0.1 デカルト座標系 (x, y) と極座標 (r, θ) の関係が次のように与えられている．このとき，以下の設問に答えよ．

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ r \geq 0,\ ,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

(1) 次の行列 J のすべての成分を r, θ の式で表せ．

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

(2) 次の積分 A を求めよ．ただし $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ とする．

$$A = \int_D x^2\, dxdy$$

(3) 次の行列 G のすべての成分を r, θ の式で表せ．ただし $r > 0$ とする．

$$G = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

(北海道大 2015)　　(m20150101)

0.2 以下のように定義されるベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ に関する設問に答えよ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix},$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は 1 次従属であることを示せ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ すべてに直交するベクトルを求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を列ベクトルとした行列に関する連立方程式

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ s \end{bmatrix}$$

が解を持つように，実数 s を定めよ．またそのときの解を求めよ．

(北海道大 2015)　　(m20150102)

0.3 以下の設問に答えよ．ここで，$i = \sqrt{-1}$ であり，X, Y, t は実数である．

(1) $z = \pm i$ のとき，$\dfrac{z-1}{z+1}$ を求めよ．

(2) $z = it$ のとき，$\dfrac{z-1}{z+1} = X + iY$ とおく，このとき (X, Y) の軌跡を求めよ．

(北海道大 2015)　　(m20150103)

0.4 f を周波数とするとき，時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$F[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

で与えられる．ここで，$i = \sqrt{-1}$ である．このとき，以下の設問に答えよ．

(1) 下記の関数 $P(t)$ を横軸 t として図示し，そのフーリエ変換を求めよ．

$$P(t) = \begin{cases} 1 & , |t| < t_0 \\ 0 & , |t| > t_0 \end{cases} \qquad (t_0 > 0)$$

(2) 関数 $P(t+4t_0) + P(t-4t_0)$ を横軸 t として図示し，そのフーリエ変換を求めよ．

(北海道大 2015) (m20150104)

0.5 次の関数を微分せよ．

(1) $y = x^2 \sin x$　　(1) $y = \sqrt{1+e^x}$

(北見工業大 2015) (m20150201)

0.6 曲線 $y = \log x$ の接線で，原点を通るものの方程式を求めよ．

(北見工業大 2015) (m20150202)

0.7 $z = \cos(xy + y^2)$ とする．偏導関数 z_x, z_y を求めよ．

(北見工業大 2015) (m20150203)

0.8 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \tan x dx \quad \left(\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{である．}\right)$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x \, dx$

(北見工業大 2015) (m20150204)

0.9 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．

等式 $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b}$ が成り立つような係数 x_1, x_2, x_3 を求めよ．

(北見工業大 2015) (m20150205)

0.10 xyz 空間内に 3 点 $A(1,0,0)$, $B(0,2,1)$, $C(1,2,2)$ があるとき，次の問いに答えなさい．

(1) ベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{AC}$ の外積 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ を求めなさい．その結果を用いて，3 点 A, B, C を含む平面 α の単位法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ を求めなさい．

(2) 平面 α の方程式を求めなさい．

(3) 原点 O を中心として平面 α に接する球 S の半径とその接点 P の座標を求めなさい．

(4) 接点 P が三角形 ABC 内にあるか否かを答えなさい．また，その理由を示しなさい．

(岩手大 2015) (m20150301)

0.11 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 固有値を求めなさい．

(2) 固有ベクトルを求めなさい．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような行列 P を求め，A を対角化しなさい．

(4) A^n を求めなさい．ただし，n は自然数とする．

(岩手大 2015)　　(m20150302)

0.12 曲面 $\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2=b^2$ $(a>b>0)$ で囲まれる立体について，次の問いに答えなさい．

(1) 次の文中の $\boxed{\text{（ア）}}$ から $\boxed{\text{（エ）}}$ に正しい式を入れなさい．

この立体の xy 平面上の断面は．立体を囲む曲面の方程式に $z=0$ を代入した際に，解として得られる 2 つの円 $\boxed{\text{（ア）}}$ 及び $\boxed{\text{（イ）}}$ で囲まれる領域 D_1 である．

この立体の xz 平面上の断面である領域 D_2 は 2 つの円 C_1 及び円 C_2 によって構成される．

円 C_1 及び円 C_2 は方程式 $\boxed{\text{（ウ）}}$ 及び $\boxed{\text{（エ）}}$ で与えられる．

(2) 領域 D_1 及び領域 D_2 を図示しなさい．

(3) 次の文中の $\boxed{\text{（オ）}}$ から $\boxed{\text{（キ）}}$ に正しい式を入れなさい．

この立体は円 C_1 または円 C_2 を z 軸まわりに回転して得られる回転体である．

この立体の体積 V は式 ① で与えられる．

$$V=\pi\int_{-b}^{b}\boxed{\text{（オ）}}\,dx \quad \cdots\cdots ①$$

① 式より，この立体の体積は $V=\boxed{\text{（カ）}}$ と求まる．

また，この立体を囲む曲面のうち，$z\geqq 0$ の部分は関数 $z=\boxed{\text{（キ）}}$ で表される．

この立体の体積 V は定義域 D_1 に関する積分として次式で与えられる．

$$V=2\iint_{D_1}\boxed{\text{（キ）}}\,dxdy \quad \cdots\cdots ②$$

(4) xy 平面上の極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて ② 式を極座標系の式に変換しなさい．

(岩手大 2015)　　(m20150303)

0.13 (1) 微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ の一般解を求めなさい．ただし，$\omega\neq 0$ とする．

(2) $\omega=1$ のとき，微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=2\sin 3t$ の一般解を求めなさい．

(3) (2) において，$t=0$ のとき $x=0$，$\dfrac{dx}{dt}=0$ を満たす解を求めなさい．

(岩手大 2015)　　(m20150304)

0.14 曲線 $y=x^3+2x^2-3x$ がある．このとき，以下の設問 (1),(2) に答えなさい．

(1) 上記の曲線 $y=x^3+2x^2-3x$ と x 軸で囲まれた図形を図示しなさい．

(2) 上記の曲線 $y=x^3+2x^2-3x$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めなさい．

(秋田大 2015)　　(m20150401)

0.15 次の不定形の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x^2-x}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-x-1}{x^2}\right)$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\tan x-\sec x\right)$

(秋田大 2015)　　(m20150402)

0.16 (1) 2 つのベクトル $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ がある．ベクトル $s\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{B}$ が直交するとき，スカラー s と t の関係式を求めよ．

(2) $a,\ b$ を実数とするとき; 行列 $C=\begin{pmatrix}a & b\\-b & a\end{pmatrix}$ の固有ベクトルと固有値を求めよ．

(秋田大 2015)　　(m20150403)

0.17 2 変数 x と y を持つ関数 $f(x,y)=e^x\cos y$ について，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(秋田大 2015)　　(m20150404)

0.18 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ の関係を用いて，以下の関係が成り立つことを示せ．ただし，　$i=\sqrt{-1}$ である．

(1) $\sin 2\theta=2\sin\theta\sin\theta$

(2) $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$

(東北大 2015)　　(m20150501)

0.19 $\dfrac{2x}{\pi}\leqq\ \sin x\leqq\ x\ \ \left(0\leqq\ x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ が成り立つことを示せ．

(東北大 2015)　　(m20150502)

0.20 $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t\ \ (0\leqq\ t\leqq\ 2\pi)$ で表される xy 平面上の曲線について，以下の問に答えよ．ただし，a は正の実数とする．

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として示せ．

(2) この曲線の概形を描き，曲線の全長を求めよ．

(3) この曲線が囲む面積を求めよ．

(東北大 2015)　　(m20150503)

0.21 xyz 空間の曲面 $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$ について，以下の問に答えよ．ただし，a,b,c は正の実数とする．

(1) 曲面 $f(x,y,z)=0$ が囲む体積 V を求めよ．

(2) 点 $P(1,2,3)$ が曲面 $f(x,y,z)=0$ 上の点となるとき，a,b,c が満たす式を求めよ．

(3) 曲面 $f(x,y,z)=0$ 上の点 $P(1,2,3)$ における接平面 π_P および法線 n_P の式を求めよ．

(4) (2) の条件下で，(1) の体積 V が最小となる a,b,c の値を求めよ．

(東北大 2015)　　(m20150504)

0.22 x を実数とする．$n\times\ n$ 正方行列である $\boldsymbol{A}_n(x)$ と $\boldsymbol{B}_n$ を以下のように与える．

$$\boldsymbol{A}_n(x)=\begin{pmatrix}-x & 1 & 0 & \dots & 0\\ 1 & -x & 1 & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & -x & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \dots & 0 & 1 & -x\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}_n=\boldsymbol{A}_n(0)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

すなわち，$\boldsymbol{A}_n(x)$ は対角要素がすべて $-x$，その両側の斜めの要素が 1，それ以外の要素がすべて 0 の 3 重対角行列である．$\boldsymbol{B}_n$ は $\boldsymbol{A}_n(x)$ において $x=0$ としたときの行列である．

(1) $\boldsymbol{B}_2$ の固有値をすべて求めよ．

(2) $\boldsymbol{B}_3$ の固有値をすべて求めよ．

(3) $\boldsymbol{B}_n$ の固有値のひとつを λ とする．この λ は $|\boldsymbol{A}_n(\lambda)| = 0$ を満たすことを示せ．

(4) λ が $\boldsymbol{B}_n$ の固有値であるとき，$|\boldsymbol{A}_n(\lambda)|$ は漸化式 $|\boldsymbol{A}_n(\lambda)| = -\lambda|\boldsymbol{A}_{n-1}(\lambda)| - |\boldsymbol{A}_{n-2}(\lambda)|$ を満たすことを示せ．ただし，$|\boldsymbol{A}_0(\lambda)| = 1$, $|\boldsymbol{A}_1(\lambda)| = -\lambda$ とする．

(5) $\lambda = -2\cos\theta$, $|\boldsymbol{A}_n(\lambda)| = \dfrac{\sin[\,(n+1)\theta\,]}{\sin\theta}$ とおくとき，これらが (4) の漸化式を満たすことを示せ．ただし，$\sin\theta \neq 0$ である．

(6) $\dfrac{\sin[\,(n+1)\theta\,]}{\sin\theta} = 0$ を満たす θ を求めよ．これを使って，$\boldsymbol{B}_n$ の固有値 $\lambda = -2\cos\theta$ を求めよ．また，求めた固有値は，$n=2$, $n=3$ の場合，それぞれ (1) および (2) で求めた固有値と一致することを示せ．

(東北大 2015)　　(m20150505)

0.23　3 次実対称行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) A のすべての固有値を求めよ．

(2) (1) で求めた固有値のそれぞれに対して，固有空間の次元を求めよ．

(3) 3 次直交行列 P で，${}^tPAP$ が対角行列となるものを一つ求めよ．ただし，${}^tP$ で P の転置行列を表す．

(東北大 2015)　　(m20150506)

0.24　a は負，b は正の定数とする．3 次実正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の階数が 2 であるための必要十分条件を求めよ．

(2) A が正則行列のとき，A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(東北大 2015)　　(m20150507)

0.25　$a_n \geq 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ も収束することを示せ．また，逆が成り立たないことを示す例を一つあげよ（証明不要）．

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束し，$a_n \neq 1$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であるとする．このとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1-a_n}$ は収束することを示せ．

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ も収束することを示せ．

(東北大 2015)　　(m20150508)

0.26 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=\begin{cases} x^4\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0\text{ のとき}) \\ 0 & (x=0\text{ のとき}) \end{cases}$ と定める.

