[選択項目] 年度：2008 年

0.1 実数列 $a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$ が $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

を満たすとする． $\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく時, 次の設問に答えなさい．

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化する正則行列 $\boldsymbol{P}$ を求めなさい．

(2) $\boldsymbol{A}^n$ を求めなさい．

(3) $\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{a}_1$ が成り立つ（ただし，$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}$(単位行列) とする）ことに注意して，実数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めなさい．

(北海道大 2008)　　(m20080101)

0.2 z は複素数であり，$i = \sqrt{-1}$ である．また，u, v, x, y, a, b, c は実数とする．

(1) 次の計算をしなさい．　$(1+i)^7$

(2) 次の極限値は存在するか．存在する場合はそれを求めなさい．

$$\lim_{z \to 2i} \frac{z^3 - 2iz^2 + z - 2i}{z - 2i}$$

(3) 次の関数を $w = u + vi$ の形で表しなさい．ただし，$z = x + yi$ とし，$\overline{z}$ は z の共役複素数とする．

$$w = z\overline{z} + z - \overline{z}$$

(4) 次の関数が正則関数となるように係数を a, b, c 定めなさい．

$$w = ax^2y - 2y^3 + (bxy^2 + cx^3)i$$

(5) 次の関数は調和関数であることを確かめなさい．また，u を実部にもつ正則関数を求めなさい．

$$u = x^2 - 6xy - y^2$$

(北海道大 2008)　　(m20080102)

0.3 (1) 放物線を表す次の式

$$y = ax^2 + 1 \quad (a \neq 0) \qquad ①$$

を一般解とする，階数の最も低い微分方程式を求めなさい．

(2) 式①で表されるどの放物線とも直交する曲線の方程式を求めなさい．ここで，二つの曲線 C と C' が交点 (x, y) で直交するとは，(x, y) における C の接線と C' の接線とが直交することと定義する．

(3) (2) で求めた曲線のうち，原点を通るものを求め，それがどんな曲線であるかを述べなさい．

(北海道大 2008)　　(m20080103)

0.4 (1) 次の関数 $f(x)$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$ のフーリエ級数を求めなさい．

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

(2) 次の関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(k)$ を

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

とし，$i = \sqrt{-1}$ とする．次の関数のフーリエ変換 $F(k)$ を求めなさい．

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

(北海道大 2008)　　(m20080104)

0.5 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \sin(x^3 + 2)$ (2) $y = x \log x$

(北見工業大 2008) (m20080201)

0.6 次の積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx$ ($t = x^2 + 2x + 2$ と置け)

(2) $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\,dx$

(北見工業大 2008) (m20080202)

0.7 $y = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 1$ とする．

(1) グラフの概形をかけ． (2) $-\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq 2$ のとき，y の最大値と最小値を求めよ．

(北見工業大 2008) (m20080203)

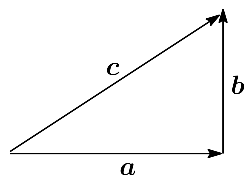
0.8 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ をベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積とし，$||\boldsymbol{a}||$ を $\boldsymbol{a}$ の長さとする．このとき $||\boldsymbol{a}||^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$ であり，また，零ベクトル $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が直交すれば $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ であった．

(1) $\boldsymbol{a} = (-1, \sqrt{3}, 2)$，$\boldsymbol{b} = (\sqrt{3}, 1, 2)$ のとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ とする．$\mathbf{0}$ でない $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が直交するとき

$$||\boldsymbol{c}||^2 = ||\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2 \quad \text{（ピタゴラス（三平方）の定理）}$$

を示せ．



(北見工業大 2008) (m20080204)

0.9 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とする．A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(北見工業大 2008) (m20080205)

0.10 xyz 空間に 2 つの平面

$$\alpha \;:\; x + 3y - 2z + 1 = 0$$
$$\beta \;:\; 2x - y + 3z - 2 = 0$$

があるとき，次の問いに答えなさい．

(1) 2 つの平面の単位法線ベクトルを求めなさい．

(2) (1) で求めた 2 つの平面の単位法線ベクトルの外積を求めなさい．

(3) 点 $(1, 2, -1)$ を通り，平面 α および β に垂直な平面の方程式を求めなさい．

(岩手大 2008) (m20080301)

0.11 (1) 次の行列の積を求めなさい．

(i) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ のとき，次のものを求めなさい．

(i) A の行列式 $|A|$ (ii) A の逆行列 A^{-1}

(3) 次の等式を証明しなさい．
$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2+d^2+1$$

(岩手大 2008)　　(m20080302)

0.12 次の微分方程式の一般解を求めなさい．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ である．

(1) $y' = y^2 + y$　　(2) $y + 2xy' = 0$　　(3) $y'' - 4y' + 3y = x$

(岩手大 2008)　　(m20080303)

0.13 球 $x^2+y^2+z^2 = a^2$ の内部と円柱 $x^2+y^2 = ax$ の内部の共通部分を考える．ただし，a は正の定数とする．次の問いに答えなさい．

(1) 球 $x^2+y^2+z^2 = a^2$ と円柱 $x^2+y^2 = ax$ を図示しなさい．

(2) 極座標 (r, θ) を用い $x = r\cos\theta$ ， $y = r\sin\theta$ とおいて，球および円柱の方程式を表しなさい．

(3) 共通部分の体積を求めなさい．

(岩手大 2008)　　(m20080304)

0.14 a を実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ．また，A が正の値の固有値と負の値の固有値の両方を持つための a の値の範囲を求めよ．

(秋田大 2008)　　(m20080401)

0.15 次の 1 次連立方程式を解け．
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

(秋田大 2008)　　(m20080402)

0.16 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin x - x}$ を求めよ．

(秋田大 2008)　　(m20080403)

0.17 次の積分を計算せよ．ただし，(2) では，$\displaystyle\int \log x dx = x\log x - x + C$ となることを使ってよい．

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}} dx$　　(2) $\displaystyle\int \log\frac{x-1}{(x+1)^2} dx$

(秋田大 2008)　　(m20080404)

0.18 n を整数とし，$I_n = \displaystyle\int x^n e^x dx$ とおく．

(1) n が正の整数のとき，I_n を I_{n-1} を用いて表せ．　　(2) I_3 を求めよ．

(秋田大 2008)　　(m20080405)

0.19 関数 $z = f(x, y)$ について，$\dfrac{\partial z}{\partial x} = x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = y$ が成り立っているとする．r を定数とし，$x = r\cos t$, $y = r\sin t$ とおく．このとき，$\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ．

(秋田大 2008)　　(m20080406)

0.20 (1) $x = u - w,\ y = u + w$ とおく．行列 $J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \end{pmatrix}$ と，その行列式を求めよ．

(2) D は平面内の領域で，次の 4 直線で囲まれているとする．

$$y = x\ , \quad y = -x\ . \quad y = x + 2\ , \quad y = -x + 4$$

このとき，積分 $\displaystyle\iint_D xy\, dxdy$ の値を求めよ．

(秋田大 2008) (m20080407)

0.21 x を実数とし，関数 $f(x)$ を $\quad f(x) = e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2} \quad$ と定義する．

(1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(2) $f'(x) = 0$ を満たすすべての実数 x および $f''(x) = 0$ を満たすすべての実数 x をそれぞれ求めよ．

(3) 関数 $y = f(x)$ の区間 $-5 \leqq x \leqq 5$ における増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べ，増減表を書き，グラフの概略を描け．

(4) 関数 $g(x)$ を $\quad g(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-x+2}^{x} (t-1)(t-3)f(t)dt \quad$ により定義する．このとき，$g(2)$ を求めよ．

(東北大 2008) (m20080501)

0.22 t を実数とし，2 つの関数 $x = x(t),\ y = y(t)$ により与えられる xy 平面上の点 $P\,(x(t), y(t))$ を考える．$x(t)$ および $y(t)$ が以下の連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \alpha y \end{cases}$$

および初期条件

$$(x(0), y(0)) = (1, 1)$$

を満足するとする．ただし，α は実数の定数である．以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha = 0$ のとき，与えられた連立微分方程式の解 $x(t)$ および $y(t)$ を求めよ．

(2) $\alpha \neq 0$ のとき，与えられた連立微分方程式の解 $x(t)$ および $y(t)$ を求めよ．

(3) $t\ (t \geqq 0)$ が変化するとき，点 P が描く曲線の概形を $\alpha > 0,\ \alpha = 0,\ \alpha < 0$ の場合について描け．

(東北大 2008) (m20080502)

0.23 行列 $\boldsymbol{A}$ および直交座標系の位置ベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ の逆行列を求めよ．

(2) $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．その際，固有ベクトルの大きさは 1 となるように求めよ．

(3) (2) で求めた固有値を $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha \leqq \beta \leqq \gamma)$ とする．2 次形式 $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 10z^2$ を標準形 $\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2$ に変換する線形変換 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{p}$ を与える直交行列 $\boldsymbol{U}$ を求めよ．

(4) 線形変換 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{p}$ により，平面 $x + y + z = 1$ はどのような図形に変換されるか．変換前後の図形の概形を描け．

(東北大 2008) (m20080503)

0.24 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(東北大 2008) (m20080504)

0.25 3次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 11 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ について，行列式 $\det(A)$ と逆行列 A^{-1} を求めよ.

(東北大 2008) (m20080505)

0.26 $f(x) = \sin^2 x$ を $x = 0$ の近くで3次までテーラー展開せよ.

(東北大 2008) (m20080506)

0.27 実数上の1階連続的微分可能関数 $f(x)$ がすべての点 x で $\dfrac{df}{dx}(x) = 0$ を満たすならば，$f(x)$ は定数関数であることを示せ.

(東北大 2008) (m20080507)

0.28 領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1\ ,\ x^2 \leq y \leq 1\}$ で $\displaystyle\iint_D xe^{y^2}\ dxdy$ の値を求めよ.

(東北大 2008) (m20080508)

0.29 関数 $\sqrt{1+x}\ \cos x$ の $x = 0$ におけるテイラー展開の x^3 までの項を求めよ.

(東京工業大 2008) (m20080801)

0.30 $u(x, y) = xy^2$, $v(x, y) = x + y$ とおく．次の積分 I の値を求めよ.

$$I = \iint_K \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy\ , \quad \left(K\ :\ \frac{x^2}{4} + y^2 \leq a^2 \right)$$

ただし，a は正の定数である.

(東京工業大 2008) (m20080802)

0.31 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) A の固有値を求めよ．また，各固有値に対する固有空間を求めよ.

(2) 次の条件をみたす実直交行列 T を用いて A を対角化せよ．T も具体的に求めよ.
条件： T の (i, j) 成分を t_{ij} とすると，$t_{12} = 2t_{22} > 0$ かつ t_{11}, t_{13} はともに正の数である.

(東京工業大 2008) (m20080803)

0.32 (1) a, b を実数とする．$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ x + y - 3z \\ 3x + ay + bz \end{pmatrix}$$

は線形写像であることを示せ.

(2) f の像が2次元となるとき，a, b はどのような条件をみたすか答えよ.

(東京工業大 2008) (m20080804)

0.33 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{d}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2a \\ 10 \end{pmatrix}$ とおく．ただし，a は実数とする．

(1) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$ が解を持つように a の値を定めなさい．

(2) a が (1) で定めた値であるとき，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$ を解きなさい．

(東京農工大 2008)　　(m20080901)

0.34 関数 $f(x,y)=3x^2+2y^3-6xy-3$ について，次の問に答えなさい．

(1) $f(x,y)$ の極値を求めなさい．

(2) $f(x,y)=0$ の表す曲線 C 上の点 $(1,\sqrt{3})$ における C の接線の方程式を求めなさい．

(東京農工大 2008)　　(m20080902)

0.35 (1) 領域 D ： $0 \leqq x \leqq 1$, $x^2 \leqq y \leqq 2-x$ における次の重積分を求めなさい．$\displaystyle\iint_D \frac{1}{x+1}\,dxdy$

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}\,dx$ を，$t=x-\dfrac{1}{x}$ と置いて求めなさい．

(東京農工大 2008)　　(m20080903)

0.36 x の関数 y について，次の問いに答えなさい．

(1) 微分方程式 $y'+y=1$ を解きなさい．

(2) 微分方程式 $2y'-y=-y^3$ $\left(\text{初期条件 } x=0,\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を，$z=\dfrac{1}{y^2}$ と置いて，z の微分方程式に書き換えて解きなさい．

(東京農工大 2008)　　(m20080904)

0.37 $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 5 & 9 & 7 \\ -8 & -14 & -11 \end{bmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) A の行列式 $\det(A)$ と階数 $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ．

(2) A^2 の行列式 $\det(A^2)$ と階数 $\mathrm{rank}(A^2)$ を求めよ．

(3) $T_A(x)=Ax$ で定まる写像 T_A ： $\boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ の像 $\mathrm{Im}\,T_A$ の次元を求めよ．

(4) $\mathrm{Im}\,T_A$ の基底で，次の条件を満たすものを構成せよ．

（条件）一つめのベクトルだけが T_A の核 $\mathrm{Ker}\,T_A$ に属する．

注 ： $\mathrm{Im}\,T_A=\{T_A(x)\mid x\in\boldsymbol{R}^3\},\quad \mathrm{Ker}\,T_A=\{x\in\boldsymbol{R}^3\mid T_A(x)=0\}$.

(電気通信大 2008)　　(m20081001)

0.38 $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ とおく．

(1) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立であることを証明せよ．

(2) $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ は $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表されるか表されないかを判定し，表される場合は $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表せ．

(電気通信大 2008)　　(m20081002)

0.39 (1) $u = \tan\dfrac{x}{2}$ とおく．$\sin x$，$\cos x$ を u を用いて表せ．

(2) $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$，　$I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$ を求めよ．

(電気通信大 2008)　　(m20081003)

0.40 C^2 級の関数 $f(x,y,z)$ が $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ だけの関数 $g(r)$ を用いて $f(x,y,z) = g(r)$ と表されるとする．$\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) Δf を $g'(r)$, $g''(r)$ を用いて表せ．

(2) $\Delta f = 0,\ g(1) = 1,\ g'(1) = 2$ のとき，$g(r)$ を求めよ．

(電気通信大 2008)　　(m20081004)

0.41 $f(z) = \dfrac{z^4}{z^6+1}$ について次の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ の極を極形式 $(re^{i\theta})$ の形で表せ．

(2) $z = \alpha$ を $f(z)$ の極とするとき，$f(z)$ の $z = \alpha$ における留数が $\dfrac{1}{6\alpha}$ であることを示せ．

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ を求めよ．

(電気通信大 2008)　　(m20081005)

0.42 以下の行列 A について，次の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) 次の条件を満たす 4 次正則行列 P を 1 つもとめよ:
「P の列ベクトルはそれぞれ A の固有ベクトルである.」

(横浜国立大 2008)　　(m20081101)

0.43 次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = x + y$　　　　(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2-x^2}{2xy}$

(横浜国立大 2008)　　(m20081102)

0.44 (1) 1 階常微分方程式の一般形は以下のように与えられる．

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad ①$$

この式の解の公式を導く．以下の記述の空欄を埋めなさい．

まず，同次（斉次）方程式の解を求める．① の同次方程式は以下のように表される．

$$y' + P(x)y = \boxed{\quad（ア）\quad}$$

この同次方程式は，変数分離形であるので，解は，任意の定数を C として，以下のように求められる．

$$y = C \cdot \boxed{\quad（イ）\quad} \qquad (\cdot \text{ は積を意味する.})$$

この結果を用いて，① の解を定数変化法で求める．従って，① の解を

$$y = C(x) \cdot \boxed{\quad (イ) \quad} \qquad ②$$

とおく．これを ① の左辺に代入して整理すると

$$y' + P(x)y = C' \cdot \boxed{\quad (イ) \quad} = Q(x)$$

すなわち，

$$C' = Q(x) \cdot \boxed{\quad (ウ) \quad}$$

両辺を積分して $C(x)$ を求め，② に代入すると，① の解の公式が以下のように求められる．

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

(2) (1) を参考にして，微分方程式を解く方法のひとつである，“定数変化法”について説明しなさい．

(3) 次の微分方程式を (1) の公式を用いて解きなさい．

$$y' - y = e^x$$

(横浜国立大 2008) (m20081103)

0.45 (1) 次の関数の n 次導関数を求めなさい． $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

(2) 次の関数の全微分 dz を求めなさい． $z = \dfrac{x^2 + y^2}{x + y}$

(3) 次の関数を $x = 1$ まわりで Taylor 展開し，4 回微分が含まれる項まで求めよ． $f(x) = e^{x^2}$

(横浜国立大 2008) (m20081104)

0.46 (1) m, n を整数とするとき，以下の式が成り立つことを示せなさい．

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

(2) 次の周期関数について解答しなさい．

$$f(x) = \begin{cases} -k & (-\pi < x < 0) \\ k & (0 < x < \pi) \end{cases} \quad , \quad f(x + 2\pi) = f(x) \qquad k > 0$$

この関数を以下のように無限級数で表すとき，その係数 a_0, a_n, b_n を求めなさい．さらに，求められる無限級数を $n = 7$ の項まで示しなさい．

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

(横浜国立大 2008) (m20081105)

0.47 次の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3}$

(千葉大 2008) (m20081201)

0.48 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい． $A = \begin{pmatrix} -8 & -2 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \\ -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(千葉大 2008) (m20081202)

0.49 三次元空間中に，球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ と円柱面 $x^2+y^2=2ax$ がある．球面に囲まれる領域が円柱により切り取られる立体の上半分 $(z \geq 0)$ の体積 V を求めたい．

(1) V が次のような重積分になることを図で示しなさい．

$$V=\iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy\,, \quad D=\{(x,y)\mid (x-a)^2+y^2 \leq a^2\}$$

(2) 極座標を用いると，領域 D は次のように表されることを示しなさい．

$$D=\left\{(r,\theta)\mid -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\,,\ 0 \leq r \leq 2a\cos\theta\right\}$$

(3) 極座標に変換して体積 V を求めなさい．

(千葉大 2008) (m20081203)

0.50 実数値関数 $f(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で連続であり，次の関数方程式を満たすとする．

$$f(x)=1+\int_0^x (t-x)f(t)dt$$

(1) $f(0)$, $f'(0)$ を求めなさい．また $f(x)$ の満たす微分方程式を求めなさい．

(2) $f(x)$ の満たす微分方程式を解きなさい．

(千葉大 2008) (m20081204)

0.51 以下の４つの列ベクトルがあるとする．

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\,,\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}\,,\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}0\\a\\b\end{bmatrix}\,,\quad \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix}$$

(1) 三つの列ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ が一次独立となる条件を述べなさい．

(2) 次に (1) と異なり，三つの列ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ が一次従属だと仮定する．このとき，ベクトル $\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ の線形結合として表せますか？表せる場合はその式を示しなさい．表せない場合はその理由を説明しなさい．

(筑波大 2008) (m20081301)

0.52 列ベクトル $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}7\\9\\3\end{bmatrix}$ を二つの列ベクトル $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\,,\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}$ が張る空間に射影することを考える． いま $\boldsymbol{a}_1$ を第一列，$\boldsymbol{a}_2$ を第二列，としてもつ 3 行 2 列の行列を A とする．

(1) ３次元空間にベクトル $(\boldsymbol{b},\,\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_1)$ を示す図を描きなさい．

(2) $\boldsymbol{b}$ を $(\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_1)$ の張る平面へ射影する点を $p=A\overline{x}$ ，ここで $\overline{x}$ は $2\times\ 1$ 行列，とする．$\overline{x}$ を求める式が $A^TA\overline{x}=A^T\boldsymbol{b}$ で与えられる理由を説明しなさい．なお A^T は行列 A の転置をあらわす．

(3) この時射影された点 p の座標を示しなさい．

(4) この射影を与える $\overline{x}$ の成分 $\overline{x}=(\overline{x}_1\,,\,\overline{x}_2)^T$ を求めなさい．

(筑波大 2008) (m20081302)

0.53 自然対数の底 e は $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ と定義される．対数関数 $f(x)=\log x$ の x に関する微分が $1/x$ となることを微分の定義 $\displaystyle\frac{df(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log(x+\Delta x)-\log x}{\Delta x}$ に基づき示しなさい．

(筑波大 2008) (m20081303)

0.54 制約 $x^2+y^2-1=0$ の下で目的関数 $h(x,y)=xy-x$ の極値を求めることを考える．

(1) この制約を満たす点の軌跡，および目的関数の値を一定にする (x,y) の組み合わせの軌跡を描きなさい．

(2) 目的関数 $h(x,y)$ の極値を与える点を求めなさい．

(筑波大 2008) (m20081304)

0.55 大リーグのヤンキースが勝つ確率は 50% であるとする．しかし松井が打点をあげると勝つ確率は 70% にあがるとする．また各試合で松井が打点をあげる確率は 40% であるとする．

(1) 松井が打点をあげない時にヤンキースが勝つ確率を求めなさい．

(2) ヤンキースが負けた時に松井が打点をあげている確率を求めなさい．

（ 注意：答えは分数で示せば十分である．）

(筑波大 2008) (m20081305)

0.56 $f(x,y)=x^3-3xy+y^3$ の極値を求めなさい．

(筑波大 2008) (m20081306)

0.57 $z=x^2+2y^2$，平面 $x+y=1$，および 3 座標面で囲まれる立体の体積を求めなさい．

(筑波大 2008) (m20081307)

0.58 線形写像 $T : R^4 \to R^4$ の行列表示を $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ および T の像 $\mathrm{Im}(T)$ を求めよ．

(2) 行列 A^2 の階数 $\mathrm{rank}(A^2)$ および合成写像 $T\circ T$ の像 $\mathrm{Im}(T\circ T)$ を求めよ．

(3) 連立一次方程式 $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ を解け．

(筑波大 2008) (m20081308)

0.59 $u=\dfrac{y}{x}$ とおいて微分方程式 $2xyy'-y^2+x^2=0$ を解き，それがどのような曲線群を表すか述べよ．なお，$y'=\dfrac{dy}{dx}$ である．

(筑波大 2008) (m20081309)

0.60 線形空間 $\boldsymbol{V}$ の基底を $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4\}$，線形空間 $\boldsymbol{W}$ の基底を $\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3\}$ とする．$\boldsymbol{V}$ から $\boldsymbol{W}$ への線形写像 F が下記の関係を満たすとき，これらの基底に関する F の表現行列 M を求めよ．また，F による $\boldsymbol{V}$ の像 $F(\boldsymbol{V})$ の次元を求めよ．なお，$\boldsymbol{o}$ は零ベクトルを表す．

$F(\boldsymbol{a}_1)=-\boldsymbol{b}_1+2\boldsymbol{b}_2$, $F(\boldsymbol{a}_2)=\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_3$, $F(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)=F(\boldsymbol{o})$, $F(\boldsymbol{a}_3+2\boldsymbol{a}_4)=-\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+3\boldsymbol{b}_3$

(筑波大 2008) (m20081310)

0.61 定積分 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$ の値を，以下の 2 通りの方法で計算せよ．

(1) (a) $I=2\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$ を示せ．

(b) 積分変数を $x = \tan\dfrac{\theta}{2}$ に置換せよ $\left(\text{ヒント}:\cos\theta = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}\text{である}\right)$.

