ と $Q$ の距離が, 求めるべきねじれの位置にある２つの直線の距離 $l$ であることをふまえ, $l$ を $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ.

(4) 点 $A(1, -1, -1)$, $A'(-1, 1, 0)$ を通る直線と点 $B(2, 1, 1)$, $B'(1, -1, 3)$ を通る直線の距離を (3) の結果を用いて求めよ.

(富山大 2006)　　(m20062304)

**0.136** $2 \times\ 2$ 行列 $Z = aI + bJ$ を考える.

ただし, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ および $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ である．また, $a$ と $b$ は実数であり, $a$ と $b$ が同時に 0 になることはないとする.

(1) $Z^T$ を計算し, $a, b, I, J$ で表せ．ここで添字 $T$ は行列の転置を表す.

(2) $Z + Z^T$ と $Z - Z^T$ をそれぞれ $a, b, I, J$ で表せ.

(3) $ZZ^T$ を $a, b, I, J$ で表せ.

(4) $Z$ の逆行列を求め, $a, b, I, J$ で表せ.

(5) $J$ と $Z$ の固有値をそれぞれ求めよ.

(富山大 2006)　　(m20062305)

**0.137** 関数 $y = \sin x + \cos x$ $(0 \leqq\ x \leqq\ 2\pi)$ がある．以下の問いに答えよ.

(1) $y$ の導関数を求め, 関数 $y$ の増減と極大値, 極小値を調べよ.

(2) 関数 $y$ のグラフを描け, 関数 $y$ と $x$ 軸との交点の座標も明らかにせよ.

(3) $x$ が 0 から $\dfrac{3\pi}{4}$ の範囲で, 関数 $y$ と $x$ 軸で囲まれる面積を求めよ.

(富山大 2006)　　(m20062306)

**0.138** 次の常微分方程式３問のうち, ２問を選択し, それぞれ一般項を求めよ. ただし, (3) については, $y = \cdots$ の形で表現する必要はない. また $y'$ , $y''$ は, それぞれ $dy/dx$ , $d^2y/dx^2$ を意味する.

(1) $y'' + 6y' + 9y = 0$　　(2) $xy' + y^2 = 4$　　(3) $y' = \dfrac{2x - 2y + \cos x}{2x - 4y - \sin y}$

(富山大 2006)　　(m20062307)

**0.139** $\dfrac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = \cot\dfrac{\theta}{2}$ が成り立つ.
この式の両辺を微分し，微分した左辺と右辺が等しくなることを示せ.
ただし，必要に応じて三角関数の 2 倍角の公式 “ $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ ” を使え.

(福井大 2006)　　(m20062401)

**0.140** $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ のとき，$t = t_0$ に対応する点 $(x_0, y_0)$ における接線と法線の方程式を求めよ.

(福井大 2006)　　(m20062402)

**0.141** 次の不定積分を求めよ.　$\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx\,,\quad a > 0\,,\ |x| \leq a$
ただし，必要に応じて三角関数の 2 倍角の公式
“ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ および $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ ” を使え.

(福井大 2006)　　(m20062403)

**0.142** $x^2 + (y - b)^2 = a^2 \quad (b > a > 0)$ が $x$ 軸のまわりに回転することによって生ずる回転面で囲まれる体積を求めよ.

(福井大 2006)　　(m20062404)

**0.143** 4 つの未知変数 $x, y, z, w$ からなる次の連立一次方程式が解をもつために，スカラー $a, b, c$ が満たすべき条件を求めよ.

$$\begin{cases} x + 2y + z + 3w = a \\ -2x + 3y + 5z + w = b \\ 3x + 4y + z + 7w = c \end{cases}$$

(福井大 2006)　　(m20062405)

**0.144** 次の行列 $\boldsymbol{B}$ とベクトル $\boldsymbol{x}$ がある. 行列 $\boldsymbol{B}$ で定まる一次変換で，平面の図形　$2{x_1}^2 + {y_1}^2 = 4$　が異なる図形にうつされる.

(1) 変換後の図形の式を求めなさい.　　(2) 変換後の図形を描きなさい.

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

(福井大 2006)　　(m20062406)

**0.145** 次の微分方程式の解を求めよ.

(1) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{t^2}$　ただし，$x(1) = 1$　　(2) $x\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 1$　ただし，$y(1) = 0$

(3) $x^2\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 1$　ただし，$y(1) = 0$

(福井大 2006)　　(m20062407)

**0.146** 次のような微分方程式で与えられる曲線と直交する曲線の微分方程式を求め，その曲線の概形を示せ．

(1) $y' = -\dfrac{x}{y}$　　(2) $y' = -\dfrac{x}{2y}$

(福井大 2006)　　(m20062408)

**0.147** 次の行列式を計算せよ． $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

(福井大 2006)　　(m20062409)

**0.148** 次の行列 $A$ について，以下の問いに答えよ．　$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(1) $A$ の固有値を求めよ．　(2) $A$ を対角化する正則行列 $P$ を求めて，$A$ を対角化せよ．

(福井大 2006)　　(m20062410)

**0.149** 以下の問に答えよ．なお，$i$ は虚数単位である．

(1) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$ を極形式（$\cos\theta + i\sin\theta$ の形式）で表せ．

(2) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$ の 3 乗根を複素平面上に図示せよ．

(福井大 2006)　　(m20062411)

**0.150** 次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 1$　(2) $x(x-y)\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 0$　(3) $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^2$　(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x$

(福井大 2006)　　(m20062412)

**0.151** 次の値を求めなさい．

(1) $(x^3y^2)^{-\frac{2}{3}} \times \ x^2y^{\frac{4}{3}}$　(2) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{729}}$　(3) $4\log_2\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\log_2 3 + \log_2\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

(4) $5^{\log_5 7}$　(5) $\log_2 3 \cdot \log_{27} 25 \cdot \log_5 16$

(福井大 2006)　　(m20062413)

**0.152** $y = (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x + 3$ において，$x$ の定義域が $0.5 \leq x \leq 8$ とする．この時

(1) $s = \log_2 x$ とするとき，$s$ の範囲を示せ．

(2) $y$ を $s$ の関数として表し，そのグラフの概形を示せ．

(3) $y$ の最小値と最大値と，その各々を与える $x$ を求めよ．

(福井大 2006)　　(m20062414)

**0.153** $y = a\sin x + b\cos x$ について次の問いに答えよ．

(1) 上の関数が，$y = A\sin(x+\theta)$ の形に変換できることを示しなさい．

(2) $a = 1,\ b = \sqrt{3}$ の時，$A$ および $\theta$ の値を求めよ．

(3) $0 \leq x \leq \pi$ とする時，関数の最大値と最小値，ならびにその時の $x$ の値を示せ．

(福井大 2006)　　(m20062415)

**0.154** 次の関数を微分しなさい.

(1) $y = \sqrt{x}$　(2) $y = \dfrac{1}{x+1}$　(3) $y = \cos x \sin^2 x$

(4) $y = e^{x^2}$　(5) $y = x^{3x}$

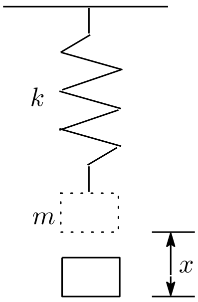
(福井大 2006)　(m20062416)

**0.155** 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$　(2) $\dfrac{e^{2x}}{e^x - 1}$　(3) $x \log x$

(福井大 2006)　(m20062417)

**0.156** 図のように，バネ定数が $k$ で，質量を無視できるバネに，質量 $m$ のおもりを吊り下げる．つりあった位置から，上下方向に振動させる時の変位を $x$ とする．このとき，時間 $t$ に対するおもりの運動は，次の運動方程式によって表現できる．




$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

(1) $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とおくとき，$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ は，上の運動方程式の一般解であることを示しなさい．

(2) $m = 0.16(kg)$, $k = 4(kg/sec^2)$ とするとき，おもりの運動の周期を求めなさい．

(3) $t = 0$ において，$x = 2(cm)$, $\dfrac{dx}{dt} = 0(cm/sec)$ とするとき，定数 $A, B$ の値を求め，3 秒間の変位のグラフのおよその形を示せ．

(福井大 2006)　(m20062418)

**0.157** 点 $P(x, y)$ は，時間 $t$ の時，$x = a\cos(2\pi t)$, $y = a\sin(2\pi t)$ の位置にあるものとする．

(1) $a = e^{-t}$ とする時，$-1 \leq t \leq 1$ の範囲で，時間 $t$ に対する $a$ および $x$ の描く図形のおよその形を示せ．

(2) $-1 \leq t \leq 1$ の範囲で，点 $P$ の描く図形のおよその形を示せ．

(3) $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ をそれぞれ求めよ．　(4) 点 $P$ の時刻 $t$ における速度を求めよ．

(福井大 2006)　(m20062419)

**0.158** 木材に含まれる炭素の中には，放射性元素である質量数 14 の $^{14}C$ が含まれている．生きている木に含まれる $^{14}C$ の割合は一定であるが，伐採された瞬間から $^{14}C$ は自然崩壊し消失していく．伐採されてから $t$ 年経過した時の，$^{14}C$ の個数を $y$ とすると，$a$ を定数として $\dfrac{dy}{dt} = -ay$ の関係が成立する．

(1) 伐採された瞬間に含まれていた $^{14}C$ の個数を $y_0$ とし，上式を積分しなさい．

(2) $y_0$ が半分に減少するまでの時間を 6,000 年とする時，$a$ を求めなさい．

(3) 伐採されてからある時間経過した木材中の $^{14}C$ の個数が $y = 0.125y_0$ の時，経過年数を求めなさい．

(福井大 2006)　(m20062420)

**0.159** 次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2) $2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) ${}^T\!\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(福井大 2006) (m20062421)

**0.160** 行列 $A$ の固有値 $\lambda$ と固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ に関する設問である．

(1) $A$, $\lambda$, $\boldsymbol{x}$ の間に成り立つ関係を示せ． (2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ．

(3) (2) の解に対応する固有ベクトルを一つ示せ．

(福井大 2006) (m20062422)

**0.161** 一つのサイコロを振って，出る目の，平均，分散および標準偏差を求めよ．

(福井大 2006) (m20062423)

**0.162** $\left(2x^2 - \dfrac{1}{3x}\right)^8$ の展開式において，$x^7$ の係数を求めよ．

(福井大 2006) (m20062424)

**0.163** 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}$ を求めよ．

(静岡大 2006) (m20062501)

**0.164** 2 変数関数 $f(x, y) = \log\sqrt{x^2 + y^2}$ の第 2 次偏導関数をすべて求めよ．

(静岡大 2006) (m20062502)

**0.165** 関数 $f(x) = x^5 e^x$ のマクローリン級数（すなわち原点を中心とするテイラー級数）を求めよ．

(静岡大 2006) (m20062503)

**0.166** (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin 2x\,dx$ を求めよ． (2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{2}{x(x+2)}\,dx$ を求めよ．

(静岡大 2006) (m20062504)

**0.167** $a > 0$ とし，$D(a) = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a\,,\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}\}$ とおく．
このとき 2 重積分 $\displaystyle I(a) = \iint_{D(a)}\frac{y}{(1 + x^2 + y^2)^2}\,dxdy$ について，次の問いに答えよ．

(1) $D(a)$ を図示し，$I(a)$ の値を求めよ． (2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty} I(a)$ を求めよ．

(静岡大 2006) (m20062505)

**0.168** 3 × 3 行列 $A$ を $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ とおく．次の問に答えよ．

(1) $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めよ．

(2) 連立方程式 $\begin{cases} -5x+10y=5 \\ 2x-3y-\dfrac{1}{2}z=5 \\ x+y+z=5 \end{cases}$ を解け.

(静岡大 2006) (m20062506)

**0.169** 写像 $f:\boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ について，次の問に答えよ．但し $\boldsymbol{R}^\ell$ は $\ell$ 次元実ベクトル空間を表す.

(1) $f$ が線形写像であることの定義を述べよ.

(2) $f$ が線形写像であるとき次を示せ.

(a) $f(0)=0$（但し 0 はベクトル空間の原点を表す）

(b) $r$ を任意の自然数とするとき，$r$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots\ \boldsymbol{a}_r\ \in \boldsymbol{R}^n$ と
スカラー $k_1,\ k_2,\ \cdots\ k_r\ \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$f(k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{a}_r)=k_1f(\boldsymbol{a}_1)+k_2f(\boldsymbol{a}_2)+\cdots+k_rf(\boldsymbol{a}_r)$$

(静岡大 2006) (m20062507)

**0.170** (1) $\dfrac{dy}{dx}=-ky+\cos\omega x$ を解け. (2) $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1-y^2}{1-x^2}=0$ を解け.

(3) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}+x^2y^3$ を解け （ヒント：$u=y^{-2}$ と置け）.

(静岡大 2006) (m20062508)

**0.171** $(x,y)$ 平面上の任意の点 $A$ における法線へ原点から下ろした垂線の長さが，点 $A$ の $y$ 座標に等しい曲線は $x^2+y^2=cx$ ($c$ は定数) となることを示せ.

(静岡大 2006) (m20062509)

**0.172** 次の不定積分を求めなさい. $I=\displaystyle\int e^{2x}\sin 2x\,dx$

(静岡大 2006) (m20062510)

**0.173** 次の微分方程式を解きなさい. $\dfrac{dy}{dx}=(x+y+2)^2$

(静岡大 2006) (m20062511)

**0.174** $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする．次の問に答えなさい.

(1) 行列 $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めなさい. (2) 行列 $A$ の固有値を求めなさい.

(静岡大 2006) (m20062512)

**0.175** 3 行 3 列の行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} x-a & 2x & 2x \\ 2a & a-x & 2a \\ 0 & 0 & -a-x \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) この行列の行列式 $|\boldsymbol{A}|$ を求めよ.

(2) この行列式の値がゼロとなる，すなわち $|\boldsymbol{A}|=0$ を満たす，$x$ を求めよ.