(1) f は $x=0$ で連続であることを証明せよ.

(2) f は $x=0$ で何回微分可能か.

(東北大 2015) (m20150509)

0.27 (x,y) 座標平面において, 4 本の直線

$$y=x, \quad y=x-1, \quad y=-x+1, \quad y=-x+3$$

で囲まれた閉領域 D を考える. このとき, 重積分

$$\iint_D \frac{x-y}{x+y}\,dxdy$$

を, 変数変換 $u=x+y,\ v=x-y$ を用いて求めよ.

(東北大 2015) (m20150510)

0.28 (1) 正の実数 a と自然数 n に対して

$$I_n(a):=\int_0^a \frac{dx}{(1+x^2)^n} \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

とおく. 極限 $I_n=\lim_{a\to\infty} I_n(a)$ が存在することを確かめ, I_n を求めよ.

(2) 整数 k,n は $0\leq k<n$ を満たすものとし, $a_0,\cdots,a_k$ は負の実数, $a_{k+1},\cdots,a_n$ を正に実数とする. このとき x に関する方程式

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$$

は正の実数解を一つだけ持つことを示せ.

(お茶の水女子大 2015) (m20150601)

0.29 以下の問いに答えよ.

(1) (a) 線形空間 $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への写像 f が線形写像であることの定義を述べよ.

(b) $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f で, $\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\\2\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix}-2\\4\\6\\-4\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ に, それぞれ移す線形写像が存在するかどうか答え, 存在するならば, この条件を満たした像（像空間）の次元が最大, 最小となる線形写像の例をそれぞれあげ, それらの核（核空間）の次元と基底を求めよ.

(c) $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f で, $\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\\2\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix}2\\1\\3\\2\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ に, それぞれ移す線形写像が存在するかどうか答え, 存在するならば, この条件を満たした像（像空間）の次元が最大, 最小となる線形写像の例をそれぞれあげ, それらの核（核空間）の次元と基底を求めよ.

(2) 次の行列 A の固有値と，各固有値に対する固有ベクトル空間の基底と次元を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2015)　　(m20150602)

0.30 以下の問いに答えよ．

(1) 次の微分方程式において $y(0) = 1$ を満たす解を求めよ．

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2+1} y = e^{-\tan^{-1} x}$$

(2) $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ で定義された関数 y についての微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \frac{1}{\cos 2x} \qquad (*)$$

の一般解を以下の設問の手順にしたがって求めることを考える．

(a) 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$$

の 2 つの一次独立解 $y_1,\ y_2$ を実関数の形で求め，そのロンスキ行列式 $W(y_1,\ y_2)$ を計算せよ．ここでロンスキ行列式とは

$$W(y_1,\ y_2) = y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx}$$

のことである．

(b) 式 $(*)$ の特殊解が，

$$\frac{du}{dx} y_1 + \frac{dv}{dx} y_2 = 0$$

を満たす $u(x),\ v(x)$ を用いて

$$y = u(x) y_1 + v(x) y_2$$

という形に書けると仮定したとき，$u(x),\ v(x)$ それぞれが満たす 1 階の微分方程式を導け．

(c) 式 $(*)$ の一般解を求めよ．

(東京大 2015)　　(m20150701)

0.31 1 回の勝負でコインが 1 枚増減するゲームを考える．1 回の勝負で，確率 p でコインが 1 枚増え，確率 $q = 1 - p$ でコインが 1 枚減る．コインの所持数が 0 になった時点で破産となり，N 枚になった時点でゲームに勝利するとする（ただし N は 2 以上の整数である）．破産か勝利した時点でゲームは終了する．以下の問いに答えよ．

(1) コインが k 枚のとき，破産する確率を $R(k)$ とする．ただし $0 \leq k \leq N$ とする．$R(k)$ が満たす漸化式を求めよ．

(2) $p = q$ の場合に $R(k)$ を求めよ．

(3) $p \neq q$ の場合に $R(k)$ を求めよ．

(4) コインが k 枚ある状態から，ゲームが終了するまでの平均勝負数を $G(k)$ とする．$G(k)$ は $1 \leq k \leq N - 1$ において以下の漸化式を満たすことを説明せよ．

$$G(k) = 1 + pG(k+1) + qG(k-1)$$

(5) $p = q$ の場合に $G(k)$ を求めよ．

(東京大 2015)　　(m20150702)

0.32 xy 平面上において．媒介変数 θ を用いて次式で表されるサイクロイド曲線 C を考える．

$$\begin{cases} x(\theta) - \theta - \sin\theta & (1) \\ y(\theta) = 1 - \cos\theta & (2) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．ただし，必要に応じて次の関係式を用いてよい．

$$\begin{cases} \sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} & (3) \\ 1 - \cos\theta = 2\sin^2\dfrac{\theta}{2} & (4) \end{cases}$$

(1) $0 \leq \theta \leq 2\pi$ における曲線 C の概形を，根拠とともに示せ．

(2) 曲線 C 上の任意の点に対して，x 方向に 2π だけ平行移動させた点を考える．その点もまた曲線 C 上にあることを示せ．

(3) 原点 $O(0,0)$ から，曲線 C 上の点 $P(x(\varphi), y(\varphi))$ 　(ただし $0 \leq \varphi \leq \pi$) までの曲線の長さを $\ell(\varphi)$ とする．

(a) $\ell(\varphi)$ を求めよ．

(b) 図 3.1 に示すように，点 P における曲線 C の接線上の点 Q を考える．
ただし，$\overline{PQ} = \ell(\pi) - \ell(\varphi)$ であり，また，$\overline{OQ} > \overline{OP}$ とする．　点 P を $0 < \varphi < \pi$ の間で動かしたときの点 Q の軌跡を求め，その概形を示せ．

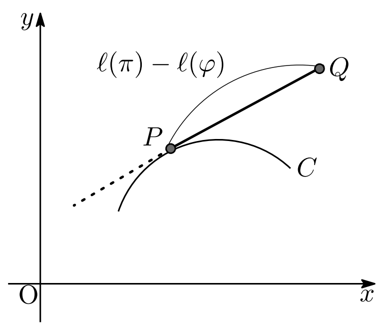


図 3.1

(東京大 2015)　　(m20150703)

0.33 複素積分を利用して実数積分を求めることを考える．以下の問いに答えよ．

(1) まず，ガウス積分と呼ばれる実数積分 $I(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ を考える．α は正の定数であり; x は実数である．y を実数とするとき，$\{I(\alpha)\}^2$ は以下の式で表される．

$$\begin{aligned} \{I(\alpha)\}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dxdy \end{aligned}$$

この式を極座標 (r, θ) 表示に変換せよ．

(2) $I(\alpha) = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$ となることを導出過程とともに示せ．

(3) 図 4.1 に示すように x 軸を実軸，y 軸を虚軸とする複素平面上において半径 R の扇形で C_1，C_2，C_3 からなる経路 C を反時計回りに一周することを考える．i を虚数単位とし，z を複素数とするとき，以下の積分を求めよ．

$$\oint_C e^{iz^2}dz$$

(4) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_2} e^{iz^2}dz = 0$ となることを示せ．ただし，$0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$ において，$\sin\varphi \geq \dfrac{2\varphi}{\pi}$ を用いてよい．

(5) 上記のガウス積分と複素積分を用いて，実数積分 $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2 dx$ の値を求めよ．

(6) 実数積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ の値を求めよ．

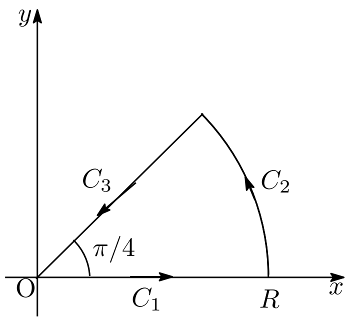


図 4.1

(東京大 2015)　　(m20150704)

0.34 3 個の一次独立な実数ベクトル $\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{a_3}$ に対して，3 次の正方行列 A の (i,j) 成分を $\overrightarrow{a_i}\cdot\overrightarrow{a_j}$ で定義する．ここで $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ は，ベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の内積を表すものとする．ただし，$\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_3} = 0$ であるする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の行列式を求めよ．さらに，その値が正であることを示せ．

(2) 実数 x に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}$$

で定義する．$f(x)$ を定めよ．

(3) $f(x)$ を最小にする x を求めよ．さらに，$f(x)$ の最小値を求めよ．

(4) 設問 (3) で求めた x に対して，ベクトル $\overrightarrow{b}$ を $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + x\overrightarrow{a_3}$ とおく．このとき，$\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{a_3}$ は直交することを示せ．

(5) 任意の実数 x_1，x_2，x_3 に対して，

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq 0$$

であることを証明せよ．さらに，等号が成立するための必要十分条件を示せ．

(東京大 2015)　　(m20150705)

0.35 条件 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ のもとで，$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ の最大値，最小値を求めよ．

ただし，$a > b > c > 0$ とする．

(東京工業大 2015)　　(m20150801)

0.36 (x, y) 平面内の 4 個の曲線

$$y^2 = x, \quad y^2 = 3x, \quad xy = 1, \quad xy = 2$$

で囲まれた領域を D とする.

(1) $u = \dfrac{y^2}{x}$, $v = xy$ とするとき，D は (u, v) 平面内のどのような領域にうつるか.

(2) 積分

$$I = \iint_D e^{xy}\, dxdy$$

の値を求めよ.

(東京工業大 2015) (m20150802)

0.37 実数 a, b に対して

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & a \\ ab & b^2 & b \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

とおく.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P をみつけよ.

(東京工業大 2015) (m20150803)

0.38 実変数 t の関数 $x(t)$ に関する微分方程式

$$(*) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + cx = 0$$

について，次の問に答えよ．ただし，c は実数とする.

(1) $x(0) = 0$ かつ $0 \leq t \leq 1$ の範囲で $x(t) \geq 0$ となる恒等的に 0 でない $(*)$ の解 $x(t)$ が存在するための c に関する条件を求めよ.

(2) c が (1) の条件を満たし，かつ $(*)$ が条件

$$(**) \qquad x(0) = x(1) = 0, \ \frac{dx}{dt}(0) = 1$$

を満たす解をもつとき，c の値を求めよ．更に $(*)$ と $(**)$ を同時に満たす解を求めよ.

(東京工業大 2015) (m20150804)

0.39 2 変数関数 $f(x, y) = 2x^3 + 3xy + 3y^2$ について，次の問いに答えなさい.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ を満たす点 (x, y) をすべて求めなさい.

