0.1 z, w は複素数であり，$i = \sqrt{-1}$ である．また，x, y, r, θ は実数である．

(1) 複素数 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ が与えられたとき，$w^n = z$（n は正の整数）の根は n 個であり，

$$w_k = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1)$$

と表せることを示せ.

(2) 方程式 $w^5 = 1$ を満たす 1 つの解が，$w = \cos 72^\circ + i\sin 72^\circ$ と表せることを示せ．また，$\cos 72^\circ$ の値を求めよ.

(3) 複素数 $z = x + iy$ が与えられたとき，関数 $w(z) = e^z$ が正則であることを証明せよ.

(北海道大 2009) (m20090101)

0.2 行列，$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ が与えられている．以下の問いに答えなさい.

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^3 + \cdots + \boldsymbol{A}^{100}$ を計算しなさい．ここで，I は単位行列である.

(北海道大 2009) (m20090102)

0.3 (1) 関数 $f(t) = \cos(\omega t)$ の（片側）ラプラス変換

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

を求めなさい．ただし，e は自然対数の底で，s はその実数部が正の複素数である.

(2) $s = c + i\phi$ とおく．ここで，i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ で，c, ϕ は実数とする．このとき，$G(\phi) = \lim_{c\to+0} cF(c + i\phi)$ を求めなさい.

(北海道大 2009) (m20090103)

0.4 原点を通り x 軸上に中心を有する円 C は無数にあるが，一般にその方程式は，$x^2 + y^2 + ax = 0$（a は非ゼロの任意の実定数）と表せる．曲線 D は，y 軸およびすべての円 C に，交点において直交する．このような曲線 D を，以下の手順で求めよ.

(1) 円 C の点 (x, y) $(y \neq 0)$ における円 C の接線の勾配 m を求めよ.

(2) 曲線 D の方程式を $y = y(x)$ $(x \pm y \neq 0)$ とし，点 (x, y) における曲線 D の接線の勾配 $\dfrac{dy}{dx}$ と，(1) で求めた勾配 m には，直交関係 $m\dfrac{dy}{dx} = -1$ が成り立つ．これを用いて，曲線 D の方程式が満たすべき微分方程式

$$(x^2 - y^2)\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$

を導出せよ.

(3) (2) の微分方程式を解き，題意を満たす曲線群 D が $x - y$ 平面上でどのような図形を描くか答えよ.

(北海道大 2009) (m20090104)

0.5 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $f'(x)$ および $f''(x)$ を計算せよ.

(2) 関数 $f(x)$ の増減を調べよ．

(3) 曲線 $y = f(x)$ の概形を描け．

(北見工業大 2009)　　(m20090201)

0.6 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \tan x\, dx$ を計算せよ．　ヒント ： $t = \cos x$ とおくとよい．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 \log x\, dx$ の値を求めよ．

(北見工業大 2009)　　(m20090202)

0.7 平面の直交座標 (x, y) と極座標 (r, θ) の間には $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ の関係がある．ただし，$r > 0$ とする．$z = f(x, y)$ を平面上で定義された 1 回連続微分可能関数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ および $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 等を用いて表せ．

(2) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$ を示せ．

(北見工業大 2009)　　(m20090203)

0.8 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x}{\sqrt{y}}\, dxdy$ の値を求めよ．ただし，$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 2 \leqq y \leqq 3\}$ とする．

(北見工業大 2009)　　(m20090204)

0.9 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ につき以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ．

(2) 各固有値に属する固有ベクトルをひとつ挙げよ．

(北見工業大 2009)　　(m20090205)

0.10 区間 $[a, b]$ 上の関数 $f(x)$, $g(x)$ は，

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

が成り立つとき互いに直交しているという．以下の問いに答えよ．

(1) 次の (a)〜(e) に示した関数が区間 $[-\pi, \pi]$ 上で互いに直交していることをそれぞれ示せ．ただし，k, l はともに自然数である．

(a) $\dfrac{1}{2}$ と $\cos kx$

(b) $\dfrac{1}{2}$ と $\sin kx$

(c) $\cos kx$ と $\sin lx$

(d) $\cos kx$ と $\cos lx$　$(k \neq l)$

(e) $\sin kx$ と $\sin lx$　$(k \neq l)$

(2) 区間 $[-\pi, \pi]$ 上の任意の関数 $f(x)$ は，$\dfrac{1}{2}$, $\cos kx$, $\sin kx$ の線形和によって

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + a_3\cos 3x + b_3\sin 3x + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \end{aligned}$$

と表すことができる（これをフーリエ級数展開という）．係数 a_0, a_k, b_k をそれぞれ $f(x)$ を用いて表せ．

(3) 次の関数 $f(x)$ を区間 $[-\pi\,,\ \pi]$ 上でフーリエ級数に展開せよ．

$$f(x)=\begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

(岩手大 2009)　　(m20090301)

0.11 xyz 空間に 3 点 $A(-1,\ 0,\ -3)$, $B(2,\ 2,\ -4)$, $C(-3,\ 1,\ 0)$ がある．次の問いに答えなさい．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角 θ を求めなさい．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(2) 3 点 $A,\ B,\ C$ を頂点とする三角形 ABC の面積を求めなさい．

(3) 3 点 $A,\ B,\ C$ を通る平面の方程式を求めなさい．

(4) (3) で求めた平面が，球 $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=r^2 \quad (r>0)$ に接しているとき，r の値を求めなさい．

(岩手大 2009)　　(m20090302)

0.12 行列 $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に関して，次の問いに答えなさい．

(1) 次の式を計算しなさい．

(i) A の逆行列 A^{-1}　　(ii) $\left(A+6A^{-1}\right)\left(A-6A^{-1}\right)$

(2) 行列 A で表される一次変換を f とするとき，一次変換 f による直線 $y=3x-2$ の像の方程式を求めなさい．

(3) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(岩手大 2009)　　(m20090303)

0.13 関数 $z=\log\left(x^2+2y^2\right)$ について，次の問いに答えなさい．ただし，対数は自然対数である．

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めなさい．

(2) 変数 $x,\ y$ が変数 $r,\ \theta$ の関数

$$x=r\cos\theta\,, \qquad y=r\sin\theta$$

で与えられるとき，$\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めなさい．

(3) (1) および (2) の結果を用いて，次の式が成り立つことを示しなさい．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(岩手大 2009)　　(m20090304)

0.14 1 階微分方程式

$$(x-1)\frac{dy}{dx}+2y=0\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

および 2 階微分方程式

$$(y-1)\frac{d^2y}{dx^2}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0\cdots\cdots ②$$

について，次の問いに答えなさい．

(1) 微分方程式 ① の一般解を求めなさい．

(2) 微分方程式 ② に対して，$\dfrac{dy}{dx}=u$ と変数変換することにより，y の関数 u についての 1 階微分方程式を求めなさい．ただし，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{du}{dy}u$ である．

(3) (2) で求めた 1 階微分方程式の一般解を求めなさい.

(4) 微分方程式 ② の一般解を求めなさい.

(岩手大 2009)　　(m20090305)

0.15 関数 $f(x, y) = \sin(x^2 + y)$ の 2 次偏導関数をすべて求めよ.

(秋田大 2009)　　(m20090401)

0.16 不定積分 $\displaystyle\int x^2 e^x \, dx$ を求めよ.

(秋田大 2009)　　(m20090402)

0.17 （広義の）定積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \, dx$ を求めよ.

(秋田大 2009)　　(m20090403)

0.18 2 重積分 $\displaystyle\iint_D xy \, dxdy$ を求めよ．ここで，$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ x + y \leqq 1\}$ である.

(秋田大 2009)　　(m20090404)

0.19 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列を掃き出し法を用いて求めよ.

(秋田大 2009)　　(m20090405)

0.20 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値をすべて求めよ.

(秋田大 2009)　　(m20090406)

0.21 $\boldsymbol{v}_1 = (0, 1, 1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1, 1, 0)$ で生成される実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の 2 次元部分空間の正規直交基底を求めよ.

(秋田大 2009)　　(m20090407)

0.22 正方行列 A が $A^2 = O$ を満たすとき，行列 $I + A$ は $I - A$ の逆行列となることを示せ．ここで，O と I は A と同じ型の零行列と単位行列である.

(秋田大 2009)　　(m20090408)

0.23 直交座標系 (x, y, z) において，点 O, A, B, C, D の座標がそれぞれ $O(0, 0, 0)$, $A(2, 2, -4)$, $B(3, 5, -2)$, $C(5, 1, -3)$, $D(0, 0, -6)$ で与えられるものとする．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) 線分 OA, OB, OC を隣り合う 3 辺とする平行六面体の体積 V を求めよ.

(2) 3 辺 A, B, C を通る平面 P の方程式を求めよ.

(3) (2) で求めた平面 P を接平面とし，2 点 O, D を通る球の方程式を求めよ.

(4) 点 A を x 軸の回りに回転した後，平面 Q : $\sqrt{2}x + y + 3z = 2$ に直交する方向へ移動することにより，点 O に移すことを考える．この場合の x 軸回りの回転角 θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ と平面 Q に直交する方向の移動量 L を求めよ.

(東北大 2009)　　(m20090501)

0.24 x を実数とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sin(a \cos x)$$

と定義する．ただし，a は実数の定数である．$f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $a = 1$ のとき $f(x) = 0$ を満たすすべての実数 x を求めよ．

(2) $a = 1$ のとき $f'(x) = 0$ を満たすすべての実数 x を求めよ．

(3) $a = \pi$ のとき $y = f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における増減,極値を調べ，増減表を書き，グラフの概形を描け．ただし，グラフには $y = 0$ となる点の x の値も記すこと．

(東北大 2009)　　(m20090502)

0.25 t, x, y を実数，A を実数の定数とし，以下の問いに答えよ．

(1) 置換 $t = x + \sqrt{x^2 + A}$ を用い，不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}}\,dx$ を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \sqrt{x^2 + A}\,dx$ を求めよ．

(3) $x \geqq 0,\ y \geqq 0$．曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ の長さを求めよ．

(東北大 2009)　　(m20090503)

0.26 変数 x に関する n 次以下の実数係数多項式の全体を $P_n[x]$ とおくと，$P_n[x]$ は $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ を基底とする実ベクトル空間である．このとき，次に答えよ．

(1) $W = \{p(x) \in P_4[x] \ :\ p(0) = p(1) = 0\}$ の基底を求めよ．

(2) $D(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$ によって定義される関数 $D\ :\ P_3[x] \to P_2[x]$ が線形写像であることを示せ．

(3) (2) の関数 D が全射であるか否かについて述べよ．

(4) (2) の関数 D が単射であるか否かについて述べよ．

(東北大 2009)　　(m20090504)

0.27 行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めよ．さらに，A を対角化する直交行列を求めよ．

(東北大 2009)　　(m20090505)

0.28 $a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ が収束することを証明し，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(東北大 2009)　　(m20090506)

0.29 関数 $f(x) = x^{1/5}$ のテーラー展開を用い，$30^{1/5}$ の小数展開を誤差 (剰余項 R_n) < 0.0001 の範囲で求めよ．

(東北大 2009)　　(m20090507)

0.30 領域 $D = \{(x, y)\ :\ 0 \leq x + y \leq 2,\ 0 \leq x - y \leq 2\}$ として，次の計算をせよ．

$$\iint_D (x - y)e^{x+y}\,dxdy$$

(東北大 2009)　　(m20090508)

0.31 (1) $(-1,1)$ を定義域とする関数 f を，$f(x)=\arctan x+\arctan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ で定める．ただし，$\arctan x$ は，$\tan x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数とする．

(a) $f'(x)$ を求めよ．

(b) $\arctan\dfrac{1}{2}+\arctan\dfrac{1}{3}=\dfrac{\pi}{4}$ を示せ．

(2) g を $(-1,1)$ 上で定義された C^2 級関数とする．g のテイラー展開あるいはロピタルの定理を用いて

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(h)+g(2h)+g(-3h)-3g(0)}{h^2}=7g''(0)$$

を示せ（ただし，ロピタルの定理を用いる際は，定理の仮定を満たしていると確認する事）．

(3) h を $(-2,2)$ 上で定義された C^1 級関数とする．$h(0)=0$ であれば，広義積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{h(x)}{x^{3/2}}\,dx$ が存在することを示せ．

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090601)

0.32 (1) 正方行列 A と B がともに上三角行列であるとき，積 AB もまた上三角行列となることを示せ．

(2) 次の行列 A について以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\4&0&0&-1\end{pmatrix}$$

(a) A の固有値を求め，それぞれの固有値に対する A の固有空間の基底を一組求めよ．

(b) 適当な正則行列 P を求めて $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにせよ．

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090602)

0.33 関数 $f(x)=\log(1-x)$ を考える．

(1) 関数 $f(x)$ の $x=0$ のおけるマクローリン展開を考え，3 次関数による近似 $S_3(x)$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{-k}}{k}$ を求めなさい．

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090603)

0.34 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int xe^{x^2}\sin x^2\,dx$

(2) $\displaystyle\int\frac{x^3+3}{x^2-2x+2}\,dx$

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090604)

0.35 $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f は，

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} を \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} に，\quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} を \begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix} に，\quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} を \begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix} に，$$

それぞれ写すとする．

(1) ベクトル $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ の線形写像 f による像を求めなさい．

(2) 線形写像 f で $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ に写される $\mathbb{R}^3$ の元を求めなさい.

(お茶の水女子大 2009) (m20090605)

0.36 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求め対角化しなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2009) (m20090606)

0.37 行列

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値，および，独立な固有ベクトルをすべて求めよ

(お茶の水女子大 2009) (m20090607)

0.38 関数

$$f(x) = |\cos x| \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

のフーリエ級数を求めよ.

(お茶の水女子大 2009) (m20090608)

0.39 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

の独立な 2 つの解 $y_1(x)$, $y_2(x)$ を用いて，微分方程式

$$\frac{d^2z}{dx^2} + p(x)\frac{dz}{dx} + q(x)z = f(x)$$

の特解を

$$z(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

とおく．$\dfrac{dc_1}{dx}y_1 + \dfrac{dc_2}{dx}y_2 = 0$ となるように $c_1(x)$, $c_2(x)$ を選ぶことにより，特解が

$$z(x) = -y_1(x)\int^x \frac{f(x')y_2(x')}{W(x')}\,dx' + y_2(x)\int^x \frac{f(x')y_1(x')}{W(x')}\,dx'$$

と与えられることを示せ．ここで，$W = y_1\dfrac{dy_2}{dx} - y_2\dfrac{dy_1}{dx}$ である.

(お茶の水女子大 2009) (m20090609)

0.40 2 次元のベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y) = (A_x(x,y), A_y(x,y))$，に対して，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$ は

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}$$

で与えられる．$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$ を極座標 $(x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$ であらわすと

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}$$

となることを示せ．ここで，A_r は $\boldsymbol{A}$ の r 方向（動径方向）成分，A_θ はそれに垂直な方向の成分である.

(お茶の水女子大 2009) (m20090610)

0.41　複素数 $z(t) = e^{i\omega t}$ を考える．ただし，t は 0 以上の実数，i は虚数単位，e は自然対数の底である．

(1) ω が実数であるとき，$z(t)$ は複素平面上で t の関数としてどのような軌跡を描くかを，ω が正の場合，負の場合について図示せよ．$z(t)$ の移動方向を矢印で示し，実軸，虚軸との交わる点の位置も明示すること．

(2) ω が複素数 $a + ib$ で表されるとき（a は正の実数，b は 0 でない実数），$z(t)$ は複素平面上で t の関数としてどのような軌跡を描くか図示せよ．$z(t)$ の移動方向を矢印で示し，実軸，虚軸と交わる最初の 4 点（出発点も含める）の値を求め，複素平面上に図示せよ．また，$b/a \to \infty$ で軌跡はどのような曲線になるかを図示せよ．

(3) (2) において，$z_n = z(n)$，ただし n を整数とする．複素平面上における z_{n+1} と z_n の間の距離 $d_n = |z_{n+1} - z_n|$ を a, b, n の関数として求めよ．

(4) (3) で求めた d_n を用いて，$D = \sum_{n=0}^{N-1} d_n$ を a, b, N の関数として求めよ．　また，a を固定して $b \to \infty$ および $b \to 0$ の極限をとったときの D の値を求めよ．ただし N は自然数とする．

(東京大 2009)　　(m20090701)

0.42　(1) (a) X を値が自然数 $1, 2, \cdots, a$ のみをとる確率変数とする．X の平均 $E(X)$ は，

$$E(X) = \sum_{k=1}^{a} kP(X = k)$$

で定義される．ここで，$P(X = k)$ は，$X = k$ となる確率である．このとき，次の等式が成り立つことを証明せよ．ただし，$P(X \geq k)$ は，$X \geq k$ となる確率である．

$$E(X) = \sum_{k=1}^{a} P(X \geq k) \tag{1}$$

(b) X の 2 乗の平均は，

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{a} k^2 P(X = k)$$

で定義される．このとき，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{a} (2k - 1) P(X \geq k) \tag{2}$$

(2) 袋の中に白い玉が 1 個，赤い玉が $a - 1$ 個入っている．袋から，玉を一つずつ無作為に取り出し，袋の中に返さないものとする．このとき，以下の設問に答えよ．

(a) 白い玉が出るのが k 回目以降である確率を求めよ．ただし，この確率は，「最初の $k - 1$ 回は，常に赤い玉が出てくる確率」と等しいことを利用してよい．

(b) (a) の回答と式 (1) を用いて，白い玉が出るのに要する平均の回数を求めよ．

(c) (a) の回答と式 (2) を用いて，白い玉が出るのに要する回数の分散を求めよ．
ただし，確率変数 X の分散 $V(X)$ は，$E(X^2) - (E(X))^2$ で与えられる．

(東京大 2009)　　(m20090702)

0.43　2 つの媒介変数 s, θ によって表される曲面 S

$$S \;:\; x(s, \theta) = (s\cos\theta\,,\; s\sin\theta\,,\; \alpha\theta)\,,\; (0 \leq s \leq 1)\,,\; (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

について，以下の設問に答えよ．α は 0 以上の定数とする．

(1) $x(s, \theta)$ の媒介変数 s を 1 と固定する事により，曲線 C

$$C \;:\; y(\theta) = x(1, \theta) = (\cos\theta\,,\; \sin\theta\,,\; \alpha\theta)\,,\; (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

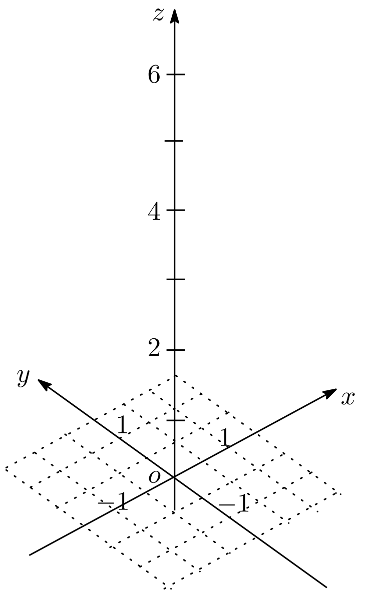
を得る．$\alpha = 1$ の場合について，下図の座標軸を参考にして曲線の概略を解答用紙に手描きせよ．

(2) C 上の点を $P(= y(\theta))$ とする．P における接線の方程式を導出せよ．

(3) (2) で求めた接線と xy 平面の交点を Q とする．θ が 0 から 2π まで連続的に変化するとき，Q が描く曲線の長さ ℓ を求めよ．

(4) $\alpha = 0$ のとき，曲面 S は xy 平面上の単位円盤に一致する．$\alpha = 1$ としたとき，曲面 S の面積は，単位円盤の面積の何倍になるかを求めよ．ただし，次の不定積分の公式を使ってよい．

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2} + \log_e\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right\} + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$



(東京大 2009)　　(m20090703)

0.44　行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1, λ_2 とそれらに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ をそれぞれ求めよ．ただし，絶対値が大きい方の固有値を λ_1 とする．

(2) xy 平面上の 3 点 $P(p_1,\, p_2)$, $Q(q_1,\, q_2)$, $R(r_1,\, r_2)$ を頂点とする三角形 PQR の面積 S の導出過程を示し，各頂点の座標 p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2 により表せ．また，各頂点の位置ベクトルが $\boldsymbol{A}$ により一次変換された際，その三角形の面積は何倍になるかを求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ をとり，$\boldsymbol{a}$ に $\boldsymbol{A}$ を n 回かけたベクトルを $\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ とする．その成分 α_n, β_n および $\boldsymbol{A}^n$ を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(4) 極限値 $L = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n}{\beta_n}$ が一定の値に収束することを示し，その値を求めよ．

(東京大 2009)　　(m20090704)

0.45　(1) 微分方程式

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

について，左辺がある関数 $u(x,y)$ の全微分 $du(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy$ に等しいならば，微分方程式 (1) の一般解は $u(x,y) = C$ (C は任意定数) で与えられる．このような方程式 (1) は完全微分形であるという．以下の設問に答えよ．

(a) 微分方程式

$$-ydx + xdy = 0$$

は，完全微分形ではないが，両辺に $\dfrac{1}{xy^\alpha}$ をかけることによって完全微分形の方程式を得ることができる (αは定数)．α の値を求め，完全微分形の微分方程式を導出せよ．

