0.1 次の微分方程式の解を求めたい．これに関して次の設問に答えよ．

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 4y$$
$$\frac{dy}{dt} = x - 2y$$

(1) この微分方程式の解の一つが，行列 $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ を用いて $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp(\lambda t)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ で表されるものとする．ただし，$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ はゼロ行列ではなく $u_1 + u_2 = 1$ を満たすものとする．λ と $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ を求め（複数求まる場合は全て答えよ），一般解を示せ．

(2) $t = 0$ における $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ の初期値が $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ であるときの解を求めよ．

(北海道大 2007)　　(m20070101)

0.2 $u = (x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ で表される関数がある．次の設問に答えよ．

(1) $\mathrm{grad}\, u$ を求めよ．また，求めたベクトルが $u(x, y, z) = c \quad (c : \text{定数})$ で定義される曲面に対し，幾何学的にどのようなベクトルかを述べよ．ここで $\mathrm{grad}\, u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$ を表し，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルである．

(2) $\mathrm{grad}\, u \cdot \boldsymbol{v} = 0$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\mathrm{grad}\, u$ とどのような関係にあるかを文章で説明せよ．ただし，“$\cdot$”は内積を表している．

(3) 次のベクトル $\boldsymbol{\ell}$ と $u(x, y, z) = c \quad (c : \text{定数})$ で定義される曲面との幾何学的関係を図示して述べよ．ただし，$\boldsymbol{v}$ は (2) で定義されるベクトルである．

$$\boldsymbol{\ell} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} + \boldsymbol{v}$$

(北海道大 2007)　　(m20070102)

0.3 次の設問に答えよ．ここで，z は複素数である．

(1) $e^z \neq 0$ を証明せよ．

(2) $e^z = e^{2z}$ を満足する z を求めよ．また z の値を複素平面上に図示せよ．

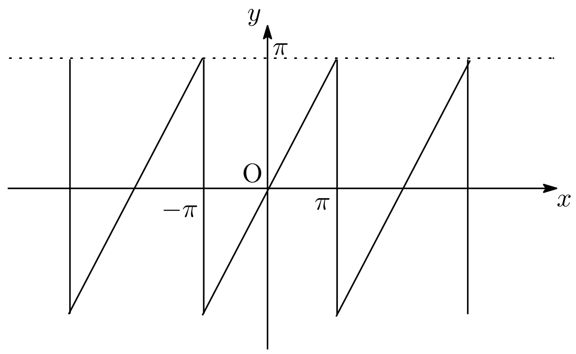
(3) e^{nz} は正則であることを示せ．n は整数とする．

(4) $\dfrac{d}{dz}e^{nz} = ne^{nz}$ を証明せよ．

(北海道大 2007)　　(m20070103)

0.4 (1) 次の周期 2π の周期関数（下図参照）をフーリエ展開せよ．　$f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi)$

(2) $x = \dfrac{\pi}{2}$ とおいて，π を与える次の式を導出せよ．　$\pi = 4\left(1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \cdots\right)$



(北海道大 2007)　　(m20070104)

0.5 次の関数 y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(1) $y = (2x+3)^2$　　(2) $y = x\log(x^2+1)$

(北見工業大 2007)　　(m20070201)

0.6 次の関数 z の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.

(1) $z = xy^2 + y^3$　　(2) $z = \sin(x^2y)$

(北見工業大 2007)　　(m20070202)

0.7 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^3 (x-1)^2 dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

(北見工業大 2007)　　(m20070203)

0.8 a を正の定数とし，$f(x) = e^x - ax$ とするとき，次の問に答えよ.

(1) $a = 3$ のとき $y = f(x)$ の増減表を書き，y の極小値を与える x の値とその時の y の値および y の極大値を与える x の値とその時の y の値を，それぞれあればすべて求めよ.（ヒント：$e = 2.718\cdots$，$\log e = 1$）

(2) 方程式 $f(x) = 0$ の解の個数を a の値について場合分けして答えよ.

(北見工業大 2007)　　(m20070204)

0.9 次の行列 A の行列式の値 $\det A$ と逆行列 A^{-1} を求めよ.　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(北見工業大 2007)　　(m20070205)

0.10 次の $\boxed{}$ に当てはまる整数を入れよ.　行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ の値は $\boxed{}$ である.

(秋田大 2007)　　(m20070401)

0.11 次の $\boxed{}$ に当てはまる整数を入れよ.

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ の階数は $\boxed{}$ である.

(2) 連立一次方程式 $\begin{cases} x+\ \ y-3z=-9 \\ x-2y+\ \ z=\ \ 0 \\ 3x+2y+2z=\ 34 \end{cases}$ の解は $x=\boxed{}$, $y=\boxed{}$, $z=\boxed{}$ である.

(秋田大 2007)　　(m20070402)

0.12 次の極限を求め, $\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}=\boxed{}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=\boxed{}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log x^2}{\log|\sin x|}=\boxed{}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^{\cos x}-2}{\log|\cos x|}=\boxed{}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log|1-x^2|}{\log|\cos x|}=\boxed{}$

(秋田大 2007)　　(m20070403)

0.13 次の定積分を求め, $\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx=\frac{1}{\boxed{}}\left(\frac{\pi}{2}+\boxed{}\right)$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin 2x\cos x dx=\frac{\boxed{}}{12}$

(3) $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{\boxed{}}{3}$　(4) $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx=\frac{\boxed{}}{15}$

(5) $\displaystyle\int_1^e\sqrt{x}\,\log x dx=\frac{2}{\boxed{}}\left(e^{\frac{3}{2}}+\boxed{}\right)$　(6) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx=1+\frac{\boxed{}}{e}$　(7) $\displaystyle\int_1^\infty x^2e^{-x}dx=\frac{\boxed{}}{e}$

(秋田大 2007)　　(m20070404)

0.14 次の $\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ.

曲線 $y=\dfrac{2}{3}(1+x\sqrt{x}\,)$ の区間 $0\leqq\ x\leqq\ 3$ における, この曲線の弧の長さは $\dfrac{\boxed{}}{3}$ である.
注意：log は自然対数で, e は自然対数の底とする. π は円周率とする.

(秋田大 2007)　　(m20070405)

0.15 3 次正方行列 $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&-1\\3&2&0\end{bmatrix}$ について A^2, ${}^tAA$, A^{-1} を求めよ. ここで, ${}^tA$ は A の転置行列を表す.

(東北大 2007)　　(m20070501)

0.16 行列 $B=\begin{bmatrix}1&-1&0&2\\0&1&-1&2\\1&-2&1&0\end{bmatrix}$ で $f(v)=Bv$ と定義される線形写像（1 次写像）$f\ :\ \boldsymbol{R}^4\to\boldsymbol{R}^3$ について, 像 $\mathrm{Im}\,f$ と核 $\mathrm{Ker}\,f$ の次元を求めよ.

(東北大 2007)　　(m20070502)

0.17 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+2\sin x}$ を $x=0$ の近くで 3 次までテーラー展開せよ.

(東北大 2007)　　(m20070503)

0.18 領域 $D=\{(x,y)\mid x\geq 0\,,\ y\geq 0\}$ での広義重積分 $\displaystyle\iint_D\frac{dxdy}{(4+2x+y)^3}$ の値を求めよ.

(東北大 2007)　　(m20070504)

0.19 x, y を実数とし，$0 < x < 2\pi$，$0 < y < 2\pi$ の表す領域において，関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ を満足するすべての点 (x, y) を求めよ．

(3) $f(x,y)$ の極大値，極小値を求めよ．

(4) 曲面 $z = f(x,y)$ 上の $x = \dfrac{\pi}{2}$，$y = \dfrac{\pi}{2}$ に対応する点における接平面の方程式を求めよ．

(東北大 2007) (m20070505)

0.20 $y = y(x)$ $(y \neq 0)$，$z = z(x)$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $z = y^{-4}$ のとき，$\dfrac{dz}{dx}$ を y および $\dfrac{dy}{dx}$ を用いて表せ．

(2) 変数変換 $z = y^{-4}$ を用いて，微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} + yP(x) = y^5 Q(x)$ を z に関する微分方程式に書き表せ．

(3) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} + xy = \dfrac{1}{2}xy^5$ の一般解を求めよ．

(東北大 2007) (m20070506)

0.21 x と y を実数とし，関数 $f(x,y)$ を $f(x,y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ と定義する．
不等式 $(x-1)^2 + y^2 \leqq 1$，$0 \leqq z \leqq f(x,y)$ で表される領域を R として，以下の問に答えよ．

(1) 領域 R の概形を描け． (2) 領域 R の体積を求めよ．

(3) $xy-$ 平面上で不等式 $(x-1)^2 + y^2 \leqq 1$ によって表される領域を D とする．曲面 $z = f(x,y)$ の D に対応する部分の面積を求めよ．

(東北大 2007) (m20070507)

0.22 関数 $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ を考える．

(1) $f(x)$ の極値とそのときの x の値を求めなさい．

(2) $f(x)$ の変曲点を求めなさい． (3) $y = f(x)$ の概形を描きなさい．

(お茶の水女子大 2007) (m20070601)

0.23 次の定積分を計算しなさい．

(1) $\displaystyle\int_1^2 x \log x\, dx$ (ただし，$\log x$ は自然対数とする.) (2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$

(お茶の水女子大 2007) (m20070602)

0.24 (1) 線形写像の定義を書きなさい．

(2) 次の写像 f が線形写像でないならば線形写像でないことを証明し，線形写像ならば f を表す行列と，f の核 $(\mathrm{Ker} f)$ と像 $(\mathrm{Im} f)$ を求め，それぞれの次元を調べなさい．

(a) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x-3y \end{pmatrix}$， (b) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3 \\ 2y+z-4 \end{pmatrix}$

（注）ただし，線形空間 V から W への線形写像 $F : V \to W$ の核とは，$\mathrm{Ker} F = \{\boldsymbol{v} \in V | F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$ のことで，像とは $\mathrm{Im} F = \{F(\boldsymbol{v}) \in W \mid \boldsymbol{v} \in V\}$ のことである．また，$\boldsymbol{0}$ は零ベクトルを表す．

(お茶の水女子大 2007) (m20070603)

0.25 次の行列 A について，行列式，逆行列，固有値と固有ベクトル空間の基底を求めなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2007)　　(m20070604)

0.26 (1) 以下の微分方程式の一般解を求めよ．　$xy\dfrac{dy}{dx} = x^2 + 2y^2$

(2) 微分方程式　$\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{n}{x}\dfrac{dy}{dx} + a^2y = 0$　について，以下の問いに答えよ．ただし，n は整数，a は 0 でない実数とする．

(a) $n = 0$ の場合の一般解を求めよ．　　(b) $n = 2$ の場合の一般解を求めよ．

(東京大 2007)　　(m20070701)

0.27 x_i, y_i の各値がある線形系を介して，x_{i+1}，y_{i+1} をそれぞれ出力する際，入力値と出力値の関係は，

$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ で表現できる．ただし，i は自然数とし，A は行列とする．

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -31 \end{pmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 系を表す行列 A を求めよ．

(2) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．また，行列 A の表す一次変換の幾何学的意味を固有ベクトルを用いて述べよ．

(3) (2) の結果を用いて，A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする，

(4) x_n，y_n を求めよ．ただし，n は自然数とする，

(東京大 2007)　　(m20070702)

0.28 1 の n 乗根は，方程式

$$z^n = 1 \qquad (\ n \text{ は自然数 })$$

をみたす n 個の複素数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ により与えられる．ここで，各 n 乗根 z_i の偏角 $\arg z_i$ は，$0 \leq \arg z_1 < \arg z_2 < \cdots < \arg z_n < 2\pi$ をみたしているとする．また，複素数平面において，$z_1, z_2, \cdots, z_n$ に対応する点をそれぞれ $P_1, P_2, \cdots, P_n$，原点を O とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 1 の 3 乗根に対応する点 P_1, P_2, P_3 を複素数平面上に図示せよ．また，三角形 $P_1P_2P_3$ の面積 S_3 を求めよ．

(2) 複素数平面上において，1 の 3 乗根に対応する点 P_1, P_2, P_3 と原点が O がつくる三つの三角形，すなわち OP_1P_2，OP_2P_3，OP_3P_1 の重心をそれぞれ G_1，G_2，G_3 とする．三つの重心が作る三角形 $G_1G_2G_3$ の面積 A_3 を求めよ．

(3) 前問 (2) と同様にして，1 の n 乗根に対応する点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ と原点が O がつくる n 個の三角形の重心 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ を考える．n 角形 $P_1P_2 \cdots P_n$ の面積 S_n と n 角形 $G_1G_2 \cdots G_n$ の面積 A_n の比 $r_n = \dfrac{A_n}{S_n}$ を求めよ．

(4) 前問 (3) で求めた面積比 r_n の $n \to \infty$ のときの極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r_n$ を求めよ．

(東京大 2007)　　(m20070703)

0.29 (1) 直交座標空間 (x, y, z) において，xy 平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{4a^2} = 1$ $(a > 0)$ が y 軸のまわりを回転してできる表面の方程式を求めよ．

(2) (1) の表面上の点 $(x.y,z)=(x_0,y_0,z_0)$ での接平面の方程式を求めよ．ただし，$z_0>0$ とする．

(3) (1) の表面上において，正の z 成分を持つ 2 点 P_1,P_2 は，それぞれ $\left(\frac{a}{2},\ -a\right)$，$\left(-\frac{a}{3},\ \frac{2a}{3}\right)$ の (x,y) 成分を持つとする．点 P_1,P_2 での接平面の交線を含み，かつ原点を通る平面の方程式を求めよ．

(東京大 2007)　　(m20070704)

0.30 表と裏の出る確率が等しいコインが n 枚ある．ただし，n は 3 以上とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) これらのコインを同時に投げたときに，ちょうど 1 枚だけが他の $(n-1)$ 枚と異なる結果（表か裏か）となる確率 P を求めよ．

(2) これらのコインを同時に投げることを繰り返し，ちょうど 1 枚だけが他の $(n-1)$ 枚と異なる結果になった時点で終了する．ちょうど k 回目で終了する確率を求めよ．

(3) (2) において，k 回以内に終了する確率を求めよ．

(4) (2) において，終了するまでにかかる回数の期待値と分散を求めよ．

(東京大 2007)　　(m20070705)

0.31 (x,y) 平面の領域 $\{x>0,\ y>0\}$ で定義された関数　$f(x,y)=x^{\log y}$　について次の問いに答えよ．

(1) f の二階までの偏導関数をすべて求めよ．　　(2) f は狭義の極値を持たないことを示せ．

(東京工業大 2007)　　(m20070801)

0.32 次の重積分の値を求めよ．ただし，$a>0,\ b>0$ とする．　$\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq 1}(ax^2+by^2)dxdy$

(東京工業大 2007)　　(m20070802)

0.33 次の行列の階数を求めよ．
$$\begin{pmatrix} 1 & y & 1 & x \\ y & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & y \\ x & 1 & y & 1 \end{pmatrix}$$

(東京工業大 2007)　　(m20070803)

0.34 (1) 空間 $\boldsymbol{R}^3=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\boldsymbol{R}^3\}$ 内の平面 $H=\{x+y+z=0\}$ の正規直交基底を一組求めよ．

(2) 写像 $f\ :\ \boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ を，ベクトル $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^3$ に対して，(1) の平面 H への $\boldsymbol{v}$ の正射影を対応させる線形写像とする．f を与える行列 A を求めよ．

(3) A の固有値をすべて求めよ．

(東京工業大 2007)　　(m20070804)

0.35 次の微分方程式　$6\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}-y=0$　の解 $y=y(x)$ のうちで $y(2)=3$ および $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}y(x)=0$ をみたすものを求めなさい．

(東京農工大 2007)　　(m20070901)

0.36 次の 2 変数関数の極値を求めなさい．　$f(x,y)=\dfrac{y^2}{2}+xy-3y-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x$

(東京農工大 2007)　　(m20070902)

0.37 xy 平面において曲線 $y=\log x$ と x 軸と直線 $x=2$ とで囲まれる領域を D とするとき，次の 2 重積分の値を求めなさい．　$\displaystyle\iint_D\frac{y}{x}dxdy$

(東京農工大 2007)　　(m20070903)

0.38 次の行列を A とする. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 6 & -8 & 4 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

(1) A^2 を求めなさい.

(2) E を 3 次単位行列とするとき, t の方程式 $|tE - A^2| = 0$ の解をすべて求めなさい.

(東京農工大 2007) (m20070904)

0.39 次の 4 次正方行列 A, B に対して $A, B, A^{-1}B$ の行列式を求めなさい.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2a+b & 2c+d & 0 & b \\ a+b & c+d & -a & b \\ -a-b & -c-d & 3a & b \\ -2a+b & -2c+d & a & b \end{bmatrix}$$

(電気通信大 2007) (m20071001)

0.40 次の 3 次正方行列 A, E に対して下記の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $\det(xE - A) = (x - \lambda_1)^2(x - \lambda_2)$ と因数分解される. $\lambda_1,\ \lambda_2$ を求めよ.

(2) $V_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ :\ (A - \lambda_1 E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$, $V_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ :\ (A - \lambda_2 E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ とおく. V_1 の基底 $\boldsymbol{v}_1$ と V_2 の基底 $\boldsymbol{v}_2$ とを求めよ.

(3) $(A - \lambda_1 E)\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1$ となる $\boldsymbol{v}_3$をひとつ求めよ.

(4) $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底となる. 線形写像 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定めるとき, $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ に関する T の表現行列を求めよ.

(電気通信大 2007) (m20071002)

0.41 (1) 関数 $f(x) = x\cos x$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めよ.

(2) 関数 $g(x) = \log(1+x)$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めよ.

(3) 次の極限値を求めよ. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \log(1+x)}{x\sin x}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\log(1+x)}{e^{x^2} - 1}$

(電気通信大 2007) (m20071003)

0.42 関数 $y = f(x)$ のグラフ C が $(x, y) = (\sin t,\ t\cos t)$, $(0 \leq t \leq \pi/2)$ と表されるとする. $t = \pi/4$ のときの C 上の点を $P(x_0, y_0)$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $f'(x_0)$ を計算し, 点 P における C の接線の方程式を求めよ.

(2) $f''(x_0)$ を計算せよ.

(3) 曲線 C と x 軸とが囲む部分の面積を求めよ.

(電気通信大 2007) (m20071004)

0.43 複素平面の円 $|z + i| = \sqrt{3}$ を正の向きに 1 周する積分路を C とするとき, 次の複素積分の値を求めよ. ただし, i は虚数単位とする.

(1) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2+1}dz$ (2) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^4-1}dz$

(電気通信大 2007) (m20071005)

0.44 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ に関して以下の問いに答えよ.

(1) 逆行列を求めよ． (2) 固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) (2) で求めた固有ベクトルが線形独立である事を示せ．

(横浜国立大 2007) (m20071101)

0.45 次の微分方程式を解き，与えられた初期条件を満たす解を求めよ．

(1) $(2x+y)+(4x+2y-3)\dfrac{dy}{dx}=0$ 初期条件 ： $x=2$ のとき，$y=-1$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}-6y=-4e^{2x}$ 初期条件 ： $x=0$ のとき，$y=2$，$\dfrac{dy}{dx}=0$

(横浜国立大 2007) (m20071102)

0.46 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ を x で微分しなさい．

(千葉大 2007) (m20071201)

0.47 次の極限値を求めなさい． $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{\log_{10}x}{x-1}\right)$

(千葉大 2007) (m20071202)

0.48 次の連立方程式を行列式を用いて解きなさい． $\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=12 \\ 2x+\ \ y+3z=22 \\ 3x+2y+\ \ z=25 \end{cases}$

(千葉大 2007) (m20071203)

0.49 2006 年日本シリーズでロッテと阪神が戦っているとする．日本シリーズでは，先に 4 ゲーム勝ったチームが勝者となり，引き分けはないものとする．現時点でロッテが第 1 試合に勝っている．また，第 2 試合目に勝ったチームが第 4 試合にも勝つとするとき，

２試合目以降のシリーズの行方（経過）は何通りあるか．

**（ロッテの勝数，阪神の勝数）の組で状態を表現し，初期状態 $(1,0)$ 以降の経過を解答用紙の図を用いて完成しなさい．

(千葉大 2007) (m20071204)

0.50 下の真理値表の空欄部 (ア)〜(オ) を埋め, これを用いて (1)〜(5) の命題の真偽（真理値）を答え，簡単な説明を加えなさい．

【真理値表】T は真，F は偽とする．

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow p$
T	T	F	F	T	T	T	(イ)
T	F	F	T	F	T	F	(ウ)
F	T	T	F	F	T	T	(エ)
F	F	T	T	F	(ア)	T	(オ)

(1) 北京は中国の首都であり，かつ，$7\times 5=29$.

(2) 北京は中国の首都であり，または，$7\times 5=29$.

(3) $7\times 5=35$ ならば，大阪は日本の首都である．

(4) $7\times 5=100$ ならば，大阪は日本の首都である．

(5) 北京は中国の首都であるとき，そして，そのときに限り $7\times 5=100$ である．

(千葉大 2007) (m20071205)

0.51 次の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

(千葉大 2007) (m20071206)

0.52 $\mathbb{R}^3$ で行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ が与えられている. 次の問いに答えなさい.

(1) A の対称部分 $T_1 = \dfrac{1}{2}(A + A^T)$ と, A の歪み対称部分 $T_2 = \dfrac{1}{2}(A - A^T)$ の各行列を求めなさい. ここで, A^T は A の転置行列を表す.

(2) 対称部分の行列 T_1 の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(3) 歪み対称部分の行列 T_2 で定められる線形写像のゼロ空間 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid T_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ を求めなさい.

(千葉大 2007) (m20071207)

0.53 重積分に関する以下の問いに答えなさい.

(1) 領域 $D = \{(x, y, z) \mid x, y, z \geq 0\,,\ x + y + z \leq \pi/2\}$ を図示しなさい.

(2) 次の不定積分を求めなさい. ただし, a は定数である.
$\displaystyle\int x \sin(a + x) dx$

(3) D を積分領域として, 次の 3 重積分の値を求めなさい.
$\displaystyle\iiint_D z \sin(x + y + z) dxdydz$

(千葉大 2007) (m20071208)

0.54 次の微分方程式の解を求めなさい.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = a(y + b)$ ただし, a, b は定数であり, 初期値は $y(0) = y_0$ $(y_0 \neq -b)$ とする.

