0.1 次の対称行列について，以下の設問に答えよ．

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ は $\mathbf{A}$ の固有ベクトルの一つであることを示し，対応する固有値を求めよ．

(2) $\mathbf{A}$ の固有ベクトルのうち，(1) で与えられた $\boldsymbol{x}_1$ を除くもの 2 つ ($= \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$) を挙げよ． ただし，それらの大きさを $|\boldsymbol{x}_2| = |\boldsymbol{x}_3| = 1$ とし， 3 つの固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ が互いに直交するものを選ぶこと．

(3) $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$ ($\mathbf{\Lambda}$: 対角行列) となるような直交行列 $\mathbf{P}$ を求め，これを用いて $\mathbf{A}^n$ を計算せよ．

(北海道大 2013) (m20130101)

0.2 微分方程式と周期関数について，以下の設問に答えよ．途中の計算手順も，詳しく記述すること．

(1) 次の微分方程式を解き，一般解 $y(x)$ を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 10y = 0$$

(2) 次の微分方程式を解き，一般解 $y(x)$ を求めよ．なお，n は 1 以上の整数である．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 10y = \cos nx$$

(3) 関数 $g(x)$ は，周期 2π の周期関数であり，原点を含む 1 周期は次式で表される．
この関数をフーリエ級数に展開せよ．

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{8}\left(1 + \dfrac{2x}{\pi}\right) & (-\pi \leq x < 0) \\ \dfrac{\pi^2}{8}\left(1 - \dfrac{2x}{\pi}\right) & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$$

(4) 次の微分方程式を解き，一般解 $y(x)$ を求めよ．なお，右辺は (3) の周期関数 $g(x)$ である．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 10y = g(x)$$

(北海道大 2013) (m20130102)

0.3 複素数に関する以下の設問に答えよ．

(1) z を複素数，$\overline{z}$ を z の複素共役とするとき，次式が成り立つことを示せ．ただし，$Re[z]$ は z の実数部分を表す．

$$Re[z] = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$$

(2) 次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$|z| \geq |Re[z]| \geq Re[z]$$

(3) 複素数 z_1 , z_2 に対して次の 2 式が成り立つことを，それぞれ証明せよ．

$$|z_1\overline{z}_2| = |z_1|\,|z_2|$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

(4) 複素数 $z = x + iy \quad (x, y$ は実数, i は虚数単位$)$ に対し，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\left|e^{2z+i} + e^{iz^2}\right| \leq e^{2x} + e^{-2xy}$$

(北海道大 2013)　　(m20130103)

0.4　関数 $y = (x^2 + 3x + 1)^3$ を微分せよ．　(北見工業大 2013)　　(m20130201)

0.5　2 変数関数 $z = x \sin y$ につき偏導関数 z_x, z_y を求めよ．　(北見工業大 2013)　　(m20130202)

0.6　次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = x^2 e^{-x}$ の増減を調べ，その極値を求めよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$ を求めよ．

(北見工業大 2013)　　(m20130203)

0.7　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x \, dx$

(2) $\displaystyle\int x \log x \, dx$

(北見工業大 2013)　　(m20130204)

0.8　(1) 直線 $y = x + 1$ と曲線 $y = x^2 - 1$ の交点の座標を求めよ．

(2) (1) の直線と曲線で囲まれた図形の面積を求めよ．

(北見工業大 2013)　　(m20130205)

0.9　行列 A を $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 行列式 $|A| = 0$ となる x を求めよ．

(2) $x = 2$ とするとき逆行列 A^{-1} を求めよ．

(北見工業大 2013)　　(m20130206)

0.10　方程式 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8y - 4z - 4 = 0$ で表される球 S について，次の問いに答えなさい．

(1) 球 S の中心座標と半径を求めなさい．

(2) 球 S が xy 平面と交わってできる図形は円である．この円の中心座標 P と半径を求めなさい．

(3) 球 S が yz 平面と交わってできる円の中心座標を Q とするとき，2 点 P, Q を通る直線 ℓ の方程式を求めなさい．

(4) 直線 ℓ と球 S との交点座標を求めなさい．

(岩手大 2013)　　(m20130301)

0.11 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & b & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい．ただし，a, b は定数とする．

(1) 定数 a, b を求めなさい．

(2) 行列 A の固有値を求めなさい．

(3) 行列 A の固有ベクトルを求めなさい．

(岩手大 2013)　　(m20130302)

0.12 次の各問いに答えなさい．

(1) $D_1 = \{(x, y) \mid 1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$ のとき，領域 D_1 を図示し，次の 2 重積分の値を求めなさい．

$$\iint_{D_1} (x + 2y) dxdy$$

(2) $D_2 = \left\{(x, y) \mid 0 \leqq y \leqq -x^2 + 4x\right\}$ のとき，領域 D_2 を図示し，次の 2 重積分の値を求めなさい．

$$\iint_{D_2} xdxdy$$

(3) $D_3 = \left\{(x, y) \mid 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4\right\}$ のとき，領域 D_3 を図示しなさい，また，次の 2 重積分の値を極座標に変換して求めなさい．

$$\iint_{D_3} x^2\, dxdy$$

(岩手大 2013)　　(m20130303)

0.13 2 階微分方程式 $y'' + 2y' + 2y = -85 \sin 3x$ について，次の問いに答えなさい．

(1) $y = 6 \cos 3x + 7 \sin 3x$ が上の微分方程式の 1 つの解であることを示しなさい．

(2) (1) の結果を利用して上の微分方程式の一般解を求めなさい．

(3) $x = 0$ のとき $y = 0,\ y' = 0$ を満たす上の微分方程式の解を求めなさい．

(岩手大 2013)　　(m20130304)

0.14 以下の四角内に当てはまる値を計算し，解答欄の指定した箇所に記入せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x - 3} - x + 1\right) = \boxed{\text{（ア）}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \boxed{\text{（イ）}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \boxed{\text{（ウ）}}$

(秋田大 2013)　　(m20130401)

0.15 以下の四角内に当てはまる式を計算し，解答欄の指定した箇所に記入せよ．ここで，$\arcsin x$ は $\sin x$ の逆関数を表し，$\sin^{-1} x$ と表されることもある．

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx} \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = \boxed{\text{（エ）}}$

(2) $0 < x < 1$ とするとき，$\displaystyle\frac{d}{dx} x^{\arcsin x} = \boxed{\text{（オ）}}$

(秋田大 2013)　　(m20130402)

0.16 次の定積分を求めよ．

$$\int_0^1 \log\left(x^2+1\right)dx$$

(秋田大 2013)　　(m20130403)

0.17 以下の問いに答えよ．

(1) 以下の四角内に当てはまる値を計算し，解答欄の指定した箇所に記入せよ．
行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対し，A の 2 つの固有値をそれぞれ α, β とする（ただし，$\alpha<\beta$ とする）．また，α と β に対応する固有ベクトルをそれぞれ v_α, v_β とする．このとき

$$\alpha=\boxed{\quad（カ）\quad},\ \beta=\boxed{\quad（キ）\quad},\ v_\alpha=\begin{pmatrix} \boxed{（ク）} \\ 1 \end{pmatrix},\ v_\beta=\begin{pmatrix} \boxed{（ケ）} \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる，
<u>注意</u> $\boxed{（ク）}$ と $\boxed{（ケ）}$ は，それぞれ v_α と v_β のベクトルの第一成分である．

(2) 2 つのベクトル v_α と v_β が直交するかどうか答え，その理由を述べよ．

(秋田大 2013)　　(m20130404)

0.18 次の行列 A の行列式を求めよ．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & a \\ x & y & b & b \\ x & y & z & c \end{pmatrix}$$

(秋田大 2013)　　(m20130405)

0.19 $f(x)=\dfrac{2x-\sin 2x}{x^2}$ とするとき， $0<x<\pi$ の範囲での $f(x)$ の最大値と，最大値をとるときの x の値を求めよ．

(秋田大 2013)　　(m20130406)

0.20 x を正の実数とし，関数 $f(x)$ を次のように自然対数を用いて定義する．

$$f(x)=\frac{\log x}{x^2}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $\dfrac{df}{dx}$ および第 2 次導関数 $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の増減表を書き，関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け．

(3) $y=f(x)$, $y=0$, $x=b$ のそれぞれによって囲まれた図形の面積 S を求めよ．ただし，b は $b>1$ を満たす実数とする．

(東北大 2013)　　(m20130501)

0.21 xy 平面上の点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる．

$$\begin{cases} x(t)=\sin t \\ y(t)=\sin 2t \end{cases}$$

ここで，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする．
このとき，以下の問に答えよ．

(1) $t = \dfrac{\pi}{3}$ における点 P の座標，およびその点における曲線 C の接線の傾きを求めよ.

(2) 曲線 C と x 軸によって囲まれる領域の面積 S を求めよ.

(3) 曲線 C が x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ.

(東北大 2013)　　(m20130502)

0.22 行列 A と行列 B を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の問に答えよ.

(1) AB を求めよ.

(2) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(3) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(4) A の固有値を求めよ.

(東北大 2013)　　(m20130503)

0.23 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 x^2 \log x \, dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x \, dx$　　ただし，arctan は正接 tan の逆関数の主値を表すものとする.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130601)

0.24 実数列 $\{x_n\}$, $n = 0, 1, \cdots$, を次の漸化式で定義する.

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = \cos x_n, \quad n = 0, 1, \cdots$$

(1) 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$x_0 < x_2 < x_4 < \cdots < x_{2n} < x_{2n+2} < \cdots$$

(2) 数列 $\{x_n\}$ はある正数 $\alpha > 0$ に収束することを示せ．また極限値 α は

$$\cos \alpha = \alpha$$

を満たすことを示せ.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130602)

0.25 $f(x)$ を微分可能関数とし $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f'(x) = \beta$ とする．このとき任意の実数 h に対して

$$\lim_{x \to \infty} (f(x+h) - f(x))$$

が収束することを示し，その極限の値を β と h を用いて表せ.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130603)

0.26 (1) S を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする．S の階数（ランク）rank$S$ の定義を述べよ.

(2) S, T を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする．このとき，不等式

$$\mathrm{rank}(S+T) \leqq \mathrm{rank}S + \mathrm{rank}T$$

が成立することを示せ.

(3) 上記問題 (2) で $\mathrm{rank}(S+T) = \mathrm{rank}S + \mathrm{rank}T$ が成立するような線形写像 S, T の例をあげよ.

(4) T を $\mathbb{R}^l$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像とし，S を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする．　このとき，

$$\mathrm{rank}S \circ T \leqq \mathrm{rank}S\,, \quad \mathrm{rank}S \circ T \leqq \mathrm{rank}T$$

が成立することを示せ.

(5) 次の行列で定められる線形写像 $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ の階数を求めよ．ただし，a は実数である.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \end{pmatrix}$$

(6) 上記 (5) で与えられた線形写像 F の核（核空間）$F^{-1}(\mathbf{0})$ の次元が最も大きくなるときの a を求めよ．またそのときの核の基底を 1 組求めよ.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130604)

0.27 行列に関する次の問に答えよ.

(1) 次の 2 行 2 列の実対称行列 A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

の固有値 λ_1 λ_2 と規格化された固有ベクトル v_1, v_2 を求めなさい.

(2) 前問で求めた固有ベクトルを並べて作った行列と，その転置行列を用いて A を対角化しなさい.

一般に，n 行 n 列の実対称行列 B は，ある直交行列 O およびその転置行列 O^T を用いて
$O^T BO$ とすれば対角化されることが知られている.

(3) 直交行列 O の定義を書きなさい.

(4) 一般の 2 行 2 列の実対称行列 C の行列式がその 2 つの固有値 c_1, c_2 の積に等しいこと

$$\det C = c_1 c_2$$

を証明し，C が $(*)$ で与えられるとき（すなわち $C = A$）にそれが成り立っていることを示しなさい.

(5) 一般の 2 行 2 列の実対称行列 C の対角和がその 2 つの固有値 c_1, c_2 の和に等しいこと

$$\mathrm{T_r}\, C = c_1 + c_2$$

を証明し，C が $(*)$ で与えられるとき（すなわち $C = A$）にそれが成り立っていることを示しなさい.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130605)

0.28 次の方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi(\boldsymbol{r}) = a\delta(\boldsymbol{r}), \tag{a}$$

に関する以下の問いに答えなさい．ここで右辺の a は正の実数，$\delta(\boldsymbol{r})$ は 3 次元のデルタ関数

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{b}$$

である.

(1) 関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ のフーリエ変換を

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k}) \tag{c}$$

とした時，これが方程式 (a) を満たすということから関数 $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$ を求めなさい．

(2) 積分要素 $d\boldsymbol{k}$ の直交座標系 (k_x, k_y, k_z) から極座標系 (k, θ, ϕ) への変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k} = \int_0^{\infty} dk \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi |J| \tag{d}$$

で与えられる．このときのヤコビアン J を書きなさい．ここで $k = |\boldsymbol{k}|$ である．また (d) の右辺が

$$\int_0^{\infty} k^2 dk \int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \tag{e}$$

と書けることを示しなさい．

(3) 問 (1) で求めた $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$ を使って，(c) から $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めなさい．必要があれば，公式

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2} \tag{f}$$

を用いてもよい．

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130606)

0.29 (1) $\sin x$ のマクローリン展開を求めよ．

(2) $\sin 1$ の近似値を小数第 3 位を四捨五入して小数第 2 位まで求めよ．

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130607)

0.30 $n \geq 0$ なる整数 n に対して，

$$I_n = \int_{-1}^{1} x^{2n}\sqrt{1-x^2}\, dx$$

とおく．このとき，以下の問に答えよ．

(1) I_0 と I_1 を求めよ．

(2) I_{n+1} と I_n の関係を求めよ．

(3) I_n を求めよ．

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130608)

0.31 ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^4$ 上の一次変換 f を表現する行列を

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とするとき，以下の問に答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im} f$ の次元と基底を求めよ．

(2) f の核 $\mathrm{Ker} f$ の次元と基底を求めよ．

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130609)

0.32 三角形 ABC の三つの角について，以下を示せ．

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} = 0$$

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130610)

0.33 $f(x)$ を $-l \leqq x \leqq l$ で定義された関数とする．このとき，

$$a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\,dx \quad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\,dx \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

とすると，$f(x)$ は，

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi}{l}x + b_m\sin\frac{m\pi}{l}x\right) \quad \cdots \quad ①$$

と展開できる．以下の問に答えよ．

(1) 次式で定義された関数 $f(x)$ の a_m，b_m を求め，① 式で $l = 1$ とした式に従い $f(x)$ を展開せよ．

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & (-1 \leqq x \leqq 0) \\ 1 - x & (0 < x \leqq 1) \end{cases}$$

(2) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で定義される関数 $f(x) = \cos x$ を ① 式で $l = \dfrac{\pi}{2}$ とした式に従い展開し，その展開式を利用し，以下の無限級数

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{15} + \frac{1}{35} - \frac{1}{63} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{4m^2 - 1} + \cdots$$

の値を求めよ．

(東京大 2013)　　(m20130701)

0.34 原点を出発点として数直線上の点 $(0, \pm1, \pm2, \cdots)$ を 1 ステップごとに確率 q で $+1$，確率 $r = 1 - q$ で -1 だけ移動する点がある．n を自然数とするとき，$2n$ ステップ後の点の位置を x_n とする．たとえば $x_1 = 2$ となる確率は q^2，$x_1 = 0$ となる確率は $2qr$, $x_1 = -2$ となる確率は r^2 である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ となる確率をそれぞれ求めよ．

(2) $x_n = 0$ となる確率を求めよ．

(3) $2n$ ステップ後に初めて原点に戻ってくる確率を考える．すなわち $x_n = 0$ かつ自然数 $m < n$ に対し $x_m \neq 0$ を満たす確率である．この確率は $z = qr$ の関数として $u_n(z) = 2a_n z^n$ として表現できる．

このとき $n \geqq 2$ で $a_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i}$ が成立することが示される．原点を出発し，いつかは原点に戻ってくる確率を $U(z)$ とする．$U(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ である．また，$\{U(z)\}^2$ は $U(z)$ および z を用いて簡潔に記述することができる．以上のことを用いて，$U(z)$ を求めよ．

(4) $U(z)$ をマクローリン展開し，a_n を n を使って表せ．

(東京大 2013)　　(m20130702)

0.35 半径 r の円周に内接する正 m 角形 $(m \geqq 3)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) この正 m 角形の面積 A_m を求め，m が無限大のときの極限を算出せよ．ただし，下記の関係を用いてよい．

$$\lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

(2) この正 m 角形を底面とする高さ h の正 m 角柱を考える．図 1 は，$M=6$ の場合の例である．この側面は m 個の長方形（$2m$ 個の直角三角形）で構成される．側面の総面積 B_m を求め，m が無限大のときの極限を算出せよ．

(3) この正 m 角柱の底面を面内で角 π/m だけ正 m 角形の中心で回転して得られる高さ h の多面体を考える．この多面体は，正反 m 角柱と呼ばれる．図 2 は，$m=6$ の場合の例である．この側面は $2m$ 個の二等辺三角形で構成される．側面の総面積 C_m を求め，m が無限大のときの極限を算出せよ．

(4) 正反 m 角柱の高さを h/n $(n \geqq 2)$ にして n 段積み重ねることを考える．図 3 は $M=6,\ n=2$ の例である．この側面は $2mn$ 個の二等辺三角形で構成される．側面の総面積 D_{mn} を求めよ．さらに，$n=m^2$ の場合を考え，m が無限大のときの D_{mn} の極限を算出せよ．

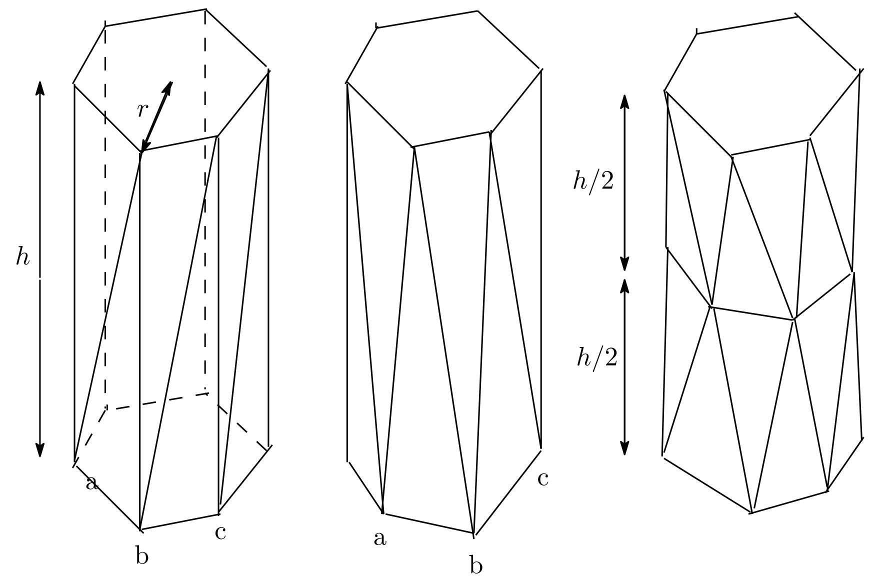


図 1　　図 2　　図 3

(東京大 2013)　　(m20130703)

0.36 以下の問いに答えよ．i は虚数単位とする．

(1) 複素数の範囲で -4 の 4 乗根をすべて求めよ．

(2) 複素関数 $f(z)=z^2$ を複素平面上の点 $1+i$ から点 $2+2i$ にいたる線分に沿って積分した結果を示せ．

(3) 実関数の定積分

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta} \qquad (a>1)$$

を求めたい．$z=\exp(i\theta)$ とし，I を複素積分の形で表せ．積分路も示すこと．

(4) 留数定理を用いて (3) の I の値を計算せよ．

(5) 複素関数 $f(z)=f(x+iy)=\left(x^2-y^2\right)+ibxy$ が正則となるように係数 b を定めよ．また，そのときの $f(z)$ の導関数を求めよ．

(東京大 2013)　　(m20130704)

0.37 3 次の正方行列 A の固有値を λ とし，λ は固有方程式 $\lambda^3-(\alpha+\beta)\lambda^2+\alpha\beta\lambda=0$ を満たすとする．このとき，$A^3-(\alpha+\beta)A^2+\alpha\beta A=0$ が成り立つ．ここで，$\alpha,\ \beta$ は互いに異なる 0 でない実数とし，行列 A は対角化可能であるとする，また，O を零行列，E を単位行列とする．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A^n $(n \geqq 3)$ は次のような行列 A の 2 次式で表せることを示せ.

$$A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n E$$

ここで, a_n, b_n, c_n は実数である.