(b) (a) で得られた完全微分形の微分方程式を，$x=1$ のとき $y=e$ の条件の下で解け．ただし，e は自然対数の底である．

(2) (a) 微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=0 \qquad (2)$$

について，$x=e^t$ と変数変換することにより定係数の微分方程式を導出せよ（その過程も示せ）．ただし，e は自然対数の底である．

(b) (a) で導出した微分方程式を解くことにより微分方程式 (2) の一般解を求めよ．

(c) 微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=x\log_e x$$

について，$x=1$ において $y=1$，$\dfrac{dy}{dx}=0$ となる解を求めよ．

(東京大 2009)　　(m20090705)

0.46 実対称行列 A について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値がどれも零でないことと A が正則であることは同値であることを示せ．

(2) $A=\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$ に対し，適当な直交行列 P によって $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにせよ．

(東京工業大 2009)　　(m20090801)

0.47 $C:=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & p & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ -3 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ，$D:=\begin{pmatrix} 3 & 4 & q \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．ただし，p，q は定数である．

(1) C の行列式を求めよ．

(2) D および CD の階数を求めよ．必要に応じ p，q の値で場合わけして答えよ．

(東京工業大 2009)　　(m20090802)

0.48 $\beta,\gamma<0$ とする．次の広義積分の値を求めよ．ただし，広義積分が ∞ に発散する場合には，その値を ∞ とする．

(1) $\displaystyle\iint_{0<x^2+y^2\leq 1}(x^2+y^2)^\beta dxdy$　　　(2) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\geq 1}(x^2+y^2)^\gamma dxdy$

(東京工業大 2009)　　(m20090803)

0.49 実変数 t の関数 $x(t)$ が微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{dt}$$

を満たしている．

(1) $t\to-\infty$ のとき，$x(t)$ は有限の値に収束することを示せ．

(2) $t\to+\infty$ のとき，$x(t)$ が $+\infty$ にも $-\infty$ にも発散しないならば，$x(t)$ は定数関数であることを示せ．

(東京工業大 2009)　　(m20090804)

0.50 a を実数として，$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & a \\ 4 & 3a & 0 \end{bmatrix}$ ，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ，$\boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする．

(1) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{0}$ でない解 $\boldsymbol{x}$ をもつような a の値をすべて求めなさい．

(2) (1) の方程式の $\boldsymbol{0}$ でない解 $\boldsymbol{x}$ のうち，x_1, x_2, x_3 がすべて整数で，$x_1 + x_2 + x_3$ が最小の正の整数となるような $\boldsymbol{x}$ を，(1) で定めたそれぞれの a について，求めなさい．

(東京農工大 2009)　　(m20090901)

0.51 $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の表す xy 平面上の曲線を C とする．次の問いに答えなさい．

(1) $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{dy}{dx}$ を求め，t の式で表しなさい．

(2) $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求め，t の式で表しなさい．

(3) x の関数 $y = f(x)$ の極値を求めなさい．ただし，極小値か極大値か，そのときの x の値も書きなさい．

(4) 曲線 C の全長 L を求めなさい．

(東京農工大 2009)　　(m20090902)

0.52 2 変数関数 $f(x, y) = xy^2 - x^2y + 2$ について，$f(x, y) = 0$ で定まる陰関数 $y = \varphi(x)$ の極値を求めなさい．ただし，極小値か極大値か，そのときの x の値も書きなさい．

(東京農工大 2009)　　(m20090903)

0.53 次の定積分，二重積分の値を求めなさい．ここで，$\tan^{-1} x$ は，$\tan x$ の逆関数（アークタンジェント）のことである．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \tan^{-1} x\, dx$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^3}\, dxdy$,　$D = \{(x, y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2 + y^2 \geqq 1\}$

(東京農工大 2009)　　(m20090904)

0.54 行列 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ で定義される xy 平面の 1 次変換について，以下の問いに答えよ．

(1) 直線 $y = 3x$ の像を求めよ．

(2) 原点を通る直線のうち，その像が原点だけになるものを求めよ．

(3) 原点を通る直線のうち，その像がその直線自身になるものを求めよ．

(4) この 1 次変換による xy 平面の像を図示せよ．

(電気通信大 2009)　　(m20091001)

0.55 $V = \mathbb{R}^4$ とし，$B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ を V の基底とする．$f : V \to V$ を

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_2, \quad f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_3, \quad f(\boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_1, \quad f(\boldsymbol{v}_4) = \boldsymbol{0}$$

となる線形写像とし，$g : V \to V$ を

$$g(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \quad g(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3, \quad g(\boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_1, \quad g(\boldsymbol{v}_4) = \boldsymbol{v}_4$$

となる線形写像とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Ker}\, f$ の基底と次元，$\mathrm{Im}\, f$ の基底と次元を求めよ．

(2) 線形写像 $g : V \to V$ の基底 B に関する表現行列 M を求めよ．さらに，行列式 $\det M$ を求めよ．

(3) g は同型写像である．g の逆写像 g^{-1} の基底 B に関する表現行列 N を求めよ．

(電気通信大 2009)　　(m20091002)

0.56 関数 $f(x) = \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x \quad (x > 0)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ．

(2) $g(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ とおく．$g(x)$ を求めよ．

(3) $g(x) > 0 \ \ (x > 0)$ であることを示せ．

(4) $f(x)$ の値域 $\{f(x) \mid x > 0\}$ を求めよ．

(電気通信大 2009)　　(m20091003)

0.57 次の微分方程式を解け．

(1) $\sin x \cos^2 y - \dfrac{dy}{dx}\cos^2 x = 0$

(2) $\dfrac{dy}{dx} + y \tan x = \sin 2x$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = \sin 2x$

(電気通信大 2009)　　(m20091004)

0.58 複素関数

$$f(z) = \frac{z^3+3}{z-2i}\ , \quad g(z) = \sin\left(f(z)\right)$$

について，以下の問いに答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする．

(1) $f(1)$, $f'(1)$, $g(0)$, $g'(0)$ のそれぞれの値の実部と虚部を求めよ．

(2) 次の積分値を求めよ．

$$\int_C \frac{f(z)}{z^2-1}dz$$

ただし，C は複素平面の原点を中心とし半径 $\dfrac{3}{2}$ の円を正の向きに 1 周する積分路である．

(電気通信大 2009)　　(m20091005)

0.59 次の微分方程式を解け．

(1) $x^2\dfrac{dy}{dx} - y = 0$

(2) $x\dfrac{dy}{dx} + y + 4x = 0$

(横浜国立大 2009)　　(m20091101)

0.60 以下の行列 A に対して，次の問いに答えよ．

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A^2 を求めよ.

(3) A の逆行列を求めよ.

(横浜国立大 2009)　　(m20091102)

0.61 次の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{e^x-e^4}{x-4}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\log(1+x^2)}}$

(千葉大 2009)　　(m20091201)

0.62 (1) $A,\ T$ が正則行列のとき，任意の整数 $m \geq 0$ において，

$$(T^{-1}AT)^m = T^{-1}A^mT$$

が成立することを示しなさい.（T^{-1} は T の逆行列）

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(3) A^5 を求めなさい.

(千葉大 2009)　　(m20091202)

0.63 $a > 0$ として，次の重積分に関して各問いに答えなさい.

$$I(a) = \iint_D e^{-(x+y)}dxdy$$
$$D = \{(x,y) \mid x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ x+y \leq a\}$$

(1) 領域 D を図示しなさい.

(2) 重積分 $I(a)$ を求めなさい.

(3) $I(a)$ を a の関数と考え，定義域 $0 < a < +\infty$ に対して，極値，変曲点，極限を考慮して，そのグラフを書きなさい.

(千葉大 2009)　　(m20091203)

0.64 次の微分方程式について，以下の問いに答えよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{4+x}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{6+2x}{x^2}y = 0$$

(1) $y = x^2$ がこの微分方程式の解となっていることを示しなさい.

(2) $y = ux^2$（u は x の関数）がこの微分方程式の解となるために，u の満たすべき微分方程式を求めなさい.

(3) (2) で求めた微分方程式を u について解き，最初の微分方程式の解を求めなさい.

(千葉大 2009)　　(m20091204)

0.65 いま以下のような連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = b$ があるとします.

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & -8 & 0 \\ -2 & 10 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 10 \end{bmatrix} = b\,.$$

この連立方程式を解くために以下のはきだし法を用いることを考える.

(a) 1 行目の方程式を 2 倍して 2 行目の方程式から引く．この操作をする行列を E とする．

(b) 1 行目の方程式を -1 倍して 3 行目の方程式から引く．この操作をする行列を F とする．

(c) これらの操作の後，2 行目の方程式を -1 倍して 3 行目の方程式から引く．この操作をする行列を G とする．

この結果として新しい係数行列 U をもった以下のような連立一次方程式 $U\boldsymbol{x} = d$ がつくられた．

$$U\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -14 \\ 1 \end{bmatrix} = d\,.$$

(1) この連立一次方程式の解 $\boldsymbol{x}$ を求めなさい．

(2) 行列 U は上三角行列になっているが，このはきだし法を行う過程で用いた $GFEA = U$ となる行列 E, F, G を求めなさい．

(3) またこれらの行列のうち E の作用の逆，すばわち，第 1 行の 2 倍を第 2 行に加える行列を求めなさい．この行列を E' とすると $E'\,E$ はどんな行列になるか答えなさい．

(4) 上記の (2) から $E^{-1}F^{-1}G^{-1}U = A$ と表せるが，この行列 $E^{-1}F^{-1}G^{-1} = L$ が下三角行列になることを示しなさい．

(5) 上記の (2) から (4) ではきだし法を用いて，行列 A が下三角行列 L と上三角行列 U との積，すなわち，$A = LU$ と表されることがわかった．これと同じ考え方を用いて以下の行列 B を下三角行列と上三角行列との積であらわしなさい．

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(筑波大 2009)　　　(m20091301)

0.66 指数関数 e^x の性質に関する以下の問いに答えなさい．

(1) 自然数 n を用いて定義された以下の極限値を考える．

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

(1a) 2 項展開の公式を用いて下の関係式を示しなさい．

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

(1b) さらに $\dfrac{1}{n!} < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ を用いて $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が有界であることを示しなさい．

(2) 有界なる単調数列は収束するので (1) で与えられた極限は極限値をとり，これを e と書くことにする．この e が自然数の底である．　このとき以下を示しなさい．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

(3) 上記の (2) を使って

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

が成立することをまず示し，その上で微分の定義に基づいて $\{e^x\}' = e^x$ を示しなさい．

(4) $f(x) = e^x$ を n 次のマクローリン展開（$x = 0$ のまわりでのテイラー展開）し，その剰余項を求めなさい．

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0$ を示し，これを用いて $\displaystyle e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ を示しなさい．

(筑波大 2009)　　(m20091302)

0.67 $g(x,y)=x^2+2y^2-1=0$，　$x,y\geq 0$ の条件の下で関数 $f(x,y)=xy$ の最大値と最小値を求めなさい．

(筑波大 2009)　　(m20091303)

0.68 2 つの連続な確率変数 X, Y の同時確率密度関数が以下に与えられる．

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 2-x-y & , \quad 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1 \\ 0 & \quad \text{それ以外} \end{cases}$$

(1) X の期待値を求めなさい．

(2) $X=0.5$ の時の Y の条件付確率密度関数を求めなさい．

(筑波大 2009)　　(m20091304)

0.69 (1) 複素変数 z のべき関数 $f(z)=z^i$ $(i=\sqrt{-1})$ において，$f(i)$ の値をすべて求めよ．

(2) xyz 空間における曲面 $z=(x+y)^2e^{x-y}$ 上の点 $(1,0,e)$ での接平面の方程式を求めよ．

(筑波大 2009)　　(m20091305)

0.70 実変数 x の関数 $f_n(x)=x^n\log x$ （n は自然数）について，以下の問いに答えよ，

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}f_n(x)$ （$f_n(x)$ の $x=0$ における右側極限値）を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ を求めよ．

(3) $f_n(x)$ の第 $n+1$ 階導関数を求めよ．

(筑波大 2009)　　(m20091306)

0.71 2 次曲面 $x^2+3y^2+3z^2-2yz+2y+2z=0$ の標準形を求めよ．また，曲面の名称を答えよ．

(筑波大 2009)　　(m20091307)

0.72 変数 x,y の関数 $z=f(x,y)$ を変数変換 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ により新しい変数 r, θ で表す．このとき，関数 $z=f\left(x(r,\theta),\ y(r,\theta)\right)$ について以下の設問に答えよ．

(1) 1 階偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を r, θ, $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を用いて表せ．

(2) 2 階偏導関数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ は

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\theta}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}$$

であることを示せ．

(筑波大 2009)　　(m20091308)

0.73 領域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\right\}$ 上での重積分 $I=\displaystyle\iint_D(x^2+y^2)dxdy$ を以下の設問に従って求めよ．ただし，$a>0$, $b>0$ とする．

(1) $\begin{cases} x=ar\cos\theta \\ y=br\sin\theta \end{cases}$ により変数変換を行う．積分領域 D を変数 r, θ で表せ．

(2) 前問 (1) の変数変換を行ったときのヤコビアンを求めよ.

(3) 以上の結果を用い重積分 I を求めよ.

(筑波大 2009)　　(m20091309)

0.74 独立変数が 1 個 (t), 従属変数が 2 個 $(x = x(t),\ y = y(t))$ の連立微分方程式:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + \sqrt{2}y \\ \dfrac{dy}{dt} = \sqrt{2}x + y \end{cases}$$

を考える. 初期条件を $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ としたときの解を次の設問に従って求めよ.

(1) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ とおいて, 与えられた微分方程式を行列 A を使って, $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$ の形に書き換える. A を具体的な行列の形で表せ.

(2) A の固有値, 固有ベクトルをすべて求めよ. 固有ベクトルは正規化（規格化）し, それを $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ とする.

(3) $\boldsymbol{x}(t) = c_1(t)\boldsymbol{p}_1 + c_2(t)\boldsymbol{p}_2$ とおくことにする. $c_1(0),\ c_2(0)$ は x_0, y_0 を使ってどう書けるか.

(4) $c_1(t),\ c_2(t)$ が満たす（t に関する）微分方程式を求めよ.

(5) 前問 (4) で求めた微分方程式を解いて, $c_1(t),\ c_2(t)$ を求めよ. 初期条件 $c_1(0),\ c_2(0)$ は, 設問 (3) で得ていることに注意せよ.

(6) $x(t),\ y(t)$ を x_0, y_0 を使って表せ.

(筑波大 2009)　　(m20091310)

0.75 a を複素数とし, 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

によって定める.

(1) A の階数 $(= \mathrm{rank}A)$ を求めよ.

(2) $a = 1$ のとき A^{-1} を求めよ.

(筑波大 2009)　　(m20091311)

0.76 n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して, 次の 2 条件を考える.

(a) 各成分 a_{ij} は 1 または -1 である.

(b) A の二つの異なる列ベクトルは必ず直交する.

このとき, 次の問いに答えよ.

(1) n が奇数のとき, 条件 (a) と (b) を満たす行列は存在しないことを示せ.

(2) n 次正方行列 A が条件 (a) と (b) を満たすとき,

$$^{t}\!A\,A = nE$$

となることを示せ. ただし, E は n 次単位行列, $^{t}\!A$ は A の転置行列とする.

(3) 正方行列 A が条件 (a) と (b) を満たすとき,

$$H = \begin{pmatrix} A & -A \\ A & A \end{pmatrix}$$

も条件 (a) と (b) を満たすことを示せ.

(筑波大 2009)　　(m20091312)

0.77 球 $x^2+y^2+z^2 \leqq 1$ と円柱 $x^2+y^2 \leqq x$ の共通部分の体積を求めよ.

(筑波大 2009)　　(m20091313)

0.78 $g(x)$ を整数係数の多項式とする, $n \geqq 1$ を与えられた自然数として,

$$f(x) = x^n g(x)$$

とする. このとき, すべての $k = 0, 1, 2, \cdots$ に対して, $f^{(k)}(0)$ は $n!$ の倍数になることを示せ. ただし, $f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ の k 回微分してできる多項式を表す.

(筑波大 2009)　　(m20091314)

0.79 集合 X から集合 Y への写像 $f : X \to Y$ による像に関して, 以下を示せ.

(1) 任意の部分集合 $A, B \subset X$ に対して, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ が成り立つ.

(2) f が単射（1 対 1）であるならば, 任意の部分集合 $A, B \subset X$ に対して, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ が成り立つ.

(3) X の任意の部分集合 $A, B \subset X$ に対して, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ が成り立つならば, f は単射となる.

(筑波大 2009)　　(m20091315)

0.80 整数 $n \geqq 0$ に対して定義された不定積分を $I_n = \displaystyle\int \cos^n x\, dx$ とするとき, 以下の漸化式を証明しなさい.

$$I_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geqq 2)$$

(筑波大 2009)　　(m20091316)

0.81 $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$ で定義された関数 $f(x, y) = \sin^{-1}(xy)$ の 1 次偏導関数 f_x, f_y と 2 次偏導関数 f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} を求め, この関数が極値をもたないことを証明しなさい.

(筑波大 2009)　　(m20091317)

0.82 a と b を実定数とし, x_1, x_2, x_3, x_4 を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & - & x_3 & & & = & 0 \\ 8x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 4x_3 & - & ax_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & b \end{array}$$

に関して以下の (1)〜(5) に答えよ.

(1) $a = b = 1$ のときに解は存在するか. 存在すれば, その解を求めよ.

(2) 解が $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ のみとなる a と b の条件を求めよ.

(3) 解を持たないときの a と b の条件を求めよ.

(4) 解が無限個存在するときの a と b の条件を求めよ.

(5) すべての解の集合が 4 次元実ベクトル空間の部分空間となるときの a と b の条件を求めよ.

(筑波大 2009)　　(m20091318)

0.83 (1) 関数 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい.

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x}$ の第 4 次導関数 $f^{(4)}(x)$ を求めなさい.

(3) 次の極限値を求めなさい.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos 2x)}{\log(\cos 3x)}$$

(4) xy 平面において $y = \dfrac{1}{\sin x}$ のグラフで与えられる曲線と 直線 $x = \dfrac{\pi}{3}$, $x = \dfrac{2\pi}{3}$ および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい.

(埼玉大 2009)　　(m20091401)

0.84 (1) $\boldsymbol{R}^2$ における一次変換 f は, 点 $(1, 2)$ を点 $(0, 3)$ に, 点 $(2, 0)$ を点 $(4, 2)$ に移す. このとき, 以下の問いに答えなさい.

(a) 一次変換 f を表す行列を求めなさい.

(b) 一次変換 f によって, $y = x - 1$ は, どのような図形に移されるか.

(2) 次の 2 つのベクトルについて考える.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(a) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は, 一次従属か一次独立か調べなさい.

(b) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ とするとき, $\cos\theta$ を求めなさい.

(3) 次の行列 $\boldsymbol{A}$ について考える.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) 固有値をすべて求めなさい.

(b) 固有ベクトルをすべて求めなさい.

(埼玉大 2009)　　(m20091402)

0.85 以下の微分方程式の解を求めなさい. ただし, c は実定数とする.