(c) 積分を実行して I を求めよ.

(2) (a) 複素数 $z = e^{i\theta}$ とおいたとき，$z + \dfrac{1}{z}$ を計算せよ.

(b) その結果を基に I を z に関する複素積分に変換せよ.

(c) 留数定理を用いて I を求めよ.

(筑波大 2008)　　(m20081311)

0.62　方程式 $x^3 - 1 = 0$ の 3 つの根を 1，α，β とし，$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha+\beta}{2} & \dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \dfrac{\alpha-\beta}{2} & \dfrac{\alpha+\beta}{2} \end{bmatrix}$ とする.

(1) A^3 を α，β を用いずに表せ.　　(2) A^2 の逆行列を，A を用いて表せ.

(3) A^7 を α，β を用いて表せ.　　(4) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(5) A を対角化せよ.

(筑波大 2008)　　(m20081312)

0.63　次の行列 A について問いに答えよ.　　$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -5 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正則行列 P は存在するか，理由をつけて答えよ.

(筑波大 2008)　　(m20081313)

0.64　V を有限次元のベクトル空間とし，$f\ :\ V \to V$ を線形変換とする．このとき，$\mathrm{Im}f^n = \mathrm{Im}f^{n+1}$ を満たす $n(\geq 1)$ が存在することを示せ．また，その n について $\mathrm{Ker}f^n = \mathrm{Ker}f^{n+1}$ が成り立つことを示せ．ただし，f^n は f の n 回の合成変換である.

(筑波大 2008)　　(m20081314)

0.65　$f(x) = e^{-(1/x)}(x > 0)$ とおき，その $n(\geq 1)$ 階導関数を $f^{(n)}(x)$ で表すとき，　$\dfrac{x^{2n}f^{(n)}(x)}{f(x)}$ は x の $(n-1)$ 次多項式であることを示せ.

(筑波大 2008)　　(m20081315)

0.66　(1) $t = \sqrt{y^2 - x^2}$ と置換することにより，次の積分を計算せよ．ただし，$x > 0$ とする.

$$\int_x^\infty \frac{y}{1+y^2}\frac{dy}{\sqrt{y^2-x^2}}$$

(2) 次の累次積分を計算せよ.　　$\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^\infty \frac{y}{1+y^2}\frac{dy}{\sqrt{y^2-x^2}}$

(筑波大 2008)　　(m20081316)

0.67　(1) 極座標変換により，次の積分を計算せよ.　　$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

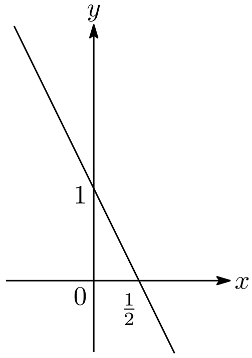
(2) 上の結果を用いて，次の値を求めよ.　　$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

(筑波大 2008)　　(m20081317)

0.68 例を参考にして，(1) から (5) の各関数についてそれぞれ $x=0$ での傾きを求め，グラフを描け．

例：$y=-2x+1$

$x=0$ での傾きは -2，グラフは次の通り：



(1) $y=e^x$

(2) $y=\ln x$ （自然対数）

(3) $y=1/(1+x^2)$

(4) $y=\exp(-x^2)$

(5) $y=(e^x-e^{-x})/2$

(筑波大 2008)　　(m20081318)

0.69 いろいろな関数を，多項式で表現してみよう．ある関数 $f(x)$ が，

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

のように，定数 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ を用いて x の多項式であらわされるとしよう．このとき，

(1) $f(0)=a_0$，$f'(0)=a_1$，$f''(0)=2a_2$ であることを示せ．

(2) 0 以上の任意の整数 n について，$f^{(n)}(0)=n!\,a_n$ であることを示せ．ここで，$f^{(n)}(x)$ は，$f(x)$ を n 回，微分したものである（$f(x)$ の n 階導関数）．ゼロの階乗は 1 とする．

(3) $f(x)=\dfrac{f(0)}{0!}+\dfrac{f'(0)}{1!}x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ とできることを示せ．

(4) 関数 $\sin x$ は，このような多項式で表現できることがわかっている．具体的に $\sin x$ をこのような多項式で表現せよ．

(5) 関数 $\cos x$ や関数 e^x も，このような多項式で表現できることがわかっている．具体的に $\cos x$ と e^x をそれぞれ，このような多項式で表現せよ．

(6) 任意の実数 θ について，$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ となることを示せ，ただし，i は虚数単位とする．

(筑波大 2008)　　(m20081319)

0.70 $f(x,y,z)=x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}+1$ で与えられる関数 $f(x,y,z)$ の極値とその座標 (x,y,z) を求めよ．ただし，$x>0$，$y>0$，$z>0$ であり，かつ，$x+4y+9z=6$ の付加条件があるものとする．

(筑波大 2008)　　(m20081320)

0.71 積分 $\displaystyle\iiint_D dxdydz\,\ln\left(\alpha\sqrt{x^2+4y^2+9z^2}\right)$ を求めよ．

ただし，α は正の定数であり，$\ln x$ は x の自然対数を表している．

さらに積分領域 D は，$D=\{(x,y,z)\mid 1<x^2+4y^2+9z^2<4\}$ とする．

(筑波大 2008)　　(m20081321)

0.72 関数 $f(x)=(2e^x+a)^4$ が与えられている．$f(x)$ を x についてマクローリン展開（$x=0$ の周りでのテイラー展開）をして x^2 の項まで求めよ．ただし，a は定数である．

(筑波大 2008)　　(m20081322)

0.73 行列 A について以下の設問に答えよ．

$$A\equiv(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3)\equiv\begin{pmatrix}1&-\sqrt{2}&0\\-\sqrt{2}&1&-\sqrt{2}\\0&-\sqrt{2}&1\end{pmatrix}$$

(1) A を構成する 3 個の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は，1 次独立か 1 次従属か，理由を示して答えよ.

(2) A が正則かどうかを調べ，正則な場合は逆行列を求めよ.

(3) A の固有値と固有ベクトル（大きさを 1 に正規化したもの）をすべて求めよ.

(4) A を対角化する行列を与え，それを用いて対角化されることを示せ.

(筑波大 2008)　　(m20081323)

0.74 23 本の染色体に，ある突然変異が起こっているかどうかを調べたところ 5 か所に突然変異を認めた. ただし，1 つの染色体に複数の突然変異が起こることがあるとする．次の (1) から (3) に答えなさい.

(1) 突然変異の起こり方の総数 N は 22 個の青玉と 5 個の赤玉を 1 列に並べる順列の総数と等しいことを示し，N を求めなさい.

(2) 突然変異が 8 番染色体に 3 か所あり，残りの 2 か所は 8 番染色体以外である場合は何通りあるか答えなさい.

(3) この突然変異はどの染色体にも等しく起こりうると仮定した場合，(2) のような場合が起こる確率を計算しなさい.

(筑波大 2008)　　(m20081324)

0.75 (1) 方程式 $x^3 + 3x^2 - 5 = 0$ は，ただ 1 つの実数解をもち，その解は 1 と 2 の間にあることを証明しなさい.

(2) (1) で得られる実数解は無理数であることを証明しなさい.

(筑波大 2008)　　(m20081325)

0.76 次の微分方程式 (D) について (1) から (3) に答えなさい.

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0 \qquad \cdots\cdots \quad (D)$$

(1) $f'(x) = f(x)$ または $f'(x) = 2f(x)$ ならば，$f(x)$ は微分方程式 (D) の解であることを示しなさい.

(2) $f(x) = e^x$ および $f(x) = e^{2x}$ は微分方程式 (D) の解であることを示しなさい.

(3) 微分方程式 (D) の任意の解 $f(x)$ は，ある実数 a, b を用いて $f(x) = ae^x + be^{2x}$ と一意的に表せることを示しなさい.

(筑波大 2008)　　(m20081326)

0.77 点 $P(3, 1)$ と直線 $y = x$ について対称な点を Q，Q を原点を中心に反時計回りに 90° 回転した点を R とするとき，R の座標を求めよ.

(筑波大 2008)　　(m20081327)

0.78 集合 S の要素の個数を $n(S)$ で表す．A, B, C が集合で：

$$n(A \cup B \cup C) = 50 \qquad n(A \cap B \cap C) = 10$$
$$n(A \cap B) = 20 \qquad n(B) = 25 \qquad n(C) = 20$$

のとき．$n(A)$ がとりうる値の最小値・最大値を求めよ.

(筑波大 2008)　　(m20081328)

0.79 次の連立一次方程式を解け.
$$\begin{cases} 8x + 5y + 7z = 7 \\ 7x + 2y + 7z = 2 \\ 2x + 9y + 8z = -3 \end{cases}$$

(筑波大 2008)　　(m20081329)

0.80 $\sin 3\theta = \sin\theta$ となる正の θ で最小のものを求めよ．（解答は度，ラジアンのいずれで書いてもよい.）

(筑波大 2008)　　(m20081330)

0.81 $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^{2n})dx$（$n$ は 0 以上の整数）の値を n を使って表せ.

(筑波大 2008)　　(m20081331)

0.82 従来型テレビの画面の縦横比は３：４であり，新型テレビでは９：１６である．これについて，以下の問いに答えよ.

(1) 従来型テレビの３：４の映像全体を新型テレビの画面全体に引き伸ばして映すには，縦横いずれの方向に何倍拡大する必要があるか.

(2) デジタル一眼レフカメラで撮影した画像の縦横比は２：３である．この画像の縦横比を変えずに，できるだけ大きくテレビ画面に映す場合，画面全体に対する余白の面積比はいくらか．従来型テレビ，新型テレビのそれぞれの場合について求めよ.

(筑波大 2008)　　(m20081332)

0.83 以下の (1)〜(3) において，「前提」が正しい場合に「結論」が正しい例，正しくない例をそれぞれ1つずつ，a, b, c 等の文字の具体的な数値例で示せ．下の例も参照のこと.

- 正しい例／正しくない例が存在しない場合には解答欄に「なし」と記すこと.
- 考える数値は実数の範囲とし，$1\div 0$，$\sqrt{-1}$ のように実数として意味を持たない例は用いないこと.

	前提	結論	正しい例	正しくない例
例 1	$a>0$	$a=ab$	$a=b=1$	$a=b=2$
例 2	$x^2-3x+2=0$	$x>0$	$x=1$	なし

(1) 前提：$a>b,\ c>d$　　結論：$ac>bd$

(2) 前提：$a^2+b^2=1$　　結論：$2ab \leqq 1$

(3) 前提：$a>b>1$　　結論：$a^b>b^a$

(筑波大 2008)　　(m20081333)

0.84 次の連立不等式で示される領域 S について，以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} 3x+2y \leqq 18 \\ x+2y \leqq 10 \\ x \geqq 0 \\ 0 \leqq y \leqq 4 \end{cases}$$

(1) S の面積を求めよ.

(2) S 中で $x+y$ の値を最大にする点での x と y の値を求めよ.

(筑波大 2008)　　(m20081334)

0.85 $a+b$, $(1+2)\times 3$ のように演算子 $(+, -, \times, \div$ 等) を文字・数値・式の間に書く通常の数式の記法（中置記法）に対し，$ab+$ のように演算子を後ろに置く書き方を後置記法という．複雑な式の場合も，計算される順に式を組み立てていけばよい．下に例を示す.

$$\underbrace{\underbrace{(a+b)}_{ab+}\times\underbrace{(c-d)}_{cd-}}_{ab+cd-\times}\qquad \underbrace{a+\underbrace{b\times\underbrace{(c-d)}_{cd-}}_{bcd-\times}}_{abcd-\times+}\qquad \underbrace{\underbrace{a+\underbrace{b\times c}_{bc\times}}_{abc\times+}-d}_{abc\times+d-}$$

上の例にも見られるように，後置記法ではカッコがなくても演算順序を正しく表現できる.

- 後置記法の文字や数値の間には，見やすいように適宜カンマを入れる．例えば $1+23$ は $1,23+$, $12+3$ は $12,3+$ のように表す．
- 以下では後置記法の演算子としては，$+,-,\times$ の 3 種を用いる．べき乗は x^2 を $x,x\times$ ，x^3 を $x,x\times\ x\times$ のように，乗算の繰り返しとして表す．

(1) $6\times\ 5-4-3$ を後置記法で表せ．

(2) 後置記法で $4,4\times\ 3,2\times -,1+$ と表される式の値を求めよ．

(3) 後置記法で $a,a\times\ a+1+a,1-\times$ と表せる式を通常の数式で，できるだけ簡単な形に直して表せ．

(4) x^3+ax^2+bx+c と同値で，演算子数ができるだけ少ない式を後置記法で表せ．

(筑波大 2008)　　(m20081335)

0.86 1 直線上にない 3 点 O,A,B をとり，$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OB}$ とする．また，ベクトルの内積は $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$, 絶対値は $|\overrightarrow{a}|\ (=\sqrt{(\overrightarrow{a},\overrightarrow{a})})$ のように表し，$a=|\overrightarrow{a}|$, $b=|\overrightarrow{b}|$ とする．

O,A,B を含む平面上の任意の点 P は，適当な実数 p,q により：

$$\overrightarrow{OP}=p\overrightarrow{a}+q\overrightarrow{b}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

のように表すことができる．これについて，以下の問いに答えよ．

(1) 点 P が線分 AB（両端 A,B を含む）の上にあるとき，$(*)$ の p,q はどのような条件を満たすか．

(2) 点 P が線分 AB の中点のとき，$\overrightarrow{OP}$ を $(*)$ の形で表せ．

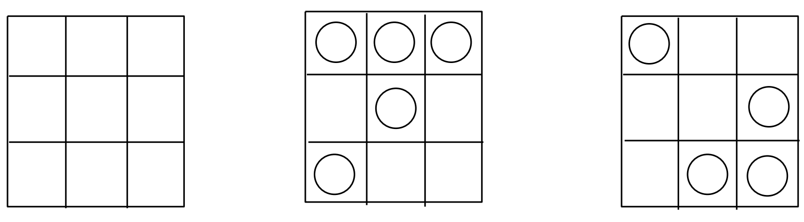
(3) $\angle AOB$ の 2 等分線と線分 AB の交点を P とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $(*)$ の形で表せ．

(4) A から直線 OB に下ろした垂線の足を P とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $(*)$ の形で表せ．

(5) $\triangle OAB$ が直角三角形のとき，$(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$ が取りうる値をすべて示せ．

(筑波大 2008)　　(m20081336)

0.87 下図の (i) のような $3\times\ 3$ のマス目があり，各マスには○を 1 個入れることができる．○を 0 個以上入れた結果を「盤面」と呼ぶ．例えば○が 1 個の盤面は，どのマスに○があるかに応じて全部で 9 通りある．縦, 横, 対角線のいずれかの列に○が 3 個並んだものを「完成盤面」，そうでないものを「未完成盤面」と呼ぶ．例えば下図 (ii) は完成盤面（上段及び対角線に○が 3 個並んでいる），(iii) は未完成盤面の例である．



(i)　　(ii)　　(iii)

これについて，以下の問いに答えよ．

(1) ○が 4 個ある盤面は全部で何通りあるか．

(2) そのうち，完成盤面は何通りあるか．

(3) ○が 5 個ある盤面のうち，未完成盤面は何通りあるか．

(筑波大 2008)　　(m20081337)

0.88 3 次関数 $f(x) = x^3 - x^2 - 74x + 144$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(-5), f(0), f(5)$ のそれぞれの値を求めよ．

(2) $f(x) = 0$ となる x の値をすべて求めよ．

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸，直線 $x = -1$，$x = 1$ が囲む面積を求めよ．

(筑波大 2008) (m20081338)

0.89 $f(x)$ は何回でも微分可能で，$f'(x) = -xf(x)$ を満たすとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f''(x)$ を，$f(x)$ を用いて表せ． (2) $f(0) = 1$ のとき，$f(x)$ を求めよ．

(筑波大 2008) (m20081339)

0.90 以下の関数を微分せよ．

(1) $y = \tan^{-1} \dfrac{x}{a}$ （a は 0 ではない定数） (2) $y = x^x$

(埼玉大 2008) (m20081401)

0.91 以下の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 1}{x(x-1)^3}\, dx$ (2) $\displaystyle\iint_D xdxdy\ ,\quad D = \{(x, y) \mid y \leqq\ 2x,\ x \leqq\ 2y,\ x + y \leqq\ 6\}$

(埼玉大 2008) (m20081402)

0.92 (1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の階数を求めよ． $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) 行列 $\boldsymbol{B}$ の逆行列を求めよ． $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(3) 行列 $\boldsymbol{C}$ の行列式を求めよ．ただし，解答は因数分解した形で表せ． $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 \end{pmatrix}$

(埼玉大 2008) (m20081403)

0.93 以下の微分方程式を解け．

(1) $(x^2 + 2xy)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$ (2) $2x\dfrac{dy}{dx} - y = -xy^3$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 2y = 10\cos x$ (4) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3x\dfrac{dy}{dx} + 4y = x$

(埼玉大 2008) (m20081404)

0.94 ベクトルの列 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \cdots$ を次のように定める．

(1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) n が奇数のとき $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ x_n \end{pmatrix}$

(3)　n が偶数のとき　$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_n + y_n \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$

自然数 k に対して，$\begin{pmatrix} x_{2k+1} \\ y_{2k+1} \end{pmatrix}$ を求めよ．

(埼玉大 2008)　　(m20081405)

0.95　$\boldsymbol{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ で表す．$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^2$ を長さ 1 のベクトルとして，直線

$$l = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0\}$$

に関する折り返し写像を T とする．すなわち，$T(\boldsymbol{x})$ は直線 l に関して $\boldsymbol{x}$ と線対称の位置にあるベクトルである．

(1)　$T(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ を用いて表せ．

(2)　$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ とするとき，$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる行列 A を求めよ．

(埼玉大 2008)　　(m20081406)

0.96　n を自然数とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{x \to 0} x(\log|x|)^n$ を求めよ．

(2)　広義積分 $\displaystyle\int_0^1 (\log x)^n \, dx$ の値を求めよ．

(埼玉大 2008)　　(m20081407)

0.97　関数 $f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$ について次の問いに答えよ．

(1)　偏導関数 $f_x(x, y)$，$f_y(x, y)$ を計算し，$f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ となる (x, y) をすべて求めよ．

(2)　$f(x, y)$ の極値を求めよ．

(埼玉大 2008)　　(m20081408)

0.98　(1)　$\dfrac{y+z}{a} - \dfrac{x+z}{b} = 0$ であり，かつ，$\dfrac{x+z}{b} - \dfrac{x+y}{c} = 0$ である．$x : y$ の比を a, b, c を用いて表せ（z は用いないこと）．

(2)　$f(x) = 2x^2 - 7x + 5$，$g(x) = x^2 - 3x - 7$ であるとする．「$f(x) > 0$　かつ　$g(x) < 0$」の条件を満たす実数 x の値の範囲を求めよ．

(群馬大 2008)　　(m20081501)

0.99　x, y の二次式 $8x^2 - 2xy - 3y^2 + kx + 9y - 6$ が一次式の積に因数分解できるように．実数 k の値を定めよ．

(群馬大 2008)　　(m20081502)

0.100　(1)　直線 $y = 3x + a$ が放物線 $y = x^2 + 4x + 1$ によって切り取られる線分の長さが 5 であるとする．このときの定数 a の値を求めよ．

(2)　直線 $y = 3x + b$ が円 $x^2 + y^2 - 8y - 20 = 0$ によって切り取られる線分の長さが 5 であるとする．このときの定数 b の値を求めよ．

(群馬大 2008)　　(m20081503)

0.101　以下の 2 つの設問に答えよ．

(1) 7 本のくじがあり，1 本だけが当たりである．ここで A 君と B 君の 2 人が交互に 1 本ずつくじを引いていくとする．すなわち，最初に A 君が 1 本のくじを引き，それがはずれであれば次に B 君が残りのくじの中から 1 本を引き，またはずれであれば再び A 君が残りのくじの中から 1 本を引くというように，当たりが出るまで交互に繰り返しくじを引く．この場合，A 君が当たりを引く確率はいくらか．

(2) 28 人のクラスで，12 人が女子である．このクラスで，くじ引きによって 3 人の委員を選ぶとき，3 人とも女子になる確率を求めよ．

(群馬大 2008)　　(m20081504)

0.102 k を実数とし，3 次の正方行列 A，3 次元列ベクトル $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}$ をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -10 \\ -2 & k & 8 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

とする．以下の各問に答えよ．

(1) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつための k についての必要十分条件を求めよ．

(2) 3 次元実ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ 内の部分空間 $V = \{A\boldsymbol{u}\ ;\ \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^3\}$ が 2 次元となるための k についての必要十分条件を求めよ．また，そのときの V の基底を一組求めよ．

(3) 前問 (2) の k に対し，行列 A の固有値および固有値に対応する固有空間の基底を一組求めよ．

(茨城大 2008)　　(m20081701)

0.103 $x > 0,\ y > 0$ とする．$a > 0,\ 0 < b < 1$ のとき，以下の各問に答えよ．

(1) 変数変換 $u = xy,\ v = \log \dfrac{y}{x}$ のヤコビ行列式 $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ．log は自然対数である．

(2) 直線 $y = ax,\ y = (a^2 + 1)x$，および曲線 $xy = b,\ xy = b^2$ で囲まれた領域 $D_{a,b}$ を xy–座標平面に図示せよ．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_{D_{a,b}} dxdy$ に (1) の変数変換を用いて，領域 $D_{a,b}$ の面積 $S(a, b)$ を求めよ．

(4) $\dfrac{\partial S}{\partial a} = \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0$ となる点 (a, b) を求めよ．その点で $S(a, b)$ が極値をとるかどうか判定せよ．

(茨城大 2008)　　(m20081702)

0.104 X, Y を 2 つの集合とし，X の任意の元 x に対して Y の元 y をただ 1 つ対応させる規則を，X から Y への写像という．集合 X から集合 Y への写像 $f : X \to Y$ は，次の条件 (i) を満たすとき単射であるといい，条件 (ii) を満たすとき全射であるという．特に，条件 (i),(ii) を同時に満たすとき全単射であるという．

(i) X の元 x_1, x_2 について，$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ である．

(ii) Y の任意の元 y に対し，$y = f(x)$ となる X の元 x が少なくとも 1 つ存在する．

また，X から Y への全単射が存在するとき，2 つの集合 X と Y は対等であるという．

(1) 2 つの写像 $f : X \to Y$，$g : Y \to Z$ の合成写像 $g \circ f : X \to Z$ が全単射ならば，f は単射，g は全射であることを示せ．

(2) 写像 $f : X \to Y$ は全射でなく，$g : Y \to Z$ は単射でないが，合成写像 $g \circ f$ が全単射となる例を 1 つ挙げよ．ただし，X, Y, Z はすべて空集合ではないとする．

(3) X, Y を元の個数がそれぞれ m, n の有限集合とする．X から Y への写像全体の集合 $F(X,Y)$ の元の個数を求めよ．また，$F(X,Y)$ に属する写像のなかで単射となるものの個数を求めよ．

(4) 自然数全体の集合 N と整数全体の集合 Z は対等であることを示せ．また，N と実数全体の集合 R は対等でないことを示せ．

(茨城大 2008)　　(m20081703)

0.105 次の連立不等式で表される領域を D とする．　$x + y \leqq 2$,　$0 \leqq y \leqq \sqrt{x}$

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．　(2) 領域 D 上の 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (1+y)\,dxdy$ を求めよ．

(茨城大 2008)　　(m20081704)

0.106 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) 各固有値に対し，固有空間の 1 組の基底を求めよ．

ここで，固有値 λ の固有空間とは，λ の固有ベクトル全体と零ベクトルからなるベクトル空間のことである．

(茨城大 2008)　　(m20081705)

0.107 $x = x(t),\ y = y(t)$ のとき，次の連立微分方程式を初期条件 $x(0) = 0,\ y(0) = 1$ のもとで解け．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}$$

(茨城大 2008)　　(m20081706)

0.108 n を正の整数とする．C は複素平面上の円 $|z| = \dfrac{1}{2}$ を正の向きに一周する閉曲線とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^n}\,dz$ を求めよ．

(2) $\dfrac{1}{z^n(z-1)} = \dfrac{a_1}{z} + \dfrac{a_2}{z^2} + \cdots + \dfrac{a_n}{z^n} + \dfrac{b}{z-1}$ を満たすような定数 $a_1, a_2. \cdots, a_n, b$ を求めよ．

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^n(z-1)}\,dz$ を求めよ．

(茨城大 2008)　　(m20081707)

0.109 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 4x_2 - 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ を解きなさい．

(山梨大 2008)　　(m20081801)

0.110 3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の各問 (1)(2) に答えなさい．

(1) $A^2,\ A^3$ を求め，さらに A^{10}を求めなさい．

(2) 行列 A の固有値をすべて求めなさい.