(2) 行列 A が対角行列 D に対角化されるとき, (1) の a_n, b_n, c_n を含む次の式

$$D^n = a_n D^2 + b_n D + c_n E \quad (n \geqq 3)$$

が成り立つことを示せ.

(3) (1) の a_n, b_n, c_n を求めよ.

(4) α, β の絶対値が 1 より小さければ, 無限級数

$$\sum_{i=0}^{\infty} A^i = E + A + A^2 + \cdots$$

は $a'A^2 + b'A + c'E$ と表されることを示し, 実数 a', b', c' を求めよ.

(5) (4) の a', b', c' に対し, $(E - A)(a'A^2 + b'A + c'E)$ を求めよ.

(東京大 2013) (m20130705)

0.38 次の微分方程式を, 初期条件 $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ のもとに解け. ただし, e は自然対数の底である, また, $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする.

$$y'' - 4y' + 3y = e^{-x}$$

(東京大 2013) (m20130706)

0.39 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$ が対角化可能であるための必要十分条件を求めよ. ただし, a, b, c は複素数とする.

(東京工業大 2013) (m20130801)

0.40 複素数を成分とする 2 次の正方行列 A について, 次の問に理由を付けて答えよ.

(1) $\mathrm{rank}(A) > \mathrm{rank}(A^2)$ となることはあるか.

(2) $\mathrm{rank}(A) < \mathrm{rank}(A^2)$ となることはあるか.

(3) $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^2) \neq \mathrm{rank}(A^3)$ となることはあるか.

(東京工業大 2013) (m20130802)

0.41 関数 $x^2 + 2xy + y^2 - 2x^4 - 2y^4$ の極値を求めよ.

(東京工業大 2013) (m20130803)

0.42 楕円柱面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, 平面 $z = 0$, 曲面 $z = x^2 + y^2$ で囲まれた立体の体積 V を求めよ. ただし, a, b は正の実数とする.

(東京工業大 2013) (m20130804)

0.43 関数 $f(x, y) = \dfrac{x^2}{2} + xy - 3x - \dfrac{y^3}{3} + y^2 - y - \dfrac{1}{3}$ の極値とそのときの点 (x, y) を求めなさい. ただし極値が極大値であるか極小値であるかを明記すること.

(東京農工大 2013) (m20130901)

0.44 以下の広義積分の値を求めなさい.

$$\int_0^{\infty} \left(xe^{-x} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx$$

(東京農工大 2013) (m20130902)

0.45 以下の広義積分の値を求めなさい. ただし log は自然対数を表す.

$$\iint_D (x-y)\log(x+y+1)dxdy \;, \quad D = \left\{ (x,y) \;\middle|\; 0 \leqq x-y \leqq 1 \,,\, 0 \leqq x+y \leqq 1 \right\}$$

(東京農工大 2013) (m20130903)

0.46 4×4 行列 $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えなさい.

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めなさい.

(2) t の方程式 $|tE - A| = 0$ を満たす t の値をすべて求めなさい. ただし E は 4 次単位行列とする.

(3) $B = A - E$ とし, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする. このとき, 連立 1 次方程式 $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{O}$ の解をすべて求めなさい.

(東京農工大 2013) (m20130904)

0.47 x の関数 $y = y(x)$ について以下の問いに答えなさい.

(1) 微分方程式 $y' = y(1-y)$ の解のうち, $y(0) = \dfrac{1}{3}$ を満たすものを求めなさい.

(2) 微分方程式 $y'' + 4y = e^x$ の解のうち, $y(0) = \dfrac{6}{5}$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{6}{5}e^{\frac{\pi}{4}}$ を満たすものを求めなさい.

(東京農工大 2013) (m20130905)

0.48 3 次元ユークリット空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} , \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) 外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を計算せよ.

(2) 原点を通り, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を含む $\mathbb{R}^3$ 内の平面の方程式を求めよ.

(3) 次の条件を満たす 3 次正方行列 A を求めよ.

(a) A の対角成分は上から $1, -5, 2$ である.

(b) $\boldsymbol{a}$ は A の固有値 2 に対する固有ベクトルである.

(c) $\boldsymbol{b}$ は A の固有値 -1 に対する固有ベクトルである.

(4) 前問の条件を満たす A の定める $\mathbb{R}^3$ の線形変換を考える. k, ℓ を実数とするとき $k\boldsymbol{a} + \ell\boldsymbol{b}$ のこの変換による像を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の線形結合で表せ.

(5) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を基底とする $\mathbb{R}^3$ の部分空間を W とする. A の定める W から W への線形変換の基底 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ に関する表現行列を求めよ.

(電気通信大 2013)　　(m20131001)

0.49 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を平面 $x+z=0$ に関する対称移動とし，$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を平面 $y-z=0$ に関する対称移動とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 平面 $x+z=0$ の原点を通る法線に点 (x,y,z) からおろした垂線の足を P とするとき，点 P の座標を求めよ．

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる 3 次正方行列 A を求めよ．

(3) 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ を解け．

(4) 平面 $x+z=0$ と平面 $y-z=0$ のなす角 θ を求めよ，ただし，$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(5) $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は原点を通る直線を軸とする回転移動となる．軸となる直線の方向ベクトルと回転する角度を答えよ．

(電気通信大 2013)　　(m20131002)

0.50 関数 $u(x,y,t) = \dfrac{1}{4\pi t} e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}} \quad (t>0)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ および $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ を計算せよ．

以下では，$t>0$ を定数とする．

(2) $u(x,y,t)$ の $x.y$ に関するマクローリン展開

$$u(x,y,t) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \cdots$$

の係数 a_{00}，a_{10}，a_{01}，a_{20}，a_{11}，a_{02} を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} u(x,y,t)\, dxdy$ を計算せよ．

(電気通信大 2013)　　(m20131003)

0.51 次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D (x+2y)\sin^2(x-2y)dxdy \quad D = \left\{(x,y)\ :\ 0 \leq x+2y \leq \pi\,,\ 0 \leq x-2y \leq \frac{\pi}{4}\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \log\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy \quad D = \left\{(x,y)\ :\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\,,\ 0 \leq y \leq x\right\}$

(電気通信大 2013)　　(m20131004)

0.52 複素関数 $f(z)\ \dfrac{z^2}{z^4+z^2+1}$ について以下の問いに答えよ．

(1) $z^6=1$ を満たす複素数 z をすべて求めよ．

(2) 上半平面 $\mathbb{H} = \{x+iy\ :\ x,y \in \mathbb{R},\ y>0\}$ 上にある $f(z)$ の各特異点 α に対して，その留数 $\mathrm{Res}(\alpha)$ を求めよ．ただし，$i=\sqrt{-1}$ とする．

(3) 定積分 $I = \displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ の値を求めよ．

(電気通信大 2013)　　(m20131005)

0.53 以下の行列 A について，次の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A の固有ベクトルを求めよ．

(3) 互いに直交する 3 本の A の固有ベクトルを 1 組求めよ．

(横浜国立大 2013)　　(m20131101)

0.54 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $x\dfrac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2+y^2}$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{2}{x}\dfrac{dy}{dx} = 0$

(横浜国立大 2013)　　(m20131102)

0.55 次の数列，または，関数の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$　　ここで，$a_n = 2 + \dfrac{2}{a_{n-1}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$，$a_0 = 2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3} - x + 1\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

(千葉大 2013)　　(m20131201)

0.56 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(2) $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ $(n \geq 1)$ を満たす数列 $\{x_n\}$ は，始めの二項 x_1, x_2 が与えられれば定まる．そこで，$(x_1, x_2) = (0, 1)$ で定まる数列を $\boldsymbol{e}_1$，$(x_1, x_2) = (1, 0)$ で定まる数列を $\boldsymbol{e}_2$ とする，$\{x_n\}$ の一般項を求めるため，数列の番号を一つずらす線形変換 T を考えれば，基底 $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ に関する T の表現行列が A になることを示しなさい．

(3) A^n の固有値を用いて数列 $\{x_n\}$ の一般項を表し，$(x_1, x_2) = (1, 1)$ で定まる数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めなさい．ただし，A^n は $A\times\ A\times\ \cdots\times\ A$ を表す．

(千葉大 2013)　　(m20131202)

0.57 三次元空間中に，球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ と円柱面 $x^2+y^2=ax$ がある．ただし，$a>0$．球面に囲まれる領域が円柱により切り取られる立体の上半分 $z \geq 0$ の体積 V を求めたい．

(1) V が次のような重積分になることを図で示しなさい．

$$v = \iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy\,,\qquad D = \left\{(x, y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leq ax\right\}$$

(2) 極座標を用いると，領域 D が次のように表されることを示しなさい．

$$D = \left\{(r, \theta)\ \middle|\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq r \leq a\cos\theta\right\}$$

(3) 極座標に変換して体積 V を求めなさい．

(千葉大 2013)　　(m20131203)

0.58 次の微分方程式の一般解を求めなさい．

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = 8e^{2x}$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x-y}{x-2y}$ $\left(\text{ヒント：未知関数を } u(x) = \dfrac{y}{x} \text{ に変換すると変数分離になる}\right)$

(千葉大 2013) (m20131204)

0.59 m を自然数とし，E_m を m 次の単位行列，$1_m = {}^t(1, 1, \cdots, 1)$，$e_1 = {}^t(1, 0, \cdots, 0)$ をそれぞれ m 項縦ベクトルとする．このとき，次の行列の逆行列を求めよ．

(1) $E_m + 1_m\,{}^t1_m$

(2) $E_m + e_1\,{}^t1_m$

(筑波大 2013) (m20131301)

0.60 V を複素ベクトル空間，ϕ を V の線形変換とし，$a \in \mathbb{C}$ に対して，

$$V_a = \left\{ v \in V \;\middle|\; \phi(v) = av \right\}$$

と定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) V_a が部分空間であることを示せ．

(2) a, b, c がすべて互いに異なるなら，

$$(V_a + V_b) \cap V_c = \{0\}$$

となることを示せ．ここで，$V_a + V_b$ は $\left\{ v + u \;\middle|\; v \in V_a\,,\ u \in V_b \right\}$ を表す．

(筑波大 2013) (m20131302)

0.61 積分を利用して，次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!}{n!} \right)^{\frac{1}{n}}$$

(筑波大 2013) (m20131303)

0.62 次の問いに答えよ．

(1) $\sinh x$ と $\cosh x$ をマクローリン展開せよ．

(2) 次の積分を計算せよ．

$$\int_0^1 \cosh x\,dx$$

(3) 次の積分を計算せよ．

$$\int_0^1 (1-x)\cosh x\,dx$$

(4) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\int_0^1 (1-x)^n \cosh x\,dx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n!}{(2m+n+1)!}$$

(筑波大 2013) (m20131304)

0.63 自然数から自然数への写像 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ に対して，集合 X_n , A_n $(n\in\mathbb{N})$ を

$$X_n=\left\{f(k)\,\middle|\,k\geq n\right\}$$

$$A_n=\left\{k\in\mathbb{N}\,\middle|\,f(k)=f(n)\right\}$$

で定める．このとき，以下を証明せよ．

(1) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}X_n\neq\emptyset$ である必要十分条件は，ある $n\in\mathbb{N}$ に対して A_n が無限集合となることである．

(2) $\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\,X_n\neq X_{n+1}\right\}$ が有限集合である必要十分条件は，$\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\,A_n\text{が有限集合}\right\}$ が有限集合となることである．

(筑波大 2013) (m20131305)

0.64 関数 $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ について以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．極値の極大，極小についても調べよ．

(2) 次の積分領域 D_a における関数 $f(x,y)$ の 2 重積分 $\displaystyle\iint_{D_a}f(x,y)dxdy$ を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

$$D_a=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\leq a^2\,,\ x\geq 0\,,\ y\geq 0\right\}$$

(3) 次の積分領域 E_a における関数 $f(x,y)$ の 2 重積分 $\displaystyle\iint_{E_a}f(x,y)dxdy$ の $a\to\infty$ における極限値を求めたい．その導出過程を (2) の結果等と図を用いて説明し，極限値を示せ．

$$E_a=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leq x\leq a\,,\ o\leq y\leq a\right\}$$

(4) (3) の結果を用いて次の積分値を求めよ．

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

(筑波大 2013) (m20131306)

0.65 A を正方行列，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ $(n\geq 2)$ を A の固有値，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots\boldsymbol{x}_n$ を各固有値に対する固有ベクトルとするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 一般に，k 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_k$ が線形独立で，$k+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_k$, $\boldsymbol{a}_{k+1}$ が線形従属ならば，$\boldsymbol{a}_{k+1}$ は $\boldsymbol{a}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_k$ の線形結合であることを示せ．

(2) $\lambda_1\neq\lambda_2$ ならば，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ は線形独立であることを示せ．

(3) $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ がすべて異なるとき，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots\boldsymbol{x}_n$ は線形独立であることを，数学的帰納法によって証明せよ．

(筑波大 2013) (m20131307)

0.66 2 変数関数 $f(x,y)$ を $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$ (ただし，$(x,y)\neq(0,0)$) と定義する．ここで，$\log$ は自然対数である．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の全微分を求めよ．

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ について，点 $(a,b,f(a,b))$ における法線および接平面の方程式を求めよ．

(3) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ を $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0<x^2+y^2\leq 1\right\}$ として求めたい．$f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において定義されていないので，

$D_\varepsilon=\left\{(x,y)\,\middle|\,\varepsilon^2<x^2+y^2\leq 1\,,\ \varepsilon\in\boldsymbol{R}\right\}$ として，$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{D_\varepsilon}f(x,y)dxdy$ を計算せよ．

(筑波大 2013)　　(m20131308)

0.67 以下でベクトルは位置ベクトルとし，3 次元空間 $\boldsymbol{R}^3$ の点 (x,y,z) とベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とを同一視する．特に原点 $(0,0,0)$ はゼロベクトル $\boldsymbol{0}$ と同一視する．また，$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とし，$A\boldsymbol{x}$ と表せる点全体の集合を H とする．つまり $H=\left\{A\boldsymbol{x}\,\middle|\,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3\right\}$ である，

(1) H は平面となる．その平面の方程式を求めなさい．

(2) $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3$ に対し，$A^2\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}$ を示しなさい．

(3) 次の 3 条件を満たす 3 次正方行列 B を求めなさい．

　追記：　ただし，B はゼロ行列ではないとする．

　(a) $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3$, $\boldsymbol{y}\in H$ に対し，$B\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ とは直交する．
　　（注：ゼロベクトルは任意のベクトルと直交する.）

　(b) $\boldsymbol{y}\in H$ に対し，$B\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ である．

　(c) $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3$ に対し，$\boldsymbol{z}=B\boldsymbol{x}$ なら $B\boldsymbol{z}=3\boldsymbol{z}$ である．

(4) A と前問の B に対し，行列 $A+B$ は正則であること（逆行列を持つこと）を示しなさい．

(筑波大 2013)　　(m20131309)

0.68 複素数 z についての方程式 $\sin z=3i$ を考える．i は虚数単位である．以下の問いに答えよ．

(1) $\omega=e^{iz}$ とする．$\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ の関係を使い，この方程式を ω に関する 2 次方程式に書き換えよ．

(2) (1) で求めた ω に関する 2 次方程式を解き，その解を極表示 $re^{i\theta}$ の形で表せ．

(3) $\sin z=3i$ の解を $x+iy$ $(x,y$ は実数) の形で求めよ．

(筑波大 2013)　　(m20131310)

0.69 数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ は次の漸化式を満たす．

$$\begin{cases} x_{n+1}=2x_n+3y_n \\ y_{n+1}=2x_n-3y_n-2z_n \\ z_{n+1}=3x_n+3y_n-z_n \qquad (n=0,1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A を用いて漸化式を $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ と表したとき，A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $x_0=-5,\ y_0=10,\ z_0=5$ のとき，$x_n,\ y_n,\ z_n$ を求めよ．

(筑波大 2013)　　(m20131311)

0.70 $x,\ y,\ z$ に関する連立 1 次方程式について，以下の問いに答えよ．a は定数である．

$$\begin{cases} ax+\ \ y+\ \ z=1 \\ \ \ x+ay+\ \ z=1 \\ \ \ x+\ \ y+az=1 \end{cases}$$

(1) 解をもつために定数 a が満たすべき条件を求めよ．

(2) そのときの解を求めよ．

(筑波大 2013)　　(m20131312)

0.71 V を有限次元の実ベクトル空間であるとする．V の空でない部分集合 W が次の条件を満たすとき，W は V の部分空間と呼ばれる．

i.　$v_1,\ v_2 \in W$ ならば $v_1 + v_2 \in W$,

ii.　$v \in W,\ c \in R$ ならば $cv \in W$.

(1) 次の集合 $W_1,\ W_2$ が R^4 の部分空間かどうか理由とともに述べよ．

(a) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \ :\ x_1x_2 = x_3x_4 \right\}$

(b) $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \ :\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = x_2 + 2x_3 + 3x_4 \right\}$

(2) 実数を成分とする 2 次正方行列全体の集合 M は，通常の行列の和と行列のスカラー倍に関して実ベクトル空間となる．M の（M 自分以外）部分空間の例を 1 つあげ，それが部分空間になっている理由を述べよ．

(筑波大 2013)　　(m20131313)

0.72 次の実正方行列 A に対して，以下の問いに答えよ．ただし，途中の計算過程も示すこと．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

(1) A の行列式を求めよ．

(2) $p_n = a^n + b^n + c^n + d^n$ とおくとき，$4\times\ 4$ の行列 $B = \left[p_{i+j-2} \right]_{1 \leq i,\ j \leq 4}$ の行列式を計算せよ．

(筑波大 2013)　　(m20131314)

0.73 実変数 x, y, z が $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ を満たすとき $f(x, y, z) = xyz$ の最大値と最小値を求め，その時の x, y, z の値を示せ．

(筑波大 2013)　　(m20131315)

0.74 領域 $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y\}$ において，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D x^2 e^{-y} dxdy$$

(筑波大 2013)　　(m20131316)

0.75 定員 11 名のエレベータがある．このエレベータは，総重量が制限荷重の 748kg を超えるとブザーが鳴って動かなくなる．平均 μ，分散 σ^2 の正規分布を $N(\mu, \sigma^2)$ という記号で表すと，男性の体重 (kg) は $N(65, 99)$，女性の体重は $N(55, 88)$ に従うという．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，乗り合わせる人の体重は互いに独立とする．

(1) エレベータに男性 n_1 人，女性 n_2 人乗るとすると，計 (n_1+n_2) 人の体重の合計 X が従う分布を記号で表せ.

(2) 男性 11 人が乗ったときにブザーが鳴る確率 $P(X>748)$ を求めよ.

(3) 男女計 12 人が乗っても，そのときにブザーが鳴る確率が 1/2 未満になるような女性の人数 n_2 の最小値を求めよ.