(1) $\dfrac{dy}{dx} + y = x$

(2) $\dfrac{dy}{dx} - xy = -y^3 e^{-x^2}$

(3) $e^y dx + xe^y dy = 0$

(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + cy = 0$

(埼玉大 2009)　　(m20091403)

0.86 次の行列の行列式の値が 0 となるような x を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 0 & x & 1 & 2 \\ -x & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 0 & 5 \\ -2 & -4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

(埼玉大 2009)　　(m20091404)

0.87 (1) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とする．ただし，θ は $0 < \theta < 2\pi$, $\theta \neq \pi$ を満たす実数とする．
次の条件 (a),(b),(c) をすべて満たすような α_1 , α_2 , $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ の組を 1 つ求めよ．

(a) α_1 , α_2 は相異なる複素数である．

(b) $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ は複素数を成分とする 2 次元ベクトルで，どちらも零ベクトルではなく，さらに $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)$ と $\dfrac{i}{2}(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)$ はともに実数を成分とするベクトルになる．

(c) $A\boldsymbol{p}_1 = \alpha_1\boldsymbol{p}_1$ かつ $A\boldsymbol{p}_2 = \alpha_2\boldsymbol{p}_2$ を満たす．

(2) B を 2 次の実正方行列とし，B のどの固有値も実数でないと仮定する．

(i) 次の (d),(e),(f) をすべて満たすような β_1 , β_2 , $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ の組が存在することを示せ．

(d) 正の実数 r と，$0 < \theta < 2\pi$, $\theta \neq \pi$ を満たす実数 θ を用いて，$\beta_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\beta_2 = r(\cos\theta - i\sin\theta)$ と表される．

(e) $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ は複素数を成分とする 2 次元ベクトルで，どちらも零ベクトルでなく，さらに $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2)$ と $\dfrac{i}{2}(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2)$ はともに実数を成分とするベクトルになる．

(f) $B\boldsymbol{q}_1 = \beta_1\boldsymbol{q}_1$ かつ $B\boldsymbol{q}_2 = \beta_2\boldsymbol{q}_2$ を満たす．

(ii) 2 次の実正則行列 M が存在して，

$$M^{-1}BM = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

となることを示せ．

(埼玉大 2009)　　(m20091405)

0.88 $f(x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ とする．

(1) $(1+x^2)f''(x) + xf'(x) = 0$ が成り立つことを示せ．

(2) 非負整数 n に対し，

$$(1+x^2)f^{(n+2)}(x) + (2n+1)xf^{(n+1)}(x) + n^2 f^{(n)}(x) = 0$$

が成り立つことを示せ．

(埼玉大 2009)　　(m20091406)

0.89 n を自然数とし，$D_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \dfrac{1}{n} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x - \dfrac{1}{n}\right\}$ とおく．α を $0 < \alpha < 1$ を満たす定数とする．次を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_{D_n} \frac{dxdy}{(x-y)^\alpha}$ を求めよ．

(2) (1) の積分値を I_n とおいたとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

(埼玉大 2009)　　(m20091407)

0.90 2つの方程式 $x+\dfrac{1}{2}y-5=0$ と $\dfrac{2}{3}x+y-5=0$ がある．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) この2つの方程式からなる連立方程式を解く際にこれらは，$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d \\ 15 \end{pmatrix}$ という行列の形式で表現できる．このときの a,b,c,d の値を求めよ．

(2) (1) で求めた a,b,c,d の値のとき，$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるような e,f,g,h の値を求めよ．

(3) このとき連立方程式の解は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ になる．i，j の値を求めよ．

(群馬大 2009)　　(m20091501)

0.91 次の3つの不等式が与えられているとき，以下の問いに答えよ．

$$\begin{cases} ax-y & \geqq & 0 \\ x-3y & \leqq & 0 \\ 4x+3y & \leqq & 30 \end{cases}$$

(1) この3つの不等式をすべて満たす領域の面積が 15 であるとき，a の値を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

(2) (1) で求めた a の値のとき，この3つの不等式をすべて満たす領域の中で，x と y の組がともに整数となるものは何組あるか．

(3) (1) で求めた a の値のとき，この3つの不等式をすべて満たす x と y の組で，$-x+y$ が最小となる x と y を求めよ．

(群馬大 2009)　　(m20091502)

0.92 赤，青，黄色の3色のサイコロを投げ，赤のサイコロの出た目を a，青のサイコロの出た目を b，黄色のサイコロの出た目を c とする．

(1) 3つの数 a,b,c をこの順に並べてできる3桁の整数 $(100a+10b+c)$ が4の倍数である確率を求めよ．なお，整数が4で割り切れるための必要十分条件は，末尾2けたの数が4で割り切れることである．

(2) 3つの数 a,b,c を用いて，$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ で表される円を描くとき，この円が点 $A(-1,-2)$ を通る確率を求めよ．

(群馬大 2009)　　(m20091503)

0.93 二次曲線 $y=2x^2+5x+3$ を考える．

(1) 二次曲線上の点 $P(-2,1)$ における法線（点 P を通り，点 P における接線と垂直に交わる直線）の方程式を求めよ．

(2) (1) の法線と二次曲線の交点の座標を求めよ．

(3) (1) の法線と二次曲線により囲まれる面積を求めよ．

(群馬大 2009)　　(m20091504)

0.94 (1) 関数 $y=\cos(x^2)$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ と $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．

(2) 次の連立不等式で表される範囲を xy 平面に図示せよ．

$$0\leqq y\leqq\frac{\sqrt{\pi}}{2},\quad y\leqq x\leqq\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(3) 次の累次積分の順序を交換し，値を計算せよ．

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \left(\int_y^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \cos(x^2) dx \right) dy$$

(茨城大 2009)　　(m20091701)

0.95 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ （a は実数）について，次の各問いに答えよ．

(1) A の階数を求めよ．

(2) A の行列式の値を求めよ．

(茨城大 2009)　　(m20091702)

0.96 (1) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = x$ を解け．

(2) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = y$ を解け．

(3) 次の連立微分方程式を初期条件 $x(0) = 0$，$y(0) = 1$ のもとで解け．

$$\frac{dx}{dt} = -y\ , \quad \frac{dy}{dt} = x$$

(茨城大 2009)　　(m20091703)

0.97 複素数 $z = x + iy$（x, y は実数）の関数 $f(z) = x^2 - y^2 + y + i(2xy - x)$ について，次の各問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) $f(z)$ はすべての z で正則で，$f'(z) = 2z - i$ となることを示せ．

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{f'(z)} dz$ の値を求めよ．ただし，C は複素平面上の円 $|z| = 1$ を正の向きに一周する閉曲線とする．

(茨城大 2009)　　(m20091704)

0.98 実数体上のベクトル空間 V 上の一次変換 f に対して，V の部分空間 Ker f を

$$\text{Ker}\ f = \{x\ :\ f(x) = 0\ ,\ x \in V\}$$

と定義する．また，$u_1,\ u_2, \cdots, u_h$ を Ker f の基底とし，それに $v_1,\ v_2, \cdots, v_k$ を加え V の基底とする．以下の各問いに答えよ．

(1) $v_1,\ v_2, \cdots, v_k$ が Ker f を法として一次独立である，すなわち

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k \in \text{Ker}\ f \quad \text{ならば} \quad c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$$

となることを示せ．

(2) $f(v_1)\ ,\ f(v_2)\ , \cdots, f(v_k)$ が一次独立であることを示せ．

(3) $f(V) = \{f(x)\ :\ x \in V\}$ とするとき，

$$\dim V = \dim \text{Ker}\ f + \dim f(V)$$

となることを示せ．

(茨城大 2009)　　(m20091705)

0.99 $f(t)$ を $[0,\infty)$ 上で連続かつ広義積分可能な関数とする． また a,b は $a,b > 0$ を満たす実数とし，$g(x,y)=f(a^2x^2+b^2y^2)$ とおく．以下の各問いに答えよ．

(1) $f(t)$ が $[0,\infty)$ 上で広義積分可能であることの定義を記述せよ．

(2) 変数変換

$$\begin{cases} x = \dfrac{r}{a}\cos\theta \\ y = \dfrac{r}{b}\sin\theta \end{cases}$$

によって，$r\theta$ 平面内の集合 $[\,0,\ 1\,]\times\left[\,0,\ \dfrac{\pi}{2}\,\right]$ は xy 平面内のどのような集合に写るか図示せよ．

(3) 等式

$$\iint_{[0,\infty)\ \times\ [0.\infty)} g(x,y)dxdy = \frac{\pi}{4ab}\int_0^\infty f(t)dt$$

が成り立つことを示せ．

(4)

$$I(a,b)=\iint_{[0,\infty)\ \times\ [0.\infty)} e^{-a^2(x^2+1)-b^2(y^2+1)}dxdy$$

とする．(3) の結果を用いて，条件 $a^2+b^2=1$ の下での $I(a,b)$ の最小値を求めよ．

(茨城大 2009)　　(m20091706)

0.100 集合 X の部分集合全体からなる集合をべき集合といい，2^X と表す．以下の各問いに答えよ．

(1) $X=\{1,\ 2,\ 3\}$ とする．このとき，2^X に属する全ての要素を記述せよ．

(2) 集合 X,Y に対して

$$X\subset Y \iff 2^X\subset 2^Y$$

となることを示せ．

(3) 集合 X,Y に対して

$$2^{X\cap Y}=2^X\cap 2^Y$$

となることを示せ．

(4) 集合 X,Y に対して

$$2^{X\cup Y}\supset 2^X\cup 2^Y$$

となることを示せ．また，$2^{X\cup Y}\subset 2^X\cup 2^Y$ とならない例を一つ挙げよ．

(茨城大 2009)　　(m20091707)

0.101 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = -2 \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 = -4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$ を解きなさい．

(山梨大 2009)　　(m20091801)

0.102 2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix} -\sin\dfrac{\theta}{2} \\ \cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ とを考える．

ただし，θ は任意の実数とする．

(1) A の固有値をすべて求めなさい．

(2) $\boldsymbol{V}$ は A の一つの固有ベクトルであることを示し，固有ベクトル $\boldsymbol{V}$ に対する A の固有値を求めなさい．

(山梨大 2009)　　(m20091802)

0.103　関数 $f(x) = \sqrt{x} - \log x \quad (x > 0)$ を考える．ただし，対数関数は自然対数によるものとする．

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい．

(2)　$f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めなさい．

(3)　$f(x)$ の極小値を求めなさい．

(山梨大 2009)　　(m20091803)

0.104　α を正の定数として，座標平面上の領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq y \leqq \alpha\}$ を考える．このとき，D における二重積分 $\displaystyle\iint_D \cos x \sin y \, dxdy$ を求め，α の式で表しなさい．

(山梨大 2009)　　(m20091804)

0.105　次の行列 $A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 8 \\ -5 & -8 & -9 \end{pmatrix}$ を考える．

(1)　A の固有値を求めよ．

(2)　A の固有ベクトルを求めよ．

(山梨大 2009)　　(m20091805)

0.106　n を自然数とするとき，

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ．

(山梨大 2009)　　(m20091806)

0.107　次の 3 つの命題を仮定する．

$\boldsymbol{S}_1$:　犯人は悪代官である．

$\boldsymbol{S}_2$:　水戸黄門は歓迎される．

$\boldsymbol{S}_3$:　悪代官は歓迎されない．

これらの命題から得られる結論をすべて述べよ．

(山梨大 2009)　　(m20091807)

0.108　次の複素数を極形式 $(re^{i\theta})$ であらわし，複素数平面上に図示せよ．

(1)　$2i$

(2)　$-1 + \sqrt{3}i$

(3)　$2 + 2i$

(新潟大 2009)　　(m20092001)

0.109　関数 $f(x, y) = 4x^3y + 3x^2y^2 + xy^3 + y^4$ の 1 階偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$，2 階偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ と $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(新潟大 2009)　　(m20092002)

0.110　ベクトル $\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{m}$ は，$\boldsymbol{l} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{m} = -\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ である．ただし，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x，y，z 方向の単位ベクトルを表す．

(1) $\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{m}$ の内積 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{m}$ の外積 $\boldsymbol{l}\times\ \boldsymbol{m}$ を求めよ.

(3) $\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{m}$ に垂直な単位ベクトルを求めよ.

(新潟大 2009)　　(m20092003)

0.111 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ について行列式と逆行列を求めよ.

(新潟大 2009)　　(m20092004)

0.112 物体の温度の時間変化は周囲の温度との温度差に比例することが知られている. 30℃ に保たれた部屋で, ある物体の温度が時間とともにどのように変化するか調べた. その結果, 90℃ から 60℃ になるのに 30 分かかった. さらに 30 分経った後の物体の温度を求めよ.

(新潟大 2009)　　(m20092005)

0.113 (1) A を 3 次実正方行列とする. 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解を持つための必要十分条件は, A が正則（可逆）でないことである. このことを証明せよ.

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1-a & 2 & 2 \\ 1 & 2-a & -1 \\ -1 & 1 & 4-a \end{pmatrix}$ に対して, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解を持つとき, a の値を求めよ. 更に, 求めた a の値に対して, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解を求めよ.

(新潟大 2009)　　(m20092006)

0.114 関数 $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(2x^2+y^2)$ について, 次の各問に答えよ.

(1) $f(x,y)$ の 2 階までの偏導関数をすべて求めよ.

(2) $f(x,y)$ の極大値および極小値を求めよ.

(新潟大 2009)　　(m20092007)

0.115 (1) $x,\ y,\ z$ に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y - 2z = a \\ 2x - y - z = b \\ 3x + 2y - 5z = c \end{cases}$$

が解を持つための必要十分条件は, $7a+b-3c=0$ が成り立つことである. このことを示せ.

(2) 実数 $x,\ y,\ z$ に関する関数

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$$

の最小値を求めよ. ここで, $||\boldsymbol{v}||$ は標準内積に関するベクトル $\boldsymbol{v}$ の大きさである.

(新潟大 2009)　　(m20092008)

0.116 極座標表示の曲線 $C\ :\ r = 1+\cos\theta\quad (-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$ について, 次の各問に答えよ.

(1) xy 座標で表したとき, x と y の最大値, 最小値を求めよ. また, C の概形を描け.

(2) C で囲まれる図形の面積を求めよ.

(3) C の長さを求めよ.

(新潟大 2009)　　(m20092009)

0.117 (1) バスが毎時 0 分にバス停に到着する．バスの時刻を知らずにバス停に来た人がバスに乗るまでの時間の期待値を求めなさい．

(2) バスが毎時 0 分，25 分にバス停に到着する．バスの時刻を知らずにバス停に来た人が 25 分のバスに乗る確率を求めなさい．

(3) $0 < x < y < 60$ とする．バスが毎時 0 分，x 分，y 分にバス停に到着する．バスの時刻を知らずにバス停に来た人がバスに乗るまでの時間の期待値 $f(x, y)$ を求めなさい．

(4) $f(x, y)$ の最小値およびそのときの x, y を求めなさい．

(長岡技科大 2009)　　(m20092101)

0.118 (1) xy 平面上の点 (x, y) の y 軸に関する対称点を (x', y') とするとき，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる行列 A を求めなさい．

(2) xy 平面上の点 (x, y) の直線 $y = ax$ に関する対称点を (x', y') とするとき，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる行列 B を求めなさい．

(3) 行列の積 BA が角度 $\dfrac{\pi}{3}$ の反時計まわりの回転を表すとき，a の値を求めなさい．

(長岡技科大 2009)　　(m20092102)

0.119 (1) 不定積分 $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx$ を求めなさい．

(2) xy 平面で，$t \leqq x^2 + y^2 \leqq 2t$ を満たす部分を D_t とする．D_t の概形をかき，その面積を求めなさい．

(3) t が正の実数の範囲を動くとき，2 重積分 $V(t) = \displaystyle\iint_{D_t} e^{-x^2-y^2}dxdy$ の最大値を求めなさい．

(長岡技科大 2009)　　(m20092103)

0.120 連立微分方程式

$$\begin{cases} x'(t) &= -4y(t) \\ y'(t) &= x(t) \end{cases}$$

について以下の問いに答えなさい．

(1) 一般解を求めなさい．

(2) 初期条件 $x(0) = 0$，$y(0) = 1$ を満たす解を求めなさい．

(長岡技科大 2009)　　(m20092104)

0.121 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 行列式 $\det A$ を求めよ．

(2) $\det A = 0$ のとき，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解け．

(3) $\det A \neq 0$ のとき，逆行列 A^{-1} を求めよ．

(金沢大 2009)　　(m20092201)

0.122 $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x\,,\ \dfrac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$ を示せ.

(2) $\cosh(\alpha+\beta) = \cosh\alpha\,\cosh\beta + \sinh\alpha\,\sinh\beta$ を示せ.

(3) $f(x) = e^{x\cosh\alpha}\cosh(x\sinh\alpha)$ とする．ただし，α は定数とする．

$$\frac{d^n f}{dx^n} = e^{x\cosh\alpha}\cosh(n\alpha + x\sinh\alpha)\,,\quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

を示せ.

(金沢大 2009)　　(m20092202)

0.123　次の問に答えよ.

(1) 変数変換 $x = ar\cos\theta\,,\ y = br\sin\theta$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ．ただし，$a,\ b$ は正の定数とする.

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(1+2x^2+y^2)^2}\,dxdy\,,\quad D = \{(x, y)\ :\ x \geqq\ 0\,,\ y \geqq\ 0\}$ を求めよ.

(金沢大 2009)　　(m20092203)

0.124　行列 $A = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考える．次の問いに答えよ.

(1) A のすべての固有値を求め，それぞれの固有値に対する固有ベクトルを与えよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P をひとつ求めよ.

(金沢大 2009)　　(m20092204)

0.125　1 変数 x の実数を係数とする 2 次以下の多項式全体のなすベクトル空間 V を考える.

(1) $i = 0, 1, 2$ について，$x^i = \displaystyle\sum_{j=0}^{2} a_{ij}(1+jx)^2$ を満たす a_{ij} を求めよ.

(2) $\{1,\ (1+x)^2,\ (1+2x)^2\}$ は V の基底であることを示せ.

(金沢大 2009)　　(m20092205)

0.126　(1) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \frac{1}{n}$$

を示せ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \log n$ で定めるとき，$a_n > 0$ かつ $a_n > a_{n+1}$ となることを示せ.

(金沢大 2009)　　(m20092206)

0.127　$\boldsymbol{R}^2$ 上の関数 $f(x, y) = xy(x^2+y^2-1)$ の極値を求めよ.

(金沢大 2009)　　(m20092207)

0.128　$a > 0$ とする．座標空間内に球面 $x^2+y^2+z^2 = a^2$ と円柱 $x^2+y^2 = ax$ で囲まれる部分の体積を求めよ.

(金沢大 2009)　　(m20092208)

0.129 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}e^{2\log x}$　(2) $\dfrac{d}{dx}x^x$　(3) $\dfrac{d^2}{dx^2}\sin(e^x)$

(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{4x^2+1}$　(5) $\displaystyle\int x\log|x|\,dx$

(富山大 2009)　(m20092301)

0.130 (1) 位置ベクトル $\overrightarrow{r}=(x,y,z)$ とし，スカラー関数
$f(x,y,z)=\dfrac{1}{|\overrightarrow{r}|}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ の勾配 $\mathrm{grad}\,f$ を，$\overrightarrow{r}$ を用いて表せ.

(2) ベクトル関数 $\overrightarrow{A}(x,y,z)=(x^2y,xy^2,2z)$ の発散 $\mathrm{div}\,\overrightarrow{A}$ を求めよ.

(3) スカラー関数 $f(x,y,z)$ について，その勾配の回転 $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,f$ は，常に零ベクトルとなることを示せ.

(富山大 2009)　(m20092302)

0.131 行列 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) A^2 を求めよ.

(2) A の行列式を求めよ.

(3) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(4) 固有値と固有ベクトルを求めよ.

(富山大 2009)　(m20092303)

0.132 半径 a の球の体積 V を求める．以下の問いに答えよ.

(1) 直交座標 (x,y,z) を用いて，V を積分表示せよ.

(2) (x,y,z) の極座標 (r,θ,φ) への変換

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$$

を用いて，$\dfrac{\partial x}{\partial r}$, $\dfrac{\partial x}{\partial\theta}$, $\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}$, $\dfrac{\partial y}{\partial r}$, $\dfrac{\partial y}{\partial\theta}$, $\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}$, $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial\theta}$, $\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}$ を求めよ.

(3) $\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial\theta} & \dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\end{vmatrix}$ を求めよ.

(4) (1) および (3) の結果を用いて，V を (r,θ,φ) で積分表示せよ.

(5) (4) の積分を実行し，V を求めよ.

(富山大 2009)　(m20092304)

0.133 次の微分方程式のついて，(1)〜(3) については一般解を，また，(4) については特殊解をそれぞれ求めよ。

(1) $(y+3x)dx+(x+1)dy=0$

(2) $x\dfrac{dy}{dx}=2x\left(1+x^2\right)-y$

(3) $y''-y=0$

(4)　$xdx - e^x dy = 0$　　($x = 0$ のとき $y = 1$)

(富山大 2009)　　(m20092305)

0.134　$u = f(r)$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ とするとき次の等式を示せ.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$$

ただし, $f'(r)$, $f''(r)$ はそれぞれ r に関する f の 1 次導関数, 2 次導関数とする. (富山大 2009) (m20092306)

0.135　正の整数 a に対する関数 f の値を, a が 3^n で割り切れて 3^{n+1} で割り切れないとき $f(a) = n$ と定める. ただし, n は 0 以上の整数である. 次の問いに答えよ.

(1)　$f(ab) = f(a) + f(b)$ を証明せよ.

(2)　$f(a+b) \geqq \min\{f(a),\ f(b)\}$ を証明せよ. また, 等号が成り立たない a, b の例を一組あげよ.

(富山大 2009)　　(m20092307)

0.136　収束する数列 $\{a_n\}$ は有界であることを証明せよ.

(富山大 2009)　　(m20092308)

0.137　U, V, W を実ベクトル空間とし, $f\ :\ U \to V$, $g\ :\ V \to W$ を線形写像とする. 次の (1), (2) を証明せよ.

(1)　$g \circ f\ :\ U \to W$ は線形写像である.

(2)　$\mathrm{Im}\,(g \circ f) = \{0\} \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$
ただし, $\mathrm{Im}\, f$ は f の像を, $\mathrm{Ker}\, g$ は g の核を表す.

(富山大 2009)　　(m20092309)

0.138　(1)　次の関数を微分せよ.

(a) $y = \sin^3 4x$

(b) $y = a^x$

(2)　極座標系 (r, θ) についての方程式 $r = 2a\cos\theta$ の $\theta = \alpha$ における接線の方程式を求める. 以下の各問に従って解答せよ.
なお, 必要に応じて右下の公式を利用せよ.

$$\left\{\begin{array}{l} \sin 2A = 2\sin A\cos A \\ \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A \\ \cos(A \pm B) = \cos A\cos A \mp \sin A\sin B \end{array}\right\}$$

(a) 極座標系 (r, θ) と直交座標系 (x, y) との関係を求めよ.

$x =$

$y =$

(b) $\theta = \alpha$ における接線の傾き dy/dx を求めよ.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\theta=\alpha)} =$$

(c) $\theta = \alpha$ における接線の方程式を求めよ. ただし, 解答は途中の計算を示すとともに, $\boxed{}$ 内に記号または数字を入れて方程式を完成せよ.