(2) $z = f(x, y)$ の極値を求めなさい.

(東京農工大 2015) (m20150901)

0.40 2 重積分 $\displaystyle\iint_D xydxdy$, $\quad D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leqq x \leqq 3,\ \dfrac{x^2}{9} \leqq y \leqq \sqrt{4 - x}\right\}$ の値を求めなさい.

(東京農工大 2015) (m20150902)

0.41 c を定数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & c \end{pmatrix}$ が 1 を固有値としてもつとき，次の問いに答えなさい.

(1) c の値を求めなさい.

(2) A の固有値 1 に属する固有ベクトルで $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ の形のものを求めなさい.

(東京農工大 2015)　　(m20150903)

0.42 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3y = \cos\sqrt{3}x$ の解 $y = y(x)$ が，$y(0) = 1$，$\dfrac{dy}{dx}(0) = 1$ を満たすとき，y を求めなさい.

(東京農工大 2015)　　(m20150904)

0.43 a を実数とし，4 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^4$ を次の通りとする.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 2 \\ -1 & -6 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & -16 & a \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

さらに, 線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ で定義する．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元 $\dim(\mathrm{Im}\, f)$ を，a の値に応じて場合分けして求めよ.

(2) $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$ のとき，f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を 1 組求めよ.

(3) $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$ のとき，$\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\, f$ となることを示し，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解を求めよ.

(電気通信大 2015)　　(m20151001)

0.44 線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$，$p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$，$q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$，を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}, \quad p\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad q\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

で定義する．以下の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{Ker}\, p \subset \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$ を示せ.
ここで，$\mathrm{Ker}\, p$ は，p の核，$\mathrm{Ker}\,(g \circ f)$ は合成写像 $g \circ f$ の核である.

(2) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，を条件 $g \circ p = q \circ f$ を満たす線形写像とする．$g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$ を求め，$\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する g の表現行列 A を求めよ.

(3) A の固有値をすべて求めよ.

(電気通信大 2015)　　(m20151002)

0.45 関数 $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x, y)$ の極値を求めよ.

(2) $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ とするとき，$f(x, y) = 0$ を r，θ の式で表せ.

(3) 領域 $D = \{(x, y) : f(x, y) \leqq 0,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ の面積 S を求めよ.

(電気通信大 2015)　　(m20151003)

0.46 次の重積分，3 重積分の値を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $\displaystyle\iint_D e^{(x+y)^2}dxdy\,,\qquad D=\{(x,y):0\leqq\ x-y\leqq\ x+y\leqq\ 1\}$

(2) $\displaystyle\iiint_V xy\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz\,,\qquad v=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leqq\ 1,\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0\}$

(電気通信大 2015)　　(m20151004)

0.47 以下の問いの答えよ．ただし，$i=\sqrt{-1}$ とする．

(1) $z=e^{i\theta}$ とおくとき，$\sin\theta$ を z の式で表せ．

(2) 複素関数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4iz-1}$ の極をすべて求め，各極における留数を計算せよ．

(3) 定積分 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\sin\theta}$ の値を求めよ．

(電気通信大 2015)　　(m20151005)

0.48 以下の行列 A に対して，次の問いに答えよ．但し，$i=\sqrt{-1}$ とする．

$$A=\begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}i \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A の逆行列を求めよ．

(横浜国立大 2015)　　(m20151101)

0.49 次の微分方程式の一般解を求めよ，

(1) $x(x^2-1)\dfrac{dy}{dx}+2y(x^2-x-1)=0$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

(横浜国立大 2015)　　(m20151102)

0.50 次の関数の極限に関する問に答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-4x^2+7x-6}{3x^2-2x-8}$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(x+e)-1}{x}$ を求めなさい．ここで，e は自然対数の底である．

(千葉大 2015)　　(m20151201)

0.51 三次元ユークリット空間の中でデカルト直交座標系 $O-XYZ$ が定義され，次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が与えられている．このとき，以下の問に答えなさい．

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}-1\\-7\\2\end{pmatrix}$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に直交するベクトルを求めなさい．

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を列ベクトルとする行列を $A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\\1&1\end{pmatrix}$ として，行列 A^TA を求めなさい．ここで，A^T は A の転置行列である．

(3) 行列 A^TA の逆行列 $\left(A^TA\right)^{-1}$ を求めなさい.

(4) ベクトル $\boldsymbol{c}$ に行列 $\left(A^TA\right)^{-1}A^T$ を乗じたベクトル $\boldsymbol{x}_0 = \left(A^TA\right)^{-1}A^T\boldsymbol{c}$ を求めなさい.

(5) $A\boldsymbol{x}_0$ を求め，このベクトルを位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$，及び，ベクトル $\boldsymbol{c}$ を位置ベクトル $\overrightarrow{OC}$ と見なしたとき，点 P がベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ の定める平面上にあり，かつ $\overrightarrow{PC}$ と $\overrightarrow{OP}$ が直交することを示し，行列 $A\left(A^TA\right)^{-1}A^T$ の持つ幾何学的な意味を述べなさい.

(千葉大 2015)　　(m20151202)

0.52 三次元空間の $O-XYZ$ 座標系で与えられた，放物面 $z = 1+\sqrt{2}-x^2-y^2$，および，二葉双曲面 $x^2+y^2-z^2 = -1$ について，以下の問に答えなさい.

(1) 放物面と二葉双曲面との交線の式を求めなさい.

(2) 放物面が二葉双曲面に挟まれる部分の概形を図示しなさい.

(3) 放物面 $z = 1+\sqrt{2}-x^2-y^2$ と二葉双曲面の上半分 $z = \sqrt{1+x^2+y^2}$ とで囲まれる部分の体積 V を求めなさい.

(千葉大 2015)　　(m20151203)

0.53 次の微分方程式の一般解を求め，与えられた初期条件を満たす解曲線の概形を図示しなさい.

(1) $\left(x^2-xy\right)\dfrac{dy}{dx}+y^2 = 0$　 初期条件：$x = e,\ y = e$，ここで，e は自然数の底である.
（ヒント：$\dfrac{y}{x} = u$ とおいて未知関数 $y(x)$ を $u(x)$ に変換する ）

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+17y = 0,\ x \geq 0$　 初期条件：$x = 0,\ y = 1,\ y' = -1$

(千葉大 2015)　　(m20151204)

0.54 三次元空間の中にデカルト直交座標系 $O-XYZ$ 座標系が定義されている.

$y = 0$ 平面（$z-x$ 平面）上の点 $A = (x_0, 0, z_0)$ を始点とし，一定方向で $y = 0$ 平面から遠ざかる点 B がある．線分 AB の長さは λ で，線分 AB の方向ベクトルは，球座標系にならって，水平角（緯度）θ，方位角（経度）φ とする．ただし，$-90^\circ < \theta < 90^\circ$，$0^\circ < \varphi < 180^\circ$．点 B の座標は，$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ から，

$$B = (\lambda\cos\theta\cos\varphi + x_0\ ,\ \lambda\cos\theta\sin\varphi\ ,\ \lambda\sin\theta + z_0)$$

で与えられる．定点 E を $E = (0, -a, h)$, $a > 0$ として，点 E と点 B を結ぶ直線が $y = 0$ 平面（$z-x$ 平面）と交わる点を P とする．$\lambda \to \infty$ の時の P の座標を求めなさい.

（ヒント ： $\lambda \to \infty$ の時の点 P を透視画法では消点 (Vanishing Point) と呼んでいる）

(千葉大 2015)　　(m20151205)

0.55 $A = aE_m + bl_m\,{}^t\!l_m$ とおく．ただし，$a, b > 0$, E_m は m 次単位行列,

$$l_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (m\text{ 次列ベクトル})$$

とし，${}^t\!l_m$ は l_m の転置とする.

(1) A^2 の固有値をすべて求めよ.

(2) A^2 の逆行列を求めよ.

(筑波大 2015)　　(m20151301)

0.56　実ベクトル空間 V と線形写像 $F : V \to V$ を考える.

(1) $B = \{v_1,\ v_2\}$ が V の基底ならば $B' = \{v_1 - v_2,\ v_1 + v_2\}$ も基底であることを証明せよ.

(2) F の基底 B に関する表現行列 A と B' に関する表現行列 A' はどのような関係にあるか詳しく述べよ.

(3) $\dim V = 2$ とし, $v_1,\ v_2$ を F の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ に対応する固有ベクトルとする.

(a) $v_1,\ v_2$ は一次独立であることを示せ.

(b) n を自然数とし, F^n を F を n 回合成した写像とする. F^n の $B' = \{v_1 - v_2,\ v_1 + v_2\}$ に関する表現行列を求めよ.

(筑波大 2015)　　(m20151302)

0.57　デカルトの葉形と呼ばれる平面曲線 $C : x^3 - 3xy + y^3 = 0$ について, 次の問いに答えよ.

(1) C の特異点をすべて求めよ.

(2) C 上の点 (x, y) に関する xy の極値をすべて求めよ.

(3) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおき, C の極方程式を求めよ.

(4) C は第 1 象限で, ある図形を囲むがその図形の面積 S を求めよ.
(ヒント : 極方程式を用いて, $t = \tan\theta$ とおけ)

(筑波大 2015)　　(m20151303)

0.58　$\phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $(-\infty < x < \infty)$ とおく.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 1$ を示せ.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu x}\phi(x)dx$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \int_{-\infty}^{y} \phi(x)dx\right) e^{\mu y - \frac{\mu^2}{2}} dy$ を求めよ. ただし, $\mu > 0$ とする.

(筑波大 2015)　　(m20151304)

0.59　実数列 $\{x_n\}$ が実数 a に収束するとは, 標準的な論理式で書くと

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}\ \big(\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geqq\ n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon)\big) \qquad (*)$$

が成り立つということである. 次の問いに答えよ.

(1) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が実数 a で連続であることを, $(*)$ にならって理論式で書け.

(2) (1) の内容の否定を理論式で書け. ただし, その時に否定記号 $\neg$ やそれを暗黙に含む $\neq$ などの記号を使ってはならない.

(3) (2) の内容から, ある正の実数 ε が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|x_n - a| < 1/n$ かつ $|f(x_n) - f(a)| \geqq \varepsilon$ となるような実数列 $\{x_n\}$ が作れることを示せ.

(4) (3) の実数列 $\{x_n\}$ は a に収束することを示せ. また, 実数列 $f(x_n)$ は $f(a)$ に収束することを示せ.

(5) これまでの議論（特に (3) と (4)）をもとに, 実数列 $\{x_n\}$ は a に収束するとき実数列 $f(x_n)$ が必ず $f(a)$ に収束するなら, f は連続であることを証明せよ.

(筑波大 2015)　　(m20151305)

0.60 2 変数関数 $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ について以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を計算せよ.

(2) $f(x,y)$ の全微分を計算せよ.

(3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$ を計算せよ.

(4) $(x,y) = (0,0)$ を中心とする $f(x,y)$ のテイラー展開を 2 次まで求めよ.