(2) $\dfrac{dy}{dx} = ky(p - y)$ ただし, k, p は正の定数であり, 初期値は $y(0) = y_0$ $(0 < y_0 < p)$ とする.

(千葉大 2007) (m20071209)

0.55 (1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ を求めよ. (2) $\dfrac{\cos x}{x}$ の導関数を求めよ.

(3) 上記 (2) および $|\cos x| \leq 1$ を利用し, 不等式 $\left| \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \dfrac{2}{x_1}$ が成り立つことを示せ.
ただし, $0 < x_1 < x_2$ とする.

(筑波大 2007) (m20071301)

0.56 (1) $3x^2 + 4xy + 5y^2 = 1$ のとき, $f = x^2 + y^2$ の極値を求めよ.

(2) 上記 (1) の幾何学的意味を論ぜよ.

(筑波大 2007) (m20071302)

0.57 次の連立方程式の解を調べよ. ただし, a および b は実数のパラメータとする.

$$\begin{cases} x & -y & -2z & = & -2 \\ ax & -by & -z & = & -1 \\ x & -y & -4az & = & -4b \end{cases}$$

(筑波大 2007) (m20071303)

0.58 確率変数 X, Y の同時確率密度関数 $f(x,y) = \dfrac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}$ から，確率変数 $Z = X + Y$ が従う分布の確率密度関数を導出せよ．ここで，$-\infty < x < \infty$，$-\infty < y < \infty$ とする．

(筑波大 2007)　　(m20071304)

0.59 ４次の正方行列 A を $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ と定める．

(1) A の固有値を全て求めよ．

(2) (1) で求めた各々の固有値に対する固有ベクトルを一つずつ求めよ．

(筑波大 2007)　　(m20071305)

0.60 V を複素数体 C 上の n 次元ベクトル空間とする．V 上の線形変換 $f : V \to V$ が $f \circ f = f$ を満たすとき,

$$V = \mathrm{Im}\, f \ \oplus \ \mathrm{Ker}\, f$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\mathrm{Im}\, f$ および $\mathrm{Ker}\, f$ は，それぞれ

$$\mathrm{Im}\, f = \{f(v) \mid v \in V\}, \quad \mathrm{Ker}\, f = \{v \mid \ \in V\,,\ f(v) = 0\}$$

で定義される V の部分空間である．

(筑波大 2007)　　(m20071306)

0.61 0 でない n 個の複素数 $\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_n$ をとり，Θ をその (i,j) 成分が $(\theta_i)^{j-1}$ で与えられる n 次正方行列とする. さらに $p_k = (\theta_1)^k + (\theta_2)^k + \cdots + (\theta_n)^k \quad (k \geq 0)$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) 行列 ${}^t\Theta\Theta$ は次の行列に等しいことを示せ．ただし，${}^t\Theta$ は行列 Θ の転置行列である．

$$A = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \\ p_2 & p_3 & p_4 & \cdots & p_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n-1} & p_n & p_{n+1} & \cdots & p_{2n-2} \end{pmatrix}$$

(2) Vandermonde の行列式 $\det\Theta = (-1)^{n(n-1)/2} \displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\theta_i - \theta_j)$

を用いて次の等式を示せ． $\det\left({}^t\Theta\Theta\right) = \displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\theta_i - \theta_j)^2$

(3) $\theta_1, \cdots, \theta_n$ が n 次正方行列 A の固有値であるとき $\mathrm{tr}\,(A^k) = p_k \quad (k \geq 0)$
となることを示せ．ただし，tr は行列のトレースである．

(筑波大 2007)　　(m20071307)

0.62 (1) $g(x)$ が n 回微分可能であるとき
$\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n (xg(x)) = xg^{(n)}(x) + ng^{(n-1)}(x)$ となることを示せ．

(2) $\boldsymbol{R}$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して
$u_n(x) = \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^x (x-y)^{n-1} f(y)dy$ とおけば
$\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n u_n(x) = f(x)\,, \quad n = 1, 2, \cdots$ をみたすことを示せ．

(筑波大 2007)　　(m20071308)

0.63 a, b を $a^2+b^2=1$ をみたす実数の定数とし，D を $D=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ で定めるとき，

積分 $\displaystyle\iint_D \frac{(ax+by)^2}{\sqrt{1-(ax+by)^2}}dxdy$ を求めよ．

必要なら次の変数変換を用いてよい． $\begin{cases} u = \ \ ax+by \\ v = -bx+ay \end{cases}$

(筑波大 2007) (m20071309)

0.64 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)=\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ の導関数を求めよ．

(筑波大 2007) (m20071310)

0.65 (1) 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続であるとする．このとき， $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$ が成立する点 $x=c$ が区間 (a,b) に少なくとも一つは存在することを証明せよ．

(2) 関数 $f(x)$，$g(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続であるとする．このとき，閉区間 $[a,b]$ で $g(x)>0$ であるならば， $\displaystyle\frac{1}{\int_a^b g(x)dx}\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)$ が成立する点 $x=c$ が区間 (a,b) に少なくとも一つは存在することを証明せよ．

(筑波大 2007) (m20071311)

0.66 (1) 原点に中心をもつ楕円 $x^2-xy+y^2=1$ の，長軸および短軸の長さをそれぞれ求めよ．また，この楕円の概形を，主軸の方向がわかるように描け．

(2) 楕円 $x^2-xy+y^2=1$ の長軸を x 軸に一致させる回転（ただし，回転角は $-\dfrac{\pi}{2}$ より大きく $\dfrac{\pi}{2}$ より小さいとする）による変換 g と，y 軸方向の拡大による変換 f を合成した変換 $f\circ g$ により，元の楕円は円に変換される．行列 A を用いて $f\circ g$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すとき, A 及びその逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) 次の積分を求めよ． $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2-xy+y^2)}dxdy \quad \{(x,y) \mid -\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty\}$

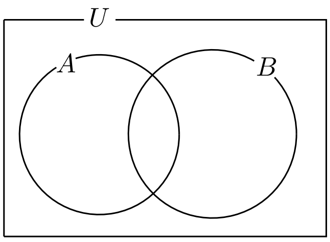
(筑波大 2007) (m20071312)

0.67 集合 A, B に対して演算 $\oplus$ を：

$$A\oplus B = \{x \mid x\in A\cap\overline{B} \text{ または } x\in\overline{A}\cap B\}$$

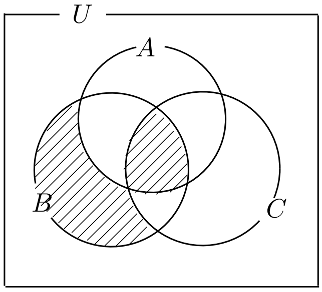
と定義する．$\cap$ は積集合，$\cup$ は和集合，$\overline{A}$ は A の補集合を表す．

(1) $A\oplus B$ に含まれる領域を，下のような図に斜線を入れて示せ．ただし，U は全体集合である．



(2) $\overline{A\oplus B}$ を，A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\cup$, $\cap$ 及びカッコだけを使った式で表せ．

(3) 下図の斜線の領域を A, B, C, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\oplus$ 及びカッコだけを使った式で表せ．



《注》斜線の領域は，原稿では灰色の領域となっていましたが，図の灰色の部分が不明でしたので，
仮に，上記の斜線の部分のように改ざん致しましたので，ご承知下さい．

(筑波大 2007)　　(m20071313)

0.68　関数 $f(x) = x \cdot \ln x \quad (x > 0)$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $f'(x)$，$f''(x)$ を求めよ．　　(2) 関数 $f(x)$ の極値と増減を求めよ．

(3) $x \to +0$ および $x \to +\infty$ における関数 $f(x)$ の極限値を求めよ．

(4) 関数 $f(x)$ のグラフの概形を示せ．

曲線 $y = x \cdot \ln x$ と x 軸と $x = a \quad (0 < a < 1)$ とで囲まれた部分の面積を $S(a)$ とおく．

(5) $S(a)$ を求めよ．　　(6) $S(a)$ の極限値 $\lim_{a \to +0} S(a)$ を求めよ．

参考： グラフの描画には自然対数の底として $e = 2.72$ の値を用いなさい．

(筑波大 2007)　　(m20071314)

0.69　線形写像　$f \ : \ \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3 \quad f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax_1 + ax_2 + x_3 \\ ax_1 + x_2 + ax_3 \\ x_1 + ax_2 + ax_3 \end{bmatrix} \quad (a \in \boldsymbol{R})$
について，以下の問に答えなさい．

(1)　f の標準基底に関する表現行列 F を求めよ．

(2)　f が全単射（写像の表現行列が正則）となる条件を求めよ．

(3)　f が全単射であるとき，逆写像 f^{-1} の標準基底に関する表現行列を求めよ．

(筑波大 2007)　　(m20071315)

0.70　積分 $\displaystyle\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$ を求めよ．ただし，積分領域 D は $D = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ とする．

(筑波大 2007)　　(m20071316)

0.71　微分方程式　$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$　の一般解を求めよ．

(筑波大 2007)　　(m20071317)

0.72　関数 $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy + 1$ について以下の問に答えよ．

(1)　$\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．　　(2) $f(x, y)$ の極値を求めよ．

(筑波大 2007)　　(m20071318)

0.73 (1) 次の連立一次方程式の解の集合を求めよ． $\begin{cases} x+2y-\ \ z=0 \\ \qquad y+\ \ z=0 \\ x+\ \ y-2z=0 \end{cases}$

(2) 次の連立一次方程式の一般解を求めよ． $\begin{cases} x+2y-\ \ z=2 \\ \qquad y+\ \ z=2 \\ x+\ \ y-2z=0 \end{cases}$

(筑波大 2007)　　(m20071319)

0.74 2次の実対称行列 A で作った2次形式が次のように与えられたとする． ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}=2x^2-4xy+5y^2$

ここで　$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$， $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$， ${}^t\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ である．

(1) A の固有値と固有ベクトル（正規化したもの）をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた固有ベクトルを並べて作った2次の正方行列 P とその転置行列 ${}^tP$ を使って ${}^tPAP$ を計算せよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{x}$ に適当な一次変換を行い上記の2次形式を標準形に変換せよ．

(筑波大 2007)　　(m20071320)

0.75 $x>0$ のとき次の不等式を証明せよ．ただし log は自然対数とする．　$\log(1+x)>x(1-x)$

(筑波大 2007)　　(m20071321)

0.76 上空の2機の航空機 A, B がそれぞれ一定の速度ベクトル $\vec{v}$, $\vec{w}$ で飛んでいる．この2機のある時刻の位置ベクトルはそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ であるとする．このとき航空機 A, B が最接近するときの A, B 間の距離を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ を用いて表せ．

(筑波大 2007)　　(m20071322)

0.77 三角形 ABC において，$\tan A$，$\tan B$，$\tan C$ の値がすべて整数であるときに，これらの値を求めよ．

(筑波大 2007)　　(m20071323)

0.78 ある人が特定の遺伝子 G を持っているかどうかを調べたい．このとき検査 T で陽性になるとこの人は遺伝子を持っていると判断される．しかし個体差があるために，真に遺伝子を持っている人でも検査結果が陽性になるとは限らないし，真に遺伝子を持っていない人でも検査結果が陰性になるとは限らない．一般に検査の精度は感度と特異度で評価される．感度とは真に遺伝子を持っている人が検査によって陽性になる確率，特異度とは真に遺伝子を持っていない人が検査によって陰性になる確率である．

さて，遺伝子 G は 10000 人に 1 人の割合で存在することがわかっている．ある人 A が検査 T を受けたところ陽性であったとき，このもとで A が真にこの遺伝子 G を持っている条件付き確率を求めよ．ただし検査 T の感度と特異度は 99% であるとする．

(筑波大 2007)　　(m20071324)

0.79 $20!=1\times2\times3\times\cdots\times19\times20$ を素因数分解せよ．（例えば $5!=120$ なら $2^3\times3\times5$ となる．）

(筑波大 2007)　　(m20071325)

0.80 すべての実数 x に対し $\sqrt{3}\sin x-\cos x=A\sin(x-\alpha)$ が成り立つとき，A，α を求めよ．ただし $A>0$，$0^\circ\leqq\alpha<360^\circ$とする　．

(筑波大 2007)　　(m20071326)

0.81 $4\cos^2 x-12\cos x+9$ の最小値を求めよ．

(筑波大 2007)　　(m20071327)

0.82 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ を計算せよ.

(筑波大 2007)　　(m20071328)

0.83 $\dfrac{(1-i)^2}{1+i}z=1$ となる複素数 z を $a+bi$ の形で表せ．ただし $i^2=-1$ で，a, b は実数とする.

(筑波大 2007)　　(m20071329)

0.84 A, B, C はそれぞれ正直（必ず本当のことを言う）か嘘つき（必ず嘘を言う）のどちらかであり，互いに相手の正体を知っている．以下の A, B, C の発言から，それぞれの正体が正直，嘘つき，あるいは不明（これだけからはどちらとも言えない）のいずれであるかを答えよ.

(1) A：「B, C の 1 人は正直で 1 人は嘘つきだ.」

(2) B：「A, C の少なくとも一方は嘘つきだ.」

(3) C：「A は正直だ.」

(筑波大 2007)　　(m20071330)

0.85 $1024 \fallingdotseq 1000$，つまり $2^{10} \fallingdotseq 10^3$，という近似式を使えば，$\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3$，と近似できる. さらにこれと $81 \fallingdotseq 80$，つまり $3^4 \fallingdotseq 2^3 \times 10$ という近似式を使えば，$4\log_{10} 3 \fallingdotseq 1+3\log_{10} 2$，したがって $\log_{10} 3 \fallingdotseq 0.48$ （小数点第 3 位で四捨五入）と近似できる .

$\log_{10} 7$ について同様の近似式を示し，それを使って $\log_{10} 7$ の近似値を示せ.

(筑波大 2007)　　(m20071331)

0.86 球面 $C: x^2+y^2+z^2-6x-4y+4z-8=0$ について以下の問いに答えよ.

(1) C が yz 平面と交わってできる円の中心と半径を求めよ.

(2) C が y 軸から切り取る線分の長さを求めよ.

(3) C 上の点 $A(6, 2, 2)$ における接平面の方程式を求めよ.

(筑波大 2007)　　(m20071332)

0.87 1 円，5 円，10 円，50 円，100 円の 5 種類の硬貨がそれぞれ 3 枚ずつ，合計 15 枚ある．これについて以下の問いに答えよ.

(1) この中から 2 枚を選んだ合計金額は，全部で何通りあるか.

(2) この中から 3 枚を選び，それを戻してもう一度 3 枚選んだところ，3 枚の合計金額は同じなのに，硬貨の組み合わせ（同じ金額の硬貨が何枚あるか）は異なっていた．そのような 2 通りの組み合わせと合計金額の例を示せ

(3) この中から 3 枚を選んだ合計金額は，全部で何通りあるか.

(筑波大 2007)　　(m20071333)

0.88 4 次関数 $y=f(x)=x^4-8x^2+ax+b$ のグラフは 2 点 $x=\alpha,\ \beta\quad(\alpha<\beta)$ で x 軸と接する.

(1) a, b, α, β を求めよ.　　(2) $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ.

(筑波大 2007)　　(m20071334)

0.89 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots$ の値を求めよ.

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$ の値を求めよ．

ただし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$ である（π は円周率）．

(筑波大 2007)　　(m20071335)

0.90 $A=\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}$ とする．

(1) A の固有値と単位固有ベクトルを求めよ．　　(2) A^n を求めよ（n は正の整数）．

(筑波大 2007)　　(m20071336)

0.91 連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x}=b,\quad A=\begin{pmatrix}2&-3&0&0\\0&1&-2&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&\alpha\end{pmatrix}\quad b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\beta\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

を考える（α, β は定数）．

(1) 行列 A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ．　　(2) この方程式に複数の解が存在するための条件を示せ．

(3) そのときの一般解を示せ．

(筑波大 2007)　　(m20071337)

0.92 (1) 関数 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ をマクローリン展開することにより，次式を導き出せ．

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{i=1}^{\infty}{}_{\alpha}\mathrm{C}_i x^i \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

ただし，${}_{\alpha}\mathrm{C}_i$ は次式で表される．　$\displaystyle {}_{\alpha}\mathrm{C}_i=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!}$　　$(i\geq 1)$

(2) 式 ① を用いて次の関数 $g(x)$ のマクローリン展開式を x^3 の項まで求めよ．　$\displaystyle g(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$

(埼玉大 2007)　　(m20071401)

0.93 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int\sqrt{4-x^2}dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+1}$

(埼玉大 2007)　　(m20071402)

0.94 行列式 $f(x)$ について考える．　$f(x)=\begin{vmatrix}x-2&5&10\\-1&x+4&10\\-5&6&x-6\end{vmatrix}$

(1) 行列式 $f(x)$ を求めよ．　　(2) 行列式 $f(x)$ が 0 となる時，x の値を求めよ．

(埼玉大 2007)　　(m20071403)

0.95 行列 A は以下のように対称行列 R と交代行列 S の和で表すことができる．

$A=R+S$,　　ただし，$A=\begin{pmatrix}5&3&1\\7&5&3\\8&2&6\end{pmatrix}$ とする．このとき，R および S を求めよ．

(埼玉大 2007)　　(m20071404)

0.96 以下の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ について考える.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ で囲まれた平行四辺形の面積を求めよ.

(2) 3 つのベクトルでできる平行六面体の体積が 12 となる時, x の値を求めよ.

(埼玉大 2007) (m20071405)

0.97 次の微分方程式を解け.

(1) $2x^2 \dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ (2) $\dfrac{dy}{dx} + y \tan x + \cot^2 x = 0$

(埼玉大 2007) (m20071406)

0.98 次の連立微分方程式を解け.

$$\frac{dx}{dt} - x + 2y = e^t$$

$$3x + \frac{dy}{dt} - 2y = 1$$

(埼玉大 2007) (m20071407)

0.99 a, b を実数とし, 正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & b \\ b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \end{pmatrix}$ を考える.

(1) A の階数を求めよ.

(2) 積 AB が単位行列になるような a, b の組をすべて求めよ.

(埼玉大 2007) (m20071408)

0.100 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を 1 つ求めよ.

(埼玉大 2007) (m20071409)

0.101 (1) 次の等式を示せ。

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \qquad (t \neq -1)$$

(2) 上式を利用して, 次の式を示せ.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x) \qquad (x > -1)$$

ただし, $R_n(x) = (-1)^n \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$ とする.

(3) $0 \leq x \leq 1$ のとき $R_n(x) \to 0 \quad (n \to \infty)$ を示せ.

(4) $-1 < x < 0$ のとき $R_n(x) \to 0 \quad (n \to \infty)$ を示せ.

(埼玉大 2007) (m20071410)

0.102 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+2$ で囲まれる xy 平面内の有界領域を D とする．

領域 D を図示し，重積分 $\iint_D ydxdy$ を計算せよ．

(埼玉大 2007) (m20071411)

0.103 行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ がある．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列が存在するために必要な，$a \neq \pm\infty$ 以外の条件を求めよ．

(2) $a=4$ のとき，行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列を求めよ．

(群馬大 2007) (m20071501)

0.104 数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ．

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

(群馬大 2007) (m20071502)

0.105 x, y が実数のとき，$f(x,y)=-x^2-y^2+ax+by-9$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)=0$ が点 $(1,2)$ と点 $(3,4)$ を通るとする．このときの a と b の値を求めよ．

(2) このとき $f(x,y)$ が最大となる値を求めよ．また，このときの x と y の値を求めよ．

(群馬大 2007) (m20071503)

0.106 $\tan\dfrac{\theta}{2}=x$ のとき， 以下の問いに答えよ．

(1) $\sin\theta=\dfrac{2x}{1+x^2}$ を証明せよ．　(2) $\cos\theta=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ を証明せよ．

(群馬大 2007) (m20071504)

0.107 今，手元にトランプがある．以下の問いに答えよ．

(1) トランプの数字の札 10 枚と絵札 2 枚を取り出す．これを裏返しにして，無作為に 1 列に並べるとき，両端が絵札となる確率はいくつか．

(2) トランプの 4 つの組（スペース, クラブ, ハート, ダイヤ）の札が 5 枚ずつ取り出されている．これをよく切ったとき，スペードの札が 5 枚連続している確率はいくつか．

(群馬大 2007) (m20071505)

0.108 関数 $y=\sin x$ の定義域を $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に制限すると，その逆関数 $y=\mathrm{Arcsin}\,x$ を考えることができる．次の各問に答えよ．

(1) $f(x)=(\mathrm{Arcsin}\,x)^2$ は，どのような 2 つの関数の合成関数とみなすことができるか答えよ．

(2) 合成関数の微分公式に従い，$f(x)=(\mathrm{Arcsin}\,x)^2$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた関数 $f'(x)$ に対して，定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f'(x)dx$ を求めよ．

(茨城大 2007) (m20071701)

0.109 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ は 1 次独立であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ の 1 次結合で表せ.

(茨城大 2007)　　(m20071702)

0.110　次の微分方程式を解け，　$y''-y=e^x$，　$y(0)=0$，　$y'(0)=1$

(茨城大 2007)　　(m20071703)

0.111　複素数の数列 $z_n=\left(\dfrac{i}{2}\right)^n$　$(n=0,1,2,\cdots)$ について，次の各問に答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n$ を求めよ.　　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ を求めよ.　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz_n$ を求めよ.

(茨城大 2007)　　(m20071704)

0.112　(x,y) を平面上の直交座標，(r,θ) を極座標とする．以下の問に答えよ.

$\rho>0$ とする．関数 $f(x,y)=r\sin 2\theta$ の正方形 $A=\{(x,y)\mid 0<x<\rho,\ 0<y<\rho\}$ 上の積分

$$I(\rho)=\iint_A f(x,y)dxdy$$

と扇形 $B=\{(r\cos\theta, r\sin\theta)\mid 0<r<\rho,\ 0<\theta<\pi/2\}$ 上の積分

$$J(\rho)=\iint_B f(x,y)dxdy$$

の大小関係を積分計算によらずに論ぜよ．次に積分計算を行って $I(\rho)$ と $J(\rho)$ を ρ の式で表し，大小関係を比較せよ.