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos\left(\boxed{}\boxed{} - \boxed{}\right)}{\boxed{}\, a\cos^2 \boxed{}}$$

(福井大 2009)　　(m20092401)

0.139 (1) 内径が a，外径が b である球殻の体積を，極座標系での 3 重積分を使って表し，その値を求めよ．ただし，極座標 (r,θ,ϕ) は，直角座標 (x,y,z) を使って，

$$x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\theta \quad (0 \leq r \leq \infty,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi)$$

で定義される．

(2) 楕円 $x^2 - xy + y^2 = 4$ の面積を求めよ．

(福井大 2009) (m20092402)

0.140 (1) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ のとき

(a) $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{PA}$ となる条件を求めよ．

(b) $\boldsymbol{AQ} = \boldsymbol{QA}$ となる条件を求めよ．

(2) 次の 3 つの列ベクトルがある．

(a) ベクトルは $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は 1 次独立か 1 次従属か．

(b) その理由も述べよ．

(c) もし 1 次従属なら，それらの関係式を書け．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

(3) $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を正則行列とするとき，$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ を証明せよ．

(4) 次の連立方程式がある．

(a) 連立方程式が解を持つように式中の a を決定せよ．

(b) 決定された a の値の連立方程式の一般解を求めよ．

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - 2y + 2z = a \\ 8x - 6y + 4z = 13 \end{cases}$$

(福井大 2009) (m20092403)

0.141 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $x^2dy - (y^2 - 1)dx = 0$

(2) $\dfrac{dy}{dx}\cos x = -y\sin x$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{xy - x^2}$ （変数変換を用いよ）

(福井大 2009) (m20092404)

0.142 次の式を簡単に表現せよ．

(1) $S = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$

(2) $S = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$

(福井大 2009) (m20092405)

0.143 x は鋭角，y は鈍角であり，$\sin x = \dfrac{1}{2}$，$\sin y = \dfrac{1}{3}$ とする．このとき，$\sin(x+y)$，$\cos(x+y)$ の値を求めよ．

(福井大 2009) (m20092406)

0.144 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{1-x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1} x}{x}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{x^n}{e^x}$　（n は正の整数）

(福井大 2009)　(m20092407)

0.145 次の関数を微分せよ．

(1) $y=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$　(2) $y=x^{1/x}$　(3) $y=\log_a x$

(4) $y=\tan^{-1} x$　(5) $y=e^{-a^2x^2}$

(福井大 2009)　(m20092408)

0.146 2つのベクトル $\boldsymbol{A}=(-1,1,0)$ と $\boldsymbol{B}=(0,1,-1)$ のなす角を求めよ．

(福井大 2009)　(m20092409)

0.147 次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $y=(3x-2)^5$　(2) $y=\sqrt{a^2-x^2}$　(3) $y=\dfrac{x}{ax+b}$

(4) $y=\dfrac{\log x}{x}$　(5) $y=\dfrac{1}{e^x+1}$

(福井大 2009)　(m20092410)

0.148 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,\ b>0)$ を x 軸の周りに一回転して得られる回転楕円体の体積を求めよ．

(福井大 2009)　(m20092411)

0.149 次の行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ について　積 $\boldsymbol{AB}$ および $\boldsymbol{BA}$ を計算せよ．

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & -1 & 7\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & 0\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$

(福井大 2009)　(m20092412)

0.150 次の行列 C の固有値を求めよ．また，固有値の中で負の値をもつ固有値に対する固有ベクトルも求めよ．

$$C=\begin{pmatrix}6 & 0 & -4\\ 0 & -3 & 0\\ 6 & 6 & 4\end{pmatrix}$$

(福井大 2009)　(m20092413)

0.151 点 $(1,-2)$ から直線 $4x+3y+7=0$ への最短距離を求めよ．

(福井大 2009)　(m20092414)

0.152 次の行列 A について以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix}6 & 0 & -4\\ 0 & -3 & 0\\ 6 & 6 & -4\end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) 行列 A は対角化可能か．可能ならば対角化せよ．

(福井大 2009)　　(m20092415)

0.153 (1) 次の関数の導関数を求めよ．

$$f(x) = x\sqrt{x^2+a} + a\log\left(x + \sqrt{x^2+a}\right)$$

(2) 次の関数の不定積分を求めよ．

$$f(x) = \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

(福井大 2009)　　(m20092416)

0.154 4 点 $A(1,2,3)$, $B(-2,1,3)$, $C(-1,-2,1)$, $D(2,1,-3)$ に対して以下の問いに答えよ．

(1) 3 点 A, B, C を含む平面 α の式を求めよ．

(2) 点 D を通り，平面 α に垂直な直線の式を求めよ．

(3) AB, AC, AD を 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ．

(静岡大 2009)　　(m20092501)

0.155 行列 $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ の固有値とその固有値に対する固有空間を求めよ．

(静岡大 2009)　　(m20092502)

0.156 (1) 関数 $f(x) = \dfrac{x}{3-x}$ の n 次導関数を求めよ．

(2) 2 変数関数 $f(x,y) = x^2+2y^2+6x+4y+2xy+14$ の極値を求めよ．

(静岡大 2009)　　(m20092503)

0.157 以下の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$,　$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\,,\ 0 \leq x\,,\ 0 \leq y\}$

(静岡大 2009)　　(m20092504)

0.158 (1) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ を $x=1$ を中心にテイラー展開せよ．

(2) 複素数平面上に 2 点 $A(\sqrt{3}+2i)$, $B(2\sqrt{3}+3i)$ をとる．以下の問いに答えよ．

(a) 点 C を三角形 ABC が正三角形となるように定める．点 C を表す複素数を求めよ．

(b) 点 D は直線 AC に関して B と線対称となる点である．点 D を表す複素数を求めよ．

(静岡大 2009)　　(m20092505)

0.159 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $x^2\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 0$,　　(2) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x^3$,　$(x \geq 0)$

(静岡大 2009)　　(m20092506)

0.160 1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

の一般解は

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right\}$$

と表せることを示せ．ただし，C は積分定数とする．

(静岡大 2009)　　(m20092507)

0.161 次の微分方程式を解け.

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-2y-4}{2x+4y}$ (2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-2y-4}{2x-4y}$ (3) $\dfrac{d^5y}{dx^5}-\dfrac{d^4y}{dx^4}-\dfrac{d^3y}{dx^3}+3\dfrac{d^2y}{dx^2}-2y=0$

(静岡大 2009) (m20092508)

0.162 $y=x^{x\cos(x)}$ とするとき，$y'=x^{x\cos(x)}\{(\cos(x)-x\sin(x))\log(x)+\cos(x)\}$ が成り立つことを証明しなさい.

(静岡大 2009) (m20092509)

0.163 (1) $\dfrac{7x^3-3x^2+5x-4}{x^4-2x^3+x^2-2x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x^2+1}$ を満たす，A,B,C を求めなさい.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{7x^3-3x^2+5x-4}{x^4-2x^3+x^2-2x}\,dx$ を求めなさい.

(静岡大 2009) (m20092510)

0.164 次の行列の逆行列を求めなさい.

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&4\\1&1&1\end{pmatrix}$$

(静岡大 2009) (m20092511)

0.165 (1) $A=\begin{pmatrix}1&s^2&0\\1&s&4\\1&3&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\t\end{pmatrix}$ とする．このとき，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ が一意に求められるための条件を与えなさい．（また; この条件を条件 C とする）.

(2) 条件 C を満たさない場合，つまり $\boldsymbol{x}$ が一意には求まらない場合の解 $\boldsymbol{x}$ を求めなさい.

(静岡大 2009) (m20092512)

0.166 実平面上の x-y で表される直交座標系がある．その上で定義される関数 $f=3x^2+3y$ があり，点 $OABC$ をそれぞれ，$O(0,0)$，$A(2,0)$，$B(2,2)$，$C(0,2)$ とする．$OABC$ の 4 点で囲まれた領域と，OAB の 3 点で囲まれた領域のそれぞれの領域での f の面積分の比

$$\frac{\displaystyle\int_{OAB} f\,dS}{\displaystyle\int_{OABC} f\,dS}$$

は，いくらになるか計算せよ．なお式中の dS は面要素である.

(岐阜大 2009) (m20092601)

0.167 2 行 2 列の行列 $A=\begin{pmatrix}2&0\\5&3\end{pmatrix}$ に対し，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$ となるような 2 行 2 列の正則行列 P と a, b の組を 1 つ求めよ.

(岐阜大 2009) (m20092602)

0.168 (1) n は自然数とする．a,b,c,d を $ad-bc\neq 0$, $c\neq 0$ を満たす定数としたとき，関数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ の n 階導関数を求めよ.

(2) $D=\{(x,y)\mid 1\leqq\ x^2\leqq\ y\leqq\ 4-x^2,\ 0\leqq\ x\}$ としたとき，次の重積分を計算せよ.

$$\iint_D\frac{x}{x^2+y}\,dxdy$$

(岐阜大 2009) (m20092603)

0.169 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x-3y-5z=a \\ 2x-2y-4z=b \\ -3x+\ y+3z=1 \end{cases}$$

が, 少なくとも 1 つの解をもつための定数 a, b についての必要十分条件を求めよ．また，求めた条件を満たす 1 組の a, b を選び，その場合の一般解を求めよ．

(岐阜大 2009)　　(m20092604)

0.170 3 次正方行列 A の固有値が $1,2,3$ であるとき，次の行列の固有値を求めよ．ただし，E は 3 次単位行列とする．

(1) $3A$　　(1) $E-A$　　(1) A^{-1}

(岐阜大 2009)　　(m20092605)

0.171 y は x の関数であるとする．微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+y\cos x=\sin x\cos x$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 初期条件 $y(0)=0$ を満たす解を求めよ．

(2) 上で求めた解 $y(x)$ の $0\leqq\ x\leqq\pi$ における最大値を求めよ．

(岐阜大 2009)　　(m20092606)

0.172 2 以上の整数 n に対して，不等式

$$\frac{1}{2}\leqq\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^n}}\,dx\leqq\frac{\pi}{6}$$

が成り立つことを示せ．

(岐阜大 2009)　　(m20092607)

0.173 2 平面 $x+2y-3z=-1$，$3x-y-2z=4$ のなす角を求めよ．

(岐阜大 2009)　　(m20092608)

0.174 3 台の CPU（中央処理装置）からなる多重プロセッサコンピュータがある．それぞれの CPU が故障しない確率（信頼度）は 0.8 であり，故障した場合に保全は行わないものとする．システムの他の部分には故障は発生しないものとするとき，以下の設問に答えよ．

(1) 3 台の CPU のうち少なくとも 1 台の CPU が正常に動作していればよい場合，このシステムの信頼度（運用できる確率）を求めよ．

(2) システムを最大能力で運用するために，3 台の CPU がすべて正常に動作していなければならない場合，このシステムの信頼度を求めよ．

(3) システムを実用的に運用するために，少なくとも 2 台の CPU が正常に動作していなければならない（2 台以上の CPU が故障しているときは，このシステムは使用不能である）場合，このシステムの信頼度を求めよ．

(岐阜大 2009)　　(m20092609)

0.175 (1) 行列 $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(2) 行列 $\begin{bmatrix} a-5 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & a-1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & a & 1 \\ -3 & 1 & 2 & a-1 \end{bmatrix}$ の階数を求めよ．

(3) 行列 $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 3 & 7 \\ 6 & 0 & 9 & 5 \end{bmatrix}$ の行列式の値を求めよ．

(岐阜大 2009)　　(m20092610)

0.176 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について

(1) $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = 0$ を示せ．ただし．E は単位行列とする．

(2) $A^2 = A$ となる A をすべて求めよ．

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ のとき，A^n を求めよ．

(岐阜大 2009)　　(m20092611)

0.177 次の (1)〜(3) の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$　（ヒント：極座標変換）

(岐阜大 2009)　　(m20092612)

0.178 ある島の熊の頭数の増加率は，各時点の頭数 x に比例し，その飽和頭数を α とすると $\alpha - x$ にも比例する．頭数の変化を時間 t の関数 $f(t)$ で表せ．但し，$f(0) = \beta$ とする．

(岐阜大 2009)　　(m20092613)

0.179 次の式の値を求めよ．

(1) $\tan\theta = 1/3$ のとき．$(\sin\theta + \cos\theta)^2$ の値を求めよ．

(2) $(1+\tan\alpha)/(1-\tan\alpha) = 2+\sqrt{3}$ のとき，$\cos\alpha$ の値を求めよ．

(岐阜大 2009)　　(m20092614)

0.180 xy 平面に直線の方程式 ①, ②, ③ を用いて三角形を描くとき，次の問いに答えよ．ただし，直線の方程式は ① $x-y+1=0$，② $2x+y-4=0$，③ $x+3y+3=0$ とする．

(1) 直線の方程式 ①, ②, ③ の傾きと y 軸の切片を求めよ．

(2) 直線の方程式 ①, ②, ③ を用いて xy 平面に三角形を図示せよ．

(3) 問 (2) で図示した方程式 ① と ② の交点を A，③ と ① の交点を B，② と ③ の交点を C とし，交点 A, B, C の座標を求めよ．

(4) 交点 A, B, C で囲まれた三角形（$\triangle ABC$）の面積を求めよ．

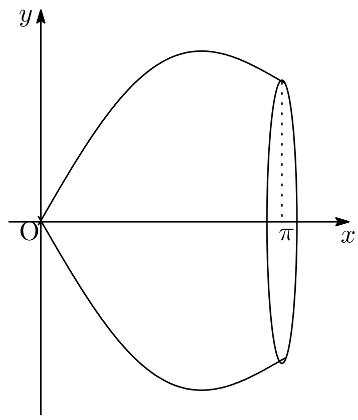
(岐阜大 2009)　　(m20092615)

0.181 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $x^2y' + 2y = 0$　　(2) $y'' - 6y' + 8y = 0$

(岐阜大 2009)　　(m20092616)

0.182 $y = \dfrac{x}{2} + \sin x$ の $0 \leqq x \leqq \pi$ の部分の曲線を x 軸のまわりに回転してできる右図のような回転体の体積 V を求めよ.



(岐阜大 2009)　　(m20092617)

0.183 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ がある．以下の問いに答えよ.

(1) 行列式 $\det A$ を求めよ.

(2) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) 連立方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を解け.

(岐阜大 2009)　　(m20092618)

0.184 (1) $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 4}$ とするとき，不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ.

(2) x-y 平面において，$x = a(t - \sin t)$，$y = a(1 - \cos t)$，　$(a > 0,\ 0 \leq t \leq 2\pi)$（サイクロイド曲線）が描く曲線の長さを求めよ.

(岐阜大 2009)　　(m20092619)

0.185 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ を求めよ.

(岐阜大 2009)　　(m20092620)

0.186 行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

(岐阜大 2009)　　(m20092621)

0.187 (1) 次の関数の極限値を求めよ.　$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}\right)$

(2) 次の関数を微分せよ．ただし，$x \neq 0$ とする.　$\exp\left(-\sin\dfrac{1}{x}\right)$

(3) 次の関数を微分せよ．ただし，$x \pm a \neq 0$ とする.　$\log\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$

(豊橋技科大 2009)　　(m20092701)

0.188 定積分 $I(n, a) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax^2} x^{2n}\, dx$ について以下の問いに答えよ．ただし，n は 0 または正の整数，a は実数とする.

(1) $n=0,\ a=1$ のとき，$I(0,1)=\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ である．

$a>0$ のとき，$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ であることを証明せよ．

(2) 問 (1) の結果を用いて定積分 $I(n,a)$ を n と a の関数として表せ．ただし，n は 1 以上とする．

(豊橋技科大 2009)　　(m20092702)

0.189 行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ a & -b \end{pmatrix}$ で与えられる 1 次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ により，曲線 $y=x^2$ の上の点 (x,y) は，曲線 $x^2+2xy+y^2+\sqrt{2}x-\sqrt{2}y=0$ の上の点 (x',y') に移される．$a>0$ であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) x,y を用いて x' および y' を表せ．

(2) a を用いて b を表せ．

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は，1 次変換 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}$ によりベクトル $\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ に移される．$|\boldsymbol{q}|=|\boldsymbol{p}|$ であるとき，a の値を求めよ．

(4) $\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる最小の正の整数 n を求めよ．

(豊橋技科大 2009)　　(m20092703)

0.190 3 個のサイコロを同時に投げる．以下の問いに答えよ．

(1) 3 個のサイコロの目の数が $1,2,3$ のいずれかであり，かつ互いに異なっている確率を求め，既約分数で答えよ．

(2) 3 個のうち，少なくとも 2 個のサイコロの目の数が同じである確率を求め，既約分数で答えよ．

(3) 3 個のサイコロの目の数の和が 6 以上である確率を求め，既約分数で答えよ．

(4) 3 個のサイコロの目の数の和の期待値を求めよ．

(豊橋技科大 2009)　　(m20092704)

0.191 次の行列式 D を因数分解せよ．

$$D=\begin{vmatrix} a^2+b^2 & 0 & 2ab & 0 \\ 0 & c^2+d^2 & 0 & 2cd \\ 2ab & 0 & a^2+b^2 & 0 \\ 0 & 2cd & 0 & c^2+d^2 \end{vmatrix}$$

(名古屋工業大 2009)　　(m20092901)

0.192 (1) 次の行列 A は対角化できないことを示せ．

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 行列 B を $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．$B^{-1}AB$ を求めよ．

(3) 自然数 n に対して A^n を求めよ．

(名古屋工業大 2009)　　(m20092902)

0.193 (1) 次の不定積分 I を求めよ．

$$I=\int \frac{3x^2-x+1}{(x+1)(x^2-2x+2)}\,dx$$

(2) 次の 2 重積分 J の値を求めよ． $J = \int_1^2 \left(\int_x^2 \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} \right) dx$

(名古屋工業大 2009) (m20092903)

0.194 次の 2 変数関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ． $f(x,y) = x^4 + 6x^2y^2 + y^4 - 6y^2$

(名古屋工業大 2009) (m20092904)

0.195 (1) 極限値 $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ を $x-3$ のべき級数に展開し，そのべき級数の収束範囲を求めよ．

(3) 次の重積分を求めよ．

$$V = \int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy$$

(名古屋工業大 2009) (m20092905)

0.196 行列 A，変数ベクトル $\boldsymbol{x}$，定数ベクトル $\boldsymbol{c}$ を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ただし，a は定数である．方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) 方程式が解をもたないための a の値を求めよ．

(2) 方程式が無数の解をもつための a の値を求めよ．

(3) 方程式が唯一の解をもつための a の範囲を示せ．またこの範囲の a に対して解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(名古屋工業大 2009) (m20092906)

0.197 関数 $f(x)$ が $[0, \infty)$ において微分可能で，次の微分方程式を満たす．

$$f'(x) - \frac{1}{x+1} f(x) = (x+1)^2 e^x$$

このとき，

(1) 微分方程式の一般解 $f(x)$ を求めよ．

(2) 初期条件 $f(0) = 1$ を満たす特殊解 $f(x)$ を求めよ．

(名古屋工業大 2009) (m20092907)

0.198 以下の微分方程式 (1) および積分方程式 (2) を解きなさい．

(1) $\frac{dy}{dx} = y$ を満たす関数 $y = f(x)$ を求めよ．ただし，$f(0) = 1$ とする．

(2) $xf(x) = \int_1^x \frac{1}{x} f(x) dx + 1$ を満たす関数 $y = f(x)$ を求めよ．

(三重大 2009) (m20093101)

0.199 $p(x) = 2xe^{-x^2}$， $q(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$ とする時， $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \cdot q(t-x) dt$ のグラフの概要を下の xy 平面に描きなさい．グラフの概要には最大値や変曲点を明示すること．

(三重大 2009) (m20093102)

0.200 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ が，$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ かつ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす時，(1)〜(3) の設問に答えなさい．ただし，k, x, y は実数である．

(1) k の値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた k の値に対して $A\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たす x をすべて求めよ．

(3) (2) で求めた結果を用いて A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(三重大 2009)　　(m20093103)

0.201 大きさや材質などが等しい白玉 7 個と赤玉 5 個の入った不透明な袋から手探りで 1 個ずつ玉を取り出す試行を 2 回繰り返す時，(1)〜(3) の設問に答えなさい．ただし，取り出した玉は元に戻さないものとする．

(1) 1 回目，2 回目とも赤玉を取り出す確率を求めよ．

(2) 2 回目に赤玉を取り出す確率を求めよ．

(3) 1 回目の試行結果を隠しておき，2 回目に取り出した玉が赤玉であることが分かった時，1 回目に取り出した玉も赤玉である確率（事後確率）を求めよ．

(三重大 2009)　　(m20093104)

0.202 次の (1) から (3) の微分方程式を，それぞれ与えられた初期条件のもとで解きなさい．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 3y$　（初期条件は $x = 0$ のとき $y = 5$）

(2) $\dfrac{dy}{dx} = 2\dfrac{y}{x}$　（初期条件は $x = 1$ のとき $y = 3$）

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \cos(x + y)$　（初期条件は $x = 0$ のとき $y = 0$）

(三重大 2009)　　(m20093105)

0.203 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ の値を求めなさい．

(2) A, B が同じ次数の正方行列であるとき，行列式 $\begin{vmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{vmatrix}$ の値を，$|A + 2B|$ と $|A - B|$ の式で表しなさい．

この導出には，n 次正方行列 P，m 次正方行列 S，$m \times n$ の行列 R，$n \times m$ の零行列 O に対して，$\begin{vmatrix} P & O \\ R & S \end{vmatrix} = |P||S|$ が成り立つことを使ってよい．

(3) 問 (2) の結果を利用して，行列 $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ のすべての固有値を求めなさい．

(三重大 2009)　　(m20093106)

0.204 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ に関する以下の問いについて答えよ.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) A を対角化せよ.

(3) A^{23} を求めよ.

(三重大 2009)　　(m20093107)

0.205 以下の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 6x^5 - \frac{2}{x}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty 9x^2 e^{-3x}dx$

(三重大 2009)　　(m20093108)

0.206 近似式について，以下の問いに答えよ.

(1) $\alpha << 1$ が成り立つ場合，$(1+\alpha)^3 \approx 1 + 3\alpha$ と近似できる理由を述べよ.

(2) $\cos(\theta + \triangle\theta)$ を θ の周りで，$\triangle\theta^5$ までテーラー展開せよ.