(5) $(x,y) = (1,1)$ を中心とする $f(x,y)$ のテイラー展開を 2 次まで求めよ.

(6) xyz 空間で方程式 $z = f(x,y)$ が表す曲面 S について, S 上の点 $P(1,1,f(1,1))$ における接平面の方程式を求めよ.

(筑波大 2015)　　(m20151306)

0.61 2 変数関数 $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ について以下の問いに答えよ.

(1) 積分 $I = \displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy,\ \ D = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$ を求めたい. そこで, $D_a = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2,\ x \geq o,\ y \geq 0\right\}$, $a > 0$ として, $\displaystyle\lim_{a\to\infty} \iint_{D_a} f(x,y)dxdy$ を極座標 $r,\ \theta$ を用いて計算することにより, I の値を求めよ.

(2) (7) の結果を用いて積分 $J = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2 dt}$ の値を求めよ.

(筑波大 2015)　　(m20151307)

0.62 $f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \sin x$ $(a_0,\ a_1,\ a_2$ は実定数$)$ の形の実関数全体が作る実線形空間 V に内積 $(g,h) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x)h(x)dx$ $(g,h \in V)$ を導入する. 以下の問いに答えよ.

(1) 3 つの関数 $1,\ \cos x,\ \sin x$ は互いに直交することを示し, これらを正規化して正規直交基底を作れ.

(2) 線形変換 $F : f(x) \mapsto f(x+c)$ について, (1) で得られた正規直交基底に関する表現行列を求めよ. ここで, c は実定数である.

(筑波大 2015)　　(m20151308)

0.63 連立 1 階線形微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = x(t) - y(t) + 2z(t)$$
$$\frac{d}{dt}y(t) = x(t) + 3y(t)$$
$$\frac{d}{dt}z(t) = x(t) + y(t) + z(t)$$

を初期条件 $x(0) = 4,\ y(0) = 4,\ z(0) = 1$ の下で解け.

(筑波大 2015)　　(m20151309)

0.64 $x^2 + 3y^2 = 3$ で与えられる楕円 E について, 以下の問いに答えよ. 計算過程も示せ.

(1) $(x,y) \in R^2$ が楕円 E 上を動くとき, 実関数 $f(x,y) = xy^3$ がとりうる最大値と最小値を求めよ.

(2) 楕円 E の周と内部 $(x^2 + 3y^2 \leq 3)$ で $0 \leq y \leq x$ を満たす領域の面積を求めよ.

(3) x 軸を実軸, y 軸を虚軸とする複素平面を考える. この複素平面において楕円 E を反時計回りに一周する閉路を C とする. このとき $z = x + iy$ に関する積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^5} e^{-z} dz$ の値を求めよ.

(筑波大 2015)　　(m20151310)

0.65 n 次元実数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ において，内積を標準内積（自然な内積）で定義する．A を n 次直交行列，F を $F(x) = A\boldsymbol{x}$ で定められる $\boldsymbol{R}^n$ の線形変換とするとき，以下の問いに答えよ．なお，$\boldsymbol{R}^n$ のベクトルはすべて列ベクトルとする;

(1) $\boldsymbol{R}^n$ のある正規直交基底を $c_1,\ \cdots,\ c_n$ とする．$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ で表すとき，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ の基底 $\{c_i\}$ に関する座標ベクトルは

$\begin{bmatrix} (\boldsymbol{x},\ c_1) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{x},\ c_n) \end{bmatrix}$ で与えられることを示せ.

(2) 直交変換の定義を正確に述べよ（同値な定義のどれでもよい）．また，F が直交変換である（直交変換の定義を満たす）ことを示せ.

(3) A の固有値 λ（実数に限らない）の絶対値は 1 であること $(|\lambda| = 1)$ を示せ.

(筑波大 2015)　　(m20151311)

0.66 実数列 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots\}$ と $\{b_1,\ b_2,\ \cdots\}$ に対して実数列 $\{a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \cdots\}$ をその和と定義し，実数 α に対して $\{\alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \cdots\}$ を実数列 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots\}$ の α 倍と定義すると実数列の全体は実ベクトル空間を成す．このとき (1)〜(4) がこのベクトル空間の部分空間であるかどうかを，理由を示して答えなさい.

(1) ゼロに収束する実数列の全体

(2) 1 に収束する実数列の全体

(3) 有界な実数列の全体

(4) 非有界な実数列の全体

(筑波大 2015)　　(m20151312)

0.67 正方行列 A に対して $\boldsymbol{x}$ をその固有ベクトル，λ を対応する固有値とする．次の命題を証明しなさい.

(1) 各 $k = 1, 2, \cdots$ について，$A^k\mathbf{x} \neq 0$ のとき $A^k\boldsymbol{x}$ は A の固有ベクトルである.

(2) 行列 A が正則なら $\dfrac{1}{\lambda}$ は A の逆行列の固有値である.

(筑波大 2015)　　(m20151313)

0.68 下の関数 f が $(x, y) = (0, 0)$ で連続かどうかを，理由を示して答えなさい.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + y^2}{y} & (y \neq 0) \\ 0 & (y = 0) \end{cases}$$

(筑波大 2015)　　(m20151314)

0.69 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq 2x + y \leq 1,\ -1 \leq x - 2y \leq 0\}$ 上の二重積分 $\displaystyle\iint_D x dx dy$ について以下の問いに答えなさい.

(1) $u = 2x + y,\ v = x - 2y$ と変数変換をしたとき，変数 (u, v) の D に対応する積分領域を示しなさい.

(2) 上記の変数変換の逆変換 $x = \varphi(u, v),\ \psi(u, v)$ を示しなさい.

(3) $x = \varphi(u, v),\ \psi(u, v)$ のヤコビアンを求めなさい.

(4) $\displaystyle\iint_D x dx dy$ を求めなさい．

(筑波大 2015)　　(m20151315)

0.70 確率変数 X と Y の同時確率分布 $P[X=x,\ Y=y]$ $(x=0,1,2;\ y=0,1,2,3)$ が下の表のように与えられている．ただし，c は実数である．

$x \setminus y$	0	1	2	3
0	c	$\frac{30}{120}$	$\frac{15}{120}$	$\frac{1}{120}$
1	$\frac{20}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{6}{120}$	0
2	$\frac{5}{120}$	$\frac{3}{120}$	0	0

このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 定数 c の値を示しなさい．

(2) $X > y$ となる確率 $P[X > Y]$ を求めなさい．

(3) 確率変数 X と Y が独立であることの定義を記述し，表に与えられた X と Y が独立であるかどうかを判定しなさい．

(筑波大 2015)　　(m20151316)

0.71 以下の問いに答えなさい（添付の二つの数表を適宜使用すること）．

(1) 製品 A の重量は，平均が $60.0(g)$，標準偏差は $8.0(g)$ の正規分布に従うと考えられている．ある工場の製品 A を 100 個無作為抽出して調べたところ，標本平均は $62.0(g)$ であった．この工場の製品 A の平均重量は，製品 A の平均重量と同じであるといえるか．有意水準 5% で検定しなさい．

(2) 重量が正規分布に従うと考えられる製品 B の集団から，9 個を無作為抽出してその重量を測定したところ，抽出した 9 個の標本平均は $67.9(g)$，偏差平方和は $72.0(g^2)$ であった．製品 B の平均重量が $66.0(g)$ であるという仮説を有意水準 5% で検定しなさい．

(筑波大 2015)　　(m20151317)

0.72 曲面 $x^2 = y(2+3x+z)$ の任意の接平面は，接平面によらない定点 P を通ることを証明して，この点 P の座標を求めなさい．

(筑波大 2015)　　(m20151318)

0.73 次の 2 重積分を求めなさい．

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy, \quad D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq\ 2x\}$$

(筑波大 2015)　　(m20151319)

0.74 未知数 x, y を含む次の 3 つの行列に関して設問 (1)〜(4) に答えなさい．

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ y & 0 & 0 & x \end{bmatrix},\ G(x) = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix},\ H(y) = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix}$$

ただし，a, b, c はいずれも 0 でないものとする．

(1) $G(x)$ と $H(y)$ の行列式 $|G(x)|$ と $|H(y)|$ をそれぞれ求めなさい.

(2) $|G(x)| = |H(y)|$ が成り立つ必要十分条件を求めなさい.

(3) $|G(x)|$ と $|H(y)|$ を使って $F(x,y)$ の行列式 $|F(x,y)|$ を表しなさい.

(4) $|G(x)| \neq |H(y)|$ のとき, $|F(x,y)| = 0$ が成り立つ必要十分条件を求めなさい.

(筑波大 2015)　　(m20151320)

0.75 次の関数を微分せよ.

$$y = \log\Bigl(\cos e^x\Bigr)$$

(埼玉大 2015)　　(m20151401)

0.76 次の関数の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

$$f(x,y) = \cos(xy)\sin y$$

(埼玉大 2015)　　(m20151402)

0.77 次の定積分を求めよ.　$\displaystyle\int_0^1 \frac{3x}{x^2+1}\,dx$

(埼玉大 2015)　　(m20151403)

0.78 次の重積分を求めよ. ただし, $0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq \sqrt{x}$ で囲まれる領域を D とする.

$$\iint_D (2x+y)\,dxdy$$

(埼玉大 2015)　　(m20151404)

0.79 行列 A が次式であたえられるものとして以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の逆行列を求めよ.

(2) 行列 A の固有値を求めよ.

(3) 各固有値に対する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ を求めよ.

(埼玉大 2015)　　(m20151405)

0.80 原点 O と 2 点 $A(1,4,2),\ B(-2,2,3)$ において, $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a},\ \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ として以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{a} \times\ \boldsymbol{b}$ の成分を求めよ.

(2) 原点 O, 点 A および点 B で作られる三角形の面積を求めよ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の両方に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求めよ.

(埼玉大 2015)　　(m20151406)

0.81 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 0$

(2) $x\left(\dfrac{dy}{dx} + \sin x\right) + y = 0$

(3) $3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + y - x - 3 = 0$

(埼玉大 2015)　　(m20151407)

0.82　2 つの曲線 $y=-x^2+2x+18$,　 $y=x^3+2x^2-11x+3$ がある.

(1) 2 つの曲線の交点の座標を全て求めよ.

(2) 2 つの曲線で囲まれる領域の面積を求めよ.

(群馬大 2015)　　(m20151501)

0.83　確率について以下の問題に答えよ.

(1) 87 人の学生に，数日前に放送された 2 つのテレビ番組を見たかどうかを聞いた．一方の番組を見たのは 37 人，もう一方の番組を見たのは 43 人だった．どちらも見なかったのは 31 人だった．両方の番組を見た学生は何人だったか.

(2) 10000 人に 1 人の割合でかかる病気があるとする．病気にかっかているかどうかを検査すると，本当に病気にかかっている人に対して「病気にかっかている」という正しい結果が出る確率は 0.999，病気にかっかていない人に対して「病気にかっかていない」という正しい結果が出る確率は 0.995 である．ある人がこの検査を受けたとき，「病気にかっかている」という結果が出た．この人が本当に病気にかっかている確率はいかほどか.