(岐阜大 2006) (m20062601)

**0.176** $i$ を虚数単位としたとき，$\sqrt{i}$ を複素数 $a+bi$ の形で表せ．ただし $a,b$ は実数とする.

(岐阜大 2006) (m20062602)

**0.177** 次の微分方程式を解け． $x\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{x}+xe^x=0$

(岐阜大 2006) (m20062603)

**0.178** 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int\frac{9x^2+6}{x^3+2x+1}dx$ (2) $\displaystyle\int\sin 7x\,\cos x dx$

(岐阜大 2006) (m20062604)

**0.179** 2 変数の関数 $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{2y}$ に対して $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

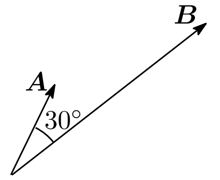
(岐阜大 2006) (m20062605)

**0.180** 関数 $y=-x^2+9$ のグラフと $x$ 軸によって囲まれる部分を $D$ とするとき，次の重積分を求めよ．

$$\iint_D (x^2+2y)dxdy$$

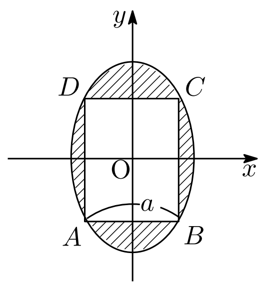
(岐阜大 2006) (m20062606)

**0.181** $\boldsymbol{A}=(a,1)$, $\boldsymbol{B}=(b,3)$ で表されるベクトル $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ のなす角が 30°，内積が 6 であるとき，$b>a>0$ を満たす $a,b$ の値を求めよ．




(岐阜大 2006) (m20062607)

**0.182** 図に示すような楕円 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に内接する長方形 $ABCD$ を考える．$AB=a$ とし，楕円と長方形で囲まれた部分の面積を $S$ とするとき，$S$ を $a$ を用いて表せ．




(岐阜大 2006) (m20062608)

**0.183** 関数 $p(x)$ が $p(x)=\begin{cases}0 & (x<-a)\\ \dfrac{x}{a^2}+\dfrac{1}{a} & (-a\leqq x<0)\\ -\dfrac{x}{a^2}+\dfrac{1}{a} & (0\leqq x\leqq a)\\ 0 & (a<x)\end{cases}$

で与えられるとき，以下の問いに答えよ．ただし，$a>0$ である．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx$ を求めよ． (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x^2p(x)dx$ を求めよ．

(岐阜大 2006) (m20062609)

**0.184** 行列 $\boldsymbol{A}$ が次のように与えられるとき，以下の問いに答えよ． $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&5\\7&3&4\\2&1&2\end{bmatrix}$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式 $|\boldsymbol{A}|$ を求めよ．　(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めよ．

(3) 行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を使って次の連立方程式を解け．
$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z = 10 \\ 7x + 3y + 4z = 3 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

(岐阜大 2006)　(m20062610)

**0.185**　$-4 + i4$ の 3 乗根を求めよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ である．

(岐阜大 2006)　(m20062611)

**0.186**　次の微分方程式を解け．ただし，$x = 1$ のとき $y = 1$ とする．　$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y^2}{x^3}$

(岐阜大 2006)　(m20062612)

**0.187**　次の 3 つの行列について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $\det A,\ \det B,\ \det C$ を求めよ．

(2) 行列 $A$ のすべての固有値，および，各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(3) 行列 $C$ の階数 (rank $C$) を求めよ．

(岐阜大 2006)　(m20062613)

**0.188**　実変数 $x, y$ の関数 $f(x, y)$ が，その定義域 $D$ において（連続な 2 階偏導関数をもち，）
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$　を満たすとき，$f(x, y)$ を（$D$ における）調和関数という．以下の問いに答えよ．ただし，以下では定義域 $D = R^2$ とする．

(1) $f(x, y) = x^3 - axy^2$ が調和関数であるように，定数 $a$ を求めよ．

(2) ある関数 $f(x, y)$ が調和関数であるとき，　$g(x, y) = -y\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y}$　で定義される $g(x, y)$ も調和関数であることを示せ．ただし，関数 $f(x, y)$ は何回でも微分可能であるとする．

(岐阜大 2006)　(m20062614)

**0.189**　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \cos(2\pi x)dx$　　(2) $\displaystyle\int \cos^2(2\pi x)dx$

(岐阜大 2006)　(m20062615)

**0.190**　$y = 2x + \sin x$ 上の点 $(0, 0)$ における接線の方程式を求めよ．

(岐阜大 2006)　(m20062616)

**0.191**　$\dfrac{x}{x^4 + 1}$ の不定積分を求めよ．

(岐阜大 2006)　(m20062617)

**0.192**　2 つのベクトル $\vec{a} = (1, 1, 0),\ \vec{b} = (2, 1, 2)$ とのなす角 $\alpha$ を求めよ．
（ただし，$0° \leqq \alpha < 180°$ とする）

(岐阜大 2006)　(m20062618)

**0.193** 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換によって，直線 $y = mx$ 上の点が，同じ直線 $y = mx$ 上の点に変換されるとき，$m$ の値を求めよ．

(岐阜大 2006)　　(m20062619)

**0.194** 微分方程式　$\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = 25e^{2x}$　を解け．

(岐阜大 2006)　　(m20062620)

**0.195** サイコロを 500 回投げるとき,「6」の目が何回出る確率が最も大きいか．

(岐阜大 2006)　　(m20062621)

**0.196** コンピュータのグラフィックディスプレイに $(x, y)$ 座標系の原点を中心とする半径 $r$ の円を描くことを考える．このとき，半径 $r$ の円は，$x$ 軸となす角 $\theta$（反時計回りを正方向とする）をパラメータとして

$$\begin{cases} x = \boxed{\quad（ア）\quad} \\ y = \boxed{\quad（イ）\quad} \end{cases}$$

と表現できるから，円を $n$ 等分して，$\Delta\theta = 2\pi/n$ より $\Delta\theta$ を求め，

$\theta_0 = 0,\ x_0 = r,\ y_0 = 0$

$\theta_{i+1} = \theta_i + \Delta\theta \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$

として，

$$\begin{cases} x_{i+1} = \boxed{\quad（ウ）\quad} \\ y_{i+1} = \boxed{\quad（エ）\quad} \end{cases}$$

より，次々と点の座標 $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$, $\cdots$ , $(x_n, y_n)$ を求め，これらの 2 点間を順次，直線で結んでいけば円を描くことができる．上記の（ア）～（エ）に入る式を答えよ．ただし,（ウ）,（エ）については，$r, \theta_i, \theta_{i+1}$ は使わない形で答えよ．

(岐阜大 2006)　　(m20062622)

**0.197** 複素数 $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ について，次の値を求めよ．ただし，$\mathrm{Re}(z)$ は $z$ の実部を，$|z|$ は $z$ の絶対値を表す．

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)|z_2|^2$$

(豊橋技科大 2006)　　(m20062701)

**0.198** 放物線 $y = x^2$ から点 $A(10, 2)$ までの最短距離を次の方法に従って求めよ．

(1)　この放物線上の点 $P(x_p, x_p^2)$ における法線の方程式を求めよ．

(2)　上で求めた法線が点 $A$ を通ることから $x_p$ を求め，点 $P$ と点 $A$ の距離を計算せよ．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062702)

**0.199** 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1)　$\dfrac{dy}{dx} + y = x$　　　　(2)　$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 3y = e^{2x}$

(豊橋技科大 2006)　　(m20062703)

**0.200** 列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $(\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b})X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ を求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が 1 次独立であることを示せ．

(3) 列ベクトル $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の 1 次結合で表せ．

(4) 実数を成分とする 2 次元列ベクトル全体のなす集合 $\boldsymbol{R}^2$ の正規直交基底 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ を，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ から作れ．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062704)

**0.201** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda_1 = -1$ と $\lambda_2 = 5$ である．以下の問に答えよ．

(1) $A$ の固有値が $\lambda_1 = -1$ と $\lambda_2 = 5$ であることを示せ．

(2) 固有値 $\lambda_1$ に対する固有空間 $W_1$ の基底と次元を求めよ．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062705)

**0.202** 以下に示す関数について次の問いに答えよ．　$f(x) = xe^{-x}$

(1) 関数 $f(x)$ を微分せよ．

(2) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点を求め，増減表を作成せよ．また，$y = f(x)$ の概形を描け．

(3) 関数 $f(x)$ の表す曲線と $x$ 軸と $x = q$ $(q > 0)$ の直線とで囲まれる図形の面積を $S(q)$ とする．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{q\to\infty} S(q)$ を求めよ．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062706)

**0.203** 袋の中に白玉 4 個と赤玉 6 個が入っている．以下の値をそれぞれ求めよ．ただし，解答は既約分数にせよ．

(1) 1 個取り出しては袋に戻す試行を 5 回行う場合，赤玉が丁度 4 回出る確率．

(2) 取り出した玉を戻さない場合，5 個取り出した中に赤玉が丁度 4 個ある確率．

(3) 取り出した玉を戻さない場合，4 個目を取り出した直後において，はじめて袋の中の白玉と赤玉の個数が同じになる確率．

(4) 同時に 2 個の玉を取り出す場合，同じ色の玉が出る確率．

(5) 取り出した玉を戻さずに，1 個ずつ取り出し，赤玉が出たら取り出しを止めるゲームをする．最終的に取り出すことができた白玉の個数を得点とする時，このゲームの得点の期待値．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062707)

**0.204** (1) $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は次の式で計算される．

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

この関係を用いて，以下に示す関数のラプラス変換を求めよ．

ただし，以下の計算では，$(\mathrm{Re}[s] > 0)$ とする．

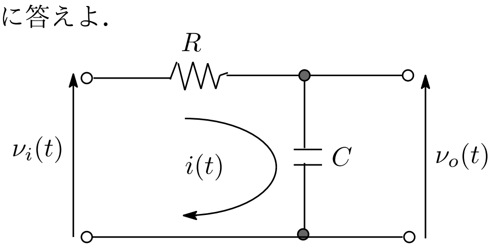
(a) $f(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$　　ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \delta(t)dt = 1$

(b) $f(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(c) $f(t) = t\,u(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(d) $f(t) = e^{-\alpha t} u(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t \geq 0 \quad (\alpha > 0) \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(2) 右図に示すように直列 $RC$ 回路について以下の問いに答えよ．




(a) 図に示すように，入力電圧を $\nu_i(t)$，出力電圧を $\nu_o(t)$，ならびに，電流を $i(t)$ とするとき，これらの関係を示す回路方程式を記述せよ．
ただし，$t = 0$ のとき，$\nu_o(t) = 0$ である．

(b) $\nu_i(t)$ , $\nu_o(t)$ ならびに $i(t)$ のラプラス変換を，それぞれ $V_i(s)$ , $V_o(s)$ そして $I(s)$ と表すものとする．このとき，(a) で求めた回路方程式をラプラス変換して，次の伝達関数 $G(s)$ を求めよ．

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

(c) $\nu_i(t)$ が次のように与えられるとき

$$\nu_i(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

出力電圧 $\nu_o(t)$ のラプラス変換 $V_o(s)$ を求めよ．

(d) $V_o(s)$ をラプラス逆変換して出力電圧 $\nu_o(t)$ を求めよ．

(e) $G(s)$ をラプラス逆変換して，インパルス応答 $g(t)$ を求めよ．

(f) インパルス応答 $g(t)$ を用いて，(c) で定義した入力電圧があるときの出力電圧 $\nu_o(t)$ を求めよ．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062708)

**0.205** 箱の中に $N$ 個の玉が入っている．これについて以下の問題文を読み，各問いに答えよ．

(1) $N$ 個の玉を 4 人に分け与える方法を考える．

(a) 各自に最低 1 個の玉を渡すとする．$N = 8$ のとき，玉を 4 人に分ける方法は何通りあるか答えよ．

(b) 玉をもらえない人がいてもよいとする．$N = 4$ のとき，玉を 4 人に分ける方法は何通りあるか答えよ．

(2) 何回かに分けて箱から玉を取り出し，箱を空にしたい．1 回に取り出せる個数は 1 個，2 個，3 個のいずれかとする．たとえば $N = 3$ のとき，箱を空にする方法は「1 回で 3 個」,「1 回目に 2 個，2 回目に 1 個」,「1 回目に 1 個，2 回目に 2 個」,「1 回目に 1 個，2 回目に 1 個，3 回目に 1 個」という 4 通りである．

(a) $N = 5$ のとき，箱を空にする方法は何通りあるか答えよ．

(b) $N = 10$ のとき，箱を空にする方法は何通りあるか答えよ．

(3) 次のルールでゲームをする．2 人で交互に箱の中から玉を取っていって，最後の玉をとった人（箱を空にした人）が「負け」とする．一度に取り出せる個数は 1 個，2 個，3 個のいずれかで，最低 1 個は取り出さなければならない．ただし箱の中にある玉の個数以上は取り出せないので，箱の中の玉が 2 個ならば，1 個あるいは 2 個を取り出すこととする．

(a) $N = 6$ になったとき，自分の番がきた．勝つためには何個取ればよいか，
以下の選択肢 $A$～$E$ から一つ選んで答えよ．

A. 1 個

B. 2 個

C. 3 個

D. 1 個でも，2 個でも，3 個でも良い（最終的に勝てる）

E. 1 個でも，2 個でも，3 個でも，最終的に負ける．

(b) $N = 123$ になったとき，自分の番がきた．勝つためには何個取ればよいか，以下の選択肢 $A$〜$E$ から一つ選んで答えよ．

A. 1 個

B. 2 個

C. 3 個

D. 1 個でも，2 個でも，3 個でも良い（最終的に勝てる）

E. 1 個でも，2 個でも，3 個でも，最終的に負ける．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062709)

**0.206** $xy$ 直交座標系の点列 $(x_i, y_i)$，$i = 1, \cdots, N$ に対し，各点からの垂直距離の 2 乗和が最小となるような直線を求めたい．次の各問いに答えよ．

(1) 次の文章中の空欄 $\boxed{\quad ア \quad}$〜$\boxed{\quad コ \quad}$ に適当な数式を入れよ．
各点に単位質量を置いたときの重心を $G$ とすると，その座標は

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\quad ア \quad} \\ \boxed{\quad イ \quad} \end{pmatrix} \tag{1}$$

となる．$xy$ 座標系に対し，この重心 $G$ を原点として，角度 $\theta$ で回転させた $uv$ 座標系を考える．このとき

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \tag{2}$$

とおけば，$(x_i, y_i)$ と $(u_i, v_i)$ との関係は $\theta$ を用いて

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\quad ウ \quad} & \boxed{\quad エ \quad} \\ -\boxed{\quad エ \quad} & \boxed{\quad ウ \quad} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} \tag{3}$$

で与えられる．もし求めたい直線を $u$ 軸にとれば，問題は

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^{N} v_i^2 \tag{4}$$

で定義される $J(\theta)$ を最小にする角度 $\theta$ を求めることに等しい．
式 (3) の $v_i$ を $\theta$ で微分し，$u_i$ を用いて表すと

$$\frac{\partial v_i}{\partial \theta} = \boxed{\quad オ \quad} \tag{5}$$

となるから，式 (4) を $\theta$ で微分して 0 とおけば

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = -2 \sum_{i=1}^{N} u_i v_i = 0 \tag{6}$$

を得る．この式 (6) に，式 (3) を代入することにより，

$$\boxed{\quad カ \quad} \sum_{i=1}^{N} x'_i y'_i = \boxed{\quad キ \quad} \sum_{i=1}^{N} ({x'_i}^2 - {y'_i}^2) \tag{7}$$

となり，次式を得る．

$$\frac{2\boxed{\quad キ \quad}}{\boxed{\quad カ \quad}} = \frac{2 \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x'_i y'_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} ({x'_i}^2 - {y'_i}^2)} \tag{8}$$

式 (8) の左辺は，倍角の公式により

$$\frac{2\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}} = \boxed{\text{ク}} \tag{9}$$

と書けるから，式 (8) は

$$\boxed{\text{ク}} = \frac{2\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i'}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} ({x_i'}^2 - {y_i'}^2)} \tag{10}$$

となる．よって，式 (10) の右辺を計算して，式 (4) を最小化する $\theta$ を求めればよい．

式 (4) を最小化する $\theta$ を $\hat{\theta}$ とし，求めたい直線が重心 $G$ を通ることを用いれば，直線の式は

$$y = \tan\hat{\theta}\left(x - \boxed{\text{ケ}}\right) + \boxed{\text{コ}} \tag{11}$$

として与えられる．

(2) 4 点 $(-1, 0)$ , $(3, 1)$ , $(4, 3)$ , $(6, 2)$ があるとする．

(a) これらの 4 点に単位質量を置いたときの重心 $G$ の座標を求めよ．

(b) これらの 4 点に関し，$\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i'$ , $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} {x_i'}^2$ および $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} {y_i'}^2$ を求めよ．

(c) これらの 4 点からの垂直距離の 2 乗和が最小となる直線の傾き $\theta$ を求めよ．ただし，分数は既約分数とし，三角関数およびその逆関数はそのままでよい（例：$\cos\dfrac{7}{4}\pi$ や　$\sin^{-1}\dfrac{1}{3}$ など）．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062710)

**0.207** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ とする．

(1) $A$ の 2 つの固有値 $\alpha$ , $\beta$ $(\alpha > \beta)$ を求めよ．

また，対応する固有ベクトルを $\begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}$ の形で求めよ（$z$ の値のみで良い）．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる行列 $P$ を求めよ．また，$P^{-1}AP$ も求めよ．

(3) $\gamma_n = \alpha^n - \beta^n$ とする．$A^n$ を $\gamma_{n-1}$ , $\gamma_n$ , $\gamma_{n+1}$ で表せ．

(名古屋大 2006)　　(m20062801)

**0.208** (1) 微分方程式 $x(-1 - 2xy)y' = 2y(1 + xy)$ を解け．

(2) 微分方程式 $y'' + 2y' + 5y = \exp x$ を解き，$y$ の一般解を求めよ．

(名古屋大 2006)　　(m20062802)