(茨城大 2007)　　(m20071705)

0.113　(x,y) を平面上の直交座標，(r,θ) を極座標とする．以下の各問に答えよ.

関数 $f(x,y)$ の定義域内の点 $\boldsymbol{p}$ およびベクトル $\boldsymbol{u}=(a,b)$ に対し，極限　$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{p})}{t}$ を点 $\boldsymbol{p}$ での $\boldsymbol{u}$ 方向の微分係数と呼び，$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{p})$ で表す.

(1) 関数 $f(x,y)=r\sin 3\theta$ の原点 $\boldsymbol{o}$ での $\boldsymbol{u}=(\cos\phi,\ \sin\phi)$ 方向の微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{o})$ を求めよ．また，偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{o})$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{o})$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x,y)$ が点 $\boldsymbol{p}$ の近傍で偏微分可能，かつ，偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ が点 $\boldsymbol{p}$ で連続ならば等式

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{p})=a\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p})+b\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p})$$

が成立することを示せ．次に (1) の関数 f は原点 $\boldsymbol{o}$ でこの等式を満たさない理由を説明せよ.

(茨城大 2007)　　(m20071706)

0.114　3 次正方行列　$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$　について，以下の各問に答えよ.

(1) A の固有値 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$ および対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$ を一組求めよ.

(2) ベクトル列 $\boldsymbol{u}_n$ を $\boldsymbol{u}_n = A^n \begin{bmatrix} \varepsilon \\ -1+2\varepsilon \\ 2+\varepsilon \end{bmatrix}$, $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ で定める．ただし，$\varepsilon = 2^{-100}$ とし，A^0 は単位行列を表す．このとき，$\boldsymbol{u}_n$ を (1) で求めた $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ の一次結合で表せ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，ユークリッドノルムを $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$ とする．(2) で与えた $\boldsymbol{u}_n$ について，以下を調べよ.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ||\boldsymbol{u}_n||$　(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{||\boldsymbol{u}_{n+1}||}{||\boldsymbol{u}_n||}$　(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{u}_n}{||\boldsymbol{u}_n||}$

(d) $\left|\left|\boldsymbol{u}_n - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right|\right| \leq 2^{-10}$ なる n の存在の有無.

(茨城大 2007)　(m20071707)

0.115 (1) 3つの元からなる集合 $\{a, b, c\}$ の部分集合をすべてあげよ.

(2) 一般に n 個 $(n \geq 1)$ の元からなる集合 X の部分集合は総計何個あるか論ぜよ.

(3) 一般に，写像 $f : X \to Y$ について次の主張は正しいか否か判定し，その理由を述べよ.

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$　(b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

(c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$　(d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

ただし，A, B は X の部分集合とし, C, D は Y の部分集合を表す．また，X の部分集合 X', Y の部分集合 Y' に対して,

$f(X') = \{f(x) \in Y \mid x \in X'\}$,　$f^{-1}(Y') = \{x \in X \mid f(x) \in Y'\}$　である.

(茨城大 2007)　(m20071708)

0.116 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$ を解きなさい.

(山梨大 2007)　(m20071801)

0.117 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ca & ab \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix}$ を考えるとき，A が逆行列をもつために必要かつ十分な a, b, c についての条件を求めなさい.

(山梨大 2007)　(m20071802)

0.118 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ が異なる固有値をもたないような k の値をすべて求めなさい.

(山梨大 2007)　(m20071803)

0.119 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{x^3}$ を求めなさい.

(山梨大 2007)　(m20071804)

0.120 定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta \sin(\lambda x + \mu) dx$ を求め，定数 α, β, λ, μ の式で表しなさい．ただし，$\lambda \neq 0$ とする.

(山梨大 2007)　(m20071805)

0.121 座標平面上の領域 $D = \left\{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}\right\}$ を考えるとき，D における二重積分 $\displaystyle\iint_D e^x \sin y \, dxdy$ の値を求めなさい.

(山梨大 2007)　(m20071806)

0.122 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする.

(1) 1024 桁の 2 進数の非負の整数が表す数の個数を 10 進数で表すと，最大で何桁になるか求めよ.

(2) 1024 桁の 2 進数の非負の整数と 100 桁の 3 進数の非負の整数の積で表される数の個数を 10 進数で表すと，最大で何桁になるか求めよ.

(山梨大 2007)　　(m20071807)

0.123 次の行列　$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$　を考える.

(1) A の固有値を求めなさい.　　(2) A の固有ベクトルを求めなさい.

(山梨大 2007)　　(m20071808)

0.124 n を自然数とするとき，　$2^{2n+1} + 1$　が 3 で割り切れることを，数学的帰納法により証明せよ.

(山梨大 2007)　　(m20071809)

0.125 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) A の行列式を求めよ.　　(2) A の逆行列を求めよ.

(3) A の固有値とその固有ベクトルを求めよ.

(信州大 2007)　　(m20071901)

0.126 次の連立方程式を解け.　$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ 2x + 3y - z = -1 \\ 3x + ay - 12z = -12 \end{cases}$

(信州大 2007)　　(m20071902)

0.127 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq \pi\}$ とする．次の積分の値を求めよ.　$\iint_D x^2 \sin(x^2 + y^2) dxdy$

(信州大 2007)　　(m20071903)

0.128 平面上の動点 P の時刻 t での位置ベクトルが $\boldsymbol{x}(t) = (f(t), g(t))$ で与えられている．但し，$f(t)$, $g(t)$ は閉区間 $[0, 1]$ を含む開区間で定義された微分可能な関数であり，それらの導関数 $f'(t)$, $g'(t)$ は同じ開区間で連続である.

さて，動点 P が時刻 $t = 0$ に原点 $O(0, 0)$ を出発して時刻 $t = 1$ に点 $A(1, 1)$ に到着するとせよ．このとき，途中のある時刻で速度ベクトル $\dfrac{dx}{dt}(t) = (f'(t),\ g'(t))$ がベクトル $\overrightarrow{OA}$ の定数倍になることを証明せよ.

(信州大 2007)　　(m20071904)

0.129 位置ベクトル $\overrightarrow{r} = (\sqrt{3}, 1, 0)$ と力をあらわすベクトル $\overrightarrow{F} = (2, 2, 0)$ がある．以下の問いに答えよ.

(1) xy 平面内にあり，ベクトル $\overrightarrow{r}$ に垂直な単位ベクトル $\overrightarrow{e}$ を求めよ.

(2) トルク $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$ を計算せよ.

(3) 二つのベクトル $\overrightarrow{r}$ と $\overrightarrow{F}$ の間の角度を求めよ.

(新潟大 2007)　　(m20072001)

0.130 容量 C のコンデンサー，抵抗値 R の抵抗，インダクタンス L のコイルを直列につないだ閉回路を考える，コンデンサーの電荷を $q(t)$ とするとき，$a = \dfrac{R}{L}$, $b = \dfrac{1}{CL}$ とおけば，$q(t)$ の時間変化をあらわす微分方程式は，次式で与えられる．

$$\frac{d^2q}{dt^2} + a\frac{dq}{dt} + bq = 0$$

$a^2 - 4b > 0$ の場合について，この微分方程式の一般解を求めよ．

(新潟大 2007)　　(m20072002)

0.131 物理によく用いられるオイラーの公式（ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ 　ここで，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位 ）は，指数関数と三角関数を結びつける重要な公式である．この公式を使って，次の関係式を証明せよ．

(1) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$　　(2) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

(新潟大 2007)　　(m20072003)

0.132 赤玉 2 個と白玉 5 個をでたらめに 1 列に並べる．以下の問いに答えなさい．

(1) 5 個の白玉が連続する確率を求めなさい．　　(2) 2 の赤玉がとなり合わない確率を求めなさい．

(長岡技科大 2007)　　(m20072101)

0.133 実数 θ に対して $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ， $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とおく．以下の問いに答えなさい．

(1) $R(\theta)K = KR(-\theta)$ を示しなさい．

(2) 原点を通る傾き $\tan\theta$ の直線に関する対称移動を表す行列を $A(\theta)$ とするとき，$A(\theta) = R(2\theta)K$ を示しなさい．

(3) $A\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)A(\theta) = R\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ となる $A(\theta)$ を求めなさい．

(長岡技研大 2007)　　(m20072102)

0.134 座標平面に 2 点 $A(3, 0)$，$B(0, 4)$ をとる．点 P が円周 $x^2 + y^2 = 1$ 上を動くとき，三角形 ABP の面積の最大値と最小値を求めなさい．

(長岡技研大 2007)　　(m20072103)

0.135 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ の値を求めなさい．

(2) 区間 $[a, b]$ における連続関数 $f(x)$ の定積分 $S = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の値を求めたい．$[a, b]$ を幅 $\dfrac{b-a}{n}$ の小区間に n 等分し，その分点を $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ とする．各小区間上に作られる台形の面積の和　$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{f(a_{k-1}) + f(a_k)}{2} \cdot \frac{b-a}{n}$　を S の近似値とする．この近似法を台形公式という．区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ を 3 等分して，台形公式による $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ の近似値 S_3 を求めなさい．

(長岡技科大 2007)　　(m20072104)

0.136 微分方程式 $y'' - \dfrac{(y')^2}{y} + y = 0$ の解で初期条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ を満たすものを $y = y(x)$ とする．以下の問いに答えなさい．

(1) $z = \log y$ とおくとき，$z = z(x)$ の満たす微分方程式を求めなさい．

(2) y を求めなさい．

(長岡技科大 2007)　　(m20072105)

0.137 A を任意ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して，$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ を満たす $3\times\ 3$ 行列とする.

(1) A を求めよ.　　(2) A^3 を求めよ.

(3) A の 3 つの固有値及び各固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(金沢大 2007)　　(m20072201)

0.138 $f(x)$ を $f'(x) = f(x)$, $f(0) = 1$ を満たす関数とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $(e^{-x}f(x))' = 0$ を示せ．また，これを用いて $f(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ.

(3) (2) の結果を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right)$ の値を求めよ.

(金沢大 2007)　　(m20072202)

0.139 領域 $D(\varepsilon) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq\ 1 - \varepsilon,\ |y| \leqq\ x\}$　$(0 < \varepsilon < 1)$ に対して
$\displaystyle I(\varepsilon) = \frac{2}{\pi}\iint_{D(\varepsilon)} \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 領域 $D(\varepsilon)$ を図示せよ.　　(2) $I(\varepsilon)$ を計算せよ.　　(3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\log I(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}$ の値を求めよ.

(金沢大 2007)　　(m20072203)

0.140 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ とする．次に答えよ.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $n \to \infty$ のとき，$3^{-n}A^n$ はどのような行列に近づくか.

(金沢大 2007)　　(m20072204)

0.141 4 次元ユークリット空間 $\boldsymbol{R}^4$ の部分ベクトル空間 $\boldsymbol{V}$ を

$$\boldsymbol{V} = \{(x, y, z, w) \in \boldsymbol{R}^4 \mid x + y + z + w = 0,\ x + 2y + 2z + 3w = 0\}$$

で定義する.

(1) $\boldsymbol{V}$ の基底を一つ求めよ.　　(2) $\boldsymbol{V}$ の正規直交基底を一つ求めよ.

(金沢大 2007)　　(m20072205)

0.142 次を示せ.

(1) $0 < a < b < \pi$ ならば，$\dfrac{\sin b}{b} < \dfrac{\sin a}{a}$ である.

(2) $0 < c < 1$ ならば，$\dfrac{\sin d}{d} = c$ となる d が開区間 $(0, \pi)$ のなかにただ一つ存在する.

(金沢大 2007)　　(m20072206)

0.143 $D = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0\}$ とする．次の積分の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$　　(2) $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+2xy+4y^2)}dxdy$

(金沢大 2007)　　(m20072207)

0.144 (1) ある定数 $a_0,\,a_1,\,\cdots,\,a_n$ と正の定数 M が存在して

$$\left|\ \log(1+x)-\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\ \right| \leqq Mx^{n+1} \quad (0\leqq\ x\leqq\ 1)$$ が成り立つとき，$a_0,\,a_1,\,\cdots,\,a_n$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\log 2$ を示せ．

(金沢大 2007)　　(m20072208)

0.145 次のことを示せ．

(1) $f(x)=\begin{cases} x^{-1} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$ とする．$f(x)$ は連続でない．

(2) $f(x)=\begin{cases} x^{m} & (x>0) \\ 0 & (x\leq 0)\end{cases}$ とする．$m\geq 3$ ならば，$f'(x)$ は微分可能である．

(金沢大 2007)　　(m20072209)

0.146 n を自然数とし，I_n を次の広義積分で定める．$I_n=\displaystyle\int_1^{\infty}x^{n-1}e^{-x}dx$　このとき，次の問いに答えよ．

(1) I_1 の値を求めよ．

(2) $n\geq 2$ のとき，次の漸化式が成り立つことを示せ．　$I_n=\dfrac{1}{e}+(n-1)I_{n-1}$

(3) 次式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ．　$I_n=\dfrac{(n-1)!}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$

(4) 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{(n-1)!}$

(金沢大 2007)　　(m20072210)

0.147 何回でも偏微分可能な関数 $u(x,y,z)$ が　$\Delta u=0$　$\left(\Delta u=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)$

をみたしているとする．このとき，　$v=x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}$　に対して，Δv を計算せよ．

(金沢大 2007)　　(m20072211)

0.148 (1) 自然数 n に対して，集合 $D_n=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\mid x^2+y^2\leq n^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$ における関数 $e^{-x^2-y^2}$ の積分　$\displaystyle\iint_{D_n}e^{-x^2-y^2}dxdy$　を求めよ．

(2) 集合 $R_n=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\mid 0\leq x\leq n,\ 0\leq y\leq n\}$ に対して，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\iint_{R_n}e^{-x^2-y^2}dxdy-\iint_{D_n}e^{-x^2-y^2}dxdy\right)=0$　となることを示せ．

(3) 次の積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx$

(金沢大 2007)　　(m20072212)

0.149 連立方程式 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0 \\ 4x_1+3x_2+2x_3+\ \ x_4=0\end{cases}$ を満たすベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^4$ の全体を V とする．

(1) V は $\boldsymbol{R}^4$ の線形部分空間であることを示せ．　(2) V の基底を一つ求めよ．

(3) $\boldsymbol{R}^4$ の基底で，(2) で求めた V の基底を含むものを一つ求めよ．

(金沢大 2007)　　(m20072213)

0.150 次の $4\times\ 4$ 行列 A とベクトル $\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^4$ について，以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3&-2\\1&1&1&0\\3&2&5&-2\\2&-2&10&-8\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\3\\8\\a\end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^4$ に対する連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持つように定数 a を定めよ．

(2) (1) で求めた a に対して，連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解を求めよ．

(3) 像空間 $\mathrm{Im}A=\{A\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^4\}$ の基底と次元を求めよ．

(金沢大 2007)　　(m20072214)

0.151 $A=\begin{pmatrix}-5&-4&4\\16&15&-16\\10&10&-11\end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．　　(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．

(金沢大 2007)　　(m20072215)

0.152 実数を成分とする 2 次正方行列全体がつくるベクトル空間を M とする．
$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\in M$ に対し，線形写像 $F\ :\ M\to M$ を

$$F(X)=AX-XA\qquad (X\in M)$$

によって定義するとき，M の部分空間

$$\mathrm{Ker}F=\{X\in M\mid F(X)=O\},\quad \mathrm{Im}F=\{F(X)\mid X\in M\}$$

の次元を求めよ．ただし，O は零行列を表す．

(金沢大 2007)　　(m20072216)

0.153 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1}(2x)\quad\left(-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}\right)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}xe^{x^2}$　　(3) $\dfrac{d}{dx}(\log_e x)^x\quad (x>e)$

(富山大 2007)　　(m20072301)

0.154 次の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int x\sin x dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2-2x+5}dx$

(富山大 2007)　　(m20072302)

0.155 $2\times\ 2$ 行列　$L=\begin{pmatrix}1/\sqrt{1-\beta^2}&-\beta/\sqrt{1-\beta^2}\\-\beta/\sqrt{1-\beta^2}&1/\sqrt{1-\beta^2}\end{pmatrix}$　とするとき（ただし，$0<\beta<1$ とする），以下の問いに答えよ．

(1) L による 1 次変換 $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を行ったとき，$x'^2-y'2=x^2-y^2$ が成り立つことを示せ．

(2) L が行列の方程式 $L^2 - 2L/\sqrt{1-\beta^2} + I = O$ を満足することを示せ．ただし，I は $2\times\ 2$ の単位行列で，O は $2\times\ 2$ の零行列である．

(3) L の固有値を求めよ．

(4) L と別の $2\times\ 2$ 行列 $M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-\gamma^2} & -\gamma/\sqrt{1-\gamma^2} \\ -\gamma/\sqrt{1-\gamma^2} & 1/\sqrt{1-\gamma^2} \end{pmatrix}$ を用いた 1 次変換 $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = ML \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を行ったとき，$x''^2 - y''^2 = x^2 - y^2$ が成り立つことを示せ．ただし，$0 < \gamma < 1$ とする．

(5) L の逆行列を求めよ．

(富山大 2007)　　(m20072303)

0.156 図のように直交座標軸と点 A, B, C で交わる平面 S がある．各点の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a} = a\vec{i}$, $\vec{b} = b\vec{j}$, $\vec{c} = c\vec{k}$ として以下の問いに答えよ．ただし，$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ は各軸の単位ベクトルである．また，$\vec{n} = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a}$ は平面 S に垂直である．

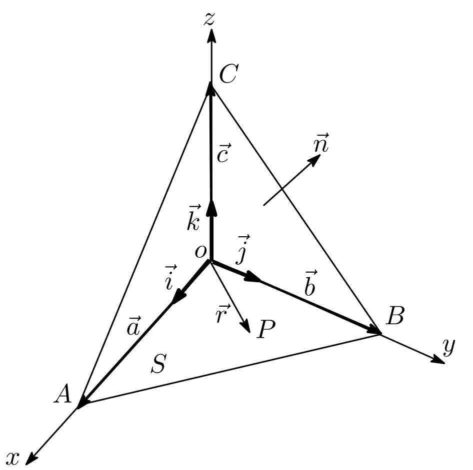
(1) 平面 S 上の点 $P(x, y, z)$ の位置ベクトルを $\vec{r}$ とすると，平面 S の方程式は

$$\vec{r}\cdot(\vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

となることを示せ．

(2) 平面 S の方程式を x, y, z, a, b, c を用いて表せ．

(3) $a = 3,\ b = 2,\ c = 1$ のとき，原点 O から平面 S までの最短距離 d を求めよ．



(富山大 2007)　　(m20072304)

0.157 (1) $f(\theta(t)) = \sqrt{1+\sin^2\theta(t)} + 3\cos\theta(t) + 2$ において，$\dfrac{df}{dt}$ を求めよ．

(2) $f(\theta_1(t),\ \theta_2(t)) = 5 + \cos\theta_1(t) + 2\sin(\theta_1(t) + \theta_2(t))$ において，$\dfrac{df}{dt}$ を求めよ．

(富山大 2007)　　(m20072305)

0.158 次の二重積分を求めよ，　$1024\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$　　$\left(D\,;\, x^2 \le y \le \dfrac{x}{2}\right)$

(富山大 2007)　　(m20072306)

0.159 以下の常微分方程式の一般解を求めよ．ただし，(4) については $y = \cdots$ の形で表現する必要はない．また，y' , y'' は，それぞれ $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を意味する．

(1) $y' + y - 2 = 0$ (2) $y'' = 2y' + 3y$

(3) $xy - (2+x)y' = 0$ (4) $y(y+2x)dy + (y^2 - x^2)dx = 0$

(富山大 2007) (m20072307)

0.160 次の計算を行え（途中経過も書くこと）．

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{e^{2x^2} - 1} =$ (2) $\displaystyle \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\tan x}\right) =$

(福井大 2007) (m20072401)

0.161 関数 $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$ のマクローリン展開を，次の順序に従い求めよ．

(1) $f'(x)$, $f''(x)$ および $f'''(x)$ を計算せよ．

(2) 一般項 $f^{(n)}(0)$ を推定せよ（答のみでよい）．

(3) (2) の結果を用いて，関数 $f(x)$ を $x = 0$ で無限級数にテーラー展開せよ．

(福井大 2007) (m20072402)

0.162 二次元直交座標 (x, y) を，以下の式に従い極座標 (r, θ) に変換するものとする．

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ ただし，$r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ として，以下の設問に答えよ．

(1) r および θ を，x および y を用いて表せ（答のみでよい）．

(2) $\dfrac{\partial r}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$ を計算せよ（途中経過も書くこと）．

(3) (2) の結果を用いて，$\dfrac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}$ を計算せよ（途中経過も書くこと）．

(福井大 2007) (m20072403)

0.163 次の積分を求めよ．（途中の計算式も書くこと） $\displaystyle \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ $(\ a > 0\ )$

(福井大 2007) (m20072404)

0.164 2つの放物線 $y^2 = 2x$，$x^2 = 2y$ で囲まれた部分の面積を求めよ．（途中の計算式も書くこと）

(福井大 2007) (m20072405)

0.165 一様（一定）な密度をもつ次の図形の重心の座標 (x_1, y_1) を求めよ（途中の計算式も書くこと）

$x^2 + y^2 \leqq a^2$ $(\ a > 0\ )$, $y \geqq 0$

(福井大 2007) (m20072406)

0.166 次のような連立方程式がある．以下の問いに答えよ． $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$

ここで，$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \\ 5 & -6 & 9 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする．

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ に対応する行列式の値を求めよ． (2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の階数（ランク）を求めよ．

(3) 上の連立方程式の一般解を求めよ．

(福井大 2007) (m20072407)

0.167 (1) 次の3つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は一次従属か一次独立であるか，理由を示して述べよ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

(2) 次の３つのベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ は一次従属か一次独立であるか，理由を示して述べよ．

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} , \quad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} , \quad \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(福井大 2007)　　(m20072408)

0.168 逆行列をもつ行列のことを正則行列 (regular matrix) という．

(1) $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が正則行列なら，$\boldsymbol{AB}$ も正則行列であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{A}$ が正則行列のとき，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ が正則行列なら，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ も正則行列であることを示せ．ここで　$\boldsymbol{E}$ は単位行列を表す．

(福井大 2007)　　(m20072409)

0.169 次のような微分方程式について，問に答えよ．　$x\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 9$