(3) 上記の展開式の 1 次 $(\triangle\theta)$ までを利用して，$\cos(61^\circ)$ の近似値を求めよ．ただし，テーラー展開内の θ はラジアン表記であることに留意せよ.

(三重大 2009)　　(m20093109)

0.207 (1) 次の対称行列 A の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) 一般の実対称行列 B について，その固有値はすべて実数で，異なる固有値に属する固有ベクトルは互いに直交することを示せ.

(三重大 2009)　　(m20093110)

0.208 (1) 未知関数 $y(x)$ についての微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} + xy = x$ について，初期条件 $y(0) = 0$ を満たす解を求めよ.

(2) 未知関数 $y(x)$ についての微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ の一般解を求めよ.

(三重大 2009)　　(m20093111)

0.209 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と，ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して次の問いに答えよ．ただし，a は実数である.

(1) 行列 A^2 および B^2 を求めよ.

(2)　2 つのベクトル $A^2\boldsymbol{v}$ と $B^2\boldsymbol{v}$ は一次独立であることを示せ．

(3)　2 つのベクトル $A\boldsymbol{v}$ と $B\boldsymbol{v}$ が一次従属となるときの a の値を求めよ．

(奈良女子大 2009)　　(m20093201)

0.210　関数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ に関して次の問いに答えよ．

(1)　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ．

(2)　関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ．

(奈良女子大 2009)　　(m20093202)

0.211　関数 $f(x)=e^x-e^{-x}$ のグラフ G に関して次の問いに答えよ．

(1)　原点におけるグラフ G の接線 L の方程式を求めよ．

(2)　接線 L は，グラフ G と原点以外で交わらないことを示せ．

(3)　グラフ G，接線 L および直線 $x=1$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(奈良女子大 2009)　　(m20093203)

0.212　次の微分を求めよ．

(1)　$\dfrac{d}{dx}\left(e^{-ax}\cos(bx)\right)$　（a,b は定数）

(2)　$\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(奈良女子大 2009)　　(m20093204)

0.213　次の不定積分と定積分を求めよ．

(1)　$\displaystyle\int xe^{-ax}dx$　（a は定数）

(2)　$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{1-2a\cos\theta+a^2}}$　$(a>0)$

(奈良女子大 2009)　　(m20093205)

0.214　F_n が次のように定義されているとする．

$$F_n \equiv \int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx$$

このとき，以下の問いに答えよ．ただし，n は正の整数である．

(1)　F_1 を求めよ．

(2)　n が 2 より大きいときの漸化式は次のようになることを示せ．

$$F_n=\frac{n-1}{2}F_{n-2}$$

(奈良女子大 2009)　　(m20093206)

0.215　次ののような 2 つの行列 A と B があるとき，以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & \sin\theta_1\\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & \sin\theta_2\\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix}$$

(1)　積 AB を求めよ．

(2) 行列 A の逆行列を求めよ.

(3) 2 次元ベクトル $\boldsymbol{X}$ に行列 A をかけて，$\boldsymbol{Y} = A\boldsymbol{X}$ を作った．このとき，2 つのベクトル $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ はどのような関係になるか述べよ.

(奈良女子大 2009)　　(m20093207)

0.216 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と定数ベクトル $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ からベクトル積（外積）$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}$ を作った．このベクトル $\boldsymbol{A}$ について以下の問いに答えよ.

(1) ベクトル A の成分 A_x , A_y , A_z を求めよ.

(2) $\operatorname{div} A = \nabla A$ を求めよ.

(3) $\operatorname{rot} A = \nabla \times A$ を求めよ.

ただし，$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z} \right)$ である.

(奈良女子大 2009)　　(m20093208)

0.217 平面 $\boldsymbol{R}^2$ の座標系 (x, y) と実数値のパラメータ t を用いて表される曲線

$$C : \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

について以下の (1)〜(4) に答えよ.

(1) 曲線 C とその x 軸に平行な接線との接点の座標を求めよ．また，y 軸に平行な接線との接点の座標を求めよ.

(2) 曲線 C が自分自身と交差する点の座標を求めよ．さらに，その交点において 2 本ある曲線 C の接線の傾きを求めよ.

(3) (1),(2) の結果を用い，さらに $t \to \pm\infty$ のときの様子に注意して，曲線 C の概形を描け.

(4) 曲線 C によって囲まれる領域の面積を求めよ.

(京都大 2009)　　(m20093301)

0.218 正の整数 k, $N\,(1 \leq k \leq N)$ が与えられたとき，方程式

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = N \tag{1}$$

の正の整数解

$$\begin{cases} x_1 = m_1 \\ x_2 = m_2 \\ \quad\cdots \\ x_k = m_k \end{cases} \tag{2}$$

の総数を求めるために，解 (2) に対して項数が $N - k$ であるような数列

$$\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{m_1 - 1\text{ 個}}, \underbrace{2, 2, \cdots, 2}_{m_2 - 1\text{ 個}}, \cdots, \underbrace{k, k, \cdots, k}_{m_k - 1\text{ 個}}$$

をつくる．ただし，$m_i = 1$ であるような i はこの数列の項にはならないとする．以下では，項数 M の数列 $a_1, a_2, \cdots, a_M$ を $\{a_n\}_{n=1}^{M}$ と表すことにして，(1)〜(4) に答えよ．なお，数列の項は全て正の整数とする.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{M}$ が与えられたとき，新たな数列 $\{\overline{a}_n\}_{n=1}^{M}$ を

$$\overline{a}_n = a_n + n - 1 \quad (n = 1, 2, \cdots, M)$$

と定義する．数列 $\{a_n\}_{n=1}^{M}$ が正の整数 k に対して

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_M \leq k$$

を満たすとき，数列 $\{\overline{a}_n\}_{n=1}^{M}$ は

$$1 \leq \overline{a}_1 < \overline{a}_2 < \cdots < \overline{a}_M \leq k + M - 1 \tag{3}$$

を満たすことを示せ.

(2) 条件 (3) を満たすような数列 $\{\overline{a}_n\}_{n=1}^{M}$ の総数を求めよ.

(3) ２つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^{M}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{M}$ について,

$$a_n = b_n \quad (n = 1, 2, \cdots, M)$$

であるとき，かつ，そのときに限り $\{a_n\}_{n=1}^{M} = \{b_n\}_{n=1}^{M}$ と表すことにする．このとき. $\{a_n\}_{n=1}^{M} = \{b_n\}_{n=1}^{M}$ であれば $\{\overline{a}_n\}_{n=1}^{M} = \{\overline{b}_n\}_{n=1}^{M}$ であり，また，その逆も成り立つことを示せ.

(4) (1) から (3) の結果を利用して，方程式 (1) の正の整数解の総数を求めよ.

(京都大 2009)　　(m20093302)

0.219 ２次元ユークリッド空間の直交座標系を一つ定め，その x 軸および y 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ とする．また，x 軸および y 軸をそれぞれ反時計方向に θ だけ回転して得られる座標軸を x' 軸，y' 軸とし，x' 軸と y' 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e'}_x$ および $\boldsymbol{e'}_y$ とする．このとき，以下の (1)〜(5) に答えよ.

(1) 条件 $(\boldsymbol{e'}_x \;\; \boldsymbol{e'}_y) = (\boldsymbol{e}_x \;\; \boldsymbol{e}_y)P$ を満足する２次の正方行列 P を θ を用いて表せ.

(2) 行列 P に対して $P^T P = P P^T = I$ が成り立つことを示し，この等式の幾何的な意味を，４つのベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e'}_x$, $\boldsymbol{e'}_y$ を用いて説明せよ．なお，P^T は P の転置行列を，また，I は２次の単位行列をそれぞれ表す.

(3) このユークリッド空間における任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y = x'\boldsymbol{e'}_x + y'\boldsymbol{e'}_y$ のように，２通りの座標を用いて表すことができる．これら２通りの座標間の関係を行列 P を用いて表せ. さらに，$x^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2$ が成り立つことを示せ.

(4) このユークリッド空間におけるベクトル全体をそれ自身に写す変換 f が

$$f(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{u}) + \beta f(\boldsymbol{v})$$

なる関係を満たすとき，f を一次変換という．ここに α と β は任意の実数，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は任意のベクトルである．一次変換 f と $\boldsymbol{e}_x$ $\boldsymbol{e}_y$ に対して,

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e}_x) = a_{xx}\boldsymbol{e}_x + a_{yx}\boldsymbol{e}_y \\ f(\boldsymbol{e}_y) = a_{xy}\boldsymbol{e}_x + a_{yy}\boldsymbol{e}_y \end{cases} \quad ④$$

が成り立つとし，ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $f(\boldsymbol{u})$ をそれぞれ $\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y$, $f(\boldsymbol{u}) = X\boldsymbol{e}_x + Y\boldsymbol{e}_y$ と表すとき，これら２組の座標間の関係を

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の形で表現する行列 A を求めよ.

(5) 一次変換 f に対して，(4) の条件④に加えて．

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e'}_x) = a'_{xx}\boldsymbol{e'}_x + a'_{yx}\boldsymbol{e'}_y \\ f(\boldsymbol{e'}_y) = a'_{xy}\boldsymbol{e'}_x + a'_{yy}\boldsymbol{e'}_y \end{cases}$$

が成り立つとする．ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $f(\boldsymbol{u})$ をそれぞれ $\boldsymbol{u} = x'\boldsymbol{e'}_x + y'\boldsymbol{e'}_y$, $f(\boldsymbol{u}) = X'\boldsymbol{e'}_x + Y'\boldsymbol{e'}_y$ と表せば，２組の座標間の関係は (4) と同様に

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

と表現される．このとき，行列 A と A' の関係を P を用いて表せ．

(京都大 2009)　　(m20093303)

0.220 3 次元ユークリッド空間の直交座標系を一つ定め，その x 軸，y 軸および z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ とする．２つのベクトル $\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{e}_x + u_y\boldsymbol{e}_y + u_z\boldsymbol{e}_z$ および $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{e}_x + v_y\boldsymbol{e}_y + v_z\boldsymbol{e}_z$ について，以下の (1)〜(4) に答えよ．ただし，$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は零ベクトルではないものとする．

(1) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$ を u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z を用いて表せ．

(2) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積 S を u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z を用いて表せ．ただし，平行四辺形の表裏や向きは考えないものとする．

(3) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ に対して，ベクトル $\boldsymbol{w}$ を，行列式を形式的に用いて

$$\boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

と定義する．ベクトル $\boldsymbol{w}$ は，$\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ に直交することを示せ．

(4) ベクトル $\boldsymbol{w}$ の長さは (2) の面積 S に等しいことを示せ．

(京都大 2009)　　(m20093304)

0.221 実数 x が $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする．行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin x & \cos x & \tan x \\ -\sin x & 0 & 0 & \cos x \\ -\cos x & 0 & 0 & \sin x \\ -\tan x & -\cos x & -\sin x & 0 \end{vmatrix}$$

の値が $\dfrac{1}{4}$ となるような x をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2009)　　(m20093401)

0.222 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \cos x - e^x}{x\sin x}$ を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^3 - 3x + 1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2009)　　(m20093402)

0.223 関数 $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$ の極値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2009)　　(m20093403)

0.224 次の微分方程式を考える．

$$(*) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} - 2$$

(1) $\dfrac{y}{x}=u$ とおいて，$(*)$ を u に関する微分方程式に書き換えよ．

(2) 初期条件 $y(1)=3$ を満たす $(*)$ の解を求めよ．

(京都工芸繊維大 2009)　　(m20093404)

0.225 (1) A および B を n 次実対称行列とする．n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ についての方程式 $\lambda A\boldsymbol{x}=B\boldsymbol{x}$ が実数 $\lambda=\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\cdots,\ \lambda_n$ のときに $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ である解をもつとする．$\lambda_i\ (i=1,2,3,\cdots,n)$ に対応する解を $\boldsymbol{x}_i$ とする．$\lambda_i\neq\lambda_j$ のとき，${}^t\boldsymbol{x}_iA\boldsymbol{x}_j=0$ となることを示せ。 ただし，${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す．

(2) $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$ であるとき，上の方程式が $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ であるような解をもつ $\lambda_1,\ \lambda_2$ と，それに対応する解 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ を一つずつ求めよ．

(大阪大 2009)　　(m20093501)

0.226 a,b,c,d,e,f,g,h はすべて実数で $d\neq0$ とする．このとき，複素数 z についての方程式

$$\frac{a^2}{z-e}+\frac{b^2}{z-f}+\frac{c^2}{z-g}=d^2z+h \qquad (*)$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) z を一つの複素数解とするとき，その共役複素数 $\overline{z}$ がみたす方程式を求めよ．

(2) 上の方程式 $(*)$ の解はすべて実数であることを示せ．

(大阪大 2009)　　(m20093502)

0.227 曲線 C 上の点を $P(x,y)$ で表す．また，P での曲線 C の接線の傾きを y' で表す．P での曲線 C の法線が x 軸と交わる点を Q とする．曲線 C 上のすべての点で，線分 PQ の長さが点 Q の x 座標に等しいとき，この曲線がみたす微分方程式を求めよ．この微分方程式を解いて曲線 C の方程式を求めよ．

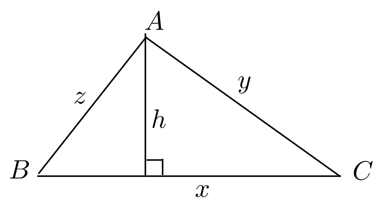
(大阪大 2009)　　(m20093503)

0.228 a を正定数とする． 3 辺の和が $2a$ という条件を保ちながら変化する三角形 ABC を考える．
$BC=x$，$CA=y$，$AB=z$ とする．頂点 A から辺 BC に下ろした垂線の長さを h とする．次の問いに答えよ．

(1) 辺 BC を軸として三角形 ABC を回転してできる立体の体積 V を，x および h を用いて表せ．

(2) 体積 V を $x,\ y$ の関数として表せ．同時に，変数 $x,\ y$ の動きうる領域 D を図示せよ．必要があれば三角形 ABC の面積は $\sqrt{a(a-x)(a-y)(a-z)}$ で与えられるというヘロンの公式を用いてもよい．

(3) $x,\ y$ が領域 D 内において変動するとき，V の値が最大となるときの $x,\ y$ の値およびそのときの V の値を求めよ．



(大阪大 2009)　　(m20093504)

0.229 常微分方程式

$$4y''(x)+y(x)(4e^{2x}-1)=0 \quad (x\in\mathbb{R}) \qquad (*)$$

を考える．

(1) $t = e^x$ と変換することによって $z(t) = y(\log t)$ に関する常微分方程式を導け.

(2) $z(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+\rho}$ $(\rho \in \mathbb{R},\ c_0 \neq 0)$ とおく．この級数を (1) で得られた常微分方程式に代入し係数比較することにより ρ と c_k $(k = 1, 2, \cdots)$ の間に成立する関係式を導け．また，$\rho = \pm 1/2$ を導け.

(3) $c_1 = 0$ とする．(2) で得られた関係式から c_k を定め，基本解 $z_1(t)$, $z_2(t)$ を求めよ.

(4) $(*)$ の常微分方程式の基本解 $y_1(x)$, $y_2(x)$ で

$$e^x(y_1(x)^2 + y_2(x)^2) = 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

を満たすものを一組求めよ.

(大阪大 2009)　　(m20093505)

0.230 自然数 n に対して

$$I_n(t) = \frac{1}{\pi^n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\left(\dfrac{t}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k\right)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+{x_k}^2\right)}\,dx_1\cdots dx_n \quad (t \in \mathbb{R})$$

とおく.

(1) 留数定理を用いて $I_1(t)$ を求めよ.

(2) $I_n(t)$ を求めよ.

(大阪大 2009)　　(m20093506)

0.231 閉区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x\sin x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

と定義する.

(1) $f(x)$ のフーリエ係数

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を求めよ.

(2) (1) で求めた a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ に対して,

$$\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2 = \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ.

(大阪大 2009)　　(m20093507)

0.232 正の値をとる確率変数 X が確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}x^{-1}\exp\left\{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (x > 0,\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0)$$

をもつとし，$Y = \log X$ とする.

(1) $n = 1, 2, \cdots$ に対して，Y^n の期待値を $g_n = E[Y^n]$ とする．このとき，

$$g_{n+2} = \mu g_{n+1} + (n+1)\sigma^2 g_n$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n = 1, 2, \cdots$ のとき，$E[(Y-\mu)^n]$ を求めよ．

(大阪大 2009)　　(m20093508)

0.233 (1) 次の行列 A の行列式 $|A|$ は，x に関する高々 4 次の多項式で表される．このとき，x^2 の係数を A の成分を用いて表せ．ただし，A の $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ 成分以外の成分は x に無関係な定数とする．

$$A = \begin{pmatrix} x & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & x & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & x^2 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

(2) $\{a,\ b,\ c\}$ を 3 次元ベクトル空間 V の基底とし，f を次のような V の線形変換とする．このとき，以下の各問に答えよ．

$$\begin{cases} f(a) = -a - c \\ f(b) = a \\ f(c) = a + b + 2c \end{cases}$$

(a) $\{a+b+c,\ a+b,\ a\}$ は V の基底であることを示せ．

(b) V の基底 $\{a+b+c,\ a+b,\ a\}$ に関する f の表現行列 A を求めよ．

(神戸大 2009)　　(m20093801)

0.234 a, b を実数，$a \neq 0$ とする．行列 A を $A = \begin{pmatrix} a-b & a & a \\ a & a-b & a \\ a & a & a-b \end{pmatrix}$ と定める．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) A を対角化する直交行列 P を求めて A を対角化せよ．

(3) $A^{20} = E_3$ を満たす a, b の値を求めよ．ただし，E_3 は 3 次の単位行列とする．

(神戸大 2009)　　(m20093802)

0.235 $|x| < 1$ とし，$f(x) = \log(1+x)$ と定める．以下の各問に答えよ．

(1) $n \geq 1$ のとき，$f(x)$ の n 階導関数を $f^{(n)}(x)$ と書く．$f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ のマクローリン展開を書け．

(神戸大 2009)　　(m20093803)

0.236 (1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^4}$ を求めよ．

(2) 球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ と円柱 $x^2 + y^2 \leq x$ の共有部分の体積を求めよ．

(神戸大 2009)　　(m20093804)

0.237 (1) 行列式 $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の値を求めよ．

(2) 次を満たす $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{v}$ を 1 つあげよ.

$\boldsymbol{v} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であり，$\boldsymbol{v}$ は 3 つのベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のいずれとも直交する.

(神戸大 2009)　　(m20093805)

0.238 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく．このとき，次の各問に答えよ.

(1) $n = 1, 2, \cdots$ に対して，A^n を求めよ.（答えのみでよい）.

(2) $S_n = I + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^k A^k}{k!}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ.

(神戸大 2009)　　(m20093806)

0.239 $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=0,1,\cdots}$ を次式によって帰納的に定義する:

$$\begin{cases} f_0(x) = 1\,, \\ f_{n+1}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x t\, f_n(t)\, dt\,, \quad n = 0, 1, \cdots \end{cases}$$

このとき，$f_n(x) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{2^k\, k!} \quad n = 1, 2, \cdots$ となることを数学的帰納法によって示せ.

(神戸大 2009)　　(m20093807)

0.240 次の微分方程式の一般解を求めよ．ただし，y', y'' はそれぞれ $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す.

(1) $y'' - y' - 2y = 0$

(2) $y'' - y' - 2y = \cos x$

(神戸大 2009)　　(m20093808)

0.241 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上で定義された関数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ について，次の計算をせよ.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

(神戸大 2009)　　(m20093809)

0.242 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ とおく．次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D |x|\, dxdy$

(2) $\displaystyle\iint_D |x + y|\, dxdy$

(神戸大 2009)　　(m20093810)

0.243 関数 $f(x, y) = 9xy - x^3 - y^3$ の極値を求めよ.

(神戸大 2009)　　(m20093811)

0.244 微分方程式の初期値問題

$$f''(x) + f(x) = \sin x\,, \quad f(0) = f'(0) = 0$$

において,

$$F(x) = f(x)\cos x - f'(x)\sin x\,, \quad G(x) = f(x)\sin x + f'(x)\cos x$$

とおく．以下の問いに答えよ.