(群馬大 2015)　　(m20151502)

0.84　有理関数 $f(x)=\dfrac{5}{(x^2+1)(x+2)}$ について，以下の各問に答えよ.

(1) $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}+\dfrac{c}{x+2}$ を満たす定数 a,b,c を求めよ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ を求めよ.

(茨城大 2015)　　(m20151701)

0.85　4 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & a & a^2+2b^2 & a^3 \\ 1 & b & 2a^2+b^2 & b^3 \\ 1 & -a & a^2+2b^2 & -a^3 \\ 1 & -b & 2a^2+b^2 & -b^3 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問に答えよ.
ただし，a,b は実数とする.

(1) A の行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) $a=0$ かつ $b=-1$ のとき，連立 1 次方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解け.

(茨城大 2015)　　(m20151702)

0.86　$y=y(x)$ に関する微分方程式について，以下の各問に答えよ.

(1) $y'''-6y''+11y'-6y=0$ の一般解を求めよ.

(2) $y'''-6y''+11y'-6y=e^{4x}$ の一般解を求めよ.

(茨城大 2015)　　(m20151703)

0.87　複素関数 $f(z)=(x^2-2x+3)e^{z-1}$ について，以下の各問に答えよ.

(1) $f(z)$ の $z=1$ を中心にするテイラー展開を

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-1)^k$$

と書くとき，a_1, a_2 をそれぞれ求めよ．

(2) C は複素平面上の円 $|z|=2$ を正の向きに一周する閉曲線とする．次の複素積分を計算せよ．

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-1)^n}\,dz$$

ただし，n は 3 以上の自然数とする．

(茨城大 2015)　　(m20151704)

0.88 $\boldsymbol{x}_1 = (1,1,-1)$, $\boldsymbol{x}_2 = (2,-1,-1)$, $\boldsymbol{x}_3 = (-1,1,0)$, $\boldsymbol{y}_1 = (-4,2,2)$, $\boldsymbol{y}_2 = (0,-1,1)$, $\boldsymbol{y}_3 = (-1,1,0)$ とする．また T を $T(\boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{y}_i \quad (i=1,2,3)$ を満たす 3 次元実ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ の線形写像とする．以下の各問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底であることを示せ．

(2) $T(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2)$ を求めよ．

(3) $T(\boldsymbol{x})$ が零ベクトルとなる $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ をすべて求めよ．

(4) T の固有値及び，各固有値に対応する固有空間の基底を一組求めよ．

(茨城大 2015)　　(m20151705)

0.89 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ から整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ への写像 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ を

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & n \text{ が偶数} \\ -\dfrac{n-1}{2}, & n \text{ が奇数} \end{cases}$$

と定義する．f による，偶数全体の集合の像と，奇数全体の集合の像を求めて，f が全単射であることを示し，f の逆写像 $f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ を求めよ．

(茨城大 2015)　　(m20151706)

0.90 関数 $f(x)$ は R 上で微分可能で導関数 $f'(x)$ が連続であるとする．a を 0 でない定数として

$$z = f(x+ay)$$

と定める．以下の各問に答えよ．

(1) 次の等式を示せ．

$$\frac{\partial z}{\partial y} - a\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

(2) $z = f(x+ay)$ が表す曲面上の点 $\big(0.0.f(0)\big)$ におけるこの曲面の接平面の方程式を求めよ．

(茨城大 2015)　　(m20151707)

0.91 a を $0 \leq a$ を満たす定数とし，

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2axy$$

と定める．以下の各問に答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) 次の重積分の値が 0 になるように a を定めよ.

$$\iint_D f(x,y)dxdy\ , \qquad ただし,\ D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\right\}.$$

(茨城大 2015)　　(m20151708)

0.92 $A=\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$ を対角化し，A^n を n で表せ.

(山梨大 2015)　　(m20151801)

0.93 1 から 6 の目のサイコロがある．各目がでる確率を同じとする. 次の問いに答えよ.

(1) 4 個のサイコロを同時に振ったとき，目が互いに異なる確率を求めよ.

(2) 3 個のサイコロを同時に振ったとき，サイコロの目の和が 6 である確率を求めよ.

(3) 2 個のサイコロを同時に振ったとき，サイコロの目の和の期待値と分散を求めよ.

(山梨大 2015)　　(m20151802)

0.94 数学的帰納法を用いて次の不等式を証明せよ.　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{-1/2}\geq\sqrt{n}$

(山梨大 2015)　　(m20151803)

0.95 次の極限を調べ，それが存在する場合は極限値を求め，存在しない場合はその理由を述べよ.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,\pi)}\frac{\cos xy}{x^2+y^2-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2+y^4}$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{(x-1)^3+y^3-1}{(x^2-1)^3-y+1}$

(信州大 2015)　　(m20151901)

0.96 (1) $t=\tan\theta$ のとき，$\sin 2\theta$ を t を用いて表せ.

(2) $t=\tan\theta$ と置換して，不定積分 $\displaystyle\int\frac{d\theta}{1+\sin 2\theta}$ を求めよ.

(信州大 2015)　　(m20151902)

0.97 2 重積分 $I=\displaystyle\iint_D\frac{dxdy}{x^2+2xy+y^2}$ の値を求めよ.

ただし，$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 4,\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0\right\}$ とする.

(信州大 2015)　　(m20151903)

0.98 次の行列式に関する等式を示せ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

(信州大 2015)　　(m20151904)

0.99 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -a & a & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．ただし，a は実数とする.

(1) A が固有値 1 と，それとは異なる実数の固有値をもつための a の条件を求めよ．

(2) 固有値 1 に属する固有ベクトルを 1 つ求めよ．

(信州大 2015)　　(m20151905)

0.100 (1) $0 < a < 1$ とするとき，$x > 0$ で定義された関数 $f(x) = (1 + a^x)^{\frac{1}{x}}$ は単調（単調増加，または単調減少）であることを示せ．

(2) 前問 (1) の結果を利用して，2 つの数 $b = (2014^8 + 2015^8)^{\frac{1}{8}}$，$c = (2014^9 + 2015^9)^{\frac{1}{9}}$ の大小を判定せよ．

(新潟大 2015)　　(m20152001)

0.101 定積分 $-\displaystyle\int_{1/e}^{1} x \log x \, dx$ を計算せよ．

(新潟大 2015)　　(m20152002)

0.102 行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．つぎに，固有ベクトルを使って A を対角化せよ．

(新潟大 2015)　　(m20152003)

0.103 $m.\ n$ を未知数とする連立 1 次方程式 $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ が解をもつとき $x,\ y,\ z$ はどのような関係を満たすか，以下の設問に答えなさい．

ただし，$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}$ とおくとき，与式は $m\boldsymbol{p} + n\boldsymbol{q} = \boldsymbol{r}$ とかける．

(1) $\boldsymbol{r} = 0$ のとき連立 1 次方程式の解を答えなさい．

(2) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p}$ のとき連立 1 次方程式の解を答えなさい．

(3) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{q}$ のとき連立 1 次方程式の解を答えなさい．

(4) 点 (x, y, z) の存在する領域が空間内のどのような図形で表されるか推量し，次の 5 つの中から選択しなさい．

ア．3 つの点　　イ．直線　　ウ．円　　エ．双曲線　　オ．平面

(5) 点 (x, y, z) の存在する領域が表す図形を定める方程式を求めなさい,

(6) この図形を描きなさい．

(新潟大 2015)　　(m20152004)

0.104 右の極限は存在するか，存在すればその値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(\cos x)^{\sin x} - 1}{x e^{-x^2}}$

(新潟大 2015)　　(m20152005)

0.105 a を定数とする．以下の行列が正則なる a の条件を求め，その条件の下，逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

(新潟大 2015)　　(m20152006)

0.106 $y=\sqrt{\cos x}$ のとき，y'' を求めよ．

(新潟大 2015)　　(m20152007)

0.107 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx$ を求めよ．

(新潟大 2015)　　(m20152008)

0.108 $a_1=e,\ a_{n+1}=\dfrac{e}{n+1}a_n\quad(n=1,2,3,\cdots)$ によって定義される数列 a_n について，以下の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

(1) a_n を n の式で表せ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ．

(新潟大 2015)　　(m20152009)

0.109 ふたつのベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ と， $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}c\\-3\end{pmatrix}$ が 45°の角度をなすときの　c の値を求めよ．

(新潟大 2015)　　(m20152010)

0.110 次の一次変換 $f,\ g$ について答えよ．

(1) 原点を中心として左回りに角度 θ だけ回転させる変換 f を表す行列を求めよ．

(2) 原点を中心とする相似比 k の相似変換 g を表す行列を求めよ．

(3) f と g の合成変換 $f\circ g$ を表す行列を求めよ．

(新潟大 2015)　　(m20152011)

0.111 行列 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$， $P=\begin{pmatrix}-1&3\\0&3\end{pmatrix}$ とする．

(1) P の逆行列 P^{-1} を求めよ．

(2) $B=p^{-1}AP$ とするとき，B^n を求めよ．n は自然数とする．

(3) A^n を求めよ．

(新潟大 2015)　　(m20152012)

0.112 次の (1)〜(3) の関数を微分せよ．

(1) $y=x^3(x-1)^2(x+2)^2$　　(2) $y=\sqrt{1+\cos x}$　　(3) $y=\dfrac{x^2+2}{x-1}$

(新潟大 2015)　　(m20152013)

0.113 次の (1)〜(3) の不定積分を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $\displaystyle\int(6x-1)^3\,dx$　　(2) $\displaystyle\int x\sqrt{3x-1}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \log_e x\,dx$

(新潟大 2015)　　(m20152014)

0.114 行列 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ について次の (1)〜(3) に答えよ．E は単位行列，O は零行列である．

(1) $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ であることを示せ．

(2) $A^2=O$ ならば $a+d=0,\ ad-bc=0$ であることを示せ．

(3) $A^2-5A+6E=O$ を満たすとき，$a+d,\ ad-bc$ の値をそれぞれ求めよ．

(新潟大 2015)　　(m20152015)

0.115　次の (1)，(2) の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = xy$　　　　(2) $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$　　(m, k は定数)

(新潟大 2015)　　(m20152016)

0.116　等式 $\tan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ で成り立つような定数 a_n のうち a_0 から a_5 までを求めよ．

(新潟大 2015)　　(m20152017)

0.117　不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+1}\,dx$ を求めよ．

(新潟大 2015)　　(m20152018)

0.118　行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

について，次の各問いに答えよ．

(1)　A の行列式の値を求めよ．

(2)　A の固有値をすべて求めよ．

(3)　A の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ．

(4)　$P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求め，A を対角化せよ．

(新潟大 2015)　　(m20152019)

0.119　$k \neq 0$ とするとき，2 変数関数 $f(x, y) = x^3 - 3kxy + y^3$ の極値を求めよ．

(新潟大 2015)　　(m20152020)