注) Z が標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき，Z がある範囲にある確率は以下の通りである.

$$P(0\leq Z\leq 0.5)=0.1915\,,\ P(0\leq Z\leq 1)=0.3413\,,\ P(0\leq Z\leq 1.5)=0.4332$$
$$P(0\leq Z\leq 2)=0.4772\,,\ P(0\leq Z\leq 2.5)=0.4938\,,\ P(0\leq Z\leq 3)=0.4987$$

(筑波大 2013)　　(m20131317)

0.76 N 人のグループで意見が集約される過程を考える．グループ内の各構成員は意見 A か意見 B を持つとする．各時刻 t から $t+1$ にかけて $(t=1,2,\cdots)$，構成員 1 人の意見が変化する可能性があるとする．この時，意見 A を持つ人の人数 i は，$i=1,2,\cdots,N-1$ の時，確率 $\alpha\ (>0)$ で $i+1$ 人に増え，確率 $\beta\ (>0)$ で $i-1$ 人に減り，確率 $1-\alpha-\beta\ (\geq 0)$ で i 人のままだとする．また，全員の意見が A か B のどちらかに集約されたら $(i=N$ か $i=0)$，それ以降は意見変更は起こらないとする．以下の問いに答えよ.

(1) $N=3$，$\alpha=1/2$，$\beta=1/2$ のケースを考える．「時刻 $t=1$ で $i=2$ のとき，時刻 $t=6$ までに全員の意見が A に集約されている確率」を求めよ.

(2) 「時刻 t で意見 A の数が i 人のとき，時刻 $t\to\infty$ で全員の意見が A に集約されている確率」を $x(i,t)$ と書くこととする．$N=3$，$\alpha=1/2$，$\beta=1/2$ のとき，$x(2,1)$ を求めよ.

(3) 任意の N, i, α, β に関して $x(i,1)$ は $x(i,2)$ と等しくなる．理由を述べよ.

(4) 上記の問題文の下線部に注意し，$x(i,1)$ を，$x(i,2)$, $x(i+1,2)$, $x(i-1,2)$, α, β のすべてを用いた式で表せ.

(5) $x(i,1)=x(i,2)=x_i\ (i=0,1,2,\cdots,N)$ とおき，x_i についての漸化式により x_1 を求めよ.

(筑波大 2013)　　(m20131318)

0.77 任意の実数 x について $y=\tan^{-1}(x)+\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ の値を，$\tan^{-1}(x)$ の微分を用いて求めなさい.

(筑波大 2013)　　(m20131319)

0.78 $F(x,y)=x^3-3xy+2y^2-4y=0$ を満たす関数 $y=f(x)$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) $y=f(x)$ の 1 次導関数 $f'(x)$ を求めなさい.

(2) (1) の結果を用いて，$y=f(x)$ の極値を求めなさい.

(筑波大 2013)　　(m20131320)

0.79 次の関数を微分せよ.

$y=\tan(\log x)\quad(x>0)$

(埼玉大 2013)　　(m20131401)

0.80 次の関数の偏導関数 $\partial f\,/\,\partial x$, $\partial f\,/\,\partial y$ を求めよ.

$f(x,y)=x^2\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$

(埼玉大 2013)　　(m20131402)

0.81 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

(埼玉大 2013) (m20131403)

0.82 次の 2 重積分を求めよ．ただし，$x \geq 0$，$\sqrt{x} \geq y \geq x$ で囲まれた領域を D とする.

$$\iint_D (x+y)dxdy \qquad D : x \geq 0,\ \sqrt{x} \geq y \geq x$$

(埼玉大 2013) (m20131404)

0.83 行列 $\boldsymbol{A}$ について以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b & -2 \\ b & a & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値が $-1, 1, 3$ となる a と b の値を求めよ．ただし，$a > b > 0$ とする.

(2) 固有値が $-1, 1, 3$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{V}_1$，$\boldsymbol{V}_2$，$\boldsymbol{V}_3$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{V}_1$，$\boldsymbol{V}_2$，$\boldsymbol{V}_3$ は単位ベクトルとする.

(3) 固有ベクトルからなる行列 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 & \boldsymbol{V}_2 & \boldsymbol{V}_3 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(4) 行列 $\boldsymbol{P}$ を用いて行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ.

(埼玉大 2013) (m20131405)

0.84 原点を通る 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ について以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ のなす角を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に垂直なベクトルを 1 つ求めよ.

(埼玉大 2013) (m20131406)

0.85 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $x\dfrac{dy}{dx} = 3y$

(2) $\dfrac{(x^2-y^2)}{2}\,\dfrac{dy}{dx} = xy$

(3) $\dfrac{dy}{dx}e^x - x + ye^x = 0$

(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} - 10y = 0$

(埼玉大 2013) (m20131407)

0.86 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ に対し，次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を 1 つ求めよ.

(3) A^n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ.

(埼玉大 2013) (m20131408)

0.87 a, b は実数とし

$$A = \begin{pmatrix} a & a+1 & 3 & a+1 \\ a+3 & a+5 & 5 & a+3 \\ b & b+2 & a+1 & 7 \end{pmatrix}$$

とする．写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を $f(x) = Ax \ \ (x \in \mathbb{R}^4)$ により定める．このとき，f が全射でないような組 (a, b) をすべて求めよ．

(埼玉大 2013)　　(m20131409)

0.88 $-1 < x < 1$ に対し，$t = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) x を t の式で表し，さらに，導関数 $\dfrac{dx}{dt}$ を求めよ．

(2) 不定積分

$$\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$$

を t の不定積分で表せ．

(3) 広義積分

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$$

を求めよ．

(埼玉大 2013)　　(m20131410)

0.89 a, b を正の定数とし，$f(x, y) = a(x^2 + y^2) - b(x-y)^4$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $f_x(x, y)$，$f_y(x, y)$ を計算し，$f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ となる点を求めよ．

(2) $f(x, y)$ の極値とそれを与える点を求めよ．

(埼玉大 2013)　　(m20131411)

0.90 以下の式を簡単にせよ．

(1) $(\sin 25^\circ - 3\sin 65^\circ)^2 + (3\cos 115^\circ + \cos 155^\circ)^2$

(2) $\tan(45^\circ + \theta)\tan(45^\circ - \theta) + \tan(135^\circ + \theta)\tan(135^\circ - \theta)$

(3) $(\sin x + \cos x)^2 + \dfrac{(1-\tan x)^2}{1+\tan^2 x} + \tan^2 x + \cos^2 x\,(1 - \tan^4 x)$

(群馬大 2013)　　(m20131501)

0.91 長方形 $ABCD$（辺の長さが $AB = CD = 4cm$，$BC = DA = 2cm$）がある．点 P が頂点 A を出発して秒速 $1cm$ で長方形の辺の上を一周する（頂点 B, C, D を通り，A に戻る）．PA を一辺とする正方形の面積を $y\,cm^2$ とする．

(1) 5 秒後の y はいくつか．

(2) 出発してから x 秒後の y を x の式で表し，図示せよ．

(群馬大 2013)　　(m20131502)

0.92 放物線 $y = 4x^2 + x + 3$ と直線 $y = kx + 2k + 1$ がある．

(1) 直線が放物線の接線となる場合の，定数 k を求めよ．

(2) 2 本の接線の交点と 2 つの接点を結んで作られる三角形の面積を求めよ．

(群馬大 2013)　　(m20131503)

0.93 以下の問いに答えよ.

(1) アルファベットを, $AABABCABCDABCDEAB\cdots$ のように並べるとき，初めて J が表れるのは 1 番目の A から数えて何文字目か.

(2) $10! = 10\times\ 9\times\ 8\times\ 7\times\ 6\times\ 5\times\ 4\times\ 3\times\ 2\times\ 1 = 3628800$ のように，10 の階乗を表す整数の末尾には連続する 0 が 2 個ある．では，5000 の階乗を表す整数の末尾に連続する 0 は何個あるか.

(3) 1 から 10000 の整数のうち，3 または 5 または 7 の倍数である整数は何個あるか.

(群馬大 2013)　　(m20131504)

0.94 以下の問に答えよ.

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2^x - e^x\log 2 - 1 + \log 2}{x^2}$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする.

(2) 関数 $f(x) = xe^{-x^2}$ の区間 $[0,\infty)$ における最大値と最小値を求めよ.

(茨城大 2013)　　(m20131701)

0.95 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x\tan^{-1}x\,dx$ を計算せよ．ただし，関数 $y = \tan^{-1}x$ は，$y = \tan x$ の定義域を $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ に制限するときに定義される $y = \tan x$ の逆関数を表す.

(茨城大 2013)　　(m20131702)

0.96 以下の各問に答えよ.

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ -6 & 9 & -3 & -6 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ.

(2) 連立一次方程式 $\begin{cases} 2x - 3y \ \ + z = \ \ 2 \\ -6x + 9y - 3z = -6 \\ \ \ x - 3y \ \ + z = \ \ 2 \end{cases}$ を解け.

(茨城大 2013)　　(m20131703)

0.97 $x = x(t),\ y = y(t)$ のとき，次の連立微分方程式を初期条件 $x(0) = 5$, $y(0) = 2$ のもとで解け.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = \ \ x - 2y \end{cases}$$

(茨城大 2013)　　(m20131704)

0.98 複素数 z の絶対値を $|z|$，z の共役複素数を $\overline{z}$ で表す．$w = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ とおくとき，以下の各問に答えよ.

(1) 次の値をそれぞれ求めよ.

(i) w^3　　(ii) $|w|$　　(iii) $w\overline{w}$　　(iv) $1 + w + w^2$

(2) 複素数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ に対して,

$$c_n = \alpha + \beta\,\overline{w^n} + \gamma\,\overline{w^{2n}} \qquad (n = 0, 1, 2)$$

とおく．このとき,

$$d_n = c_0 + c_1 w^n + c_2 w^{2n} \qquad (n = 0, 1, 2)$$

とおく．d_0, d_1, d_2 をすべて計算して，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を使って表せ.

(茨城大 2013)　　　(m20131705)

0.99 　行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．また，A が対角化できるかどうか判定して，対角化できる場合は対角化しなさい．

(山梨大 2013)　　　(m20131801)

0.100 　行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 & b & a \\ 0 & b & (a+1)^2 & ab \\ 0 & a & ab & (b+1)^2 \end{pmatrix}$ を考えるとき，A が逆行列をもつために必要かつ十分な $a,\ b$ についての条件を求めなさい．

(山梨大 2013)　　　(m20131802)

0.101 　領域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2 \leqq\ 4x\ ,\ y \geqq\ 0\right\}$ における二重積分

$$\iint_D y^2\,dxdy$$

の値を求めなさい．

(山梨大 2013)　　　(m20131803)

0.102 　次の微分方程式を解きなさい．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-2y}{2x+y}$$

(山梨大 2013)　　　(m20131804)

0.103 　領域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0<x<\frac{5}{6}\pi\ ,\ 0<y<\frac{5}{6}\pi\right\}$ で定義された
2 変数関数 $f(x,y)=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$ について，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$ および $f_y(x,y)$ を求めよ．また，第 2 次偏導関数 $f_{xx}(x,y)$ ，$f_{xy}(x,y)$ および $f_{yy}(x,y)$ を求めよ．

(2) $f_x(x,y)=0$ かつ $f_y(x,y)=0$ を満たす領域 D 内の点 (x,y) をすべて求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)$ の領域 D における極値を求めよ．

(信州大 2013)　　　(m20131901)

0.104 　次の問いに答えよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dr$ を計算せよ．

(2) 2 重積分 $I_n=\displaystyle\iint_{D_n}\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ を計算せよ．

ただし，$D_n=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^2\right\}$　$(n=1,2,3,\cdots)$ とする．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．また，$I_n>\pi$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．

(信州大 2013)　　　(m20131902)

0.105 　行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(信州大 2013)　　　(m20131903)

0.106 次の問いに答えよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値の中で，最小の固有値に属する固有ベクトルを 1 つ求めよ.

(信州大 2013) (m20131904)

0.107 関数 $f(x)$ を

$$\begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{2x}\right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

により定める．このとき，$f(x)$ は区間 $(-1, 1)$ で微分可能かどうかを答えよ．すなわち微分可能ならば導関数を求め，微分可能でないなら，そのことを証明せよ.

(新潟大 2013) (m20132001)

0.108 条件 $x^2 - 4x + 2y^2 - 4y + 3 = 0$ のもとで，関数 $g(x, y) = x + 2y$ の最大値と最小値を求めよ.

(新潟大 2013) (m20132002)

0.109 関数 $f(x) = x^2 e^{-2x}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点の x 座標を求めよ.

(2) 曲線 $y = f(x)$ の概形を描け.

(3) 広義積分

$$\int_0^\infty f(x)dx$$

を求めよ.

(新潟大 2013) (m20132003)

0.110 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) 各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.

(3) 行列 A を対角化する直交行列を求めよ.

(新潟大 2013) (m20132004)

0.111 ユークリット空間内に 3 点 $P(-1, 3, 1)$，$Q(2, 1, 3)$，$R(5, -4, 2)$ がある．2 点 P と Q を通る直線を ℓ とするとき，次の各問いに答えよ.

(1) ℓ の方程式を求めよ.

(2) R と ℓ の距離を求めよ.

(3) ℓ に関して R と対称な点 R' の座標を求めよ.

(4) R と R' を直径の両端とする球面の方程式を求めよ.

(5) R と R' を通る球面の中心の軌跡の方程式を求めよ．なお，球面の中心とは，球面の定める球の中心のことである.

(新潟大 2013) (m20132005)

0.112 n を 2 以上の自然数とする．袋の中に $1, 2, \cdots, n$ と書いたボールが 1 つずつある．ここから 2 個取り出して，出た順にその数字を X, Y とする．また，X と Y の大きい方を Z とする．以下の問いに答えなさい．

(1) $k = 1, 2, \cdots, n$ に対して確率 $P(X = k)$，および期待値 $E(X)$ を求めなさい．

(2) $k = 1, 2, \cdots, n$ に対して確率 $P(Z = k)$，および期待値 $E(Z)$ を求めなさい．

(長岡技科大 2013)　　(m20132101)

0.113 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ と 3 次元ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ を考える．以下の問いに答えなさい．

(1) A の行列式 $|A|$ を求めなさい．

(2) 3 次元ベクトル $\boldsymbol{p}$ についての方程式 $A\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b}$ が解を持つように，k を定めなさい．

(3) 前問で定めた k について，$A\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b}$ の解のうちで $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と垂直なものを求めなさい．

(長岡技科大 2013)　　(m20132102)

0.114 空間に半径 r の球が 2 つある．これらが共有点を持つとし，中心の間の距離を $2s$ とする．以下の問いに答えなさい．

(1) 2 つの球の共通部分の体積 V を r, s で表しなさい．

(2) $s = r^2$ の条件を満たして r, s が動くとき，V を最大にする r の値を求めなさい．

(長岡技科大 2013)　　(m20132103)

0.115 以下の問いに答えなさい．

(1) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = e^{-2x}$ を解きなさい．

(2) 2 変数関数 $z(x, y) = f(x)e^{-2y}$ が偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{-2(x+y)}$$

の解になるような，2 回微分可能な関数 $f(x)$ を求めなさい．

(長岡技科大 2013)　　(m20132104)

0.116 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問い (1)〜(3) に答えよ．

(1) A が固有値 3 と 1 をもつことを確かめ，固有値 3 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ と固有値 1 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{y}$ を 1 つずつ求めよ．

(2) (1) で求めた $\boldsymbol{y}$ に対して，$\boldsymbol{z} - A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{z}$ を 1 つ求めよ．

(3) (1), (2) の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ を用いて行列 $P = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ をつくるとき，$P^{-1}AP$ を求めよ．

(金沢大 2013)　　(m20132201)

0.117 $a_n \neq 0$ を満たす実数 $a_1,\ a_2,\ \cdots .\ a_n$ に対して

$$V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n \;\middle|\; a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = 0 \right\}$$

とおく．次の問い (1)〜(3) に答えよ

(1) V が $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間であることを示せ.

(2) V の次元が $n-1$ であることを，実際にその基底を与えることによって，示せ.

(3) V の直交補空間を求めよ.

(金沢大 2013)　　(m20132202)

0.118 $x \geqq 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ が

$$0 \leqq f(x) \leqq \int_0^x f(t)dt$$

を満たすとする．次の (1)〜(3) を示せ,

(1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\dfrac{d}{dx}\log\left(\varepsilon + \displaystyle\int_0^x f(t)dt\right) < 1.$

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $f(x) < \varepsilon e^x$.

(3) 任意の $x \geqq 0$ に対して $f(x) = 0$.

(金沢大 2013)　　(m20132203)

0.119 関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

で定める．次の問い (1)〜(3) に答えよ.

(1) x に関する偏導関数 $f_x(x,y)$ を求めよ.

(2) 偏導関数 $f_x(x,y)$ は原点 $(0,0)$ で不連続であることを示せ.

(3) $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ で全微分可能であることを示せ.

(金沢大 2013)　　(m20132204)

0.120 xyz空間において ，条件

$$x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x,\ x^2+z^2 \leqq 1$$

で定まる立体の体積を求めよ.

(金沢大 2013)　　(m20132205)

0.121 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) A の行列式 $\det A$ を求めよ.

(2) $\det A = 0$ とする.

(a) A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\quad (\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ を求めよ.

(b) $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ に対する固有ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{p_1},\ \overrightarrow{p_2},\ \overrightarrow{p_3}$ とする．$\overrightarrow{p_1},\ \overrightarrow{p_2},\ \overrightarrow{p_3}$ を求めよ．

(金沢大 2013)　　(m20132206)

0.122　$a>0,\ t>0$ とする．$I_a(t)=\displaystyle\int_0^a t^x dx$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$I_a(1)$ を求めよ．

(2)　$t\neq 1$ のとき $I_a(t)$ を求めよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{t\to 1} I_a(t)$ を求めよ．

(金沢大 2013)　　(m20132207)

0.123　$0<\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}$ とし，

$$D_\varepsilon=\left\{(x,y)\,\middle|\, x\geqq\ 0,\ x^2+y^2\leqq\ 1,\ y\geqq\ (\tan\varepsilon)x\right\},$$

$$I_\varepsilon=\iint_{D_\varepsilon} xy^2dxdy$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1)　D_ε を図示せよ．

(2)　I_ε を求めよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to +0}\varepsilon^{-3}(I_\varepsilon-a)=b$ となる定数 a,b を求めよ．

(金沢大 2013)　　(m20132208)

0.124　次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{\log_e(1-x)^2}$　　(2) $\dfrac{d}{dx}(\cos 2x)^{-2}$　　(3) $\dfrac{d}{dx}\tan\left(\dfrac{e^{x^2}}{2}\right)$

(富山大 2013)　　(m20132301)

0.125　次の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int x^2e^x dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{1}{3x^2+2\sqrt{3}x+2}dx$

(富山大 2013)　　(m20132302)

0.126　空間に位置ベクトル $\overrightarrow{a}$ が示す点 A と位置ベクトル $\overrightarrow{b}$ が示す点 B がある．

(1)　点 A を通る直線 ℓ のベクトル方程式を媒介変数 t を用いて表せ．ただし，直線 ℓ の単位ベクトルを $\overrightarrow{e}$ とする．

(2)　直線 ℓ のうち，$\overrightarrow{b}$ に平行な直線のベクトル方程式を媒介変数を用いずに表せ．

(3)　点 B を通る平面 S のベクトル方程式を求めよ．ただし，平面 S の単位法線ベクトルを $\overrightarrow{n}$ とする．

(4)　点 A から平面 S までの最短距離を媒介変数を用いずに表せ．

(富山大 2013)　　(m20132303)

0.127　行列 $H=\begin{pmatrix}\alpha&\beta&0&\beta\\ \beta&\alpha&\beta&0\\ 0&\beta&\alpha&\beta\\ \beta&0&\beta&\alpha\end{pmatrix}$　($\alpha,\ \beta$ は実定数，$\beta\neq 0$) について，以下の問に答えよ．

(1)　H の固有値を $\alpha,\ \beta$ を用いて表せ．

(2)　(1) で求めたそれぞれの固有値に対応する固有空間の正規直交基底を求めよ．

(3) H を直交行列を用いて対角化せよ．

(富山大 2013)　　(m20132304)

0.128 $y=\sqrt{x-a}$, $(a>0,\ x\geq a)$ で与えられる曲線 C と C 上の点 $P(p,q)$ で接し，点 $(0,b)$ を通る直線 L を考える．以下の設問に答えよ．

(1) 直線 L の方程式を a,b,p 用いて表せ.