(山梨大 2008) (m20081802)

0.111 極限値 $\lim_{x \to 0} \dfrac{\log(1-x^2)}{x}$ を求めなさい. ただし, 対数関数は自然対数によるものとする.

(山梨大 2008) (m20081803)

0.112 座標平面上に曲線 $y = \cos x$ の $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分と x 軸とで囲まれた領域を D とし, 関数 $f(x) = e^{\sin x}$ を考える. ここに, e は自然対数の底とする.

(1) $\dfrac{df(x)}{dx}$ を求めなさい.

(2) α が定数のとき, 定積分 $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) \cos x \, dx$ を α の式で表しなさい.

(3) D における二重積分 $\displaystyle\iint_D f(x) \, dxdy$ の値を求めなさい.

(山梨大 2008) (m20081804)

0.113 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) A の階数を求めよ.

(2) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解全体のなす $\mathbb{R}^4$ の部分空間（すなわち解空間）W の次元を求めよ.

(3) W の基底を求めよ.

(信州大 2008) (m20081901)

0.114 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ. (2) A の固有ベクトルを求めよ. (3) A を対角化せよ.

(信州大 2008) (m20081902)

0.115 $xy-$ 平面上の連続関数 $f(x,y)$ を考える. f の 1 階偏導関数 $f_x(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ および $f_y(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ はともに $xy-$ 平面上で連続であるとする. このとき, ある $\theta_0 \in (0, 2\pi)$ が存在し,
$-f_x(\cos\theta_0, \sin\theta_0)\sin\theta_0 + f_y(\cos\theta_0, \sin\theta_0)\cos\theta_0 = 0$ となることを示せ.

(信州大 2008) (m20081903)

0.116 (1) $\lim_{x \to +0} x \log x = 0$ を示せ.

(2) $f(x)$ を区間 $[-1, 1]$ 上で定義された連続関数とする. このとき,

$$\lim_{n \to \infty} \left(\int_{-1/n}^{1/n} |f(x)|^n dx \right)^{1/n} = |f(0)| \qquad \text{となることを示せ.}$$

(信州大 2008) (m20081904)

0.117 関数 $F(x)$ は $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$ で与えられるものとする.

また, $\displaystyle\lim_{x \to \infty} F(x) = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることがわかっている.

(1) $\dfrac{dF(x)}{dx}$ を求めよ.　　　(2) $\displaystyle\int_x^\infty e^{-t^2}dt$ を $F(x)$ を用いて表せ.

(3) e^{-t^2} のマクローリン展開（$t=0$ の周りでのテイラー展開）を用いて，$x=0.1$ のときの $F(x)$ の値の近似値を有効数字 4 桁で求めよ.

(4) 次の定積分の値を求めよ. (a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-a^2t^2}dt$ （a は正の定数とする） (b) $\displaystyle\int_0^\infty t^2e^{-t^2}dt$

(新潟大 2008)　　(m20082001)

0.118 (1) 三角関数に対して次のような公式がある.

$$(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx \tag{a}$$

ここで，$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位とする. 式 (a), または，三角関数の加法定理，倍角公式などを用いて，次の式が成り立つことを証明せよ.

$$\cos 5x=16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x \tag{b}$$

(2) 式 (b) の両辺を x で微分することにより

$$\sin 5x=(16\cos^4 x-12\cos^2 x+1)\sin x \tag{c}$$

となることを証明せよ.

(3) $\cos\dfrac{\pi}{5}$ を求めよ.

(新潟大 2008)　　(m20082002)

0.119 2 次の正方行列 A の 4 つの成分は，それぞれ独立に 0 または 1 の値を確率 $\dfrac{1}{2}$ でとるものとする. 以下の問いに答えなさい.

(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ となる確率を求めなさい.

(2) $A={}^tA$ となる確率を求めなさい. ただし，${}^tA$ は A の転置行列を表す.

(3) $|A|=1$ となる確率を求めなさい. ただし，$|A|$ は A の行列式を表す.

(4) 確率変数 $X=|A^2|$ の期待値を求めなさい.

(長岡技科大 2008)　　(m20082101)

0.120 $z=x^2+y^2$ とする，以下の問いに答えなさい.

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めなさい.

(2) 空間の曲面 $z=x^2+y^2$ 上の点 (a,b,c) における接平面の方程式を求めなさい.

(3) 前問の接平面が点 $(0,0,-\sqrt{2})$ を通るような c の値を求めなさい.

(長岡技科大 2008)　　(m20082102)

0.121 $0<t<1$ として，空間の 4 点

$$A(t,\sqrt{1-t^2},0),\ B(t,-\sqrt{1-t^2},0),\ C(-t,0,\sqrt{1-t^2}),\ D(-t,0,-\sqrt{1-t^2})$$

を考える，以下の問いに答えなさい.

(1) AB の中点 E の座標を求めなさい.

(2) $\triangle CDE$ の面積 S を t で表しなさい.

(3) 四面体 $ABCD$ の体積 V を t で表しなさい.

(4) V を最大にする t の値とその最大値を求めなさい.

(長岡技科大 2008)　　(m20082103)

0.122 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$（$\omega$ は正の定数）について，以下の問いに答えよ.

(1) 一般解を求めよ.

(2) 初期条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = 2$ を満たす解を求めなさい.

(3) 前問で求めた解が $y(1) = 0$ を満たすような ω の値を求めなさい.

(長岡技科大 2008)　　(m20082104)

0.123 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 (\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3)$ とする．$i = 1, 2, 3$ に対して，λ_i に対応する固有ベクトルで，その第 1 成分を 1 としたものを $\boldsymbol{u}_i$ とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $i = 1, 2, 3$ に対して，λ_i および $\boldsymbol{u}_i$ を求めよ.

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 + c\boldsymbol{u}_3$ を満たす定数 a, b, c を求めよ.

(3) 自然数 n に対して，$A^n \boldsymbol{u}_1$ および $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(金沢大 2008)　　(m20082201)

0.124 $f(x) = \sqrt{1+x}\ (x > -1)$ とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $f'(x),\ f''(x)$ および $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

(2) マクローリンの定理を適用し，$f(x)$ の $(n-1)$ 次近似多項式およびその剰余項 R_n を求めよ.

(3) (2) で得られた結果を $n = 2$ の場合に用いて，$\sqrt{1.01}$ の近似値を 1.005 としたときの誤差を評価せよ.

(金沢大 2008)　　(m20082202)

0.125 (1) 変数変換 $x = u,\ y = uv$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ を求めよ.

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dxdy,\ D = \{(x, y) \mid 1 \leqq\ x \leqq\ 2,\ 0 \leqq\ y \leqq\ x\}$ を求めよ.

(3) $R > 1$ とし，$D_R = \{(x, y) \mid 1 \leqq\ x \leqq\ R,\ 0 \leqq\ y \leqq\ x\}$ とおく．実数 α について，極限値 $\displaystyle\lim_{R \to +\infty} \iint_{D_R} \frac{x^\alpha}{x^2 + y^2} dxdy$ 　が存在するかどうか調べよ．存在する場合はその値を求めよ.

(金沢大 2008)　　(m20082203)

0.126 $A = \begin{pmatrix} a+b & a & b \\ b & b+c & c \\ a & c & a+c \end{pmatrix}$ とする．次に答えよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & a & c \end{pmatrix} B$ となる行列 B を一つ見つけよ.

(2) A の行列式 $\det A$ を求め，A の逆行列が存在する為の必要十分条件を a, b, c の条件として答えよ.

(金沢大 2008)　　(m20082204)

0.127 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする．次に答えよ．

(1) A の階数（ランク）を求めよ．

(2) ユークリット空間 $\boldsymbol{R}^4$ の線形変換 f を $f(x) = Ax$ で定める．このとき，f の像の正規直交基底を一組求めよ．

(金沢大 2008)　　(m20082205)

0.128 $\boldsymbol{R}^2$ 上の関数 $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ の極値を求めよ．

(金沢大 2008)　　(m20082206)

0.129 $D = \{(x,y)\ ;\ 0 \leq y < x \leq 1\}$ とする．$0 < \alpha < 1$ のとき，広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{(x^2-y^2)^\alpha} dxdy$ の値を求めよ．

(金沢大 2008)　　(m20082207)

0.130 実数 x と正の整数 n に対して，$R_n(x)$ を

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} + R_n(x)$$

によって定める．ただし，$\arctan x$ は $y = \tan x \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数である．このとき，次に答えよ．

(1) $1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-t^2)^{n-1} = \dfrac{1-(-t^2)^n}{1+t^2}$ を用いて，$R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-t^2)^n}{1+t^2}dt$ となることを示せ．

(2) $|x| \leq 1$ のとき $R_n(x) \to 0\ (n \to \infty)$ となることを示せ．

(金沢大 2008)　　(m20082208)

0.131 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\log_e\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}x^{\frac{1}{x}}$

(3) $\displaystyle\int \sin^{-1} x dx$　　(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x}$

(富山大 2008)　　(m20082301)

0.132 関数 $f(x,y,z) = \exp\{-(x^2+2y^2+z^2)\}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f = c$（c は定数）よって与えられる曲面を等位面という．$f = \dfrac{1}{e}$（e は自然対数の底）となる等位面を S とし，等位面 S が xy 平面と交わる曲線を xy 平面上に図示せよ．

(2) $f = c$ の等位面上の点における法線ベクトルは grad $f(= \nabla f)$ で与えられる．等位面 S 上の点 $P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ における単位法線ベクトルを求めよ．

(3) 等位面 S 上の点 $P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ における接平面の方程式を求めよ．

(富山大 2008)　　(m20082302)

0.133 θ を任意の実数，I を単位行列，$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ として，行列 A が $A = (\cos\theta)I + (i\sin\theta)\sigma_1$ で与えられるとき，以下の問いに答えよ．ここで i は虚数単位とする．

(1) ${\sigma_1}^2$ を計算せよ.

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) σ_2 の固有値 λ と固有ベクトル ν を求めよ.

(4) $A\sigma_2 A^{-1}$ を計算して σ_2 を対角化するように θ を決定せよ．ただし，θ の範囲を $0 < \theta < \pi/2$ とする．また，このときの θ の値を用いた行列 A により，σ_2 の固有ベクトル ν を変換したベクトル $u = A\nu$ を求めよ.

(富山大 2008)　　(m20082303)

0.134　変数変換 $t = x - y,\ s = x + y - 2$ により，重積分

$$\iint_D (x+y)dxdy \quad D = \{(x,y) \mid 0 \leq y,\ y \leq x \leq 2-y\}$$

の値を求める．以下の問いに答えよ.

(1) x と y をそれぞれ，t と s で表し，$\dfrac{\partial x}{\partial t},\ \dfrac{\partial x}{\partial s},\ \dfrac{\partial y}{\partial t},\ \dfrac{\partial y}{\partial s}$ を求めよ.

(2) $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial x}{\partial s} \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(3) (2) の結果を用いて，$\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy$ を t と s で変数変換し，その値を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{2-y} (x+y)dxdy$ の値を求め，(3) の結果と一致することを確かめよ.

(富山大 2008)　　(m20082304)

0.135　次の微分方程式の解を $y = f(x)$ の形で求めよ．ただし，(1)〜(3) については一般解，また，(4) については特殊解とする.

(1) $x^3 \dfrac{dy}{dx} + y = 0$　　(2) $x\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2+y^2}$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x+2y}{2x+y-1}$　　(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} - 10y = 0 \quad \left(x = 0 \text{ の時} \quad y = 0,\ \dfrac{dy}{dx} = 7\right)$

(富山大 2008)　　(m20082305)

0.136　定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^3+x-3}{x^4-x^3-x^2-x-2}dx$ を求めよ.

(富山大 2008)　　(m20082306)

0.137　$\boldsymbol{R}^4$ の部分空間 V を　$V = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} x-y=0 \\ y-z=0 \\ x-z=0 \end{matrix} \right\}$　で定義するとき，V の次元を求めよ.

(富山大 2008)　　(m20082307)

0.138　開区間 $(-1,1)$ の上で定義された写像　$f(x) = \begin{cases} x & (-1 < x \leqq 0) \\ 1-x & (0 < x < 1) \end{cases}$

は $(-1,1)$ から $(-1,1)$ への全単射であることを示せ.

(富山大 2008)　　(m20082308)

0.139　$\boldsymbol{R}$ を実数全体からなる集合とする．$\boldsymbol{R}$ の空でない有界部分集合 A の上限を $\sup A$ で表す.

(1) $\boldsymbol{R}$ の空でない有界部分集合 A, B に対して $C=\{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}$ とおくとき
$\sup C=\sup A+\sup B$ 　　であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{X}$ を空でない集合とし，f, g を $\boldsymbol{X}$ 上の有界な実数値関数とすれば,
$\sup\{f(x)+g(x) \mid x \in \boldsymbol{X}\} \leqq \sup\{f(x) \mid x \in \boldsymbol{X}\}+\sup\{g(x) \mid x \in \boldsymbol{X}\}$ 　　であることを示せ.

(富山大 2008)　　(m20082309)

0.140 (1) 関数 $f(x)=\log(1+x)$（ただし $x>-1$）の 1〜4 階の導関数（つまり $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, および $f^{(4)}(x)$ ）をそれぞれ求めよ.

(2) (1) の結果にもとづき, 上で定義された関数 $f(x)$ の n 階の導関数を推測し，$f^{(n)}(x)$ が実際に推測された関数で表現されることを，数学的帰納法を用いて証明せよ.

(3) (2) の結果を使い，関数 $f(x)$ のマクローリン展開（$x=0$ でのテーラー展開）を，無限級数の和の形 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} の形\right)$ で求めよ,

(4) (3) の結果を用いて，関数 $g(x)=\log\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)$（ただし $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$）のマクローリン展開を，無限級数の和の形で求めよ（経過を書く必要はあるが，証明の必要はなし）.

(福井大 2008)　　(m20082401)

0.141 関数 $f(x)=(x^2+4x)e^{-x}$ について以下の問いに答えよ.

(1) 1 階の導関数 $f'(x)$，2 階の導関数 $f''(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) $0 \leq x<\infty$ の範囲で増減表を書き，$y=f(x)$ のグラフを描け.

(福井大 2008)　　(m20082402)

0.142 (1) 次の関数を積分せよ. 　（途中の計算式も書くこと）

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} \qquad\qquad \text{ヒント ： } \sqrt{x^2+a}=t-x \text{ とおく.}$$

(2) 次の定積分を求めよ. 　（途中の計算式も書くこと）}

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad\qquad (a>0)$$

なお，必要に応じて三角関数の二倍角の公式 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ を用いよ.

(福井大 2008)　　(m20082403)

0.143 円 $x^2+(y-b)^2=a^2$ 　$(b>a>0)$ が x 軸のまわりに回転することによって生ずる回転面で囲まれる立体の体積 v を求めよ. （途中の計算式も書くこと）

(福井大 2008)　　(m20082404)

0.144 次の行列 $\boldsymbol{B}$ がある. 以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{B}$ の固有値と固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{B}^3$ を計算せよ.

(3) $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{B}$ の絶対値の小さい方の固有値に対応する固有ベクトルとする時，$\boldsymbol{B}^{10}\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(福井大 2008)　　(m20082405)

0.145 次のような連立方程式がある．以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad \text{ここで,} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

行列 $\boldsymbol{A}$ は下の 3 つの列ベクトルを使って，次のように表現できる．

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3) \qquad \text{ここで,} \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の階数（ランク）を求めよ．

(2) 連立方程式の解を求めよ．

(3) 列ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ は一次独立か一次従属か答えよ．もしそれらが一次従属なら，$\boldsymbol{a}_1$ を $\boldsymbol{a}_2$ と $\boldsymbol{a}_3$ の一次結合として表現せよ．

(福井大 2008)　　(m20082406)

0.146 次のような微分方程式の一般解をできるだけくわしく誘導せよ．

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0$　　(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 9x = 0$　　(3) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} + 5x = 0$

(福井大 2008)　　(m20082407)

0.147 次のような完全微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $ydx + xdy = 0$　　ただし，変数分離法を用いないこと．

(2) $(x^2 - 2xy - y^2)dx + (3y^2 - 2xy - x^2)dy = 0$

(福井大 2008)　　(m20082408)

0.148 (1) 次の行列の逆行列を求めよ．$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

(2) α を実数とする. このとき, 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(a) A の行列式を計算せよ．　　(b) A の階数を求めよ．

(3) 三つのベクトル $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ が線形従属（一次従属）となるような x の値を求めよ．

(福井大 2008)　　(m20082409)

0.149 以下に示されるような関数 $y(x)$ に関する常微分方程式が与えられている．

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha\frac{dy}{dx} + 2y = 4$$

ここで，α は実数であるとし，以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha = 5,\ y(0) = 0,\ \dfrac{dy(0)}{dx} = -2$ とするとき，微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ．

(2) $x \to \infty$ とするとき，$\alpha > 0$ という条件下では $y(x)$ がある有限の定数 y_p に収束することが知られている（すなわち $\lim_{x\to\infty} y(x) = y_p$）．そのときの y_p の値を求めよ．

(3) (2) の条件の下で $y(x)$ が収束するとき，$y(x)$ が振動しながら収束するための α の条件を求めよ．

(福井大 2008)　　(m20082410)

0.150 次の関数を因数分解しなさい．

(1) $9x^4 - 2x^2y^2 + y^4$　　(2) $x^3 - 7x - 6$　　(3) $x^3 - 6x^2 - 12x + 8$

(福井大 2008)　　(m20082411)

0.151 次の値を求めよ．

(1) $\cos 55^\circ + \cos 65^\circ + \cos 175^\circ$　　(2) $\log_3 9\sqrt{5} + \dfrac{1}{2}\log_3 \dfrac{1}{5}$　　(3) $\left(\sqrt[3]{27^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(4^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$

(福井大 2008)　　(m20082412)

0.152 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{5^x - 3^x}{5^x + 3^x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \Big(\cos x\Big)^{\frac{1}{x^2}}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \Big(1 + 8x\Big)^{\frac{1}{x}}$

(福井大 2008)　　(m20082413)

0.153 次の関数を微分しなさい．

(1) $y = \sin^{-1} x$　　(2) $y = x^x$　　(3) $y = \log\sqrt{x^2 + a^2}$

(4) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$　　(5) $y = a^x$

(福井大 2008)　　(m20082414)

0.154 次の曲線の概形を図示せよ．　$y = x^2 e^{-x}$

(福井大 2008)　　(m20082415)

0.155 次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$　　(2) $\dfrac{1-x}{x^2}$　　(3) $\tan x$　　(4) $e^x \cos x$

(福井大 2008)　　(m20082416)

0.156 定積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mt \cos nt\, dt$ を以下の手順で求めよ．ただし，m, n 自然数とする．

(1) $\sin mt\ \cos nt$ を三角関数の和または差の形に変形せよ．

(2) $m = n$ の時の定積分を求めよ．

(3) $m \neq n$ の時の定積分を求めよ．

(福井大 2008)　　(m20082417)

0.157 関数 $y = e^{-x}\sin x$, $x \geq 0$ について以下の問いに答えよ．

(1) $0 \leq x \leq 4\pi$ の範囲で，この関数の概形を示せ．このとき $y = e^{-x}$ の概形も示せ．

(2) $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で，この関数のグラフと x 軸とに囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) k を整数とする時，$k\pi \leq x \leq (k+1)\pi$ の範囲で，この関数のグラフと x 軸とに囲まれた部分の面積を求めよ．

(4) $x \geq 0$ の範囲で，グラフと x 軸との間に囲まれた面積の総和を求めよ．

(福井大 2008)　　(m20082418)

0.158 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の計算をしなさい.

(1) AB　　(2) BA　　(3) $2A + 3\,{}^tB$ （ただし，${}^tB$ は B の転置行列を示す）

(福井大 2008)　　(m20082419)

0.159 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を λ，固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする時，以下の問いに答えよ.

(1) $A, \lambda, \boldsymbol{x}$ の間に成立する関係を示せ.

(2) 固有値を求めよ.

(3) 各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2008)　　(m20082420)

0.160 (1) 関数 $f(x) = \sin x \cos x$ の原点を中心とするテイラー級数を求めよ.

(2) 複素数 $\left(\dfrac{\sqrt{3} + i}{1 + i} \right)^{14}$ を $x + iy$ の形に改めよ. （i は虚数単位）

(3) 2 変数関数 $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$ の極値を求めよ.

(静岡大 2008)　　(m20082501)

0.161 以下の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\int_1^5 \frac{\log x}{x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{5 + x^2}$

(3) $\displaystyle\iint_D \log(x^2 + y^2)\,dxdy\ ,\quad D = \{(x, y) \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$

(静岡大 2008)　　(m20082502)

0.162 (1) 常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = xe^{x+y}$ の一般解を求めよ.