**0.209** (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 - x - 3}\,dx$ を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \pi(x^3 + x)\cos\left\{\frac{\pi}{4}(x^2 + 1)\right\}dx$ を求めよ．

(名古屋大 2006)　　(m20062803)

**0.210** ○×式の問題が $2N$ 問ある．そのうち，$N$ 問は○が正解であり，残り $N$ 問は×が正解であるとする．解答者が無作為に $N$ 問に○を，残り $N$ 問に×を解答する．このとき，正解数が $k$ 問 $(0 \leqq k \leqq 2N)$ となる確率を $P_k$ とする．

(1) $N = 3$ の場合の $P_k$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ を求めよ．

(2) ○が正解の問題に○を記し正解となった問題数を $x$ 問，×が正解の問題に×を記し正解となった問題数を $y$ 問とする．このときの $x$ と $y$ の関係を記せ．

(3) $P_k$ を求めよ．

(名古屋大 2006)　　(m20062804)

**0.211** 自然な内積を持つ $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-3\\4\\2\end{pmatrix}$ , $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\k\\4\\3\end{pmatrix}$ , $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\p\\-16\\q\end{pmatrix}$ は

i) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ とが成す角は $\dfrac{\pi}{3}$ であり，　　ii) $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次従属である

という条件をみたす．このとき次の問に答えよ．

(1) $k$ を求めよ．　　(2) $p$，$q$ を求めよ．

(名古屋工業大 2006)　　(m20062901)

**0.212** (1) $\mathbb{R}^2$ の原点 $O$ を中心とする角 $\dfrac{\pi}{4}$ の回転移動 $F_r$ を標準基底 $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ に関して行列で表せ．

(2) 標準基底に関して行列 $A=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}10&-5\\-2&11\end{pmatrix}$ と表される線形写像 $F_t\,:\,\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ がある．この線形写像 $F_t$ に回転移動 $F_r$ を合成してできる写像を $F$ と表したとき，円 $C\,:\,x^2+y^2=2$ の $F$ による像 $F(C)$ を与える方程式を求めよ．

(名古屋工業大 2006)　　(m20062902)

**0.213** (1) 次の 2 つの逆三角関数の導関数を求めよ．

(i) $\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$　　(ii) $\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(2) (1) を参考にして，原点以外で定義される関数 $f(x)=\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$ を簡単な形にせよ．

(名古屋工業大 2006)　　(m20062903)

**0.214** 次の重積分を変数変換の公式を用いて計算せよ．

$$\iint_D 2(x+y)^6(x-y)^8dxdy\ ,\qquad D=\{(x,y)\,:\,x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0,\ x+y\leqq\ 1\}$$

(名古屋工業大 2006)　　(m20062904)

**0.215** (1) 級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$ を求めよ．

(2) $\log(1+t)=t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{n}+\cdots$ , $-1<t\leq 1$ を利用して，関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+x}{3-x}\right)$ を $x-1$ のべき級数に展開せよ．

(名古屋工業大 2006)　　(m20062905)

**0.216** $D=\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\}$ のとき，重積分 $V=\displaystyle\iint_D e^{\max(x^2,y^2)}dxdy$ を求めよ．
ただし，$\max(x^2,y^2)$ は $x^2,y^2$ の小さくない方を表す．
（ヒント：領域 $D$ を $x>y$ と $x\leq y$ の二つの部分に分けて積分を考えること）

(名古屋工業大 2006)　　(m20062906)

**0.217** 行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ．

(1) 直接計算で $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{I}$ を確かめよ．ここで，$\boldsymbol{I}$ は 3 次単位行列である．

(2) (1) の結果に基づき $n \geq 4$ に対して，帰納法で $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{A}^{n-2} + \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{I}$ を証明せよ．

(3) (2) の結果を用いて $\boldsymbol{A}^{50}$ を求めよ．

(名古屋工業大 2006)　　(m20062907)

**0.218** 常微分方程式 $(2x+y)y' - (x+2y) = 0$ について次の問いに答えよ．

(1) 方程式の一般解を求めよ．　　(2) 初期条件 $y(0) = 2$ を満たす特殊解を求めよ．

(名古屋工業大 2006)　　(m20062908)

**0.219** 次の不定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int \left( x^2 + 2x + 3 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} \right) dx$

(2) $\displaystyle\int \{\sin(\omega t + a) + \cos(\omega t + b)\}\, dt$　　ただし，$\omega$，$a$，$b$ は定数である．

(3) $\displaystyle\int \sin^3\theta \; d\theta$

(三重大 2006)　　(m20063101)

**0.220** 平面極座標系 $(r, \theta)$ において　$r = \dfrac{1}{1 + \varepsilon \cos\theta}$　（ただし，$\varepsilon$ は 0 または正の整数）
と表される曲線がある．以下の問いに答えよ．

(1) この曲線の式をデカルト直交座標系 $(x, y)$ で表せ．

(2) 定数 $\varepsilon$ が以下の値のときの曲線の名称を答えよ．

(a) $\varepsilon = 0$　　(b) $0 < \varepsilon < 1$　　(c) $\varepsilon = 1$　　(d) $\varepsilon > 1$

(三重大 2006)　　(m20063102)

**0.221** 次の行列式を因数分解せよ．　$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

(三重大 2006)　　(m20063103)

**0.222** 次の固有方程式の固有値を求めよ．　$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

(三重大 2006)　　(m20063104)

**0.223** 直交座標系の単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ に関して，それぞれの位置ベクトルが

$$\overrightarrow{OA} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k} \qquad \overrightarrow{OB} = b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + a\boldsymbol{k} \qquad \overrightarrow{OC} = c\boldsymbol{i} + a\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}$$

で与えられる三点 $A, B, C$ がある．以下の問に答えよ．

(1) 二点 $AB$ 間の距離を求めよ．　　(2) $AB$ と $AC$ のなす角を求めよ．

(3) $\triangle ABC$ はどのような三角形であるかを答えよ．

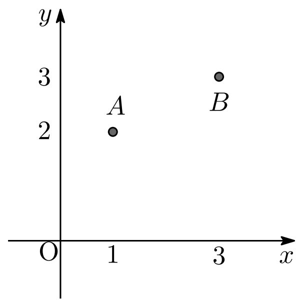
(三重大 2006)　　(m20063105)

**0.224** $xy$ 平面上の曲線 $y = f(x) = a\,\log(x+1)$ が 2 点 $A(1,2)$，$B(3,3)$ のできるかぎり近傍を通るように $a$ の値を定めたい．次の (1)〜(3) の問に答えなさい．ただし，$a$ は実数，log は自然対数の演算を表すものとする．

(1) $A$ と点 $(1, f(1))$ との距離の二乗および $B$ と点 $(3, f(3))$ との距離の二乗の合計を $g(a)$ とする時，$g(a)$ を $a$ で表しなさい.

(2) $g(a)$ が最小となるような実数 $a$ の値を求めなさい.

(3) $g(a)$ が最小となる時の $f(x)$ の曲線を右上の図に描き入れなさい.




(三重大 2006)　　(m20063106)

**0.225** 行列 $A = \begin{pmatrix} m & m+5 \\ 2-m & -m \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい．ただし、$m$ は実数とする.

(1) $A$ が逆行列を持たないとき，$A^2$ を求めなさい.

(2) $A^{-1} = A$ となるような $m$ の値を求めなさい.

(三重大 2006)　　(m20063107)

**0.226** 1 辺が 10cm の正方形を底面にもつ，高さ 15cm の四角錐の容器を上下逆さまに置く．この容器に毎秒 0.5cm$^3$ の割合で水を静かに注ぐとき、以下の問に答えなさい.

(1) $t$ 秒後の水面の深さを $y$(cm)，水面の 1 辺の長さを $x$(cm) としたとき，水面の面積 $S$(cm$^2$) と水の体積 $V$(cm$^3$) を $x, y$ であらわせ．また，$x$ と $y$ の関係を示しなさい.

(2) 水面の 1 辺の長さ $x$(cm) を $t$ で表しなさい。

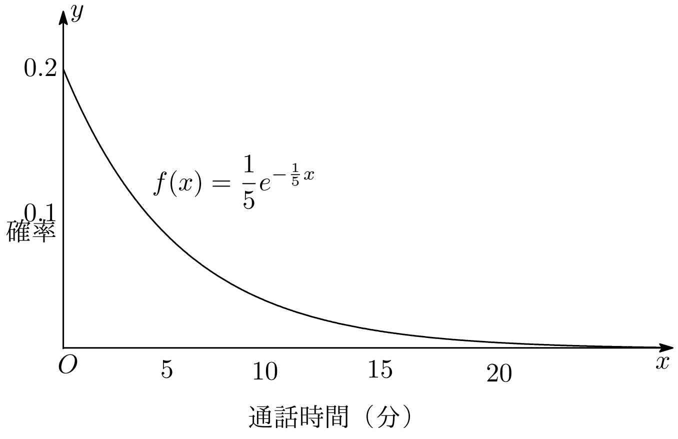
(3) 水面の面積 $S$(cm$^2$) を $t$ で表し、$S$ の増加する割合を求めなさい.

(三重大 2006)　　(m20063108)

**0.227** ある人の電話の通話時間 $x$(分) との頻度確率との関係（確率分布）が

$$f(x) = \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x} \qquad (\ x > 0\,,\ e \text{ は自然対数の底})$$

で表されるものとする時，次の (1)〜(5) の問いに答えなさい.




(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ の値を求めなさい.

(2) 通話時間が 10 分である（ちょうど 10 分後に通話が終了する）確率を求めなさい.

(3) 通話が 10 分以内に終了する確率を求めなさい.

(4) 通話を始めてから 10 分が経過している時点において，さらにその後 10 分以内に通話が終了する確率を求めなさい.

(5) この人の平均通話時間を求めなさい。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \cdot e^{-ax} = 0$, $(a > 0)$ である.

(三重大 2006)　　(m20063109)

**0.228** 空間ベクトル $\boldsymbol{m} = (1, -3, 1)$ と $\boldsymbol{n} = (3, 2, -2)$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) $\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ のなす角 $\theta$ の余弦 $\cos\theta$ の値を求めなさい．

(2) $\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の面積を求めなさい．

(3) 点 $A = (1, 4, 0)$ を通り，$\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ に平行な平面の方程式を求めなさい．

(三重大 2006)　　(m20063110)

**0.229** (1) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ の第 $n$ 次導関数を求めなさい．ただし，$n$ は正の整数とする．

(2) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ のマクローリン級数とその収束半径を求めなさい．

(3) (2) の結果を用いて，$g(x) = \log(1+x)$ のマクローリン級数とその収束半径を求めなさい．

(三重大 2006)　　(m20063111)

**0.230** (1) 位置ベクトル $\boldsymbol{a} = (1, 0, 1)$ と $\boldsymbol{b} = (1, \sqrt{6}, 1)$ がなす角 $\theta$ を求めなさい．

(2) (1) の $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に直交する単位ベクトルの一つ求めなさい．

(3) (1) の $\boldsymbol{a}$ の終点と $\boldsymbol{b}$ の終点を通る直線を考える．この直線上の任意の点を終点とする位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を用いて求めなさい.（パラメータを一つ使ってもよい）.

(三重大 2006)　　(m20063112)

**0.231** 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．　$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(三重大 2006)　　(m20063113)

**0.232** 正の整数 $N$ を 8 進数で表した時，$n$ 桁の数になったとする．

(1) $N$ の取り得る最大値と最小値（例えば，$n = 2$ に限れば，$8 \leqq N \leqq 63$）を $n$ を用いて表せ.（答のみの記載でも良い）

(2) (1) の結果を用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 N}{n}$ を求めなさい.（途中経過を，詳しく答案用紙に記載せよ.）

(三重大 2006)　　(m20063114)

**0.233** 以下の不定積分を求めよ．　$\displaystyle\int \frac{x}{2x^2 - 5x + 2}\, dx$

(三重大 2006)　　(m20063115)

**0.234** (1) 2 項定理を利用して，$(x - 2y)^8$ の $x^6 y^2$ の係数を求めよ．

(2) $x + y + z = 18$ を満足する非負の整数の値の組 $(x, y, z)$ の個数を求めよ．

(三重大 2006)　　(m20063116)

**0.235** 確率密度が　$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$　で与えられる分布について，次の問に答えよ．

(1) この分布の平均を求めよ．　(2) この分布の分散を求めよ．

(3) この分布のモーメント母関数を求めよ．

(三重大 2006)　　(m20063117)

**0.236** (1) 複素行列 $\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix}$ の固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$ を求めよ．ここで，$a, b, c, d$ は実数であり（ただし，$c \neq 0$），$i^2 = -1$ である．

(2) $\lambda_1$, $\lambda_2$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を求め，エルミート内積 $(\boldsymbol{x}_1\ \ \boldsymbol{x}_2)=\sum_{j=1}^{2} x_{1j}{}^{*} x_{2j}$ を計算せよ．ただし，$x_{ij}$ は $\boldsymbol{x}_i$ の $j$ 成分であり $(i,j=1,2)$，$\alpha^*$ は $\alpha$ の複素共役を表す．

(三重大 2006)　　(m20063118)

**0.237** (1) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ であることを導け．ただし，$\alpha>0$ とする．

(2) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-\alpha x^2}dx$ を求めよ．

(三重大 2006)　　(m20063119)

**0.238** 3 次行列と $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ と 4 つのベクトル

$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,　$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,　$\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,　$\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ に対して次の問に答えよ．

(1) $A$ の行列式の値を求めよ．　　(2) $A$ の逆行列を求めよ．

(1) $\boldsymbol{d}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{c}$ の一次結合として $\boldsymbol{d}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$ $(x,\ y,\ z$ は実数$)$ の形で表せ．

(奈良女子大 2006)　　(m20063201)

**0.239** (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x^2+1}$ および $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}$ を求めよ．

(2) 関数 $e^{-x^2}$ を微分せよ．

(奈良女子大 2006)　　(m20063202)

**0.240** 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$ の値を求めよ．

(奈良女子大 2006)　　(m20063203)

**0.241** 実数 $\theta$ に対して $A(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とおく．また，2 次の単位行列を $E$ とおく．次の問に答えよ．

(1) ${}^tA(\theta)A(\theta)=E$ となることを示せ．ただしここで，${}^tA(\theta)$ は $A(\theta)$ の転置行列である．

(2) $A(-\theta)$ が $A(\theta)$ の逆行列であることを示せ．

(3) 実数 $\theta$, $\theta'$ に対し，$A(\theta)A(\theta')=A(\theta+\theta')$ が成り立つことを示せ．

(奈良女子大 2006)　　(m20063204)

**0.242** $\boldsymbol{R}^3$ のデカルト座標を $x,y,z$ とする．$x^2+y^2+z^2=1$ の拘束条件のもとで，
関数 $f(x,y,z)=3x^2+2xy+2xz+4yz$ の最大値，最小値とそれらを与える $(x,y,z)$ を求めよ．

(京都大 2006)　　(m20063301)

**0.243** 関数 $f(x),g(x)$ 区間 $[a,b]$ において連続で，かつ $g(x)>0$ であるとする．このとき，

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

をみたす $\xi$ が区間 $[a,b]$ 内に存在することを示せ．

(京都大 2006)　　(m20063302)

**0.244** ある事象の起こる確率 $p$ が与えられているとき，$n$ 回の独立試行を行って事象が $k$ 回起こる確率を $b_k$ とする（これをパラメータ $n, p$ の二項分布という）．なお，以下の問いでは，$q = 1 - p$ として，次の二項定理を利用してよい． $(px+q)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k p^k q^{n-k} x^k$

ここで，${}_nC_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ は二項係数である．

(1) 確率 $b_k$ を記し，$\sum_{k=0}^{n} b_k = 1$ となることを示せ．

(2) 二項分布の平均値 $\mu$ と分散 $\sigma^2$ を求めよ．

(3) 事象が起こる回数を確率変数 $r$ として，$r$ に関するチェビシェフの不等式を次式で表す．

$$P(|r-\mu| \leq a\sigma) \geq 1 - \frac{1}{a^2}$$

ここで，$a$ は適当な正の数である．試行回数を増やせば，事象の起こる割合は一定の値 $p$ に近づくことを示せ．

(京都大 2006) (m20063303)