(2) p と q を a と b で表せ.

(3) 上の結果を用いて，直線 L と曲線 C および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．ただし，$b=0$ とする.

(富山大 2013)　　(m20132305)

0.129 x が t の関数 $x(t)$ であり，v と a をそれぞれ $v=\dfrac{dx}{dt}$，$a=\dfrac{dv}{dt}$ と定義する．以下の問いに答えよ．ただし，x の一般解や特殊解を表現するのに v や a を用いてはならない.

(1) $a=-9x$ のとき，x の一般解を求めよ．また，$x(0)=v(0)=1$ を満たす特殊解を求めよ.

(2) $a=-4(v+x)$ のとき，x の一般解を求めよ.

(3) $a=-4(v+x)+e^{-t}$ のとき，$x(0)=0$, $v(0)=3$ を満たす特殊解を求めよ.

(4) $v=-2tx^2$ のとき，$x(0)=1$ を満たす特殊解を求めよ.

(富山大 2013)　　(m20132306)

0.130 実数を成分とする行列 $A=\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ が逆行列をもつための必要十分条件を x,y,z を用いて表せ.

(富山大 2013)　　(m20132307)

0.131 集合 $A=\left\{z \,\middle|\, z \text{ は複素数}, |z|=1,\ z\neq 1\right\}$ について，次の問いに答えよ.

(1) A に属す z に対して，$z=\dfrac{c+i}{c-i}$ をみたす実数 c が存在することを示せ．ただし，i は虚数単位とする.

(2) 上の (1) で存在する c は一意的であることを示せ.

(3) A に属す z に $z=\dfrac{c+i}{c-i}$ によって一意的に定まる実数 c を対応させる写像 $f: A\to \boldsymbol{R}$ は全単射であることを示せ.

(富山大 2013)　　(m20132308)

0.132 区間 $I=[\,1,\infty\,)$ における関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\cdots}$ について，次の問いに答えよ．ただし,

$$f_n(x)=\frac{n}{2+nx}$$

とする.

(1) 区間 I における極限関数 $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ.

(2) 上の (1) における収束は一様収束であるかどうか調べよ.

(富山大 2013)　　(m20132309)

0.133 $\boldsymbol{R}^2$ 上の C^2 級関数 $f(x,y)$ について，次の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\,,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\quad(\forall(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,)$ ならば，$f(x,y)$ は定数関数であることを示せ．

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=0\,,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\quad(\forall(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,)$ のとき，$f(x,y)$ を求めよ．

(富山大 2013)　　(m20132310)

0.134　a を定数とする，次の

$$x^3-3xy+y^3=a$$

により定まる陰関数 $y=\varphi(x)$ にたいして，$\dfrac{dy}{dx}$ と $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．

(福井大 2013)　　(m20132401)

0.135　次の式を計算せよ．なお，$\alpha>1$ とする．

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^\alpha}$$

(福井大 2013)　　(m20132402)

0.136　次の行列 A について以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{pmatrix}$$

(1) $a=1,\ b=2,\ c=3$ のとき，A の行列式の値を求めよ．

(2) $a,\ b,\ c$ が相異なる実数のとき，A が正則であることを示せ．

(福井大 2013)　　(m20132403)

0.137　実数全体の集合を $\mathbb{R}$ とする．　空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{u}=(1,0,1),\ \boldsymbol{v}=(0,2,1),\ \boldsymbol{w}=(1,-1,0)$ について以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{t}=(1,4,4)$ を $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}$ の線形結合（一次結合）で表せ．

(2) $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}$ が線形独立（一次独立）であるか否かを判定せよ．

(福井大 2013)　　(m20132404)

0.138　極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x-x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x}$

(福井大 2013)　　(m20132405)

0.139　次の関数を微分せよ．

(1) $y=\sin^3\Big(4(2x+1)^2\Big)$

(2) $y=a^{2x}\qquad\big(\,a>0\,\big)$

(福井大 2013)　　(m20132406)

0.140 不定積分を求めよ.

< 公式 > 必要に応じて次の公式を使ってもよい.

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C \quad (a, C \text{ は定数})$$

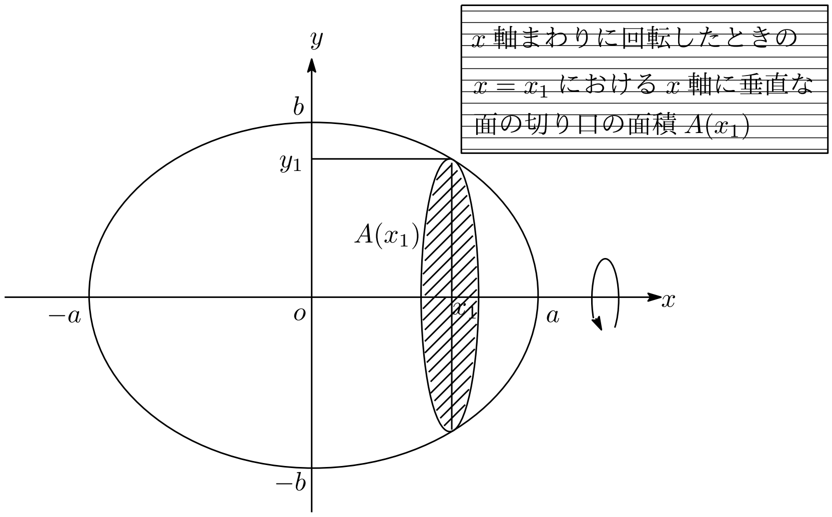
(1) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos x \, dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(2+x^2)}$

(福井大 2013) (m20132407)

0.141 右下図に示すように，2 次元 $x-y$ 直交座標系で，原点 O が長軸と短軸の交点で，x 軸上にある長径が $2a$ および y 軸上にある短径が $2b$ の楕円がある．この楕円について次の問いに答えよ.

(1) この楕円の方程式を書け.



次にこの楕円が x 軸のまわりに回転したときに生じる立体の体積を求める． 各問いに答えよ.

(2) この回転体を x 軸に垂直な面で切ると，切り口は円である．$x = x_1$ でのその切り口の面積 $A(x_1)$ を求めよ.

(3) x 軸上の任意な x での切り口の面積 $A(x)$ を x で積分 $(-a \leq x \leq a)$ すると，回転体の体積 V を求めることができる．この積分により V を求めよ．ただし，途中の式も書くこと.

(福井大 2013) (m20132408)

0.142 $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ の極値を調べよ.

(福井大 2013) (m20132409)

0.143 累次積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left\{\int_x^{2x}\sin(x+y)dy\right\}dx$ の積分順序を変更して，積分の値を求めよ．また積分領域も図示せよ.

(福井大 2013) (m20132410)

0.144 次の整数 a を含む行列 A がある．次の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & -4 & 2a \\ 1 & 2 & -2 & a-1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の階数（ランク）が 2 になるために a の値を求めよ．

(2) $a = 5$ のとき行列 A の階数（ランク）を求めよ．

(福井大 2013)　　(m20132411)

0.145 次の問いに答えよ．

(1) 行列 $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{D}$ があるとき，$(\boldsymbol{BC})^T = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}^T$ が成り立つとして，次の関係が成り立つことを証明せよ．ここで，$\boldsymbol{B}^T$ は $\boldsymbol{B}$ の転置行列である．

$$(\boldsymbol{BCD})^T = \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}^T$$

(2) $\boldsymbol{A}$ を二次正方行列とする．$\boldsymbol{A}$ を含む次の式を満たす $\boldsymbol{A}$ を求めよ．

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(福井大 2013)　　(m20132412)

0.146 2 次元平面で，整数 d を含む次の二次正方行列でベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ を一次変換するとベクトル $\boldsymbol{y}$ に移る．

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} d & 3/5 \\ 5 & 2d \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{x}$ がある直線を表すベクトルのとき，そのすべての点について，一次変換で位置が変わらなかったとする．整数 d とその直線の式を求めよ．

(福井大 2013)　　(m20132413)

0.147 次の微分方程式の一般項を導出して，初期条件を満たす解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} + x^2 y = x^2$　（初期条件：$x = 0$ のとき $y = 2$ ）

(2) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 + y$　（初期条件：$x = 0$ のとき $y = 1$ ）
なお，必要であれば，$\dfrac{1}{y^2 + y} = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y+1}$ の関係を用いること．

(3) $\dfrac{dy}{dx} + 2y \tan x = \sin x$　（初期条件：$x = 0$ のとき $y = 0$ ）

(福井大 2013)　　(m20132414)

0.148 次の設問に答えよ．

(1) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{729}}$ の値を求めよ．

(2) $4 \log_2 \sqrt{2} + \dfrac{1}{2} \log_2 3 + \log_2 \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ の値を求めよ．

(3) $\log_{10} E(M) = 1.5M + 11.8$ の時，$E(7)$ および $\dfrac{E(9)}{E(7)}$ の値を求めよ．

(福井大 2013)　　(m20132415)

0.149 次の設問に答えなさい．

(1) 等比数列 $2, 6, 18, 54, \cdots$ がある．この数列の何項までの和をとれば，初めて 10000 を超えるか．ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

(2) n を自然数とするとき $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$ を証明しなさい．

(福井大 2013)　　(m20132416)

0.150 以下の設問に答えよ．ただし以下で i は虚数単位である．

(1) $\dfrac{5-i}{5+i}$ を $a+bi$ の形で表せ．

(2) $\left|\dfrac{1+i}{2+i}\right|$ の値を求めよ．

(3) 次の複素数を極形式で表せ．

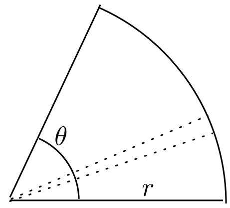
1) $2+2\sqrt{3}i$　　2) $\dfrac{2}{1-i}$

(4) $x=\cos\alpha+i\sin\alpha,\ y=\cos\beta+i\sin\beta$ とするとき，$xy=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$ であることを確かめよ．

(5) 上記 (4) の x について，$x^n=\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha)$ が成り立つことを示せ．ただし n は自然数とする．

(福井大 2013)　　(m20132417)

0.151 右の扇形の半径 r と角度 θ を 3 回ずつ計測して表の結果を得た．ただし，角度の単位の 1 分 ($'$) は 1 度 ($^\circ$) の 1/60，1 秒 ($''$) は 1 分 ($'$) の 1/60 を表すものとする．



r	$10.52m$	$10.54m$	$10.56m$
θ	$48^\circ\ 27'\ 21''$	$48^\circ\ 27'\ 28''$	$48^\circ\ 27'\ 23''$

(1) ある量の i 回目の観測値を x_i，n 回計測したときの最確値を $\overline{x}$ とするとき，$\overline{x}$ は関数 $f(\overline{x})=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ を最少化する値として算出されるとする．最確値 $\overline{x}$ を求める式を誘導しなさい．

(2) (1) の結果を用いて半径と角度の最確値を求めよ．

(3) 角度の最確値を度 ($^\circ$) の単位で小数第 4 位までの小数で示せ．また，同じ角度をラジアン単位で示せ．だたし，円周率は π とする．

(4) (3) で求めた度の単位の角度の値から，もとの度分秒の単位で角度を表す方法の手順を説明しなさい．

(5) この扇形の面積を，図に点線で示す微小な中心角を持つ扇形の集まりと考えた積分によって求めなさい．

(福井大 2013)　　(m20132418)

0.152 次の設問に答えなさい．

(1) プールの水面の高さ h が，時間 t に関し $k\dfrac{h}{b}A\,dt=-a\,dh$ を満足するように変化している．ただし k,a,b,A は定数である．$t=0$ のとき $h=h_0$ ，$t=t_1$ のとき $h=h_1$ として，定数 k を求めなさい．

(2) 時間 t での位置 (x,y) が $(e^t\cos t,\ e^t\sin t)$ で与えられる動点 P がある．ただし $0\leq t\leq 2\pi$ とする．

(a) $t=0$ における位置を示せ．

(b) 座標 x の時間 t に関するグラフの概形を示せ．

(c) $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を求めよ．

(d) $0\leq t\leq 2\pi$ での動点 P の移動距離を求めよ．

(福井大 2013)　　(m20132419)

0.153 xy 平面上の原点 O と 3 点 $A=(1,0),\ B=(1,1),\ C=(0,1)$ からなる正方形がある．関数 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x),\ y=f_3(x)$ が，ともに原点と点 B を通り，かつ $0 \leq x \leq 1$ で連続であるとするとき，これらの 3 つの関数で正方形の面積を 4 等分したい．3 つの関数を示せ．

(福井大 2013)　　(m20132420)

0.154 次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$　　(2) $3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) ${}^t\!\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

(福井大 2013)　　(m20132421)

0.155 次の連立方程式を行列とベクトルで表し，ガウスの消去法（掃き出し法）を利用して解を求めよ．

(1) $\begin{cases} 3x+3y-z=8 \\ 2x-y+z=-1 \\ x+2y-4z=11 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a-b+2c+3d+4e=-8 \\ -2a+3b-4c-5d-5e=14 \\ -a+2b-2c-2d-2e=7 \\ a+0b+3c+4d+6e=-7 \\ 0a-2b+c-d-3e=1 \end{cases}$

(福井大 2013)　　(m20132422)

0.156 次の行列の階数 (rank) を求めるとともに，正則性を調べ，正則なら逆行列を求めなさい．

(1) $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 2a & 3b \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(福井大 2013)　　(m20132423)

0.157 次の行列の固有値を求め，最大の固有値に対する固有ベクトルを求めなさい．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(福井大 2013)　　(m20132424)

0.158 空間内に 4 点 $A(1,1,1),\ B(2,3,2),\ C(-2,0,3),\ D(0,2,5)$ をとる．3 点 A,B,C を含む平面を π とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 平面 π の方程式を求めよ．

(2) 点 D を通り平面 π に垂直な直線の方程式を求めよ．

(3) 点 D と平面 π との距離を求めよ．

(4) 三角形 ABC の面積を求めよ．

(5) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ．

(静岡大 2013)　　(m20132501)

0.159 (1) 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) (1) の行列 A を直交行列を用いて対角化せよ．このとき，用いた直交行列も明記せよ．

(3) 2 次曲面の方程式 $x^2+2y^2+3z^2-4xy-4yz=1$ を標準形に変えよ．

(静岡大 2013)　　(m20132502)

0.160 次の関数の偏導関数を求めよ．

(1) $f(x,y)=\mathrm{arctan}\dfrac{y^2}{x}-\mathrm{arctan}\dfrac{x+y^2}{x-y^2}$　　(2) $f(x,y)=x\sqrt{y^2-x^2}+y^2\mathrm{arcsin}\dfrac{x}{y}$

(静岡大 2013)　　(m20132503)

0.161 次の積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}\,dx$

(静岡大 2013)　　(m20132504)

0.162 次の積分を計算せよ．積分領域 D を図示せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x}\sin(x^2+y^2)\,dxdy\,,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \frac{\pi}{3}\leqq x^2+y^2\leqq\frac{\pi}{2}\,,\ 0\leqq y\leqq x\right\}$

(静岡大 2013)　　(m20132505)

0.163 次の常微分方程式の一般解 $y=y(x)$ を求めよ．ただし，log は自然対数を表す．

(1) $x\dfrac{dy}{dx}-y=x\log x\quad(x>0)$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+3y=e^{2x}$

(静岡大 2013)　　(m20132506)

0.164 $\alpha,\ \beta,\ z_1,\ z_2,\ z_3$ は複素数で $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，$z_1+z_2+z_3=\alpha$，$z_1z_2z_3=\beta$ を満たすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}=\overline{\alpha}$ であることを示せ．ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数を表す．

(2) $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=\overline{\alpha}\beta$ であることを示せ.

(静岡大 2013)　　(m20132507)

0.165 2 変数関数 $f(x,y)=4xy-2y^2-x^4$ が極値をとる点 (x,y) をすべて求めなさい.

(静岡大 2013)　　(m20132508)

0.166 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy\,,\quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1\leqq x^2+y^2\leqq 4\right\}$ を求めなさい.

(静岡大 2013)　　(m20132509)

0.167 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問いに答えなさい.

(1) ランク（階数）を求めなさい.

(2) 固有値をすべて求めなさい．また，そのうち 0 でない固有値に対応する固有ベクトルを求めなさい.

(静岡大 2013)　　(m20132510)

0.168 行列 X_2 , X_3 , X_4 を各々

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) X_2 , X_3 , X_4 の行列式の値を求めなさい．

(2) X_n（n : 自然数）を対角成分が 0 で，ほかの成分はすべて 1 である n 行 n 列の行列とすると，X_5 の行列式の値は 4 になるという．このとき，(1) の結果も利用して X_n の行列式の値を推測し，それが正しいことを示しなさい．

(静岡大 2013)　　(m20132511)

0.169 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin 3x)}{2x(3-x)}$$

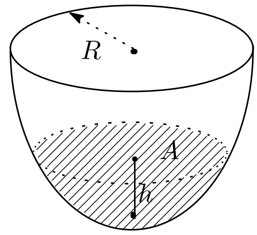
(豊橋技科大 2013)　　(m20132701)

0.170 次の不定積分を求めよ．

$$\int e^x \cos \pi x dx$$

(豊橋技科大 2013)　　(m20132702)

0.171 半径 R の上に開いた半球があり，上面が地面に対して平行になるように置かれている．この半球に水が入っており（下図の斜線部分），半球の底から測った水面の高さを h とする．次の問いに答えよ．ただし，$h \leq R$ とする．



(1) 水面の面積 A を h の関数として表せ．

(2) 水面の体積 V を h の関数として求めよ．

(3) 最下部に微小な小穴を開けた．単位時間当たりの水の体積 V の変化，すなわち dV/dt を示せ．ただし，小穴の大きさは十分に小さく，小穴を開けても半球の体積は変化しないと考えてよい．

(4) (3) の状況において，流体に関する基本定理から，単位時間当たりに小穴から流れ出る水の体積（体積速度）は $Sk\sqrt{h}$ で表される（S は微小な小穴の面積，k は正の定数）．単位時間当たりに小穴から流出する水の体積が，半球において単位時間当たりに減少する水の体積に等しいことを用いて，高さ h と時間 t の関係式（微分方程式）を示せ．さらに，$t = 0$ において $h = R$ であったとし，水が全て流出するのに要する時間 T を求めよ．

(豊橋技科大 2013)　　(m20132703)

0.172 円 $x^2 + y^2 = 4$ 上の直交座標系の点 $P(x, y)$ は，つぎの 1 次変換 f によって，円 $u^2 + v^2 = 16$ 上の点 $Q(u, v)$ に移される．以下の問いに答えよ．

$$f : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(1) 点 $P(x, y)$ の座標を，偏角 θ を用いて表せ．ただし，偏角とは原点 O を円の中心として，半直線 OP と x 軸の正方向とのなす角である．

(2) $a\ (>0)$ の値を求めよ.

(3) 点 $P(x,y)$ が上記の 1 次変換 f によって点 $Q(0,4)$ へ移されたとき，点 $P(x,y)$ の座標を求めよ.

(豊橋技科大 2013)　(m20132704)

0.173 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2) $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を満足するベクトル $\boldsymbol{x}$ の大きさ（長さ）$|\boldsymbol{x}|$ を求めよ.

(3) A の固有値 λ_1 と λ_2 を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leqq \lambda_2$ とする.

(4) n を正の整数 $(n=1,2,3,\cdots)$ とするとき，A^n を求めよ.

(豊橋技科大 2013)　(m20132705)

0.174 1 から 9 までの自然数を 1 つずつ書いた 9 枚のカードがある．以下の問いに答えよ.

(1) この 9 枚のカードから同時に 2 枚のカードを無作為に取り出す.

(a) 出た数字の差が 5 以下である確率を求め， 既約分数で答えよ.

(b) 出た数字の和が偶数である確率を求め，既約分数で答えよ.