(2) 常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\cos x}{\sin x}y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ の初期条件 $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$ を満たす解を求めよ.

(静岡大 2008)　　(m20082503)

0.163 平面 π : $ax + 2y - z = 6$ と直線 l : $\dfrac{x - 4}{-1} = \dfrac{y - 3}{5} = \dfrac{z + 2}{7}$ について以下の問いに答えよ.

(1) π と l が平行となるように a の値を定めよ.

(2) 平面 π 内にあって直線 l と平行で l に最も近い直線 m の式を求めよ.

(3) 2 直線 l, m の距離を求めよ.

(静岡大 2008)　　(m20082504)

0.164 次の微分方程式を解け.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = y(1 - x)$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} = y(1 - y)$　　(3) $\dfrac{dy}{dx} = y(1 - y^2)$

(静岡大 2008)　　(m20082505)

0.165 微分方程式

(E_1)　　$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2y = x$$

に対して，

(E_2)　　$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2y = 0$$

は，(E_1) に対応する斉次方程式と呼ばれる. 以下の問いに答えよ.

(1) 方程式 (E_2) について，変数変換 $x = e^t$ を行うことによって得られる方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた方程式の一般解を求めよ．また，方程式 (E_2) の一般解も示せ．

(3) (2) の結果を用いて，方程式 (E_1) の一般解を求めよ．

(静岡大 2008) (m20082506)

0.166 $(0, 2\pi)$ において，$f(x) = x + \sqrt{2}\cos x$ の極値を求めよ．なお，極大値・極小値の区別も明記すること．

(静岡大 2008) (m20082507)

0.167 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$ を求めよ．

(静岡大 2008) (m20082508)

0.168 次の行列式を求めよ． $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 9 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & 8 & 8 \end{vmatrix}$

(静岡大 2008) (m20082509)

0.169 次の行列は対角化できるか調べよ． $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(静岡大 2008) (m20082510)

0.170 次の 2 行 2 列の行列 A $\quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) この行列 A の固有値 λ を求めよ．

(2) 上記 (1) の固有値 λ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{X}$ を求めよ．

(岐阜大 2008) (m20082601)

0.171 2 変数関数 $f(x, y)$ がラプラス方程式 $\Delta f = 0$ を満たすとき，$f(x, y)$ を調和関数という． 次の関数 $f(x, y)$ は調和関数か否か調べよ． ここで，2 変数 (x, y) の偏微分作用素（ラプラシアン）Δ は，$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ で定義する．

(1) $f = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ (2) $f = e^x \sin y$

(岐阜大 2008) (m20082602)

0.172 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $y' = y^2 + 2y - 3$ (2) $y'' + 6y' + 10y = 0$

(岐阜大 2008) (m20082603)

0.173 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) この行列の 2 つの固有値 λ_1 と λ_2 を求めよ．

(2) A^{100} を求めよ．

(岐阜大 2008) (m20082604)

0.174 2 つの円柱面 $x^2 + y^2 = 1$ および $x^2 + z^2 = 1$ によって囲まれる部分の体積を求めよ．

(岐阜大 2008) (m20082605)

0.175 次の 3 次元実ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が線形独立であるために x が満たすべき条件を答えなさい.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x-1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ x-1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} x-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(岐阜大 2008)　　(m20082606)

0.176 次の 3 次行列 A について (1)〜(3) に答えなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値を求めなさい.

(2) A の各固有値に対応する固有ベクトルを求めなさい.

(3) A を対角化する正則行列 P と $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(岐阜大 2008)　　(m20082607)

0.177 (1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x \log_e x = 0$ となることを示しなさい.　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \log_e x \, dx$ を求めなさい.

(岐阜大 2008)　　(m20082608)

0.178 $X = \{x \,:\, |x| \leq \pi,\ x \in \boldsymbol{R}\}$, $Y = \{y \,:\, |y| \leq 1,\ y \in \boldsymbol{R}\}$ とする. 以下で定義する写像 f について (1),(2) に答えなさい. ただし, $\boldsymbol{R}$ は実数全体の集合を表すものとする.

$$f \,:\, X \to Y\,, \quad x \mapsto \sin x\,.$$

(1) f が単射であるか否かを理由と共に答えなさい.

(2) f が全射であるか否かを理由と共に答えなさい.

(岐阜大 2008)　　(m20082609)

0.179 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ がある.

(1) $|A|$ の値を求めよ.　　(2) A の逆行列を求めよ.

(3) A の固有値を求めよ.　　(4) A の固有ベクトルを求めよ.

(岐阜大 2008)　　(m20082610)

0.180 以下の文において, (2)〜(7) に適切な式または値を入れよ.

微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{a}{\dfrac{dx}{dt} + b} \cdots (1)$ 　を解くことを考える. $y = \dfrac{dx}{dt}$ とおくと, 式 (1) は y と t に関する

微分方程式 $\boxed{\quad (2) \quad}$ に変換される. これを解くと式 $\boxed{\quad (3) \quad}$ が得られる.

一方, $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt}$ であることを用いると, 式 (1) は y と x に関する微分方程式 $\boxed{\quad (4) \quad}$ に変換される. これを解くと式 $\boxed{\quad (5) \quad}$ が得られる.

さて, 新幹線の新しい車両では, 力行時の加速度は速度 $\nu[m/s]$ によって変り $\dfrac{37.5}{\nu + 50}[m/s^2]$ と表せる. すなわち, $\nu = 0\,[m/s]$ での加速度は $0.75[m/s^2]$ であり, 速度が大きくなるにつれて加速度は低下す

る．この車両が停止時から加速して $75[m/s](=270[km/h])$ に達するまでの時間は $\boxed{\quad (6) \quad}$ $[s]$ であり，その間に走行する距離は $\boxed{\quad (7) \quad}$ $[m]$ である．

(岐阜大 2008)　　(m20082611)

0.181　次の関数 $f(x)$ を x について微分せよ．

(1) $f(x)=\sqrt{e^{2x}+1}$　　(2) $f(x)=\dfrac{x}{1+\sin 3x}$

(岐阜大 2008)　　(m20082612)

0.182　以下の文を読んで，設問に答えよ．

ブール変数（2 値変数）x,y,z,u がある．論理式 $x \leqq\ y$ は，$x=1$ かつ $y=0$ のとき成り立たず（値 0 をとり），その他のときは成り立つ（値 1 を取る）ものとする．変数 u は，$x \leqq\ y$ が成り立ちかつ $y \leqq\ z$ が成り立つとき値 1 をとり，その他のときは値 0 を取るものとする．

(1) 変数 x,y,z,u の関係を表す真理値表を作成せよ．

(2) 変数 u を変数 x,y,z を用いた論理式で表せ．論理記号として，論理和，論理積，否定の記号，および括弧を必要に応じて用いるものとする．

(岐阜大 2008)　　(m20082613)

0.183　次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_x^1 y^2 e^{xy}dy\right)dx$

(岐阜大 2008)　　(m20082614)

0.184　次の連立 1 次方程式が解をもつように定数 a を定め，そのときの一般解も求めよ．

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & w & = & -1 \\ 2x & + & y & + & 4z & + & 2w & = & 4 \\ 3x & + & y & + & 3z & + & 2w & = & 1 \\ & & 2y & & & + & w & = & a \end{array}\right.$$

(岐阜大 2008)　　(m20082615)

0.185　y は x の関数であるとして，次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $y''+y=0$　　(2) $y''-7y'+12y=6x^2+5x+18$　　(3) $y''-4y'+4y=\cos x$

(岐阜大 2008)　　(m20082616)

0.186　次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

(岐阜大 2008)　　(m20082617)

0.187　表面積一定の直方体で体積最大なものは立方体であることを示せ．

(岐阜大 2008)　　(m20082618)

0.188 1 から 9 までの数字が書かれた 9 枚のカードから 2 枚のカードを取り出して並べ，2 けたの数字を作る．ただし，1 枚目に引いたカードを十の位，2 枚目に引いたカードを一の位とする，以下の問いに答えよ．

(1) 2 けたの数字は全部で何通りできるか求めよ．

(2) 2 けたの数字が偶数である確率を求め，既約分数で答えよ．

(3) 2 けたの数字が 3 の倍数である確率を求め，既約分数で答えよ．

(4) 2 けたの数字の期待値を求めよ．

(豊橋技科大 2008)　　(m20082701)

0.189 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -18 & -7 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1，λ_2 を求めよ，ただし，$\lambda_1 > \lambda_2$ とせよ．

(2) 各固有値 λ_1，λ_2 に対する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ とするとき，a と b を求めよ．

(3) (2) で求めた固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ を用いて，行列 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ を定義する．このとき，$\boldsymbol{PQ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる行列 $\boldsymbol{Q}$ を求めよ．

(4) 行列 $\boldsymbol{QAP}$ を求めよ．

(5) 自然数 n に対して，$\boldsymbol{QA}^n\boldsymbol{P}$ を求めよ．

(豊橋技科大 2008)　　(m20082702)

0.190 不定積分 $I_n = \displaystyle\int \cos^n t\,dt \quad (n = 0, 2, 4, \cdots)$ とする．以下の問いに答えよ．ただし，積分定数は省略すること．

(1) I_0 と I_2 を求めよ．

(2) $I_4 = \dfrac{1}{4}\left(\sin t \cos^3 t + 3I_2\right)$ であることを示せ．

(3) $n \geqq 2$ のとき，I_n を I_{n-2} を用いた式として求めよ．

(4) 定積分 $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt \quad (n = 0, 2, 4, \cdots)$ を求めよ．

(豊橋技科大 2008)　　(m20082703)

0.191 水 1ℓ を 2 つの瓶 A, B に適当に分け，瓶 A, 瓶 B に入っている水の量をそれぞれ x_0，y_0 とする．

「瓶 A 中の水の 1 割と，瓶 B 中の水の 2 割を，それぞれ小瓶 C, D へ抜き取り，小瓶 C の水を瓶 B に，小瓶 D の水を瓶 A へ入れる」という手続きを n 回繰り返した後，瓶 A, 瓶 B に入っている水の量をそれぞれ x_n，y_n とするとき, 以下の問いに答えよ．

(1) x_n，y_n を次のように行列を用いた漸化式で表すとき，行列 T を求めよ．

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

(2) 行列 T の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(3) x_n，y_n を，x_0，y_0 および n を用いて表せ．

(4) $n \to \infty$ としたときの，x_n/y_n の値を求めよ．

(名古屋大 2008)　　(m20082801)

0.192 次のサイクロイド曲線に対して，以下の問いに答えよ．

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases} \qquad (a > 0,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

(1) 曲線の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(2) $\theta = \pi$ における接線の方程式を求めよ．

(3) 曲線を x 軸のまわりに回転させるときにできる立体の体積を求めよ．なお，次の公式を用いてもよい．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & (n:\text{偶数}) \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n:\text{奇数}) \end{cases}$$

ただし，$n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots 2 & (n:\text{偶数}) \\ n(n-2)(n-4)\cdots 1 & (n:\text{奇数}) \end{cases}$

(名古屋大 2008)　　(m20082802)

0.193 微分方程式 $y'' - 5y' + 6y = 0$ を解き，y の一般解を求めよ．

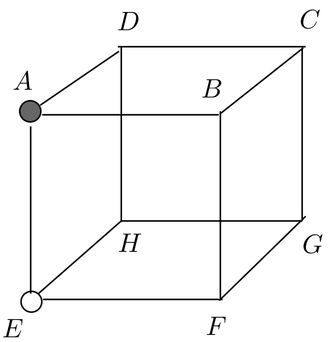
(名古屋大 2008)　　(m20082803)

0.194 図 1 のように，各頂点に A〜H の名前がつけられた，一辺の長さ a の立方体を考える．最初に，黒いピンと白いピンが，それぞれ頂点 A，頂点 E に設置してある．サイコロを 4 回振り，1 回目と 2 回目のサイコロの出た目の合計分だけ，黒いピンを $A \to B \to C \to D \to A \cdots$ と移動させ，3 回目と 4 回目のサイコロの出た目の合計分だけ，白いピンを $E \to F \to G \to H \to E \cdots$ と移動させることとする．次の問いに答えよ．

(1) 黒いピンが頂点 C に止まる確率を求めよ．

(2) 黒いピンと白いピンの距離が $\sqrt{2}a$ となる確率を求めよ．

(3) 黒いピンと白いピンの距離の期待値を求めよ．なお，無理数は無理数のままで解答して良い．



(名古屋大 2008)　　(m20082804)

0.195 次の連立一次方程式を解け．
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 6x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

(名古屋工業大 2008)　　(m20082901)

0.196 3 次の正方行列 A を $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

(1) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 $P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$ で各列ベクトル $\boldsymbol{p}_i$ の長さが 1 となる行列 P をひとつ求めよ.

(2) (1) で求めた P の転置行列を ${}^tP$ とする．この時 ${}^tPP = E_3$（E_3 は単位行列）を示し，さらに $P^{-1} = {}^tP$ となる事を示せ.

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して $({}^tP\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, P\boldsymbol{b})$ が成り立つ性質を用いて，$\boldsymbol{y} = {}^tP\boldsymbol{x}$ とした時に，次の等式を示せ.

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (({}^tPAP)\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}))$$

(4) $\boldsymbol{x}$ の成分を $x_i (i = 1, 2, 3)$ とした時，x_1, x_2, x_3 の 3 つの一次式 $f_i(x) = f_i(x_1, x_2.x_3) (i = 1, 2, 3)$ があり，$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = f_1(x)^2 - f_2(x)^2 + 2f_3(x)^2$ となる事を示せ.

(名古屋工業大 2008)　　(m20082902)

0.197 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ とし，次の計算結果を最も簡明な形で示せ.　　$\Delta \left(\tan^{-1} \dfrac{y}{x} \right)$

(名古屋工業大 2008)　　(m20082903)

0.198 $\{(x, y)\ ;\ x^2 + y^2 - ax = 0,\ y > 0\}$ $(a > 0)$ 上の 1 点を P とし，原点を O とする.

(1) 直線 OP と x 軸のなす角を θ とした時，OP の長さを求めよ.

(2) 領域 $D = \{(x, y)\ ;\ x^2 + y^2 - ax \leq 0,\ y \geq 0\}$ を極座標で表せ.

(3) D を (2) の領域とした時，次の定積分を求めよ.　　$I = \displaystyle\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$

(名古屋工業大 2008)　　(m20082904)

0.199 次の行列 A に対して

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 固有値方程式をたて，固有値をすべて求めよ．ただし，固有値はすべて整数値とする.

(2) 固有ベクトルをすべて求め，それを用いてこの行列を対角化（$P^tAP = E$: E は単位行列）する行列 P を求めよ．ただし，P は直交行列である.

(三重大 2008)　　(m20083101)

0.200 次の関数 $f(x)$ が最小値をとるときの x の値 x_0 を a の関数 $x_0(a)$ として求め，その関係を図で示せ．また，関数 $f(x)$ のグラフの概形を書け.

$$f(x) = \frac{1}{2}(a-1)x^2 + \frac{1}{4}x^4 \qquad (a > 0)$$

(三重大 2008)　　(m20083102)

0.201 次の極限および級数を求めよ．（ただし，答だけでなく，なぜそうなるのかの説明も必要である．）

(1) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-an}$　　（ただし，$a > 0$）

(三重大 2008)　　(m20083103)

0.202 3 次行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & k & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ と，ベクトル　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$　$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$　$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

に対して次の問いに答えよ．ただし k は実数である.

(1) $A\boldsymbol{a}$, $A\boldsymbol{b}$ を求めよ． (2) $A\boldsymbol{a}$, $A\boldsymbol{b}$ は一次独立であることを示せ．

(3) $A\boldsymbol{c}$ が $A\boldsymbol{a}$, $A\boldsymbol{b}$ の一次結合として表されるとき，k の値を求めよ．

(奈良女子大 2008) (m20083201)

0.203 関数 $f(x) = \dfrac{x+1}{x(x-1)} + \dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)} \quad (x \neq 0, 1, 2)$ に関して次の問いに答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ．

(奈良女子大 2008) (m20083202)

0.204 $xy-$ 平面上の 2 つの曲線

$$C_1 \ : \ y = \sin x \qquad (0 \leqq \ x \leqq \ 2\pi)$$

$$C_2 \ : \ y = \sin(x-a) \qquad (0 \leqq \ x \leqq \ 2\pi)$$

について考える．ただし，a は正の定数で，$0 < a \leqq \pi$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $a = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，C_1, C_2 のグラフの概形を描け．

(2) $0 < x \leqq \ 2\pi$ の範囲において，C_1 と C_2 の二つの交点の x 座標を，それぞれ t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$ とする．t_1, t_2 を a で表わせ．

(3) $t_1 \leqq \ x \leqq \ t_2$ の範囲で，C_1 と C_2 によって囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ．

(奈良女子大 2008) (m20083203)

0.205 次の行列の逆行列を求めよ．ただし，a, b, c, d は実数であり，$ad - bc \neq 0$ である．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2008) (m20083204)

0.206 次の行列の固有値と規格化された固有ベクトルを求めよ． $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(奈良女子大 2008) (m20083205)

0.207 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} \quad (a > 0)$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0)$

(奈良女子大 2008) (m20083206)

0.208 変数 t の関数 $x(t)$ の満たす微分方程式に関する以下の問いに答えよ．

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ． $\dfrac{d^2x}{dt^2} + {\omega_0}^2 x = 0$ ここで，ω_0 は正の定数とする．

(2) 次の微分方程式を考える． $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\dfrac{dx}{dt} + {\omega_0}^2 x = 0$ ここで，ω_0 および λ は正の定数とする．$\lambda^2 - {\omega_0}^2 = -\omega^2 < 0$ （ω： 正の定数）である場合の一般解を求めよ．

(3) (1) および (2) の微分方程式で記述できると思われる物理現象の例を一つずつあげよ．

(奈良女子大 2008) (m20083207)

0.209 3 次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とする．$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は，直交座標系の x, y, z 軸方向の単位ベクトルである．また，$\boldsymbol{r}$ の大きさを $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) r のこう配，∇r を求めよ．ただし，$\nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ である．∇r は，$\mathrm{grad}\, r$ とも書く．

(2) 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ に対して

$$\nabla\times\ (\nabla\phi(\boldsymbol{r}))$$

を求めよ．ただし，$\phi(\boldsymbol{r})$ は連続な 2 階偏導関数を持つスカラー関数である．また，$\nabla\times\ (\nabla\phi(\boldsymbol{r}))$ は $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\phi(\boldsymbol{r}))$ とも書く．

(奈良女子大 2008)　　(m20083208)

0.210 $x>0$ に対して $\log x=\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ と定義して，$\log x$ の性質を定積分の性質から導きたい．(1)〜(2) に答えよ．

(1) 定積分の性質を用いて，等式 (a)〜(d) を示せ．

(a) $\log x_1x_2=\log x_1+\log x_2 \qquad (x_1,x_2>0)$

(b) $\log x^{\frac{n}{m}}=\dfrac{n}{m}\log x \qquad (m,n$ は正整数$)$

(c) $\log e=1 \qquad \left(e=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$

(d) $\dfrac{d}{dx}\log x=\dfrac{1}{x}$

(2) 上で定義した $\log x$ の逆関数を $\exp(x)$ とするとき，以下の等式 (e)〜(h) を示せ．

(e) $\exp(x_1+x_2)=\exp(x_1)\exp(x_2)$

(f) $\exp(1)=e$

(g) $\exp\left(\dfrac{n}{m}\right)=e^{\frac{n}{m}} \qquad (m,n$ は正整数$)$

(h) $\dfrac{d}{dx}\exp(x)=\exp(x)$

(京都大 2008)　　(m20083301)

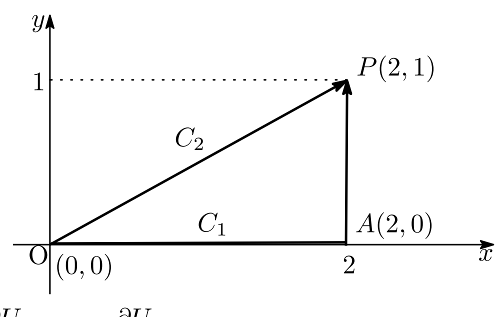
0.211 (x,y) 平面上に 2 つの関数：

$$F(x,y)=2x+ay\ , \qquad G(x,y)=2x+5y$$

が定義されている．ここに a は定数である．(1)〜(4) に答えよ．

(1) 図に示すように，折れ線 OAP に沿う経路を C_1，また，直線 OP に沿う経路を C_2 とするとき，次の 2 つの線積分の値を求めよ．

$$I_1=\int_{C_1}(Fdx+Gdy)\ , \qquad I_2=\int_{C_2}(Fdx+Gdy)$$



(2) $F=\dfrac{\partial U}{\partial x}$，$G=\dfrac{\partial U}{\partial y}$ なる関数 $U(x,y)$ が存在するように定数 a を定めよ． また，そのときの $U(x,y)$ を求めよ．ただし定数項の差は無視してよい．

(3) (2) の関数 $U(x,y)$ が存在する場合，点 O と点 P を結ぶいかなる経路 C を選んだとしても線積分：

$$I=\int_C (Fdx+Gdy)$$

は経路によらず同じ値をもつことを示せ．

(4) (2) の関数 $U(x,y)$ が存在する場合，単位円周上 $(x^2+y^2=1)$ でのその極値を考える．

(a) 点 (x,y) が単位円周上に沿って動くとき，微分 dx と微分 dy の関係を示せ．

(b) 点 (x,y) が単位円周上に沿って動くとき，$Fdx+Gdy=0$ となる点において $U(x,y)$ は単位円周上で極値をとることを示せ．

(c) 関数 $U(x,y)$ が極値をとるときの x,y の値および $U(x,y)$ の値をそれぞれ求めよ．

(京都大 2008)　　(m20083302)

0.212 事象 X と事象 Y について，X と Y が両方とも生起するという事象を $X\cap Y$, X が生起しないという事象を $\overline{X}$ で表すことにする．事象 X と事象 Y が独立であれば，X と $\overline{Y}$ も独立である．事象 X が生起する確率を $P(X)$ と表し，X が生起したときに Y が生起する条件付確率を $P(Y|X)$ と表す．

泥棒が入るか，地震が発生するか，いずれかが生じると作動する警報機がある．この警報機は誤作動することもあるという．警報機が作動するという事象を A，泥棒が入るという事象を B, 地震が起こるという事象を E で表すとき，

$$P(A)=0.36\ ,\qquad P(B)=0.2\ ,\qquad P(E)=0.1\ ,$$

$$P(A|B\cap E)=0.9\ ,\qquad P(A|B\cap\overline{E})=0.7\ ,\qquad P(A|\overline{B}\cap E)=0.9$$