**0.245** 次のラプラスの積分を考える． $I(a) = \int_0^{\infty} \exp[-x^2] \cos 2ax \, dx$ 以下の問に答えよ．

(1) 平面の直角座標 $(x, y)$ から極座標 $(r, \theta)$ への変換公式を用いて，$x^2 + y^2$ および $dxdy$ を極座標で表せ．

(2) 積分 $I(0)$ の値は $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ と求められることを，$I(0)^2$ を計算して示せ．

(3) 積分 $I(a)$ の値を求めよ．例えば，$I(a)$ を $a$ に関して微分してみる．

(京都大 2006) (m20063304)

**0.246** $a$ を $-1 < a < 1$ なる実数とする．複素数 $z$ に対して

$$w = \frac{z - ai}{1 + aiz}$$

とおく．$i = \sqrt{-1}$ は複素単位．以下の問いに答えよ．

(1) 複素数平面で点 $z$ が単位円周 $C = \{z \mid |z| = 1\}$ 上を動くとき点 $w$ はどのような図形を描くか．

(2) 複素数平面で点 $z$ が単位円周 $C = \{z \mid |z| = 1\}$ の内部にあるとき点 $w$ はどのような領域にあるか図示せよ．

(京都大 2006) (m20063305)

**0.247** $C$ を複素数平面上の単位円周 $C = \{z \mid |z| = 1\}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 原点を中心とする開円盤 $D_1 = \{z \mid |z| < 2\}$ で正則な関数 $f(z)$ に対し，積分
$I = \int_C \dfrac{f(z) - f(0)}{z} dz$ の値を求めよ．

(2) 関数 $g(z) = \dfrac{1}{z}$ に対し，積分 $\phi(z) = \int_C \dfrac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ で与えられる領域 $D_2 = \{z \mid |z| > 1\}$ 上の正則関数 $\phi(z)$ を求めよ．

(京都大 2006) (m20063306)

**0.248** (1) 複素数 $w$ に対して，級数

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=1}^{\infty} (-w)^{n-1}, \quad (|w| < 1) \cdots ①$$

の両辺を $w=0$ から $w=z$ まで積分することで，複素関数 $\mathrm{Log}(1+z)$ を $z=0$ において，テイラー展開せよ．ただし，$\mathrm{Log}(1+z)$ は $-\pi <\mathrm{Im}\log(1+z)\leq\pi$ なる $\log(1+z)$ の主値を表す．級数 ① の項別積分可能性は明らかとしてよい．

(2) 任意の複素数 $z$ について

$$\lim_{n\to\infty} n\mathrm{Log}\left(1+\frac{z}{n}\right)=z \quad \cdots ②$$

を示せ．

(3) ② を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^z$ を示せ．

(京都大 2006) (m20063307)

**0.249** 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z & -y \\ 1 & -z & 0 & x \\ 1 & y & -x & 0 \end{vmatrix}$ を計算せよ．

(京都工芸繊維大 2006) (m20063401)

**0.250** 極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^{\sqrt{x}}$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2006) (m20063402)

**0.251** $-1\leqq x\leqq 1$ のとき，不等式 $\sin^{-1}x+\sqrt{2(1-x)}\leqq\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ．
ただし $\sin^{-1}$ は $\sin$ の逆関数の主値である．

(京都工芸繊維大 2006) (m20063403)

**0.252** 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}dx$ を計算せよ．

(京都工芸繊維大 2006) (m20063404)

**0.253** 微分方程式 $y''-2y'-3y=3x^2+x$ を考える．

(1) $x$ の 2 次多項式で，この微分方程式の解であるものを求めよ．

(2) この微分方程式の一般解を求めよ．

(京都工芸繊維大 2006) (m20063405)

**0.254** 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2)$

(京都工芸繊維大 2006) (m20063406)

**0.255** 次の定積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

(京都工芸繊維大 2006) (m20063407)

**0.256** 実数 $a_1,a_2,b_1,b_2$ (ただし $a_1\neq a_2$) について，2 変数 $x,y$ の関数

$$Q(x,y)=(x+a_1y-b_1)^2+(x+a_2y-b_2)^2$$

を考える．このとき，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}=0$ をみたす $x,y$ の値を $a_1,a_2,b_1,b_2$ を用いて表せ．

(京都工芸繊維大 2006) (m20063408)

**0.257** 領域 $D=\{(x,y)\ :\ 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x^2\}$ に対して重積分 $\displaystyle\iint_D\frac{x}{1+y}dxdy$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2006) (m20063409)

**0.258** 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x \qquad\qquad + z \qquad\qquad = 1 \\ 2x + y + 2z - 2w = 3 \\ x - y + z + 2w = k - 3 \end{cases}$ が解をもつように定数 $k$ の値を定め，これを解け．また，係数行列 $A$ を示し，その階数 rank $A$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2006)　　(m20063410)

**0.259** 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値とその固有ベクトルをすべて求めよ．

さらに，$A^n$($n$ は自然数) の行列式の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2006)　　(m20063411)

**0.260** 行列 $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -16 \\ -6 & 1 & 12 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ．

(1) 行列 $A$ の固有値，単位固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) 行列 $A$ の表す 1 次変換によって，直線 $x = 3y = 3z$ が写される直線を示せ．

(3) 行列 $A$ の表す 1 次変換によって自分自身に写される直線の中で，どの 2 組も平行でないものを 3 つ求めよ．

(大阪大 2006)　　(m20063501)

**0.261** 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{3^n}$ について，次の問に答えよ．

(1) 無限級数の第 $N$ 部分和 $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{3^n}$ を求めよ．

(2) (1) で求めた第 $N$ 部分和を用いて，$S_N$ が収束するかどうか判定せよ．収束する場合は，収束値を求めよ．

必要があれば，$(1+a)^N = \displaystyle\sum_{j=0}^{N}{}_NC_j a^j \geq 1 + Na + \frac{N(N-1)}{2}a^2$ の関係を用いよ．但し，$N$ は自然数，$a$ は正の実数であるとする．

(大阪大 2006)　　(m20063502)

**0.262** 微分方程式

$$x^2y'' - xy' + y = f(x) \qquad (A)$$

について，以下の問に答えなさい．ただし $x > 0$ とする．

(1) $f(x) = 0$ のとき，$y_1 = x$ は微分方程式 (A) の特殊解であることを示しなさい．

(2) $u$ を $y = uy_1$ を満足する関数，$w$ を $w = u'$ を満足する関数とするとき，微分方程式 (A) を $w$ の $x$ に関する一階の微分方程式に変形しなさい．

(3) $f(x) = 0$ のとき，微分方程式 (A) を解きなさい．

(4) $f(x) = x^2\sqrt{x}$ のとき，微分方程式 (A) を解きなさい．

(大阪大 2006)　　(m20063503)

**0.263** 2 つの曲線　$(y-a)^2 = a(a+x)$,　$(y-a)^2 = a(a-x)$　がある．ただし，$a > 0$ とする．次の問に答えなさい．

(1) 2 つの曲線の交点を求めなさい．また 2 つの曲線の概形を描きなさい．

(2) $x-y$ 平面において，2 つの曲線で囲まれる領域の面積を求めなさい．

(3) 2 つの曲線で囲まれる領域を $y$ 軸まわりに 1 回転させた時にできる立体の体積を求めなさい．

(4) 2 つの曲線で囲まれる領域を $x$ 軸まわりに 1 回転させた時にできる立体の体積を求めなさい．

(大阪大 2006)　　(m20063504)

**0.264** 実軸上で定義された関数 $y(x)$ についての微分方程式

$$xy'' - (x+1)y' + y = 2x^2e^{2x} \qquad (A)$$

の一般解を求めたい．

(1) (A) に対応する斉次方程式　$xy'' - (x+1)y' + y = 0$　は $y = e^{px}$ ($p$ は定数) の形の解をもつ．この解を求めよ．

(2) $y = e^{px}u$ ($p$ は (1) で得られた値，$u$ は $x$ の関数) とおいて (A) に代入し，$u$ が満たすべき微分方程式を求めよ．

(3) (2) で得られた微分方程式を解くことにより，(A) の一般解を求めよ．

(大阪大 2006)　　(m20063505)

**0.265** 点 $A(1,0)$ を点 $A'(a,0)$ に，点 $B(1,1)$ を点 $B'(a+b, 1-a)$ に移す 1 次変換を $f$ とする．ただし，$a, b$ は実数とする．また，$f$ を表す行列を $F$ とする．

(1) 行列 $F$ を $a, b$ を用いて表せ．

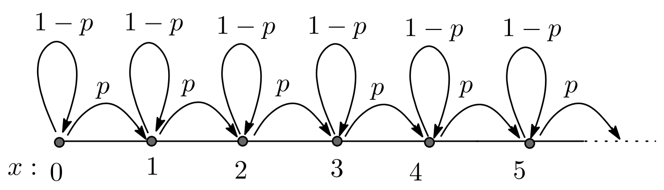
(2) 行列 $F$ が対角化できるための $a, b$ に関する必要十分条件を求めよ．また，対角化できる場合は対角化せよ．

(3) 1 次変換 $f$ の $n$ 回の積を $f^n$ とする．点 $(x_0, y_0)$ が 1 次変換 $f^n$ によって移される点 $(x_n, y_n)$ を $a, b, x_0, y_0$ を用いて表せ．

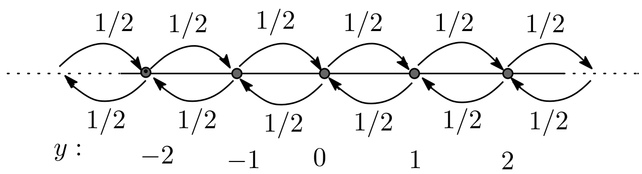
(大阪大 2006)　　(m20063506)

**0.266** 確率的な駒の移動について，以下の設問に答えよ．(必ず導出の過程を示すこと．)

(1) 時刻 0 での駒の位置を 0 とする．時刻 $t$ における駒の位置を $x$ とするとき，確率 $p$ で 1 つ右 $x+1$ に移動し，確率 $1-p$ でその場に留まるものとし，次の時刻 $t+1$ の駒の位置を定める．各時刻 $t = 0, 1, 2, \cdots$ の駒の位置を確率変数 $X_t$ で表し，各試行は互いに独立する．このとき各時刻 $t = 0, 1, 2, \cdots$ および各 $x = 0, 1, 2, \cdots$ に対し $P(X_t = x)$ を表す式を求めよ．




(2) 時刻 0 での駒の位置を 0 とする．時刻 $t$ における駒の位置を $y$ とするとき，確率 1/2 で 1 つ右 $y+1$ に移動し，確率 1/2 で 1 つ左 $y-1$ に移動するものとして，次の時刻 $t+1$ の駒の位置を定める．各時刻 $t = 0, 1, 2, \cdots$ の駒の位置を確率変数 $Y_t$ で表し，各試行は互いに独立する．このとき各時刻 $t = 0, 1, 2, \cdots$ および各 $y = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$ に対し $P(Y_t = y)$ を表す式を求めよ．




(大阪大 2006)　　(m20063507)

**0.267**　次の 2 階線形常微分方程式を考える：

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0. \qquad (*)$$

ここで，$a(t), b(t)$ は実軸上で定義された有界な連続関数とする．このとき次の問に答えなさい．

(1)　$x_1, x_2$ を $(*)$ の解とし，これらに対して関数 $J$ を

$$J(t) := \det \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ {x_1}'(t) & {x_2}'(t) \end{bmatrix}$$

と定める．このとき $J$ は次の 1 階常微分方程式を満足することを示しなさい:

$$J'(t) = -a(t)J(t).$$

(2)　上記 (1) と同様に，$x_1, x_2$ を $(*)$ の解として，さらに

$$J(0) = \det \begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ {x_1}'(0) & {x_2}'(0) \end{bmatrix} \neq 0$$

と仮定する．このとき，任意の $t$ において，2 つのベクトル $(x_1(t), {x_1}'(t))$, $(x_2(t), {x_2}'(t))$ は 1 次独立となることを示しなさい．

(3)　$x_1, x_2, x_3$ を $(*)$ の 3 つの解とする．このとき，任意の $t$ で

$$\det \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \\ {x_1}'(t) & {x_2}'(t) & {x_3}'(t) \\ {x_1}''(t) & {x_2}''(t) & {x_3}''(t) \end{bmatrix} = 0$$

であることを示しなさい．また，ある 3 つの実数の組 $(c_1, c_2, c_3) \neq (0, 0, 0)$ があって，任意の $t$ で

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + c_3x_3(t) = 0$$

が成り立つことを示しなさい．

(大阪大 2006)　　(m20063508)

**0.268**　複素平面上の点 $a$ を内部に含む領域で正則な関数 $f(z), g(z)$ が与えられ，$f(a) \neq 0$ とする．

(1)　$a$ が $g(z)$ の 1 位の零点のとき，$\dfrac{f(z)}{g(z)}$ の $a$ における留数を $f, g$ の $a$ における値とそれぞれの導関数の $a$ における値を用いて表しなさい．

(2)　$a$ が $g(z)$ の 2 位の零点のとき，$\dfrac{f(z)}{g(z)}$ の $a$ における留数を $f, g$ の $a$ における値と，それぞれの 3 階までの導関数の $a$ における値を用いて表しなさい．

(3)　$n$ を自然数とするとき，$\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^{2n}}{(z-1)^n} dz$ の値を求めなさい。

(大阪大 2006)　　(m20063509)

**0.269**　閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上で定義された，1 階連続微分可能（1 階導関数が存在して連続）な奇関数 $f(t)$ が与えられている．

(1) 実数列 $\{a_k\}$ を次のように定める： $a_k := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\ dt$, $k = 1, 2, \cdots$.

このとき $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ を示しなさい．また $\sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2 < \infty$ であることを示しなさい．

(2) 上記 (1) で定めた実数列 $\{a_k\}$ に対して， $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2$ が成立したとすると，

$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) - \sum_{k=1}^{N} a_k \sin kt \right|^2 dt = 0$ となることを示しなさい．また，この逆も成立することを示しなさい．

(大阪大 2006)　　(m20063510)

**0.270** $X$ と $Y$ は独立な確率変数で共に次の指数分布に従うものとする．すなわち，分布密度関数が
$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$ であるものとする．ただし，$\lambda > 0$.

(1) $X < Y$ となる確率 $P(X < Y)$ を求めなさい．

(2) $\min\{X, Y\}$ の分布密度関数を求めなさい．ただし，$\min\{x, y\}$ は $x$ と $y$ のうち，大きくない方を表す．

(3) $a < b < 0$ のとき，確率 $P(a < X - Y < b)$ を求めなさい．

(大阪大 2006)　　(m20063511)

**0.271** 次の連立方程式について，以下の問に答えよ。 $\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + 3y + 4z = b \\ 3x + 4y + 5z = c \end{cases}$

(1) 係数行列の階数 (rank) を求めよ．

(2) この連立一次方程式が解をもつための必要十分条件を求めよ。

(3) 解があるときそれを求めよ．

(大阪府立大 2006)　　(m20063601)

**0.272** 次の形に書ける微分方程式を同次形という． $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

(1) 同次形の微分方程式は，変数分離型に変換して解くことができる．この変換を示して，解を得るプロセスについて説明せよ．

(2) (1) を利用して $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$ の一般解を求めよ．

(大阪府立大 2006)　　(m20063602)

**0.273** (1) $-1$ の 5 乗根を求めよ．

(2) 次の積分を留数を用いて求めよ． $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)(x^2+4)}$

(大阪府立大 2006)　　(m20063603)

**0.274** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を行列式が 1 の行列とする：$ad - bc = 1$．$A$ のトレース $a + d$ を $t$ とする：$t = a + d$.
このとき

$$A^2 = f(t)A + g(t)I$$

を満たす関数 $f(t)$, $g(t)$ を求めよ．ここで，$I$ は単位行列を表す．ただし，$A \neq \pm I$ と仮定しておく．さらに，$t = 0$ または $t = \sqrt{2}$ のとき，それぞれ $A^4 = I$ または $A^4 = -I$ となることを示せ．

(神戸大 2006)　　(m20063801)

**0.275** 関数 $g_{a,b,c,d}(t)$ を $\quad g_{a,b,c,d}(t)=\dfrac{at+b}{ct+d}$ $\quad$ で定義する．ここで $a,b,c,d$ は $ad-bc\neq 0$ を満たす任意の実定数．このとき $g=g_{a,b,c,d}(t)$ は

$$(*) \qquad \left(\frac{g''}{g'}\right)'=\frac{1}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2$$

を満たすことを示せ．ここで，$'=d/dt$.