(1) 一般解を導け．　(2) $y(1) = 0$ であるような解を求めよ．

(福井大 2007)　　(m20072410)

0.170 次のような微分方程式について，問に答えよ．　$x^2\dfrac{dy}{dx} = y^2 + 9$

(1) 一般解を導け．　(2) $y(1) = 0$ であるような解を求めよ．

(福井大 2007)　　(m20072411)

0.171 ３次元の列ベクトルのつくる線形空間（R^3）において，

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

をベクトルとする．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次従属であるか一次独立であるかを示せ．

(2) もし一次従属であるなら，ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は，直線上にあるか，あるいは平面上にあるかを示せ．

(3) もし一次独立であるなら，ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を正規直交化せよ．ただし，正規直交化とは $\vec{p}$ は $\vec{a}$ の一次結合，$\vec{q}$ は $\vec{a}$, $\vec{b}$ の一次結合，$\vec{r}$ は $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の一次結合であるような正規直交系 $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ をいう．

(福井大 2007)　　(m20072412)

0.172 微分方程式 $\dfrac{df(x)}{dx} = f(x)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 一般解を求めよ．　(2) 初期条件 $f(0) = 1$ のもとに解け．

(福井大 2007)　　(m20072413)

0.173 関数 $g(x) = \cos x$ を，$x = \dfrac{\pi}{2}$ の周りで Taylor 展開せよ．

(福井大 2007)　　(m20072414)

0.174 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-3}-1}$ を求めよ．

(静岡大 2007)　　(m20072501)

0.175 ２変数関数 $f(x, y) = x^4 - 2xy - x^2 + y^2$ の極値を求めよ．

(静岡大 2007)　　(m20072502)

0.176 正則関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ の虚部が $v(x,y)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$ で与えられるとき，実部 $u(x,y)$ を求め，$f(z)$ を z の関数として表せ．ただし，$z=x+iy$ で，i は虚数単位である．

(静岡大 2007)　　(m20072503)

0.177 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^{-1} 2x dx$ を求めよ．

(静岡大 2007)　　(m20072504)

0.178 重積分 $\displaystyle\iint_D (-2x+y)dxdy$ を求めよ．ただし，$D=\{(x,y) \mid -1 \leqq x,\ 2x+1 \leqq y \leqq 3\}$ とする．

(静岡大 2007)　　(m20072505)

0.179 (1) 常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+2xy=0$ の一般解を求めよ．

(2) 常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+2xy=x+x^3$ ，$y(0)=1$ を解け．

(静岡大 2007)　　(m20072506)

0.180 空間内の 3 点 $P_1(1,-2,1)$，$P_2(-2,3,5)$，$P_3(2,-5,-7)$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) 点 P_3 を通りベクトル $\overrightarrow{P_1P_2}$ に平行な直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 点 P_1 を通り直線 ℓ と直交する平面 M の方程式を求めよ．

(3) 直線 ℓ と平面 M の交点の座標を求めよ．

(静岡大 2007)　　(m20072507)

0.181 次の各微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx}=-2y$　　(2) $\dfrac{dy}{dx}=y(1-2y)$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=-2y+\sin x$　　(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}-10y=0$

(静岡大 2007)　　(m20072508)

0.182 (1) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+{\omega_0}^2x=0$ の一般解を求めよ．ここで，ω_0 は正の定数とする．

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+{\omega_0}^2x=\cos(\omega t)$ の特解を求めよ．ここで，ω は正の定数であるが，特に，次の 2 つの場合に分けて特解を求めよ: (a) $\omega \neq \omega_0$ の場合 ; (b) $\omega=\omega_0$ の場合．

(静岡大 2007)　　(m20072509)

0.183 $f(x,y)=\log(e^{x-y}+e^{xy})$ とおく．ただし，対数は自然対数である．f の 2 階偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ を求めよ．

(岐阜大 2007)　　(m20072601)

0.184 連立一次方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解け．

(岐阜大 2007)　　(m20072602)

0.185 n 次正方行列 A が　$A^3=O$　をみたしているとする．ただし，O は成分がすべて 0 の行列である．

(1) $|A|=0$ であることを示せ．ただし，$|A|$ は A の行列式である．

(2)　$n=2$ とする．$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくとき，$A^2-(a+d)A=O$ であることを示せ．

(3)　$n=2$ ならば $A^2=O$ であることを示せ．

(岐阜大 2007)　　(m20072603)

0.186　次の重積分を計算せよ．ただし，D は xy 平面上，原点中心で半径 1 の円板とする．

$$\iint_D |\,x+y\,|dxdy$$

(岐阜大 2007)　　(m20072604)

0.187　微分方程式　$\dfrac{dy}{dx}=(1-y)y$　について，次の問いに答えよ．

(1)　初期条件 $y(0)=a$ をみたす解を求めよ．ただし，a は正の実数とする．

(2)　上で求めた解 $y(x)$ について，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x)$ を求めよ．

(岐阜大 2007)　　(m20072605)

0.188　次の 3 点 $A(1,1,2)$，$B(-3,2,1)$，$C(1,-1,-3)$ を通る平面の方程式を求めよ．

(岐阜大 2007)　　(m20072606)

0.189　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{2x}$ の極限値を求めよ．

[ヒント ： $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\log_e(1+x)=1$ を用いても良い.]

(岐阜大 2007)　　(m20072607)

0.190　$f(x)=\dfrac{2x^2+15x+12}{(x+2)^2(x-3)}$ とするとき，不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ．

(岐阜大 2007)　　(m20072608)

0.191　次の関数について，$\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ．　　$z=\sin(2x)\cos(y)\,,\ x=e^{-2t}\,,\ y=\log_e 3t$

(岐阜大 2007)　　(m20072609)

0.192　行列 $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

ただし，固有ベクトルは単位ベクトルとして表記せよ．

(岐阜大 2007)　　(m20072610)

0.193　10 進数の表記で 14 は 2 進数の表記では $\boxed{\text{(ア)}}$ となる．

10 進数の表記で 18 は 16 進数の表記では $\boxed{\text{(イ)}}$ となる．

10 進数の表記で $14+18$ の計算結果は 2 進数の表記で $\boxed{\text{(ウ)}}$，16 進数の表記で $\boxed{\text{(エ)}}$ となる．

10 進数の表記で 14 × 18 の計算結果は 2 進数の表記で $\boxed{\text{(オ)}}$，16 進数の表記で $\boxed{\text{(カ)}}$ となる．

上記の (ア)～(カ) に入る数値を答えよ．

(岐阜大 2007)　　(m20072611)

0.194　次の行列 A に対して以下の問いに答えよ．　$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(1)　A の二つの固有値とそれぞれに対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) A を対角化する行列 P，つまり，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような P を求めよ．

(3) 次の連立微分方程式を解け． $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ ， $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$

(岐阜大 2007)　　(m20072612)

0.195　関数 $\log x$ を $x = a$ のまわりで，Taylor 展開せよ．ここで，a は正の実数である．

(岐阜大 2007)　　(m20072613)

0.196　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ であることを証明せよ．

(岐阜大 2007)　　(m20072614)

0.197　関数 $\log(\sin^2 t + 1)$ を t に関して微分せよ．

(岐阜大 2007)　　(m20072615)

0.198　不定積分　$\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$　を求めよ．

(岐阜大 2007)　　(m20072616)

0.199　次の微分方程式を，与えられた初期条件の基で解け．

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad \text{初期条件は，} x = 1 \text{ で } y = 1 \text{ .}$$

(岐阜大 2007)　　(m20072617)

0.200　質点が力 $\boldsymbol{F}$ の作用を受けながら，点 P から点 Q まで変位したとき，この力が質点に与える仕事量 W は，$W = \boldsymbol{F} \cdot \overrightarrow{PQ}$ （内積）で与えられる．$\boldsymbol{F} = 4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $P(3, 2, -1)$, $Q(2, -1, 4)$ のとき仕事 W を求めよ．ただし，$\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$ である．

(岐阜大 2007)　　(m20072618)

0.201　(1) e^x を，$x = 0$ でテーラー展開せよ（このような展開を，「マクローリン展開」という場合がある）．

(2) (1) の情報を基に，e を有効桁数 3 桁まで正確に求めたい場合，第何項まで計算すればよいと考えるか．

(岐阜大 2007)　　(m20072619)

0.202　$\phi(x, y, z)$ を微分可能なスカラー関数，$\boldsymbol{A}(x, y, z) = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$ を微分可能なベクトル関数とするとき，次の式が成り立つことを証明せよ．ここで，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は直交する 3 本の直線 x, y, z を座標軸とする座標系（デカルト座標系）における基本ベクトルである．

(1) $\mathrm{rot}\ (\mathrm{grad}\, \phi\,) = \boldsymbol{0}$　　（注 ： 太字 $\boldsymbol{0}$ は零ベクトルを表す.）

(2) $\mathrm{div}\ (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}\,) = 0$

(岐阜大 2007)　　(m20072620)

0.203　次の不定積分を以下の指示に従い計算せよ．ただし，積分定数は C とする．　$\displaystyle\int \sin x \sin 3x dx$

(1) 被積分関数 $(\sin x \sin 3x)$ を加法定理を用い，積を含まない cos 関数のみの式に書き換え，不定積分を計算せよ．

(2) 部分積分をすることで不定積分を計算せよ．

(岐阜大 2007)　　(m20072621)

0.204 次の行列の固有値および固有ベクトルを求めよ. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(岐阜大 2007) (m20072622)

0.205 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ (2) $\displaystyle\int_1^e \log x dx$

(岐阜大 2007) (m20072623)

0.206 微分方程式 $y\dfrac{dy}{dx} = e^{2x}$ の一般解と初期条件 $y(0) = 1$ を満たす特殊解を求めよ.

(岐阜大 2007) (m20072624)

0.207 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(岐阜大 2007) (m20072625)

0.208 次の行列について，以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & a & a \\ 0 & a & a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|A| = 6$ のとき，a の値を求めよ.

(2) $a = 1$ のとき，A の転置行列 ${}^tA$ と B の積 ${}^tA \cdot B$ を求めよ.

(3) B の逆行列 B^{-1} を求めよ.

(4) B の固有値をすべて求めよ.

(5) (4) で求めた固有値のうち最大のものに対する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは単位ベクトルとする.

(豊橋技科大 2007) (m20072701)

0.209 1 から 10 までの数字の書かれたカードが 1 枚ずつ入っている袋から，無作為に 1 枚ずつカードを取り出す．以下の問いに既約分数で答えよ.

(1) カードを取り出すたびに袋に戻す場合，2 回取り出したときの数字の和が 11 以上である確率を求めよ.

(2) カードを取り出すたびに袋に戻す場合，3 回取り出したときの数字の和が 28 以上である確率を求めよ.

(3) カードを袋に戻さない場合，2 回取り出したときの数字の和が 11 以上である確率を求めよ.

(豊橋技科大 2007) (m20072702)

0.210 関数 $y = f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ に関する以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ が $0 < x < \sqrt{3}$ の範囲において上に凸であることを示せ.

(2) 関数 $f(x)$ の点 $(t, f(t))$ における接線 h の方程式を求めよ.

(3) 接線 h と直線 $x = 0$，$x = 1$，および $y = 0$ で囲まれる領域の面積 $S(t)$ を求めよ．ただし，t の範囲は $0 \leq t \leq 1$ とする.

(4) 面積 $S(t)$ が $t = \dfrac{1}{2}$ のときに最小となることを示せ.

(5) $t = \dfrac{1}{2}$ のとき，曲線 $y = f(x)$ と接線 h，および直線 $x = 0$，$x = 1$ で囲まれる領域の面積を求めよ.

(豊橋技科大 2007)　　(m20072703)

0.211 (1) 球面 S : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 4z + 5 = 0$ の中心 P の座標と半径を求めよ.

(2) 直線 : $x = 2y - 2 = -z + 1$ と直交し，点 $(a, 0, 0)$ を通る平面 α の方程式を求めよ.

(3) 球面 S の中心 P から平面 α に垂線を下ろす．この垂線が平面 α と交わる点の座標および垂線の長さを，a を用いて表せ.

(4) 平面 α が球面 S と交わる円を底面とし，球面 S の中心 P を頂点とする円錐を考える．この円錐の体積を最大とする a の値を求めよ（ただし，点 P と円錐の底面の距離を h とせよ）.

(豊橋技科大 2007)　　(m20072704)

0.212 二つの封筒 A, B と，1 から 9 までの番号のいずれか一つが記されたカードの集合がある．封筒 A には，1 から 9 までそれぞれ 1 枚ずつ全部で 9 枚のカードを入れる．封筒 B には，1 から 9 までそれぞれ m 枚 $(m \geq 1)$ ずつ全部で $9m$ 枚のカードを入れる．以下の問いに答えよ.

(1) 封筒 A から無作為に 2 枚のカードを引くとき，その組み合わせが 1 と 2 である確率を求めよ.

(2) 封筒 B から無作為に 2 枚のカードを引くとき，その組み合わせが 1 と 2 である確率を求めよ.

(3) 封筒 A から引いた 2 枚のカードの番号の組み合わせと，封筒 B から引いた 2 枚のカードの番号の組み合わせが一致する確率を，$m = 3$ および $m \to \infty$ の場合について求めよ.

(4) 封筒 A と封筒 B それぞれから無作為に n 枚 $(1 \leq n \leq 9)$ ずつカードを引く．A から引いたカードと B から引いたカードの両方に，同じ番号のカードが少なくとも 1 枚含まれるための必要十分条件を，m と n を用いて示せ.

(豊橋技科大 2007)　　(m20072705)

0.213 赤, 黄, 青のランプがあり，各時刻において，いずれか一つのランプが点灯する．時刻 t に，赤のランプが点灯しているとき，時刻 $t+1$ には，赤が 0.75，黄が 0.25 の確率で点灯する．時刻 t に，黄のランプが点灯しているとき，時刻 $t+1$ には，黄が 0.5，赤が 0.25，青が 0.25 の確率で点灯する．時刻 t に，青のランプが点灯しているとき，時刻 $t+1$ には，青が 0.75，黄が 0.25 の確率で点灯する．時刻 t に赤, 黄, 青のランプが点灯している確率を，それぞれ $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$ で表し，時刻 $t+1$ に赤, 黄, 青のランプが点灯している確率を，それぞれ $X_1(t+1)$, $X_2(t+1)$, $X_3(t+1)$ で表す．以下の問いに答えよ.

(1) $\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ と表したときの行列 A を示せ.

(2) 行列 A の行列式を求めよ.

(3) 行列 A の逆行列を求めよ.

(4) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは第 3 成分が 1 となるようにして示せ.

(名古屋大 2007)　　(m20072801)

0.214 関数 $f(x) = \dfrac{\log(x+1)}{x+1}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，$x > -1$ とする.

(1) $f(x)$ の x に関する一次微分および二次微分を求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{e-1} f(x)dx$ を計算せよ．ただし，e は自然対数の底である.

(3) $f(x)$ の増減表を作成し，$y = f(x)$ のグラフの概略を図示せよ．

(名古屋大 2007)　　(m20072802)

0.215 3 人がジャンケンを行い，一人だけが勝ったときに終了するものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 1 回で終了する確率を求めよ．

(2) ちょうど n 回目のジャンケンで，終了する確率 $P(n)$ を求めよ．

(3) n 回以内に終了する確率を求めよ．

(4) n 回以内に終了する確率が 50% 以上となる回数 n を求めよ．
ただし，$\log_{10} 2 = 0.301$，$\log_{10} 3 = 0.477$，$\log_{10} 5 = 0.699$ とする．

(5) (2) の確率 $P(n)$ に回数を乗じ，これの N 回目までの和，すなわち，$\displaystyle\sum_{n=1}^{N} nP(n)$ を求めよ．

(6) (5) の N を無限大としたときの値を求めよ．

(名古屋大 2007)　　(m20072803)

0.216 (1) $x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ の最大値を求めよ．

(2) (1) を利用して，π^e と e^π の大小関係を調べよ．

(名古屋工業大 2007)　　(m20072901)

0.217 次の積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+y} (2x - y - z)dzdydx$　　(2) $\displaystyle\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dydx$

(名古屋工業大 2007)　　(m20072902)

0.218 次の行列式の値が 0 となる a の値を全て求めよ．$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & a & 1 \\ a & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$

(名古屋工業大 2007)　　(m20072903)

0.219 次の行列 A は対角化可能かどうか判定し，対角化可能なら $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求めよ．　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(名古屋工業大 2007)　　(m20072904)

0.220 次の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a} = (2, 3, 5)$, $\boldsymbol{b} = (1, 0, 1)$ が一次独立であるかどうかを調べよ．

(2) $\boldsymbol{a} = (2, 3, 5)$, $\boldsymbol{b} = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{c} = (0, 1, 1)$ が一次独立であるかどうかを調べ，一次従属ならば，$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の一次結合で表せ．

(三重大 2007)　　(m20073101)

0.221 $\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ x - 3y & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4y + 6z & 0 \\ z & 2z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ を満たす全ての λ と，それぞれの λ について x, y, z の比 $x : y : z$ を求めよ．ただし，x, y, z は全ては 0 でないとする．

(三重大 2007)　　(m20073102)

0.222 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を $t = x + \sqrt{x^2+1}$ と置くことにより求めよ.

(三重大 2007) (m20073103)

0.223 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$ (2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0$

(三重大 2007) (m20073104)

0.224 以下の重積分の値を求めなさい. $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$ $D\ :\ x^2+y^2 \leqq\ 1,\quad x>0,\quad y>0$

(三重大 2007) (m20073105)

0.225 (1) 定数 k_1, k_2 を含む次の行列 A の階数 (rank) を, k_1, k_2 の値で場合分けして求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} k_1 & 1 & 1 \\ 1 & k_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を考え, その $\boldsymbol{v}$ が表す点の集合が x, y, z を軸とする直交座標系でどのような形状となるかを, 行列 A の階数 (rank) ごとに説明しなさい.

(三重大 2007) (m20073106)

0.226 以下の関数を x で微分せよ.

(1) a^x (2) xa^x (3) $\dfrac{x^3}{x^2-1}$ (4) $\displaystyle\int_0^x (x\cos t - \sin t)dt$

(三重大 2007) (m20073107)

0.227 以下の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^e \log_e x dx$ (2) $\displaystyle\int_0^\pi e^x \sin x dx$

(三重大 2007) (m20073108)

0.228 n が自然数のとき, 不等式 $n! \geqq\ 2^{n-1}$ が成立することを, 数学的帰納法を用いて証明せよ.

(三重大 2007) (m20073109)

0.229 以下の方程式および不等式が表す範囲を図示せよ.

(1) $y - x = \sqrt{1-2xy}$ (2) $y - x < \sqrt{1-2xy}$

(三重大 2007) (m20073110)

0.230 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ として, 以下の設問に答えよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $A^2 - 5A + 6E$ および A^5 を求めよ.

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2 - 2A - 8E = O$ を満たすとき, $(a+d,\ ad-bc)$ の値の組を全て求めよ.

(三重大 2007) (m20073111)

0.231 3次元ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ において，3個のベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = {}^t(1,0,1)\,, \quad \boldsymbol{e}_2 = {}^t(2,1,0)\,, \quad \boldsymbol{e}_3 = {}^t(0,0,1)$$

を考える．以下の問いに答えなさい．ここで，上付き添え字 ^{t} は転置を表す．

(1) 方程式 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \lambda_3\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0}$ から λ_1, λ_2, λ_3 を未知数とする連立方程式を導出しなさい．

(2) (1) の連立方程式を解くことにより，$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ が互いに一次独立であることを示しなさい．

(3) $\boldsymbol{R}^3$ の任意のベクトル $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, a_2, a_3)$ を $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ の線形結合で一意に表せることを証明しなさい．

(三重大 2007) (m20073112)

0.232 3次元空間における正規直交系 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ を用いて，3点 P, Q, R の位置ベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ が，それぞれ，以下のように表されている．

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\,, \quad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{u}_2 + 2\boldsymbol{u}_3\,, \quad \boldsymbol{r} = -\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3$$

(1) $\boldsymbol{q}$ の $\boldsymbol{p}$ への正射影（点 Q から原点と P を通る直線に下ろした垂線の足を表す位置ベクトル）を，$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ の線形結合で表しなさい．

(2) ベクトル $\alpha\boldsymbol{p} + \beta\boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}$ が，$\boldsymbol{p}$ および $\boldsymbol{q}$ と垂直になるように，α, β を決めなさい．

(三重大 2007) (m20073113)

0.233 (1) $x^3 - 3x \geqq 0$ を満たす x の範囲を求めよ ((1) の配点はわずか).

(2) $y = \sqrt{x^3 - 3x}$ のグラフの概形を書きなさい．

(3) 方程式 $x^3 - 3x - y^2 = 0$ が表す曲線の概形を書きなさい．

(2),(3) の回答上の注意

グラフ（曲線）中には，極大値，極小値，最大値，最小値，変曲点，x 軸との交点の値，y 軸との交点の値を記入せよ．なお，極大値，極小値，最大値，最小値，変曲点，x 軸との交点，y 軸との交点は，それぞれ，存在しないかもしれないし，複数存在するかもしれない．また，各種の数値が無理数であった場合は，そのままの形で，解答用紙に記入しなさい．但し，有効数字2桁程度の近似値も求めないと，グラフが若干不正確になり, 若干減点となる.