であることがわかっている．事象 B と E は独立に生起すると仮定したとき，(1)〜(3) に答えよ．

(1) 警報機が作動したときに泥棒が入った確率 $P(B|A)$ を求めよ．

(2) 警報機が誤作動する確率 $P(A|\overline{B}\cap\overline{E})$ を求めよ．

(3) 地震が発生したときに，必ずテレビでニュース速報が放送されるとする．ニュース速報が流れたという事象を R とするとき，　$P(R|E)=1\ ,$　　$P(R|\overline{E})=0.1$　　であるとする．
警報機が作動し，かつ，ニュース速報が流れたときに，泥棒が入った確率 $P(B|A\cap R)$ を求めよ．ただし，$A\cap B$ と $R\cap E$，$A\cap B$ と $R\cap\overline{E}$，$A\cap\overline{B}$ と $R\cap E$，$A\cap\overline{B}$ と $R\cap\overline{E}$ はそれぞれ独立とする．

(京都大 2008)　　(m20083303)

0.213 次の行列 A に対して，(1)〜(3) に答えよ．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ただし，I は 3 次の単位行列，$\mathbf{0}$ は 3 次元の零ベクトルを表す．

(1) 行列 A の固有値とその固有ベクトルの組 $(\lambda,\boldsymbol{p})$ の中で

$$(A-\lambda I)\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}\quad \text{かつ}\quad \boldsymbol{q}\neq\mathbf{0}$$

が成立するベクトル $\boldsymbol{q}$ が存在するような組を 1 つ求めよ．

(2) (1) の結果を用いて，$AP=PB$ が成立するような上三角行列 B と正則行列 P を求めよ．

(3) (2) の結果を用いて，A^n の各成分を n の式で表せ．

(京都大 2008)　　(m20083304)

0.214 関数

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - a - ibx}$$

について，以下の設問に答えよ．ただし，x は実変数，a と b は正の実定数，$i = \sqrt{-1}$ である．

(1) $f(x)$ を変形して

$$f(x) = A\left(\frac{1}{x - z_1} - \frac{1}{x - z_2}\right)$$

としたとき，z_1 および z_2 を求め，複素平面上に図示せよ．ただし，A, z_1, z_2 は複素数の定数である．

(2) ζ を実数とし，積分

$$I(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - \zeta}\, dx$$

のコーシーの主値，すなわち

$$I(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{-\infty}^{\zeta - \varepsilon} \frac{f(x)}{x - \zeta}\, dx + \int_{\zeta + \varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x - \zeta}\, dx\right) \qquad ①$$

を考える．式 ① の積分路は実数軸上にあるが，図 1 で示した複素平面内における積分路 C_1, C_2, C_3 に沿った複素積分を利用することにより，$I(\zeta)$ を求めることができる．ここで，C_1 は原点を中心とした半径 R の下半円周，C_2 は ζ を中心とした半径 ε の下半円周，C_3 はこれらの半円周とそれらを結ぶ実数軸の線分で構成される閉曲線であり，いずれも図中の矢印に沿って積分するものとする．

(a) C_1 に沿った積分路の $R \to \infty$ での極限値を求めよ．

(b) ε が十分小さいとき，C_2 に沿った積分値を求めよ．

(c) C_3 に沿った積分値を求めよ．

(d) 以上の結果から，$I(\zeta)$ を求めよ．

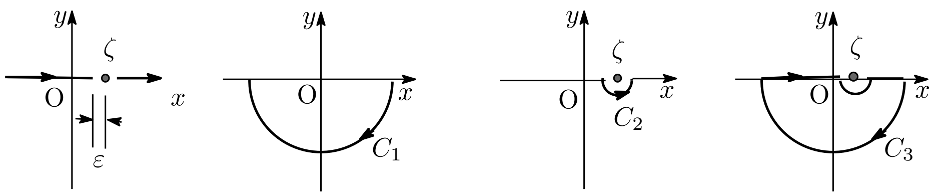


図 1　左から順に，式 ① の積分路，C_1, C_2, C_3 を示す．

(京都大 2008)　　(m20083305)

0.215 $f(z)$ が $z = a$ を中心とする単位円 C の内部および周上で正則であるとき，以下を証明せよ．

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(a + e^{i\theta})d\theta\ , \qquad n = 1, 2, \cdots$$

(京都大 2008)　　(m20083306)

0.216 t を実変数とし，複素数平面上において $z = -1$ を内部に含む単純閉曲線を C とするとき，以下の積分を求めよ．

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{ze^{tz}}{(z+1)^3}\, dz$$

(京都大 2008)　　(m20083307)

0.217 複素数平面から実軸の $|x| \leq 1$ の部分を取り除いて出来る領域を D とする．$z \in D$ に対し，関数 $C(z)$ を　$C(z) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dt}{z - t}$,　$z \in D$（t は実変数）　で定義する．

(1) $C(z)$ は $|z|>1$ において正則であることを示せ． （ [ヒント] $z \in D$ と実軸上の区間 $[-1,1]$ までの最短距離を d とするとき，$|h| \leq d/2$ なら，$|z+h-t| \geq d/2$ が成り立つ．）

(2) 被積分関数を t の冪級数に展開し，項別積分により，$|z|>1$ における $C(z)$ のローラン展開を求めよ．

(京都大 2008) (m20083308)

0.218 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の固有方程式の重解を λ_0 とする．固有値 λ_0 に対応する 2 つの固有ベクトルで，正規直交系をなすものを 1 組求めよ.

(京都工芸繊維大 2008) (m20083401)

0.219 (1) α を正の定数とするとき，$\displaystyle\lim_{x \to +0} x^{\alpha} \log x = 0$ を示せ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\, dx$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2008) (m20083402)

0.220 関数 $f(x,y) = x^y \ \ (x>0,\ y>0)$ について次の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の 1 階および 2 階の偏導関数をすべて求めよ.

(2) 曲面 $z = f(x,y)$ の点 $(e, 1, f(e,1))$ における接平面の方程式と法線の方程式を求めよ.

(京都工芸繊維大 2008) (m20083403)

0.221 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{xy^2}{1+x^2+y^2}\, dxdy$ の値を求めよ.
ただし，$D = \{(x,y) \mid x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0,\ x^2+y^2 \leqq\ 1\}$ とする.

(京都工芸繊維大 2008) (m20083404)

0.222 連続時間信号 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

で定義する．ただし，t は時間を表す実数，ω は角周波数を表す実数であり，$j = \sqrt{-1}$ とおいている．このとき，

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

で与えられる連続時間信号 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ と振幅スペクトル $|F(\omega)|$ を求めなさい.

(京都工芸繊維大 2008) (m20083405)

0.223 インパルス応答が

$$h(n) = \begin{cases} 1 & (n = 0, 1) \\ 0 & (n \leq -1 \text{ または } n \geq 2) \end{cases}$$

であたえられる線形時不変な離散時間システムに対して,

$$u(n) = \begin{cases} 1 & (n = 0, 1) \\ 0 & (n \leq -1 \text{ または } n \geq 2) \end{cases}$$

となる離散時間信号 $u(n)$ を入力したときの出力を $y(n)$ とする．ただし，n は離散時刻を表す整数とする．このとき，$n=1$ および $n=3$ におけるシステムの出力 $y(1)$ と $y(3)$ の値を求めなさい．

(京都工芸繊維大 2008)　　(m20083406)

0.224　n, k が自然数のとき，広義積分 $I_{n,k}$ を次のように定義する．　$I_{n,k} = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{k+1}}\,dx$

(1) $I_{1,k}$ を求めよ．

(2) $n-1-k<0$ のとき，次の関係が成り立つことを示せ．　$I_{n,k} = \dfrac{n-1}{k} I_{n-1,k-1}$

(3) $n-1-k<0$ のとき，$I_{n,k}$ を求めよ．

(4) $x \geq 1$ のとき，自然数 k に依存するある実数 C_k が存在して，　$\dfrac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{k+1}} \geq \dfrac{C_k}{x^{2k-2n+3}}$ となることを示せ．

(5) 上記 (4) の不等式を使って $n-1-k \geq 0$ のとき，$I_{n,k} = \displaystyle\lim_{L\to\infty} \int_0^{L} \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{k+1}}\,dx = \infty$ を示せ．

(大阪大 2008)　　(m20083501)

0.225　行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0.5 \\ 1 & a+0.5 \end{pmatrix}$ について，以下の設問に答えよ．ただし，a は実数とする．

(1) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解をもつために，a が満たすべき条件を示せ．

(2) x_1, x_2, b_1, b_2 を実数とする．$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ が存在するために，a, b_1, b_2 が満たすべき条件をすべて述べよ．また，それぞれの場合の解あるいは解集合を求めよ．

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めて，A を対角化せよ．

(4) A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(5) 任意の 2 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}$ について，$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A^n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となるための a の範囲を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A^n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ はベクトル $A^n\boldsymbol{x}$ の各成分が 0 に収束することをいう．

(大阪大 2008)　　(m20083502)

0.226　10 枚の赤いカードにそれぞれ 0 から 9 までの異なる数字（整数）が書かれているとする．また，それらとは別の 10 枚の青いカードにそれぞれ 0 から 9 までの異なる数字（整数）が書かれているとする．このとき，以下の設問に答えよ．

(1) 赤いカードと青いカードを 1 枚ずつ引き，赤いカードの数字 a が 10 の位を，青いカードの数字 b が 1 の位を表すものとし，2 枚のカードで表される数を N とする．例えば，$a=5,\ b=3$ なら $N=53$ を表すものとする．ただし，$a=0$ なら N は 1 桁の整数を表すものとする．例えば，$a=0,\ b=6$ なら $N=6$ を表し，$a=0,\ b=0$ なら $N=0$ を表すものとする．このように，a, b の組で $0 \leq N \leq 99$ の数字を表すものとする．このとき，$N=(a+b)^2$ となるような a, b の組 (a, b) をすべて求めよ．

(2) いま，コインを k 枚所持しているものとする．赤いカードと青いカードから 1 枚ずつカードを引いて，もし赤いカードの数字 a が青いカードの数字 b より大きければコインが 1 枚増え，a が b より小さければコインが 1 枚減るものとする．a と b の値が等しい場合，コインの枚数は増減しないものとする．引いた赤いカードと青いカードは毎回元に戻すものとする．この操作をコインの枚数が 10 枚になるか 0 枚になるまで繰り返すゲームを考える．コインが 10 枚になればゲームを勝利したものとし，0 枚になればゲームに敗北したものと考える．コインを k 枚所持している時にゲームに勝利する確率を P_k $(0 \leq k \leq 10)$ とする．

(2-1) $P_{k-1},\ P_k,\ P_{k+1}$ $(1 \leq k \leq 9)$ の間に成り立つ関係式を求めよ．

(2-2) P_k を k の関数で表せ $(1 \leq k \leq 10)$.

(2-3) このゲームでは，最初コインを k 枚 $(1 \leq k \leq 9)$ 所持して勝利した場合に $(10-k)^2$ の得点が得られるとする．このとき，コインを何枚所持している状態からゲームを始めると，ゲームを終了した際の得点の期待値が最も大きくなるか，そのときの k の値を求めよ．

(大阪大 2008)　　(m20083503)

0.227 連立微分方程式
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= y + a(x^3 + xy^2) \\ \dfrac{dy}{dt} &= -x + a(x^2y + y^3) \end{cases}$$
の解で，初期時刻 $t = 0$ において $(0, 0)$ でないものを考える．ただし a は定数とする．このような $(x(t),\ y(t))$ について以下が成り立つことを示せ．

(1) $a = 0$ のとき，t の周期関数である．

(2) $a > 0$ のとき，$t > 0$ では有限時刻を越えて延長できない．

(3) $a < 0$ のとき，すべての $t > 0$ に対して存在し，$t \to \infty$ で $(0, 0)$ に収束する．

(大阪大 2008)　　(m20083504)

0.228 次の値を留数定理を用いて計算し，四捨五入で小数点以下第 1 位まで求めよ．ただし，$e = 2.718\cdots$ である．
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2\cos\theta} d\theta$$

(大阪大 2008)　　(m20083505)

0.229 $|a| < 1$ とする．以下の式を示せ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a^n \cos nx + a^2 \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx = 2a\cos x \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx$
ただし $\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos nx \cos x$ を用いよ．

(2) $\displaystyle 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx = \frac{1-a^2}{1-2a\cos x + a^2}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{1-2a\cos x + a^2}\, dx = \frac{\pi a^n}{1-a^2}$

(大阪大 2008)　　(m20083506)

0.230 X, Y を確率変数，a, b を実数とし，各 a に対して期待値 $E[\{Y-(aX+b)\}^2]$ を最小にする b の値を $B(a)$，そのときの最小値を $\varphi(a)$ とする．ただし，X の分散 $V(X)$ は正であるとする．

(1) $B(a)$ を $a,\ E[X],\ E[Y]$ を用いて表せ．

(2) $\varphi(a)$ を最小にする a の値 $\widehat{a}$，その時の最小値 $\varphi(\widehat{a})$，および $B(\widehat{a})$ を求めよ．

(3) $\widehat{Y} = \widehat{a}X + B(\widehat{a})$ とおくとき，Y の分散は $V(Y) = V(\widehat{Y}) + E[(Y-\widehat{Y})^2]$ となることを示せ．

(大阪大 2008)　　(m20083507)

0.231 対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．ただし，$a,\ b$ および c は実数であり，また，$b \neq 0$ である．

(1) 実数の固有値が 2 個存在することを示せ．

(2) 相異なる固有値に属する固有ベクトルが互いに直交することを示せ．

(3) 行列 A は対称行列であるので，適当な直交行列 U によって対角化される．この直交行列 U を使った $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ という一次変換によって，$(x \quad y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が $\lambda_1 v^2 + \lambda_2 w^2$ となることを示せ．ただし，λ_1 および λ_2 は行列 A の相異なる固有値である．

(4) (3) の関係を利用して $2x^2 - 2xy + 2y^2$ を $\lambda_1 v^2 + \lambda_2 w^2$ の形にしたい．このときの λ_1 および λ_2 を求めよ．

(大阪大 2008)　　(m20083508)

0.232　関数 $f(x) = e^{-x}\cos x$ について，以下の問いに答えよ．ただし，x は実数，e は自然対数の底とする．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ．

(2) (1) の結果を用いて，$\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(x)|\,dx$ を求めよ．ただし，n は 0 または正の偶数とする．

(大阪大 2008)　　(m20083509)

0.233　次に示す漸化式により帰納的に定められた数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ について，以下の問いに答えよ．

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n$$

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 4 \quad b_{n+2} = \frac{b_n + b_{n+1}}{2}$$

(1) $\{a_n\}$ の初項から第 N 項までの和 A_N を求めよ．

(2) $n \to \infty$ のとき $\{A_n\}$ の収束・発散を調べ，収束する場合にはその極限値を求めよ．

(3) 第 n 項が $c_n = b_{n+1} - b_n$ で与えられる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(5) $n \to \infty$ のとき $\{b_n\}$ の収束・発散を調べ，収束する場合にはその極限値を求めよ．

(大阪大 2008)　　(m20083510)

0.234　原点を $(0,0)$ として，$\overrightarrow{a} = (1,1)$，$\overrightarrow{b} = (-2,0)$，$\overrightarrow{c} = t\overrightarrow{a} + (1-t)\overrightarrow{b}$ とする．ただし，t は実数である．

(1) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の作る角 θ を求めよ．

(2) $|\overrightarrow{c}|$ が最小となるような t の値とその最小値を求めよ．また，そのとき $\overrightarrow{c}$ と $(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$ は互いに直交することを示せ．

(大阪大 2008)　　(m20083511)

0.235　(1) 次の方程式を解け．なお，$|\cdot|$ は行列式を表す．$\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & -2 & x+3 \\ 3 & x+4 & x-4 & x+5 \\ 0 & x+1 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & x-8 \end{vmatrix} = 0$

(2) 以下の行列 A が逆行列を持つ条件を示せ．また，行列 A の逆行列を求めよ．なお，a は実数とする．　$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

(大阪府立大 2008)　　(m20083601)

0.236　次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+3y}{x}$ (2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{2}x^2 + x + e^x$

(大阪府立大 2008) (m20083602)

0.237 (1) $8i$ の 3 乗根をすべて求めよ．ただし，i は虚数単位である．

(2) 複素積分を用いて，次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta}$$

(大阪府立大 2008) (m20083603)

0.238 3 次元空間の原点 O と 3 点 A, B, C を，$(0,0,0)$, $(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $(b_1,\ b_2,\ b_3)$, $(c_1,\ c_2,\ c_3)$, とする．以下の問いに答えよ．

(1) 線分 OA と線分 OB を 2 辺とする平行四辺形の面積を $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ を用いて示せ.

(2) 線分 OA, OB, OC を 3 辺とする平行六面体の体積を $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ を用いて示せ.

(大阪府立大 2008) (m20083604)

0.239 以下の積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx$ （m, n は自然数） (2) $\displaystyle\int_1^e x(\log x)^2 dx$ (3) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{Sin}^{-1} x\, dx$

(神戸大 2008) (m20083801)

0.240 (1) 関数 $z = \dfrac{1}{\sqrt{y}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{4y}\right)$ $(y > 0)$ が，関係式 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を満たすことを示せ.

(2) f, g を C^2 級の関数，$c > 0$ を定数とするとき，関数 $z = f(x+cy) + g(x-cy)$ が，関係式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を満たすことを示せ.

(神戸大 2008) (m20083802)

0.241 実数 a, b が与えられている． このとき，x, y, z に関する以下の連立方程式を解け.

(1) $\begin{cases} 3x - 2y - 2z &= a \\ 5x - 4y + 4z &= -1 \\ 3x - 4y + 20z &= 1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} (b-2)x - y - 2z &= 1 \\ x + y + 2z &= -2 \\ x + by + 2z &= 1 \end{cases}$

(神戸大 2008) (m20083803)

0.242 以下の行列 A について，固有値 λ と各 λ に対する固有空間 $W(\lambda, A)$ を求めよ.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (2) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

(神戸大 2008) (m20083804)

0.243 (1) 3 次の正方行列 A について，$\mathrm{rank}(A) = 1$ ならば，ある 3 次元列ベクトル $\boldsymbol{a}$ と 3 つの実数 x_1, x_2, x_3 が存在して，$A = (x_1\boldsymbol{a} \quad x_2\boldsymbol{a} \quad x_3\boldsymbol{a})$ と書けることを示せ.

(2) 3 次の正方行列 A, B が $\mathrm{rank}(A) \leq 1$, $\mathrm{rank}(B) \leq 1$ を満たすならば，$A + B$ は正則でないことを示せ.

(神戸大 2008) (m20083805)

0.244 (1) $\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$ の行列式を因数分解せよ.

(2) n 次の正方行列 A が ${}^tA = -A$ を満たしているとする．ただし，${}^tA$ は A の転置行列である．このとき，n が奇数ならば，A の行列式は 0 であることを示せ.

(神戸大 2008)　　(m20083806)

0.245 $0 < a < 1$ を満たす実数 a に対して，$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 自然数 n に対して A^n を求めよ.

(2) 自然数 n に対して $S_n = E + A + A^2 + \cdots + A^n$ とおく．ただし，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ が存在し，$(E - A)^{-1}$ に等しいことを示せ.

(神戸大 2008)　　(m20083807)

0.246 次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}}$　$(D = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\})$

(2) $\displaystyle\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tan^{-1} \frac{y}{x}$

(神戸大 2008)　　(m20083808)

0.247 次の微分方程式を解け.

(1) $\dfrac{dy}{dx} - y = e^{mx}$　$(m \in \boldsymbol{R})$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

(神戸大 2008)　　(m20083809)

0.248 自然数 n に対して，$a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \log(n+1)$ とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \dfrac{1}{n}$ を示せ.　　(2) $a_n \leq 1$ を示せ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ が単調増加であることを示せ.

(神戸大 2008)　　(m20083810)

0.249 (1) $x = \tan y$ のとき，逆関数 $y = \tan^{-1} x$ が定義できる．このとき，逆関数の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(2) $y = x^4 e^{-1/x}$ を微分せよ.

(3) 次の関数を微分せよ．ただし，$x > 0$ とし，また $\log$ の底は e とする.

$$y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

(鳥取大 2008)　　(m20083901)

0.250 次のような関数が与えられている．ただし，$x > 0$ とする.　$y = \dfrac{x}{(x^2+1)^{3/2}}$

(1) 1 階および 2 階の導関数 y', y'' をそれぞれ求めよ.

(2) この関数の極値を求めるための関数値の変化表を作成し，その極値を求めよ.

(鳥取大 2008)　　(m20083902)

0.251 次の関数の与えられた領域における最大値と対応する座標を求めよ.

(1) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x + 1} + \sin x\,, \quad 0 \leq x \leq \pi\,.$

(2) $g(x,y) = -x^2 - x - y^2\,, \quad - \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\,.$

(鳥取大 2008)　　(m20083903)

0.252 次の平面領域 D における二重積分 $\displaystyle\int_D y^2 dxdy$ を計算せよ.

(1) $D\ :\ x > 0,\ y > 0,\ \dfrac{1}{2}x + y < 1\,.$　　(2) $D\ :\ x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 < 1\,.$

(鳥取大 2008)　　(m20083904)

0.253 (1) 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ の行列式の値を求めよ.

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列を求めよ.

(3) 次の連立一次方程式を解け.　$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \end{cases}$

(鳥取大 2008)　　(m20083905)

0.254 行列 $\boldsymbol{B}$ について以下の問いに答えよ.　$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(1) 行列 $\boldsymbol{B}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) 固有ベクトルを利用して行列 $\boldsymbol{B}$ を対角化せよ.

(鳥取大 2008)　　(m20083906)

0.255 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} + 3xy = 0$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = \sin 2x$

(鳥取大 2008)　　(m20083907)

0.256 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{R}^2$ への線形写像（1 次変換）が次のように与えられた．ただし，$\boldsymbol{R}^n$ は実数 $\boldsymbol{R}$ 上の n 次元ベクトル空間を表す.

$$\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}\,.$$

(1) 表現行列 A の行列式 $|A|$ の値を求めなさい.

(2) 1 次変換 f の逆変換 f^{-1} における表現行列 A^{-1} を求めなさい.

(3) 1 次変換 f について，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を満たす $\lambda(\in \boldsymbol{R})$ をすべて求めなさい.

(鳥取大 2008)　　(m20083908)

0.257 ある工業製品の故障の発生時間 X は，次式の確率密度関数をもつ指数分布に従っているという.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 0.0005e^{-0.0005x} & (x \geqq 0) \end{cases}$$

(1) 故障の発生時間 X（単位は時間 (hours)）の平均値を求めなさい.

(2) この製品が 2000 時間以内に故障が発生しない確率を求めなさい．ただし，$e \fallingdotseq 2.718$ とする.