(1) $F'(x)$, $G'(x)$ を求めよ．（f を含まない形で表せ.）

(2) $F(x)$, $G(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ を求めよ．

(神戸大 2009)　　(m20093812)

0.245 3次の正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $\det(A)$ を求めよ．

(2) A の余因子行列を求めよ．

(3) A^{-1} を求めよ．

(神戸大 2009)　　(m20093813)

0.246 線形写像 $T\ :\ \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ および $\boldsymbol{R}^4$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4\}$ と $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3\}$ が与えられているとする．このとき，$\begin{bmatrix} T(\boldsymbol{u}_1) & T(\boldsymbol{u}_2) & T(\boldsymbol{u}_3) & T(\boldsymbol{u}_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} B$ を満たす $3\times\ 4$ 行列 B が一意に存在する．この B を $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4\}$, $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3\}$ に関する T の表現行列という．以下の問いに答えよ．

(1) $3\times\ 4$ 行列 A が与えられ，$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}\ \ (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4)$ であるとき，

$$\begin{bmatrix} T(\boldsymbol{u}_1) & T(\boldsymbol{u}_2) & T(\boldsymbol{u}_3) & T(\boldsymbol{u}_4) \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{u}_4 \end{bmatrix}$$

を示し，$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{u}_4 \end{bmatrix}$　$Q = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix}$ とおいて，$B = Q^{-1}AP$ を証明せよ．

(2) $T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 & 4 \\ 3 & 6 & -7 & 8 \\ 6 & 2 & -3 & 9 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}\ \ (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4)$　であるとき，

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

に関する T の表現行列 B を求めよ．

(神戸大 2009)　　(m20093814)

0.247 方程式 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ の一般解を求めよ．

(鳥取大 2009)　　(m20093901)

0.248 方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x$ の特殊解を定数変化法を用いて求めよ．

(鳥取大 2009)　　(m20093902)

0.249 方程式 $\dfrac{dy}{dx} = x(1-x)$ を初期条件 $x(0) = x_0\ (> 0)$ の下で解け．

(鳥取大 2009)　　(m20093903)

0.250 ５つ行列の積 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ で与えられる行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化すること．

(鳥取大 2009)　　(m20093904)

0.251 次を証明せよ．

(1) 対称行列 A の異なる固有値に属する固有ベクトルは直交することを証明せよ．ただし，A が対称行列とは A が実正方行列であって $A^T = A$ が成立することをいう．

(2) 直交行列 A を係数行列としてもつ１次変換（直交変換）$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ はベクトルの内積を不変に保つことを証明せよ．ただし，A が直交行列とは A が実正方行列であって $A^T = A^{-1}$ が成立することをいう．

(鳥取大 2009)　　(m20093905)

0.252 次を求めよ．ただし，$\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}i + \dfrac{\partial}{\partial y}j + \dfrac{\partial}{\partial z}k$ である．

(1) $\nabla(x^2 + y + z^3)$

(2) $\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right)$ 　（ただし，$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$）

(3) $\nabla\times\ (x^2 i + xy^2 j)$

(鳥取大 2009)　　(m20093906)

0.253 直交座標系に関して，３つのベクトルを $\overrightarrow{OA} = (1, -1, 2)$, $\overrightarrow{OB} = (k, 4, 1)$, $\overrightarrow{OC} = (2, 1, 3)$ とする．

(1) $\overrightarrow{OA}$ の長さ $\left|\overrightarrow{OA}\right|$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ が直交するとき，k の値を求めよ．

(3) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ の外積 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}$ を求めよ．

(鳥取大 2009)　　(m20093907)

0.254 行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ とする．

(1) 行列 A の行列式の値を求めよ．

(2) 行列 A の逆行列を求めよ．

(3) 行列 A の固有値を求めよ．

(鳥取大 2009)　　(m20093908)

0.255 以下の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $2x^2y\dfrac{dy}{dx} + xy^2 + x = 0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 4x + 6e^{3x}$

(鳥取大 2009)　　(m20093909)

0.256 ２次式 $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ を考える．任意の a_2, a_1, a_0 に対し，以下の式が成立するように実数 α, β $(\alpha < \beta)$ の値を定めよ．

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f(\alpha) + f(\beta)$$

(鳥取大 2009)　　(m20093910)

0.257 $f(x)$, $g(x)$ を x についての 2 回微分可能な 1 変数関数とするとき，時刻 t，座標 x における 2 変数関数 $\phi(t,x)$ を $\phi(t,x) = f(x-ct) + g(x+ct)$ と定める．ただし，c は定数とする．このとき，関数 ϕ は次の関係式を満たすことを示せ．

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

(鳥取大 2009) (m20093911)

0.258 次の問いに答えよ．ただし，n は自然数とする．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$ を求めよ．

(2) 関数 $\dfrac{1}{1-x^2}$ の n 階の導関数を求めよ．

(3) 2 変数関数 $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ の極値を求めよ．

(鳥取大 2009) (m20093912)

0.259 次の各積分を求めよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \tan x \, dx$

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \log x \, dx$

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_{|x| \leq y \leq 1} \sqrt{y^2 - x^2} \, dxdy$

(鳥取大 2009) (m20093913)

0.260 数直線 $(-\infty, \infty)$ 上の関数 $F(x)$ と $f(x)$ を

$$F(x) = x^2 \log(1+x^2)\ , \quad f(x) = F'(x)$$

によって定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $g(x) = \displaystyle\int_0^x (tf'(t) - f(t)) \, dt$ を求めよ．

(2) $f'(x) > \dfrac{f(x)}{x} > \dfrac{2F(x)}{x^2} > 0 \quad (x \neq 0)$ が成り立つことを示せ．

(3) $g(x)$ は下に凸な関数であることを示せ．

(岡山大 2009) (m20094001)

0.261 区間 $[0, \infty)$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対する広義積分

$$\int_0^\infty f(x) e^{-sx} dx = \lim_{M\to\infty} \int_0^M f(x) e^{-sx} dx \quad (s > 0)$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して，

$$\int_0^\infty x^n e^{-sx} dx = \frac{n}{s} \int_0^\infty x^{n-1} e^{-sx} dx$$

が成り立つことを示せ．

(2) 非負の整数 n に対して，$\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-sx} dx$ の値を求めよ．

(3) $s > 1$ のとき，

$$\int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{(-x)^n}{n!} e^{-sx} dx = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \frac{(-x)^n}{n!} e^{-sx} dx$$

が成り立つことを示せ．

(岡山大 2009)　　(m20094002)

0.262 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有方程式 $x^2 - (a+d)x + (ad-bc) = 0$ が相異なる 2 つの実数解 α, β をもつとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $(A - \alpha E)(A - \beta E) = O$，$A \neq \alpha E$，$A \neq \beta E$ が成り立つことを示せ．ただし，E は単位行列，O は零行列とする．

(2) $A\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{x}$ と $A\boldsymbol{y} = \beta \boldsymbol{y}$ をそれぞれ満たす零でない列ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が存在することを示せ．また，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は一次独立であることを示せ．

(3) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ を満たす 2 次正則行列 P が存在することを示せ．

(岡山大 2009)　　(m20094003)

0.263 (1) 3 次正方行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ の行列式を計算し，その逆行列を求めよ（答のみでよい）．

(2) (x_1, x_2, x_3, x_4) に関する次の連立一次方程式が $(0,0,0,0)$ 以外にも解をもつとき，a の値を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & a & 2 & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(岡山大 2009)　　(m20094004)

0.264 (1) 曲線 $y = \cosh x \ (0 \leqq x \leqq \log 3)$ の長さを求めよ．ただし，$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ である．

(2) $\Omega = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\}$ のとき，$\displaystyle\iint_{\Omega} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy$ を求めよ．

(広島大 2009)　　(m20094101)

0.265 3 次の実正方行列 A に対し，行に関する基本変形を 2 回行って，単位行列に変形できたとする．行った基本変形は以下の通りである．

1 回目：第 2 行と第 3 行を入れ替えた．

2 回目：第 1 行に第 3 行の 2 倍を加えた．

このとき，1 回目の基本変形に対応する基本行列を P_1，2 回目の基本変形に対応する行列を P_2 として以下の問いに答えよ．

(1) 基本行列 P_1，P_2 とその逆行列を求めよ．

(2) 逆行列 A^{-1} と行列式 $\det A$ を計算せよ．

(3) $\boldsymbol{b}$ に同じ基本変形を行って得られるベクトルは，連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解になることを示せ．

(広島大 2009)　　(m20094102)

0.266 関数 $f(x) = \tanh x$ を考える．ただし，$\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ である．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の増減表とグラフを書き，定義域と値域を求めよ．

(2) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ．また，その定義域と値域も書け．

(広島大 2009)　　(m20094103)

0.267 2 次の実正方行列全体のなすベクトル空間を V とし，その任意の元 A, B に対して

$$(A, B) = \mathrm{tr}\,({}^tAB)\,,$$

とおく．ただし，${}^tA$ は A の転置行列とし，$\mathrm{tr}\,C$ は行列 C のトレースとする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) (A, B) は内積であることを示せ．

(2) A と B が

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\,,\quad B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

で与えられているとき，(A, B) を求め，さらに A と B のなす角 θ を求めよ．
ただし，$0 \leqq \alpha - \beta \leqq \pi$ とする．

(3) (2) で定義した A に対して，線形写像 $f\ :\ V \to \mathbb{R}$ を $f(X) = (A, X)\ \ (X \in V)$ で定義する．このとき $\mathrm{Ker}\,f$ の次元を求め，$\mathrm{Ker}\,f$ の正規直交基底を 1 組求めよ．

(広島大 2009)　　(m20094104)

0.268 $f(x, y) = (x-1)(y+1)$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) グラフ $z = f(x, y)$ の $(x, y) = (0, 1)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた接平面，yz 平面，zx 平面，xy 平面の 4 つの平面によって囲まれる四面体の体積を求めよ．

(3) (2) の四面体の 4 つの面のうち xy 平面上にある面を Ω とする．
このとき，$\displaystyle\iint_{\Omega} f(x, y)dxdy$ 　を求めよ．

(広島大 2009)　　(m20094105)

0.269 (1) $h(x) = x^2\sin^2 x$ の 1 次導関数 $h'(x)$，2 次導関数 $h''(x)$，3 次導関数 $h'''(x)$ を求めよ．

(2) x の関数 $\log(1+x)$ の n 次導関数を求めよ．ただし，$x > -1$ とする．

(3) $\log\dfrac{1-x}{1+x}$ のマクローリン展開を求めよ．ただし，$|x| < 1$ とする．

(広島市立大 2009)　　(m20094201)

0.270 累次積分 $I = \displaystyle\int_0^1 \left\{\int_x^1 e^{y^2}dy\right\}dx$ に関して以下の問いに答えよ

(1) 積分領域を図示せよ．

(2) 積分順序の変更を行う． $I = \displaystyle\int_a^b \left\{\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} e^{y^2}dx\right\}dy$ と書き換えたとき，a, b, $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ を求めよ．

(3) I を計算せよ．

(広島市立大 2009)　　(m20094202)

0.271 (1) 次の 3 次正方行列 A の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) 上の正則行列 A を対角化する正方行列 P を求めよ．また，対角化された行列 $P^{-1}AP$ も答えよ．

(3) n 次正方行列 B の固有値の一つが $b(b \neq 0)$ であるとき，b^2 および b^{-1} がそれぞれ行列 B^2 および B^{-1} の固有値となることを証明せよ．ただし，B は正則であるとする．

(広島市立大 2009)　　(m20094203)

0.272　2 次実正方行列 A, B, C, D

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

に対して，4 次実正方行列 M, N を次で与える．

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} B & A \\ C & D \end{pmatrix}$$

ここで，O は 2 次の零行列である．

実正方行列 X に対して行列式を $|X|$ で表す．以下の問いに答えよ．

(1) $|M| = |A||C|$ であることを示せ．

(2) $B = sA$, $D = tC$ （s, t は実数）のとき，$k = \dfrac{|N|}{|M|}$ を求めよ．ただし，$|M| \neq 0$ とする．

(広島市立大 2009)　　(m20094204)

0.273　$f(x) = \log(x^2 + 5x + 1)$ の導関数を求めなさい．

(山口大 2009)　　(m20094301)

0.274　方程式 $6x + 2y + 3z = 6$ で表される平面に関して以下の問いに答えなさい．

(1) 上記の平面の概略を図示しなさい．

(2) ベクトル $(6, 2, 3)$ は上記の平面と直交することを示しなさい．

(3) 座標原点と上記の平面との距離を求めなさい．

(山口大 2009)　　(m20094302)

0.275　関数 $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 40$ について，区間 $[0, 5]$ における最大値と最小値を求めなさい．

(山口大 2009)　　(m20094303)

0.276　関数 $y = \left(\dfrac{x}{x^2 + 1}\right)^3$ を微分しなさい．

(山口大 2009)　　(m20094304)

0.277　次の定積分の値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int_1^4 \frac{(\sqrt{x} + 1)^3}{\sqrt{x}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\,dx$

(山口大 2009)　　(m20094305)

0.278　次の行列式の値を求めなさい．

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

(山口大 2009)　　(m20094306)

0.279 次の行列の固有値を求めなさい.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(山口大 2009) (m20094307)

0.280 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

(山口大 2009) (m20094308)

0.281 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

$$\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$$

(山口大 2009) (m20094309)

0.282 $f(x) = \cos x + \alpha\, x$ が極値をもたないための α の条件を求めなさい.

(山口大 2009) (m20094310)

0.283 $B = \begin{bmatrix} 2 & b \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ について, 固有値が実数となるための b の条件を求めなさい.

(山口大 2009) (m20094311)

0.284 $y = \dfrac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)$ に関する次の問いに答えなさい.

(1) $\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ を求めなさい.

(2) 区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ における曲線 y の長さを求めなさい.

(山口大 2009) (m20094312)

0.285 次の定積分を計算しなさい. ただし, $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ とする.

$$\int_0^a \tan x\, dx$$

(山口大 2009) (m20094313)

0.286 関数 $f(x) = \cos(3x^2)$ をマクローリン展開しなさい.

(山口大 2009) (m20094314)

0.287 次の微分方程式を解きなさい. ただし, a は定数であり, $y(0) = y_0$ とする.

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = ax$$

(山口大 2009) (m20094315)

0.288 V を n 次元の線形空間とし f は V から V への線形写像とする.

(1) $f(0) = 0$ を示せ.

(2) $X = \{x\ ;\ x \in V\ ,\ f(x) = 0\}$ は V の線形部分空間であることを示せ.

(3) $\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n\}$ を V の基底とする. $f(x) = 0\ (x \in V)$ なら $x = 0$ となるとき $\{f(e_1),\ f(e_2),\ \cdots,\ f(e_n)\}$ は一次独立であることを示せ.

(徳島大 2009)　　(m20094401)

0.289 (1) $f(x)$ は微分可能で $f'(x)$ は連続とする．このとき，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{a^2f(x)-x^2f(a)}{x-a}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x+1}$ を求める次の計算の誤りを指摘せよ．

ロピタルの定理を用いて　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x+1}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)'}{(x+1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{1}=0$

(徳島大 2009)　　(m20094402)

0.290 (1) $f(x,y)=x+y+\sin(x^2+y^2)$ に対して偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ．

(2) $a>0$ に対して $D=\{(x,y)\ ;\ x^2+y^2\leq a^2\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D f_y(x,y)\,dxdy$ を求めよ．

(徳島大 2009)　　(m20094403)

0.291 (1) $y'+2y=e^{-x}$ の一般解を求めよ．

(2) $y''+3y'+2y=e^{-x}$ の一般解を求めよ．

(徳島大 2009)　　(m20094404)

0.292 関数 $y=\sin x\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\ x\leqq\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $y=\sin^{-1}x$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 開区間 $(-1,1)$ 上で関数 $y=\sin^{-1}x$ を微分せよ．

(2) $y=\sin^{-1}x\quad(-1<x<1)$ の接線の傾きは 1 以上であることを示せ．

(3) 直線 $y=2x$ と平行な，曲線 $y=\sin^{-1}x$ の接線の方程式をすべて求めよ．

(高知大 2009)　　(m20094501)

0.293 R^3 で，球 $S\ :\ x^2+y^2+z^2\leqq\ 5^2$ と円柱 $C\ :\ x^2+z^2\leqq\ 4^2$，$-5\leqq\ y\leqq\ 5$ を考える．S と C の共通部分を V とするとき，3 重積分 $\displaystyle\iiint_V dxdydz$ は何を表すかを述べよ．また，この値を求めよ．

(高知大 2009)　　(m20094502)

0.294 $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像 f は，$\boldsymbol{R}^2$ の元 $\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{R}^3$ の元 $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ に対して，

$$f(\boldsymbol{u}_1)=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2\,,\quad f(\boldsymbol{u}_1+2\boldsymbol{u}_2)=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+2\boldsymbol{v}_3$$

を満たしている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ は $\boldsymbol{R}^2$ の基底，$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ と $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ に関する f の表現行列 A を求めよ．

(3) $\boldsymbol{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ に関する f の表現行列 B を求めよ．また，B と (2) における行列 A との関係を述べよ．

(高知大 2009)　　(m20094503)

0.295 $n\times\ n$ 行列 A が n 個の 1 次独立な固有ベクトルをもてば，A は対角化可能であることを示せ．また，

$A=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-2&2&-1\\-2&2&-1\end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求め，A を対角化せよ．

(高知大 2009)　　(m20094504)

0.296 3 次行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ の階数が 2 となるときの a の値を求めよ.

(高知大 2009) (m20094505)

0.297 (1) 次の関数の導関数を求めよ.

(a) $x \tan^{-1} 2x$ (b) $\dfrac{x}{\sqrt{1+9x^2}}$

(2) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ について，次の問いに答えよ.

(a) $\{g(x)\}^2 - \{f(x)\}^2 = 1$ を示せ.

(b) 関数 $y = f(x)$ が単調増加であることを示せ.

(c) 関数 $y = f(x)$ の逆関数を $h(x)$ とおくとき，導関数 $h'(x)$ を求めよ.

(愛媛大 2009) (m20094601)

0.298 (1) 次の曲線の長さを求めよ.

$$y = \frac{1}{2}\log x - \frac{1}{4}x^2 \quad (1 \leqq x \leqq e)$$

(2) $a > 0$ のとき，次の広義積分が収束するための a の条件を求め，そのときの積分の値を求めよ.

$$\int_e^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^a}\, dx$$

(愛媛大 2009) (m20094602)

0.299 (1) 関数 $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2$ の極値を求めよ.

(2) $D = \{(x, y) \mid -\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2},\quad 0 \leqq y \leqq 1\}$ とするとき，次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D x \sin(xy)\, dxdy$$

(愛媛大 2009) (m20094603)

0.300 $A = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{a}{\sqrt{2}} & 0 \\ \dfrac{a}{\sqrt{2}} & 1 & \dfrac{a}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dfrac{a}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$ とする. （ただし，$a > 0$）

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) 逆行列 A^{-1} が存在しないときの a の値を求めよ.

(3) 行列 A の固有値をすべて求めよ.

(4) 行列 A の最大の固有値に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

(愛媛大 2009) (m20094604)

0.301 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を 2 × 2 行列とする. 以下の問いに答えよ. なお，行列やベクトルの要素は全て実数とする.

(1) 全ての 2 次元ベクトル $\boldsymbol{p}$ にたいし $|A\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{p}|$ となるための A の条件を a, b, c, d で表せ.

(2) A が (1) の条件を満たすとき，$(ad - bc)^2 = 1$ であることを示せ.

(3) $A\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}$ となる 0 ではない 2 次元ベクトル $\boldsymbol{q}$ が存在するための A の条件を a, b, c, d で表せ.

(4) A が (1) と (3) の条件を満たし，かつ $ad - bc = 1$ のとき，A を求めよ.

(5) A が (1) の条件を満たし，かつ直線 $y = \sqrt{3}x$ 上の点が A による変換で移動しないとき，A を求めよ.

(九州大 2009)　　(m20094701)

0.302 次の問いに答えよ．ただし，$D = \dfrac{d}{dt}$ とする.

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(D^2 - 6D + 5)x = 0$$

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(D^2 - 6D + 5)x = e^{4t}$$

(3) 次の x と y に関する連立微分方程式の一般解を求めよ.

$$\begin{cases} (D-2)x + y = \dfrac{1}{4}e^{4t} \\ (4D-5)x + Dy = 0 \end{cases}$$

(九州大 2009)　　(m20094702)

0.303 $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}$，　$a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$，　$b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$，

$g(x) = \dfrac{1}{2}a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ とおく．ただし，n を自然数とする.

(1) フーリエ係数 a_n，b_n を計算せよ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ は発散することを示せ.

(3) フーリエ級数 $g(x)$ は $x = \dfrac{\pi}{2}$ で収束することを示せ.

(4) $x = \pm\pi$ で $f(x)$ と $g(x)$ がどのような関係にあるか述べよ.

(九州大 2009)　　(m20094703)

0.304 (1) n が整数であるとき，複素数 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ について以下の式が成り立つことを示せ.

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad \cdots\cdots \text{(i)}$$

(2) (i) 式を用い，$\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ を用いて表せ.

(3) (i) 式を用い，複素数 $1 - i$ の三乗根をすべて求めよ.

(4) (i) 式を用い，1 の N 乗根をすべて求めよ．ただし，N は正の整数とする．また，$N = 4$ の場合の解を複素平面上に図示せよ.

(九州大 2009)　　(m20094704)

0.305 次の定積分を計算せよ.

(1) $2^4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cos^4 x\,dx$

(2) $2^4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\cos^4 x\,dx$

(九州大 2009)　　(m20094705)

0.306　$f(x),\ g(x)$ を以下の関数とするとき，各問いに答えよ．

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$g(x) = 1 - x^2$$

(1)　曲線 $f(x),\ g(x)$ および直線 $x = 1$ で囲まれる領域の面積 S を求めよ．

(2)　(1) の領域の周囲の長さ L を求めよ．

(九州大 2009)　　(m20094706)

0.307　$4\times\ 4$ 実行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1)　A の行列式が 0 となる a の値を求めよ．

(2)　行列 A の階数を求めよ．

(九州大 2009)　　(m20094707)

0.308　xyz-空間に，4 点 $P(-1,1,1),\ Q(-1,2,2),\ R(0,2,0),\ S(1,-1,-1)$ がある．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　ベクトル $\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{PR}$ のなす角を求めよ．

(2)　xyz-空間において平面の方程式は，一般に，適当な定数 a,b,c,d により $ax+by+cz=d$ と表される．3 点 P,Q,R を通る平面の方程式を求めよ．

(3)　点 S から，3 点 P,Q,R を通る平面に垂線を下ろした足を点 H とする．ベクトル $\overrightarrow{SH}$ を求めよ．

(4)　3 角錐 $PQRS$ の体積を求めよ．

(九州大 2009)　　(m20094708)

0.309　行列 $V_2\,,\ V_3\,,\ V_4$ を次のように定義する：

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix},\quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix},\quad V_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{pmatrix}$$

(1)　$V_2\,,\ V_3\,,\ V_4$ の行列式を求めよ．

(2)　$V_2\,,\ V_3\,,\ V_4$ の逆行列が存在する条件を述べ，その条件下で逆行列を求めよ．

(九州大 2009)　　(m20094709)

0.310　関数 $f(x)$ の点 a での Taylor 展開は，関数 $f(x)$ を点 a の近くで一番よく近似する n 次式が

$$f_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n$$

だと言うことを主張している．関数 $f(x) = -\log(1-x)$ の $x=0$ の近くでの振舞いに関する以下の問いに答えよ．

(1) 点 0 の近くで関数 $f(x)$ を一番よく近似する 0 次式 $f_0(x)$ を求めよ.