(2) X と Y の二人がこの 9 枚のカードを使ったゲームを行う．司会者 Z がカードを 1 枚無作為に取り出し，$1,2,3,4,5,6$ のいずれかの数字が出たときは X の勝ち，$7,8,9$ のいずれかの数字が出たときは Y の勝ちとし，勝った方にその数字の分だけの得点が与えられる．カードを元に戻してこの対戦を繰り返し，先に 3 回勝った方を勝者とする.

(a) X が 3 勝 1 敗で勝者となる確率を求め，既約分数で答えよ.

(b) 最初に Y が 2 連勝したとする．この先，Y が勝者となる確率を求め，既約分数で答えよ.

(c) 最初に Y が 2 連勝したとする．この先，X か Y のどちらかが勝者となった時点の X の得点合計の期待値を求め，既約分数で答えよ.

(豊橋技科大 2013)　(m20132706)

0.175 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{9x-4}{(x-2)(x^2+3)}dxdy$$

(名古屋工業大 2013)　(m20132901)

0.176 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D xye^{-(x^2+y^2)}dxdy\ , \quad D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqq\sqrt{3}y\leqq\ x\ ,\ x^2+y^2\leqq\ 5\right\}$$

(名古屋工業大 2013)　(m20132902)

0.177 関数 $f(x,y)=4x^3-9xy^2+6y^3-12x$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x,y)$ の停留点 $\left(\text{すなわち } \dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0 \text{ をみたす点}\right)$ をすべて求めよ.

(2) (1) で求めた停留点のそれぞれについて，極値の判定をせよ.

(名古屋工業大 2013)　(m20132903)

0.178 (x,y,z) 空間における次の 2 直線の距離を求めよ.

$$\frac{x-5}{2}=-\frac{y+1}{5}=\frac{z-3}{4}\ , \qquad \frac{x-3}{8}=y+7=-\frac{z+2}{5}$$

(名古屋工業大 2013)　(m20132904)

0.179 (x, y, z) 空間における平面 $2x + 3y + 4z + 6 = 0$ を，線形写像

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

によって写して得られる (X, Y, Z) 空間の図形の方程式を求めよ．

(名古屋工業大 2013)　　(m20132905)

0.180 行列

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 13 & -7 \\ -2 & 9 & -4 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

を対角化せよ．(すなわち，正則行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列となるものと，そのときの対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ．)

(名古屋工業大 2013)　　(m20132906)

0.181 次の問いに答えよ．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{3}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$ の値を求めよ．

(2) 関数 $F(x)$ が $F(x) = \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} \left(2 - \frac{1}{3t}\right) dt$，　$x > 0$ によって定義される．このとき，$F(x)$ の増減範囲を調べ，極値を求めよ．

(名古屋工業大 2013)　　(m20132907)

0.182 3 次行列 X が方程式 $A^*X = A^{-1} + 2X$ を満たす．ただし，

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，　$A^* = adj A$ は行列 A の余因子行列である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $\big(|A|I - 2A \big)X = I$ が成立することを証明せよ．ここで，$|A|$ は行列 A の行列式であり，I は 3 次単位行列である．

(2) 行列 X を求めよ,

(3) X の固有値を求めよ,

(名古屋工業大 2013)　　(m20132908)

0.183 関数 $y = e^x$ が微分方程式 $xy' + p(x)y = x$ の 1 つの解である．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ である．このとき，次の問に答えよ．

(1) 関数 $p(x)$ を求めよ．

(2) 微分方程式の一般解を求めよ．

(3) 境界条件：$x = \ln 2$ のとき，$y(x) = 0$ を満たす微分方程式の特殊解を求めよ．

(名古屋工業大 2013)　　(m20132909)

0.184 原点を O とする 3 次元直交座標系上に，点 $A(0, 1, 2)$ と点 $B(3, 3, 0)$ がある．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\angle AOB = \theta$ として，$\cos\theta$ を求めよ．

(2) 線分 $\overline{AB}$ の長さを求めよ.

(3) 3 点 O, A, B を通る平面の法線ベクトルを求めよ．ただし，正規化しなくて良い.

(4) $\triangle AOB$ の面積を求めよ.

(三重大 2013)　　(m20133101)

0.185　$y = x\log x$ のとき，y' を求めよ．　ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ であり，$\log$ は自然対数である.

(三重大 2013)　　(m20133102)

0.186　不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x+1)^2}dx$ を求めよ.

(三重大 2013)　　(m20133103)

0.187　微分方程式の初期値問題 $y'' - 2y' + 5y = x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ の解を求めよ.
ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx},\ y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ である.

(三重大 2013)　　(m20133104)

0.188　$2\times\ 2$ 行列 A が次の 2 つの条件 (a), (b) を満たしている.

$(a)\ A^2 - 3A + 2E = O$　　$(b)\ A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

ただし，E は単位行列，O は零行列を表す，以下の問いに答えよ.

(1) $A\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(2) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(3) A を求めよ.

(4) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(三重大 2013)　　(m20133105)

0.189　y の x に関する 1 階微分を y' で表すとき，微分方程式

$$y' + 3y = \cos 2x$$

を初期条件 $y(0) = 1$ のもとで解きなさい.

(三重大 2013)　　(m20133106)

0.190　$f(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$ のとき，y を x の関数と見なして y の極値を求めなさい.

(三重大 2013)　　(m20133107)

0.191　3 次元空間内で，球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ と円柱面 $x^2 + y^2 = x$ によって囲まれる部分の体積を求めなさい.

(三重大 2013)　　(m20133108)

0.192　二つの実数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ が，$a_{n+1} = a_n + 2b_n \quad b_{n+1} = -a_n + 4b_n$ を満たす.
ただし，$a_0 = 1,\ b_0 = -1$ である．以下の問いに答えなさい.

(1) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ を満たす行列 A を求めなさい.

(2) 行列 A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ とそれぞれの固有値に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ を求めなさい.

(3) 問 (2) で求めた固有ベクトルから行列 $P = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ を用いて，$P^{-1}AP$ を求めなさい．

(4) 問 (3) の結果を利用して，A^n を求めなさい．

(5) 実数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めなさい．

(三重大 2013)　　(m20133109)

0.193 変数 x に関する関数を微分せよ．

(1) $y = \dfrac{x^2}{1-x}$　　(2) $y = x \log_e x$　　(3) $y = x^2 \sin 2x$

(三重大 2013)　　(m20133110)

0.194 変数 x に関する関数の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \sin^3 x \, dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{3x+2} \, dx$

(三重大 2013)　　(m20133111)

0.195 行列に関する以下の問に答えよ．

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ のとき，積 AB および BA を求めよ．

(2) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$ を満たす実数 λ とベクトル $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$ を求めよ．ただし，$x^2 + y^2 = 1$ とする．

(三重大 2013)　　(m20133112)

0.196 x, y に関する下記の連立方程式について行列を用いて表せ．さらに，この連立方程式が解をもたないようにするための定数 a を行列式を用いて求めよ．

$$\begin{cases} (a-6)x + (a+1)y = 0 \\ (a-10)x + a(a+1)y = a-2 \end{cases}$$

(三重大 2013)　　(m20133113)

0.197 放物線 $y = x^2 + a$ と円 $x^2 + y^2 = 9$ について，次の問に答えよ．

(1) この放物線と円が接するとき，定数 a の値を求めよ．

(2) 異なる 4 個の交点を持つような定数 a の値の範囲を求めよ．

(3) 共有点の個数と定数 a の値の関係を説明せよ．

(三重大 2013)　　(m20133114)

0.198 確率密度関数に関する以下の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x) = k(1 - |x|)$　（ただし, $|x| \leqq 1$）が確率密度関数となるように，定数 k の値を定めよ．ここで，確率密度関数 $f(x)$ と x 軸の間の面積は 1 であるという性質がある．

(2) X を確率変数とするとき，(1) に示す確率密度関数 $f(x)$ から求められる確率 $P(-0.3 \leqq X \leqq 0.8)$ を求めよ．

(三重大 2013)　　(m20133115)

0.199 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と定ベクトル $\boldsymbol{w} = (0, 0, \omega)$（ただし，$\omega$ は定数）を考える．以下の問に答えよ．

(1) これらのベクトルの外積で定義されるベクトル $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r}$ を求めよ．

(2) C を反時計回りの向きをもつ xy 平面上の原点を中心とする半径 R の円とする．C に沿っての周回積分 $\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．ただし $d\boldsymbol{l}$ は C に沿った微小線素ベクトルである．

(3) $\boldsymbol{A}$ の回転 $\nabla\times\ \boldsymbol{A}$ を求めよ．

(4) $\boldsymbol{e}_z$ を z 軸向きの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_z=(0,0,1)$ とし，D を上述の C で囲まれた半径 R の円盤領域とする．重積分 $\iint_D (\nabla\times\ \boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{e}_z\,dxdy$ を計算せよ．

(三重大 2013)　　(m20133116)

0.200 (1) A を N 行 N 列の実対称行列，すなわち，${}^tA=A$（${}^tA$ は A の転置行列）を満たし成分が実数の行列とするとき，A の固有値 $a_i\ (i=1,2,3,\cdots,N)$ と各 a_i に対する固有ベクトル $\vec{v}_i$ について以下のことを示せ．

(a) 固有値はすべて実数である．

(b) $a_i\neq a_j$ ならば，$\vec{v}_i$ と $\vec{v}_j$ は直交する．すなわち，内積 $(\vec{v}_i\,,\,\vec{v}_j)=0$．[ただし，$\vec{v}_i$ はすべて実ベクトルに選んでおく.]

(2) 2 行 2 列の行列 B を

$$B=\begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix}$$

とする．

(a) 固有値の和と積を求めよ．

(b) B を対角化する行列，すなわち，UBU^{-1} が対角行列になるような行列 U を求めよ．

(三重大 2013)　　(m20133117)

0.201 3 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ と，ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して，次の問に答えよ．ただし a は実数である．

(1) 行列 A^2 を求めよ．

(2) 3 つのベクトル $A\boldsymbol{e}_1$，$A\boldsymbol{e}_2$，$A\boldsymbol{e}_1$ が一次従属となるときの a の値を求めよ．

(奈良女子大 2013)　　(m20133201)

0.202 関数 $f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\ \ (x>-1)$ に対して，次の問に答えよ．

(1) 極限値 $\lim_{x\to 0} f(x)$ および $\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ．

(奈良女子大 2013)　　(m20133202)

0.203 xy平面上の曲線

$$C\ :\ y=e^x$$

と，点 $(a,0)$ を通り曲線 C に接する直線 ℓ に対して，次の問に答えよ．ただし a は実数である．

(1) 直線 ℓ を求めよ．

(2) 曲線 C，直線 ℓ および直線 $x = a$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(奈良女子大 2013)　　(m20133203)

0.204 次の関数を微分せよ．ただし，a は $a > 0$，かつ $a \neq 1$ の実定数である．

(1) $y = a^{-x}$　　(2) $y = \sin(\tan x)$

(奈良女子大 2013)　　(m20133204)

0.205 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$　　(3) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)}\, dx$

(奈良女子大 2013)　　(m20133205)

0.206 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+2}{x+1}$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} + y = \sin x$　　(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$

(奈良女子大 2013)　　(m20133206)

0.207 A を連続微分可能なベクトル場，$f(x, y, z)$ を連続微分可能な関数とするとき，以下の関係式を証明せよ．ただし，$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$，$r = |\boldsymbol{r}|$ である．

(1) $\nabla \cdot (\boldsymbol{r} \times \nabla f(x, y, z)) = 0$

(2) $(A \cdot \nabla)A = \dfrac{1}{2}\nabla(|A|^2) - A \times (\nabla \times A)$

(3) $\nabla \cdot \left(\dfrac{A \times \boldsymbol{r}}{r}\right) = \dfrac{\boldsymbol{r} \cdot (\nabla \times A)}{r}$

ここで，

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

である．必要なら，以下の関係式を用いてよい．

(a) $\nabla \cdot (fA) = (\nabla f) \cdot A + f\nabla \cdot A$

(b) $\nabla \times (fA) = (\nabla f) \times A + f\nabla \times A$

(c) $\nabla(A \cdot B) = A \times (\nabla \times B) + B \times (\nabla \times A) + (B \cdot \nabla)A + (A \cdot \nabla)B$

(d) $\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B)$

(奈良女子大 2013)　　(m20133207)

0.208 次の行列 $A(\theta)$ について以下の問に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) $A(\theta_1 + \theta_2) = A(\theta_1)A(\theta_2)$ であることを示せ．

(3) $A(\theta)A(-\theta) = I$ を示せ．ここで I は単位行列である．

(4) 行列 $A\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ の固有値をすべて求めよ．

(奈良女子大 2013)　　(m20133208)

0.209 患者が薬を服用すると，薬はすべて直ちに血流中に吸収され，それ以降，時間の経過とともに，血流中の薬の量は減少する．「単位時間に減少する薬の量は，その薬の血流中の現在量に比例する」ものとしよう．

薬の服用に関する次の問 (1)〜(3) に答えよ．

(1) 時刻 t における血流中の薬の量を $y(t)$ と表し，患者が時刻 $t=0$ に，はじめて一度だけ，この薬を y_0 服用したとする．

(a) 薬の量 $y(t)$ が満たすべき微分方程式が，$y'(t)+\lambda y(t)=0$（λ は比例定数）で表されることを示せ．

(b) $y(0)=y_0$ として，(a) の微分方程式を解け．

(c) 血流中の薬の量が，時刻 $t=0$ に服用した薬の量の $\dfrac{1}{n}$（n は正定数）になる時刻を求めよ．

(2) この薬を，時刻 $t=0$ に，はじめて y_0 服用し，その後も，同一量 y_0 を一定の時間間隔 T で繰り返し服用していくものとしよう．

(a) 毎回の服用直後，すなわち，時刻 $t=mT$（m は非負整数）での服用直後の血流中の薬の量を求めよ．

(b) m が大きくなると，服用直後の血流中の薬の量は，ある飽和レベル量 y_s に達する．この y_s を求めよ．

(3) この薬を，時刻 $t=0$ に，はじめて Y 服用し， その後は，一定の時間間隔 T 毎に y_d を服用していくものとしよう． 2 回目以降の服用直後の血流中の薬の量が Y となるようにするには， 2 回目以降の毎回の服用量 y_d をいくらにすれば良いか.

(京都大 2013)　　(m20133301)

0.210 スマートフォン業界のシェア争いを考える，A 社，B 社の 2 社が熾烈なシェア争いをしている．ある年 k 年（k は非負整数）の各社のシェアがそれぞれ a_k% ，b_k% $(a_k+b_k=100)$ とする．翌年（$k+1$ 年）の各社のシェアは,

$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}_k=\begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}_k$ で与えられるものとする．

$\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix} 10 \\ 90 \end{bmatrix}$ として，次の問 (1)〜(2) に答えよ．

(1) $\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$ とする．

(a) $\boldsymbol{x}_n=\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ を求めよ．

(b) $\boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix}$ を求めよ．

(c) $n\to\infty$ の場合の各社のシェアを求めよ．

(2) $\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$ とする．$n\to\infty$ の場合の各社のシェアを求めよ．

(京都大 2013)　　(m20133302)

0.211 数直線上を動く点 A，点 B がある．点 A は，1 回サイコロを振る毎に，サイコロの目が 1 から 4 のとき $+1$，5 または 6 のとき -1 だけ移動する．n 回サイコロを振ったときの点 A の位置を $\boldsymbol{x}_A(n)$ とし，最初に点 A は，$\boldsymbol{x}_A(0)=a$（a は任意の整数）にあるものとする．

このとき以下の問 (1)〜(3) に答えよ

(1) サイコロを 3 回振ったとき，点 A の位置 $\boldsymbol{x}_A(3)$ のとり得る値を全て示し，それぞれの確率を求めよ．

(2) サイコロを n 回振ったとき，点 A の位置 $\boldsymbol{x}_A(n)$ の期待値を求めよ．

(3) サイコロを n 回振ったときの点 B の位置を $\boldsymbol{x}_B(n)$ で表す．
点 A，点 B の位置が常に $\boldsymbol{x}_A(n)+\boldsymbol{x}_B(n)=M$ の関係にあるものとする．
点 A の最初の位置 $\boldsymbol{x}_A(0)=a$ が，$1 \leq a \leq M-1$ に限定されるとして，点 A か点 B の位置が M になるまでサイコロを振り続けるとき，点 A の位置が先に M になる確率を a と M を用いて表せ．ただし，M は正の整数（図 3 − 1 参照）．

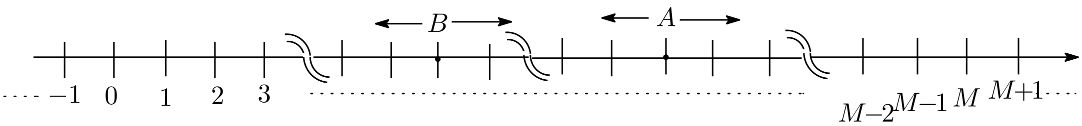


図 3 − 1

(京都大 2013)　　(m20133303)

0.212 滑らかな曲線 C 上を動く点 P について，次の問 (1)〜(2) に答えよ．なお，図 4 − 1 に示すように，P における曲線の単位接線ベクトルを $\boldsymbol{m}$，単位主法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ と表すものとする．

(1) C 上の点 P とそれに非常に近い点 P_1，P_2 の 3 点を通る円を C_0 とし，C_0 の中心を点 O，半径を ρ，線分 P_1P の中点と線分 PP_2 の中点の間の距離を ds，直線 P_1P と直線 PP_2 のなす角を $d\varphi$，とする（図 4 − 1，4 − 2）．点 P_1，P_2 間の C に変曲点はないものとする．

(a) 直線 P_1P，直線 PP_2 上の単位ベクトル $\boldsymbol{m}_1$，$\boldsymbol{m}_2$ は近接する 2 つの単位接線ベクトルとみることができ $\boldsymbol{m}_2-\boldsymbol{m}_1=d\boldsymbol{m}$ である．このとき $\left|\dfrac{d\boldsymbol{m}}{ds}\right|=\dfrac{1}{\rho}$ となることを示せ．

(b) $\dfrac{d\boldsymbol{m}}{ds}$ は $\boldsymbol{m}$ と垂直であり，$\dfrac{d\boldsymbol{m}}{ds}=\dfrac{1}{\rho}\boldsymbol{n}$ となることを示せ．

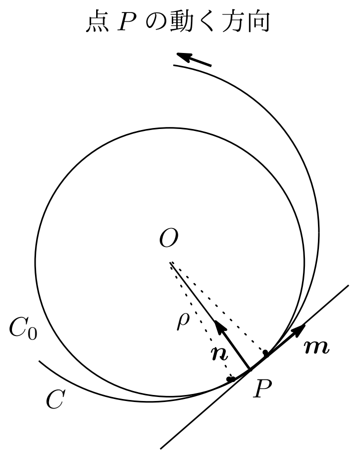


図 4 − 1

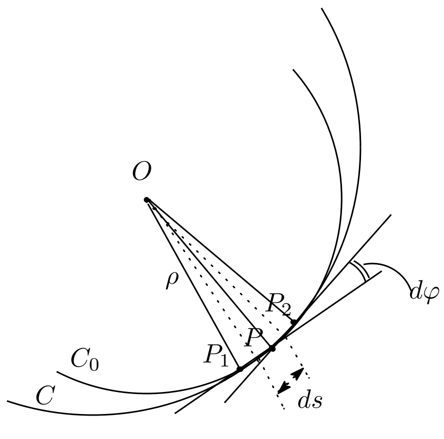


図 4 − 2

(2) 点 P の時刻 t における位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ が，
$\boldsymbol{r}(t)=[b\cos t \quad b\sin t \quad ct]$　（b，c は正の定数）
で表されるとき，P の速度 $\boldsymbol{v}(t)$，および，加速度 $\boldsymbol{a}(t)$ を，P の軌跡における，単位接線ベクトル $\boldsymbol{m}$ と単位主法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ で表せ．

(京都大 2013)　　(m20133304)