0.120　$xyz-$ 空間において，3 点 $P_1(a_1,\ b_1,\ c_1)$，$P_2(a_2,\ b_2,\ c_2)$，$P_3(a_3,\ b_3,\ c_3)$ は，同一直線上にないとする．多項式 $f(x, y, z)$ を

$$f(x, y, z) = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix}$$

によって定める．このとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x, y, z)$ の定数項を求めよ．

(2)　$i = 1, 2, 3$ に対して，$f(a_i,\ b_i,\ c_i) = 0$ が成り立つことを説明せよ．

(3)　$f(x, y, z) = 0$ は，3 点 $P_!$，P_2，P_3 を通る平面の方程式であることを示せ．

(新潟大 2015)　　(m20152021)

0.121　2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対し，下の問いに答えなさい．

(1)　A の逆行列 A^{-1} を求めなさい．

(2)　曲線 $C : 5x^2 + 12xy + 8y^2 - 4 = 0$ の A による像 C' の方程式を求め，C' の概形を図示せよ．

(長岡技科大 2015)　　(m20152101)

0.122 微分方程式

$$(*) \qquad y\frac{dy}{dx}+y^2=e^x$$

について，下の問いに答えなさい．

(1) $z=y^2$ とおいて，微分方程式 $(*)$ を z と x に関する微分方程式として表しなさい．

(2) 前問 (1) の微分方程式を解くことによって，微分方程式 $(*)$ を解きなさい．

(長岡技科大 2015)　　(m20152102)

0.123 関数 $y=\sin x$ のグラフの $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分と x 軸と直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ とで囲まれる図形を S とする．下の問いに答えなさい．

(1) 図形 S を図示し，面積を求めなさい．

(2) 図形 S を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい．

(3) 図形 S を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい．

(長岡技科大 2015)　　(m20152103)

0.124 数直線上の動点 Q が次の規則に従って移動している．ただし n は 0 以上の整数とする．

規則：時刻 n で Q の座標が a のとき，時刻 $n+1$ で Q は $a+1$，$a-1$ のいずれかに
　　それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で移動する．

時刻 0 で Q が原点にあるものとしたとき，下の問いに答えなさい．

(1) 時刻 2 で Q が原点にある確率を求めなさい．

(2) 時刻 4 で Q が原点にある確率を求めなさい．

(3) 時刻 $2n$ で Q が原点にある確率を n で表しなさい．

(長岡技科大 2015)　　(m20152104)

0.125 任意の x,y,z について

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4x+y+4z \\ -4x+3y+2z \\ -x+y+z \end{pmatrix}$$

となる 3× 3 行列 A を考える．次の問いに答えよ．

(1) A を求めよ．

(2) A の固有値 λ_1，λ_2，λ_3 $(\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3)$ と，それぞれに対応する長さ 1 の固有ベクトル p_1,p_2,p_3 を求めよ．

(3) B を A の逆行列，n を自然数とするとき，B^n の固有値を $\mu_1^{(n)}$，$\mu_2^{(n)}$，$\mu_3^{(n)}$ $(\mu_1^{(n)}<\mu_2^{(n)}<\mu_3^{(n)})$ とおく．数列 $a_n=\dfrac{\mu_1^{(n)}\mu_3^{(n)}}{\mu_2^{(n)}}$ $(n=1,2,\cdots)$ に対して，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ の収束発散を調べよ．収束する場合はその値を求めよ．

(金沢大 2015)　　(m20152201)

0.126 関数 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$ $(|x|<1)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f'(0)$，$f''(0)$，$f'''(0)$ を求めよ．

(2) $(x-x^3)f''(x)=f'(x)$ を示せ．

(3) $f^{(n)}(0)$ を求めよ．

(金沢大 2015) (m20152202)

0.127 (1) $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$ を示せ．ここで，$\sin^{-1} x$ は逆正弦関数を表す．

(2) 座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi)$$

に対するやコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ．

(3) 重積分

$$\iint_D \frac{y}{(x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy$$

を求めよ．ただし，$D = \left\{(x,y) \;\middle|\; \dfrac{1}{4} \leqq x^2+y^2 \leqq \dfrac{3}{4},\ 0 \leqq y \leqq x\right\}$ とする．

(金沢大 2015) (m20152203)

0.128 R^3 の部分集合 $W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; 3x+4y-z=0 \right\}$ と線形変換

$$f : R^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) W が R^3 の部分空間であることを示し，その基底を一組求めよ．

(2) $\boldsymbol{x} \in W$ のとき $f(\boldsymbol{x}) \in W$ となることを示せ．

(3) (2) により，f の定義域を W に制限することにより，線形変換

$$g : W \ni \boldsymbol{x} \longmapsto f(\boldsymbol{x}) \in W$$

ができる．この変換 g の (1) で選んだ W の基底に関する表現行列を求めよ．

(金沢大 2015) (m20152204)

0.129 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ついて，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の各固有値に対する固有空間を求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を一つ求めよ．

(4) $B = (\alpha E - A)(\beta E - A)^{-1}$ とおく．ただし E は 3 次の単位行列，α と β は A の固有値とは異なる実数とする．B を対角化せよ．

(金沢大 2015) (m20152205)

0.130 次の広義積分の収束・発散を判定せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+3x}$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ (3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$

(金沢大 2015) (m20152206)

0.131 (1) R 上の滑らかな関数 $f(x)$ がつねに $f''(x) \geqq 0$ を満たすならば，任意の $a, b \in R$ と任意の $t \in [0,\ 1]$ に対して

$$f((1-t)a+tb) \leqq (1-t)f(a)+tf(b)$$

が成り立つことを示せ.

(2) R^2 上の滑らかな関数 $g(x_1, x_2)$ が任意の点 $P=(p_1, p_2)$ と任意のベクトル $\boldsymbol{v}=(v_1.v_2)$ に対して

$$\frac{\partial^2 g}{\partial {x_1}^2}(P)v_1^2 + 2\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(P)v_1 v_2 + \frac{\partial^2 g}{\partial {x_2}^2} \geqq 0$$

を満たすならば，任意の 2 点 $P=(p_1, p_2)$，$Q=(q_1, q_2)$，および任意の $t \in [0,\ 1]$ に対して

$$g((1-t)P+tQ) \leqq (1-t)g(P)+tg(Q)$$

が成り立つことを示せ.

(金沢大 2015) (m20152207)

0.132 有界閉領域 D, E を

$$D = \left\{(x, y) \in R^2 \ \middle|\ \frac{1}{2} \leqq x^2+y^2 \leqq x \right\},$$

$$E = \left\{(r, \theta) \in R^2 \ \middle|\ -\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4},\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq r \leqq \cos\theta \right\}$$

とする．次の問いに答えよ.

(1) D を図示せよ.

(2) 写像 $T : R^2 \to R^2$ を

$$T(r, \theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

とする．$(r, \theta) \in E$ のとき $T(r, \theta) \in D$ であることを示せ.

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$ の値を求めよ.

(金沢大 2015) (m20152208)

0.133 次の微分，積分を計算しなさい.

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(x^{\sin x}\right)$ (2) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$

(金沢大 2015) (m20152209)

0.134 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = xi+yj+zk$，$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$， 曲面 S の面要素を dS，dS に垂直な単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ として以下の問いに答えなさい.

(1) $\nabla \cdot \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ を計算しなさい．ただし $y \neq 0$ とする.

(2) 原点 O を含まない閉曲面 S に対して，以下の面積分を求めなさい.

$$\iint_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}dS$$

(3) 原点 O を含む半径 a の球面 S に対して，次の式が成り立つことを示しなさい.

$$\iint_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}dS = 4\pi$$

(4) (3) の関係式が，原点 O を含む任意の閉曲面 S に対して成り立つことを示しなさい.

(金沢大 2015) (m20152210)

0.135 行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値と規格化された固有ベクトルを求めなさい．

(2) ある行列 P を用いて，行列 $A' = P^{-1}AP$ を対角行列にすることができる． P と A' を求めなさい．

(金沢大 2015)　　(m20152211)

0.136 実線形空間 V の部分空間全体からなる集合族を S とする．また． $X_1 \in S,\ X_2 \in S$ として

$$X = \{x_1 + x_2 \mid x_{\in}X_1,\ x_2 \in X_2\}$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $X \in S$ であることを示せ．

(2) $S_0 = \{Y \in S \mid X_1 \subset Y,\ X_2 \subset Y\}$ とおくとき，

$$X = \{x \in V \mid \text{すべての } Y \in S_0 \text{ に対して } x \in Y\}$$

であることを示せ．

(富山大 2015)　　(m20152301)

0.137 $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数とする．また，$x_0 \in \mathbb{R}$ とする．このとき，次の (a)，(b) は同値であることを示せ．

(a) $f(x)$ は $x = x_0$ で連続である．

(b) x_0 に収束する任意の実数列 $\left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = f(x_0)$ である．

(富山大 2015)　　(m20152302)

0.138 x, y を実数とする．座標平面上の点 (x, y) に対して，行列

$$A = \begin{pmatrix} x & y & 2 \\ y & 1 & y \\ 2 & y & x \end{pmatrix}$$

を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 直交行列 $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，${}^tPAP$ を求めよ．

(2) A の相異なる固有値の個数が 2 であるような点 (x, y) の集合を図示せよ．

(富山大 2015)　　(m20152303)

0.139 4 重積分

$$\iiiint_D x_1 dx_1\ dx_2\ dx_3\ dx_4$$

の値を求めよ．

ただし，$D = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 \leqq 1,\ x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0,\ x_4 \geqq 0\right\}$ とする．

(富山大 2015)　　(m20152304)

0.140 次の計算をせよ．計算の概略も示すこと．

(1) $\dfrac{d}{dx}\log_e\left\{(x-1)e^{x^2}\right\}\ (x>0)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{(x-2)^x}{\tan x}\right\}\ (x>2)$

(富山大 2015)　　(m20152305)

0.141 次の計算をせよ．計算の概略も示すこと．

(1) $\displaystyle\int \arctan\frac{x}{2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^4 x-6cos^6x)\,dx$

(富山大 2015)　　(m20152306)

0.142 空間座標の原点 O からの距離 r で定義される関数 $\varphi(r)=\log_e r\ \ (r>0)$ について次の各問いに答えよ．ただし，$\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ を直交座標系 $O-xyz$ の単位ベクトルとし，$\overrightarrow{r}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}$, $r=|\overrightarrow{r}|$ であるとする．

(1) 点 $P(1,1,0)$ を含む等位面（関数の値が等しい点の集合）の点 P における単位法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ の x,y,z 成分を求めよ．

(2) 点 $Q(0,0,1)$ における，ベクトル $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$ の方向への $\varphi(r)$ の方向微分係数を求めよ．

(3) 勾配の発散 $\nabla^2\varphi(r)$ を r の関数として求めよ．

(4) 勾配の回転 $\nabla\times\ \nabla\varphi(r)$ が $\overrightarrow{0}$ であることを示せ.