さらに任意の $a,b,c,d,\hat{a},\hat{b},\hat{c},\hat{d}$ $(ad-bc\neq 0\,,\ \hat{a}\hat{d}-\hat{b}\hat{c}\neq 0)$ に対して

$$g=g_{a,b,c,d}(g_{\hat{a},\hat{b},\hat{c},\hat{d}}(t))=g_{a,b,c,d}\circ g_{\hat{a},\hat{b},\hat{c},\hat{d}}(t)$$

も $(*)$ を満たす理由を説明せよ．

(神戸大 2006) (m20063802)

**0.276** 次の重積分を求めよ． $\displaystyle\int_{0\leq y\leq\sqrt{1-x^2}} x^2y\,dxdy$

(神戸大 2006) (m20063803)

**0.277** $r:[a,b]\ \longrightarrow \boldsymbol{R}^+$ を連続微分可能な関数とし，$(x,y)-$ 平面上の曲線 $x=r(\theta)\cos\theta\,,\ y=r(\theta)\sin\theta\,,$ $a\leq\theta\leq b$ を $\alpha$ とする．ここで $0\leq a\leq b\leq\pi/2$. 曲線 $\alpha$ 上の各点と原点を結ぶ線分から出来る扇形領域の面積を $\mathcal{A}$, $\alpha$ の長さを $\mathcal{L}$ とするとき

$$\mathcal{A}=\int_a^b f(r)d\theta\ , \qquad \mathcal{L}=\int_a^b g(r,r')d\theta$$

となる $f(r)$ と $g(r,r')$ を与えよ．さらに $r(\theta)=1/\cos\theta$ の場合の $\mathcal{A}$ または $\mathcal{L}$ の上記公式を用いて

$$\int_0^{\pi/3}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\sqrt{3}$$

を説明せよ．

(神戸大 2006) (m20063804)

**0.278** (1) 次の関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $\partial f/\partial x\,,\ \partial f/\partial y$ を計算せよ．$\sin^{-1}$ は $\sin$ の逆関数.

$$\text{(i) } f(x,y)=e^{3x}\cos 2y\ , \qquad \text{(ii) } f(x,y)=\sin^{-1}\frac{x}{y}$$

(2) 関数 $f(y_1,y_2)$ が 2 階連続微分可能であるとき，$f(ax_{11}+bx_{12}\,,\ ax_{21}+bx_{22})$ $(a,b$ は定数$)$ について $\quad\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{22}\partial x_{11}}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{21}\partial x_{12}}$ $\quad$ を計算せよ

(神戸大 2006) (m20063805)

**0.279** 次の 2 次対称行列 $\quad A=\begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$ $\quad$ を直交行列 $P$ を用いて対角化せよ．

(神戸大 2006) (m20063806)

**0.280** 微分可能な関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義式 $\quad f'(x)=\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ を用いて, 以下の微分公式を証明せよ．

(1) $y(x)=u(x)v(x)$ の微分 : $y'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

(2) $y(x)=\sin(x)$ の微分 : $y'(x)=\cos(x)$ $\quad$ ただし, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を利用してもよい．

(鳥取大 2006) (m20063901)

**0.281** (1) $Z=f(x,y)=\sin(x)\cos(y)\,,\ x=e^t\,,\ y=\log_e(t)$ のとき, $dZ/dt$ を $t$ の関数として求めよ．

(2) $xy$ 平面上の点 $(x, y)$ が $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ で表される曲線上を動くとき, 関数 $Z = f(x, y) = x + 2y + 5$ が極値をとる点 $(x, y)$ とその極値を求めよ（偏微分の手法を用いて解答すること）.

(鳥取大 2006) (m20063902)

**0.282** 次の積分を計算せよ.

(1) $I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{a^2x^2 - b^2} dx\,,\ a > 0\,,\ b > 0$ (2) $I_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx\,,\ a > 0$

(鳥取大 2006) (m20063903)

**0.283** $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx$ $(a > 0)$ とおくとき, 以下の問に答えよ.

(1) $I_1$ を求めよ.

(2) $n \geq 2$ に対し, $I_n = \dfrac{1}{2(n-1)a^2}\left\{\dfrac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right\}$ が成り立つことを示せ.（ヒント：$I_{n-1}$ を部分積分すれば, $I_n$ との関係が求まる.）

(3) 上の結果を用いて, $I_3$ を求めよ.

(鳥取大 2006) (m20063904)

**0.284** 質量 $m$ の雨の粒子が落ちはじめてから $t$ 秒後の速度を $v(t)$ とすると,

$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - cv(t) \ \ (m, g, c \text{ は定数})$$

が成り立つ. この微分方程式を満たす $v(t)$ を変数分離法で求めよ. ただし, 初期条件は, $t = 0$ で $v = 0$ とする.

(鳥取大 2006) (m20063905)

**0.285** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ のとき, $X + Y = A$, $X - Y = B$ となる行列 $X, Y$ を求めよ.

(鳥取大 2006) (m20063906)

**0.286** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ について, ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ を計算せよ. なお ${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置行列を意味する.

(鳥取大 2006) (m20063907)

**0.287** 正方行列 $A$ が ${}^tA = -A$ を満たすとき $A$ は交代行列であるという. $A$ が対称行列であり交代行列でもあるとき, $A = O$（零行列）であることを示せ.

(鳥取大 2006) (m20063908)

**0.288** 次の連立一次方程式を消去法（掃き出し法）によって解け. $\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y + z & = & 2 \\ 4x - 2y + z & = & 3 \\ -2x + y + 3z & = & 1 \end{array}\right.$

(鳥取大 2006) (m20063909)

**0.289** 次の行列式を因数分解せよ. $\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$

(鳥取大 2006) (m20063910)

**0.290** 次の行列式を計算せよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

(鳥取大 2006) (m20063911)

**0.291** 次の行列 $A$ に対して $A = X + Y$ となる対称行列 $X$ と交代行列 $Y$ を求めなさい．

（行列 $M$ の転置行列を $M'$ で表すとき, 対称行列とは $M = M'$ となる行列で, 交代行列は $-M = M'$ となる行列である．交代行列の対角成分は 0 である．交代行列は歪対称行列とも呼ばれる）

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

(鳥取大 2006) (m20063912)

**0.292** 次の連立方程式を解きなさい． $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(鳥取大 2006) (m20063913)

**0.293** 次の行列 $A$ に対して以下の設問 (1), (2) に答えよ． $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(1) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．固有ベクトルは第一成分（$x$ 成分）が 1 のものを求めよ．

(2) 行列 $A$ を用いて, 2 変数関数 $f(x,y)$ を以下の式で定義する．

$$f(x,y) = (x \;\; y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (x, y \text{ は実数})$$

この 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して $f(x,y) = a(x+y)^2 + b(x-y)^2$ となるように $a, b$ を求めよ．

(鳥取大 2006) (m20063914)

**0.294** (1) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ のすべての固有値および固有ベクトルを求めよ．

(2) 一次方程式

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

が解をもつのは，$a, b, c$ の間にどのような関係が成り立つときか答えよ．

(岡山大 2006) (m20064001)

**0.295** $n = 1, 2$ に対して，極座標で与えられた曲線 $C_n : r^n = \cos n\theta$ を考える。次の問に答えよ。

(1) 曲線 $C_1$ を $xy$ 平面に描き，$x$ 軸のまわりに回転してできる図形の表面積を求めよ．

(2) 曲線 $C_2 (0 \leq \theta \leq \pi/4)$ の長さ $l$ は，$l = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$ で与えられることを示せ．

(岡山大 2006) (m20064002)

**0.296** $c_1, c_2$ を定数とする．$y$ を微分方程式 $(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0,\ y(0) = c_1,\ y'(0) = c_2$ の解とする．

(1) 非負な整数 $n$ に対して，$y^{(n)}(0)$ を求めよ．　(2) $y$ を求めよ．

(岡山大 2006)　(m20064003)

**0.297** $p > 0$ を定数とし，$\mathbb{R}$ 上の関数 $f$ を，$f(x) = \begin{cases} x^p \sin \dfrac{1}{x^2} & (x > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x \leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ で定義する．

(1) $f$ は $\mathbb{R}$ 上で連続であることを示せ．

(2) $f$ が $\mathbb{R}$ 上で微分可能となるような $p$ の値の範囲を求めよ．

(3) $f$ が $\mathbb{R}$ 上で微分可能で，さらにその導関数が連続となるような $p$ の値の範囲を求めよ．

(広島大 2006)　(m20064101)

**0.298** $\mathbb{R}^n$ に属する $m$ 個のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ に対して，次の命題 $(*)$ が真であるとき $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ は 1 次独立であるといい，偽であるとき $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ は 1 次従属であるという。

$(*)$「 $c_1, \cdots, c_m \in \mathbb{R}$ が $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{0}$ を満たせば $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ となる」

(1) 命題 $(*)$ の否定命題を述べよ．

(2) 次で与えられるベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ が 1 次独立であるか，1 次従属であるかを判定せよ．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(3) $A$ は相異なる実数の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ をもつ 3 次の実正方行列で，$\boldsymbol{e}_j \neq \boldsymbol{0}$ $(j = 1, 2, 3)$ は $\lambda_j$ に対応する固有ベクトルとする．このとき，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ．

(広島大 2006)　(m20064102)

**0.299** 次の問に答えよ．ただし，$\log$ は自然対数を表す．

(1) 2 以上の自然数 $n$ に対して $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \log n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ が成り立つことを示せ．

(2) 実数 $x > -1$ に対して不等式 $\log(1 + x) \leqq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ が成り立つことを示せ．

(3) 自然数 $n$ に対して $\gamma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$ と定めると，$\gamma_n > 0$ であり，$\{\gamma_n\}$ は単調減少数列になることを示せ．

(広島大 2006)　(m20064103)

**0.300** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ．ただし，$a$ は実数とする．

(1) 行列 $A$ の階数を求めよ．

(2) 三つの平面

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \quad x - y + z = 0 \\ \pi_2 &: \quad 2x + y - 4z = 0 \\ \pi_3 &: \quad x + 2y + az = 0 \end{aligned}$$

の交点全体はどのような図形になるかを述べ，その理由を説明せよ．

(3) $a = -5$ のとき，$A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(広島大 2006) (m20064104)

**0.301** $a, b$ は実定数で $a \neq 0$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx$, $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx$ を求めよ．

(2) 1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + ay = \cos bx \qquad (*)$$

の一般解を求めよ．

(3) 初期値 $y(0)$ がどのような値であっても，$x \to \infty$ のとき微分方程式 $(*)$ の解 $y(x)$ が収束するための必要十分条件を $a$ と $b$ を用いて表せ．

(広島大 2006) (m20064105)

**0.302** 以下の関数を $x$ で微分せよ．

(1) $F(x) = (2-x)\ln(x)$　　(2) $F(x) = \dfrac{1-x}{3+x^2}$

(広島大 2006) (m20064106)

**0.303** 次の定積分を計算せよ． $\displaystyle\int_0^\infty \cos(ax)e^{-x}dx$ （ただし，$a$ は正定数）

(広島大 2006) (m20064107)

**0.304** 2 次元直交座標系における 2 軸を $x$ 軸，$y$ 軸とするとき，$y = x^2$ で表される曲線がある．この曲線の，点 $(0, 0)$ から点 $(a, a^2)$ までの長さを求めよ．

(広島大 2006) (m20064108)

**0.305** 次の 3× 3 行列の固有値を求めよ． $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(広島大 2006) (m20064109)

**0.306** (1) 数学的帰納法によって，次の式を証明せよ．ただし，$n$ は正の整数である．

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

(2) 次の無限級数の和 $S$ を求めよ．

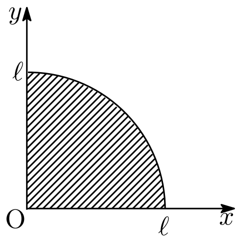
$$S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} + \cdots$$

(広島市立大 2006) (m20064201)

**0.307** $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x-y}}$ のマクローリン展開（点 $(0, 0)$ におけるテイラー展開）を $x, y$ に関して 2 次の項（$x^2$, $y^2$, $xy$ の項）まで求めよ．

(広島市立大 2006) (m20064202)

**0.308** 下図のように，半径 $\ell$ の円の 1/4 である扇形の一様な板片を，円の中心であった部分が原点と重なり，直線部分が $x$ 軸と $y$ 軸に重なるように置いてある．このとき，この板片の重心の位置座標（$x$ 座標と $y$ 座標の値）を求めよ．




(広島市立大 2006)　　(m20064203)

**0.309**　$n$ を 1 以上の整数とする．$A, B$ を $n$ 次正方行列とし，$E$ を $n$ 次単位行列とする．$A^k$ は $A$ の $k$ 個の積を表し，$A^0$ は $E$ を表すものとする．

(1)　$A^k = E$ となる 1 以上の整数 $k$ があれば，$A$ の逆行列は $A^{k-1}$ であることを示せ．

(2)　$a$ を 0 でない実数とする．$AB = aE$ であるならば，$AB = BA$ であることを示せ．

(広島市立大 2006)　　(m20064204)

**0.310**　行列 $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ に対して、次の問に答えよ．

(1)　固有値，固有ベクトルの組を求めよ．

(2)　(1) で求めた固有値に対する大きさ 1 の固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{u}_1$ , $\boldsymbol{u}_2$ とおく．列ベクトル $\boldsymbol{u}_1$ , $\boldsymbol{u}_2$ を並べてできる行列 $P = (\boldsymbol{u}_1\ ,\ \boldsymbol{u}_2)$ が直交行列であることを示せ．

(3)　(2) の $P$ に対して，$P^tAP$ が対角行列であることを示せ．（ただし，$P^t$ は $P$ の転置行列を表すものとする．）

(広島市立大 2006)　　(m20064205)

**0.311**　放物線 $y = x^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ を $x$ 軸のまわりに回転してできる体積 $V_1$ および $y$ 軸のまわりに回転してできる体積 $V_2$ を求めなさい．

(山口大 2006)　　(m20064301)

**0.312**　次の微分方程式を解きなさい．　$\dfrac{dx}{dt} = 3t^2x$

(山口大 2006)　　(m20064302)

**0.313**　$f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{3x+9}$ の最大値・最小値を求めなさい．

(山口大 2006)　　(m20064303)

**0.314**　行列 $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．固有ベクトルは一つの固有値に対して一つ求めればよい．

(山口大 2006)　　(m20064304)

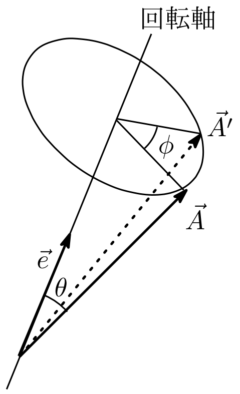
**0.315**　$y = \tan x$　$\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $x = \arctan y$ または $\tan^{-1} y$ と書く．$x = \arctan y$ の導関数を求めよ．

(山口大 2006)　　(m20064305)

**0.316**　定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$ を求めなさい．

(山口大 2006)　　(m20064306)

**0.317** 右図のように，ベクトル $\vec{A}$ をその始点を通る回転軸のまわりに回転させたら $\vec{A}'$ になった．回転軸の方向を表す単位ベクトルを $\vec{e}$ とする．回転角 $\phi$（単位はラジアン）が 1 に比べて十分小さい場合について，ベクトルの変化 $\Delta\vec{A} = \vec{A}' - \vec{A}$ とベクトル積 $\vec{e}\times\vec{A}$ の関係を説明しなさい．
（結果だけでなく，ベクトル積の定義に基づいてわかりやすく説明しなさい.）



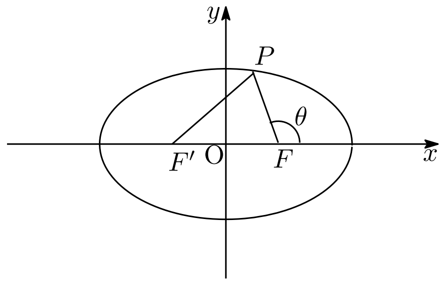

(山口大 2006)　　(m20064307)

**0.318** 焦点を $F, F'$ とする楕円は，二つの線分 $PF$ と $PF'$ の長さの和が一定である点 $P$ が作る曲線と定義される．今，$PF + PF' = 2a$ とし，点 $F,\ F'$ の座標を $(ae, 0),\ (-ae, 0)$ として以下の問いに答えなさい.（$e$ はいわゆる離心率）.