0.213 一般に 3 次正方行列 $X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ に対して $\mathrm{tr}(X)=x_{11}+x_{22}+x_{33}$ とおく．

$\mathrm{tr}(X)$ を X のトレースという．$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ -3 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{tr}(X)$ の値を求めよ．

(2) 任意の 3 次正方行列 X のたいして，$\mathrm{tr}(XA) = \mathrm{tr}(AX)$ となることを証明せよ．

(3) $AX - XA = A$ となる 3 次正方行列 X は存在しないことを証明せよ．

(京都工芸繊維大 2013)　　(m20133401)

0.214 xy 平面上の関数 $f(x,y) = x^3 + 2xy - x + 2y$ を考える．実数 a, b は $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ を満たしている．実数 t の関数

$$g(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h\cos t\,,\ b + h\sin t) - f(a,b)}{h^2}$$

を考える．

(1) a, b の値を求めよ．

(2) 次の等式を証明せよ．

$$g(t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cos^2 t + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\sin t\ \cos t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\sin^2 t$$

(3) t が実数全体を動くとき，$g(t)$ の最大値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2013)　　(m20133402)

0.215 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dx$ の値を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ の値を求めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}(2-x^2)^2}dx$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2013)　　(m20133403)

0.216 xy 平面上の図形 D : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 　$(0 \leqq \theta \leqq \pi\,,\ 0 \leqq\ r \leqq\ e^{\theta})$ に対して，

重積分 $\displaystyle\iint_D 1dxdy$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2013)　　(m20133404)

0.217 $\{a_n\}$ は数直線上の点 A_n の座標に対応する数列であり，自然数 n に対して $A_n(a_n)$ は次のように帰納的に定められる．

線分 A_nA_{n+1} を $2:1$ に内分する点を $A_{n+2}(a_{n+2})$ とする．ただし，$a_1 = 0$，$a_2 = 1$ とする．

以下の問いに答えよ．

(1) a_3，a_4，a_5 の各項が，それぞれ $\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{7}{9}$，$\dfrac{20}{27}$ で与えられることを示せ．

(2) a_{n+2} を a_{n+1} および a_n を用いて表せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求め，$n \to \infty$ のときの a_n の値を示せ．

(大阪大 2013)　　(m20133501)

0.218 微分方程式に関する以下の問いに答えよ．

(1) 微分方程式 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+2y=0$ を $x=e^t$ と変数変換することで，一般解 $y(x)$ を求めよ．ただし，$x>0$ とする．

(2) 微分方程式 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+2y=6x^4$ の特殊解を $y=Ax^4$ と表すとき，A の値を求めよ．

(3) (2) の微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ．ただし，$x=1$ のとき，$y=4$ かつ $\dfrac{dy}{dx}=9$ とする．

(大阪大 2013)　　(m20133502)

0.219 (1) 行列 $A=\begin{pmatrix} b & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ c & 0 & b \end{pmatrix}$ のすべての固有値と，それぞれに対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，a,b,c は実数である．

(2) 行列 A を対角化する直交行列の中で，対称行列となる P を一つ求めよ．

(3) A^n を求めよ．ただし，n は自然数を表す．

(4) (2) で求めた P を用いて $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と1次変換することで，$x^2+2y^2+z^2+xz$ が $\lambda_1u^2+\lambda_2v^2+\lambda_3w^2$ と表せることを示せ．また，定数 λ_1，λ_2，λ_3 の値を求めよ．

(大阪大 2013)　　(m20133503)

0.220 (1) 2つの複素数 a_1 と a_2 について，各々の和，積がいずれも実数であるとき，a_1 と a_2 が満たすべき条件をすべて示せ．

(2) 複素数 b について，$b+\dfrac{2}{b}$ の値が有限の実数であるとき，b が複素平面上で描く図形を示せ．

(3) 2つの複素数 c_1 と c_2 について，各々の和，積がいずれも純虚数であり，かつ $\left|\dfrac{c_1}{c_2}\right|=k$ であるとき，$\dfrac{c_1}{c_2}$ を k を用いて表せ，ただし $k\neq 0$ とする．

(大阪大 2013)　　(m20133504)

0.221 実数値関数 $x=x(t)$，$y=y(t)$ は，連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=(x^2+y^2)y+kx \\ \dfrac{dy}{dt}=-(x^2+y^2)x+ky \end{cases}$$

の解であり，初期時刻 $t=0$ において

$$(x(0),y(0))=(x_0,y_0)$$

を満たしている．ただし，${x_0}^2+{y_0}^2=1$ であるとする．

(1) $X(t)=x^2(t)+y^2(t)$ とする．$X(t)$ の満たす微分方程式を導き，その解を求めよ．

(2) $x(t)$，$y(t)$ を t,k,x_0,y_0 を用いて表せ．

(大阪大 2013)　　(m20133505)

0.222 (1) 以下を示せ．

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{z}{z^2+1}e^{iz}dz=\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{z}{z^2-1}e^{iz}dz=0$$

ただし，正の実数 R に対し

$$\Gamma_R=\{Re^{i\theta}\,\big|\,0\leq\theta\leq\pi\}$$

であり，積分の向きは反時計回りにとるものとする．

(2) 積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1} \sin x \, dx$$

の値を求めよ.

(3) 積分

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2-1} \sin x \, dx$$

の値を求めよ.

(大阪大 2013)　　(m20133506)

0.223 自然数 m, k に対して,

$$A_{m,k} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^m x \, \cos kx \, dx\,, \quad A_{0,0} = 2\pi$$

とおく.

(1) 任意の自然数 m, k に対して, 以下の等式を示せ.

$$A_{m,k} = \frac{1}{1+\frac{k}{m}} A_{m-1,k-1}$$

ただし, $\cos(k-1)x = \cos kx \cos x + \sin kx \sin x$ を用いてもよい.

(2) 自然数 m が与えられたとき, $\cos^{2m-1} x$ のフーリエ級数が

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_{2k-1} \cos(2k-1)x$$

の形で表されることを示し, フーリエ級数 a_{2m-1} を求めよ.
ただし, $\cos^{2m-1} x = (\cos x)^{2m-1}$ とする.

(大阪大 2013)　　(m20133507)

0.224 確率変数 X は確率密度関数

$$p(x) = C_k x^{k-1} e^{-x}\,, \quad (x \geq 0)$$

を持つとする. ただし, k は自然数で, C_k は $\displaystyle\int_0^{\infty} p(x)dx = 1$ で定まる正の数とする.

(1) 正の数 C_k, および $E[e^{-tX}]$, $(t \geq 0)$ を求めよ.

(2) 確率変数列 $X_1, \cdots, X_n$ は互いに独立に同一分布に従うとし, その確率密度関数を $p(x)$ とする, このとき,

$$q_n(t) = E[e^{-t(X_1+\cdots+X_n)}]\,, \quad (t \geq 0)$$

を求めよ.

(3) 極限値

$$\lim_{n\to\infty} q_n\left(\frac{1}{n}\right)$$

を求めよ.

(大阪大 2013)　　(m20133508)

0.225 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

(1) $\dfrac{dy}{dx} + xy = x$　　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = 0$

(大阪府立大 2013)　　(m20133601)

0.226 次の値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ (2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$

(大阪府立大 2013) (m20133602)

0.227 3 行 3 列の行列

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -4 \\ -8 & 0 & -10 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

に関して以下の問いに答えなさい.

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) 行列 A に関する方程式
$A^3 + aA^2 + bA + cE = O$
の係数 a, b, c を求めなさい. ただし, E は 3 行 3 列の単位行列, O は零行列である.

(3) (2) の結果を用いて, 下記の式で表される行列
$A^5 - 5A^4 + 6A^3 - A^2 + 8A - 8E$
を計算しなさい.

(大阪府立大 2013) (m20133603)

0.228 2× 2 の行列 A をつぎのように定義する：

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

このとき, つぎの各問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) 問い (1) で求めた固有値に対応する行列 A の長さ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(3) 問い (1) で求めた固有値を λ, 対応する長さ 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ と置く. 次の等式を満たすベクトル $\boldsymbol{y}$ を求めよ.

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$$

ただし E は 2× 2 の単位行列であるとする.

(4) ベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ が次のように成分表示されるとする.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

このとき 2× 2 の行列 B を次のように定義する：

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

次の等式を満たす 2× 2 の行列 C を求めよ：

$$AB = BC$$

(大阪府立大 2013) (m20133604)

0.229 実変数 t の十分滑らかな関数 $z=z(t)$ が，任意の $t \geq 0$ に対して次の不等式を満たすとする.

$$\frac{dz(t)}{dt} \leq -2z(t)$$

このとき，任意の $t \geq 0$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ.

$$z(t) \leq e^{-2t}z(0)$$

(大阪府立大 2013) (m20133605)

0.230 つぎの各問いに答えよ.

(1) 3 変数の関数 $f(x,y,z)=2x^2z-y^2z^2+3x^2y+4xy$ を考える．このとき，Δf を求めよ．ただし，Δ はラプラス作要素

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

とする.

(2) $g(x,y,z)=x^2-axy^2+bz^2+2xz^2$ とする．$\Delta g=0$ であるような，a,b の値を求めよ.

(大阪府立大 2013) (m20133606)

0.231 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx}=y^2-y$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+4y=\sin x$

(大阪府立大 2013) (m20133607)

0.232 (1) ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ のいずれにも直交する単位ベクトル $\boldsymbol{c}$ を求めよ.

(2) 3 次元実数空間 $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}$ におけるベクトル $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ の座標ベクトルを求めよ.

(大阪府立大 2013) (m20133608)

0.233 以下の問いに答えよ.

(1) $z=x+iy$ とするとき，実部が $u(x,y)=x^2-y^2$ で与えられる正則関数 $f(z)$ の虚部を求めよ．また，$f(z)$ を z の関数として表せ.

(2) 次の定積分値を求めよ.

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\cos\theta+5}d\theta$$

(大阪府立大 2013) (m20133609)

0.234 行列 $A=\begin{pmatrix}u&-4&6\\0&8&0\\0&10&3\end{pmatrix}$ は正則でないという．以下の問いに答えよ.

(1) u の値を求めよ.

(2) 行列 $A+E$ の固有値 λ_1，λ_2，λ_3 と対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$ を求めよ.

(3) $B\boldsymbol{x}_1 = \sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{x}_1,\ B\boldsymbol{x}_2 = \sqrt{\lambda_2}\boldsymbol{x}_2,\ B\boldsymbol{x}_3 = \sqrt{\lambda_3}\boldsymbol{x}_3$ を満たす行列 B を求めよ.

(神戸大 2013)　　(m20133801)

0.235 以下の問いに答えよ.

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ の値を求めよ.

(2) 自然数 n に対して $f_n(x) = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-x^2)^n$ とおく. 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\int_0^1 \left| f_n(x) - \frac{1}{1+x^2} \right| dx \leqq \frac{1}{2n+3}$$

(3) 級数の和

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

を求めよ.

(神戸大 2013)　　(m20133802)

0.236 関数 $z = f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy + 9$ の極値を求めよ.

(神戸大 2013)　　(m20133803)

0.237 $D = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; 1 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 4\ ,\ 1 \leqq\ z \leqq\ x^2+y^2\right\}$ とおく. 積分

$$\int_D \frac{2x^2+y^2+x}{z} dxdydz$$

の値を求めよ.

(神戸大 2013)　　(m20133804)

0.238 f を $\mathbb{R}^3$ 上の一次変換とするとき, 原点を通る直線 ℓ で, ℓ 上の各点が f により ℓ 上に写されるようなものが存在することを示せ.

(神戸大 2013)　　(m20133805)

0.239 $g(x)$ を $\mathbb{R}$ 上定義された 2 回微分可能な関数とし, $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} g(x) + x^2 \sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ g(0) & x = 0 \end{cases}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

(1) $x \neq 0$ として $f'(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ は $x=0$ で微分可能であることを示し, $f'(0)$ を求めよ.

(3) $f'(x)$ は $x=0$ で微分可能でないことを示せ.

(神戸大 2013)　　(m20133806)

0.240 曲線 c : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$　$(a>0,\ b>0)$ および直線 ℓ : $x = \dfrac{a}{2}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $x \geqq \dfrac{a}{2}$ において, 曲線 C と直線 ℓ で囲まれる図形の面積を求めよ.

(2) $x \geqq \dfrac{a}{2}$ において, 曲線 C と直線 ℓ で囲まれる図形を, x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ.

(鳥取大 2013)　　(m20133901)

0.241　行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 固有値を求めよ.

(2) 固有ベクトルを用いて，行列 A を対角化せよ.

(3) A のべき乗 A^n（n は正の整数）を求めよ.

(鳥取大 2013)　　(m20133902)

0.242　以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $(x^2+2)\dfrac{dy}{dx} - xy = 0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 3y = 4e^{-x}$

(鳥取大 2013)　　(m20133903)

0.243　関数 $a_{m,n}(x)$ $(m, n \in \mathbb{N})$ を

$$a_{m,n}(x) = \cos^{2n}(m!\pi x)$$

とし，関数 $g_m(x)$ $(m \in \mathbb{N})$ および $f(x)$ を

$$g_m(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{1 + a_{m,n}(x)}$$

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} g_m(x)$$

で定める．以下の問いに答えよ.

(1) x が無理数のとき $g_m(x)$ を求めよ.

(2) x が有理数のとき $f(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ は $x = 0$ で連続であることを示せ.

(4) $f(x)$ は $x = 0$ で微分不可能であることを示せ.

(岡山大 2013)　　(m20134001)

0.244　関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^x \frac{t+1}{t^2+1}dt$$

により定める．以下の問いに答えよ.

(1) $f(1)$ の値を求めよ.

(2) 導関数 $f'(x)$ の $x = 0$ におけるテイラー展開を求め，その収束半径を答えよ.

(3) 正の整数 n に対して，n 階微分係数 $f^{(n)}(0)$ を求めよ.

(岡山大 2013)　　(m20134002)

0.245　a を実数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を考える．以下の問いに答えよ.

(1) $A - E$ は逆行列を持たないことを示せ．（ただし，E は単位行列とする.）

(2) ある正の実数 b に対して，$A - bE$ も $A + bE$ も逆行列を持たないとする．このとき a の値を求めよ.

(3) ある正則な行列 P により

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

であるとする．このとき a の値を求めよ．また，このような行列 P を一つ求めよ．

(岡山大 2013)　　(m20134003)

0.246 行列 X の階数を $\mathrm{rank}(X)$ と表すことにする．A, B を n 次正方行列としたとき以下の問いに答えよ．

(1) 不等式

$$\mathrm{rank}(AB) \leqq \mathrm{rank}(B)$$

を示せ．また，A が正則ならば等号が成立することを示せ．

(2) $AB = O$（ゼロ行列）のとき，不等式

$$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) \leqq n$$

を示せ．

(3) $n = 3$ とし，$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ とおく．B の階数を求めよ．さらに

$$\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(A) - 2$$

を満たす A は存在しないことを示せ．

(岡山大 2013)　　(m20134004)

0.247 $\sin ax$ のテーラー展開を x^5 の項まで求めよ．a は 0 でない実定数とする．

(広島大 2013)　　(m20134101)

0.248 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 6\dfrac{dy}{dt} + 9y + 3 = 0$ の一般解を求めよ．

(広島大 2013)　　(m20134102)

0.249 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ を対角化せよ．すなわち，$P^{-1}AP = D$ を満たす正則行列 P および対角行列 D を一組求めよ．

(広島大 2013)　　(m20134103)

0.250 $\vec{F} = \begin{pmatrix} a_1 & b_3 & b_2 \\ b_3 & a_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ，$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$ とするとき，以下の経路に沿って

$\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(X,Y,Z)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ を求めよ．　$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, X, Y, Z$ はすべて実定数とする．

(1) $(0,0,0) \to (X,0,0) \to (X,Y,0) \to (X,Y,Z)$ ．

(2) $(0,0,0)$ と (X,Y,Z) を直線上で結ぶ線分 ．

(広島大 2013)　　(m20134104)

0.251 試行毎の確率 p, 試行回数 N の二項分布 $P(n) = \dfrac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n}$ は, $p \ll 1$, $n \ll N$ の場合に平均値 $s = Np$ のポアソン分布 $P(n) = \dfrac{1}{n!}s^n e^{-s}$ に近付くことを示せ．必要なら $e^{-p} \approx 1-p \quad (p \ll 1)$ を用いてよい.

(広島大 2013)　　(m20134105)

0.252 以下の各命題について，正しければ証明し，正しくなければ反例を用いてそのことを説明せよ.

(1) 区間 $(0, \infty)$ 上で微分可能な関数 $f(x)$ が $x = a$ で最大値を取るならば，$f'(a) = 0$ を満たす.

(2) 区間 $[0, \infty)$ 上で微分可能な関数 $f(x)$ が $x = a$ で最大値を取るならば，$f'(a) = 0$ を満たす.

(3) 区間 $I = [0, 1]$ 上の非負値連続関数 $f(x)$ が $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0$ を満たすならば，任意の $x \in I$ に対し $f(x) = 0$ となる.

(4) 区間 $I = [0, 1]$ 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ と I 上の関数 $f(x)$ に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ が任意の $x \in I$ で成り立つとする．このとき，$f(x)$ も I 上の連続関数である.

(5) $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

は，原点 $(0, 0)$ において連続である.

(広島大 2013)　　(m20134106)

0.253 標準内積の入った実線形空間 $\mathbb{R}^4$ における，次の 4 点を考える.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^4$ の原点を O と書く．線形変換 $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ は

$$T(P_1) = P_2\,,\ T(P_2) = P_3\,,\ T(P_3) = P_4\,,\ T(P_4) = P_1$$

を満たすとする．以下の問いに答えよ.

(1) ベクトル $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$, $\overrightarrow{OP_3}$, $\overrightarrow{OP_4}$ は 1 次独立であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}^4$ の標準基底に関する T の表現行列 A を求めよ.

(3) T の固有多項式およびすべての実固有値を求めよ.

(4) 原点 O と P_1, P_2 を含む 2 次元部分線形空間を W とする．W 上の点 Q で P_3 との距離が最小となるものを求めよ.

(広島大 2013)　　(m20134107)

0.254 以下の問いに答えよ.

(1) 「 $x > 0$ ならば $\log(1+x) < x$ 」が成り立つことを示せ.

(2) 「 $x > 0$ ならば $\log(1+x) > x - \alpha x^2$ 」を満たす実数 α の範囲を求めよ.