(富山大 2015)　　(m20152307)

0.143 xy 平面上に 3 点，$A(1,\ 1)$, $B(3,\ 1)$, $C(1,\ 4)$ を頂点とする三角形がある．この 3 つの頂点を線形写像 T により変換するとき，次の各問いに答えよ．ただし，線形写像 T は行列 $S=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ で与えれれる．計算の概略も示すこと．

(1) 頂点 A, B, C の変換後の各頂点を A', B', C' とする．これら 6 点を xy 座標平面上に座標の値とともに図示せよ．

(2) 点 A', B' を通る直線をベクトル表示せよ．同様に点 A', C' を通る直線をベクトル表示せよ．

(3) (2) の 2 直線が直交することをベクトルの内積を使って示せ.

(4) 三角形 ABC と三角形 $A'B'C'$ の面積比を求めよ．

(富山大 2015)　　(m20152308)

0.144 関数 $f(x)$ が $f(x)=\dfrac{1}{5}x^5-x^3$ で与えられるとき，次の問いに答えよ．計算の概略も示すこと．

(1) $f(x)=0$ となる最大と最小の x の値を求めよ．

(2) 極大値と極小値をすべて求めよ．さらに $f(x)$ の概形も描け.

(3) $f(x)$ が x 軸とつくる閉じた図形の面積を求めよ．

(富山大 2015)　　(m20152309)

0.145 次の各問いに答えよ．

(1) 次の微分方程式の一般解 $x(t)$ を求めよ．

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-x$$

(2) 次の連立方程式の $x(0)=y(0)=1$ を満たす特殊解 $x(t)$, $y(t)$ を求めよ．

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}=x-y\\[2mm] \dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}=x+y\end{cases}$$

(3) 次の連立方程式の $x(0)=y(0)=1$ を満たす特殊解 $x(t),\ y(t)$ を求めよ．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}=-x+y \\ \dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}=x+y \end{cases}$$

(富山大 2015)　　(m20152310)

0.146 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{4x^3-3x^2+2}{e^x}$

(福井大 2015)　　(m20152401)

0.147 次の関数の導関数を求めよ．

(1) $y=x^{\sin x}\quad (x>0)$　　(2) $y=\log(\sin^2 x)$

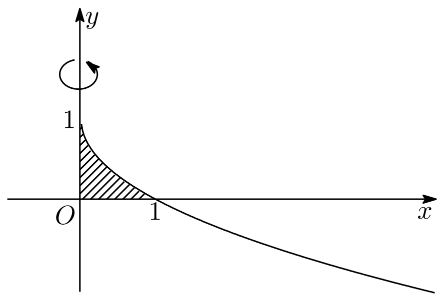
(福井大 2015)　　(m20152402)

0.148 次の関数のマクローリン展開を x^4 の項まで求めよ（計算過程も示せ）．

$\log(1+x)$

(福井大 2015)　　(m20152403)

0.149 曲線 $y=1-\sqrt{x}$ と直線 $x=0$ および $y=0$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転できる立体の体積を求めよ．



(福井大 2015)　　(m20152404)

0.150 単振子の周期 T は，振子の長さを ℓ，重力の加速度を g とすれば，$T=2\pi\sqrt{\ell/g}$ で与えられる．ℓ, g が微小量 $\triangle\ell$, $\triangle g$ だけ変化するときの T の変化量を $\triangle T$ とするとき，$\triangle T$ が近似的に以下の式で表されることを示せ．

$$\frac{\triangle T}{T}=\frac{1}{2}\left(\frac{\triangle\ell}{\ell}-\frac{\triangle g}{g}\right)$$

(福井大 2015)　　(m20152405)

0.151 $I=\displaystyle\iint_R e^{-(x^2+y^2)}dxdy\quad (R\ :\ 0\leq x^2+y^2\leq a^2)$ の値を求めよ．さらに，$a\to\infty$ としたときの I の値を用いて，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$ の値を求めよ．

(福井大 2015)　　(m20152406)

0.152 次の式を満たす行列 A を求めよ．途中の過程も記載すること．

$$A\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

(福井大 2015)　　(m20152407)

0.153 次の 3 つのベクトルがある．ただし，x は定数とする．以下の問に答えよ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} x \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(1) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次従属となるように定数 x を求めよ．

(2) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次独立で相互に直交するベクトルとなるように定数 x を求めよ．

(福井大 2015) (m20152408)

0.154 次の式を行列の一次変換によって簡単な式に変換したい．以下の問に答えよ．

$2x^2 + 6xy + 2y^2 = 1$ $\cdots\cdots$ ①

行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 3 \\ s & a_{22} \end{bmatrix}$ を用いると，式 ① を次式のように表現できる．

ここで，a_{11}，a_{22}，S は定数である．

$$1 = 2x^2 + 6xy + 2y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A を求めよ．

(2) 行列 A の固有値 λ_1 と λ_2 及びそれらに対応する単位長さの固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$（いずれも列ベクトル）を求めよ．ただし，$\lambda_1 > \lambda_2$ とする．

(3) 列ベクトル $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ からなる行列 $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{bmatrix}$ とおく．$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ によって式 ① を X と Y の方程式に変換せよ．

(福井大 2015) (m20152409)

0.155 次の微分方程式の一般解を導出せよ

(1) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = x$ (2) $\dfrac{dy}{dx} = y + y^2$ (3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} = 0$

(福井大 2015) (m20152410)

0.156 以下の微分方程式の一般解を，( ) 内の変数変換を利用して求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x+y}{x+2y}$ （変数変換 $z = \dfrac{y}{x}$ ）

(2) $\dfrac{dy}{dx}(2x + 2y - 1) + x + y + 1 = 0$ （変数変換 $z = x + y - 2$）

(福井大 2015) (m20152411)

0.157 空間に 3 点 P, A, B がある．点 A から直線 PB に下ろした垂線と，直線 PB との交点を R とする．

(1) $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{PB}$ とするとき，

$$\overrightarrow{PR} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\,\boldsymbol{b}$$

となることを示せ．

(2) $P(3,\ -6,\ 9)$, $A(-3,\ 2,\ 5)$, $B(-1,\ -3,\ 8)$ に対して，R の座標を求めよ．

(福井大 2015) (m20152412)

0.158 y を x の関数とするとき，微分方程式

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' + a = 0 \quad \text{（}a\text{ は実数の定数）}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) この微分方程式を，条件 $y(0)=1,\ y'(0)=0$ のもとで解け．

(2) 上の (1) で求めた解 y について $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} y^2dx$ とおく．I が有限になるための a に関する必要十分条件を示せ．また，その必要十分条件が満たされるとき，a を用いて I を表せ．なお，正規分布（ガウス分布）の確率密度関数の性質を利用してもよい．

(福井大 2015)　　(m20152413)

0.159 3 次方程式 $2x^3-3x^2+3x-1=0$ の実数でない 2 つの根を $\alpha,\ \beta$ とするとき，次の値を求めよ．

(1) α および β　　(2) $(\alpha-1)(\beta-1)$　　(3) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$　　(4) $\alpha^3+\beta^3$

(福井大 2015)　　(m20152414)

0.160 次の関数を微分せよ．

(1) $y=(x^2+2)^4$　　(2) $y=\sin(3x+\pi)$　　(3) $y=\sin x\cdot\cos^2 x$　　(4) $y=x^{2x}$

(福井大 2015)　　(m20152415)

0.161 次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $y=\dfrac{1-x}{x^2}$　　(2) $y=\log(x+2)$

(福井大 2015)　　(m20152416)

0.162 関数 $y=e^{-x}\cos x,\quad 0\leq x\leq 2\pi$ について，以下の問に答えよ．

(1) この関数の概形を示せ．

(2) この関数と x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ．

(福井大 2015)　　(m20152417)

0.163 時間 t での位置が $(x=\cos t+t\sin t,\ y=\sin t-t\cos t)$ で与えられる動点 P がある．

(1) $t=0$ における位置を求めよ．

(2) $0\leq t\leq 2\pi$ での動点の軌跡の概形を示せ．

(3) $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を求めよ．

(4) $0\leq t\leq 2\pi$ での動点 P の移動距離を求めよ．

(福井大 2015)　　(m20152418)

0.164 ある細菌の量を x，時間を t とする．細菌の増殖率 $\dfrac{dx}{dt}$ は x に比例し，その比例定数を α とする．

(1) $t=0$ における細菌の量を x_0 として，x を時間の関数で表せ．

(2) 細菌が T 時間で 2 倍になったとするとき α を T で表せ．また，最初の 1024 倍となる時間を求めよ．

(福井大 2015)　　(m20152419)

0.165 次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) $3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(3) ${}^t\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$（$t$ は転置記号）

(4) $\begin{pmatrix} \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ -\sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}$

(福井大 2015)　　(m20152420)

0.166 次の連立一次方程式をガウスの消去法（掃き出し法）を用いて解け．

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(福井大 2015)　　(m20152421)

0.167 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) (1) で求めた最小の固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(福井大 2015)　　(m20152422)

0.168 行列 A, B, C に関して，行列式を計算しなさい．また，逆行列を，それぞれ求めなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(福井大 2015)　　(m20152423)

0.169 以下の複素関数 $f(z)$ に関する問いに答えなさい．ただし，$z \neq 0$ とし，i は虚数単位である．また，x, y は実数とする．

$$f(z) = z - \frac{1}{z}$$

(1) $z = x+yi$ のとき，複素関数 $f(z) = u+iv$ の実部 $u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(z)$ および虚部 $v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(z)$ を x, y の関数として表しなさい．

(2) (1) の実関数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ がコーシー・リーマンの微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

を満たすことを示しなさい．

(3) $f(z)$ の導関数 $f'(z)$ が,

$$f'(z) = 1 + \frac{1}{z^2}$$

となることを，実関数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ の偏導関数を計算することによって示しなさい．

(福井大 2015)　　(m20152424)

0.170 曲率 ρ(注) に関する以下の微分方程式について答えなさい．

$$y'' = \rho(1+{y'}^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．

(1) $\dfrac{d\rho}{dx}$ を求めなさい．

(2) 円の方程式 $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ のとき，(1) の曲率 ρ に関する x の微分 $\dfrac{d\rho}{dx}$ が 0 となり，曲率 ρ は一定であることを示しなさい．

(3) ρ を定数として，微分方程式 ① を解きなさい．必要であれば，以下の置換法 $y' = \nu = \tan\theta \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いること．

（注）曲線上の各点において，その曲線の曲がりの程度を示す値.

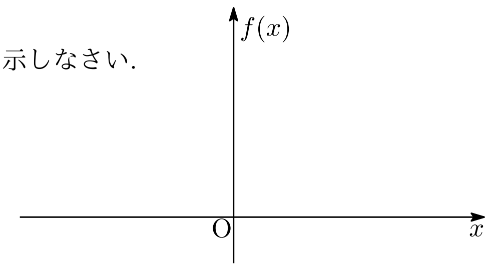
(福井大 2015)　　(m20152425)

0.171 平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ は，確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

をもつ.