(1) この楕円の方程式を直交座標 $x, y$ を用いて表しなさい.

(2) 線分 $PF$ が $x$ 軸となす角を $\theta$，$PF$ 間の距離を $r$ として，この楕円の方程式を極座標で表しなさい.

(3) 楕円上の点で，点 $F$ と最も近い点 $P$ の座標を求めなさい.




(山口大 2006)　　(m20064308)

**0.319** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ について答えよ.

(1) 固有値を求めよ.

(2) 各固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(3) 直交行列 $P$ を求めて ${}^tPAP$ を対角行列にせよ．ここで, ${}^tP$ は $P$ の転置行列を表す.

(徳島大 2006)　　(m20064401)

**0.320** 実数全体における $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-x+1}$ の最大値および最小値を求めよ.

(徳島大 2006)　　(m20064402)

**0.321** 次の微分方程式の一般解 $y = y(x)$ を求めよ.

(1) $y' + 2y = 1$　　　(2) $y'' + 2y' + 2y = x$

(徳島大 2006)　　(m20064403)

**0.322** 関数 $f(x)$ は $\boldsymbol{R}$ 上で 2 回微分可能であり，さらに $\boldsymbol{R}$ 上で $f''(x) > 0$ を満たしているとする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $a < b$ で $f(a) = f(b) = 0$ ならば　$f'(a) < 0 < f'(b)$　が成り立つことを，次のロールの定理を用いて示せ.

**ロールの定理.**　1 回微分可能な実数値関数 $g(x)$ が $a < b$ となる $a$, $b$ について $g(a) = g(b)$ を満たすならば，$a < \xi < b$ となる $\xi$ で $g'(\xi) = 0$ となるものが存在する.

(2) $a < b < c$ であるとする．このとき　$f(a) = f(b) = f(c) = 0$　が成り立たないことを示せ.

(3) $a<b$ で $f(a)<0<f(b)$ とする．このとき　$f(x)=0$　を満たす $x$ が $a$ と $b$ の間に唯一つ存在することを示せ．

(高知大 2006)　　(m20064501)

**0.323** $n$ を自然数とし

$$f_n(x)=\max\left\{-\frac{3}{4n^3}x^2+\frac{3}{2n^2}x\,,\ 0\right\}$$

とする．ここで $\max\{a,b\}$ は $a$ と $b$ の小さくない方を表すとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^{\infty} f_n(x)dx$

(2) $x\in[0,\infty)$ に対して，次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$

(3) 次を示せ．　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} f_n(x)dx \neq \int_0^{\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$

(高知大 2006)　　(m20064502)

**0.324** $I_n$ を $n\times\ n$ 単位行列とする．また，$a\in\boldsymbol{R}^n$ を長さ 1 の $n$ 次元行ベクトルとする．任意の $x\in\boldsymbol{R}$ に対して，行列 $A(x)$ と関数 $f(x)$ を次のように定義する．

$$A(x)=I_n+x({}^t aa)\,,\quad f(x)=\det A(x)$$

ただし，${}^t a$ は $a$ の転置ベクトルであり，$\det A(x)$ は $A(x)$ の行列式である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(0)=1$ を示せ．

(2) $aA(-1)=0$ であり，ゆえに $f(-1)=0$ となることを示せ．

(3) $f(x)$ は $x$ の多項式であり，その次数 $m$ は $1\leq m\leq n$ を満たすことを示せ．

(4) 任意の $x,y\in\boldsymbol{R}$ に対して，$f(x)f(y)=f(x+y+xy)$ となることを示せ．

(5) $f(x)=(1+x)^m$ を示せ．

(6) $m=1$，すなわち $f(x)=1+x$ となることを示せ．

(高知大 2006)　　(m20064503)

**0.325** 実数を成分とする $2\times\ 2$ 行列全体の集合を $V$ とする．さらに $V$ から $\boldsymbol{R}$ への写像 $f_1$ と $f_2$ を次のように定義する．$V$ の元 $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$f_1(M)=ad-bc \qquad\qquad f_2(M)=a+d$$

このとき，$f_1$ と $f_2$ が線形写像であるか否かを調べよ．線形写像である場合には，その核の一組の基底を求めよ．ただし，$V$ と $\boldsymbol{R}$ はそれぞれ $\boldsymbol{R}$ 上の自然なベクトル空間とし，線形写像の核が $V$ の部分空間になることは証明しなくてもよい．

(高知大 2006)　　(m20064504)

**0.326** 関数 $x=\log t\,,\ y=\dfrac{2t+1}{t^2}$ について，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ および $\displaystyle\int y dx$ を $t$ で表せ．

(高知大 2006)　　(m20064505)

**0.327** (1) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

(2) 次の関数を微分せよ．

(a) $x\sin^{-1}x$ (b) $\log\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ (c) $a^{x\log x}$（ただし，$a$ は $a\neq 1$ である正の定数）

(愛媛大 2006) (m20064601)

**0.328** (1) 不定積分 $\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx$ を求めよ。 (2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1+3t^2}\,dt$ を求めよ。

(愛媛大 2006) (m20064602)

**0.329** $a$ を正の定数として $f(x,y)=x^3+y^3-3axy$ とおく．このとき，関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(愛媛大 2006) (m20064603)

**0.330** $D=\{(x,y)\,;\,1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 4\}$ とするとき，次の積分の値を求めよ． $\displaystyle\iint_D \frac{\log\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$

(愛媛大 2006) (m20064604)

**0.331** $x,y,z$ についての連立方程式 $\left\{\begin{array}{rcl} 4x+y+2z & = & 2 \\ ax-5y+z & = & 8 \\ x-4y-z & = & 9 \\ 3x-y+z & = & 5 \end{array}\right.$ が解を持つように，定数 $a$ を定めよ．

(愛媛大 2006) (m20064605)

**0.332** 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\tan^{-1}x$ について，次の各問に答えよ．

(1) $f(x)$ は区間 $(0,\infty)$ 上単調減少であることを示せ．

(2) 次の定積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} x^3 f\left(\frac{1}{2}x^2\right)dx$

(愛媛大 2006) (m20064606)

**0.333** 連立 1 次方程式 $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z & = & -1 \\ x+4y-z+6w & = & 7 \\ x+3y\qquad +4w & = & 6 \\ 3x+8y-z+8w & = & 11 \end{array}\right.$ について次の問いに答えよ．

(1) 上の連立 1 次方程式の解をすべて求めよ．

(2) $a,b,c$ を定数とする．組 $x=a,\ y=7,\ z=b,\ w=c$ が上の連立 1 次方程式の解になるとき，$a,b,c$ の値を求めよ．

(愛媛大 2006) (m20064607)

**0.334** $a>0$ とし，$x_n=\left(\dfrac{a}{1+a}\right)^n$, $n=1,2,\cdots$ とする．

(1) $\{x_n\}$ は有界な単調減少数列であることを示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ の値を求めよ． (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx_n$ の値を求めよ．

(愛媛大 2006) (m20064608)

**0.335** 2 次正方行列 $A$ が任意の 2 次正方行列と可換であるとき，$A$ はどのような行列か？

ただし，2 つの行列 $A,B$ について $AB=BA$ がなりたつとき，$A$ と $B$ は可換であるという．

(愛媛大 2006) (m20064609)

**0.336** $n$ を自然数とするとき，関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{t^n}{t^{2n}+2}dt$ について次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ が $x=1$ で極値を持つように $n$ の値を定めよ．

(2) (1) の $n$ に対して $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ を求めよ．

(愛媛大 2006)　　(m20064610)

**0.337** 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{(x+a)(x+b)}-\sqrt{(x-a)(x-b)}\right\}$ （$a,b$ は定数）　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x \tan(t^2)dt$

(愛媛大 2006)　　(m20064611)

**0.338** (1) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次独立なベクトルであるとき　$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,　$2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$,　$\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}$　は 1 次独立か？

(2) 次式で定義される $W,U$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分ベクトル空間か？
部分ベクトル空間であれば次元と基底を求め，そうでないときはその理由を述べよ．

$$W=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x+2y-z=0\right\},\ U=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x+y=0,\ z=1\right\}$$

(愛媛大 2006)　　(m20064612)

**0.339** 積分の順序を交換することにより，次の反復積分の値を求めよ。　$\displaystyle\int_0^1\int_y^1 y^2e^{x^2}dxdy$

(愛媛大 2006)　　(m20064613)

**0.340** $E$ を 3 次単位行列とする．3 次正方行列 $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$　および　$B=E+A$ について，

次の問に答えよ．

(1) $B^2\neq O$ であるが $B^3=O$ であることを示せ．

(2) 3 次元数ベクトル $\boldsymbol{u}$ で，$B^2\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$ であるものを一つ選べ．

(3) (2) で選んだベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して，$\boldsymbol{u}$, $B\boldsymbol{u}$, $B^2\boldsymbol{u}$ は 1 次独立であること，従って，ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ の基底をなすことを示せ．

(4) 線形変換 $f:\boldsymbol{R}^3\longrightarrow\boldsymbol{R}^3$

$$\boldsymbol{x}\longmapsto A\boldsymbol{x}\quad(\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3)$$

の (3) の基底 $\{\boldsymbol{u},\ B\boldsymbol{u},\ B^2\boldsymbol{u}\}$ に関する表現行列を求めよ．

(愛媛大 2006)　　(m20064614)

**0.341** $C^2$ 級の 2 変数関数 $z=f(x,y)$ と 2 次元の極座標変換 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ の合成は，$r$ と $\theta$ の関数 $z=f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ になる．

(1) 次の等式を示せ．　$\displaystyle\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2$

(2) $\displaystyle\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を $z$ の $r$ と $\theta$ についての偏導関数および $r$ と $\theta$ のみを用いて表せ．

(愛媛大 2006)　　(m20064615)

**0.342** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & c & c \\ c & 1 & c \\ c & c & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ．

(1) 行列 $A$ の行列式の値を求めよ．

(2) $A$ が逆行列を持たないときの $c$ の値は

(a) $c = \boxed{\phantom{xx}}$ のときと

(b) $c = \boxed{\phantom{xx}}$ のときである．

(3) (2) の 2 つの場合　(a),(b) それぞれについて，行列 $A$ の階数（ランク）を求めよ．

(4) (2) の 2 つの場合　(a),(b) それぞれについて，行列 $A$ の固有値をすべてを求めよ．

(九州大 2006)　　(m20064701)

**0.343** (1) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - ay = 0$ を解け．

(2) 区間 $[0, \ell]$ での $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0$ の解で $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\ell) = 0 \end{cases}$ を満たす恒等的に 0 でない解を求めよ．

また，$a$ がどのような値のときにそのような解が存在するか答えよ．

(3) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a^2y = f(x)$　（ただし，$f(x)$ は既知関数）の一般解を定数変化法により求めることを考える．

同次形 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0$ の一般解は，$y = c_1 \sin ax + c_2 \cos ax \cdots$ ①

であるとし，$c_1$ および $c_2$ を $x$ の関数と考えて方程式の特殊解を求めた結果，一般解が

$$y = \frac{1}{a}\left\{\sin ax \int f(x)\cos ax dx - \cos ax \int f(x) \sin ax dx\right\} + c_1 \sin ax + c_2 \cos ax$$

となることを示せ．

(九州大 2006)　　(m20064702)

**0.344** 複素平面上の原点を中心とする半径 $a$ の円 $C$ に沿った積分（方向は $C$ の正方向，範囲は一周）について，次の問に答えよ．

(1) ある複素数 $z_0$ ($|z_0| \neq a$) に対して，(a) $|z_0| > a$ の場合　および　(b) $|z_0| < a$ の場合における $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z - z_0)^n} dz$ を求めよ．ただし，$n$ は正の整数である．

(2) 複素関数 $f(z) = \log(z-b) + \log\left(z - \dfrac{a^2}{b}\right) - \log z$　（$b$ は実数で，$b > a$）に対して，$\displaystyle\int_C \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz$ を求めよ．

(九州大 2006)　　(m20064703)

**0.345** (1) 2 つの任意の自然数 $m, n$ について，次をそれぞれ示せ．

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$　　(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0\ ;\ m \neq n \\ \pi\ ;\ m = n \end{cases}$

(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0\ ;\ m \neq n \\ \pi\ ;\ m = n \end{cases}$

(2) 周期 $2\pi$ の関数 $f(x)$ がフーリエ級数に展開できる，つまり　$\displaystyle f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

と表現できるとき，

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$　(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos px dx$　(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin px dx$　　$(p = 1, 2, \cdots)$

をそれぞれ計算せよ．

(3) 周期 $2\pi$ の関数 $f(x) = |x|$ ; $-\pi < x \leq \pi$ をフーリエ級数に展開せよ.

(4) (3) の結果を用いて,

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ をそれぞれ計算せよ.

(九州大 2006) (m20064704)

**0.346** 有名な公式 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0)$

の両辺を $a$ に関して微分して,「形式的に微分と積分の順序を交換」すれば

$$-\frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}} = \frac{d}{da}\left(\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx\right) = \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial a} e^{-ax^2}\right) dx = -\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx ,$$

すなわち

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}} \qquad (*)$$

となる. この問題の目的は, $(*)$ が実際に成立することを上の手順で示すことである.

(1) 任意の $h > 0$ に対して, 不等式 $0 \leqq \dfrac{e^{-hx^2} - 1}{h} + x^2 \leqq \dfrac{hx^4}{2}$ , $x \in \mathbb{R}$ を示しなさい.

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx < \infty$ を示しなさい.

(3) (1), (2) を用いて $(*)$ を示しなさい.

(九州大 2006) (m20064705)

**0.347** 2 変数関数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \text{ のとき} \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \text{ のとき} \end{cases}$ に関する以下の問に答えなさい.

(1) $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続であることを示しなさい.

(2) $f(x,y)$ は $(0,0)$ で $x$ に関して, また $y$ に関して偏微分可能であることを示しなさい.

(3) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ は $(0,0)$ で連続であるかどうか調べなさい.

(九州大 2006) (m20064706)

**0.348** $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ を $n$ 個のベクトル, $A = [a_{ij}]$ を $n$ 次正方行列とする

(1) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が一次独立（線形独立）であるということの定義を書きなさい.

(2) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が一次独立であると仮定し, $\boldsymbol{y}_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{x}_i \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$ とおく, このとき, $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ が一次独立であるための必要十分条件は $A$ が正則行列であることを示しなさい.

(3) 4 つの一次独立なベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ と 4 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

を用い (2) のように $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3, \boldsymbol{y}_4$ を定める. これらが一次従属となる $a$ の値を求めなさい.