(広島大 2013)　　(m20134108)

0.255 実 n 次正方行列 A について，$A^2 = -E$ が成り立っているとする．ただし，E は単位行列である．また，$\mathbb{R}^n$ の線形変換 f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ により定める．$\mathbb{R}^n$ の零ベクトルを $\boldsymbol{o}$ と書く．以下の問いに答えよ．

(1) A は実固有値をもたないことを示せ．

(2) n は偶数であることを示せ．

(3) $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ のとき，$\boldsymbol{v}$, $A\boldsymbol{v}$ は 1 次独立であることを示せ．

(4) $n = 2$ とし，$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ とする．このとき，$\mathbb{R}^2$ の基底 $\{\boldsymbol{v},\ A\boldsymbol{v}\}$ に関する f の表現行列 B を求めよ．

(5) $n = 4$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ とし，$\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{v}$ で張られる部分線形空間を M とする．さらに $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^4$, $\boldsymbol{w} \notin M$ とする．このとき，$\{\boldsymbol{v},\ A\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w},\ A\boldsymbol{w}\}$ は $\mathbb{R}^4$ の基底になることを示し，この基底に関する f の表現行列 C を求めよ．

(広島大 2013) (m20134109)

0.256 以下の問いに答えよ．

(1) e^x の $x = 0$ のまわりでのテイラー展開

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

の係数 a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を書け，（答だけでよい）

(2) k を自然数とするとき，$\displaystyle\lim_{t \to +0} t(\log t)^k = 0$ であることを示せ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \log x\, dx$ の値を求めよ．

(4) 自然数 k に対して，広義積分 $I_k = \displaystyle\int_0^1 (\log x)^k\, dx$ の値を求めよ．

(広島大 2013) (m20134110)

0.257 (1) 関数 $z = \cos(xy)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x, y) = xe^{-(x^2+y^2)}$ の極値と，極値をとる点を求めよ．

(広島市立大 2013) (m20134201)

0.258 $D = \left\{(x, y) \in R^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1\,,\ x \leq \sqrt{3}y\right\}$ とおく．
変数変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を用いて，

$$\iint_D xy^2 dxdy$$

を求めよ．

(広島市立大 2013) (m20134202)

0.259 次の微分方程式について，以下の問いに答えよ．ただし，a, b は 0 でない定数とする．

$$\frac{dx}{dt} = a - bx$$

(1) この微分方程式の一般解を求めよ．

(2) 初期条件「$t = 0$ のとき $x = 0$」を満たす解を求めよ．

(3) $t \to \infty$ のとき，(2) で求めた解の極限を求めよ．

(広島市立大 2013)　　(m20134203)

0.260　次の 3 次正方行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

(1)　A の固有値をすべて求めよ．

(2)　A の各固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ．

(3)　$D = P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．

(4)　問 (3) で求めた P に対応する D を示せ．

(広島市立大 2013)　　(m20134204)

0.261　3 次元直交座標系 xyz での平面と直線の関係について，以下の問いに答えよ．

(1)　3 点 $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(0,-1,0)$ を通る平面 π の方程式を求めよ．

(2)　2 点 $(0,1,0)$, $(1,1,1)$ を通る直線 ℓ と平面 π の交点の座標を求めよ．

(3)　直線 ℓ を含み，平面 π に対して垂直な平面の方程式を求めよ．

(広島市立大 2013)　　(m20134205)

0.262　行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　固有値を求めよ．

(2)　各固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ．

(3)　直交行列 P を求めて ${}^tPAP$ を対角行列にせよ．ここで，${}^tP$ は P の転置行列を表す．

(徳島大 2013)　　(m20134401)

0.263　$f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2+1}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ．

(2)　$f_x(x,y) = 0$, $f_y(x,y) = 0$ を同時に満たす x, y を求めよ．

(3)　$\bigl|f(x,y)\bigr| \leqq \dfrac{1}{2}$ を示せ．

(徳島大 2013)　　(m20134402)

0.264　n は自然数とする．

(1)　$\sin(n+1)x - \sin(n-1)x = 2\cos nx \sin x$ を示せ．

(2)　$I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1)x - \sin(n-1)x}{\sin x}dx$ を求めよ．

(3)　$J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}dx$ を求めよ．

(徳島大 2013)　　(m20134403)

0.265　$y = f(x)$ に対する次の微分方程式を解け．

(1)　$y' + 2y = y^2$　　　　(2)　$y'' + 2y = x^2$

(徳島大 2013)　　(m20134404)

0.266 次の問いに答えよ.

(1) 微分可能な関数 $f(x)$ が微分可能な逆関数 $f^{-1}(x)$ を持つとする．このとき，次の式を示せ,

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

(2) $f(x) = \tan x$ とし，$\tan x = t$ とおく．(1) を用いて次の式を示せ.

$$(f^{-1})'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

(3) (2) を用いて次の式を示せ.

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{3}$$

(4) 次の値を求めよ.

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

(高知大 2013)　　(m20134501)

0.267 $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ とする．関数

$$f_n(x) = \frac{x^n(x-\pi)^n}{n!}$$

に対し,

$$a_n = \int_0^{\pi} f_n(x) \sin x dx$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 次の式を示せ.

$$f_{n+1}(x) = \frac{x(x-\pi)}{n+1} f_n(x)$$

(2) 次の式を示せ.

$$f''_{n+2}(x) = 2f_{n+1}(x) + (2x-\pi)^2 f_n(x)$$

(3) 次の式を示せ.

$$a_{n+2} = (-4n-6)a_{n+1} - \pi^2 a_n$$

(4) a_3 を求めよ.

(高知大 2013)

0.268 次の平面の線形変換に対応する行列を求めよ．求める過程も述べよ.

(1) 直線 $2x + y = 0$ に関する対称移動となる変換.

(2) 原点を中心として時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転する変換.

(3) 直線 $x + 2y = 0$ へ正射影する変換.

(4) $y = x$ 上の各点 (p, q) は同じ直線上の点 $(2p, 2q)$ に移る．また，$y = -x$ 上の各点 (p, q) は同じ直線上の点 $\left(\dfrac{p}{2}, \dfrac{q}{2}\right)$ に移る．これらの 2 条件を満たす変換.

(高知大 2013)　　(m20134503)

0.269 $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) J のすべての固有値を求めよ.

(2) J の異なる固有値に対して，それぞれの固有空間の基底を求めよ．

(3) J は対角化可能かどうか，理由をつけて答えよ．また　対角化可能である場合には，$P^{-1}JP$ が対角行列となるような P を求めよ．

(高知大 2013)　　(m20134504)

0.270 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) $A = PDP^{-1}$ を満たす正則行列 P とその逆行列 P^{-1}，および対角行列 D を求めよ．

(3) 正の整数 n に対し，A^{2n} を求めよ．

(高知大 2013)　　(m20134505)

0.271 (1) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

(2) x の関数 $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ を微分せよ．

(3) $f(x) = \cos^{-1}(\sin x)$ とおく．ただし，$\cos^{-1} x$ の値域は $[0, \pi]$ とする．

(a) $f(\frac{\pi}{2})$ を求めよ．

(b) $f(x)$ を微分せよ．

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f'(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f'(x)$ を求めよ．

(愛媛大 2013)　　(m20134601)

0.272 (1) 次の定積分を求めよ．

$$\int_1^{e^2} (\log x)^2 dx$$

(2) 次の媒介表示で表される曲線の長さを求めよ．

$$x = \frac{t^3}{3} - t\,, \qquad y = t^2 \qquad (0 \leqq\ t \leqq\ 2)$$

(愛媛大 2013)　　(m20134602)

0.273 $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ とする．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) 空間内の点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ における曲面 $z = f(x, y)$ の接平面の方程式を求めよ．

(3) 空間における領域

$$\Omega = \Big\{(x, y, z) \,:\, x^2 + y^2 \leqq\ a^2\ \ 0 \leqq\ z \leqq\ f(x, y)\Big\}$$

の体積を求めよ．ただし，$0 < a < 1$ とする．

(愛媛大 2013)　　(m20134603)

0.274 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 56 & 4 & -2 \\ 6 & 54 & -2 \\ 180 & 120 & -10 \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 106 & 4 & -2 \\ 6 & 104 & -2 \\ 180 & 120 & 40 \end{pmatrix}$ の固有値をすべて求めよ．

(愛媛大 2013)　　(m20134604)

0.275 n 次実正方行列 $A = (a_{ij})$ は，どの行についても $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ とする，以下の問いに答えよ．

(1) 1 は A の固有値であることを示せ．

(2) 2 は $2A$ の固有値であることを示せ．

(3) 行列 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(4) B が対角化可能かどうか判定せよ．

(九州大 2013)　　(m20134701)

0.276 以下の問いに答えよ．

(1) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ．ただし，c は定数である．

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - c^2$$

(2) 次の $y(x)$ に関する微分方程式を，$y(0) = 1$, $y(0.5) = 2e$ のもとで解け．

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + \pi^2 + 4 = 0$$

(3) 一定温度 T_a に維持されたオープンに鉄球を入れて温めるとき，時刻 t での鉄球の温度 $T(t)$ の変化率は $T_a - T(t)$ に比例する．これを微分方程式の形に定式化し，$T(t)$ を求めよ．

(九州大 2013)　　(m20134702)

0.277 (1) 周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を次のように定める．以下の問いに答えよ．

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 0, 1, \cdots), \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

(a) 任意の実数 α に対して $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\cos nx dx = a_n$ が成立することを示せ．

(b) 整数 n と実数 x に対して $\cos n(x+\pi) = \begin{cases} \cos nx & (n \text{ が偶数}) \\ -\cos nx & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$ が成立する．

このことを踏まえ，関数 $g(x) = f(x+\pi)$ のフーリエ係数 $a'_n = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx dx$，$b'_n = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx dx$ を a_n, b_n を用いて表せ．

(2) 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$ とおく．以下の問いに答えよ．

(a) $f(x) = e^{-|x|}$ のフーリエ変換を求めよ．

(b) フーリエの積分定理（逆フーリエ変換）を利用して，次の定積分を求めよ．

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos u}{1+u^2} du$$

(九州大 2013)　　(m20134703)

0.278 トランプ 52 枚は，$1, 2, \cdots, 13$ の札がそれぞれ 4 枚ずつから構成される．トランプ 52 枚をよく切ってから 1 枚を抜いて戻すことを 3 回繰り返し，それらの札を a_1, a_2, a_3 とする．トランプ 52 枚をよく切ってから一度に 3 枚抜き，それらの札を b_1, b_2, b_3 とする．以下の問いに答えよ．

(1) a_1, a_2, a_3 がすべて絵札である確率を示せ．ただし絵札とは，$11, 12, 13$ の札である．

(2) b_1, b_2, b_3 がすべて絵札である確率を示せ．

(3) b_1, b_2, b_3 の合計値が 37 以上である確率を示せ．

(4) b_1, b_2, b_3 の合計値が 37 以上であるとき，b_1, b_2, b_3 の少なくとも 1 枚が 12 である条件付き確率を示せ．

(5) a_1, a_2, a_3 の少なくとも 1 枚が絵札であるとき，a_1, a_2, a_3 がすべて絵札である条件付き確率を示せ

(6) a_1, a_2, a_3 の少なくとも 1 枚が 12 であるとき，a_1, a_2, a_3 がすべて絵札である条件付き確率を示せ

(九州大 2013)　　(m20134704)

0.279 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \log_{10} 3x$　　(2) $y = \left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^3$

(佐賀大 2013)　　(m20134901)

0.280 曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ で囲まれる領域の面積が πab で与えられることを定積分を用いて示せ．

(佐賀大 2013)　　(m20134902)

0.281 次の問いに答えよ．

(1) 平面上の点の x 軸への正射影となる線形変換 f_A を定める行列 A を示せ．

(2) 原点の周りに $\theta = 45^\circ$ 回転する線形変換　f_B を定める行列 B を示せ．

(3) f_A，f_B の順番で変換する合成変換を求め，その変換により直線 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ が移された後の直線を求めよ．

(佐賀大 2013)　　(m20134903)

0.282 距離 x と時間 t に関する関数 $J(x, t)$ が距離 x に関する関数 $X(x)$，時間 t に関する関数 $T(t)$ を用いて

$$J(x, t) = X(x)T(t)$$

で表される場合を想定する．いま，これらの関数が次の微分方程式を満たすものとする．

$$T(t)\frac{d^2X(x)}{dx^2} - X(x)\frac{1}{c^2}\frac{d^2T(t)}{dt^2} = 0$$

時刻 $t = 0$ において $J(x, 0)$ が

$$J(x, 0) = \cos 3x$$

で与えられた場合，任意の時刻 $t > 0$ における $J(x, t)$ を求めよ．

(佐賀大 2013)　　(m20134904)

0.283 x, y, z 軸からなる 3 次元空間内の平面 $\ell x + my + nz = 1$ への原点 $(0, 0, 0)$ からの最短距離を求めよ．

(佐賀大 2013)　　(m20134905)

0.284 次の 2 重積分を変数変換を用いて求めよ．

$$\iint_{1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^3}$$

(佐賀大 2013)　　(m20134906)

0.285 2 つの直交する大きさ 1 のベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ が次のように与えられているとき，以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ と直交する単位ベクトル $\boldsymbol{k}$ を 2 つ求めよ．

(2) (1) で求めた $\boldsymbol{k}$ のいずれかを用いて，次のベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ の一次結合で表せ．

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2013)　　(m20134907)

0.286 次の行列の逆行列を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(佐賀大 2013)　　(m20134908)

0.287 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) A に対して，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を求めよ．

(3) $A^n = PXP^{-1}$ となるような行列 X を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(佐賀大 2013)　　(m20134909)

0.288 次の関数の極限を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2x - \sin 2x}{x^3}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x \to a-0} \frac{|x-a|}{x^2 - a^2}$

(佐賀大 2013)　　(m20134910)

0.289 次の 2 変数関数 $f(x, y)$ について，$f_{xx} + f_{yy} = 0$ が成り立つかどうか確かめよ．ただし，$\log$ は自然対数とする．

(1) $f(x, y) = e^{-x} \sin y$　　(2) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$　　(3) $f(x, y) = \log(e^x + e^y)$

(佐賀大 2013)　　(m20134911)

0.290 次の定積分を求めよ; ただし，$\sin^{-1} x$ は $\sin x$ の逆関数である．また，(2) は $t = \cos x$ とする置換積分法を用いよ．

(1) $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \sin^{-1} x \, dx$　　(2) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin}{2 - \sin^2 x} \, dx$

(佐賀大 2013)　　(m20134912)

0.291 3 次元正方行列 A を $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする.

(1) A^2, A^3 を計算し，一般に $n \geq 1$ について A^n の形を推定せよ.

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(佐賀大 2013) (m20134913)

0.292 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in R^3$ を $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (2, -1, 1)$ とする.

(1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ および $\boldsymbol{c} = (1, 3, 2)$ が 1 次独立であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ および $\boldsymbol{d} = (4, t, -3)$ が 1 次従属であるような定数 t を求めよ.

(佐賀大 2013) (m20134914)

0.293 3 次正方行列 $B = \begin{bmatrix} 1 & c & -c \\ 0 & c & 1-c \\ c & 0 & -c \end{bmatrix}$ の固有値と，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ.
ただし，c は定数とする.

(佐賀大 2013) (m20134915)

0.294 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{1-x}{\log x}$ を求めよ.

(佐賀大 2013) (m20134916)

0.295 $y = \sqrt{1 + \sin x}$ の導関数を求めよ.

(佐賀大 2013) (m20134917)

0.296 $\displaystyle\int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{dy}{\sqrt{y^3+1}}$ の積分順序を変更して計算せよ.

(佐賀大 2013) (m20134918)

0.297 二変数関数 $f(x, y) = 3x^2 - 7xy^2 + y^2$ に関して，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．また，点 $(1, 2)$ における $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

(佐賀大 2013) (m20134919)

0.298 $x = 0$ を含む開区間で無限回微分可能な関数 $f(x)$ のマクローリン展開は以下のようになる.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

これを参考に $\mathrm{e}^{0.1}$ の値を小数点以下第 4 位まで計算せよ.

(佐賀大 2013) (m20134920)

0.299 $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ とするとき AB および $B^T B$ を求めよ.

(佐賀大 2013) (m20134921)

0.300 $C = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(佐賀大 2013) (m20134922)

0.301 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=-3\sin x$ の一般解を求めよ.

(佐賀大 2013) (m20134923)

0.302 次の関数 y の導関数 dy/dx を求めなさい.

(1) $y=x\log_e x-x$ (2) $y=\dfrac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}$ (3) $y=\dfrac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}$

(4) $y=3^{-x}$ (5) $y=\log_e\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|$

(佐賀大 2013) (m20134924)

0.303 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int(3x+1)^{1/3}dx$ (2) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x}dx$ (3) $\displaystyle\int\frac{x^3}{x^4+2}dx$

(4) $\displaystyle\int x^2\sin xdx$ (5) $\displaystyle\int xe^{3x}dx$

(佐賀大 2013) (m20134925)

0.304 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

(1) $\dfrac{dy}{dx}=2xy$ (2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+xy^2}{2y+x^2y}$

(佐賀大 2013) (m20134926)

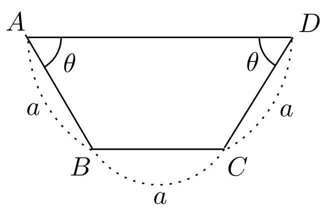
0.305 次の図形の面積を求めなさい.

(1) $y=2x^2$ と $y=2x+4$ で囲まれた部分

(2) $y=(4-x)\sqrt{x}$ と x 軸で囲まれた部分

(佐賀大 2013) (m20134927)

0.306 図のような 3 辺 AB, BC, CD の長さが a の台形がある. この 3 辺の長さは変わらないとして, 台形の面積が最大となるような角度 θ を求めなさい.



(大分大 2013) (m20135101)

0.307 次のように定義される周期関数 $f(x)$ について, 以下の問いに答えなさい.

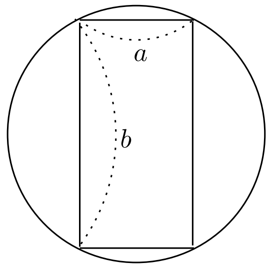
$$f(x)=x^2 \quad (-\pi\leq x<\pi),\quad f(x+2\pi)=f(x)$$

(1) 関数 $f(x)$ のグラフの概形を描きなさい.

(2) 関数 $f(x)$ の $(-\pi,\ \pi)$ におけるフーリエ級数を求めなさい.

(大分大 2013) (m20135102)

0.308 半径 r の円に内接する長方形がある. 長方形の面積が最大となるような辺の長さ a, b を, 円の半径 r を用いて表しなさい.



(大分大 2013)　　(m20135103)

0.309 周期関数 $f(x) = |x| \ (-\pi \le x < \pi)$, $f(x+2\pi) = f(x)$ の $(-\pi,\ \pi)$ におけるフーリエ級数は次のようになる.

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

これを用いて，次の公式を証明せよ.

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

(大分大 2013)　　(m20135104)

0.310 ラプラス変換を用いて次の微分方程式を解きなさい.

$$\frac{dx}{dt} + 3x = 0, \quad x(0) = 1$$

(大分大 2013)　　(m20135105)

0.311 以下の証明問題に答えなさい.

(1) 自然数 n に関する不等式 $2^n > 2n - 1$ について，数学的帰納法により証明しなさい.

(2) $\log_{10} 2$ が無理数であることを，背理法により証明しなさい.

(熊本大 2013)　　(m20135201)

0.312 xy 平面上の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を同じ平面上の点 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ に移す写像

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad ①$$

について，以下の問いに答えなさい.

(1) この写像を表す行列の固有値と固有ベクトルの組は，次に示す ② と ③ の二つであることを示しなさい．なお，固有ベクトルの大きさは，$\sqrt{2}$ に選んである.

$$\text{固有値 } \lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad \text{固有ベクトル } \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad ②$$

$$\text{固有値 } \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \text{固有ベクトル } \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad ③$$

(2) 二つの固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立なので，xy 平面上の点を表すベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の 1 次結合によって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$$

のように表現できる．α および β を，x および y を用いて表しなさい.

(3) この写像によって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が移る点 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ を，α, β, $\boldsymbol{x}_1$ および $\boldsymbol{x}_2$ を用いて表しなさい.

(熊本大 2013)　　(m20135202)

0.313 次の問いに答えなさい．ただし，$|x| < 1$ とする.

(1) $\left(\tan^{-1} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ を用いて，$\tan^{-1} x$ の Maclaurin 展開を求めなさい．なお,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

である.

(2) $\theta = \tan^{-1} \dfrac{1}{5}$ とするとき,

$$\tan 2\theta = \frac{5}{12},\ \tan 4\theta = \frac{120}{119},\ \tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239}$$

であることを示して，$\dfrac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\dfrac{1}{5} - \tan^{-1}\dfrac{1}{239}$ を導きなさい.

(3) (1),(2) を用いて，π の近似値を小数第 5 位まで求めなさい．必要であれば，以下の補助表を用いてもよい.

補助表

x	x	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^4}{4}$	$\frac{x^5}{5}$	$\frac{x^6}{6}$	$\frac{x^7}{7}$	$\cdots$
$\frac{1}{5}$	0.2	0.02	0.00267	0.0004	0.00006	0.00001	0	$\cdots$
$\frac{1}{239}$	0.00418	0.00001	0	0	0	0	0	$\cdots$

(熊本大 2013)　　(m20135203)

0.314 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.