(三重大 2007) (m20073114)

0.234 サイコロを6回振ったとき，次の事象が起こる確率を求めよ．

(1) 6回とも異なる目が出る．

(2) 同じ目が一組出る（同じ目が2回だけ出る）．

(3) 同じ目が二組出る（同じ目が4回出る場合を除く）．

(三重大 2007) (m20073115)

0.235 次の関数 $f(x) = \begin{cases} c\cos x & \left(|x| \leq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \left(|x| > \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ が確率密度になるような定数 c の値を求めよ．

(2) その分布の分布関数を求めよ．

(3) その分布の平均を求めよ．

(4) その分布の分散を求めよ．

(三重大 2007) (m20073116)

0.236 対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ （ a, b, c は実数 ）は適当な直交行列 T（直交行列とは ${}^tT\ T = T\ {}^tT = I$ [単位行列] を満たす行列，${}^tT$ は T の転置行列）を使って，${}^tTAT = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ のような対角形に変形できる．

(1) 自然数 n に対して $A^n = T \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} {}^tT$ となることを示せ．

(2) $a + b = \alpha + \beta$, $ab - c^2 = \alpha\beta$ の関係があることを示せ．

(3) $a = b = 2$, $c = -1$ のとき，α, β の値を求めよ．また，直交行列 T も求めよ．

(三重大 2007)　　(m20073117)

0.237 xy 平面上の領域 $D = \{(x, y) \ : \ x + y < 1 \, , \ 0 < x \, , \ 0 < y\}$ で定義された関数 $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ について考える．

(1) D における $f(x, y)$ の最大値と最大値をとる点 (x_0, y_0) を求めよ．

(2) D での積分 $I = \iint_D f(x, y)dxdy$ の値を求めよ．

(三重大 2007)　　(m20073118)

0.238 3 次行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と，ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ （ c は実数 ）に対して次の問いに答えよ．

(1) A^2, A^3 を求めよ．　　(2) $A\boldsymbol{a}$, $A^2\boldsymbol{a}$, $A^3\boldsymbol{a}$ を求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$ が二つのベクトル $A\boldsymbol{a}$, $A^2\boldsymbol{a}$ の一次結合として表されるときの c の値を求めよ．

(奈良女子大 2007)　　(m20073201)

0.239 関数 $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$ に関して次の問いに答えよ．

(1) 極限値 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ および $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ．

(奈良女子大 2007)　　(m20073202)

0.240 a を正の定数とする．$xy-$ 平面上の 2 つの曲線

$$C_1 \ : \ y = -\frac{x^2}{2} + a \quad (-\infty < x < \infty) \, ,$$
$$C_2 \ : \ y = -\log x \quad (\ x > 0 \ )$$

について考える．いまこれらの曲線はただ 1 つの共有点を持つとする．次の問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) 直線 $y = a$ と C_2 の交点の座標を求めよ．

(3) C_1 , C_2 と直線 $y = a$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

(奈良女子大 2007)　　(m20073203)

0.241 次の行列の行列式を求めよ．また，この行列の逆行列が存在するか否か判定せよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2007)　　(m20073204)

0.242 次の行列の全ての固有値とそれに属する規格化された固有ベクトルを求めよ． $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

(奈良女子大 2007) (m20073205)

0.243 2 次元平面の直交座標を (x, y)，また，極座標を (r, θ) とする．このとき，

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

の関係が成り立つ．x, y および r, θ が時間 t の関数であるとき，$\dfrac{dx}{dt}$ と $\dfrac{dy}{dt}$ を $\dfrac{dr}{dt}$ と $\dfrac{d\theta}{dt}$ を用いて表せ．

(奈良女子大 2007) (m20073206)

0.244 次の不定積分 I を求めよ． $I = \displaystyle\int x\cos x\, dx$

(奈良女子大 2007) (m20073207)

0.245 微分方程式に関する以下の問いに答えよ．

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ. ただし，a は正の定数とする． $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a^2 y = 0$

(2) 次の微分方程式を考える． $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a^2 y = Ae^{ibx}$
ここで，A, a, b は正の定数とし，i は虚数単位である．

(a) $y = Be^{ibx}$ の形の特解を求めよ． (b) 一般解を求めよ．

(奈良女子大 2007) (m20073208)

0.246 3 次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とする．ここで，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は，直交座標系の x, y, z 軸方向の単位ベクトルである．以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{r}$ の発散，$\nabla \cdot \boldsymbol{r}$ を求めよ．ただし，$\nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ である．$\nabla \cdot \boldsymbol{r}$ は，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{r}$ とも書く．

(2) $\boldsymbol{w} = c\boldsymbol{k}$ とするとき，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r}$ の回転，$\nabla \times \boldsymbol{v}$ を求めよ．ただし，c は定数である．$\nabla \times \boldsymbol{v}$ は，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$ とも書く．

(奈良女子大 2007) (m20073209)

0.247 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 行列 $xE - A$ の行列式を求めよ．ただし，x はスカラー，E は 4 次の単位行列を表す．

(2) A の固有値とその固有ベクトルをすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2007) (m20073401)

0.248 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1 - \sqrt{x}}{x}$

(京都工芸繊維大 2007) (m20073402)

0.249 次の積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + 2e^{-x} + 2} dx$

(京都工芸繊維大 2007) (m20073403)

0.250 関数 $f(x, y) = 3x^2 + y^3 - 6xy$ を考える．

(1) $f(x, y)$ の 1 階および 2 階の偏導関数をすべて求めよ． (2) $f(x, y)$ の極値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2007)　　(m20073404)

0.251　(1)　微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}+2y=0$ の一般解を求めよ．

(2)　微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}+2y=1$ の解で，初期条件 $y(0)=1$，$y'(0)=0$ を満たすものを求めよ．

(京都工芸繊維大 2007)　　(m20073405)

0.252　(1)　xy 平面上において曲線 $2x^2-2xy+y^2=2$ により囲まれる領域の面積を求めよ．

(2)　x, y が $2x^2-2xy+y^2=2$ を満たすとき，$x+y$ の最大値，最小値を求めよ．

(大阪大 2007)　　(m20073501)

0.253　微分方程式 $y'=-2y+y^2$ について以下の問いに答えよ．

(1)　この微分方程式を解け．

(2)　$y(1)=3$ を満たす特殊解を求め，そのグラフの概形を描け．軸との交点や漸近線を明示すること．

(大阪大 2007)　　(m20073502)

0.254　行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．

(1)　行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2)　適当な変換行列（対角化するための正則行列）P を求め，行列 A を対角化せよ．

(3)　行列 A の n 乗を求めよ．

(大阪大 2007)　　(m20073503)

0.255　正六角形 $ABCDEF$ において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とし，辺 CD の中点を点 P，辺 DE の中点を点 Q とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．

(2)　線分 CQ と線分 FP の交点を R とするとき，$\overrightarrow{AR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．

(3)　線分 AR と対角線 CF の交点を点 S とするとき，$CS : SF$ を求めよ．

(大阪大 2007)　　(m20073504)

0.256　次の無限級数の第 N 項までの部分和 $S_N=\displaystyle\sum_{n=1}^{N}u_n$ を求めよ．また，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}S_N=S$ として無限級数の和 S を求めよ．

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+3)}=\frac{1}{1\cdot2\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot5}+\frac{1}{3\cdot4\cdot6}+\frac{1}{4\cdot5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+3)}+\cdots$

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)r^n=3r+4r^2+5r^3+6r^4+\cdots+(n+2)r^n+\cdots$

ただし，$|r|<1$ とする．必要ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ なる関係を用いてもよい．

(大阪大 2007)　　(m20073505)

0.257　(1)　空間上の直交座標 (x, y, z) を極座標 (r, θ, φ) ：

$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta\quad(r>0,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi<2\pi)$

に変換するとき，そのヤコビアン（関数行列式）を計算しなさい．

(2) 広義積分 $\quad I(\alpha)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}}dx\,dy\,dz$
について，$\alpha=\dfrac{1}{2}$ のときの値 $I\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めなさい．

(3) $I(\alpha)$ が収束する α の範囲を求めなさい．

(4) 広義積分 $\quad J(\alpha,\,\beta)=\displaystyle\iiint_B\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}\mid\log(x^2+y^2+z^2)\mid^{\beta}}dx\,dy\,dz$
が収束するような $\alpha,\,\beta$ の満たすべき条件を求めなさい．
ただし，$B=\left\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2<\dfrac{1}{4}\right\}$.

(大阪大 2007) (m20073506)

0.258 行列 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ a^2 & 1 & a\end{pmatrix}$ について，以下の設問に答えよ．ただし，a は実数とする．

(1) A の行列式の値を求めよ．

(2) $\begin{pmatrix} a\\ 1\\ a^2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1\\ a\\ 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ a\end{pmatrix}$ が 1 次独立となるときの a の条件を求めよ．

(3) A の固有値の一つが 0 であるとき，a の値を求めよ．
また，その場合のすべての固有値と固有ベクトルを求めよ．

(4) A の固有値の一つが 1 であるとき，A^n を求めよ．ただし，$a<0$ とする．

(大阪大 2007) (m20073507)

0.259 あるパーティで，n 人の参加者が 1 つずつプレゼントを持ち寄り，主催者がこれを集めて，帰りに n 人の参加者に 1 つずつランダムに配るものとする．このとき，自分が持ってきたプレゼントを持って帰る人が少なくとも 1 人出る確率を $Q(1,n)$ とする．参加者に 1 番から n 番までの番号をつける．i 番の参加者が自分のプレゼントを持ち帰るという事象を M_i とする．

(1) M_i が起こる確率を n の式で表せ．

(2) $i_1,i_2,\cdots,i_m$ をそれぞれ 1 以上 n 以下の相異なる m 個の整数とする．事象 M_{i_1}, M_{i_2}, $\cdots$ M_{i_m} が同時に起こる確率を n と m の式で表せ．

(3) 事象 E が起こる確率を $P(E)$ と書く． 2 つの事象 A_1 と A_2 が同時に起こる確率を $P(A_1\cap A_2)$, A_1 と A_2 のうち少なくとも 1 つが起こる確率を $P(A_1\cup A_2)$ と書く．
このとき $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)$ である． 一般に $N(\geqq 1)$ 個の事象 $A_1,A_2,\cdots,A_N$ のうち少なくとも 1 つが起こる確率 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_N)$ は

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_N)=\sum_{l=1}^{N}(-1)^{l-1}S_l \qquad \text{(i)}$$

$$\text{ここで } S_l=\sum_{k_1<k_2<\cdots<k_l}P(A_{k_1}\cap A_{k_2}\cap\cdots\cap A_{k_l}) \qquad \text{(ii)}$$

である．ただし，式 (ii) の右辺の $\sum$ は，N 個の整数 $1,2,\cdots,N$ の中から相異なる l 個の整数 $k_1,k_2,\cdots,k_l$ を選ぶあらゆる組み合わせについて和をとることを意味する．特に $l=1$ のときは $S_1=\displaystyle\sum_{j=1}^{N}P(A_j)$ である．式 (i) を数学的帰納法で示せ．

(4) $Q(1,n)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{1}{j!}$ を示せ．

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}Q(1,n)$ を求めよ．

(大阪大 2007)　　(m20073508)

0.260 微分方程式

$$x''(t) + ax(t) = \sin t \qquad (*)$$

に関する次の問いに答えよ．ただし，定数 a は実数である．

(1) 微分方程式 $x''(t) + ax(t) = 0$ の一般解を求めよ．

(2) $(*)$ の一般解を求めよ．

(3) $a > 0$ とする．$(*)$ の解 $x(t)$ で条件 $x(0) = \alpha$, $x(1) = \beta$ をみたすものをすべて求めよ．ただし，α, β は実数である．

(大阪大 2007)　　(m20073509)

0.261 次の積分の値を留数定理を用いて求めよ． $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx$

(大阪大 2007)　　(m20073510)

0.262 (1) 関数 $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ を $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ とフーリエ級数に展開したとき，a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, b_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ を示せ．

(大阪大 2007)　　(m20073511)

0.263 X, Y を標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う独立な確率変数とし，その和を W，W の絶対値を Z とおく．すなわち， $W = X + Y$ ， $Z = |W|$ である．$N(0, 1)$ の確率密度関数 $f(x)$ を使って，関数 $\Phi(t)$ を $\Phi(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$ で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 確率変数 W の分布を求めよ．

(2) 非負定数 z に対して，確率 $P(Z < z)$ を関数 Φ を用いて表せ．

(3) 確率変数 Z の平均を求めよ．

(大阪大 2007)　　(m20073512)

0.264 (1) z を複素数とするとき，$e^z = 3i$ を満たす z を求めよ．ただし，i は虚数単位である．

(2) $a > 0$ の時，以下の積分値を留数解析を用いて求めよ． $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + a^4} dx$

(大阪府立大 2007)　　(m20073601)

0.265 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{a}{x+y}\right)^2 \quad (a > 0)$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 6e^{2x}$

(大阪府立大 2007)　　(m20073602)

0.266 次の実二次形式について，以下の問いに答えよ． $2{x_1}^2 + 3{x_2}^2 + 3{x_3}^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3$

(1) この二次形式の係数を要素とする対称行列を A とするとき，行列 A の固有値を求めよ．

(2) 直交行列 T を選んで，$T'AT$ が対角行列となるような T を定めよ．ただし，T' は T の転置行列である．

(3) この二次形式を直交変換により標準形にせよ．

(大阪府立大 2007)　　(m20073603)

0.267 ベクトル空間において，$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ が 1 次独立であるとする．次の各問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3$，$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$ とするとき，$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立であるか，1 次従属であるか，理由をつけて述べよ．

(2) $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3$，$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$ とするとき，$\boldsymbol{w}_1$，$\boldsymbol{w}_2$，$\boldsymbol{w}_3$ が 1 次独立であるか，1 次従属であるか，理由をつけて述べよ．

(神戸大 2007)　　(m20073801)

0.268 次の行列式を一次式の積に分解せよ． $\begin{vmatrix} a^2 & (b+c)^2 & 1 \\ b^2 & (c+a)^2 & 1 \\ c^2 & (a+b)^2 & 1 \end{vmatrix}$

(神戸大 2007)　　(m20073802)

0.269 xy 平面において，次の関数のうち，どれが最大値をもち，どれが最小値をもつか．理由をつけて示せ．

(1) e^{x-y}　　(2) $e^{x^2+y^4}$　　(3) $(x+y)e^{-x^2-y^2}$

(神戸大 2007)　　(m20073803)

0.270 次の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dydx \qquad (D = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\})$

(2) $\displaystyle\iint_D (|x|+|y|)\,dydx \qquad (D = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid |x|+|y| \leq 1\})$

(3) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)e^{(x^2+y^2)^2}\,dydx \qquad (D = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\})$

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\,dydx \qquad (D = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid y \geq x,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\})$

(神戸大 2007)　　(m20073804)

0.271 $f(x)$ をすべての $x \geq 1$ に対して定義された単調増加な連続関数とする．$f(x) > 0$ であるとするとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\displaystyle f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x)dx \leq f(2) + \cdots + f(n-1) + f(n)$ を示せ．

(2) $\displaystyle F(x) = \int_1^x f(t)dt$ とする．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{F(n)} = 0$ を仮定する．そのとき，
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(n)}{F(n)} = 1$ 　を示せ．

(神戸大 2007)　　(m20073805)

0.272 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $y'' - y = 0$　　(2) $y'' + y = 0$

(神戸大 2007)　　(m20073806)

0.273 次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ について次の問いに答えよ．　$a_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{a_n}$

(1) $a_1 = 2$ または $a_1 = 4$ のとき，$a_n = a_1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を確認せよ．

(2) $a_1 < 2$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ を示せ．

(3) $a_1 > 4$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ を示せ．

(4) $4 > a_1 > 2$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ を示せ.

(神戸大 2007) (m20073807)

0.274 以下の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D xy^2\,dxdy\,, \qquad D\ :\ 0 \leqq\ y \leqq\ x \leqq\ 1$

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy\,, \qquad D\ :\ x^2+y^2 \leqq\ 1$

(3) $\displaystyle\iint_D (x-y)e^{x+y}\,dxdy\,, \qquad D\ :\ 0 \leqq\ x+y \leqq\ 2,\ 0 \leqq\ x-y \leqq\ 2$

(神戸大 2007) (m20073808)

0.275 関数 $y = y(x)$ は微分方程式　$y'' + (5-x^2)y = 0$　を満たすとする．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $y = ze^{-x^2/2}$ とおいて，関数 $z = z(x)$ が満たす微分方程式を求めよ.

(2) z を 2 次関数とするとき，z を求めよ.

(神戸大 2007) (m20073809)

0.276 $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3$ を　$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,　$\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,　$\boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$　とおく.

T を $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像とし，

$$T(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\,, \quad T(\boldsymbol{e}_2) = -2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\,, \quad T(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$$

を満たすとする．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) T を表す行列を求めよ.　　(2) $\mathrm{Ker}(T),\ \mathrm{Im}(T)$ の基底と次元を求めよ.

(神戸大 2007) (m20073810)

0.277 2 次の正方行列 $A = \begin{bmatrix} 13 & -30 \\ 5 & -12 \end{bmatrix}$ に関する以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A の固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(3) A を対角化せよ．すなわち，$P^{-1}AP = B$ となるような正則行列 P と対角行列 B を 1 組求めよ.

(4) 自然数 n に対して，A^n を求めよ.

(神戸大 2007) (m20073811)

0.278 次の関数の導関数を求めよ．(注 ： 対数の底は e（自然対数）とする.)

(1) $y = (2-x^2)^3$　　(2) $y = \log\sin x$　　(3) $y = x^x$

(鳥取大 2007) (m20073901)

0.279 次の関数の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{\sin ax} \quad (a \neq 0,\ b \neq 0)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1} x}{x}$

(鳥取大 2007) (m20073902)

0.280 半径 r の円形の紙から扇形を切り取って直円錐形の容器を作り，その容積を最大にしたい．切り取る扇形の中心角 θ はいくらにすればよいか求めよ．ただし，容器の接合部は無視する.

(鳥取大 2007) (m20073903)

0.281 次の定積分の値を求めよ．(注 ： 対数の底は e（自然対数）とする.)

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$

(鳥取大 2007) (m20073904)

0.282 $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ $(a, b > 0)$ で表される曲面の曲面上の点 (x_0, y_0, z_0), $(x_0 \neq 0,\ y_0 \neq 0)$ における 接平面と法線の方程式を求めよ.

(鳥取大 2007) (m20073905)

0.283 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad (a, b > 0)\right\}$ のとき，重積分 $\displaystyle\iint_D x^2 dxdy$ の値を求めよ.

(鳥取大 2007) (m20073906)

0.284 二つの３次元ベクトル $\boldsymbol{A} = (2, 1, 5)$ と $\boldsymbol{B} = (1, 3, 1)$ があるとき，以下の問いに答えよ. 但し，(a, b, c) の a, b, c はそれぞれ $x-$ 成分，$y-$ 成分，$z-$ 成分を表す.

(1) $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積 $J = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$ を求めよ.

(2) xy 平面上にあり，$\boldsymbol{A}$ に垂直で長さが 1 で，x 成分が負のベクトル $\boldsymbol{C}$ を求めよ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})/|\boldsymbol{A}|^2$ とベクトル $\boldsymbol{A}$ の間の角度を計算せよ.

(鳥取大 2007) (m20073907)

0.285 以下の行列式 u, v をそれぞれ計算せよ.

(1) $u = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ (2) $v = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

(鳥取大 2007) (m20073908)

0.286 以下に示す行列 A の固有値 λ と対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ．但し，固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ は A を掛けたときに定数 λ を比例係数として元の $\boldsymbol{x}$ に比例するような（すなわち，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ となるような）A に固有のベクトルである.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(鳥取大 2007) (m20073909)

0.287 次の行列式の値を求めよ. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

(鳥取大 2007) (m20073910)

0.288 次の行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(鳥取大 2007) (m20073911)

0.289 以下の微分方程式の一般解を求めなさい.

(1) $(3x + y + 3)dx + (x + 3y + 2)dy = 0$ (2) $y'' - 4y' + 3y = 2x$

(鳥取大 2007) (m20073912)

0.290 位置ベクトル，$\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + \vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{j} + 3\vec{k}$ が与えられている．以下の問いに答えなさい．なお，$\vec{i}$, $\vec{j}$ および $\vec{k}$ はそれぞれ x, y および z 方向における単位ベクトルを，O は原点を表す.

(1) 外積 $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ を求めよ.

(2) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ の内積を計算し，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ とのなす角 θ に対する $\cos\theta$ を求めよ.

(3) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ で作られる三角形 OAC の面積を求めよ.

(4) ベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ および $\overrightarrow{OC}$ で作られる平行六面体の体積を求めよ.

(鳥取大 2007)　　(m20073913)

0.291　$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ とおくとき，次の式が成り立つことを示せ.

(1) $R(\alpha)R(\beta) = R(\beta)R(\alpha) = R(\alpha+\beta)$　　(2) $R(-\alpha) = R(\alpha)^{-1}$

(鳥取大 2007)　　(m20073914)

0.292　3 行 4 列の行列 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & -9 & 6 & 3 \\ -2 & 6 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ の階数を求めよ.

(鳥取大 2007)　　(m20073915)

0.293　2 次正方行列 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(鳥取大 2007)　　(m20073916)

0.294　クラメルの公式を用いて次の連立方程式を解け.　$\begin{cases} 3x + 6y \ + z = 4 \\ 4x + 9y + 2z = 3 \\ 2x + 3y + 4z = 9 \end{cases}$

(鳥取大 2007)　　(m20073917)

0.295　次の行列式を計算せよ.　$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 8 \\ 9 & 7 & 9 & 3 \end{vmatrix}$

(鳥取大 2007)　　(m20073918)

0.296　次の 3 つのベクトルが 1 次従属となるように m の値を求めよ.　$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} m \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$

(鳥取大 2007)　　(m20073919)

0.297　行列 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値およびその固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(鳥取大 2007)　　(m20073920)

0.298　7 人の大学新入生の身長を測り、次のデータが得られた.

$\{170,\ 176,\ 172,\ 168,\ 178,\ 173,\ 174\}$ （ 単位は cm ）

(1) 平均を求めなさい.　　(2) 分散を求めなさい.