(九州大 2006) (m20064707)

**0.349**　$\mathcal{P}$ を 3 次以下の実係数多項式のつくるベクトル空間とする．すなわち

$$\mathcal{P} = \{ f \mid f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ , \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} \}\ ,$$

$A : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ を　$(Af)(x) = \displaystyle\int_0^x f(y)dy - \frac{f'''(0)}{24}x^4$　と定める．

(1)　$A$ は線形写像であることを示し，$f_n(x) = x^n$ , $n = 0,1,2,3,$ に対し $(Af_n)(x)$ を求めなさい．

(2)　$W$ の基底 $f_0, f_1, f_2, f_3$ に関する $A$ の行列表示を求めなさい．

(3)　$A^4$ を求めなさい．

(4)　$A$ は対角化不可能であることを示しなさい．

(九州大 2006)　　(m20064708)

**0.350**　$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を関数とし、$\alpha, \beta, x_0 \in \mathbb{R}$ とする．

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば，正数 $M$ が存在し，すべての $n$ に対して $|a_n| \leqq M$ となることを示しなさい．

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ となることを示しなさい．

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) \neq \alpha$ とする．このとき，正数 $\varepsilon > 0$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ となる実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在し，$|f(x_n) - \alpha| \geq \varepsilon\ (n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示しなさい．

(4)　次の二つの条件が同値であることを示しなさい．

(a)　$\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ .

(b)　実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ を満たせば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$ .

(九州大 2006)　　(m20064709)

**0.351**　$a, b, c$ を実数とし，3 × 3 行列 $A$ を

$$A = \begin{pmatrix} a+b+c & -a-c & a+b-c \\ -a-c & a+c & -a+c \\ a+b-c & -a+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$abc \neq 0$ のとき　$|A| \neq 0$ となることを示せ．ただし，$|A|$ は行列 $A$ の行列式を表すものとする．

(2)　$a = b = c = 1$ のとき，行列 $A$ の逆行列を求めよ．

(九州大 2006)　　(m20064710)

**0.352**　空間の 4 点 $O = (0,0,0)$, $A = (1,2,-1)$, $B = (1,2,1)$, $C = (1,1,1)$ を考える．2 点 $O, A$ を通る直線を $\ell$, 3 点 $O, A, B$ を通る平面を $\pi$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1)　点 $B$ から直線 $\ell$ へ下ろした垂線の足を $P$ とする．

$e_1 = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$ および，$e_2 = \dfrac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}$ をそれぞれ求めよ．

ただし，$|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{PB}|$ はおのおのベクトル $\overrightarrow{OA}$ とベクトル $\overrightarrow{PB}$ の長さ（大きさ）を表すものとする．

(2)　点 $C$ から平面 $\pi$ へ下ろした垂線の足を $Q$ とする．

$$\overrightarrow{OQ} = \alpha e_1 + \beta e_2$$

が成り立つ実数 $\alpha$ と $\beta$ を求めよ．また，点 $Q$ の座標を求めよ．

(九州大 2006)　　(m20064711)

**0.353**　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ で定義された二つの関数

$$f(x) = -\log(\cos x)\,, \quad g(x) = \log\left(\frac{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}\right)$$

に対して，以下の問に答えよ．

(1)　$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を $\cos x$ を用いて表せ．

(2)　曲線 $y = f(x)$　$(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3})$ の長さを求めよ．

(九州大 2006)　　(m20064712)

**0.354**　$e$ を自然対数の底とするとき，関数 $f(x) = e^{-x^2}$ と，その $n$ 次 ($n$ 階) 導関数 $f^{(n)}(x)$ を考える．以下の問に答えよ．

(1)　$f^{(n)}(x) = p_n(x)e^{-x^2}$ と表すとき，多項式 $p_1(x)$, および $p_2(x)$ を求めよ．

(2)　任意の非負整数 $k$ に対して，　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^k f(x) = 0$　となることを示せ．

(3)　次の広義積分　$\displaystyle I = \int_o^{+\infty} p_1(x)p_2(x)f(x)dx$　の値を求めよ．

(九州大 2006)　　(m20064713)

**0.355**　(1)　不定積分 $\displaystyle\int(\log x)^2 dx$ を求めよ．

(2)　広義積分 $\displaystyle\int_0^1 (\log x)^2 dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 (\log x)^2 dx$ の値を求めよ．

(佐賀大 2006)　　(m20064901)

**0.356**　実数を成分とする 4 次縦（列）ベクトル全体のなす線形空間を $\boldsymbol{R}^4$ とし，4 つのベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

で生成される $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間を $V$ とするとき，次の問に答えよ．

(1)　$V$ の次元と（1 組の）基底を求めよ．

(2)　次のベクトル　$\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$　が $V$ に属するかどうかをそれぞれ判定せよ．

(3)　$\boldsymbol{R}^4$ の 2 つの部分空間の共通部分は，$\boldsymbol{R}^4$ の部分空間になることを証明せよ．

(4)　$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2$ で生成される $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間と，$\boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4$ で生成される $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間との共通部分の次元と基底を求めよ．

(佐賀大 2006)　　(m20064902)

**0.357**　$f(x), g(x)$ は無限回微分可能な実数値関数で，$g(x) \geq 0$ とする．
$D = \{(x,y)\,;\, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq g(x)\}$　とするとき，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{d\,g(x)}{dx}\ \frac{d^2 f(y)}{dy^2}\ dxdy$$

ただし，$f'(0) = 0,\ f(g(1)) = 3,\ f(g(0)) = 0$ である．

(佐賀大 2006)　　(m20064903)

**0.358** 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $A$ の固有値を $a, b, c$ を用いて表せ．

(2) $a, b, c$ が実数のとき，$A$ の固有値も実数になることを証明せよ．また，$A$ が対角化できることを証明せよ．

(3) $a=1+i,\ b=1-i,\ c=0$ のとき，$A$ を対角化せよ．ただし，$i$ は虚数単位とする．

(4) $a=1,\ b=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2},\ c=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ のとき，$A$ の固有値がすべて 0 になること，および $A$ は対角化できないことを証明せよ．ただし，$i$ は虚数単位とする．

(佐賀大 2006)　　(m20064904)

**0.359** 次の関数を微分せよ．

(1) $\tan x$　　(2) $x^x$

(佐賀大 2006)　　(m20064905)

**0.360** 次の曲線の概形をかけ．　$y=\dfrac{1-x}{1+x}$

(佐賀大 2006)　　(m20064906)

**0.361** 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin^{-1}x}{x^3}$

(佐賀大 2006)　　(m20064907)

**0.362** $x$ が小さいとき，次の式を $x$ の 3 次まで展開せよ．　$e^x+\log(1-x)$

(佐賀大 2006)　　(m20064908)

**0.363** 次の積分を求めよ．　$\displaystyle\int_1^e x\log x\,dx$

(佐賀大 2006)　　(m20064909)

**0.364** 次の積分を求めよ．　$\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)\,dxdy$　　$(\ D\ :\ x^2+y^2\leq 1\ )$

(佐賀大 2006)　　(m20064910)

**0.365** クラメルの公式を用いて，次の連立 1 次方程式を満たす $y$ を求めよ．　$\begin{cases} 2x+2y+z=2 \\ 2x+y+4z=1 \\ 3x+2y+2z=3 \end{cases}$

(佐賀大 2006)　　(m20064911)

**0.366** 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．　$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

(佐賀大 2006)　　(m20064912)

**0.367** $x=\cos^4 t,\ y=\sin^4 t$ とするとき，導関数 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．ただし，結果は $t$ の関数のままでよい．

(佐賀大 2006)　　(m20064913)

**0.368** $x^2\cos 3x$ の $n$ 次導関数を求めよ．ただし，$g(x)=\cos ax\ \ (a>0)$ のとき，$g^{(n)}(x)=a^n\cos\left(ax+\dfrac{n}{2}\pi\right)$ となることを証明せずに使用してもよい．

(佐賀大 2006)　　(m20064914)

**0.369** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$ を計算せよ．

(佐賀大 2006)　　(m20064915)

**0.370** $z=\tan^{-1}(u+v)$, $u=2x^2-y^2$, $v=x^2y$ とするとき，偏導関数 $z_x$, $z_y$ を求めよ．
ただし，必ず答えは $x, y$ の関数として書くこと．

(佐賀大 2006)　　(m20064916)

**0.371** 次の条件 $g(x,y)=0$ のもとで関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

$$g(x,y)=x+y-1\,,\quad f(x,y)=x^2+y^2$$

(佐賀大 2006)　　(m20064917)

**0.372** $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x-y}}\,dxdy\,,\quad D=\{(x,y)\mid 0\leq y<x\leq 1\}$ を計算せよ．

(佐賀大 2006)　　(m20064918)

**0.373** $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ とする．積 $AB, BA$ が定義できるならば，それを計算せよ．

(佐賀大 2006)　　(m20064919)

**0.374** $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{bmatrix}$ のランク $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ．

(佐賀大 2006)　　(m20064920)

**0.375** $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&1&0\\1&-2&3\end{bmatrix}$ の行列式 $\det A$ および逆行列 $A^{-1}$ を求めよ．

(佐賀大 2006)　　(m20064921)

**0.376** $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ $(r\leq n)$ が $\mathbb{R}^n$ の $0$ でないベクトルのとき，このどの 2 つも互いに直交すると仮定すると，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は一次独立であることを示せ．

(佐賀大 2006)　　(m20064922)

**0.377** $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$A$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．　　(2) 適当な直交行列 $P$ を求め，$A$ を対角化せよ．

(佐賀大 2006)　　(m20064923)

**0.378** 次の関数の導関数 $dy/dx$ を求めなさい．

(1) $y=3x^2+4x$　　(2) $y=1/x$　　(3) $y=x^2\ln x$　　(4) $y=\sin(3x)$　　(5) $y=x/e^{2x}$

(佐賀大 2006)　　(m20064924)

**0.379** ある気体の温度 $T$，圧力 $P$，体積 $V$ が次の関係式で表せるとき，以下の (1),(2) の偏導関数を求めなさい．ただし，$a, b, R$ は定数である．　$(P+a/V^2)(V-b)=RT$

(1)　$(\partial P/\partial T)_V$　　(2)　$(\partial^2 P/\partial V^2)_T$

(佐賀大 2006)　　(m20064925)

**0.380** 以下の関数の不定積分を求めなさい．ただし，記号 exp は $\exp(x)=e^x$ を意味する．

(1) $x^2+4x+1$ (2) $\cos(2x)$ (3) $4x\exp(x^2)$ (4) $1/(x^2-9)$ (5) $x\ln x$

(佐賀大 2006) (m20064926)

**0.381** 次の微分方程式の一般解を求めなさい．

(1) $(dy/dx)+xy^2=0$ (2) $(dy/dx)+y=x$

(佐賀大 2006) (m20064927)

**0.382** 一つの質点が $x$ 軸上を加速度 $a$ で運動する．時刻 $t$ における加速度が $a=2\pi\cos 2\pi t$ で与えられるとき，時刻 $t$ における点の位置 $x$ を求めよ．ただし，$t=0$ における位置および速度は 0 とする．

(佐賀大 2006) (m20064928)

**0.383** 次の行列の固有値，固有ベクトルを求めよ．ただし，$i$ は虚数単位である． $\begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{bmatrix}$

(佐賀大 2006) (m20064929)

**0.384** (1) $f(x)$ を $x=0$ の近傍で $x^2$ の項までテーラー展開せよ． $f(x)=e^{x^2}-1$

(2) $g(x)$ を $x=0$ の近傍で $x^2$ の項までテーラー展開せよ． $g(x)=x^2$

(3) 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$

(佐賀大 2006) (m20064930)

**0.385** 次の微分方程式を解け．ただし，$y'=\dfrac{dy}{dx}$, $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ である．

(1) $y''-4y'-12y=0$ (2) $y''-4y'-12y=12x-8$ (3) $\dfrac{dy}{dx}+y=y^2(\cos x-\sin x)$

(佐賀大 2006) (m20064931)

**0.386** 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ のとき

(1) $2A-B$ の値を求めよ．

(2) ${}^tA\,{}^tB$ の値を求めよ．

(3) 行列 $A$ の逆行列 $A^{-1}$ の値を求めよ．

(4) ${}^tB$ の行列式 $\det({}^tB)$ の値を求めよ．

${}^tA, {}^tB$ はそれぞれ行列 $A$ の転置行列，行列 $B$ の転置行列を表す．

(佐賀大 2006) (m20064932)

**0.387** 次の連立一次方程式の解を求めよ． $\begin{cases} x_1+x_2+x_3 &= 0 \\ x_1+px_2+x_3 &= 0 \\ px_1+x_2 &= 0 \end{cases}$ （$p$ は実数）

(佐賀大 2006) (m20064933)

**0.388** 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ について，

(1) 行列 $A$ の固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$ を求めよ．

(2) 固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$ に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めよ．

(3) 行列 $A$ を対角化する行列を示し，対角化せよ．

(佐賀大 2006)　　(m20064934)

**0.389**　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{5}}{x-3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x}{5x^2-4x+7}$

(佐賀大 2006)　　(m20064935)

**0.390**　次の関数を微分せよ．

(1) $y=(x^2-3x+1)^3$　　(2) $y=(\sin 4x)\log(x-3)$

(佐賀大 2006)　　(m20064936)

**0.391**　次の不定積分を求めよ．ただし積分定数は $C$ とする．

(1) $\displaystyle\int(3x+2)\sin x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\sin^2 x\,\cos^3 x\,dx$　($t=\sin x$ と置いて考えよ)

(佐賀大 2006)　　(m20064937)

**0.392**　以下の関数に対して，区間 $I$ における関数の増減表を作成し，その区間における最大値と最小値を求めよ．

$$y=x^3-2x^2+1\,,\qquad I=[\,1,3\,]$$

(佐賀大 2006)　　(m20064938)

**0.393**　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ を求めよ．

(佐賀大 2006)　　(m20064939)

**0.394**　重積分 $\displaystyle\iint_D\frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy$ ,　$D:1\leq x^2+y^2\leq 4$ を計算せよ．

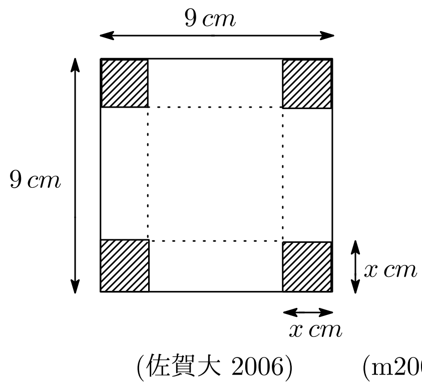
(佐賀大 2006)　　(m20064940)

**0.395**　(1) 微分方程式　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$　の一般解を求めよ。

(2) 微分方程式　$\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}+13y=0$　の一般解を求めよ。

(佐賀大 2006)　　(m20064941)

**0.396**　一辺の長さが 9 cm の正方形の厚紙の四隅から，一辺 $x$ cm の合同な 4 つの正方形 $(0\leq 2x\leq 9)$ を切り取り，その残りの部分を折り上げて枡（ます）を作る．この枡の容積を最大にする $x$ を求めよ．




(佐賀大 2006)　　(m20064942)

**0.397**　球 $x^2+y^2+z^2\leq 9$ を $z=2$ で切り取ったとき，$z\geq 2$ の部分の体積を求めよ．

(佐賀大 2006)　　(m20064943)

**0.398**　連立一次方程式 $\begin{cases}9x+4y+3z=-1\\5x+y+2z=1\\7x+3y+4z=1\end{cases}$ を解け．

(佐賀大 2006)　　(m20064944)

**0.399** 平面内に点 $P$ があり，これを $x-y$ 座標系で表示すればその座標値は $(1,1)$ である．いま，$x-y$ 座標系を反時計回りに 75 度回転させたものを $x'-y'$ 座標系とするとき，点 $P$ の座標値を $x'-y'$ 座標系で表示せよ.（ヒント：$75=30+45$）

(佐賀大 2006)　　(m20064945)

**0.400** $x=r\cos\theta$, $y=2r\sin\theta$ のとき，行列式 $J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(熊本大 2006)　　(m20065201)

**0.401** 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{2r}{\sqrt{1-r^2}}dr$ を求めよ.

(熊本大 2006)　　(m20065202)

**0.402** $xy$ 平面上の集合 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+\dfrac{y^2}{4}\leqq 1\right\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-\dfrac{y^2}{4}}}dxdy$ を求めよ.