(2) 点 0 の近くで関数 $f(x)$ を一番よく近似する 1 次式 $f_1(x)$ を求めよ.

(3) 点 0 の近くで関数 $f(x)$ を一番よく近似する 2 次式 $f_2(x)$ を求めよ.

(4) 点 0 の近くで関数 $f(x)$ を一番よく近似する n 次式 $f_n(x)$ を求めよ.

(5) 以下の 4 つの関数のグラフを, $-1 \leq x < 1$ の範囲で, 重ねて描け:

$$y = f(x)\,, \quad y = f_0(x)\,, \quad y = f_1(x)\,, \quad y = f_2(x)\,.$$

(九州大 2009)　　(m20094710)

0.311 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ を実数とするとき, 次の n 次正方行列 A を考える:

$$A = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_0 \end{pmatrix}$$

ζ を $\zeta^n = 1$ を満たす複素数とするとき, ベクトル $\boldsymbol{u}_\zeta = \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^{n-1} \end{pmatrix}$ を考える.

(1) $A\boldsymbol{u}_\zeta$ を求めよ.

(2) $A\boldsymbol{u}_\zeta = \alpha \boldsymbol{u}_\zeta$ となる複素数 α が存在することを示せ.

(3) A の固有値を全て求めよ.

(4) A の行列式を因数分解された形で求めよ.

(九州大 2009)　　(m20094711)

0.312 曲線 C は xy-平面の第一象限と第二象限に描かれているとし, 次の条件を満たすとする.

- C は y 軸上の点 $(0, a)$ $(a > 0)$ を通る.
- 第一象限内では接線の傾きが $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ で与えられ, 第二象限内では接線の傾きが $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ で与えられる.

このとき

(1) 曲線 C は第一象限内では $x = a \log \dfrac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ で与えられ, 第二象限内では $x = a \log \dfrac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2}$ で与えられることを示し, C の概形を描け.

(2) 曲線 C を x 軸の周りに回転させて出来る回転体の体積を求めよ.

(九州大 2009)　　(m20094712)

0.313 a, b を実数とし, 次の問いに答えよ.

(1) 次の等式を証明せよ.

$$\int_0^{2\pi} f(a \sin x + b \cos x) dx = \int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{a^2 + b^2}\, \sin x\right) dx$$

(2) 前問の結果を用いて，次の定積分を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} (a\sin x + b\cos x)^2 dx$$

(佐賀大 2009)　　(m20094901)

0.314　$0 < a < b$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 区間 $[a, b]$ で連続な実関数 $f(x)$，$g(x)$ について以下の不等式を証明せよ．

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2 \leqq \int_a^b f(x)^2 dx \cdot \int_a^b g(x)^2 dx$$

(2) 前問の結果を用いて，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\log\frac{b}{a}\right)^2 \leqq \frac{(a-b)^2}{ab}$$

(佐賀大 2009)　　(m20094902)

0.315　$x > 0$ で次の定積分で定義された関数 $f(x)$ について，以下の問いに答えよ．

$$f(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

(1) 次の等式を証明せよ．ただし，$x > 1$ とする．

$$f(x) = (x-1)f(x-1)$$

(2) x が自然数 n のとき，次式を示せ．

$$f(n) = (n-1)!$$

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ を示し，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ．

(佐賀大 2009)　　(m20094903)

0.316　N 次元複素数ベクトルと N 次元複素数正方行列 A を考える．今，A の行列要素 a_{kl} が

$$a_{kl} = e^{\frac{2\pi}{N}(k-1)(l-1)i}$$

で与えられるとき，次の問いに答えよ．ただし，i は虚数を表す．

(1) $N = 4$ のとき，行列 A を書き下せ．

(2) 4 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ が

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

であるとき，$\boldsymbol{x}$ に前問の行列 A をかけて作られるベクトル $\boldsymbol{y}$ を求めよ．また，

$$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = 4(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$$

であることを示せ．ここで，(　,　) は複素数ベクトルの内積を表す．

(3) 行列 A の随伴行列（共役転置行列）を B とするとき，その行列要素 b_{kl} を書き下し，

$$A \cdot B = B \cdot A = NE$$

であることを示せ．ここで行列 E は N 次元単位行列である．

(4) $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ のとき,

$$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = N(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$$

が成立することを示せ．ただし，$\boldsymbol{x}$ は任意の N 次元複素数ベクトルとする．

(佐賀大 2009)　　(m20094904)

0.317　関数 $f(x) = (1+x)\log(1+x)$ について，次の問いに答えよ．

(1) 自然数 $n \geq 2$ について，n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ のマクローリン展開を

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

とするとき，a_0，a_1，a_2，a_3 および a_n は何か．ただし，$-1 < x < 1$ とする．

(佐賀大 2009)　　(m20094905)

0.318　全微分可能な 2 変数関数 $z = f(x, y)$ が，$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を満たすとする．

$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ のとき，$\dfrac{\partial z}{\partial r}$，$\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めよ．

(佐賀大 2009)　　(m20094906)

0.319　$f(x) = -\dfrac{2\tan^{-1}x}{x^3}$ とおく．ただし，$\tan^{-1}x$ は $\tan x$ の逆関数である．

(1) $\displaystyle\int f(x)dx = \frac{\tan^{-1}x}{x^2} + \frac{1}{x} + \tan^{-1}x + C$ を示せ．ただし，C は積分定数である．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ を求めよ．

(佐賀大 2009)　　(m20094907)

0.320　3 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = (1,1,2)$，$\boldsymbol{b} = (2,1,3) \in \boldsymbol{R}^3$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{c} = (1,-2,-1)$ について，$\boldsymbol{c} = p\boldsymbol{a} + q\boldsymbol{b}$ となる実数 p, q を求めよ．

(2) $\boldsymbol{d} = (1,2,2)$ が $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ で生成される部分空間 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ に含まれないことを示せ．

(3) $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ で生成される部分空間 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \rangle$ の次元は何か．

(佐賀大 2009)　　(m20094908)

0.321　3 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $PAP^{-1} = B$ となる 3 次正則行列 P を求めよ．

(2) A の固有値を求めよ,

(3) 自然数 $n \geq 1$ について，B^n を求めよ．

(4) 自然数 $n \geq 1$ について，A^n を求めよ．

(佐賀大 2009)　　(m20094909)

0.322　(1) 導関数の定義 $f'(x) = \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ を利用して $\left(\sqrt{2x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ であることを示せ．

(2) $x = 3\sin t$ として $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算せよ．

(佐賀大 2009)　　(m20094910)

0.323 行列 $A=\begin{bmatrix} 3 & m \\ m & 3 \end{bmatrix}$ で表される 1 次変換 f について，次の問いに答えよ．ただし，$m>0$ とする．

(1) $y=ax+3$ で表される直線 ℓ が 1 次変換 f によってそれ自身に写されるとき，a と m の値を求めよ．

(2) 直線 ℓ 上にあって 1 次変換 f で不変な点を (1) の結果を使って求めよ．

(3) 平面上のすべての点が 1 次変換 f によって原点を通るある直線に写されるとき，m の値を求め，なぜそうなるのかを説明せよ．

(佐賀大 2009)　　(m20094911)

0.324 次の微分方程式を解け．ただし，$y'=\dfrac{dy}{dx}$，$y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

(1) $y''=e^{3x}$

(2) $y''+3y'+2y=e^{2x}$

(佐賀大 2009)　　(m20094912)

0.325 天井からバネが吊り下げられ（バネの一方の先は天井に固定されている），質量 m のおもりがバネのもう一方の先についている．おもりがつり合った位置から距離 y（下の方向が正）にあるとき，$-ky$ の力をうけ，さらに摩擦の力 $-c\dfrac{dy}{dt}$ をうけて運動の方程式

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-ky-c\frac{dy}{dt}$$

が成り立っている（ただし，$4mk-c^2>0$）．このとき y は t の関数として

$$y=e^{At}(\cos Bt+\sin Bt)$$

のかたちに書ける．ただし．A,B は定数で $B>0$．このときの A と B を求めよ．

(佐賀大 2009)　　(m20094913)

0.326 次の関数の x に対する導関数を求めよ．

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-2x}}$

(2) $f(x)=\cos(2x+3\sin(3x))$

(佐賀大 2009)　　(m20094914)

0.327 次の関数の x に関する偏微分を求めよ．

(1) $f(x,y)=x\cos(2y)+y\sin(2x)+x\cos(3x)+y\sin(2y)$

(2) $f(x,y)=(\ln(xy))^2 \quad (x>0,\ y>0)$　（ただし $\ln(x)$ は底を e とする自然対数）

(佐賀大 2009)　　(m20094915)

0.328 次の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2(2x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

(佐賀大 2009)　　(m20094916)

0.329 図 (a) に示すような原点を中心とし，半径 1 から半径 2 までを領域とするドーナツ状の平面 S が存在し，面密度が $\rho = \dfrac{1}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{r^2}$ （ただし r は原点から (x, y) までの距離）で与えられるとき，この平面全体の質量を求めよ．

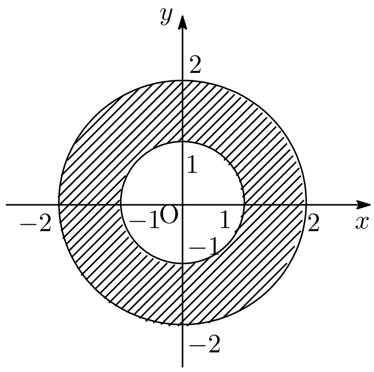


図 (a)

(佐賀大 2009)　　(m20094917)

0.330 次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

(佐賀大 2009)　　(m20094918)

0.331 行列 $A = \begin{pmatrix} 13 & -30 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$ に対して，A^n を計算せよ．

(佐賀大 2009)　　(m20094919)

0.332 連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 - 6x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

の解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$ の全体を W で表す. 以下の問いに答えよ.

(1) W の次元と W の一組の正規直交基 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は，W に含まれないことを示せ.

(3) $\boldsymbol{a}$ との距離 $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}||$ がもっとも近い W のベクトル $\boldsymbol{x}$ は,

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2$$

で与えられることを示せ．ただし，一般に 4 次ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix}$ に対して

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i \qquad ||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$$

である.

(佐賀大 2009)　　(m20094920)

0.333 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}$ を求めよ.

(2) $y=\sqrt{1+2\log x}$ の導関数を求めよ.

(佐賀大 2009)　　(m20094921)

0.334 不定積分 $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx$ 　（a,b は定数）を計算せよ.

(佐賀大 2009)　　(m20094922)

0.335 $\displaystyle\int_1^2 dy\int_0^{5-\frac{5}{2}y} f(x,y)dx$ の積分領域を示し，積分順序を変更せよ.

(佐賀大 2009)　　(m20094923)

0.336 $x=0$ を含む開区間で無限回微分可能な関数 $f(x)$ のマクローリン展開は以下のようになる.

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

これを参考に $e^{0.2}$ の値を小数点以下第 4 位まで計算せよ.

(佐賀大 2009)　　(m20094924)

0.337 空間内で $x^2+y^2=a^2$ 　$(a>0)$ と表示される円柱の xy 平面 $(z=0)$ より上，かつ，平面 $z=x$ より下にある部分の体積を求めよ.

(佐賀大 2009)　　(m20094925)

0.338 $A=\begin{bmatrix}4&7\\6&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4&-1&1\\1&-1&5\end{bmatrix}$ とするとき，AB および B^TB を求めよ.

(佐賀大 2009)　　(m20094926)

0.339 $C=\begin{bmatrix}6&5\\4&5\end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを全て求めよ.

(佐賀大 2009)　　(m20094927)

0.340 (1) 微分方程式 $\dfrac{dx}{dy}=2x(1-y)$ の一般解を求めよ.

(2) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}+2y=8x$ の一般解を求めよ.

(佐賀大 2009)　　(m20094928)

0.341 (1) 次の関数を微分しなさい.

$y=\dfrac{2x+1}{x^2+1}$

(2) 次の関数を合成関数の微分法で微分しなさい.

(a) $y=\sqrt{x^2+4}$

(b) $y=e^{2x+1}$

(3) 不定形の極限値を求めなさい.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos x}{x^3}$ 　（$x\cong 0$ のとき $x=\sin x$ となる関係を利用して解答しなさい）

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x^2}$

(佐賀大 2009)　　(m20094929)

0.342 次の関数の増減・凸凹について (1)〜(3) の問いに答えなさい.

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$$

(1) 関数の極小あるいは極大をとる x を 2 つ（x_1 および x_2）求めなさい.

(2) 上記の 2 つの x に対してそれぞれ極小あるいは極大を与えるか理由を説明して区別しなさい.

(3) 変曲点を与える座標を求めなさい.

(佐賀大 2009) (m20094930)

0.343 (1) 次の関数を積分しなさい.

(a) $\dfrac{1}{16x^2 - 9}$

(b) $\dfrac{1}{(5x+7)^5}$

(2) 次の関数を置換積分法で積分しなさい.

$$-\tan x$$

(3) 次の定積分を求めなさい.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$$

(佐賀大 2009) (m20094931)

0.344 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ と両軸座標で囲まれた部分の面積を求めなさい.

(佐賀大 2009) (m20094932)

0.345 以下の問いに答えなさい．ただし，y は $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ とする.

(1) $x = \tan y$ に対して，$\dfrac{dx}{dy}$ を求めなさい.

(2) $y = \tan^{-1} x$ に対して，逆関数の微分の公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

を利用して，$\dfrac{dy}{dx}$ を x で表しなさい.

(長崎大 2009) (m20095001)

0.346 2 行 2 列の行列 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ とする. 0 以上の整数 n に対して，A のべき乗 A^n を考える．このとき以下の問いに答えなさい．ただし，a は $0 < a < 1$ の実数とする．また，$n = 0$ に対して，$A^0 = I$ とする.

(1) $n = 2, 3, 4$ のそれぞれについて A^n を求めなさい.

(2) 行列 $I - A$ の逆行列を求めなさい.

(3) 行列 T_n を次式で定義する．このとき，$(I - A)T_n = I - A^n$ が成り立つことを示しなさい.

$$T_n = I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} A^k$$

(4) (3) の行列 T_n の各要素を a, n を用いて表しなさい.

(長崎大 2009) (m20095002)

0.347 次式で定義される I_n について，以下の問いに答えよ．

$$I_n = \int_0^n e^{-st} \cos \omega t \, dt$$

ただし，s, ω, n は正の実数である．

(1) I_n を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めなさい．

(長崎大 2009)　　(m20095003)

0.348 行列 A, B が与えられている．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) $C = A + B$ における，行列 C の $(1,1)$ 要素の値

(2) $C = A \times\ B$ における，行列 C の $(1,1)$ 要素の値

(3) 行列 A の行列式 $|A|$

(4) 行列 A の逆行列

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

(長崎大 2009)　　(m20095004)

0.349 次の微分方程式の解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = ax$　　ただし，$x = x_0$ で $y = y_0$ とする．

(2) $\dfrac{dy}{dx} = ay$　　ただし，$x = x_0$ で $y = y_0$ とする．

(長崎大 2009)　　(m20095005)

0.350 (1) $y = x^3 - 3x$ のグラフを描き，x 軸との交点を示せ．

(2) $y = x^3 - 3x$ の極値の位置と極値を示せ．

(3) 変曲点の位置を示せ．

(4) $f = \displaystyle\int_0^z y dx$ のグラフを，(f, z) 座標に描け．

(5) $y = x^3 - 3x$ の導関数を求めそのグラフを描け

(長崎大 2009)　　(m20095006)

0.351 以下の問いに答えよ．ただし，a は正の定数とする．

(1) a^x の微分を求めよ．

(2) $\tan^{-1} x$ の微分を求めよ．

(3) $f(x, y) = \dfrac{\tan^{-1} x}{a^y}$ の x 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と y 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ求めよ．

(4) $\cos x$ をマクローリン展開せよ．

(長崎大 2009)　　(m20095007)

0.352 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$ を求めよ．

(2) $D=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le 1\,,\ x^2\le y\le 1\right\}$ とするとき，領域 D を図示し，2 重積分 $\displaystyle\iint x\sqrt{y}\,dxdy$ を求めよ．

(3) xy 平面上での曲線が次式で与えられるとき，曲線を図示し，その長さを求めよ．

$$\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\sin t \end{cases} \qquad (0\le t\le 2\pi)$$

(長崎大 2009)　　(m20095008)

0.353 次の微分方程式を解け．ここで，$y'=\dfrac{dy}{dx}$ とする．

(1) $y''+4y=0$

(2) $y''+4y=\sin 3x$

(3) 初期条件 $y(0)=0,\ y'(0)=1.4$ （$x=0$ のとき $y=0,\ y'=1.4$）を満たす $y''+4y=\sin 3x$ の解を求めよ．

(長崎大 2009)　　(m20095009)

0.354 (1) $N\times\ M$ の行列 A と $P\times\ Q$ の行列 B があるとき，行列の積 AB が定義できる条件を述べよ．

(2) 連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 以外の解を持つための条件を述べよ．ただし，A は $N\times\ N$ の正方行列，$\boldsymbol{x}$ は N 次元の列ベクトル，$\boldsymbol{0}$ は N 次元の 0 ベクトルである．

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & z & 1 \\ x & 1 & z & 2 \\ 1 & 0 & b & c \\ 2 & 0 & b & c \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

(4) 行列 $A=\begin{pmatrix} 2a & 1-2a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．また，A^n が $n\to\infty$ のとき収束するための条件および $\displaystyle\lim_{n\to\infty}A^n$ を求めよ．ただし，$a\ne 1$ である．

(長崎大 2009)　　(m20095010)

0.355 (1) 次の関数を微分せよ．

(a) $\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$

(b) $e^{-x^2}+\tan x$

(2) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}}{x^4}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to +0}x^x$

(長崎大 2009)　　(m20095011)

0.356 (1) 不定積分 $\displaystyle\int(1+x)\sqrt{1-x}\,dx$ を求めよ．

(2) $D=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 4\,,\ x\ge 0\}$ とするとき，領域 D を図示し，次の 2 重積分を求めよ．

$$I=\iint_D\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$$

(3) xy 平面上での曲線が次式で与えられるとき，その長さを求めよ．

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad (0 \leq t \leq 2\pi\,,\ a > 0)$$

(長崎大 2009)　　(m20095012)

0.357 (1) 微分方程式 $y'' + 2y' - 35y = 0$ の一般解を求めよ．

なお，$y' = \dfrac{dy}{dx}$，　$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

(2) 微分方程式 $y'' + 2y' - 35y = 12e^{5x} + 37\sin 5x$ の特殊解を求めよ．

(3) 微分方程式 $y'' + 2y' - 35y = 12e^{5x} + 37\sin 5x$ の一般解を求めよ．

(長崎大 2009)　　(m20095013)

0.358 ２つの実数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$　$(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ が $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$，　$b_n = 3a_{n-1} - b_{n-1}$ を満たすとき，以下の手順に従って $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．ただし，$a_0 = 1$，$b_0 = -1$ である．

(1) $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$ を満たす行列 A を求めよ,

(2) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(3) A を対角化する行列 P を求めよ．

(4) A^n を求めよ．ただし，n は正の整数である．

(5) 実数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(長崎大 2009)　　(m20095014)

0.359 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \log x\, dx$　　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx$

(大分大 2009)　　(m20095101)

0.360 次の微分方程式を解きなさい．

$$\frac{dy}{dx} - y = e^x$$

(大分大 2009)　　(m20095102)

0.361 次の関数 $f(x)$ の $[-\pi,\ \pi]$ におけるフーリエ級数を求めなさい．

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (-\pi \leq x \leq 0) \\ -1 & (0 < x < \pi) \end{cases} \quad , \qquad f(x + 2\pi) = f(x)$$

(大分大 2009)　　(m20095103)

0.362 座標平面上の助変数表示をもつ曲線

$$C\ :\ \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = -1 + \cos t \end{cases} \qquad (0 \leqq\ t \leqq\ 2\pi)$$

について次の問いに答えよ．

(1) 曲線 C の概形を示せ．

(2) 曲線 C の長さを求めよ．

(大分大 2009)　　(m20095104)

0.363　図 1 のような底面の半径が r，母線の長さが l の直円すいがある．以下の設問に答えよ．

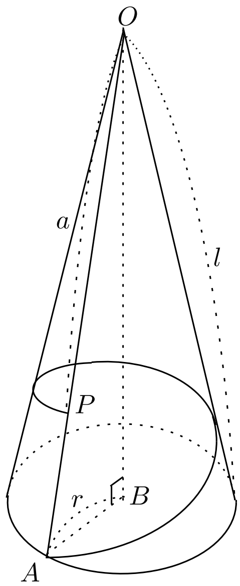


図 1　直円すい

(1)　母線 OA 上に $OP = a$ となる点 P からこの直円すいの側面を一巻きして，点 A にいたる最短の長さ b を求めなさい．ただし，$l > 2r$ であるとする．