(鳥取大 2008)　　(m20083909)

0.258 ある製品の切断寸法は，正規分布に従っているという．いま，9 個の切断寸法を測定して，次のデータを得た（単位は cm）．

$$\{4.8 \quad 5.3 \quad 4.7 \quad 5.5 \quad 5.6 \quad 4.9 \quad 5.8 \quad 5.1 \quad 4.5\}$$

(1) 平均値を計算しなさい．　　(2) 分散を計算しなさい．

(3) 切断寸法のねらい値は 5.0(cm) である．また，切断寸法の分散 σ^2 は従来から $\sigma^2 = 0.4^2$ であるという．切断寸法の平均値がねらい値どおりと言えるかどうか，危険率 5%で検定しなさい．ただし，危険率 5%のときの標準正規分布における検定の棄却域 z は，$|z| > 1.96$ である．

(鳥取大 2008)　　(m20083910)

0.259 (1) 関数 $f(t)$ を $f(t) = \dfrac{1+at}{1+bt}$ によって定義する（a, b は定数）．このとき，$f'(0)$，$f''(0)$，$f'''(0)$ を計算せよ．

(2) 次の極限値が存在するように定数 a, b を定め，その極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^6}\left(\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}\right)$$

(岡山大 2008)　　(m20084001)

0.260 (1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}dx$ が成り立つ理由を説明せよ．

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\left\{\frac{x}{x^2+1} + \int \frac{1}{x^2+1}dx\right\}$ を示し，$\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$ を求めよ．

(岡山大 2008)　　(m20084002)

0.261 (1) 平面 $\boldsymbol{R}^2$ において原点を中心に角度 α だけ回転させる線形変換の行列表現を求めよ．

(2) 実数を成分とする 3× 3 行列 X で，$X^3 = I \ \ (X \neq I)$ を満たすものをひとつ求めよ．ただし，I は単位行列を表す．

(岡山大 2008)　　(m20084003)

0.262 行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ．

(1) 行列 A の 3 つの列ベクトルが生成する $\boldsymbol{R}^3$ の部分ベクトル空間の次元を求めよ．

(2) 連立一次方程式

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

が解をもつための a, b, c に関する条件を求めよ．

(3) 行列 A の固有値および固有空間をすべて求めよ．

(岡山大 2008)　　(m20084004)

0.263 (1) 実数 t に対して，　$t = \tan\theta$　かつ　$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

を満たす θ として，関数 $\theta = \arctan t$ を定める．このとき，$\dfrac{d}{dt}(\arctan t)$ を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n dx$ を $x=\sinh t$ と変数変換することにより求めよ．

ただし，n は 2 以上の自然数とし，$\sinh t$ は $\displaystyle\sinh t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$ とする．

(3) α と R を実数とし，$R \geqq 1$ と仮定する． 領域 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leqq x^2+y^2\leqq R^2\}$ における重積分 $\displaystyle\iint_D x^2(x^2+y^2)^\alpha dxdy$ の値を求めよ．

(広島大 2008) (m20084101)

0.264 以下の微分方程式を解け．さらに，それぞれについて $\displaystyle\lim_{t\to\infty} u(t)$ を求めよ．

(1) $\displaystyle\frac{du}{dt}+u=1\ ,\quad u(0)=0$ (2) $\displaystyle\frac{du}{dt}+\frac{1}{1+t^2}u=0\ ,\quad u(0)=1$

(3) $\displaystyle\frac{du}{dt}=u(1-u)\ ,\quad u(0)=\frac{1}{2}$

(広島大 2008) (m20084102)

0.265 実数 a に対して行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & -1 & a & -2 \\ 2 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) A の行列式 $\det A$ を求めよ．

(2) $\det A=0$ となるような非負の実数 a を求め，その時の A の階数を計算せよ．

(3) 前問における a に対して，$A\boldsymbol{v}\neq 0$ かつ $A^2\boldsymbol{v}=0$ となるようなベクトル $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^4$ を 1 つ求めよ．

(広島大 2008) (m20084103)

0.266 実 2 変数関数 $\displaystyle f(x,y)=x^2+\frac{5}{2}y^2+3xy-y$ について以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の停留点 (x_0,y_0) を求めよ．ただし停留点とは，関係式 $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}=0\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}=0$ をともに満たす点のことである．

(2) $f(x,y)$ の停留点 (x_0,y_0) のまわりでのテイラー展開を求めよ．

(3) 停留点における値 $f(x_0,y_0)$ が $f(x,y)$ の最小値になっていることを示せ．

(広島大 2008) (m20084104)

0.267 実数を成分とする 3 次正方行列全体のなすベクトル空間を V とする．また，行列 A を

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と定義し，線形写像 $f\ :\ V\to V$ を $f(X)=AX-XA\quad (X\in V)$ で定義する．

(1) 線形写像 f に関して，

$$E_{13}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が固有ベクトルであることを示せ．また，その固有値を求めよ．

(2) 線形写像 f に関して，X が固有値 k を持つ固有ベクトルであるとき，転置行列 ${}^tX$ が固有値 $-k$ を持つ固有ベクトルであることを示せ．

(3) 線形写像 f に関して，固有値と対応する固有空間をすべて求めよ．

(広島大 2008)　　(m20084105)

0.268 微分可能なスカラー関数 $\varphi(x,y,z)$ と微分可能なベクトル関数 $\overrightarrow{A}(x,y,z)$ について，次式が成り立つことを証明せよ．

(1) $\nabla\times\,\{\nabla\varphi(x,y,z)\}=0$

(2) $\nabla\cdot\left\{\nabla\times\,\overrightarrow{A}(x,y,z)\right\}=0$

(広島大 2008)　　(m20084106)

0.269 次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4x=0$,　初期条件　$\left(t=0\text{ のとき，}x=1\text{ かつ}\dfrac{dx}{dt}=0\right)$

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4x=\sin 3t$,　初期条件　$\left(t=0\text{ のとき，}x=0\text{ かつ}\dfrac{dx}{dt}=0\right)$

(広島大 2008)　　(m20084107)

0.270 次の $4\times\ 4$ 行列の逆行列が存在しないための条件を求めよ．ただし，x は実数とする．

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 0 & x \\ x & 1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 & x \\ x & 0 & x & 1 \end{pmatrix}$$

(広島大 2008)　　(m20084108)

0.271 2 重積分 . $S=\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$,　$D=\{(x,y)\mid x\geq 0,\ y\geq 0\}$ を求めることによって，

$I=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$　　を求めたい．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $S=I^2$ を示せ．

(2) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ と変数変換して S を求めよ．また，I を求めよ．

(広島市立大 2008)　　(m20084201)

0.272 x,y を実変数とする．このとき次の関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

$$f(x,y)=x^2-6x+2xy^2+2y^2$$

(広島市立大 2008)　　(m20084202)

0.273 次の行列 A に対して，以下の問いに答えよ．　$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(1) A の固有値の 1 つが 2 であるとき，a を求めよ．

(1) で求めた a に対して，以下の (2),(3),(4) の問いに答えよ．

(2) A の固有値をすべて求めよ．

(3) (2) で求めた各固有値に対する，A の固有ベクトルを求めよ．

(4) 正則行列 P で，$P^{-1}AP$ が対角行列となる P を求めよ．

(広島市立大 2008)　　(m20084203)

0.274 2 次以下の実数係数多項式全体からなる線形空間 V において，

$$(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx \quad (f,g\in V)$$

により内積を定義する．ことのき，グラム_シュミットの直交化により，V の基底 $\{1,x,x^2\}$ から正規直交基底を求めよ．

(広島市立大 2008)　　(m20084204)

0.275 (1) $\log(1+x)$ を x の無限級数に展開しなさい．

(2) $f(x)=x^{\log x}$ の導関数を求めなさい．

(3) 半径 a の円の面積を積分を使って求めなさい．

(4) $0\le x\le 1$ において $0\le x^4\le x^2$ であることを用い，　$\dfrac{\pi}{4}<\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}dx<1$　を示しなさい．

(山口大 2008)　　(m20084301)

0.276 ベクトルに関する以下の問いに答えなさい．

(1) x,y,z の成分で表した 2 つのベクトル $\boldsymbol{A}=(4,5,6)$ と $\boldsymbol{B}=(1,2,3)$ について，$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{B}$ に平行なベクトル $\boldsymbol{A}_\parallel$ と $\boldsymbol{B}$ に垂直なベクトル $\boldsymbol{A}_\perp$ に分解する．$\boldsymbol{A}_\parallel$ と $\boldsymbol{A}_\perp$ それぞれの x,y,z 成分を求めなさい．

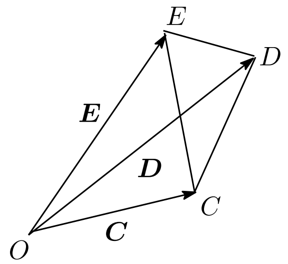
(2) 右図のように原点を O にとり，三角形 CDE の頂点の位置ベクトルを $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}$ とする．ただし，$\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}$ は同一平面上にはない．

(a) 三角形 CDE を通る無限に広い平面上の点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}$ を用いて表しなさい．ただし，必要な変数は自分で定義しなさい．

(b) 三角形 CDE の面積 S が

$$S=\frac{1}{2}\left|\boldsymbol{C}\times\ \boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}\times\ \boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}\times\ \boldsymbol{C}\right|$$

と表せることを示しなさい．



(山口大 2008)　　(m20084302)

0.277 曲線 $y^3=x^4$，$x^3=y^4$ の原点 O 以外の交点を P とし，O より P に至る両曲線の弧で囲まれる図形の面積を求めなさい．

(山口大 2008)　　(m20084303)

0.278 次の微分方程式を解きなさい．　$(3xy^2+x^3)\dfrac{dy}{dx}=3x^2y+y^2$

(山口大 2008)　　(m20084304)

0.279 関数 $f(x)=\log(x^2+1)$ の増減表を作成し，グラフの概形を描きなさい．

(山口大 2008)　　(m20084305)

0.280 行列 $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．なお，固有ベクトルは，一つの固有値に対して一つ求めること．

(山口大 2008)　　(m20084306)

0.281 行列 $A=\begin{pmatrix} -1 & a & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A が逆行列を持たないような a の値を求めよ.

(2) 2 が A の固有値となるような a の値を求めよ.

(3) 1 が A の重複した固有値となるような a の値を求めよ.

(徳島大 2008)　　(m20084401)

0.282 $f(x) = \sqrt{1-\cos x}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $f'(x)$ を求めよ.　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\{f'(x)\}^2$ を求めよ.

(3) $f''(x)$ を求めよ.　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f''(x)$ を求めよ.

(徳島大 2008)　　(m20084402)

0.283 $D = \{(x, y) \ : \ y \geqq \ x, \ x \geqq \ 0, \ y \leqq \ 2\}$ に対して, 二重積分 $I = \displaystyle\iint_D y^2 e^{-y^4}\,dxdy$ を考える.

(1) I を累次積分で表せ.

(2) (1) の累次積分の積分順序を変更せよ.

(3) I の値を求めよ.

(徳島大 2008)　　(m20084403)

0.284 次の連立微分方程式の一般解 $x = x(t), \ y = y(t)$ を求めよ.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x\sin t \\ \dfrac{dy}{dt} = x\cos t + y\sin t \end{cases}$$

(徳島大 2008)　　(m20084404)

0.285 微分可能な関数 $f(x)$ の $x = a$ での微分係数 $f'(a)$ は次で定義される.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

次の問いに答えよ.

(1) $f(x) = \sin x$ の $x = a$ での微分係数を上の定義に基づいて求めよ.

(2) 同様に, $f(x) = x^n$ の $x = a$ での微分係数を上の定義に基づいて求めよ. ただし, n は正の整数である.

(高知大 2008)　　(m20084501)

0.286 (1) $D = \{(x, y) \mid y \leq 2x, \ x \leq 2y, \ x + y \leq 3\}$ とする, D を図示せよ.

(2) 次の 2 重積分の値を求めよ.　$\displaystyle\iint_D y\,dxdy$

(高知大 2008)　　(m20084502)

0.287 $\det(A)$, $\mathrm{rank}(A)$ はそれぞれ行列 A の行列式, 階数を表す. 次の問いに答えよ.

(1) 3 次正方行列 A と 3 次単位行列 I を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき, $\det(\lambda I - A) = 0$ を満たす λ をすべて求めよ.

(2) (1) で求めたそれぞれの λ について, $\mathrm{rank}(\lambda I - A)$ を求めよ.

(3) A を n 次正方行列，I を n 次単位行列とし，$f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ とおく．λ_0 が方程式 $f(\lambda) = 0$ の単根であるとき，$\mathrm{rank}(\lambda_0 I - A) = n - 1$ であることを示せ．

(高知大 2008)　　(m20084503)

0.288 $\boldsymbol{V}$ を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をもつ有限次元の実ベクトル空間とし，$\boldsymbol{W}$ を $\boldsymbol{V}$ の部分空間とする．任意の $x \in \boldsymbol{V}$ は $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W} \oplus \boldsymbol{W}^{\perp}$ ($\boldsymbol{W}^{\perp}$ は $\boldsymbol{W}$ の直交補空間) を用いて $x = w + w'$ ($w \in \boldsymbol{W}$, $w' \in \boldsymbol{W}^{\perp}$) と一意に表すことができる．$x$ に対してこの w を対応させる $\boldsymbol{V}$ から $\boldsymbol{V}$ への写像を f と定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 任意の $x_1, x_2 \in \boldsymbol{V}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $f \circ f = f$ が成り立つことを示せ．ただし，$f \circ f$ は f と f の合成写像である．

(3) 任意の $x, y \in \boldsymbol{V}$ に対して，$\langle\, f(x), y\,\rangle = \langle\, x, f(y)\,\rangle$ が成り立つことを示せ．

(高知大 2008)　　(m20084504)

0.289 次は，ロピタルの定理の使用例である．

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ は $\dfrac{0}{0}$ の不定形であるから，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

これらにならって極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right)$ を求めてみる．以下の問いに答えよ．

(1) ロピタルの定理が使える様に，$\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right)$ を式変形せよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right)$ を求めよ．

(高知大 2008)　　(m20084505)

0.290 3 次行列　$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$　のすべての固有値・固有ベクトルを求めよ．

(高知大 2008)　　(m20084506)

0.291 a, b, c を実数とし，行列 A, B, C を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & a+b & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a-2b & 0 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

で定める．

(1) $AB + C$ を求めよ．　　(2) $AB + C$ が対称行列となるとき，a, b, c の値を求めよ．

(3) $({}^tB)C = ({}^tC)B$ が成り立つとき，a, b, c の値を求めよ．ただし，${}^tB$ は B の転置行列を表し，${}^tC$ は C の転置行列を表す．

(愛媛大 2008)　　(m20084601)

0.292 a を実数とし，行列 A およびベクトル $\boldsymbol{b}$ を　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ で定める．さらに，$\boldsymbol{b}$, $A\boldsymbol{b}$, $A^2\boldsymbol{b}$ を列ベクトルにもつ 3 次正方行列を B とする．すなわち

$B = \left(\boldsymbol{b},\ A\boldsymbol{b},\ A^2\boldsymbol{b}\right)$　とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $A\boldsymbol{b}$, $A^2\boldsymbol{b}$ を求めよ.　　(2) B の行列式 $|B|$ を求めよ.

(3) B の逆行列 B^{-1} が存在するための必要十分条件を，a を用いて表せ.

(愛媛大 2008)　　(m20084602)

0.293 $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の 1 階導関数を求めよ.

(2) $f(x)$ の逆関数を求めよ.

(3) $g(x)^2 - f(x)^2$ を求めよ.

(4) $a > 0$ とする．このとき　$\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$　を求めよ.

(愛媛大 2008)　　(m20084603)

0.294 2 変数関数 $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x + 2y$ を考える.

(1) $f(x,y)$ の 1 階偏導関数をすべて求めよ.

(2) $f(x,y)$ の 2 階偏導関数をすべて求めよ.

(3) $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(愛媛大 2008)　　(m20084604)

0.295 次の行列を，行の基本変形を使って上 3 角行列に変形せよ．また，これらの行列の階数（ランク）と行列式を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

ただし，上 3 角行列とは $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ という形の行列である.

(愛媛大 2008)　　(m20084605)

0.296 (1) $1 - x^3$ を因数分解せよ.

(2) $1 - x^4$ を因数分解せよ.

(3) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ を原点 O のまわりで 2 次の多項式プラス剰余項の形にテイラー展開せよ.

(4) $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$ を原点 O のまわりで 3 次の多項式プラス剰余項の形にテイラー展開せよ.

(愛媛大 2008)　　(m20084606)

0.297 (1) 次の不定積分を計算せよ．ただし，$x > 0$ で n は自然数とする.　$\displaystyle\int x^n \log x\,dx$

(2) 次の定積分を計算せよ.　$\displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,dx$

(3) 3 点 $A = (-x_1, x_2, 0)$, $B = (0, x_2, x_3)$, $C = (x_1, 0, x_3)$ を頂点とする三角形の面積を求めよ.

(4) 次の極限値を求めよ．ただし，a は定数とする.　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k+a}$

(愛媛大 2008)　　(m20084607)

0.298 (1) (a) 次の極限値を求めよ.　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\frac{1}{\cos x} - 1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ を示せ．　　ただし，n は自然数とする．

(2) 次の関数の導関数を求めよ．

(a) $\log|2x+1|$　　(b) $\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$　　(c) $(\sin x)^{\sin x}$

(愛媛大 2008)　　(m20084608)

0.299 (1) 次の広義積分を求めよ．　$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)\tan^{-1}x}$

(2) 次の不定積分を求めよ．　$\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)(x-1)^2}$

(愛媛大 2008)　　(m20084609)

0.300 (1) $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ が偏微分可能であるとき，$J(u,v)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\psi}{\partial v}-\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial\psi}{\partial u}$ とおく．次の φ, ψ に対して $J(u,v)$ を求めよ．

(a) $\varphi(u,v)=e^u\cos v$,　$\psi(u,v)=e^u\sin v$

(b) $\varphi(u,v)=\sqrt{u^2+v^2}$,　$\psi(u,v)=\tan^{-1}\dfrac{v}{u}$

(2) $D=\{(x,y)\ ;\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x^2+y^2\leqq 1\}$ とするとき，次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D x\sqrt{y}\,dxdy$$

(愛媛大 2008)　　(m20084610)

0.301 $A=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$,　$C=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\0&0&0\\-4&6&2\end{pmatrix}$ とする．

(1) $AB=C$ となる行列 B を求めよ．

(2) 行列 C の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(愛媛大 2008)　　(m20084611)

0.302 xy 平面上の任意の点の 1 秒ごとの移動の様子が，次の行列 A で表される一次変換によって与えられるとする．

$$A=\begin{pmatrix}5/4&1/2\\1/4&1\end{pmatrix}$$

xy 平面上の点 (x_0,y_0) が n 秒後に到達する点 (x_n,y_n) は，次の漸化式によって与えられる．ただし，n は $n\geq 1$ の整数．

$$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/4&1/2\\1/4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{pmatrix}$$

(1) 原点から見たいくつかの方向では，時間と共に向きが変化しない．すなわち，ゼロベクトルでない $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ に対し，次の関係式が成り立つ．

$$A\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}$$

上式を満たす固有値 λ の値 a,b と，それぞれに対する固有ベクトル $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}$ を求めよ．ただし，$a<b$ とし，(p,q), (r,s) はそれぞれ整数の組で，$p>0$, $r>0$ とする．

(2) 前問の結果を用いて，$P=\begin{pmatrix}p&r\\q&s\end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ．

(3) 座標 (x_n, y_n) を (x_0, y_0) と n を用いて表せ.

（ヒント）$(P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) = p^{-1}A^nP$

(4) 前問の (x_0, y_0) が，媒介変数 s を用いて $(x_0, y_0) = (s, s)$ で表される直線上の任意の点であるとする． s が実数全体を動くとき，(x_n, y_n) の描く図形の方程式を求めよ．また，$n \to \infty$ のとき，この図形はどのような図形に近づくか答えよ.

(九州大 2008)　　(m20084701)

0.303 次の時間 t と位置 x に関する波動方程式 ① と環境条件 ② を満足する関数 $y(x,t)$ を以下の手順に従って求めよ.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (c > 0) \qquad ① \qquad \text{ただし環境条件は} \quad y(0,t) = y(L,t) = 0 \qquad ②$$

(1) 関数 $y(x,t)$ を位置の関数 $A(x)$ と時間の関数 $B(t)$ の積として $y(x,t) = A(x)\cdot B(t)$ と表すと，次式が成立することを証明せよ.

$$\frac{1}{A(x)}\frac{d^2A(x)}{dx^2} = \frac{1}{c^2B(t)}\frac{d^2B(t)}{dt^2} \qquad ③$$

(2) 式 ③ の左辺は位置 x，右辺は時間 t だけの関数であるので式 ③ の両辺はある定数に等しい．これを $-\lambda$ とおくと $A(x)$ と $B(t)$ に関する次の 2 階の常微分方程式が成立する.

$$\frac{d^2A(x)}{dx^2} + \lambda A(x) = 0 \qquad ④ \qquad\qquad \frac{d^2B(t)}{dt^2} + \lambda c^2 B(t) = 0 \qquad ⑤$$

$\lambda > 0$ の場合の $A(x)$ と $B(t)$ の一般解を求めよ.

(3) $\lambda > 0$ の場合，式 ② の環境条件より

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 1, 2, 3, \cdots \qquad ⑥$$

が成立することを証明せよ.

(九州大 2008)　　(m20084702)

0.304 積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a\cos\theta}\,d\theta$ を複素平面の積分に変換して計算する．ただし，a は $0 < a < 1$ の実数である.

(1) 単位円上の任意の点，$z = e^{i\theta}$ に対して，$d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ であることを示せ.

(2) $\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ であることから，I を積分経路を単位円 $|z| = 1$ とする複素積分へ変換せよ.

(3) (2) で得られた複素積分の被積分関数の特異点のうち，単位円内部に含まれる点を書け.

(4) 留数計算によって，$I = \dfrac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$ となることを示せ.

(九州大 2008)　　(m20084703)

0.305 あるセルフサービスのカフェテリアでは，昼に 3 種類のランチメニューがある．客は順番に並んで，メニュー 1, メニュー 2, メニュー 3 のどれか一つのメニューを選ぶとする．N 番目の客がメニュー j を選んだとき $N+1$ 番目の客がメニュー i を選ぶ確率は a_{ij} であるとする．($i, j = 1, 2, 3$, a_{ij} は N に依存しない.) 一方，N 番目の客がメニュー j を選ぶ確率を $p_j(N)$ と置く.

(1) N 番目の客がメニュー j を選んだとき $N+2$ 番目の客がメニュー i を選ぶ確率を a_{ij} を使って表せ.

(2) $i \neq j$ である時 $a_{ij} = q$ (q は i, j によらない正の数, $q > 0$)　$a_{ii} = p$ (p は i によらない正の数 , $p > 0$) とする．このとき q と p が満たすべき関係式を述べよ.