(2) 行列 A の固有ベクトルをすべて求めよ.

(宮崎大 2013)　　(m20135301)

0.315 次の各問に答えよ.

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{dy}{dx} - y = x$$

(2) 次の微分方程式を，$y(0) = 1$, $\dfrac{dy}{dx}(0) = -1$ という条件の下で解け.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

(宮崎大 2013)　　(m20135302)

0.316 重積分

$$I = \iint_D (x + y^2)\,dxdy\ , \qquad D = \left\{(x, y)\ \middle|\ y \geqq\ x^2,\ x - y \geqq\ 0\right\}$$

について，次の各問に答えよ.

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) 重積分 I の値を求めよ．

(宮崎大 2013)　　(m20135303)

0.317 複素数 $z_1 = 1 + i,\ z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ について，次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．以下では，$z = re^{i\theta}$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ を複素数 z の極形式という．

(1) $z_1,\ z_2$ を極形式で表せ．

(2) $z_1 z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2}$ を極形式で表せ．

(宮崎大 2013)　　(m20135304)

0.318 x と y の 2 変数関数

$$f(x, y) = e^{-ax^2 - by^2}$$

について，次の問に答えよ．ただし，$a,\ b$ は定数で，$a > 0,\ b > 0$ とする．

(1) 関数 $f(x, y)$ の 2 階までの偏導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

をすべて求めよ．

(2) 関数 $f(x, y)$ の極値を求めよ．

(宮崎大 2013)　　(m20135305)

0.319 以下の微分を計算せよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left\{\log\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)\right\}$　　(ただし，$0 < x < \pi$)

(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right)$　　(ただし，$-1 < x < 1$)

(鹿児島大 2013)　　(m20135401)

0.320 以下の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx$

(鹿児島大 2013)　　(m20135402)

0.321 以下の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $y' = \dfrac{1}{x + y}$

(2) $(x + y^2)dx + (2xy - e^y)dy = 0$

(3) $y'' - y' - 2y = 4\sin 2x$

(鹿児島大 2013)　　(m20135403)

0.322 直交座標系 $O - xyz$ において，$\overrightarrow{OA} = (1, 0, 0),\ \overrightarrow{OB} = (0, 2, 0)$ および $\overrightarrow{OC} = (0, 0, 1)$ である．以下の問いに答えよ．

(1) 点 A，点 B および点 C を通る平面 C_1 の方程式を求めよ．

(2) 原点 O から平面 C_1 に垂線を下ろしたときの交点を D とするとき，$\overrightarrow{OD}$ を求めよ．

(3) 点 $E(3, 1, 1)$ を通る平面 C_2 : $x + py + qz = 0$ と平面 C_1 が直交するとき，p および q の値を求めよ．

(鹿児島大 2013)　　(m20135404)

0.323 直交座標系 $O-xyz$ における次のベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ について，以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ を求めよ．ただし，$\times$ は外積を表す .

(2) 次の関係を満たす 3 つのスカラー a, b, c の値をそれぞれ求めよ．

$$a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 + c\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2013)　　(m20135405)

0.324 次の微分を求めなさい．

$$\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\sqrt{x}\,\right] \qquad (\text{ただし，} \tan^{-1} \text{ は } \arctan \text{ とする.})$$

(鹿児島大 2013)　　(m20135406)

0.325 次の不定積分を求めなさい．

$$\int \frac{1+x+x\sqrt{x}+x^3}{x^2}\,dx$$

(鹿児島大 2013)　　(m20135407)

0.326 2 つのベクトル $\overrightarrow{a} = (1,2,3)$ と $\overrightarrow{b} = (4,5,6)$ がある．以下の問いに答えなさい．

(1) ベクトル $\overrightarrow{a}$ の大きさと，ベクトル $\overrightarrow{a}$ に平行で同じ向きの単位ベクトルを求めなさい．

(2) 二つのベクトルの内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を求めなさい．

(3) ベクトル $\overrightarrow{b}$ のベクトル $\overrightarrow{a}$ に正射影したベクトルを求めなさい．

(鹿児島大 2013)　　(m20135408)

0.327 正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ がある．以下の問いに答えなさい．

(1) 行列 A の行列式を求めなさい．

(2) 行列 A の逆行列を求めなさい．

(鹿児島大 2013)　　(m20135409)

0.328 曲線 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) この曲線と，直線 $x=0$，直線 $x=1$ 及び x 軸とで囲まれた領域の面積 S を求めなさい．

(2) $0 \leq x \leq 1$ の範囲のこの曲線の長さ ℓ を求めなさい．

(鹿児島大 2013)　　(m20135410)

0.329 次の問いに答えよ．

(1) x^n の n 階導関数を求めなさい．また，e^{ax} の n 階導関数を求めなさい．ただし，n は，自然数であり，$a > 0$ とする．

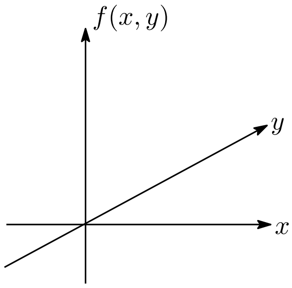
(2) 極限値 $\lim_{x \to \infty} x^n e^{-ax}$ を求めなさい．ただし，n は，自然数であり，$a > 0$ とする．

(鹿児島大 2013)　　(m20135411)

0.330　以下の重積分 I について，次の問いに答えなさい．

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy, \quad D = \left\{x + y \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}, \quad f(x,y) = x$$

(1) この重積分 I に相当する集合を以下の座標空間上に図示しなさい．



(2) この重積分 I の値を積分計算により求めなさい．

(鹿児島大 2013)　　(m20135412)

0.331　次の関数の，付記の区間での，最大値，最小値を求めなさい．

$f(x) = 2\cos x + \cos 2x \qquad \left(0 \leqq x \leqq 2\pi\right)$

(鹿児島大 2013)　　(m20135413)

0.332　行列 $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ の固有値を求めなさい．

(鹿児島大 2013)　　(m20135414)

0.333　次の定積分を求めよ．

$$\int_0^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$$

(香川大 2013)　　(m20135701)

0.334　次の関数の極値を求めよ．

$y = 2x^2 e^{-x}$

(香川大 2013)　　(m20135702)

0.335　以下に示す行列 A について次の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式を求めよ．

(2) 行列 A の逆行列を求めよ．

(3) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(香川大 2013)　　(m20135703)

0.336　次の (1), (2), (3) に答えよ．$\mathbb{R}^n$ は n 次列ベクトルのなす実ベクトル空間を表すことにする．

(1) (a) 「実ベクトル空間 V の n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底である」ことの定義を述べよ．

(b) 実ベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立であるとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ が 1 次従属であるならば，$\boldsymbol{v}_4$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合で表せることを示せ．

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，写像 $f_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ を $f_A(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}\ \ (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^5)$ と定める．このとき，

(a) 写像 f_A は線形写像であることを示せ．

(b) f_A の核 $\ker f_A$ の基底を求めよ．

(c) $\mathbb{R}^5$ の標準基底と $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{ w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ に関する f_A の表現行列を求めよ．

(3) n 次実正方行列 B に対して，線形写像 $f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $f_B(\boldsymbol{v}) = B\boldsymbol{v}\ \ (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$ と定める．このとき，f_B が全射であれば，B は正則行列であることを証明せよ．

(島根大 2013)　　(m20135801)

0.337 $f(x)$ は実数全体で定義された以下の条件 $(*)$ を満たす関数とする．

$$(*)\quad f''(x) = f(x)\,,\ \ f(0) = 1,\ f'(0) = 0$$

次の問いに答えよ．

(1) $\bigl(f(x)\bigr)^2 - \bigl(f'(x)\bigr)^2 = 1$ を証明せよ．

(2) $f(x)$ を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ と $f'(x)$ のグラフの概形をかけ．

(4) 自然数 n に対し，$f^{(n)}(0)$ の値を求め，さらに $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ．

(島根大 2013)　　(m20135802)

0.338 m, n は自然数とし，

$$I(m,n) = \iint_D (x+y)^{m-1} x^{n-1} y\, dxdy \qquad D = \bigl\{(x,y) : x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\bigr\}$$

を定める．次の問いに答えよ．

(1) 次の変数変換を行うことによって，$I(m,n)$ を u と v についての重積分に書き直せ．

$$u = x + y\ , \qquad v = \frac{y}{x}$$

(2) 積分値 $I(m,n)$ を求めよ．

(島根大 2013)　　(m20135803)

0.339 行列 A を $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) A の行列式 $|A|$ を求めなさい．

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めなさい．

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ には $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ の関係があった．このときの，x_1 と x_2 を求めなさい．

(首都大 2013)　　(m20135901)

0.340　直交座標系 (x, y, z) における 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (2, -2, 1)$ と $\boldsymbol{b} = (1, 1, 2)$ について，以下の問いに答えなさい.

(1)　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めなさい.

(2)　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に垂直な単位ベクトルをすべて求めなさい.

(3)　$(0, 0, 0)$, $(2, -2, 1)$, $(1, 1, 2)$ の 3 点を通る平面の方程式を示しなさい.

(首都大 2013)　　(m20135902)

0.341　行列 $A = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ と行列 $B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい.

(1)　AB と BA を求めなさい.

(2)　A の固有値と大きさ 1 の固有ベクトルをすべて求めなさい.

(3)　A, B, AB を同一の正則行列を用いてそれぞれ対角化しなさい.

(首都大 2013)　　(m20135903)

0.342　次の関数を微分しなさい.

(1)　$f(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)^2}$　　　(2)　$f(x) = \sin^4 x \, \cos 3x$

(首都大 2013)　　(m20135904)

0.343　次の微分方程式を解きなさい.

$$\left(x^2 + 2xy\right)dx + \left(x^2 - y^2\right)dy = 0$$

(首都大 2013)　　(m20135905)

0.344　関数 $f(x) = e^x \sin x$ について，以下の問いに答えなさい.

(1)　$f(x)$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めなさい.

(2)　(1) の結果を利用して $f(0.03)$ の近似値を求めなさい.

(首都大 2013)　　(m20135906)

0.345　次の不定積分を求めなさい.

(1)　$\displaystyle\int \sin^{-1} x \, dx$　　　(2)　$\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \, dx$

(首都大 2013)　　(m20135907)

0.346　曲線 $C : y = f(x)$ に沿って $0 \leqq x \leqq a$ の間の長さ $L(C)$ は，次の式で与えられる.

$$L(C) = \int_0^a \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \, dx$$

特に，曲線 C を懸垂線またはカテナリーと呼ばれる次の式で表される曲線とする.

$$C \, : \, y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

この懸垂線に沿っての $0 \leqq x \leqq a$ の間の長さ $L(C)$ を求めよ.

(滋賀県立大 2013)　　(m20136001)

0.347　(1)　未知関数 $y = y(x)$ に対する 2 階定数係数同次線形常微分方程式

$$y'' + y' - 12y = 0$$

の一般解を求めよ.

(2) 2 階定数係数非同次線形常微分方程式

$$y'' + y' - 12y = 2\cos x$$

の特殊解を求めよ．（特殊解を $y = A\sin x + B\cos x$ と仮定してよい.）

(3) 上記 (2) の非同次線形常微分方程式の一般解を書き下せ.

(滋賀県立大 2013) (m20136002)

0.348 (1) 3 点 $A(3, 2, 1)$, $B(1, 2, 3)$, $C(5, 5, 5)$ を通る平面 T と直交するベクトルを求めよ.

(2) T と直交し点 $D(3, 5, 7)$ を通る直線を求めよ.

(滋賀県立大 2013) (m20136003)

0.349 関数 $z = x^2 + xy + y^2$ のグラフと xy 平面，および円筒 $x^2 + y^2 = R^2$ で囲まれた領域の体積を求めよ．ただし，R は正の実数である.

(滋賀県立大 2013) (m20136004)

0.350 未知関数 $y = y(x)$ に対する微分方程式

$$y' + 2y = 3e^x$$

を初期条件 $y(0) = 2$ のもとで解け.

(はこだて未来大 2013) (m20136301)

0.351 未知関数 $y = y(x)$ に対する微分方程式

$$y'' + y = \cos x$$

を初期条件 $y(0) = y'(0) = 1$ のもとで解け.

(はこだて未来大 2013) (m20136302)

0.352 次の行列 A について，以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の階数を求めよ.

(3) $\left\{ A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in R^3 \right\}$ の基底を求めよ．ただし，R^3 は実 3 次元数ベクトル空間を表す.

(はこだて未来大 2013) (m20136303)

0.353 複素数 x に関する次の方程式を解け.

$$\begin{vmatrix} x^2+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^2+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x^2+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x^2+1 \end{vmatrix} = 0$$

(はこだて未来大 2013) (m20136304)

0.354 $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対する正接関数 $\tan y$ の逆関数を $\mathrm{Tan}^{-1} x$ とする．すなわち，

$$y = \mathrm{Tan}^{-1} x \iff x = \tan y \qquad \left(x \in (-\infty, \infty),\ y \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

とする．以下の問いに答えよ.

(1) $y = \mathrm{Tan}^{-1} x$ のグラフの概形を描け.

(2) $\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{2}{3} + \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{5}$ の値を求めよ．ただし，必要であれば，次の正接関数に対する加法定理は既知として用いてよい.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

(はこだて未来大 2013)　　(m20136305)

0.355 n を自然数とし，定積分 $I_n = \displaystyle\int_0^1 xe^{-nx}dx$ を考える．以下の問いに答えよ.

(1) I_n を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 I_n$ を求めよ.

(はこだて未来大 2013)　　(m20136306)

0.356 以下の関数を x で微分しなさい.

(1) $y = 2x^3 - 5x^2$　　(2) $y = \sin^2 x$

(3) $y = \left\{\log\left(\sqrt{x}+1\right)\right\}^2$　　(4) $y = \displaystyle\int_x^{2x} \sin\theta d\theta$

(東京海洋大 2013)　　(m20136401)

0.357 下記の定積分，または不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int_0^1 (3x^3 + 4x^2 - 2)dx$　　(2) $\displaystyle\int (\cos 2x + \sin 3x)dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x^2}dx$

(4) $\displaystyle\int x\cos(1+x^2)dx$　　(5) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$

(東京海洋大 2013)　　(m20136402)

0.358 関数 $f(x)$ の導関数は次のように定義される.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

この定義に従って次の関数の導関数を求めなさい．導く過程も示しなさい.

(1) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

(東京海洋大 2013)　　(m20136403)

0.359 お湯を入れたポットを一定温度に保たれた室内に放置した時のお湯の温度変化について，次の問に答えなさい．但し，ポット内のお湯の温度に分布は無いものとする.

(1) ポット内のお湯の温度 T が冷める速さ $-dT/dt$ は T と室内の温度 T_{room} との差に比例する.
比例定数を k として，$-dT/dt$ を k, T 及び T_{room} を用いて表しなさい.

(2) T を t, k, T_{room} 及び積分定数 C を用いて表しなさい.

(3) 95℃ のお湯を入れたポットを 15℃ の室内に放置したところ，90 分後にお湯の温度は 75℃ になっていた．お湯の温度が 95℃ から 55℃ になるまでの時間（分）を求めなさい.
但し，$\log_e 2 = 0.7$, $\log_e 3 = 1.1$ としなさい.

(東京海洋大 2013)　　(m20136404)

0.360 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$，$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，次の各問いに答えなさい.

(1) 行列 P の行列式の値と逆行列を求めなさい.

(2) $P^{-1}Q$ の値と固有値を求めなさい.

(和歌山大 2013)　　(m20136501)

0.361 次の値を求めなさい.

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$$

(和歌山大 2013)　　(m20136502)

0.362 次の関数のマクローリン展開を x^3 の項まで求めなさい.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

(和歌山大 2013)　　(m20136503)

0.363 次の 2 重積分を求めなさい.

$$\iint_D e^{x-y}dxdy\ , \qquad D\ :\ \left\{0\le x\le 2\,,\ 0\le y\le \frac{x}{2}\right\}$$

(和歌山大 2013)　　(m20136504)

0.364 次の微分方程式について, 与えられた初期条件を満たす特殊解を求めなさい.

(1) $y\dfrac{dy}{dx}=2x^2\ , \qquad y(0)=1$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\sin 2x\ , \qquad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}-4y=0\ , \qquad y(0)=1,\ y'(0)=-1$

(和歌山大 2013)　　(m20136505)

0.365 関数 $f(t)=|t|\quad(-1<t<1)$ について, 次の各問いに答えなさい.

(1) $f(t)$ をフーリエ級数に展開しなさい.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ の値を求めなさい.

(和歌山大 2013)　　(m20136506)

0.366 次の各問いに答えなさい. ただし, i は虚数単位とする.

(1) 次の複素関数について, 問いに答えなさい.

$$w=z^3$$

(a) $w=u+iv\,,\ z=x+iy\quad(u,v,x,y$ は実数) とおくとき, u,v それぞれを x,y を用いて表せ.
(b) コーシー・リーマンの方程式が成り立つことを示しなさい.

(2) 次の複素関数について複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)dz$, $c:|z|=1$ を求めなさい. ただし, 積分の向きは反時計回りとする.

$$f(z)=\frac{e^z}{z^3-4z}$$

(和歌山大 2013)　　(m20136507)

0.367 1 から 10 までの数字が 1 つずつ書かれたカードが 10 枚ある．1 から 6 までの数字が書かれたカードは赤いカードで，残りは青いカードである．カードを無作為に 1 枚選ぶときの事象 A と事象 B を次とする．

事象 A : 赤いカード

事象 B : 素数のカード

次の各問いに答えなさい．

(1) 選んだカードの数字の期待値 E と分散 V を求めなさい．

(2) $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ の値を求めなさい．

(3) $P(A|B)$, $P(B|A)$ を求めなさい．

(4) 事象 A と事象 B は独立かどうか，調べなさい．

(和歌山大 2013)　　(m20136508)

0.368 次の関係式を用いながら，あとの問いに答えなさい．

$$ {}_n\mathrm{C}_m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} \qquad ① $$

$$ (a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0\, a^n + {}_n\mathrm{C}_1\, a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2\, a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\, b^n \qquad ② $$

なお，以下では集合 X の要素数を $|X|$ と表す．

(1) 次式が成り立つことを示しなさい．

$$ {}_{n+1}\mathrm{C}_k = {}_n\mathrm{C}_{k-1} + {}_n\mathrm{C}_k $$

(2) 次式が成り立つことを示しなさい．

$$ {}_n\mathrm{C}_0\, 2^n + {}_n\mathrm{C}_1\, 2^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2\, 2^{n-2} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 3^n $$

(3) 要素数が $q(q>0)$ である有限集合 A の部分集合のうち，要素数が $r(r \leqq q)$ である集合全体を次式の $P_r(A)$ と表す．

$$ P_r(A) = \left\{ B \,\middle|\, B \subseteq A,\ \text{かつ},\ |B| = r \right\} $$

このとき，$|P_r(A)|$ を q と r を用いて表しなさい．

(4) 要素数が $n(n>0)$ である有限集合 A の部分集合全体を $P(A)$ としたとき，$|P(A)|$ を，途中の式を省略せずに n を用いて表しなさい．

(岩手県立大 2013)　　(m20137001)

0.369 次のベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ について，あとの問いに答えなさい．解答は途中の式も省略せずに書きなさい．

$$ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} $$

ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ の組は線形独立か線形従属かを理由とともに答えなさい．

(岩手県立大 2013)　　(m20137002)

0.370 次の行列 A, B について，あとの問いに答えなさい．解答は途中の式も省略せずに書きなさい．

$$ A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} $$

(1) 行列 A, B の階数（ランク）をそれぞれ答えなさい.

(2) 行列式 $|A|, |B|$ をそれぞれ答えなさい.

(岩手県立大 2013)　　(m20137003)

0.371 次の連立一次方程式の解を行列を使用して求めなさい.

$$\begin{cases} \quad\ \ -5y - 3z = 2 \\ 4x \ + y - 2z = 9 \\ \ x - 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

(岩手県立大 2013)　　(m20137004)