(2)　この直円すいが $r = 5$, $l = 30$ の寸法をもつとする．$a = 20$ のときの b の値を計算しなさい．

(3)　(2) の直円すいにおいて，$a = 30$ のときの曲線 AP の概略図を描きなさい．

(熊本大 2009)　　(m20095201)

0.364　次の行列は対角化可能かどうか判定しなさい．ただし，α, β, γ はいずれも 0 でない実数であり，かつ，$\alpha \neq \beta$ とする．

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

(熊本大 2009)　　(m20095202)

0.365　2 つの放物線 $\alpha y^2 = \beta^2 x$ および $\beta x^2 = \alpha^2 y$ に関して次の問いに答えなさい．ただし，α と β はともに正の定数である．

(1)　共有点を求め，グラフを描きなさい．

(2)　2 つの放物線で囲まれる部分の面積を求めなさい．

(熊本大 2009)　　(m20095203)

0.366　3 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 W を

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 2a-2b \\ a+b \\ 3a+b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

とする．このとき，$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ が W の要素にならないための，c が満たすべき条件を求めよ．

(宮崎大 2009)　　(m20095301)

0.367 次の各問に答えよ．ただし，i を虚数単位とする．

(1) 複素数 $-1+\sqrt{3}i$ を極形式 $re^{i\theta}$ で表せ．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とせよ．

(2) 複素数 z についての方程式

$$e^{2z} + (1-\sqrt{3}i)e^{z} = 0$$

の解 z を求めよ．答えは，$z = x + iy$ の形で表せ．

(宮崎大 2009) (m20095302)

0.368 x と y の 2 変数関数

$$f(x, y) = x^3 - 3x^2 - y^2$$

について，次の各問に答えよ．

(1) 関数 $f(x, y)$ の 2 階までの偏導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

をすべて求めよ．

(2) 関数 $f(x, y)$ の極値があれば，すべて求めよ．

(宮崎大 2009) (m20095303)

0.369 重積分

$$I = \iint_D (1 + xy)dxdy\ , \quad D = \{(x, y) \mid y^2 \leqq\ x \leqq\ 2y\}$$

について，次の各問に答えよ．

(1) 集合 D を xy 座標平面上に図示せよ．

(2) 重積分 I の値を求めよ．

(宮崎大 2009) (m20095304)

0.370 (1) 次の微分方程式の一般解 $y = y(x)$ を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

(2) 次の微分方程式の一般解 $y = y(x)$ を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = \cos x$$

(宮崎大 2009) (m20095305)

0.371 微積分に関する以下の問に答えよ．

(1) 次の微分を計算し，簡単な式で表せ．

(a) $\dfrac{d}{dx}\sin(\tan(x))$ (b) $\dfrac{d}{dx}(\sin 2x \cdot \tan 2x)$

(2) 次の不定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2 - x - 3}\, dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 1}$

(鹿児島大 2009) (m20095401)

0.372 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $y' = (2x+y-5)^2 + 3(2x+y-5)$ （ヒント）$z = 2x+y-5$ の変換を試みよ．

(2) $(x^2y - xy^2 + x^2)dx + (x^3/3 - x^2y + y^2)dy = 0$

(3) $y'' + 4y' + 5y = 0$

(鹿児島大 2009) (m20095402)

0.373 空間に直交座標系 (x, y, z) をとる．点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ を含む平面の方程式は，

$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$ と書くことができる．以下の設問に答えなさい．

(1) ベクトル (a, b, c) はこの平面に垂直であることを示せ．

(2) 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ を含み，異なる二方向ベクトル (u_1, v_1, w_1)，(u_2, v_2, w_2) に平行な平面の方程式は

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0$$

で与えられることを示せ．

(鹿児島大 2009) (m20095403)

0.374 未知の二次元ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ に関する方程式，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ の解を次の手順に従って求めよ．ただし，λ は未知のスカラーであり，また A は $2\times\ 2$ 行列で，$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ とする．

(1) $\boldsymbol{x}$ が自明な解，$x_1 = 0$，$x_2 = 0$ 以外の解を持つように λ の値を決定せよ．（注：λ の値は二つある.）

(2) 各 λ の値に対し，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ の解，(x_1, x_2) を決定せよ．

(鹿児島大 2009) (m20095404)

0.375 次の微分・積分を求めなさい．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\tan\dfrac{1}{x}\right)$ (2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx$

(鹿児島大 2009) (m20095405)

0.376 行列 A, P を次の様にする時，以下の問いに答えなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) $P^{-1}AP$ を計算しなさい．

(2) (1) の結果を用いて，A^n を求めなさい．（n は正の整数.）

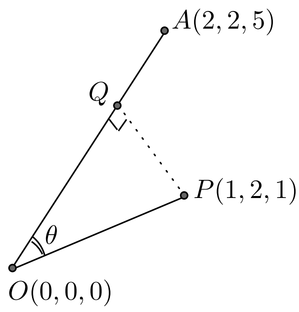
(鹿児島大 2009) (m20095406)

0.377 図の様に点 O を原点として，点 $A(2, 2, 5)$，点 $P(1, 2, 1)$ がある．点 P から直線 OA におろした垂線の足を点 Q とする．この時，以下の問いに答えなさい．

(1) 図の様に直線 OA と直線 OP の成す角度を θ とする時，$\cos\theta$ を求めなさい．

(2) 直線 OQ の長さを求めなさい．求めた長さを用いて，ベクトル $\overrightarrow{OQ}$ を求めなさい．

(3) ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ を求めなさい．



(鹿児島大 2009)　　(m20095407)

0.378 曲線：$y = a\sin x$ $(0 \leq x \leq \pi)$（a：定数）と x軸によって囲まれた部分を x軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めなさい．

(鹿児島大 2009)　　(m20095408)

0.379 $y = \sin^{-1} x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の導関数を求め，$y = \sin^{-1}\dfrac{1}{x}$ を微分せよ（$x > 1$）．

(鹿児島大 2009)　　(m20095409)

0.380 (1) x^x を x で微分せよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2 - x - 2}\,dx$ を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}\,dx$ を求めよ．

(鹿児島大 2009)　　(m20095410)

0.381 (1) $t^2 - 2t + 3/\sqrt{t} + 5$ を微分しなさい．

(2) $(5 - 3x^2)^4$ を微分しなさい．

(3) 底面の直径が 10cm，深さが 10cm の直円錐形の容器が頂点を下にして直立している．これに 4cm^3/sec の割合で水を注ぐとき，水深が 6cm になった瞬間の水面の上昇する速度を求めなさい．

(鹿児島大 2009)　　(m20095411)

0.382 (1) $\displaystyle\int (2x^2 - 1/x)^2 dx$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle\int \cos^3 x dx$ を求めなさい．

(3) 楕円（長軸 a，短軸 b，$x = a\cos\theta$，$y = b\sin\theta$）の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2009)　　(m20095412)

0.383 微積分に関する以下の問に答えよ．

(1) 次の微分を計算し，簡単な式で表せ．

(a) $\dfrac{d}{dx}\sin(\tan x)$　　(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\log 2x \cdot \tan x^2\right)$

(2) 次の不定積分を求めよ．ただし，a，b は任意定数とする．

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + (a-b)x - ab}\,dx$　　(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$

(鹿児島大 2009)　　(m20095413)

0.384 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $5xy^2 dy + 2(x^3 - 3x)y dx = 0$

(2) $(xy + \sin x \cdot \cos y)dx + (x^2/2 + \cos x \cdot \sin y)dy = 0$

(3) $y'' + 2y' + y = 0$

(鹿児島大 2009)　　(m20095414)

0.385 空間に直交座標系 (x, y, z) をとる．以下の設問に答えなさい．

(1) 点 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ および $(0, 0, 1)$ を含む平面の方程式を求めよ．

(2) この平面の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n} = (l, m, n)$　$(\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = 1)$ を求めよ．

(3) 座標原点からこの平面までの距離 s を求めよ．

(鹿児島大 2009)　　(m20095415)

0.386 未知の二次元ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ に関する方程式，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ の解を次の手順に従って求めよ．ただし，λ は未知のスカラーであり，また A は $2 \times\ 2$ 行列で，$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ とする．

(1) $\boldsymbol{x}$ が自明な解，$x_1 = 0$, $x_2 = 0$ 以外の解を持つように λ の値を決定せよ．（注：λ の値は二つある.）

(2) 各 λ の値に対し，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ の解，(x_1, x_2) を決定せよ．

(鹿児島大 2009)　　(m20095416)

0.387 次の微分・定積分を求めなさい．

(1) $\dfrac{d}{dx}(\log|\cos x|)$　　　(2) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx$

(鹿児島大 2009)　　(m20095417)

0.388 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が，

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\lambda：定数) \quad \cdots\cdots(a)$$

を満たす時，以下の問いに答えなさい．

(1) (a) 式を満たす 2 つの定数 λ（固有値）と 2 つのベクトル (x, y)（固有ベクトル）を求めなさい．

(2) (1) で求めた固有ベクトルを用いて，行列 A を対角化しなさい．

(鹿児島大 2009)　　(m20095418)

0.389 原点 $O(0, 0)$，点 $A(4, -1)$，点 $B(2, 2)$ がある時，以下の問いに答えなさい．

(1) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の長さと内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ を求めなさい．

(2) 角 AOB を θ とする時，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ を求めなさい．

(3) 三角形 OAB の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2009)　　(m20095419)

0.390 曲線：$y = x^2$ と直線：$y = 2x$ によって囲まれた部分の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2009)　　(m20095420)

0.391 $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 1$ の極値を求めよ．

(鹿児島大 2009)　　(m20095421)

0.392 R^2 の以下の基底 $\{a_i\}$ から $\{b_i\}$ への基底変換の行列を求めよ．

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(鹿児島大 2009) (m20095422)

0.393 次の微分，不定積分を計算せよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(xe^{-2x}\right)$

(2) $\displaystyle\int (\log x)^2\, dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x(x^2+12)}{x^4-16}\, dx$

(室蘭工業大 2009) (m20095501)

0.394 行列に関する以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $A,\ B,\ C,\ D$ を，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

として，行列の積 $AB,\ CD,\ DC$ を計算せよ．

(2) 行列 X を，

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

として，その転置行列 ${}^tX$，および，固有和（トレース）$\mathrm{tr}(X)$ を，

$${}^tX = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{tr}(X) = x_{11} + x_{22}$$

と定義する．このとき，$\mathrm{tr}({}^tXX)$ を求めよ．

(室蘭工業大 2009) (m20095502)

0.395 3 行 3 列の正方行列 A を以下のように定める．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ a & b & 3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

(1) 以下の 3 つの基本変形に関連して，行列式は以下の性質をもつ．

(a) 2 つの行を入れ換えると，行列式の値は -1 倍される．

(b) ある行の定数倍をほかの行に加えても，行列式の値は変わらない．

(c) ある行を c 倍すると，行列式の値も c 倍される．

上記の基本変形を利用して，A を上三角行列に変形せよ．ここで，上三角行列とは，行列の i 行 j 列成分（ただし，$i > j$）がゼロである行列のことである．

(2) A の行列式を求めよ．

(室蘭工業大 2009) (m20095503)

0.396 2 つの関数

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \tag{2}$$

$$g(x) = e^{-\alpha x} \quad (\alpha > 0) \tag{3}$$

とする.

(1) 合成関数 $h(x) = f(g(x))$ を求めよ.

(2) 関数 $h(x)$ の 1 階の導関数 $h'(x)$ と，2 階の導関数 $h''(x)$ を求めよ.

(3) $\alpha = 1$ の場合の $h(x)$ のグラフを図示せよ.

(4) $h'(x)$ を α の関数とみなした場合の，α に関する偏導関数 $\dfrac{\partial h'}{\partial \alpha}$ を求めよ.

(5) $h'(0)$ を α の関数として，そのグラフを図示せよ.

(室蘭工業大 2009)　　(m20095504)

0.397 次の等式が成り立つような k の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} k+1 & 6 \\ 2 & k-3 \end{vmatrix} = 0$

(2) $\begin{vmatrix} k+3 & -1 & 1 \\ 7 & k-5 & 1 \\ 6 & -6 & k+2 \end{vmatrix} = 0$

(室蘭工業大 2009)　　(m20095505)

0.398 次の微分方程式の特殊解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = -y$,　初期条件 $x = 0$ のとき $y = 5$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - e^x + \cos(x)$,　初期条件 $x = 0$ のとき $y = 2$

(室蘭工業大 2009)　　(m20095506)

0.399 (1) 次の関数のグラフを描け.

$$y = \frac{x^2-4}{|x-2|}$$

(2) 次の関数のグラフを描け.

$$y = x^2 - |x^2 - 4|$$

(3) 縦の長さ x，横の長さ y の長方形がある．対角線の長さ l を一定として面積 S が最大になるようにするには x と y をどのようにすればよいかを説明せよ．また，そのときの面積はどうなるか，l を用いて表せ.

(香川大 2009)　　(m20095701)

0.400 三次元座標空間において．ベクトル $(1, 2, 2)$ に垂直で点 $(1, 1, -1)$ を通る平面 a，ベクトル $(1, 2, 2)$ に垂直で点 $(1, -1, -1)$ を通る平面 b，ベクトル $(3, -4, 1)$ に垂直で点 $(1, 0, 1)$ を通る平面 c の 3 つの平面がある．これらの平面に関する以下の問いに答えよ,

(1) 平面 a を表す式を求めよ.

(香川大 2009)　　(m20095702)

0.401 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ.

(1) R^3 から R^3 への写像 f_A を

$$f_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

と定義する．f_A は線形写像であることを示せ．

(2) f_A が単射とならないような a の値を求めよ．

(3) f_A の像の次元は 2 以上であることを示せ．

(4) A は 2 を固有値としてもつことを示せ．

(5) A が 1 を固有値としてもつとき，次の (a),(b) に答えよ．

(a) a の値を求めよ．

(b) A は対角化可能であることを示せ．

(島根大 2009)　　(m20095801)

0.402 (1) 関数 $f(x) = (x+1)e^{-2x}$ について，$f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ．また，3 以上の整数 n に対して第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $y = x^x$ $(x > 0)$ の極値を求めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \sin x \, dx$ の値を求めよ．

(4) 曲線 $y = x \cos x$ $\left(0 \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2}\right)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ．

(島根大 2009)　　(m20095802)

0.403 (1) 次の極限値は存在するかどうか調べよ．

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(2) $f(x,y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(a) f の 2 次偏導関数をすべて求めよ．

(b) $x = \sin(u+v)$，$y = \cos(u-v)$ とするとき，偏導関数 f_u と f_v を求めよ．

(島根大 2009)　　(m20095803)

0.404 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

で与えられる，$f(x) = \sin x$ のマクローリン展開を求めよ．ただし，x の 7 次の項までを具体的に記述して，それ以上の高次の項は $\cdots$ で省略してよい．

(滋賀県立大 2009)　　(m20096001)

0.405 次の形の微分方程式を同次形という．

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

(1) このような同次形の微分方程式は，$u = \dfrac{y}{x}$ とおくことによって，変数が x，未知関数が $u = u(x)$ の微分方程式としたとき，変数分離形になることを示せ．

(2) $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$ の解のうち $(x,y) = (2,3)$ を通るものを求めよ．

(滋賀県立大 2009)　　(m20096002)

0.406 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(滋賀県立大 2009)　　(m20096003)

0.407 原点を中心とする半径 R の円盤の $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ の部分を B とする.

このとき, $\displaystyle\iint_B \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ の値を求めよ.

(滋賀県立大 2009)　　(m20096004)

0.408 次の行列 A について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の階数 $\mathrm{rank}A$ を求めよ.

(3) $\{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\}$ が平面となることを示せ.

(はこだて未来大 2009)　　(m20096301)

0.409 次の行列 A について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) A^4 を求めよ.

(2) A^{-1} を求めよ.

(はこだて未来大 2009)　　(m20096302)

0.410 $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対する正接関数 $\tan y$ の逆関数を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ とする. すなわち,

$$y = \mathrm{Tan}^{-1}x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \tan y \qquad \left(x \in (-\infty,\ \infty),\ y \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{Tan}^{-1}1$ の値を求めよ.

(2) $\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{3\sqrt{3}}{7}$ の値を求めよ.
ただし, 必要であれば, 次の正接関数に対する加法定理は既知として用いてよい.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

(はこだて未来大 2009)　　(m20096303)

0.411 次式で与えられる関数 $f(x)$ について, 以下の問いに答えよ.

$$f(x) = \sqrt{(x-1)(2-x)} \qquad (1 \leq x \leq 2)$$

(1) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$ の値を求めよ.

(はこだて未来大 2009) (m20096304)

0.412 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(2) 連立方程式 $\begin{cases} 3x + 4y + 5z + 7w = \ \ 6 \\ -x + 4y + 5z - \ w = -6 \\ 3x + 3y - 5z - 2w = -2 \end{cases}$ を解け.

(東京海洋大 2009) (m20096401)

0.413 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(東京海洋大 2009) (m20096402)

0.414 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}\,dx$ を計算せよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^x \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2009) (m20096403)

0.415 $f(x, y) = 2x^2y + 2x^2 - 2xy + 3y^2 + 1$ の極値を求めよ.

(東京海洋大 2009) (m20096404)

0.416 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D x(x + y)\,dxdy\,, \quad D = \{(x, y) \mid x - 1 \leqq\ y \leqq\ 1 - x,\ x \geqq\ 0\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xy^2\,dxdy\,, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq\ 1,\ x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0\}$

(東京海洋大 2009) (m20096405)

0.417 (1) $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ のとき, A の行列式と, トレースを求めなさい.

(2) $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ として, 以下の問いに答えなさい.

(a) B の行列式を求めなさい.

(b) B の固有値 λ_1, λ_2 を求めなさい. ただし $\lambda_1 \geq \lambda_2$ とする.

(c) 固有値 λ_1, λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}$ を求めなさい. ただし, 各成分は $x_{11} \geq x_{21}$, $x_{12} \geq x_{22}$ を満たし, 絶対値の最も小さい整数とする.

(d) 行列 P が $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ で定義されるとき, $BP = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ となることを示しなさい.

(e) 行列 P の逆行列を求めなさい.

(f) B^n を求めなさい.

(和歌山大 2009)　　(m20096501)

0.418 (1) $f(x) = e^{x^2+1}$ のマクローリン展開を，4 次の項まで求めなさい.

(2) 曲線 $x^4 + 3x^2 + 2xy^2 + 4y^3 - 10 = 0$ の $(x, y) = (1, 1)$ における接線の方程式を求めなさい.

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x^2 + x + 1}\,dxdy$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1\,,\ x \leq y \leq x + 1\}$ を求めなさい.

(和歌山大 2009)　　(m20096502)

0.419 (1) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = 3$ において，$x = 0$ のとき $y = 0$ となるような解を求めなさい.

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ の一般解を求めなさい.

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 7\dfrac{dy}{dx} + 12y = 0$ の一般解を求めなさい.

(和歌山大 2009)　　(m20096503)

0.420 (1) $f(t) = e^{-|t|}$ のフーリエ変換を求めなさい.

(2) $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega}{1 + \omega^2}\,d\omega$ と $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega}{1 + \omega^2}\,d\omega$ の値を求めなさい.

(和歌山大 2009)　　(m20096504)

0.421 次の各問に答えなさい．なお，i は虚数単位である.

(1) $\dfrac{5 - i}{1 + 5i}$ を計算しなさい.

(2) 複素数 $\sqrt{3} - 3i$ を極形式で表しなさい.

(3) $\displaystyle\lim_{z \to -i} \frac{z + i}{z^4 - 1}$ を求めなさい.

(4) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{z + i}{z^4 - 1}\,dz$ を求めなさい.

ただし，曲線 C は中心が $-1 - i$，半径が $\sqrt{2}$ の円周（反時計回り）とする.

(和歌山大 2009)　　(m20096505)

0.422 トリエンフルエンザに感染している鳥の鳥全体に対する割合を $r (0 \leq r \leq 1)$ とする．ある検査法を用いると，感染している鳥は確率 p で陽性と判定される．一方，感染していない鳥は確率 q で陽性でないと判定される．このとき，次の各問に答えなさい.

(1) 鳥全体から一羽を選び出したとき，その鳥がトリエンフルエンザに感染していて，かつ検査で陽性と判定される確率を求めなさい.

(2) 鳥全体から一羽を選び出したとき，検査で陽性と判定される確率を求めなさい.

(3) 検査で陽性と判定された鳥が実際にトリエンフルエンザに感染している確率を求めなさい.

(4) $p = 0.99$, $q = 0.99$, $r = 0.01$ のとき，検査で陽性と判定された鳥が，実際にトリエンフルエンザに感染している確率を計算しなさい.

(和歌山大 2009)　　(m20096506)

0.423 (1) $y = x^x \quad (x > 0)$ のとき，導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(2) 曲線 $y = 2x - \dfrac{x^2}{2}$ と直線 $y = \dfrac{x}{2} - 2$ で囲まれた領域の面積を求めよ．

(琉球大 2009)　　(m20096801)

0.424 (1) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$

(2) 次の初期値問題の解を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 3e^{2x}$$

$$y(0) = 0\,, \quad \frac{dy}{dx}(0) = -2$$

(琉球大 2009)　　(m20096802)

0.425 以下の行列式を計算せよ．

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(琉球大 2009)　　(m20096803)

0.426 以下の行列の逆行列を求めよ．

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

(琉球大 2009)　　(m20096804)