(3) (2) の仮定をする．3 行 3 列の行列 A を ij 成分が a_{ij} となる 3 行 3 列の行列とする．A^2 を単位行列と F で表せ．ただし，F は次で定まる行列とする．

$$F = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) (2) の仮定のもとで行列 A のべき乗 A^N を求めよ．これを使い N 番目の客がメニュー 1 を選ぶ確率 $p_1(N)$ を $p_i(1)$ $(i = 1, 2, 3)$ と q で表す公式を求めよ．

(5) (2) の仮定のもとで $\lim_{N\to\infty} p_j(N)$ を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084704)

0.306 A 君と B 君はそれぞれコインを a 枚，b 枚持っている．2 人のコインの合計枚数を $N(N = a+b,\ N > 0)$ とする．中を見るこてができない箱の中に，$p : (1-p)$ の割合で赤いボールと白いボールが入っており，そこから 1 個のボールを取り出す．ただし，$0 < p < 1$ とする．赤いボールがでたら A 君が B 君からコインを 1 枚受け取り，白いボールがでたら A 君が B 君にコインを 1 枚渡す．コインの受け渡し後，取り出したボールは元の箱の中に戻すものとする．この操作を繰り返し，A 君，B 君のどちらか一方のコインが無くなった時点で，無くなった方を負けとする．A 君が a 枚のコインを持っている時に A 君が負ける確率を $R(a)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $R(0)$ と $R(N)$ はそれぞれいくつか．

(2) A 君が a 枚コインを持っている時に赤いボールを取り出せば，$R(a)$ であった A 君の負ける確率が $R(a+1)$ となり，白いボールを取り出せば $R(a-1)$ となる． このことから $R(a)$ を $R(a+1)$, $R(a-1)$, p を用いて表せ．ただし，$0 < a < N$ とする．

(3) $R(0)$ として (1) で求めた値を利用し，さらに $R(1) = r_1$ とするとき，(2) で求めた関係式から $R(a)$ を求めよ．

(4) (1) で求めた $R(N)$ と (3) の結果を用いて $r_1(= R(1))$ を求めよ．

(5) a を変えずに $b \to \infty$ とした時の $R(a)$ を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084705)

0.307 (1) (a) 微分方程式　$\dfrac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$　について，$x = 0$ および $x = L$ において $y = 0$ となる解を求めよ．ただし，ω, L は正の実数である．

(b) 微分方程式　$\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\gamma\omega\dfrac{dy}{dx} + \omega^2 y = F\cos\omega x$　について，$x = 0$ において $y = 0$, $\dfrac{dy}{dx} = 0$ となる解を求めよ．ただし，γ, ω, F は実数であり，$\omega > 0$, $0 < \gamma < 1$ である．

(2) (a) 次の微分方程式の一般解を求めよ．　$\dfrac{dy}{dx} + y = y^2$

(b) (a) の解を利用して，次の微分方程式　$\dfrac{dy}{dx} + (2x+1)y - y^2 = x^2 + x + 1$　の一般解を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084706)

0.308 複素数 z を変数とする偶関数 $f(z)$，奇関数 $g(z)$ が次の関係式を満たすとき，以下の問いに答えよ．

$$e^{iz} = f(z) + i \cdot g(z)$$

なお，i は虚数単位であり，e は自然対数の底である．

(1) $f(z)$ ならびに $g(z)$ を用いて，e^{-iz} を表せ．
ヒント：題意より，$f(z) = f(-z)$, $g(z) = -g(-z)$ が成立する．

(2) e^{iz} ならびに e^{-iz} を用いて，$f(z)$ と $g(z)$ をそれぞれ表せ．

(3) $g(x+iy) = u + iv$ と表すとき，以下の関係式が成立することを示せ．

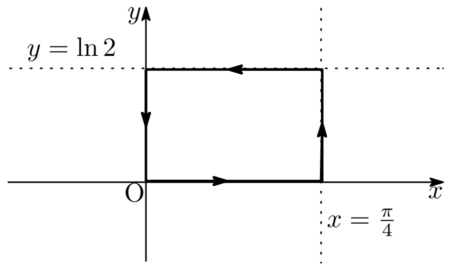
$$u = \sin x \cdot \cosh y$$
$$v = \cos x \cdot \sinh y$$

ただし，x, y, u, v は実数であり，$\cosh y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$，$\sinh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$ である．

(4) $g(x+iy) = i$ を満たす $x+iy$ を全て求めよ．

(5) $g(x+iy) = u + iv$ とし，点 (x, y) が下図の太線で示す xy 平面上の長方形に沿って，原点 O を出発して反時計回りに一周したとき，uv 平面上の点 (u, v) はどのような軌跡を描くか．その軌跡の概略図を示せ．

ヒント：任意の実数 x, y で，$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ が成立する．



(九州大 2008)　　(m20084707)

0.309 xyz 空間において，$z = e^{-(x^2+y^2)}$ で表される曲面 Σ がある．以下の問いに答えよ．

(1) 曲面 Σ と $z = 0,\ x^2 + y^2 = na^2$ によって囲まれる部分の体積 V_n を求めよ．ただし，n は自然数である．

(2) 曲面 Σ と $z = 0,\ x = a,\ x = -a,\ y = a,\ y = -a$ によって囲まれる部分の体積を V とする．xy 平面において，$y = e^{-x^2},\ y = 0,\ x = a,\ x = -a$ で囲まれる部分の面積を S とした時，V と S の関係を示せ．

(3) V を V_1, V_2 と比較することによって，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084708)

0.310 (1) 実数からなる行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(a) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^2$ および $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^3$ を求めよ．

(b) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n$ を求めよ．ただし，n は自然数である．

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(a) ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ について $B\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{v}_1$ が成り立つ．

$\boldsymbol{v}_1$ と一次独立な大きさ 1 のベクトル $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$ を用いて，$B\boldsymbol{v}_2$ を $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の一次結合

$$B\boldsymbol{v}_2 = \alpha\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2$$

と表したい．$\boldsymbol{v}_2$ と α の組み合わせを 1 つ，具体的な数値で求めよ．

(b) $P = \begin{pmatrix} 1 & v_{21} \\ -1 & v_{22} \end{pmatrix}$ とすると，$BP = PC$ と表すことができる．行列 C を記せ．

(c) B^n を求めよ.

(九州大 2008)　　(m20084709)

0.311 $a > 0$ として，xy 平面上の曲線 $(a-x)y^2 = a^2 x$ を考える.

(1) 上の曲線の概形をかけ.

(2) 上の曲線を $x = 0$ のまわりに回転してできる曲面を境界とする 3 次元領域（回転軸を含む部分）の体積を求めよ.

(九州大 2008)　　(m20084710)

0.312 3 次元空間において二つの曲面　$A\ :\ x^2+y^2+z^2=1\ ,\qquad B\ :\ x^2+y^2=x$　を考える.

(1) これら二つの曲面で囲まれる領域の体積を求めよ.

(2) 曲面 A が曲面 B によって切り取られる部分の曲面積を求めよ.

(九州大 2008)　　(m20084711)

0.313 $G(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{4t}\right)$ とおく．ただし，$\exp z = e^z$ である.

(1) $t > 0$ のとき

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0$$

であることを示せ.

(2) $t > 0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x,t)\,dx = 1$$

であることを示せ．ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ を用いてよい.

(3) f を $\boldsymbol{R} = (-\infty,\ \infty)$ 上の有界な連続関数とするとき，すべての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$\lim_{t\to+0} \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t) f(y)\,dy = f(x)$$

であることを証明せよ.

(九州大 2008)　　(m20084712)

0.314 A を $n\times\ n$ 実行列とする．V を n 実ベクトル $\boldsymbol{v}$ で

$$\lim_{m\to\infty} A^m \boldsymbol{v} = 0 \quad (m \text{ は自然数})$$

となるものの全体とする.

(1) V は $\boldsymbol{R}^n$ の線形部分空間であることを示せ.

(2) $n = 3$ で

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -9/4 & 1/2 \\ -3/2 & 1 & 1/2 \\ 3/2 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

とするとき，A の固有値は $-1,\ 2 \pm \sqrt{2}$ であることを示せ.

(3) A が (2) で与えられるとき V を求めよ.

(九州大 2008)　　(m20084713)

0.315 n_1, n_2 を自然数，$n = n_1 + n_2$ とする．$n \times\ n$ 実対称行列 A が

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}^T \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & O_{12} \\ L_{21} & I_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & O_{12} \\ O_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{11} & L_{21}^T \\ O_{21} & I_{22} \end{pmatrix}$$

と表されているとする．ただし，一般に，C_{ij} は $n_i \times\ n_j$ 行列，O_{ij} は零行列，I_{ii} は単位行列で，添え字の T は転置をとることを意味する．

A_{11} は正則行列であるとして，次の問いに答えよ．

(1) 行列 L_{21} と行列 B_{22} を A の小行列 A_{ij} を用いて表せ．

(2) A が正定値なら A_{11}, B_{22} も正定値であることを示せ．

(九州大 2008)　　(m20084714)

0.316 次の連立 1 次方程式について，各問いに答えよ．

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(1) 係数行列の逆行列を求めよ．

(2) 上で求めた逆行列を用いて方程式の解を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084715)

0.317 次の行列 A の行列式を求めよ．　$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(九州大 2008)　　(m20084716)

0.318 (1) 区間 $I = (0, 1)$ で定義された微分可能な非負関数 $g(x)$ が区間 I で $f(x) = e^{-x^2}$ に対して $f(g(x)) = x$ を満たすとき，区間 I において，$g(x)$ および導関数 $g'(x)$ を求めよ．

(2) 次の広義積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{xg'(x)}$

ただし，　$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$　を用いてよい．

(九州大 2008)　　(m20084717)

0.319 (1) 実数 $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq 1$ に対して，等式　$\dfrac{1+t^2}{t(1+t-t^2)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b+ct}{1+t-t^2}$　が成り立つように a, b, c を定めよ．

(2) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくとき，　$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ ，　$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$　と表せることを示せ．

(3) 変数変換 $t = \tan\dfrac{x}{2}$ を行い，次の定積分　$\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)\sin x}$　の値を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084718)

0.320 次の不定積分を行え．

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$　　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x - e^{-x}}\,dx$

(佐賀大 2008)　　(m20084901)

0.321 (1) $x-y$ 平面上の直線 $x+y-1=0$ は次の行列 A で表される 1 次変換によってどのように移されるか. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $x-y$ 平面上のすべての点は次の行列 B で表される 1 次変換によってどのように移されるか.

$$B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 一般に，平面上のすべての点は 1 次変換によって平面内の別の点に移される．しかし (2) の場合はそうはならない．この理由を一つ示せ.

(4) 次の行列 C が対角化できない場合の t の値を求めよ．ただし t は実数とする.

$$C=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2008) (m20084902)

0.322 次の微分方程式を解け．ただし，$y'=\dfrac{dy}{dx}$, $y''=\dfrac{dy'}{dx}$ とする.

(1) $y''=ax$ (2) $y''+2y'+y=e^{-x}\cos x$

(佐賀大 2008) (m20084903)

0.323 $x-y$ 平面において，y 軸上を等速運動する点 P があり，その座標を $(0,y)$ とする．x 軸上の定点を A とし，その座標を $(a,0)$ とすると，x 軸と直線 AP とのなす角 θ の角速度は直線 AP の長さの 2 乗に反比例することを次の手順により示せ．ただし，各変数の時間微分を $y'=\dfrac{dy}{dt}$, $\theta'=\dfrac{d\theta}{dt}$ とする.

(1) 問題の関係を図で示せ.

(2) 点 P が等速運動する関係式を示せ．ただしその速度を v_0（一定値）とする.

(3) $\tan\theta$ がどのように表されるかを示し，その両辺を時間 t で微分し，題意を示せ.

(佐賀大 2008) (m20084904)

0.324 関数

$$f(x)=1-e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-x/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

について，以下の問いに答えなさい．ただし，$0\leq x\leq 2\sqrt{3}\pi$ とする.

(1) $\dfrac{df}{dx}=0$ を満足する x の値をすべて求めなさい.

(2) (1) で求めた x に対して，$f(x)$ の値および $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ の値を求めなさい.

(3) $0\leq x\leq 2\sqrt{3}\pi$ における，最初の極大値を y_1，2 番目の極大値を y_2 とし，

$$p_1=y_1-1\,,\quad p_2=y_2-1$$

と定義する．このとき，$\ln(p_2/p_1)$ を求めなさい．ln は自然対数（底が e の対数）を表す.

(長崎大 2008) (m20085001)

0.325 袋の中に 100 個のくじが入っており，その内 27 個が当りくじである．次のルールに従ってこのくじを引く.

[ルール]

袋の中からくじを 1 つ引き，当りかはずれを確認した後，そのくじを再び袋の中に戻す.

(1) このくじを 2 回引き，どちらもはずれる確率を求めなさい.

(2) このくじを 3 回引き，少なくとも 1 回は当たる確率を小数第 5 位を四捨五入し，小数第 4 位まで求めなさい．

(3) このくじを何回か引いたとき，少なくとも 1 回は当たる確率が 0,9999 よりも大きくなるには，何回以上引く必要があるか．ただし，$\mathrm{Log}_{10}7.3 = 0.8633$ として計算しなさい．Log_{10} は常用対数（底が 10 の対数）を表す．

(長崎大 2008)　　(m20085002)

0.326 2 行 2 列の行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ と $f(x) = (x-1)(x-5) = x^2 - 6x + 5$ について考える．また $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする．

ある多項式 $g(x)$ を与えられた $f(x)$ で割ったときの商を $q(x)$，余りを $r(x)$ とする．このとき，$f(x)$ が 2 次式であることより，余り $r(x)$ は，未定の係数 a, b を用いて $r(x) = ax + b$ とおくことができ，さらに，$g(x)$ について

$$g(x) = f(x)q(x) + ax + b \qquad ①$$

が成立する．以下の問いに答えなさい．

(1) $f(x)$ の x に行列 A を代入した $f(A) = A^2 - 6A + 5I$ を求めなさい．

(2) n を正の整数とし，$g(x) = x^n$ とする．このとき，① 式を満足する a, b を n で表しなさい．

(3) (2) の a, b および ① 式を利用して，正の整数 n に対して A^n を求めなさい．（A^n の各要素を n で表しなさい．）

(長崎大 2008)　　(m20085003)

0.327 次のベクトルについて以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ が一次独立であることを示せ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ の一次結合（線形結合）で表せ．

(長崎大 2008)　　(m20085004)

0.328 次の値を求めよ．

(1) $I(R) = \displaystyle\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$

(2) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$　　注：問 (1) の結果を引用してもよい．

(長崎大 2008)　　(m20085005)

0.329 次の微分方程式を解け．ここで，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．

(1) $y'' + 16y = 0$　　(2) $y'' + 16y = 17e^x$

(3) 初期条件 $y(0) = 6,\ y'(0) = -2,\ (x = 0$ のとき $y = 6,\ y' = -2)$ を満たす $y'' + 16y = 17e^x$ の解を求めよ．

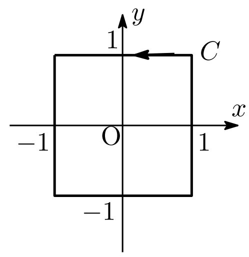
(長崎大 2008)　　(m20085006)

0.330 点 (x, y, z) での位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とし，$r = |\boldsymbol{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ とするとき，以下の問いに答えよ．ここで，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ は，それぞれ，$x, y.z$ 方向の単位ベクトルを表す．

(1) $\nabla \cdot \left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$ を計算せよ．

(2) 右図の閉曲線 $C(z=0)$ に沿って，次の線積分を計算せよ．

$$\oint_C \boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r}$$



(長崎大 2008)　　(m20085007)

0.331 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}}{x^3}$ を求めよ．

(長崎大 2008)　　(m20085008)

0.332 $D = \{(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$ を求めよ．

(長崎大 2008)　　(m20085009)

0.333 行列 $A = \begin{pmatrix} \alpha & 4 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ の固有値が 1 と 6 であるとき，実数 α 及び β の値を求めよ．なお，$\alpha \geq \beta$ とする．求める過程も記述すること．

(長崎大 2008)　　(m20085010)

0.334 熱帯にあるオイスター島には，乾季と雨季の季節だけがあり，この 1000 年において，毎年，乾季の日が 30 %，雨季の日が 70 %の割合で存在するものとする．この島のある日の天気の観測（簡単のため，晴れ，曇り，雨の 3 種類とする）のみから，その日が乾季か雨季であるかの推定を行いたい．もし乾季であれば晴れの日は 80 %，曇りの日は 10 %，雨の日は 10 %の割合である．また，雨季であれば晴れの日は 10 %，曇りの日は 20 %，雨の日は 70 %の割合である．無作為 (random) に選んだある日の天気を観測したところ晴れであったという．この観測をした日が乾季である確率を求めよ．

(長崎大 2008)　　(m20085011)

0.335 次の微分方程式を解け．　$\dfrac{dy}{dx} = x + y + 1$　　(長崎大 2008)　　(m20085012)

0.336 連続な関数 $f(x,y)$ の Taylor 展開について，右辺第 2 項，第 3 項を記述せよ．

ただし，Δx は x の微小な変化量である．

$$f(x+\Delta x,\ y) = f(x,y) + \boxed{} + \boxed{} + O(\Delta x^3)$$

(長崎大 2008)　　(m20085013)

0.337 ベクトル $\overrightarrow{A} = (2,3)$, $\overrightarrow{B} = (5,-2)$ の内積と外積を求めよ．

$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = $ __________　　　　$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = $ __________

(長崎大 2008)　　(m20085014)

0.338 次の連立 1 次方程式を解け．

$$\begin{cases} 2x + \ y + \ z = 15 \\ 4x + 2y + 5z = 39 \\ 8x + 8y + 9z = 83 \end{cases}$$

(長崎大 2008)　　(m20085015)

0.339 3 次曲線 $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ のグラフを描き，これと x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(長崎大 2008)　　(m20085016)

0.340 次の (a),(b) の行列式の値をそれぞれ求めよ．

(a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{vmatrix}$ ただし，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$

(長崎大 2008) (m20085017)

0.341 ベクトル $\overrightarrow{a}=(1,2,-1)$，$\overrightarrow{b}=(3,-1,2)$ の場合，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積 S を求めよ．

(長崎大 2008) (m20085018)

0.342 (1) 次の不定積分を求めよ． $\displaystyle\int x^2e^{2x}dx$

(2) 次の定積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{3+2x-x^2}\,dx$

(大分大 2008) (m20085101)

0.343 1 周期が次のような周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(t)=t \qquad (-1 \leqq t<1)$$

(大分大 2008) (m20085102)

0.344 関数 $f(x)$ を $f(x)=\sqrt{1+2x}$ $\left(|x|<\dfrac{1}{2}\right)$ と定義するとき，次の問いに答えよ．

(1) $f'(0)$，$f''(0)$，$f'''(0)$ を求めよ．

(2) n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ $(n \geqq 2)$ を答え，それが成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

(3) (1)，(2) の結果を使って，関数 $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ..

(大分大 2008) (m20085103)

0.345 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$． $B=\lambda I_2-A$ とする．ただし，λ は定数で，I_2 は 2 次の単位行列である．次の問いに答えなさい．

(1) B を求めなさい．

(2) $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に自明でない解（$x=y=0$ ではない解）が存在するような λ を全て求め，それぞれの λ に対して，$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の自明でない解を求めなさい．

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(4) A の対角化により,A^n を求めなさい．ただし，n は自然数とする．

(熊本大 2008) (m20085201)

0.346 ガンマ関数は，$\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$ $(s>0)$ で定義される．次の問いに答えなさい．

(1) 部分積分法を用いて，$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ が成り立つことを示しなさい．

(2) $\Gamma(n+1)=n!$ となることを示しなさい．ただし，n は負でない整数である．

(熊本大 2008) (m20085202)

0.347 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値を全て求めよ. (2) 行列 A の固有ベクトルを全て求めよ.

(宮崎大 2008) (m20085301)

0.348 $z^2 = -xy + x - 5y + 18$ を満たす実数の組 (x, y, z) によって定まる空間内の曲面を S とする, このとき, 次の各問いに答えよ.

(1) 原点と曲面 S 上の点 (x, y, z) との距離を r とするとき, r^2 を x, y で表した式 $f(x, y)$ を求めよ.

(2) (1) で得られた式 $f(x, y)$ の極値を求めよ.

(宮崎大 2008) (m20085302)

0.349 (1) 平面内の領域 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}$
を xy 平面上に図示せよ. ただし, a, b は正の定数とする.

(2) $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta\ \ (r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ と変換したとき, 領域 D に対応する $r\theta$ 平面上の領域 E を不等式で表し, またそれを図示せよ.

(3) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

(4) (3) で求めたヤコビアンを用いて, 重積分 $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ の値を求めよ.

(宮崎大 2008) (m20085303)

0.350 (1) 次の微分方程式を, $y(0) = 2,\ \dfrac{dy}{dx}(0) = 6$ という条件の下で解け. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

(宮崎大 2008) (m20085304)

0.351 次の各問いに答えよ. ただし, i を虚数単位とする.

(1) 次の複素数を計算せよ.

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$$

(2) 次の式を満足する A および θ の値を求めよ. ただし, $A > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi$ とする.

$$1 + \sqrt{3}\,i = Ae^{i\theta}$$

(宮崎大 2008) (m20085305)

0.352 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x^2 e^x\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 4x + 3}\,dx$ (3) $\displaystyle\int \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ $(a > 0,\ -a < x < a)$

(鹿児島大 2008) (m20085401)

0.353 (1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

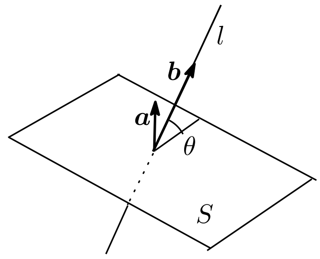
(a) $(xy + 2x - 3y - 6)dx + dy = 0$ (b) $(x^2 y + \cos x)dx + (x^3/3 + \sin y)dy = 0$

(2) 次の微分方程式の完全解を求めよ. $y'' + 2y' + 2y = 4\sin x$

(鹿児島大 2008) (m20085402)

0.354 次のベクトルに関する問いに答えよ.