(鳥取大 2007)　　(m20073921)

0.299　確率変数 N はポアソン分布　$P(N=n) = \dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$, $\lambda > 0,\ n = 0, 1, 2, \cdots$

に従うとする．このとき，N の期待値を求めなさい（ 注意 ： $e^{\lambda} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$ が成り立つ ）

(鳥取大 2007)　　(m20073922)

0.300 (1) 次の行列 A に対して，その階数 $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ． $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $m \geqq 2,\ n \geqq 1$ のとき，$m \times n$ 行列 A に対して，A の第 1 行を取り除いた $(m-1) \times n$ 行列を A' と書くことにする．$\mathrm{rank}(A) - \mathrm{rank}(A')$ は 0 または 1 であることを示せ．

(3) $m \geqq 2,\ n \geqq 2$ のとき，$m \times n$ 行列 A に対して，A の第 1 行と第 1 列を取り除いた $(m-1) \times (n-1)$ 行列を A'' と書くことにする．A をさまざまな行列を動かしたときの $\mathrm{rank}(A) - \mathrm{rank}(A'')$ の最小値と最大値を求めよ．

(岡山大 2007)　　(m20074001)

0.301 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続な増加関数であるとき，区間 $(a,b]$ 上の関数 $F(x)$ を
$F(x) = \dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ で定義する．このとき次の各問いに答えよ．

(1) $F(x)$ の x による微分 $F'(x)$ を $f(x)$ と $F(x)$ を使って表せ．

(2) 区間 $(a,b]$ において $f(x) - F(x) \geqq 0$ であることを示せ．

(3) 区間 $(a,b]$ において $F(x)$ は増加関数となることを示せ．

(4) 区間 $(0,\infty)$ で定義される関数 $F(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ は増加関数であることを示せ．

(岡山大 2007)　　(m20074002)

0.302 (1) $\displaystyle\int \frac{dy}{y\sqrt{1-y^2}}$ を計算せよ．

(2) $p\dfrac{dp}{dy} = y - 2y^3\ (0 \leqq y < 1),\ p(0) = 0$ の解 $p \in C^1(\,[0,1)\,)$ をすべて求めよ．

(3) (1) と (2) を利用して $\begin{cases} y'' - y + 2y^3 = 0,\ 0 \leqq y < 1,\ x \in \boldsymbol{R}, \\ \displaystyle\lim_{x\to 0} y(x) = 1, \end{cases}$ の解を求めよ．

(岡山大 2007)　　(m20074003)

0.303 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x(1-\cos x)}$ を求めよ．

(2) x の関数 x^2e^x の n 次導関数を求めよ．ただし，n は 2 以上の整数とする．

(3) $z = f(x,y),\ x = g(t),\ y = h(t)$ がそれぞれ C^2 級の関数であるとき，$\dfrac{d^2z}{dt^2}$ を求めよ．

(広島市立大 2007)　　(m20074201)

0.304 $I_n(x)$ が次の式で定義されるとき，以下の問いに答えよ．ただし，n は 0 以上の整数とする．

$$I_n(x) = \int_0^x \sin^n t\,dt$$

(1) $I_0(x),\ I_1(x),\ I_2(x),\ I_3(x)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 等式 $\sin^n t = \sin^{n-1} t \cdot \sin t$ を用いて，n が 2 以上のとき，$I_n(x)$ の漸化式を求めよ．

(広島市立大 2007)　　(m20074202)

0.305 次の行列に対し，P が正則ならば Q も正則であることを示せ．

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ c & 0 & d & 0 \end{pmatrix}$$

(広島市立大 2007)　　(m20074203)

0.306 空間内の原点を通り方向ベクトル $\boldsymbol{\ell} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ をもつ直線を ℓ とする．ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}$ を ℓ と平行なベクトル $\boldsymbol{b}$ と，ℓ と直交するベクトル $\boldsymbol{c}$ により，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ と表すとき，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ を求めよ．

(広島市立大 2007)　　(m20074204)

0.307 次の行列 A に対し，以下の問いに答えよ．　$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

(1) 固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) 正則行列 P で，$P^{-1}AP$ が対角行列となるものを求めよ．なお，P^{-1} も求めること．

(3) n を正の整数とするとき，A^n を求めよ．

(広島市立大 2007)　　(m20074205)

0.308 (1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx$,　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx$　（ n：整数）をそれぞれ求めなさい．

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx$　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx$　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx$　（n, m：正整数）をそれぞれ求めなさい．

(3) 周期 2π をもち，$f(x) = \begin{cases} -\pi/4 & (-\pi < x < 0 \text{ のとき}) \\ \pi/4 & (0 < x < \pi \text{のとき}) \end{cases}$ で定義される関数をフーリエ級数に展開しなさい．

(山口大 2007)　　(m20074301)

0.309 ある町の 1 日における天気（晴，雨）と交通事故発生（有，無）について，1 年間のデータを調べたところ，その同時確率が次の表のようになった．

	事故無	事故有
晴	0.4	0.2
雨	0.3	0.1

(1) 天気が雨であることを条件とみなして事故が発生する条件付確率を求めなさい．

(2) ある日のデータを見ると事故が発生していた．このとき，天気が晴であった確率を求めなさい．

(3) ある日の天気の晴雨いずれかを知ったときに得られる情報量を求めなさい．
ただし，$\log_2 10 = 3.32$, $\log_2 3 = 1.58$ とし，途中の計算式も書きなさい．

(山口大 2007)　　(m20074302)

0.310 a を実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ 1-2a & 2a \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $a = 3$ のとき，A の固有値を求めよ．

(2) A の固有値が重複するように，a の値を定めよ．

(3) (2) で求めた a の値に対して，A の固有ベクトルで大きさが 1 であるものをひとつ求めよ．

(徳島大 2007)　　(m20074401)

0.311 $x \neq 0$ として，$f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{x}$ を考える．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$ を求めよ．　(2) $f'(x)$ を求めよ．　(3) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f'(x)$ を求めよ．

(徳島大 2007)　　(m20074402)

0.312 平面上の図形 $D = \{(x, y) \ : \ -1 \leqq \ x \leqq \ 1, \ -2 \leqq \ y \leqq \ 2\}$, $S = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leqq \ 4\}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\iint_D dxdy$ と $\displaystyle\iint_S dxdy$ を求めよ．　(2) $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を求めよ．　(3) $\displaystyle\iint_S xydxdy$ を求めよ．

(徳島大 2007)　(m20074403)

0.313 $u(x)$ が次の微分方程式の初期値問題を満たす． $\begin{cases} u'' + (u')^2 - 3u' + 2 = 0 \\ u(0) = 0\,, \ u'(0) = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

(1) 定数係数の 2 階線形同次微分方程式 $v'' - 3v' + 2v = 0$ の一般解 $v(x)$ を求めよ．

(2) $u(x) = \log y(x)$ とおいて初期問題の微分方程式に代入し，(1) を用いることにより，初期問題を満たす解 $u(x)$ を求めよ．

(徳島大 2007)　(m20074404)

0.314 関数 $f(x, y) = x^3 - 6xy + y^3$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ の 2 次までの偏導関数を求めよ．

(2) $f(x, y)$ の極値を求めよ．

(高知大 2007)　(m20074501)

0.315 関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で連続であるとは

『任意の正の数 ε に対し，正の数 δ で $|x - x_0| < \delta$ であるならば $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ をみたすものがとれる』 $\cdots$ (★)

ときをいう．このとき，次の問いに答えよ．

まず $f(x) = x^2$ として，(1) と (2) に答えよ．

(1) $x_0 = 0, \ \varepsilon = \dfrac{1}{100}$ としたときに (★) が成立する δ を求めよ．

(2) $x_0 = 0$ とし，任意の $\varepsilon > 0$ に対して (★) が成立する δ を求めることにより，$f(x) = x^2$ が $x = 0$ で連続であることを示せ．

次に

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{m} & (x \text{ が } 0 \text{ でない有理数で，その既約分数表示が } m > 0 \text{ として} \dfrac{n}{m} \text{と表せるとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき, または } x \text{ が無理数のとき}) \end{cases}$$

と定義された関数について，以下の (3)〜(5) に答えよ．

(3) 次の値を求めよ．

(a) $f\left(\dfrac{2}{3}\right)$　(b) $f\left(\sqrt{2}\right)$　(c) $f\left(\dfrac{4}{8}\right)$

(4) M を自然数とする．$|x| < \dfrac{1}{M}$ をみたす有理数 x ($x \neq 0$) の既約分数表示の分母を m とすれば $|m| > M$ となることを示せ．

(5) $f(x)$ が $x = 0$ で連続となることを示せ．

(高知大 2007)　(m20074502)

0.316 $\alpha > 0$ のとき，広義積分 $f(t) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} x^{t-1} dx$ は $t > 0$ に対して定義される．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(1)$ を求めよ．

(2) $t > 0$ に対して，$\lim_{x \to \infty} e^{-\alpha x} x^t = 0$ を示せ.

(3) $t > 0$ に対して，$\alpha f(t+1) = t f(t)$ が成り立つことを示せ.

(4) 正の整数 n に対して，$f(n+1)$ を求めよ.

(高知大 2007)　　(m20074503)

0.317 $M_3(\mathbb{R})$ を実数を成分とする 3 次正方行列全体のなす集合とし，$A \in M_3(\mathbb{R})$ とする．また，

$$\mathfrak{L}_A = \{B \in M_3(\mathbb{R}) \mid B \neq O,\ AB = O\}$$

$$\mathfrak{R}_A = \{C \in M_3(\mathbb{R}) \mid C \neq O,\ CA = O\}$$

と定義する．ただし，O は 3 次零行列を表す．今，$\mathfrak{L}_A$ は空集合でないと仮定する．このとき，次の問いに答えよ.

(1) A は正則でないことを示せ.

さらに，$A = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 6-a \\ a+12 & 7 & 2 \\ 8 & -a & -2 \end{pmatrix}$ としたときに，次の (2)〜(4) に答えよ，

(2) a の値を求めよ.

(3) $P \in \mathfrak{L}_A$ となる 3 次正方行列 P をひとつ与えよ.

(4) $\mathfrak{R}_A = \{{}^tQ \mid Q \in \mathfrak{L}_A\}$ を示せ．ただし，${}^tQ$ は Q の転置行列を表す.

(高知大 2007)　　(m20074504)

0.318 実数を成分とする 2 次正方行列全体のなす集合 $M_2(\mathbb{R})$ は行列の和，行列の実数倍をそれぞれ，線形和，スカラー倍とみなすと実ベクトル空間になる．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ は $M_2(\mathbb{R})$ の基底であることを示せ.

(2) $\mathrm{tr} : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を $\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + d$ で定義するとき，tr は線形写像であることを示せ.

(3) $\mathrm{Ker\ tr} = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$ は $M_2(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間であることを示せ.

(4) Ker tr の次元を求めよ.

(高知大 2007)　　(m20074505)

0.319 (1) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{x^{10} - a^{10}}{x - a}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x^2}{x \sin 2x}$

(2) 次の関数を微分せよ.

(a) $e^{-2x} \cos \dfrac{x}{2}$　　(b) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$　　(c) $x^{\frac{1}{x}}$　$(x > 0)$

(愛媛大 2007)　　(m20074601)

0.320 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin x dx$ を求めよ.　　(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x - x^3} dx$ を求めよ.

(愛媛大 2007)　　(m20074602)

0.321 $f(x, y) = \displaystyle\int_0^{\frac{y^2}{x}} e^{-t} dt$ とおく．$\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ を求めよ.

(愛媛大 2007)　　(m20074603)

0.322 a を正の定数として，$D = \{(x, y)\ :\ -a \leqq\ x \leqq\ a,\ -a \leqq\ y \leqq\ a\}$ とするとき，次の重積分の値を求めよ． $\displaystyle\iint_D e^{|x-y|}dxdy$

(愛媛大 2007) (m20074604)

0.323 (1) $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$ となる実数 λ をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた λ の中で最大のものを λ_0 とするとき，連立方程式

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda_0-1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda_0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ をすべて求めよ．

(愛媛大 2007) (m20074605)

0.324 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \log x dx$ を計算せよ．

(2) $0 < a < 1$ とし，$f(a) = \displaystyle\int_1^e |\log x - a|dx$ とおく．

(a) $f(a)$ を計算せよ．

(b) a が $0 < a < 1$ の範囲を動くとき，$f(a)$ を最小とする a の値を求めよ．

(愛媛大 2007) (m20074606)

0.325 a, b, c を実数とし，行列

$$A = \begin{bmatrix} a & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2a \end{bmatrix},\qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ b & 0 \\ 0 & b \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\qquad C = \begin{bmatrix} c & 1 & 2 \\ 3 & -c & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \end{bmatrix},\qquad F = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 17 & 5 \end{bmatrix}$$

について次の問いに答えよ．

(1) 行列 AB を求めよ．

(2) 行列 $C\,{}^tD$ を求めよ．ただし，${}^tD$ は D の転置行列を表す．

(3) $AB = C\,{}^tD + F$ が成り立つとき，a, b, c の値を求めよ．

(愛媛大 2007) (m20074607)

0.326 すべての実数 x に対して，$f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^3+1}{t^2+1}dt$ とする．

(1) $f(x)$ を計算せよ． (2) $x > 0$ のとき $f(x) > 0$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2}$ の値を求めよ．

(愛媛大 2007) (m20074608)

0.327 (1) 4 次の行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & x \\ -2 & 0 & x & -1 \\ -1 & x & -1 & 0 \\ x & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ を $f(x)$ とおく．$f(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)=0$ の実数解を全て求めよ．

(愛媛大 2007)　　(m20074609)

0.328 $x>-1$ で定義された関数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{3}}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の $x=0$ でのテイラー展開（マクローリン展開）を x^2 の項まで求めよ．ただし，3 次の剰余項についても $f'''(x)$ を用いて正しく書け．

(3) (2) の結果を利用して，$(8.1)^{\frac{1}{3}}$ を小数点以下 3 桁まで求めよ．

(愛媛大 2007)　　(m20074610)

0.329 $(x,y)\neq(0,0)$ で定義された関数 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を考える．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．　　(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を計算せよ．

(愛媛大 2007)　　(m20074611)

0.330 a を実数とする．行列　$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & a \end{bmatrix}$　について次の問いに答えよ．

(1) A の行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) A の逆行列 A^{-1} が存在するための必要十分条件を a を用いて表せ．また，a がその条件をみたすとき A^{-1} を求めよ．

(3) $|A^{-1}|=\dfrac{1}{4}$ が成り立つとき，a の値を求めよ．ただし，$|A^{-1}|$ は A^{-1} の行列式を表す．

(愛媛大 2007)　　(m20074612)

0.331 $x-y$ 平面の領域 $D\ :\ 0\leq y\leq x^2\leq 1$ 上で，曲面 $z=xe^{-y}$ と平面 $z=0$ で囲まれてできる立体の体積を求めよ．

(愛媛大 2007)　　(m20074613)

0.332 次の関数に対して，導関数 dy/dx を求めよ．　　$y=x^x$

(愛媛大 2007)　　(m20074614)

0.333 次の不定積分を計算せよ．　$\displaystyle\int \log x\,dx$　　$(x>0)$

(愛媛大 2007)　　(m20074615)

0.334 次の定積分を計算せよ．　$\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\,d\theta$

(愛媛大 2007)　　(m20074616)

0.335 次の微分方程式の一般解を求めよ．　　$\dfrac{dy}{dx}=2xy$

(愛媛大 2007)　　(m20074617)

0.336 平面中の点 P_1, P_2 のデカルト座標（直交座標）をそれぞれ $(x_1,\,y_1)$, $(x_2,\,y_2)$ とする．これら 2 つの点 P_1 , P_2 と原点 O とで作られる角を $\angle P_1OP_2=\theta$ とする場合，$\cos\theta$ を 2 つの点の座標で表すとどのようになるか.

(愛媛大 2007)　　(m20074618)

0.337 次の x に関する微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-3y=0 \qquad \text{(i)}$$

について，以下の設問に答えよ．

(1) $x=e^z$ とおくことで $\dfrac{dy}{dx}$ を $\dfrac{dy}{dz}$ と x を用いて表せ．また，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を $\dfrac{d^2y}{dz^2}$, $\dfrac{dy}{dz}$, x を用いて表せ.

(2) $x=e^z$ とおくことで x に関する微分方程式 (i) を z に関する微分方程式に変換せよ.

(3) x に関する微分方程式 (i) の一般解を求めよ.

(九州大 2007)　　(m20074701)

0.338 2 変数関数 $z=x^2-y^2$ について次の設問に答えよ.

(1) $z=x^2-y^2$ のグラフの表す曲面の xy 平面 $z=0$ による切り口はどんな図形になるか，方程式と図で説明せよ.

(2) $z=x^2-y^2$ のグラフの表す曲面と，柱面 $x^2+y^2=1$ と xy 平面 $z=0$ で囲まれる立体図形 : $0\leqq\ z\leqq\ x^2-y^2$, $x^2+y^2\leqq\ 1$ の体積を求めよ.

(3) $z=x^2-y^2$ のグラフの作る曲面が，柱面 $x^2+y^2=1$ で切り取られる部分 : $z=x^2-y^2$, $x^2+y^2\leqq\ 1$ の曲面積を求めよ.

(九州大 2007)　　(m20074702)

0.339 $\phi = x^2+y^2+z$ とするとき，$\phi=0$ は曲面を表す．また，この曲面はパラメータ u,v を用いて $\boldsymbol{r}(x,y,z)=(u,v,-u^2-v^2)$ と表すことができる．ここで，$\boldsymbol{r}$ は 3 次元空間での点ベクトルである．このとき，以下の設問に答えよ.

(1) 曲面上の点 $P=(1,1,-2)$ における u 方向の接線ベクトル $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}$ と v 方向の接線ベクトル $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}$ を求めよ.

(2) この 2 つの接線ベクトル $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}$, $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}$ によって作られる平面は曲面上の点 P における接平面となる．このときの接平面を表す式を x,y,z を用いて表せ.

(九州大 2007)　　(m20074703)

0.340 連続型の確率変数を X とする．X が a 以下の値をとる確率を $P_X(a)$ とし，$P_X(a)$ が以下で与えられているものとする．以下の設問に答えよ.

$$P_X(a)=\begin{cases} 0 & (-\infty\le a<-T) \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi a}{2T}\right) & (-T\le a\le T) \\ 1 & (T\le a\le\infty) \end{cases}$$

(1) X が値 X_0〜X_1（ただし，$X_0<X_1$ とする）のいずれかをとる確率を求めよ.

(2) X が任意の定数 B となる確率を求めよ.　　(3) X の確率密度関数 $p(X)$ を求めよ.

(4) X の平均を求めよ.　　(5) X の標準偏差を求めよ.

(九州大 2007)　　(m20074704)

0.341 正の実数 $p > 0$ に対して，定積分 $f_n(p) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+nx^p}\,dx\,,\quad n = 1, 2, \cdots$ を考える．

(1) 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, f_n(2)$

(2) $0 < \varepsilon < 1$ に対して $f_n(p)$ の積分区間を $[\,0,\ \varepsilon\,]$ と $[\,\varepsilon,\ 1\,]$ に分けることにより次の不等式を示せ．

$$0 < f_n(p) < \varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{1+n\varepsilon^p}$$

(3) (2) を用い $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(p) = 0$ であることを示せ．

(九州大 2007) (m20074705)

0.342 ω を実数として，$y(x),\ -\infty < x < \infty$ に関する二階常微分方程式 $y'' + 2y' + y = \sin\omega x$ を考える．

(1) $\omega = 0$ のとき，この微分方程式の一般解を求めよ．

(2) $\omega \neq 0$ のとき，この微分方程式の一般解を求めよ．

(3) 各 ω に対して，$x \to -\infty$ のとき $y(x)$ が有界にとどまる解はただ一つ存在することを示せ．

(九州大 2007) (m20074706)

0.343 3 次元空間内で

$$S\ :\ (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))\,,\quad (u,v) \in D$$

の形で表される曲面を考える．ただし，D はパラメータ (u,v) の動く 2 次元平面の領域である．このとき，S の面積 $\mu(S)$ は

$$\mu(S) = \int_D \sqrt{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}^2}\ dudv$$

で与えられる．ただし，$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ は行列式を表す．これを用いて以下の問いに答えよ．

(1) 曲面 S が $z = f(x,y)\,,\quad (x,y) \in D$ で与えられるときは

$$\mu(S) = \int_D \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}\ \ dxdy$$

であることを示せ．

(2) 半径 1 の球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の面積は 4π であることを (1) の公式を用いて確かめよ．

(九州大 2007) (m20074707)

0.344 $A = (a_{ij})\quad (i,j = 1,2)$ を $2\times\ 2$ 実行列とする． A^T で A の転置行列を表すとする．ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ に対して内積を $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$ で定める．

(1) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ が成立する時，$A^TA = AA^T = E$ が成り立つことを示せ．ただし，E は単位行列とする．

(2) (1) の行列 A の行列式は 1 もしくは -1 であることを示せ．さらに行列 A の固有値は絶対値が 1 であることを示せ．

(3) (2) において A の行列式が -1 であるとき，ある実数 θ が存在して

$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ と書けることを示せ．

(九州大 2007)　　(m20074708)

0.345 実数 p に対して n 次正方行列 A_n を以下のように定める．

$$(A_n)_{i,j} = \begin{cases} 2 & i = j \in \{1, 2, \cdots, n-1\} \\ p & i = j = n \\ -1 & |i-j| = 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

ただし，$(A_n)_{i,j}$ は行列 A_n の (i, j) 成分を表す．また，$A_1 = p$ とする．

(1) $p = \dfrac{2}{3}$ のとき A_3 の階数を求めよ．

(2) $p = 1$ のとき A_3 の逆行列を求めよ．

(3) A_n の行列式 $|A_n|$ を a_n とおく．数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ のみたす漸化式を導き，a_n，$n = 1, 2, \cdots$，を求めよ．

(九州大 2007)　　(m20074709)

0.346 a を正の定数，e を自然対数の底とし，$f(x) = e^{ax}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して，$f(x)$ の n 次（n 階）導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ のマクローリン展開（x の巾 (べき) 級数の形での展開）を求めよ．

(3) N を自然数とするとき，次の級数の和を求めよ．$\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \frac{x^n}{(n-N)!}$

(九州大 2007)　　(m20074710)

0.347 (1) $n = 0, 1, 2$ に対して，次の不定積分を求めよ．$\displaystyle\int \frac{x^n}{x^2+1} dx$

(2) n を負でない整数とするとき，次の広義積分は収束するか発散するか，いずれであるかを判定せよ．収束する場合は広義積分の値を求め，発散する場合はその理由を示せ．

$$\int_1^{\infty} \frac{x^n}{x^2+1} dx$$

(九州大 2007)　　(m20074711)

0.348 次の 4 次正方行列 A の逆行列を求めよ．$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(九州大 2007)　　(m20074712)

0.349 A は n 次正方行列で，その対角成分はすべて 2，それ以外の成分はすべて 1 であるとする．α は実数で，次の条件 (C) をみたす n 次の列ベクトル（縦ベクトル）$\boldsymbol{x}$ が存在するとする．

条件 (c) ：$\boldsymbol{x}$ の成分はすべて正で，$A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$

(1) $n = 2$ の場合に，α を求めよ．　　(2) n が 3 以上の自然数の場合に，α を求めよ．

(九州大 2007)　　(m20074713)

0.350 次の関数の一次導関数 dy/dx を求めなさい．

(1) $y = 2x^3 + 3x + 5$　　(2) $y = \sin^2 x$　　(3) $y = (2x+1)^3$

(4) $y = x \cdot \log x$　　(5) $y = \exp(x)/x$

(佐賀大 2007)　　(m20074901)

0.351 (1) $f(x) = \exp(x)$ のとき，$f'(x)$ と $f''(x)$ はどのように表されますか.