(熊本大 2006)　　(m20065203)

**0.403** $\mu\neq\lambda>0$ として，3 つの行列

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$$

が，$AP=PB$ を満たすような $\lambda,\mu,x,y$ を求めよ.

(熊本大 2006)　　(m20065204)

**0.404** 行列　$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　について次の問いに答えよ.

(1) $A$ の固有値 $\lambda_1$ と $\lambda_2$ を求めよ.

(2) $\lambda_1$ と $\lambda_2$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ をそれぞれ求めよ.

(宮崎大 2006)　　(m20065301)

**0.405** $x>0,\ y>0$ に対して $u(x,y)=x^y$, $v(x,y)=x^2+y^2$ とおく.

このとき，ヤコビ行列　$J=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$　とその行列式 $|J|$ の値を求めよ.

(宮崎大 2006)　　(m20065302)

**0.406** (1) $y=|x-1|$ のグラフを描け.

(2) $f(s,t)=|s-1|+|t+1|$ の最小値が存在すれば、それを求めよ.

(宮崎大 2006)　　(m20065303)

**0.407** 平面内の集合 $D$ を　$D=\{(x,y)\mid x-1\leqq\ y\leqq\ x+1,\ -1\leqq\ x\leqq\ 1\}$　と定義する.

(1) $D$ を $xy$ 座標平面上に図示せよ.　　(2) 次の重積分の値を求めよ.　$\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy$

(宮崎大 2006)　　(m20065304)

**0.408** (1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.　$(x+1)\dfrac{dy}{dx}+y=0$

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ． $(x+1)\dfrac{dy}{dx}+y=(x+1)\sin x$

(宮崎大 2006) (m20065305)

**0.409** 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int xe^x dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{(x+c)dx}{(x+a)(x+b)}$ $(a \neq b)$ (3) $\displaystyle\int \frac{1-\cos 2x}{2}\cos x dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(-a<x<a,\ a>0)$

(鹿児島大 2006) (m20065401)

**0.410** 微分方程式に関する以下の問に答えよ．

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(a) $2xdx-dy=x(xdy-2ydx)$ (b) $(y^2+\cos x)dx+(2xy-\sin y)dy=0$

(2) 次の微分方程式の完全解を求めよ．

$y''+4y'+4y=xe^{-2x}$

(鹿児島大 2006) (m20065402)

**0.411** 直交座標系における二つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\ \boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ に対して，これらの外積とよばれるベクトル $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ は

$$\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}=\left(\ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\ \right) \tag{1}$$

で定義される．以下の問に答えよ．

(1) 三つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\ \boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3),\ \boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$ に対して以下の式 (2) を証明せよ．

$$(\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b})\cdot c=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2}$$

(2) 式 (2) を利用し、外積 $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とで張られる平面に垂直なベクトルであることを示せ．

(鹿児島大 2006) (m20065403)

**0.412** 空間に $o-xyz$ 直交座標系をとる．空間内の平面の方程式は

$$ax+by+cz+d=0\ ,\quad (a,b,c)\neq 0 \tag{1}$$

で与えられる．以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$ は式 (1) で与えられる平面と垂直であることを示せ．

(2) 式 (1) を $\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ で割って，

$$lx+my+nz=p\ ,\quad (p\geq 0) \tag{2}$$

と表すことができる．このとき $p$ は原点 $O$ からこの平面への垂直距離を表すことを示せ．

(3) 空間内の一点 $Q(x_1,y_1,z_1)$ から式 (2) で表される平面への距離 $h$ は，次式で与えられることを示せ．

$$h=|\ lx_1+my_1+nz_1-p\ |$$

(鹿児島大 2006) (m20065404)

**0.413** 関数 $f(x)=2x^3+6x^2-2$ の極値を求めなさい．また，そのグラフを描きなさい．

(鹿児島大 2006) (m20065405)

**0.414** 2 曲線 $y=(x-2)^2$ と $y=-x^2+4x-2$ で囲まれた図形の面積 $S$ を求めなさい．

(鹿児島大 2006)　　(m20065406)

**0.415** ベクトル $\boldsymbol{a}=(1,1,3)$ , $\boldsymbol{b}=(1,-1,1)$ のどちらにも垂直で大きさが $2\sqrt{6}$ のベクトル $\boldsymbol{c}$ を求めなさい．

(鹿児島大 2006)　　(m20065407)

**0.416** $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ , $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ のとき，

次の行列をそれぞれ求めなさい．ただし右肩の $T$ は転置記号，$-1$ は逆行列記号である．

(1) $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{AB})^T$ ,　(2) $\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{BA})^T$ ,　(3) $\boldsymbol{X}^{-1}$ ,　(4) $\boldsymbol{Y}^{-1}$

(鹿児島大 2006)　　(m20065408)

**0.417** 高さ $h$，底面の半径 $r$，母線の長さ $l$ の円錐の体積 $V$ 及び表面積 $S$ を求めよ．

(鹿児島大 2006)　　(m20065409)

**0.418** 座標平面上の点 $(x,y)$ を点 $(x',y')$ に変換する行列 $T$ を求めよ．ただし $x=-2y', y=x'$ とする．

(鹿児島大 2006)　　(m20065410)

**0.419** 次の関数を微分せよ．

(1) $y=(8-x)^2+3x$　(2) $y=\log x\cdot e^{-x}$　(3) $y=\sin x\cdot(1+\cos x)$

(鹿児島大 2006)　　(m20065411)

**0.420** 次の関数を積分せよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x(1+x)}$

(鹿児島大 2006)　　(m20065412)

**0.421** 次の関数を微分せよ．

(1) $y=\sin x\cos 2x$　(2) $y=\sin^{-1}x\quad\left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$

(鹿児島大 2006)　　(m20065413)

**0.422** 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\sin^2 x dx$　(2) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}x\cos x dx$

(鹿児島大 2006)　　(m20065414)

**0.423** ベクトル $\boldsymbol{A_1},\boldsymbol{A_2},\boldsymbol{A_3}$ は互いに直交していることを示せ．

$$\boldsymbol{A_1}=\begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A_2}=\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A_3}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2006)　　(m20065415)

**0.424** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+1}{x+1}$ を解け．

(鹿児島大 2006)　　(m20065416)

**0.425** 行列式を利用して，次の連立方程式を解け． $\begin{cases} 3x+y+5z=5 \\ x+y+3z=2 \\ 2x-y-z=3 \end{cases}$

(室蘭工業大 2006) (m20065501)

**0.426** 微分方程式 $(2+x)y+(2+y)x\dfrac{dy}{dx}=0$ の一般解を求めよ．

(室蘭工業大 2006) (m20065502)

**0.427** 以下のような行列 $A, B$ が与えられている．$AA^t$ および $BB^t$ を求めなさい．

ただし，$A^t$ は行列 $A$ の転置行列，$B^t$ は行列 $B$ の転置行列を表す．

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2006) (m20065503)

**0.428** 行列 $C$ の固有値とその固有ベクトルを求めなさい． $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(室蘭工業大 2006) (m20065504)

**0.429** 次の式が与えられている． $f(x)=\dfrac{\sin 2x-\cos 2x}{\sin 2x+\cos 2x}$ 導関数 $\dfrac{df}{dx}$ を求めなさい．

(室蘭工業大 2006) (m20065505)

**0.430** 次の不定積分を求めなさい． $\displaystyle\int x(ax^2+1)^n dx$ (ただし，$a\neq 0$，$n\neq -1$)

(室蘭工業大 2006) (m20065506)

**0.431** 次の式が与えられている． $f(x,y)=x^2y+y^2\cos x+y^3$

偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ を求めなさい．

(室蘭工業大 2006) (m20065507)

**0.432** オイラーの公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ に関する以下の問に答えよ．

(1) オイラーの公式を用いて，つぎの公式を証明せよ．

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

(2) $e^{i(\theta+\varphi)}=e^{i\theta}e^{i\varphi}$ という式に，オイラーの公式を適用し，両辺の実部と虚部を比較して，余弦関数および正弦関数の加法公式

$$\cos(\theta+\varphi)=\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi$$
$$\sin(\theta+\varphi)=\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi$$

を導出せよ．

(室蘭工業大 2006) (m20065508)

**0.433** 区間 $2\pi$ で定義された関数 $f(t)=\pi-|t|$ ; $-\pi\leq t\leq\pi$ を $f(t+2\pi)=f(t)$ の関係によって周期関数に拡張した関数を考える．

(1) この関数の概形を $-2\pi\leq t\leq 2\pi$ の範囲で図に示せ．縦軸，横軸に適切な数値を入れること．

(2) この周期関数をフーリエ級数で表せ．

(室蘭工業大 2006) (m20065509)

**0.434** 次の微分を計算せよ． $\dfrac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2-3x}\right)\right]$

(室蘭工業大 2006) (m20065510)

**0.435** 次の定積分を計算せよ． $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^4+1}dx$

(室蘭工業大 2006) (m20065511)

**0.436** つぎの行列 $A$ に関し，以下の問に答えよ． $A = \begin{pmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}$

(1) 次式が成り立つことを示せ． $\begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix}^2 = A$

(2) $A$ の行列式を求めよ．

(室蘭工業大 2006) (m20065512)

**0.437** 以下の関数の導関数を求めよ．

(1) $(ax+b)^n$ (2) $\sqrt{1-x}$ (3) $\log(ax+b)$ (4) $e^{\frac{1}{x}}$

(室蘭工業大 2006) (m20065513)

**0.438** 以下の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)dx$ (2) $\displaystyle\int_a^b (x-a)(b-x)dx$

(室蘭工業大 2006) (m20065514)

**0.439** 次の行列式の値を求めなさい． $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

(室蘭工業大 2006) (m20065515)

**0.440** 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$， $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $2A+3B$ を計算しなさい． (2) $AB$，$BA$ を求めなさい．

(室蘭工業大 2006) (m20065516)

**0.441** (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)$ を求めよ． (2) $f(x) = e^{\sin^{-1}x}$ を微分せよ．

(3) $\displaystyle\int \log(1+x^2)dx$ を求めよ．

(岡山県立大 2006) (m20065601)

**0.442** 行列 $\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$ の階数を求めよ．ただし，$a, b$ は実数とする．

(岡山県立大 2006) (m20065602)

**0.443** 関係式 $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ で定まる陰関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ.

(岡山県立大 2006) (m20065603)

**0.444** 次の累次積分の順序を交換し，その値を求めよ. $\displaystyle\int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2} dx$

(岡山県立大 2006) (m20065604)

**0.445** $I_n = \displaystyle\int (\log x)^n dx \quad (n \geqq 0)$ とする．以下の問に答えよ．ただし，log は自然対数である.

(1) $I_0$ , $I_1$ および $I_2$ を計算せよ.

(2) (1) を参考にして，$n \geqq 1$ における $I_n$ と $I_{n-1}$ の関係を類推し，それが正しいことを示せ.

(香川大 2006) (m20065701)

**0.446** 下記の連立 1 次方程式について，以下の問に答えよ。

$$\begin{cases} 2x + 5y - 4z &= 7 \\ 3x + y - 3z &= -6 \\ -5x + 4y - z &= 21 \end{cases} \tag{1}$$

(1) 連立 1 次方程式 (1) の係数行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ が正則であることを示せ.

(2) 連立 1 次方程式 (1) の係数行列 $A$ の第 2 行第 3 列成分 $a_{23}$ の余因子 $A_{23}$ を求めよ.

(3) クラメルの公式を用いて，連立 1 次方程式 (1) を解け.

(香川大 2006) (m20065702)

**0.447** $z = \sin xy$ について，次の問に答えよ.

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を求めよ. (2) $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ. (3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を求めよ. (4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ を求めよ.

(島根大 2006) (m20065801)

**0.448** $u = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ について，次の問に答えよ.

(1) 行列式の値 $u$ を求めよ. (2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ を求めよ. (3) $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ を求めよ.

(4) $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ を求めよ. (5) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ を求めよ.

(島根大 2006) (m20065802)

**0.449** 次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 12 & 123 \\ 12 & 123 & 1234 \\ 123 & 1234 & 12345 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 4 & 10 \end{vmatrix}$

(島根大 2006) (m20065803)

**0.450** $a, b, c$ を 0 でない実数とする．このとき，行列 $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ の階数が 2 となるための必要十分条件を求めよ．

(島根大 2006)　　(m20065804)

**0.451** 4 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ に対して，これらの 1 次結合の全体を $\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ で表すことにする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ は $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ の 1 次結合であるなら，$\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ であることを示せ.

(3) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

とするとき，$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5 \rangle$ の基底を 1 組求めよ．

(島根大 2006)　　(m20065805)

**0.452** 関数 $f(x) = e^{-x}(\sin x + \cos x)$ の極値を調べよ．

(島根大 2006)　　(m20065806)

**0.453** $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ を収束数列とする．いま，$n > N$ なるすべての自然数に対して $\alpha_n \leq \beta_n$ が成り立つような十分大きな自然数 $N$ が存在する時，$\lim_{n \to \infty} \alpha_n \leq \lim_{n \to \infty} \beta_n$ であることを証明せよ。

(島根大 2006)　　(m20065807)

**0.454** $f$ を微分可能な関数とする．このとき，$x$ の関数 $G(x) = \int_a^x (x-u)\{f'(u) + f(u)\}du$ を微分せよ．

(島根大 2006)　　(m20065808)

**0.455** 次の広義積分を求めよ．

(1) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$　　(2) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$　　(3) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$

(島根大 2006)　　(m20065809)

**0.456** $f(x, y)$ を $C^2$ 級の関数とし，$\theta$ を定数として $x = u\cos\theta - v\sin\theta$ , $y = u\sin\theta + v\cos\theta$ とする．

(1) $\frac{\partial f}{\partial u}$ と $\frac{\partial f}{\partial v}$ を求めよ．　　(2) $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ を $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ と $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を用いて表せ．

(島根大 2006)　　(m20065810)

**0.457** $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ に対して次の $(a)$〜$(e)$ を求めよ．

$(a)$ $A^T$ ,　$(b)$ $AA$ ,　$(c)$ $|A|$ ,　$(d)$ $A$ の階数 ,　$(e)$ $A^{-1}$

ただし，$A^T$ は $A$ の転置行列を表す．$|A|$ は $A$ の行列式である．

(島根大 2006)　　(m20065811)

**0.458** 次の線形方程式の解 $\boldsymbol{x}$ 全体の集合を求めよ．$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

(島根大 2006)　　(m20065812)

**0.459** 次の行列の固有ベクトルを求め，この行列を対角化せよ。 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & i \end{bmatrix}$

ただし，$i$ は虚数単位である．

(島根大 2006) (m20065813)

**0.460** (1) $f(x) = Ae^{-kx^2}$ について $\dfrac{d}{dx}f(x)$ および $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ を求めよ．

(2) $f(x) = Ae^{-kx^2}$ が微分方程式 $\left(\frac{d^2}{dx^2} - 4k^2x^2\right) f(x) = Cf(x)$ を満たすとき，$C$ を求めよ．

(島根大 2006) (m20065814)

**0.461** (1) $\phi(x, y, z) = \dfrac{x^2}{2} + xy - z$ について $\nabla\phi = \left(\dfrac{\partial}{\partial x},\ \dfrac{\partial}{\partial y},\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right)\phi$ を求めよ．

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x, y, z) = (\boldsymbol{A}_x,\ \boldsymbol{A}_y,\ \boldsymbol{A}_z) = (-y^3,\ x^3,\ 0)$ について，

$$\nabla\times\ \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \boldsymbol{A}_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \boldsymbol{A}_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \boldsymbol{A}_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ $x, y, z$ 方向の単位ベクトルを表す．

(島根大 2006) (m20065815)

**0.462** $e^x \cos x$ の不定積分を求めよ．

(島根大 2006) (m20065816)