(1) 右図のように，$\boldsymbol{a}$ は平面 S と直交する法線ベクトルであり，$\boldsymbol{b}$ は平面 S と角 θ ($\leq 90^\circ$) で交わる直線 l の上に存在するベクトルである．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を用いて $\sin\theta$ を表せ．



(2) 次の式で表される二つの平面 S_1 と S_2 の交角 α を求めよ．

$S_1 \ : \ x + 2y + 2z = 3 \qquad\qquad S_2 \ : \ 3x + 3y = 1$

(鹿児島大 2008)　　(m20085403)

0.355 次のベクトルと行列式に関する問いに答えよ．

(1) 次のベクトル $\boldsymbol{a}$ がベクトル $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ の一次結合で表すことができるための α, β の条件を求めよ．

$$\boldsymbol{a} = (0 \quad \alpha \quad \beta)\,, \qquad \boldsymbol{b}_1 = (2 \quad -1 \quad 1)\,, \qquad \boldsymbol{b}_2 = (2 \quad 1 \quad 3)$$

(2) 次の関係式を証明せよ．

$$\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix} = 2(b+c)(c+a)(a+b)$$

(鹿児島大 2008)　　(m20085404)

0.356 次の微分・積分を求めなさい．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\log\left|x + \sqrt{x^2+2}\right|\right)$ 　　(2) $\displaystyle\int e^x \cdot \sin x \, dx$

(鹿児島大 2008)　　(m20085405)

0.357 (1) 曲線 $y = x^2$ 上の点 $P(1,1)$ における接線の方程式を求めなさい．また，そのグラフも描きなさい．

(2) 曲線 $y = x^2$ と (1) で求めた点 P での接線と x 軸で囲まれた領域の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2008)　　(m20085406)

0.358 4 点 $A(1,2)$, $B(3,-2)$, $C(x,y)$, $D(-2,0)$ を頂点とする四角形 $ABCD$ が平行四辺形である様に点 $C(x,y)$ の座標を求めなさい．また，その平行四辺形の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2008)　　(m20085407)

0.359 2 行 2 列の行列 　$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 　　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 　がある．

(1) J の逆行列を求めなさい．

(2) $A^T JA = J$ を満たすとき，AJA^T を求めなさい．但し，A^T は A の転置行列である．

(鹿児島大 2008)　　(m20085408)

0.360 次の関数の微分を求めよ．

(1) $f(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ 　　(2) $f(x) = \sin^{-1}(x)$

(鹿児島大 2008)　　(m20085409)

0.361 次の積分を求めよ．

(1) $I = \displaystyle\int_0^1 xe^x \, dx$ 　　(2) $I = \displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$

(鹿児島大 2008)　　(m20085410)

0.362 行列 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ は以下の値とする.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad , \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

(1) 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ を求めよ. (2) 積 $\boldsymbol{AB}$ を求めよ. (3) 行列式 $|\boldsymbol{A}|$ を求めよ.

(鹿児島大 2008) (m20085411)

0.363 次の微分方程式の初期値問題を解け.

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = -5 \quad \text{ここで},\ y''(x) = \frac{d^2y(x)}{dx^2},\ y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$$

(鹿児島大 2008) (m20085412)

0.364 (1) $|B| = \begin{vmatrix} 7 & 3 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & -5 & 2 \\ 8 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(2) $U = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & a \\ \dfrac{1}{2} & b \end{bmatrix}$ が直交行列になるように a, b を求めなさい.

(3) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ を対角化せよ.

(鹿児島大 2008) (m20085413)

0.365 (1) $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right)$ を x で微分せよ. (2) x^x を x で微分せよ.

(3) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2-x-2}\,dx$ を求めよ. (4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$ を求めよ.

(鹿児島大 2008) (m20085414)

0.366 x, y, z がいずれも 0 ではないとき, 次の等式

$$\frac{-(x+7y)}{2z} = \frac{x+2z}{-y} = \frac{2z-y}{x} = t$$

が成り立つための t の値を求めよ.

(室蘭工業大 2008) (m20085501)

0.367 次の微分方程式の一般解を求めよ. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 3e^{-x}$

(室蘭工業大 2008) (m20085502)

0.368 次の関数の導関数を求めなさい.

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

(室蘭工業大 2008) (m20085503)

0.369 次の関数の導関数を求めなさい.

$$f(x) = e^x \cos x$$

(室蘭工業大 2008) (m20085504)

0.370　次の定積分の値 I を求めなさい．　$I = \int_0^t e^x \sin \omega x \, dx \quad (t > 0)$

(室蘭工業大 2008)　(m20085505)

0.371　行列 $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ と与えられているものとする．このとき，以下の問題に答えなさい．

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の 2 つの固有値とそれらに対応する固有ベクトルを求めなさい．

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化しなさい．すなわち，下の関係を満たす正則行列 P と対角行列 $\boldsymbol{\Lambda}$ を求めなさい．もし，対角化が不可能な場合はその理由を述べなさい．

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$$

(3) $\boldsymbol{A}^{10}$（すなわち $\boldsymbol{A}$ の 10 乗）を求めなさい．

(室蘭工業大 2008)　(m20085506)

0.372　ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (\alpha xy - z^3)\boldsymbol{i} + (\alpha - 2)x^2\boldsymbol{j} + (1-\alpha)xz^2\boldsymbol{k}$ について，以下の問いに答えなさい．なお，α は実数であり，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は直交座標系の x 軸，y 軸，z 軸上で正の向きを持つ単位ベクトルである．

(1) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が，$x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ においてベクトル $\boldsymbol{B} = 2\beta\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$ と直交するとき，実数 β を α を用いて表しなさい．

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の回転 $(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})$ の値が任意の場所で $\vec{0}$ となるときの，α の値を求めなさい．

(室蘭工業大 2008)　(m20085507)

0.373　(1) $a > 0$ のとき，$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \pi$ を満たす a の値を求めよ．

(2) 関数 $g(x)$ は，関数 $f(x)$ に対して，　$g(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{m} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad , \quad (m = 1, 2, 3, \cdots)$

と定義される．ここで，$f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の n 階の導関数を表す．$f(x) = e^{2x}$ とするとき，$g(x)$ を，$m = 3$ として求めなさい．

(室蘭工業大 2008)　(m20085508)

0.374　(1) 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と各々の固有値に対応する固有ベクトルを求めなさい．

(2) $\boldsymbol{P}$ を正則な正方行列として $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ のときに $\boldsymbol{A}$ の固有値と $\boldsymbol{B}$ の固有値は一致することを示しなさい．

(3) $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ として $\boldsymbol{B}$ の固有値と各々の固有値に対応する固有ベクトルを求めなさい．

(室蘭工業大 2008)　(m20085509)

0.375　(1) 微分方程式 $\frac{dy(x)}{dx} - 3y(x) = 0$ を初期条件 $y(0) = 1$ として解きなさい．

(2) (1) の解を $f(x)$ として $y(x) = u(x)f(x)$ とおく．このとき常微分方程式 $\frac{dy(x)}{dx} - 3y(x) = e^x$ を x と $u(x)$ の常微分方程式として表しなさい．

(3) 常微分方程式 $\frac{dy(x)}{dx} - 3y(x) = e^x$ を解きなさい．

(室蘭工業大 2008)　(m20085510)

0.376 括弧の中を埋めよ．全部で 8 箇所ある．

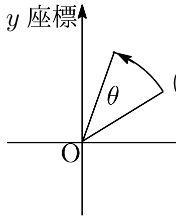


図 1 − 1

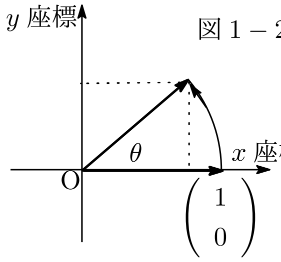


図 1 − 2

2 次元平面上の任意の点を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で表す（図 1-1 を参照する事）．

点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を原点 O の周りに角度 θ だけ回転（反時計回りを

正とする，図 1-2 を参照）した点は $\begin{pmatrix} [\text{ア}\quad] \\ [\text{イ}\quad] \end{pmatrix}$ となる．

同様に考えると，点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ はは $\begin{pmatrix} [\text{ウ}\quad] \\ [\text{エ}\quad] \end{pmatrix}$ に移る．

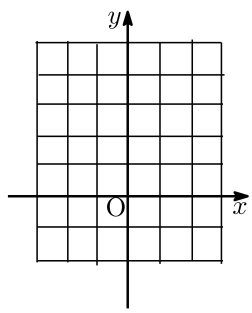
よって任意の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を原点の周りに角度 θ だけ回転した点は,

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ なので,

$\begin{pmatrix} [\text{オ}\quad] & [\text{キ}\quad] \\ [\text{カ}\quad] & [\text{ク}\quad] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で与えられる．

(室蘭工業大 2008)　　(m20085511)

0.377 定積分 $\displaystyle\int_0^a |x^2 - 1|\,dx$, $(a > 0)$ を以下の手順で求めよ．



(1) 関数 $f(x) = |x^2 - 1|$ の，$x = -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ における値を求めよ．

$f(-2) =$　　$f(-1) =$　　$f(0) =$　　$f(1) =$　　$f(2) =$

(2) 関数 $f(x) = |x^2 - 1|$ を $-2 \leq x \leq 2$ の範囲で，右のグラフにかけ．
$x = -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ の時の $f(x)$ の値がわかるように書く事．

(3) 積分 $\displaystyle\int_0^1 |x^2 - 1|\,dx$ を求めよ．

(4) $a > 1$ のときの定積分の値を求めよ．

(室蘭工業大 2008)　　(m20085512)

0.378 方程式 $f(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ を満たす微分可能な関数 $f(x)$ を，以下の手順で求めよ．

(1) $f(0)$ の値を求めよ．

(2) 上の方程式の両辺を x で微分し，$f(x)$ に関する微分方程式を求めよ．

(3) $A,\ k$ を定数として，x の関数 Ae^{kx} を x で微分せよ．ただし $e = 2.718\cdots$ である．

(4) (1), (2), (3) の結果を用い，$f(x)$ を求めよ．

(室蘭工業大 2008)　　(m20085513)

0.379 (1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 - x^2)}{\sin x}$ を求めよ．　(2) $f(x) = \log\left|\dfrac{x}{x+1}\right|$ を微分せよ．　(3) $\displaystyle\int x \log x\,dx$ を求めよ．

(岡山県立大 2008)　　(m20085601)

0.380 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値の 1 つが 0 とする．

(1) a を求めよ．　　(2) 0 以外の固有値を求めよ．

(岡山県立大 2008)　　(m20085602)

0.381 $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1$ の極値を求めよ．

(岡山県立大 2008)　　(m20085603)

0.382 次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D e^{x-y} dxdy \ , \quad D = \{(x,y) \ : \ 0 \leqq \ x \leqq \ 1, \ 0 \leqq \ y \leqq \ 1\}$$

(岡山県立大 2008)　　(m20085604)

0.383 行列 $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$，ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ のとき，$\boldsymbol{x}^T S \boldsymbol{x}$ を計算せよ．
ただし，記号 T は転置を表す．

(香川大 2008)　　(m20085701)

0.384 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，ベクトル $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ とするとき，A の逆行列を求めよ．また，$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(香川大 2008)　　(m20085702)

0.385 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ に対して，ある 2×1 ベクトル $\boldsymbol{x}$ $(\neq \boldsymbol{0})$ を右からかけたところ，$\boldsymbol{x}$ のスカラー倍となった．このようなベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(香川大 2008)　　(m20085703)

0.386 (1) 次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ -5 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

(2) a を実数とし，

$$A = \begin{pmatrix} a & -3 & 1 & 1 \\ 5 & -8 & 3 & a \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，次の問いに答えよ．

(a) A の階数が 2 となるような a の値を求めよ．

(b) $V = \{v \in \boldsymbol{R}^4 \mid Av = 0\}$,　$W = \{Av \mid v \in \boldsymbol{R}^4\}$ とおく．このとき，V は $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間，W は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間であることを示せ．

(c) (a) のとき，V, W の基底を一組ずつ求めよ．

(d) (a) のとき，$\{v_1, \ v_2\}$ を V の任意の基底とする．また，W の任意の基底 $\{w_1, \ w_2\}$ に対して，$v_3, \ v_4$ $(\in \boldsymbol{R}^4)$ を

$$w_1 = Av_3 \ , \quad w_2 = Av_4$$

となるような任意のベクトルとする．このとき，$\{v_1, \ v_2, \ v_3, \ v_4\}$ は $\boldsymbol{R}^4$ の基底であることを示せ．

(島根大 2008)　　(m20085801)

0.387 (1) 次の関数の第 3 次導関数を求めよ．　　$x^2 \sin x$

(2) 次の級数が収束することを示せ． $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$

(3) 次の積分を求めよ． $\displaystyle\int_0^1 \sin^{-1} x\, dx$

(島根大 2008)　　(m20085802)

0.388 次の問いに答えよ．a, b, c はすべて正の数とする．

(1) 3 次元空間において頂点 $P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$ をもつ三角形の面積 S を求めよ．

(2) 3 次元空間において頂点 $O(0,0,0)$, P, Q, R をもつ四面体の体積を V とする．(1) で求めた S と V との比 S/V を考える．a, b, c が $abc = 1$ をみたしながら変化するときの S/V の最小値を求めよ．

(島根大 2008)　　(m20085803)

0.389 次の重積分を求めよ．a は正定数とする． $\displaystyle\iint_D y\, dxdy$ 　ただし D は $(x, y)-$ 平面内にある円 $(x-a)^2 + y^2 \leq a^2$ の上半分，すなわち $y > 0$ を満たす部分である．

(島根大 2008)　　(m20085804)

0.390 コンピュータやネットワークの技術の発展により，我々の生活はより便利で快適なものになってきた．その一方で，それらに関連する事件（例えば，ファイル共有アプリケーションによる機密情報の流出，出会い系サイトがらみのトラブル等）も多数発生している．以下の問いに答えよ．

(1) コンピュータやネットワークの技術に関連する事件としてどのようなものがあるか，2 つ挙げ，それぞれ 100 文字程度で説明せよ．ただし，上記の文中で例として挙げたものは除く．

(2) 小問 (1) で挙げた事件に巻き込まれないためには，どのような対策が必要か，それぞれ 100 文字程度で説明せよ．

(島根大 2008)　　(m20085805)

0.391 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) 行列 A の階数を求めよ．

(3) 行列 A の逆行列を求めよ．

(4) 行列 A の固有値 λ_i とその固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ．

(島根大 2008)　　(m20085806)

0.392 次の関数 $u = u(x, y, z)$ について $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ の値を求めよ．

(1) $u = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{vmatrix}$ 　　(2) $\dfrac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

(島根大 2008)　　(m20085807)

0.393 次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^3 \int_1^2 \left(2xy - x^2\right)\, dydx$ 　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{2y} y^2 e^{xy}\, dxdy$

(島根大 2008)　　(m20085808)

0.394 関数 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $y = f(x)$ のグラフを xy 平面上に描け．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる面積を求めよ．ただし，$x = \tan t$ なる変数変換を用いて，積分計算の過程も示せ．

(3) x^4 までの項で表した $f(x)$ のマクローリン展開式は　$f(x) \cong 1 - x^2 + x^4$　であることを導け．

(4) 設問 (3) の結果を利用して，次の近似式を導け．

$$\tan^{-1} x \cong x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \quad (\text{ ただし，} |x| < 1 \text{ })$$

(島根大 2008)　　(m20085809)

0.395 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ，$\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ がある．以下の設問に答えよ．ただし．互いに直交する x 軸，y 軸，z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ とする．

(1) 内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b} - m\boldsymbol{a}$ が垂直となる m の値を求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{b}$ のベクトル $\boldsymbol{a}$ への射影を求めよ．

(4) 外積 $\boldsymbol{a} \times \ \boldsymbol{b}$ を求めよ．

(5) ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ の正弦，すなわち $\sin\theta$ を求めよ．

(6) ベクトル $\boldsymbol{c}$，ベクトル $\boldsymbol{d}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を S とすると，

$$S^2 = (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{d})^2$$

となることを示せ．次に，ベクトル $\boldsymbol{a}$，ベクトル $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ．

(島根大 2008)　　(m20085810)

0.396 (1) 連立方程式 $\begin{cases} (\lambda-4)x + 2y - 15z = 0 \\ 2x + (\lambda-1)y - 30z = 0 \\ 4x - 2y - 5(\lambda-5)z = 0 \end{cases}$ が自明でない解をもつように，λ の値を定めよ．

(2) 前問で定めた λ の値の全てについて，それぞれに対応する自明でない解を求めよ．

(首都大 2008)　　(m20085901)

0.397 ある直交座標系 (x, y, z) における 3 次元の 2 つの実ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ ，$\boldsymbol{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ について，次の問いに答えよ．

(1) 内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を成分で表し，ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ が直交するための必要十分条件を示せ．

(2) 外積 $\boldsymbol{a} \times \ \boldsymbol{b}$ を成分で表せ．

(3) 外積 $\boldsymbol{a} \times \ \boldsymbol{b}$ は，ベクトル $\boldsymbol{a}$ ともベクトル $\boldsymbol{b}$ とも直交することを証明せよ．

(首都大 2008)　　(m20085902)

0.398 関数 $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ の $x = 0$ におけるテーラー展開を x^4 の項まで求めよ．

(首都大 2008)　　(m20085903)

0.399 次の微分方程式を解け．　$\dfrac{dy}{dx} - y = \cos x - \sin x$　　(首都大 2008)　　(m20085904)

0.400 次の不定積分を計算せよ．　$\displaystyle\int \frac{1}{x^3 - x}\,dx$　　(首都大 2008)　　(m20085905)

0.401 次の二重積分を計算せよ． $\displaystyle\iint_{\substack{x+y \leqq 1 \\ x,y \geqq 0}} (x^2+y^2)\,dxdy$ (首都大 2008) (m20085906)

0.402 関数 $f(x)$ の導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

にしたがって，$f(x)=\sin x$ の導関数が $f'(x)=\cos x$ であることを示せ．

(滋賀県立大 2008) (m20086001)

0.403 (1) 未知関数 $y=y(x)$ に対する 2 階定数係数同次線形常微分方程式 $y''+y'-6y=0$ の一般解を求めよ．

(2) 2 階定数係数非同次線形常微分方程式 $y''+y'-6y=\sin x$ の特殊解を求めよ．
（特殊解を $y=A\sin x+B\cos x$ と仮定してよい．A，B は定数である．）

(3) 上記 (2) の非同次線形常微分方程式の一般解を書き下せ．

[注；(1) における「同次」および (2) における「非同次」は，それぞれ「斉次」および「非斉次」といわれることもある.]

(滋賀県立大 2008) (m20086002)

0.404 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ． (滋賀県立大 2008) (m20086003)

0.405 原点を中心とする半径 R の球を V とする．このとき，$\displaystyle\iiint_V (x^2+y^2)\,dxdydz$ の値を求めよ，

(滋賀県立大 2008) (m20086004)

0.406 2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) A の対角成分の和と A の固有値の和は等しいことを示せ．

(2) A をその固有値と固有ベクトルを用いて対角化せよ．

(はこだて未来大 2008) (m20086301)

0.407 座標平面上の点 P を次のような 2 つの条件を満たす点 P' にうつす 1 次変換を考える．

(1) 2 点 P, P' を結ぶ線分 PP' を 1 ： 2 の比に内分する点 Q は直線 $y=2x$ 上にある．

(2) 線分 PP' と直線 $y=2x$ は直交する．

この 1 次変換を表す行列 A を求めよ．

(はこだて未来大 2008) (m20086302)

0.408 n を自然数とし，関数 $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\sin(nx)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{df_n}{dx}(x)=\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)$ が成立する x の値を，区間 $[0,\ \pi]$ から求めよ．

(はこだて未来大 2008) (m20086303)

0.409 a を正定数，n を自然数とし，定積分 $I_n(a)=\displaystyle\int_0^a xe^{-nx}\,dx$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $I_n(a)$ を求めよ． (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n(a)$ を求めよ．

(はこだて未来大 2008)　　(m20086304)

0.410 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(2) 連立方程式 $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 3x + 4y + 3z - w = 2 \\ 6x + 7y + 5z + w = 1 \end{cases}$ を解け.

(東京海洋大 2008)　　(m20086401)

0.411 行列 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(東京海洋大 2008)　　(m20086402)

0.412 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^2+2x}{(x^2+4)(x-2)}\,dx$ を計算せよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \cos x\,dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2008)　　(m20086403)

0.413 $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 6x + 1$ の極値を求めよ.

(東京海洋大 2008)　　(m20086404)

0.414 次の重積分の値を求めよ

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy\ ,\quad D = \{(x,y) \mid x^2 \leqq y \leqq x+2\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy\ ,\quad D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 1\}$

(東京海洋大 2008)　　(m20086405)

0.415 次の行列 A について，以下の各問いに答えなさい．ただし，k は実数である．

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & k & 5 \end{pmatrix}$$

(1) 逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(2) 行列 A のすべての固有値と，絶対値が最大の固有値に対する固有ベクトルを求めなさい.

(3) 行列 A の第 2 列，第 3 列をそれぞれ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ とするとき，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ となるような k の値を求めなさい.

(和歌山大 2008)　　(m20086501)

0.416 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-x}$ を求めなさい.

(2) $\dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{3^2} + \dfrac{z^2}{5^2} = 3$ で表される曲面の，点 $(2,3,5)$ における法線の方程式を求めなさい.

(3) 次の 2 重積分を極座標変換を利用して求めなさい.

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy\ ,\quad D = \{(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$$

(和歌山大 2008)　　(m20086502)

0.417 ある工場で製造される製品の重さ（単位 kg）が正規分布 $N(2,\ 0.0016)$ に従っているとする．ある日，100 個の製品を抜き取り，重さを測定したところ平均が 2.011kg であった．この日の製品が，平常と比べて重くなっているといえるか．危険率（有意水準）1% で検定しなさい．なお，解答にあたっては，次の定理および正規分布表を用いてよい．

定理 $X_1,\ X_2,\ \cdots X_n$ が，正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ に従う独立な確率変数であるとき，

$\overline{X} = \dfrac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ は正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$ に従う．

よって，$\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ は正規分布 $N(0,1)$ に従う．

(和歌山大 2008)　　(m20086503)

0.418 (1) 級数の和 $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k!(k+2)}{(k+3)!}$ を求めよ．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

(2) $f(x) = e^{2x^2}$ のマクローリン級数を x^3 の項まで求めよ．また，$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x^2}$ を求めよ．

(3) 初期値問題 (a) と微分方程式 (b) の解が一致するよう α を定め，(b) の一般解を求めよ．

(a) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}$ ，$y(0) = e^{-1}$　　(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + \alpha y = 8e^{-x}$

(京都府立大 2008)　　(m20086701)

0.419 関数 $f_n(x,y) = \sin\sqrt{x^n + y^n}$（$n$：自然数）について，次の問いに答えよ，

(1) 1 階偏導関数 $\dfrac{\partial f_n}{\partial x}$ を求めよ．

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{f_1(x,0)}{\sqrt{x}}\,dx$ を求めよ．

(3) 自然数 m に対して $I_m = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{(f_1(x,0))^m}{\sqrt{x}}\,dx$ とするとき，I_m と I_{m-2} の関係式を求めよ．また m は奇数として I_m を求めよ．

(4) $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \leq x^2 + y^2 \leq \dfrac{\pi^2}{4}\right\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D f_2(x,y)\,dxdy$ を求めよ．

(京都府立大 2008)　　(m20086702)

0.420 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，次の問いに答えよ．$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

(1) A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) $A^4 + 3A^3 - 6A^2 - 26A - 12I$ を求めよ．

(3) $(A^4 + 3A^3 - 6A^2 - 26A - 12I)^{-1}$ を求めよ．

(京都府立大 2008)　　(m20086703)