(2) $f(x) = \exp(x)$ のとき，$f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$ はどうなりますか.

(3) マクローリンの定理は次式で表される.

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\,x^2/2! + \cdots$$
$$\cdots + f^{(n-1)}(0)\,x^{n-1}/(n-1)! + f^{(n)}\,(\theta x)\,x^n/n! \quad (0 < \theta < 1)$$

$f(x) = \exp(x)$ をマクローリンの定理を用いて第 4 項まで示しなさい.

（マクローリン展開）ただし，$\exp(x) = e^x$ である.

(4) 上記のマクローリン展開を第 4 項まで計算して，$\exp(1)$ を小数点以下 2 桁まで求めなさい.

(佐賀大 2007)　　(m20074902)

0.352 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int x^{-3/7}\,dx$　(2) $\displaystyle\int \cos(3x)\,dx$　(3) $\displaystyle\int \tan x\,dx$

(4) $\displaystyle\int 2x \cdot \log x\,dx$　(5) $\displaystyle\int \frac{1}{1-4x^2}\,dx$

(佐賀大 2007)　　(m20074903)

0.353 $y = x^2 - 1$ と $y = -2x + 2$ に囲まれた部分の面積を求めなさい.

(佐賀大 2007)　　(m20074904)

0.354 (1) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) (1) の行列を対角化する直交行列を求め，対角化せよ.

(佐賀大 2007)　　(m20074905)

0.355 (1) 関数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ を $x = 0$ の周りでテイラー展開し，x^3 の項まで書け.

(2) 微分方程式 $y''(x) + 9y(x) = 0$ の一般解を求めよ.

(3) 関数 $f(x) = x$（定義域を $-\pi \leq x \leq \pi$ とする）を　$f(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}[\, a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\,]$

と書くとき，a_0，a_n，b_n を求めよ.

(佐賀大 2007)　　(m20074906)

0.356 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x \log x\,dx$　（ 不定積分．積分定数を C とせよ．）

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3x^2}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$

(4) $\displaystyle\iint_D x^2 y\,dxdy$　$\left(但し，D = \left\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq \sqrt{x}\,\right\}\right)$

(佐賀大 2007)　　(m20074907)

0.357 3 次元空間のベクトル場 $\boldsymbol{A}(x) = (A_x(x,y,z),\ A_y(x,y,z),\ A_z(x,y,z))$ について次の等式を証明せよ.

$$\boldsymbol{A}(x) \times\ (\nabla \times\ \boldsymbol{A}(x)) = \frac{1}{2}\nabla\left(\boldsymbol{A}(x)^2\right) - (\boldsymbol{A}(x)\cdot\nabla)\,\boldsymbol{A}(x)$$

(佐賀大 2007)　　(m20074908)

0.358 次の関数の極限を求めよ．ただし，log は自然対数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

(佐賀大 2007)　　(m20074909)

0.359 2 変数関数 $f(x,y)=xy(3-x-y)$ の極値を求めよ．

(佐賀大 2007)　　(m20074910)

0.360 $f(x)=e^{-x}\sin x$ について，次の問いに答えよ．

(1) 定数 $a>0$ に対して，定積分 $I_a=\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$ を部分積分法で求めよ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ を求めよ．

(佐賀大 2007)　　(m20074911)

0.361 3 次正方行列 $A=\begin{bmatrix}5&3&8\\4&1&0\\3&1&1\end{bmatrix}$ の行列式 $|A|$ と逆行列 A^{-1} を求めよ．

(佐賀大 2007)　　(m20074912)

0.362 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}=(3,1,-2)$, $\boldsymbol{b}=(4,2,1)$, $\boldsymbol{c}=(0,3,-1)\in\boldsymbol{R}^3$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は 1 次独立であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ から生成される部分空間 $W=\langle\,\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\,\rangle$ の次元 $\dim W$ は何か．

(佐賀大 2007)　　(m20074913)

0.363 3 次正方行列 $B=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{bmatrix}$ の固有値と，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ．

(佐賀大 2007)　　(m20074914)

0.364 次の関数の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$

(佐賀大 2007)　　(m20074915)

0.365 半径 R の円に内接する長方形のうち，面積が最大なものを求めよ．

(佐賀大 2007)　　(m20074916)

0.366 次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\frac{x}{(x+1)(x+2)^2}$　　(2) $e^{-x}\cos^2 x$

(佐賀大 2007)　　(m20074917)

0.367 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $x\dfrac{dy}{dx}+y=x^3y^3$　　(2) $y''-2y'+10y=0$　　(3) $y''-2y'+10y=2\cos 2x+10\sin 2x$

(佐賀大 2007)　　(m20074918)

0.368 2 つのベクトルを $\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする．2 次元列ベクトル空間 V^2 から V^2 への線形写像 $y = f(x)$ が $f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ と $f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ を満たすとき，任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ はどのようなベクトルへ写像されるか $f(\boldsymbol{x})$ の形を行列・ベクトル表示で求めよ．

(佐賀大 2007) (m20074919)

0.369 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ について，

(1) $\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A} - 8\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$ を示せ． (2) (1) を利用して，$\boldsymbol{A}^{-1}$ および $\boldsymbol{A}^{-2}$ を求めよ．

ここで，$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{A}^{-1}$ は，それぞれ単位行列，零行列，$\boldsymbol{A}$ の逆行列である．また，$\boldsymbol{A}^{-2} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^2$ である．

(佐賀大 2007) (m20074920)

0.370 次の連立一次方程式が解を持つように α の値を決定し，その連立一次方程式を解け．

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 10x_4 = \alpha \end{cases}$$

(佐賀大 2007) (m20074921)

0.371 次の関数を x について，微分せよ．但し，log の底は e とする．

(1) $y = \sin 3x \cos 3x$ (2) $y = (x \sin x)^3$ (3) $y = (\log x)^2$ (4) $y = 10^x$

(佐賀大 2007) (m20074922)

0.372 次の関数の第 n 次導関数 $y^{(n)}$ を求めよ．

(1) $y = \sin ax$ (2) $y = e^{-ax} \sin bx$

(佐賀大 2007) (m20074923)

0.373 次の不定積分を求めよ．但し，積分定数は C とする．

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\, dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$

(佐賀大 2007) (m20074924)

0.374 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$ を x 軸の周りで回転させてできる体積 V を求めよ．ただし，a, b は，正の定数である．

(佐賀大 2007) (m20074925)

0.375 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{4x^2 + 3x - 7}{2x^2 - 5x + 3}$ を求めよ．

(2) $y = \log\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$ を微分せよ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int x^2 e^{2x}\, dx$ を計算せよ．

(4) 二変数関数 $f(x, y) = x^2 - 5xy^2 + 3y^2$ に関して，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．また，点 $(3, 2)$ における x 方向，y 方向の偏微分係数を求めよ．

(佐賀大 2007) (m20074926)

0.376 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 2x(1-y)$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} - 3t = 5\sin t$

(佐賀大 2007)　(m20074927)

0.377 次の連立一次方程式を解け.
$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 3x + y + z = 7 \\ 2x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

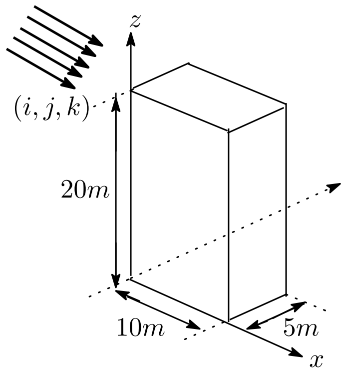
(佐賀大 2007)　(m20074928)

0.378 直方体のビルに太陽光があたっている.

ビルに対して，右図のように $x{-}y{-}z$ 座標系を設定したときに，太陽光はベクトル (i, j, k) と平行な方向に進行するものとする．ただし，

$i^2 + j^2 + k^2 = 1$

であるとする．このビルにできる影の面積を i, j, k により表せ．なお，地表面は完全な平面になっているものとする，また，$i > 0,\ j > 0,\ k < 0$ とする.



(佐賀大 2007)　(m20074929)

0.379 a, b を任意の実数とする次の対称行列 A について，以下の問いに答えよ.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & b & 2 \\ a & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A が逆行列を持たないとき，$b > 0$ であるような a の範囲を示せ.

(2) 行列 A の固有値の一つが 1 であるとき b の値を求めよ．また，1 以外の固有値を a を用いて表せ．ただし，$a \neq 0$ とする.

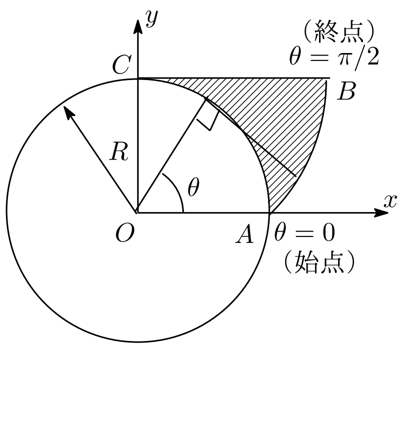
(長崎大 2007)　(m20075001)

0.380 太さを無視できる糸を巻き付けた半径 R の円柱がある．糸を張りながら円柱から外すとき以下の問いに答えよ.

(1) 図のように $\theta = 0$ の位置からはじめて $\theta = \pi/2$ まで糸が外れた．円柱から外れた糸の長さ BC はいくらか.

(2) θ の位置まで糸が外れたとき，糸の先端の x および y 座標を R と θ を用いて表せ.

(3) $\theta = \pi/2$ まで糸を外す間に，糸の先端が描く曲線の長さ AB は次式で計算できる.
$$AB = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$
上式を計算して曲線 AB の長さを求めよ.



(4) 図中の斜線部分の面積 $\boldsymbol{A}$ は
$$\boldsymbol{A} = R^2 \left\{ \int_0^{\pi/2} \left(\theta \sin\theta\cos\theta + \theta^2 \sin^2\theta\right) d\theta - \frac{\pi}{4} \right\}$$
で与えられる．右辺に含まれる定積分 $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \theta\sin\theta\cos\theta\, d\theta$ の値を求めよ.

(長崎大 2007)　　　(m20075002)

0.381 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r,\ f(x,y,z)=\dfrac{1}{r}=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ とするとき.

(1) $f_x(x,y,z),\ f_y(x,y,z),\ f_z(x,y,z)$ を求めよ.

(2) $f_{xx}(x,y,z)+f_{yy}(x,y,z)+f_{zz}(x,y,z)$ を求めよ.

ここで，$f_x(x,y,z)=\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x},\cdots,f_{xx}(x,y,z)=\dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2},\cdots$ とする.

(長崎大 2007)　　　(m20075003)

0.382 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\,\sin x\,dx$ を求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{x^2}\,dx$ を求めよ.

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq y\leq 1\}$ を計算せよ.

(4) 平面曲線が $\begin{cases} x=e^t\sin t \\ y=e^t\cos t \end{cases}$ ， $\left(0\leq t\leq\frac{\pi}{2}\right)$ で与えられるとき，曲線の長さ L を求めよ.

(長崎大 2007)　　　(m20075004)

0.383 次式で与えられる行列 A について以下の小問に答えよ.　　$A=\begin{bmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}$

ただし，各小問は互いに無関係である.

(1) 行列 A に左から $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ を乗じて得られる行列 BA の行列式の値が 2 であった．このときの a と b の関係を求めよ.

(2) 行列 A が固有値 1 を持つとき，a と b の関係を求めよ.

(3) 行列 A が固有ベクトル $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ を持つとき，a と b の関係を求めよ.

(長崎大 2007)　　　(m20075005)

0.384 次の微分方程式を解け，ここで，$y'=\dfrac{dy}{dx}$ とする.

(1) $y'+y=0$　　　(2) $y'+y=(x+1)^2$

(3) 初期条件 $y(0)=0$ ($x=0$ のとき $y=0$) を満たす $y'+y=(x+1)^2$ の解を求めよ.

(長崎大 2007)　　　(m20075006)

0.385 次の式について偏微分 $\partial^2 z/\partial x^2$ と $\partial^2 z/\partial x\partial y$ を求めよ.

$z=x^3-5xy^2+2$

(長崎大 2007)　　　(m20075007)

0.386 次の行列の固有値および固有ベクトルを求めよ.　　$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$

(長崎大 2007)　　　(m20075008)

0.387 次の関数を x について不定積分せよ.

$$I=\int x\log x\,dx$$

(長崎大 2007)　　　(m20075009)

0.388 次の微分方程式を解け．

(1) $y' = \tan x \cot y$ 　　　(2) $x(x-y)y' + y^2 = 0$

(長崎大 2007) 　　(m20075010)

0.389 (1) 次の不定積分を求めよ． $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$

(2) 次の方程式で囲まれる面積を求めよ．ただし，a, b は定数である． $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

(長崎大 2007) 　　(m20075011)

0.390 関数 $f(x) = 9x^3 + 6x^2 - 19x + 10$ において，$f(x) = 0$ の解をすべて求めよ．

(長崎大 2007) 　　(m20075012)

0.391 平面上の線形変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい．

(1) この変換は点 $(1,\ -1)$, $(1,\ 2)$ をそれぞれ点 $(3,\ -7)$, $(-3,\ 5)$ に移すとする．a, b, c, d を求めなさい．

(2) この変換により，直線 $x + y = 0$ がどのような図形に移されるかを述べなさい．ただし，a, b, c, d は (1) で求めた値とする．

(大分大 2007) 　　(m20075101)

0.392 関数 $f(x, y) = e^{x^3 y}$ の 2 階偏導関数 $f_{xy}(x, y)$ を求めよ．

(熊本大 2007) 　　(m20075201)

0.393 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0,\ x^2 + y^2 \leqq\ a^2\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2 y \, dxdy$ 　を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

(熊本大 2007) 　　(m20075202)

0.394 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ．

(熊本大 2007) 　　(m20075203)

0.395 線形写像 $f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が 　$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$ 　$(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ 　で与えられているとき，次の問いに答えよ．

(1) f の核の基底を求めよ． 　　(2) f の像の次元を求めよ．

(熊本大 2007) 　　(m20075204)

0.396 空間内の集合 $W = \left\{ \begin{pmatrix} -a+b \\ -a \\ 2b \end{pmatrix} \middle|\ a, b \text{ は実数} \right\}$ と点 $P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ について，次の各問いに答えよ．

(1) 点 P が W 内の点でないことを示せ．

(2) W 内の点の中で点 P との距離が最短であるような点 Q を求めよ．

(宮崎大 2007) 　　(m20075301)

0.397 2 変数関数 $f(x, y) = \log(1 + x^2 + 2y^2)$ について，次の各問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ (r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくとき，関数 f の $r,\ \theta$ に関する偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial r},\ \dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ を $x,\ y$ のみを用いて表せ.

(宮崎大 2007)　　(m20075302)

0.398 関数 $f(x, y) = (x+y)^3 - 12xy$ の極値および極値を与える点を求めよ．また，その極値が，極大値，極小値のどちらであるのか答えよ.

(宮崎大 2007)　　(m20075303)

0.399 (1) 平面内の集合 D を，$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq\ y \leqq\ 1,\ y^2 \leqq\ x \leqq\ y\}$ と定義する.
集合 D を座標平面上に図示せよ.

(2) (1) の集合 D 上での次の重積分の値を求めよ.　$\displaystyle\iint_D \sqrt{xy}\,dxdy$

(宮崎大 2007)　　(m20075304)

0.400 次の微分方程式を解け.　$\dfrac{dx}{dt} + x + \sin t = 0$　　(宮崎大 2007)　　(m20075305)

0.401 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int xe^{-2x}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{(x+1)}{x^2+2x+3}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \sin x\cos x\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2}\quad (a > 0)$

(鹿児島大 2007)　　(m20075401)

0.402 (1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

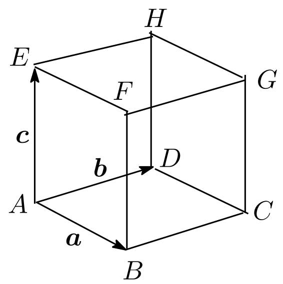
(a) $\left(x^2 + 2xy\right)dx + xydy = 0$　　(b) $\left(xy^2 + \sin x\right)dx + \left(x^2y + \cos y\right)dy = 0$

(2) 次の微分方程式の完全解を求めよ.

$y'' + 4y' + 3y = 3e^{-x}$

(鹿児島大 2007)　　(m20075402)

0.403 右図の立方体 $ABCD-EFGH$ において，ベクトル $\overrightarrow{ED}$ と $\overrightarrow{EC}$ のなす角 θ の余弦を求めよ.
ただし，ベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB},\ \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AD},\ \boldsymbol{c} = \overrightarrow{AE}$ は，互いに直交しており，その長さはともに l である.



(鹿児島大 2007)　　(m20075403)

0.404 次の行列式と行列に関する問いに答えよ.

(1) 次の行列式の値を求めよ.　$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする．$A^2,\ A^3,\ A^4,\ A^5$ を求め，A^n を一般形で表せ.

(鹿児島大 2007)　　(m20075404)

0.405 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ のとき，AC, BC, BA を求めなさい．

(鹿児島大 2007) (m20075405)

0.406 (1) 曲線 $y=\log x$ の $x=a$ における接線の方程式を求めなさい，

(2) 方程式 $\log x=kx$ が実数解を持たない k の範囲を求めなさい．

(鹿児島大 2007) (m20075406)

0.407 曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ のグラフを描きなさい．また，この曲線で囲まれた図形の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2007) (m20075407)

0.408 xyz 空間内の 4 点 $A(1,1,6)$, $B(2,-1,2)$, $C(-3,2,1)$, $D(x,-2,3)$ を考える．

(1) $\overrightarrow{a}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$（$s,t$ は実数）とするとき，$\overrightarrow{a}$ の x, y, z 成分を求めなさい．

(2) 4 点 A, B, C, D が同一平面上にあるとき，x の値を求めなさい．

(鹿児島大 2007) (m20075408)

0.409 次の関数を微分せよ．

(1) $y=\cos(\theta)\cdot\sin(\theta)$ (2) $y=\tan(x)\cdot\log(x)$

(鹿児島大 2007) (m20075409)

0.410 次の関数を積分せよ．

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{3(x+2)^3}\,dx$ (2) $\displaystyle\int\sin^2(\theta)\,d\theta$

(鹿児島大 2007) (m20075410)

0.411 次の行列を計算しなさい．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$

(鹿児島大 2007) (m20075411)

0.412 次の関数のグラフを図示せよ．特徴的な点は値とともに図示せよ．範囲は $\{-\pi\leqq\theta\leqq\pi\}$ とする．グラフは可能な範囲で丁寧に描くこと．

$y=3\sin 2(\theta+\pi/3)$

(鹿児島大 2007) (m20075412)

0.413 $f'(0)=a$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)-f(\sin x)}{x}$ を求めよ． (鹿児島大 2007) (m20075413)

0.414 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{4x^2+6x+3}$ を求めよ． (鹿児島大 2007) (m20075414)

0.415 (1) 2 点 $P_1(1,-1,1)$, $P_2(3,1,2)$ を通る直線の式を求めよ．

(2) x 軸，y 軸，z 軸との切片が，それぞれ，3, -5, 4 である平面の方程式を求めよ．

(3) 座標の原点を $O(0,0,0)$，2 点 P_1,P_2 の座標を，それぞれ $(2,1,3)$, $(4,0,1)$ とする．
$\overline{OP_1}$ と $\overline{OP_2}$ のなす角を求めよ．

(4) 2 つの行列 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ について，
$(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ が成立するか調べよ．

(5) 行列 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(鹿児島大 2007) (m20075415)

0.416 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ $(a > 1)$.

(室蘭工業大 2007) (m20075501)

0.417 微分方程式 $\dfrac{d^2u}{dx^2} - \dfrac{du}{dx} - 2u = x + \dfrac{5}{2}$ を初期条件 $u(0) = 0,\ u''(0) = 1$ のもとで解き，解の関数 $u = u(x)$ の概形を $x \geqq 0$ の範囲でグラフに描け．ただし，x の増加にしたがって $u = u(x)$ が漸近する関数も式とともに図中に記すこと.

(室蘭工業大 2007) (m20075502)

0.418 (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ のとき，BA を求めなさい.

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ のとき， $AX = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ を満たす行列 X を求めなさい.

(室蘭工業大 2007) (m20075503)

0.419 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ 3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するように x を求めなさい.

(2) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ が直交するように x を求めなさい.

(室蘭工業大 2007) (m20075504)

0.420 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ と固有ベクトル $u_1,\ u_2$ を求めなさい.

(室蘭工業大 2007) (m20075505)

0.421 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が直交行列であることを示しなさい.

(室蘭工業大 2007) (m20075506)

0.422 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は， $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ で与えられる．ただし，$f^{(n)}(0)$ は $x = 0$ における $f(x)$ の n 階導関数である．$x \to 0$ のとき，$e^x \sin x$ の漸近展開を x^3 の項まで求めよ.

(室蘭工業大 2007) (m20075507)

0.423 $yz + zx + xy = 1$ で与えられる $z(x, y)$ の 2 次偏導関数を求めよ.

(室蘭工業大 2007) (m20075508)

0.424 次の複素数を実部と虚部に分け，$a + jb$（a, b は実数）の形で表せ．ただし，$j = \sqrt{-1}$ である.

(1) $\dfrac{5(1 - j2)}{(1 + j2)(1 + j3)(2 + j)}$ (2) $2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + j\dfrac{1}{2}\right)^8$

(室蘭工業大 2007) (m20075509)

0.425 微分方程式 $x\dfrac{dy}{dx} - 3y + x = 0$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ とおくと，与えられた微分方程式が $x\dfrac{du}{dx} = 2u - 1$ と書けることを示せ.

(2) 初期条件 $x = 1$ のとき $y(1) = 2$ のもとで，与えられた微分方程式を解け.

(室蘭工業大 2007) (m20075510)

0.426 (1) $\cos^2\theta\sin(2\theta) - \cos\theta\sin(3\theta) = A\sin(4\theta)$ と表したとき，係数 A を求めよ.

(2) $\cos^5\theta = B\cos\theta + C\cos(3\theta) + D\cos(5\theta)$ と表したとき，係数 $B,\ C,\ D$ を求めよ.

(室蘭工業大 2007) (m20075511)

0.427 行列 A および I を，$A = \begin{bmatrix} a & 2a \\ b & b+1 \end{bmatrix}$ ， $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とするとき，$A^2 - 5A - 2I = 0$ を満足する実数 a および b の組み合わせを求めよ.

(室蘭工業大 2007) (m20075512)

0.428 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$ を求めよ. (2) $f(x) = \log|\sin^{-1}x|$ を微分せよ.

(岡山県立大 2007) (m20075601)

0.429 $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を求めよ.

(岡山県立大 2007) (m20075602)

0.430 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

(岡山県立大 2007) (m20075603)

0.431 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^2}$ を求めよ.

(岡山県立大 2007) (m20075604)

0.432 変数変換を用いて次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D x^2y^2dxdy \qquad D = \{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \leqq\ 1,\ x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0\}$$

(岡山県立大 2007) (m20075605)

0.433 2 階の同次線形微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx} + by = 0\ \text{（}a, b\ \text{は定数係数）}$$

について，以下の問いに答えよ．ただし，$x > 0$ とする.

(1) 変数 x を $x = e^t$ と変換する．このとき，$\dfrac{dy}{dt}$ を x と $\dfrac{dy}{dx}$ を用いて表せ.

(2) さらに，$\dfrac{d^2y}{dt^2}$ を x，$\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を用いて表せ.

(3) (1) と (2) を用いて，上記の微分方程式が，変数 x を $x = e^t$ と変形することにより定数係数同次線形微分方程式になることを示せ.

(4) (3) を参考にして，微分方程式 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ の一般解を求めよ.

(香川大 2007) (m20075701)

0.434 A, B, C, P は $n\times\ n\ (n \geq 2)$ の正則な行列，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'}$ は $n\times\ 1$ の行列とする．ただし，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．なお，答を導出する過程も必ず示すこと.

(1) $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z} = B\boldsymbol{y}$ とする．このとき，$\boldsymbol{z} = P\boldsymbol{x}$ を満足するような P を A と B で表せ.

(2) $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z} = B\boldsymbol{x}$ とする．このとき，$\boldsymbol{z} = P\boldsymbol{y}$ を満足するような P を A と B で表せ.

(3) $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y'} = B\boldsymbol{x'}$, $\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{y'}$, $\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{x'}$ の関係があるとき，B を A と C で表せ.

(香川大 2007)　　(m20075702)

0.435 $A = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ とおく．このとき，

(1) A の行列式を求めよ.　　(2) $x = y = z = 1$ のとき, A の逆行列を求めよ.

(島根大 2007)　　(m20075801)

0.436 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の 4 つのベクトルを

$$\boldsymbol{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$ とする．このとき，

(1) $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_3}$ は 1 次独立であることを示せ.　　(2) $\boldsymbol{a_4}$ を $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_3}$ の 1 次結合で表せ.

(島根大 2007)　　(m20075802)

0.437 4 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分集合 W を次のように定める：

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ x - y - 3z + 2w = 0 \text{ であり，かつ } \quad 2x - y + z + w = 0 \text{ である.} \right\}$$

(1) W は $\mathbb{R}^4$ の部分空間であることを示せ.　　(2) W の基底を一組求めよ.

(島根大 2007)　　(m20075803)

0.438 関数 $f(x) = \dfrac{1 + 2\sin x}{2 - \sin x}$ の最小値と最大値を求めよ．また，$f(x)$ は $0 \leq x \leq 2\pi$ において 2 つの変曲点をもつことを示せ.

(島根大 2007)　　(m20075804)

0.439 (1) 関数 $\dfrac{\log x}{x}$ の不定積分を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_n^{2n} \frac{\log x}{x} dx$ は正の無限大に発散することを示せ.

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$ が収束するならば，その極限値を求めよ．もし発散するならば，その理由を述べよ.

(4) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ をみたす数列 a_n に対して　$b_n = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n}$　とおくとき，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} b_n = 0$ は正しいだろうか ？ 正しければその理由を述べよ．もし正しくなければ反例を一つ与えよ.

(島根大 2007)　　(m20075805)

0.440 $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $x = e^{u+v}$, $y = e^{u-v}$ のとき，$\dfrac{\partial z}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ.

(島根大 2007)　　(m20075806)

0.441 $u = 3x + y,\ v = x - 3y$ と変数変換することにより，2 重積分
$\displaystyle\iint_D x\,dxdy,\quad D = \{(x,y)\ :\ 0 \leq 3x + y \leq 1,\ -1 \leq x - 3y \leq 0\}$ を求めよ．

(島根大 2007) (m20075807)

0.442 n の関数 $f(n) = \displaystyle\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $f(1)$ の値を求めよ．

(2) $f(n+1) = nf(n)$ を証明せよ．

(3) n が自然数のとき，$f(n+1) = n!$ を証明せよ．

(4) $f(\frac{1}{2}) = 2\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ を証明せよ．

(5) $\dfrac{f(3)f(-\frac{5}{2})}{f(\frac{3}{2})}$ の値を求めよ．なお，$f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ である．

(島根大 2007) (m20075808)

0.443 任意定数 a を含む行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & a \end{bmatrix}$ について，以下の設問に答えよ．

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) 逆行列 A^{-1} を求めよ. さらに，$A^{-1}A$ が単位行列となることを示せ．

(3) 行列 A の階数 $\mathrm{rank}A$ を求めよ．

(4) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ において，解 $\boldsymbol{x}$ がただ一つ求められる条件を示せ．さらに，その条件を満たす場合，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解いて，$\boldsymbol{x}$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ である．

(5) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ において，$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{0}$ 以外の解を持つ条件を示せ．さらに，その条件を満たす a の値を用いて $\boldsymbol{x}$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{x}$ の大きさは 1，すなわち $|\boldsymbol{x}| = 1$ とせよ．

(島根大 2007) (m20075809)

0.444 次の関数 u は方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ を満たすことを示せ．

(1) $u = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$

(2) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

(島根大 2007) (m20075810)

0.445 $u = u(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{\frac{-x^2}{4t}}$ であるとき，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いて次式 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty u(x,t)dx = 1$
が成り立つことを示せ．ただし，t はパラメータ (> 0) とする．

(島根大 2007) (m20075811)

0.446 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列式 $|A|$ を第 1 列について余因数展開して，2 行 2 列の行列式にして計算せよ．

(2) 行列 A の逆行列を求めよ．

(3) 行列 A の固有値 λ_i とその固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ．

(4) 行列 A の階数を求めよ．

(島根大 2007)　　(m20075812)

0.447 関数 $y = \dfrac{1}{2}x^2 e^{-x}$ の増減・凹凸に関する以下の問いに答えよ.

(1) 関数 y の導関数 y' および 2 階導関数 y'' を求めよ.

(2) 関数 y の変曲点における x 座標を求めよ.

(3) 関数 y が極小となるときの x の値 $x_{\min}$ と極小値 $y_{\min}$,　および, 関数 y が極大となるときの x の値 $x_{\max}$ と極大値 $y_{\max}$ を求めよ.

(4) 極小点, 極大点, および変曲点を考慮して関数 y のグラフを描け.

(島根大 2007)　　(m20075813)

0.448 一般に, 関数 $f(x)$ が周期 2π の周期関数で, 区間 $[-\pi, \pi]$ でいくつか（有限個）の点を除いて連続であるとき, 次のように三角関数の級数に展開できる. これを $f(x)$ のフーリエ級数という.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\quad b_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

周期 2π の周期関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} -2x & (-\pi \leqq\ x \leqq\ 0) \\ 2x & (0 < x \leqq \pi) \end{cases}$$ のとき, $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ

(島根大 2007)　　(m20075814)

0.449 次の微分方程式について, 以下の設問に答えよ.

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ただし, $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$,　$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,　$x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ である.

(1) 行列 A の固有値 λ_1 , λ_2 を求めよ.

(2) 行列 A の固有ベクトル ν_1 , ν_2 を求めよ.

(3) 行列 $T = [\nu_1, \nu_2]$ とする $x(t) = Ty(t)$ の変換によって, ① を $y(t)$ に関する微分方程式に変形せよ. ただし, $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$ である.

(4) 設問 (3) で求めた $y(t)$ に関する微分方程式を解け.

(5) 設問 (4) で求めた解 $y(t)$ を用いて, ① の解 $x(t)$ を求めよ.

(島根大 2007)　　(m20075815)

0.450 直交座標系 (x, y, z) における二つのベクトルを $\boldsymbol{a} = (2, 1, -3)$, $\boldsymbol{b} = (-1, -3, 0)$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を求めよ.

(2) 外積 $\boldsymbol{a} \times\ \boldsymbol{b}$ を求めよ.

(3) $(\boldsymbol{a} \times\ \boldsymbol{b})$ を方向ベクトルとし, 点 $(3, 4, 7)$ を通る直線の方程式を求めよ.

(4) (3) で求めた直線と平面 $2x + 3y - 2z - 6 = 0$ の交点を求めよ.

(首都大 2007)　　(m20075901)

0.451 行列 $\boldsymbol{C}$ を $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{C}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(2) 行列 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$ が対角行列となるような行列 $\boldsymbol{P}$ を求めよ．

(3) 行列 $\boldsymbol{C}^n$ を求めよ．

(首都大 2007)　　(m20075902)

0.452 関数 $\dfrac{1}{1-x^2}$ を級数展開せよ．ただし，$-1<x<1$ とする．

(首都大 2007)　　(m20075903)

0.453 次の関数を積分せよ．

(1) $x\log x$　　(2) $\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)(x-2)^2}$

(首都大 2007)　　(m20075904)

0.454 時刻 $t=0$ で静止していた質量 m の球体が自由落下するとき，落下速度 v に比例した空気抵抗 rv を受けるものとする．重力加速度を g とすれば，この球体の運動方程式は

$$mg-rv=m\frac{dv}{dt}$$

と表される．この球体の任意の時刻 t での落下速度 v および落下距離 z を求めよ．

(首都大 2007)　　(m20075905)

0.455 (1) $y=e^{x^x}\ (=\exp(x^x))$ の導関数を求めよ．

(2) $f(x)=\tan x$ の逆関数 $f^{-1}(x)=\tan^{-1}x$ の導関数を求めよ．

(滋賀県立大 2007)　　(m20076001)

0.456 (1) 未知関数 $y=y(x)$ に対する 2 階同次線形常微分方程式　$y''-2y'-8y=0$　の一般解を求めよ．

(2) 2 階非同次線形常微分方程式　$y''-2y'-8y=25\cos 3x$　の特殊解を求めよ，その結果をつかって，一般解を書け．

(滋賀県立大 2007)　　(m20076002)

0.457 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 4 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ が正則か否かを行列式の値を計算して判定し，正則であればその逆行列を求めよ．

(滋賀県立大 2007)　　(m20076003)

0.458 (1) $x^2+y^2 \leqq 2x$ で与えられる平面の領域 D を図示せよ．

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$ の値を求めよ，

(滋賀県立大 2007)　　(m20076004)

0.459 以下の定積分および不定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_1^2 (x+2)(x-1)dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-q)(x-q-1)}dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x+1}}dx$

(宇都宮大 2007)　　(m20076101)

0.460 関数 $f(x)=(2x^2-1)e^{-x^2}$ について，以下の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ が偶関数であることを示せ．ただし，偶関数とは $g(-x)=g(x)$ という性質を持つ関数である．

(2) 関数 $f(x)$ が極大値をとる x および極小値をとる x を求めよ．また，それぞれの極値を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ のグラフの概形を描け．ただし，$e^{-\frac{3}{2}}$ の値は，約 0.223 である．

(宇都宮大 2007)　　(m20076102)

0.461 (1) 3 次曲線 $y=x^3-x^2-x+1$ のグラフの概形を描け．

(2) 設問 (1) の曲線と x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

(宇都宮大 2007)　　(m20076103)

0.462 次のベクトル $\quad \boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}$

に関して以下の問いに答えよ．ただし，a は実数とする．

(1) $a=1$ のとき $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ は線形独立か線形従属かを調べよ．

(2) $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ が線形従属になるための実数 a の条件を求めよ．

(宇都宮大 2007)　　(m20076104)]

0.463 次の行列 $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ に関して，以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトル λ_i, $\boldsymbol{u}_i$ $(i=1,2,3)$ を求めよ．ただし，各固有ベクトルの最大の成分が 1 となるようにせよ．

(2) A の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ $(i=1,2,3)$ が，数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ の基底となることを示せ．

(宇都宮大 2007)　　(m20076105)

0.464 n は 2 以上の自然数とする．数学的帰納法によって，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$$

(宇都宮大 2007)　　(m20076106)

0.465 直線 $y=ax-3$ と円 $x^2+y^2+2y=0$ がある．この直線と円が交わったり，接したりしないときの a の値を求めよ．

(宇都宮大 2007)　　(m20076107)

0.466 $\log_x 4-\log_2 x=1$ を解け．

(宇都宮大 2007)　　(m20076108)

0.467 $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}dx$ を求めよ．

(宇都宮大 2007)　　(m20076109)

0.468 確率変数 X の確率分布が下表により与えられているとき，X 平均値および分散を求めよ．

X	2	4	6	8
確率分布 P	0.4	0,3	0.2	0.1

(宇都宮大 2007) (m20076110)

0.469 毎秒 $3cm^2$ の割合で面積が増加している円がある．この円の半径が $6cm$ になった瞬間における半径 r の変化率 dr/dt の値を求めよ．ただし，t は時間を表す．

(宇都宮大 2007) (m20076111)

0.470 n を自然数とするとき，$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を証明せよ．

(宇都宮大 2007) (m20076112)

0.471 区間 $[0,1]$ を 4 等分し，$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ の近似値を台形公式を使って小数第 3 位まで求めよ．

(宇都宮大 2007) (m20076113)

0.472 ある固体の数 N が増加する速さは N に比例するという．

(1) 時間を t，比例係数を k とおいて微分方程式を立て N と t の関係を求めよ．ただし，$t=0$ の時の個体数を $N=N_0$ とする．

(2) $t=1$ の時には $N=2N_0$ に増加するという．$t=8$ の時の N を求めよ．

(宇都宮大 2007) (m20076114)

0.473 2 次実行列 $A=\begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) $p=q=\dfrac{1}{2}$ のとき, A^n $(n=2,3,4,\cdots)$ を求めよ

(はこだて未来大 2007) (m20076301)

0.474 実ベクトルを空間 $\boldsymbol{R}^3$ において,$\boldsymbol{R}^3$ の部分集合 $V=\left\{\begin{pmatrix} a \\ -a \\ b \end{pmatrix}\middle| a,b\in\boldsymbol{R}\right\}$ を考える．

(1) $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$ ならば $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\in V$ となることを示せ．

(2) V が $\boldsymbol{R}^3$ の部分ベクトル空間であることを示せ．

(3) V の直交補空間を求めよ．

(はこだて未来大 2007) (m20076302)

0.475 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^3}{\sqrt{x}}$

(はこだて未来大 2007) (m20076303)

0.476 $I=\displaystyle\int_0^{2a} x\sqrt{2ax-x^2}dx(a>0)$ とおくとき, 以下の問に答えよ．

(1) $I=\displaystyle\int_{-a}^{a}(t+a)\sqrt{a^2-t^2}dt$ となることを示せ．

(2) $I=a\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-t^2}dt$ となることを示せ．

(3) I の値を求めよ．

(はこだて未来大 2007) (m20076304)

0.477 $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル場 $\boldsymbol{V} = (xy, yz, zx)$ に対して，$\mathrm{div}\boldsymbol{V}$ と $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ をそれぞれ求めよ．ただし，$\mathrm{div}\boldsymbol{V}$ は $\nabla \cdot \boldsymbol{V}$，$\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ は $\nabla \times\ \boldsymbol{V}$ とそれぞれ表現されることがある．

(はこだて未来大 2007)　　(m20076305)

0.478 曲面 $\{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3\ :\ z = x^2 + xy + y^2\}$ の点 $(1, -1, 1)$ における法ベクトルを求めよ．

(はこだて未来大 2007)　　(m20076306)

0.479 微分方程式 $y' - y = e^{2x}\cos x$ を解け．

(はこだて未来大 2007)　　(m20076307)

0.480 微分方程式 $y'' - 3y' + 2y = -e^{2x}\sin x$ について以下の問に答えよ．

(1) 基本解をすべて求め, それらの 1 次独立性を確かめよ．　(2) 特殊解を求めよ．

(はこだて未来大 2007)　　(m20076308)

0.481 行列式 $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & 8 \\ 8 & 4 & 7 & 10 \\ 11 & 6 & 9 & 19 \\ 10 & 6 & 8 & 18 \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2007)　　(m20076401)

0.482 行列 $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \\ 9 & 10 & 8 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(東京海洋大 2007)　　(m20076402)

0.483 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(東京海洋大 2007)　　(m20076403)

0.484 次の積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{3x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1}dx$　　(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x \sin x}$　$(\tan x = t$ とおく$)$

(東京海洋大 2007)　　(m20076404)

0.485 $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - 3x$ の極値を求めよ．

(東京海洋大 2007)　　(m20076405)

0.486 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D xe^{y^2}dxdy\ ,\quad D = \{(x, y)\ |\ 0 \leqq\ x \leqq \sqrt{y}\ ,\ 0 \leqq\ y \leqq\ 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (x + y)^2 dxdy\ ,\quad D = \{(x, y)\ |\ x^2 + y^2 \leqq\ 1\}$

(東京海洋大 2007)　　(m20076406)

0.487 行列 $\begin{pmatrix} 17 & -15 \\ -15 & 17 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(和歌山大 2007)　　(m20076501)

0.488 線形変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって，直線 $x+2y=1$ がどのような図形に移されるか，その図形の表す式を求めなさい．

(和歌山大 2007)　　(m20076502)

0.489 連立方程式 $\begin{cases} x-y+2z=0 \\ x+y+\ \ z=0 \\ 3x+y+kz=0 \end{cases}$ が，$x=y=z=0$ 以外の解をもつように定数 k を定めなさい，また，そのときの解を媒介変数を用いて表しなさい．

(和歌山大 2007)　　(m20076503)

0.490 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x - e^{-x}}$ を求めなさい．

(和歌山大 2007)　　(m20076504)

0.491 曲面 $z=\sqrt{x^2+y}$ の $(x,y)=(1,3)$ における接平面の方程式を求めなさい．

(和歌山大 2007)　　(m20076505)

0.492 次の 2 重積分の値を求めなさい． $\displaystyle\iint_D -2xe^{1-y}dxdy \quad D=\{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1 \ ,\ 0 \leqq y \leqq 1-x^2\}$

(和歌山大 2007)　　(m20076506)

0.493 次の微分方程式の一般解を求めなさい．

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=2$　　(2) $y+x\dfrac{dy}{dx}=0$　　(3) $\dfrac{dy}{dx}+y=x$　　(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-5\dfrac{dy}{dx}=0$

(和歌山大 2007)　　(m20076507)

0.494 (1) 周期 2π の周期関数 $f(x)=\pi^2-x^2\ (-\pi \leqq x<\pi)$ のフーリエ級数を求めなさい．

(2) (1) の結果を利用して，$1-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{12}$ を示しなさい．

(和歌山大 2007)　　(m20076508)

0.495 次の極限値を求めなさい．ここで i は虚数単位とする．

(1) $\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{z^3+1}{z+i}$　　(2) $\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{z^2+1}{z-i}$

(和歌山大 2007)　　(m20076509)

0.496 複素平面上において，$z=\pm 1$ および $z=\pm i$ を内部に含み，正の向きに一周する単一閉曲線を C とする．このとき，次の積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int_C \frac{\sin \pi z}{(z-1)^2}dz$　　(2) $\displaystyle\int_C \frac{z^2}{z^4-1}dz$

(和歌山大 2007)　　(m20076510)

0.497 袋の中に，数字 0 の書かれたカードが 2 枚と，数字 1 の書かれたカードが 3 枚入っている．この袋から続けて 2 枚カードを取り出したとき，1 枚目のカードの数字を X，2 枚目のカードの数字を Y とする．このとき，取り出したカードは袋に戻さない．確率 $P(X=1)$ および $P(Y=1)$ を求めなさい．また，X と Y は独立な確率変数といえるか，理由をつけて答えなさい．

(和歌山大 2007)　　(m20076511)

0.498 確率変数 X の確率密度関数が $f(x)=\begin{cases} 1-|x| & (\ |x| \leqq 1\ ) \\ 0 & (\ |x|>1\ ) \end{cases}$

で与えられるとき，$P(X \leqq a)=\dfrac{2}{9}$ となる a の値を求めなさい

(和歌山大 2007)　　(m20076512)

0.499 次の文章を読み，(1)〜(5) に答えよ．次の関数 $f(x)$ は，理学，工学の分野でしばしば現れる関数である．

$$f(x) = \frac{1}{x - ia}$$

ここで，a は正の実数 $(a > 0)$，i は虚数単位 $(i^2 = -1)$，x は実数，定義域は $-\infty < x < \infty$ である．

(1) 関数 $f(x)$ の実数部，および虚数部が，次のように書けることを示せ．

$$u(x) = \frac{x}{x^2 + a^2} \qquad\qquad v(x) = \frac{a}{x^2 + a^2}$$

(2) 関数 $u(x)$，および $v(x)$ の x に関する微分をそれぞれ計算せよ．

$$\frac{d\,u(x)}{dx} \qquad\qquad \frac{d\,v(x)}{dx}$$

(3) 関数 $u(x)$，および $v(x)$ のグラフの概形を図示せよ．

(4) 関数 $u(x)$，および $v(x)$ を $0 < x < a$ の範囲で定積分せよ．

$$\int_o^a u(x)dx \qquad\qquad \int_0^a v(x)dx$$

(5) $x = a$ における関数の値 $f(a)$ を記せ．さらに $f(a)$ を複素平面上にベクトルとして図示せよ．

(大阪市立大 2007)　　(m20076601)