(1) $N(10, 4)$ に従う確率変数 X の確率密度関数を図示しなさい.



(2) 確率変数 X が正規分布 $N(10, 4)$ に従うとき，次の確率を求めなさい.
必要に応じて，別紙の標準正規分布表を用いなさい.

(i) $P[X > 13]$　　(ii) $P[8 < X < 12]$

(福井大 2015)　　(m20152426)

0.172 2 変数関数 $f(x, y)$ を $f(x, y) = x^2y^3e^{2xy}$ とおく．このとき，$\dfrac{\partial}{\partial x}f(x, y)$ および $\dfrac{\partial}{\partial y}f(x, y)$ を求めよ.

(福井大 2015)　　(m20152427)

0.173 行列 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が直交行列となるように $b,\ c,\ d$ を決めよ.

(福井大 2015)　　(m20152428)

0.174 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を一次独立なベクトル，さらに $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ とし，ベクトル $\boldsymbol{v}$ を

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} - \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}$$

と定義する．このとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{v}$ は直交することを示せ.

(福井大 2015)　　(m20152429)

0.175 関数 $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ の増減表を用いて，$f(x)$ のグラフの概形を描け.

(福井大 2015)　　(m20152430)

0.176 次の複素数の絶対値を求めよ.

(1) $-i(2+i)(1+2i)(1+i)$　　(2) $\dfrac{(3+i)(2-i)}{(3-i)(2+i)}$

(福井大 2015)　　(m20152431)

0.177 領域 D を，$D = \left\{(x, y)\ \middle|\ x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$ とする．このとき，$\displaystyle\iint_D dxdy$ の値を求めよ.

(福井大 2015)　　(m20152432)

0.178 次の極限値を求めなさい.

(i) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x\sin(x) - \frac{\pi}{2}}{\cos(x)}\right)$　　(ii) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2}\right)$

(静岡大 2015)　　(m20152501)

0.179 関数 $f(x) = \cos(ax)\cos(bx)$ の第 n 次導関数は

$$f^{(n)}(x) = \frac{(a+b)^n}{2}\cos\left((a+b)x + \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{(a-b)^n}{2}\cos\left((a-b)x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

となることを示しなさい.

(静岡大 2015)　　(m20152502)

0.180 a を実数として $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が $A^2 - A + E = 0$ を満たすとする.

(1) a の値を求めよ.

(2) A^{60} を求めよ.

(静岡大 2015)　　(m20152503)

0.181 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ とするとき, A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(静岡大 2015)　　(m20152504)

0.182 自然数 m に対して

$$I(m) = \int_0^1 \frac{1}{x^m + 1}\,dx$$

と定める. 以下の問に答えよ.

(1) 定積分 $I(1)$, $I(2)$ の値を求めよ.

(2) 実数 $r \neq -1$, 自然数 N に対し,

$$\frac{1}{r+1} = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n r^n + \frac{(-1)^{N+1} r^{N+1}}{r+1}$$

となることを示せ.

(3) 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

の値を求めよ.

(岐阜大 2015)　　(m20152601)

0.183 α を実数とする. 正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & \alpha \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して以下の問に答えよ.

(1) A の行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(2) 行列 A が固有値 1 をもつような α の値を求めよ.

(3) A が正則にならないような α の値を求めよ. また, そのときの A の階数（ランク）を求めよ.

(岐阜大 2015)　　(m20152602)

0.184 $x-y$ 平面上の 2 つの曲線 $y=f(x)=a-\cos 2x$ と $y=g(x)=2\sqrt{2}\sin x$ に関する以下の問いに答えよ．ただし，a は定数である．

(1) $f(x)$ と $g(x)$ の導関数 $f'(x)$ と $g'(x)$ を求めよ．

(2) $f'(x)=g'(x)$ となる x を求めよ．ただし，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(3) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において接するとき，a の値を求めよ．

(4) (3) のように 2 つの曲線が接するとき，$x \geqq 0$ かつ (3) の接点までの範囲で y 軸と 2 つの曲線が囲む面積を求めよ．

(豊橋技科大 2015)　　(m20152701)

0.185 次の行列 A, B に関して，以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の逆行列を求めよ．

(2) 行列 B の最小固有値およびそれに対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ．

(3) 行列 B^2 の固有値をすべて求めよ．

(4) 行列 B^5 の固有値をすべて求めよ．

(豊橋技科大 2015)　　(m20152702)

0.186 N 人に呼びかけて行事を実施する．この行事は，ある日時に N 人のうちの n 人以上が参加できる場合に実施できるとする．呼びかけられた人が参加できる確率は，行事を実施する日時によらず p である．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $p=\dfrac{1}{3}$, $n=2$, $N=3$ のとき，ある日時に行事が実施できる確率を求めよ．

(2) 行事を実施する日時として 2 つの候補を設定する．$p=\dfrac{1}{3}$, $n=2$, $N=3$ のとき，いずれの日時においても行事が実施できない確率を求めよ．

(3) 行事を実施する日時の候補数を k とする．$n=1$ のとき，少なくとも 1 回は行事が実施できる確率を N, p, k を用いて表せ．

(豊橋技科大 2015)　　(m20152703)

0.187 行列 $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ に関して，以下の設問に答えよ．

(1) A の固有値 λ と固有ベクトルを求めよ．

(2) A^m（m は自然数）を求めよ．

(名古屋大 2015)　　(m20152801)

0.188 (1) 常微分方程式 $y''+6y'+5y=5x$ の一般解を求めよ．

(2) 常微分方程式 $y''+\dfrac{x-1}{x}y'-\dfrac{1}{x}y=xe^{-x}$ について

(i) この微分方程式の右辺を 0 とした同伴方程式の基本解の 1 つが $y_1=e^{-x}$ であることを示せ．

(ii) 微分方程式の一般解を $y=ue^{-x}$ とおいて解け．ただし，u は x の関数である．

(名古屋大 2015)　　(m20152802)

0.189　3 次元空間内において，平行でない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を考える．以下の設問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のいずれにも垂直な単位ベクトルを e_X，$\boldsymbol{a}$ と平行な単位ベクトルを e_Y，e_X と e_Y のいずれにも垂直な単位ベクトルを e_Z とし，e_X，e_Y，e_Z を基本ベクトルとする新たな直交座標系を考える．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を用いて e_X，e_Y，e_Z を表せ．ただし，e_X，e_Y，e_Z はこの順に右手系をなすものとする．

(2) 設問 (1) で求めた e_X，e_Y，e_Z を基本ベクトルとする直交座標系における $\boldsymbol{b}$ の成分 $(b_X,\ b_Y,\ b_Z)$ を求めよ．

(3) ある直交座標系において $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}=(1,2,1)$，$\boldsymbol{b}=(0,1,1)$ と成分表示されるものとする．この直交座標系の xy 平面上において放物線 $\boldsymbol{p}=(x,y,z)=(t,t^2,0)$ を考える．ただし，t は実数とする．放物線 $\boldsymbol{p}$ を e_X，e_Y，e_Z を基本ベクトルとする直交座標系の成分で表せ．ただし，これら 2 つの直交座標系の原点は互いに一致するものとする．

(名古屋大 2015)　　(m20152803)

0.190　(1) x の関数に関する定積分 I_1 を，次のように x を s に変換して計算する場合を考える．

$$I_1=\int_0^1 \frac{1}{x^2+a^2}\,dx=\int_0^\beta s\,ds$$

ただし，$0<a<1$ とする．このとき，x を s の関数として表し，積分の上限 β を求めよ．

(2) 設問 (1) の変数変換を用いて，次の定積分 I_2 の計算を考える．

$$I_2=\int_0^1 \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,dx=\int_0^\beta f(s)\,ds$$

このとき $f(s)$ を求め，$f(s)$ が $0\leq s\leq \beta$ において，極大値をただ 1 つ持つことを示せ．

(名古屋大 2015)　　(m20152804)

0.191　$\log(1+x)$ のマクローリン級数展開を利用して $\log(3+3x-6x^2)$ のマクローリン級数展開を求めよ．（収束する範囲は求めなくてよい.）

(名古屋工業大 2015)　　(m20152901)

0.192　不定積分 $I=\displaystyle\int \frac{-x+2}{x^3+1}dx$ を求めよ．

(名古屋工業大 2015)　　(m20152902)

0.193　$x^2-4xy+2y^3+6=0$ で定まる陰関数 $y=y(x)$ の極値を求めよ．

(名古屋工業大 2015)　　(m20152903)

0.194　重積分 $I=\displaystyle\iint_D xdxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq\ 2x,\ y\geqq\ x-1\right\}$ を求めよ．

(名古屋工業大 2015)　　(m20152904)

0.195　空間内の直線 $x-6=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z-4}{3}$ を含み，点 $(7,8,10)$ を通る平面の方程式を求めよ．

(名古屋工業大 2015)　　(m20152905)

0.196　行列式 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix}$ を因数分解せよ．

(名古屋工業大 2015)　　(m20152906)

0.197 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ は対角化可能か否か判定せよ．

(名古屋工業大 2015)　　(m20152907)

0.198 平面内で $ax^2+2xy+y^2=1$ を表す曲線が双曲線となるような実数 a の範囲を求めよ．

(名古屋工業大 2015)　　(m20152908)

0.199 (1) $y=f(x)$ と 2 直線 $x=a$, $x=b$ と x 軸で囲まれる面積は，次式の定積分の定義により求めることができる．

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\triangle x$$

ただし，$f(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続とし，$\triangle x=(b-a)/n$, $x_k=a+k\triangle x$ とする．上記の積分の定義を用いて，$\displaystyle\int_0^1 xdx$ を求めなさい．ただし，導出過程も示すこと．

(2) 問 (1) の定積分の定義を用いて，
極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ を求めなさい．

(三重大 2015)　　(m20153101)

0.200 x_1, x_2, x_3 に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1-x_2+x_3=2 \\ \alpha x_1+x_2=\beta \quad (\alpha,\ \beta\text{は実定数}) \end{cases}$$

について，以下の問に答えなさい．

(1) 連立方程式を行列 A, $\boldsymbol{b}$ を用いて $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ と書くとき，行列 A, $\boldsymbol{b}$ を求めなさい，
ただし，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ である．

(2) $\alpha=1$, $\beta=3$ のとき，A^{-1} を求め，それを利用して連立方程式の解 $\boldsymbol{x}$ を求めなさい．

(3) 任意の α, β について $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解が存在するかどうかを調べ，存在する場合にはその解を求めなさい．

(三重大 2015)　　(m20153102)

0.201 次の行列 A の固有値，固有ベクトルおよび固有ベクトル間の角度を求めなさい．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(三重大 2015)　　(m20153103)

0.202 以下の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$　ただし $|x|<a,\ a>0$　　(4) $\displaystyle\int \sinh x\,dx$

(三重大 2015)　　(m20153104)

0.203 次の関数の x に関する導関数 y' を求めよ.

(1) $y = x^3 e^{-2x}$　　(2) $y = x \log_e \dfrac{1}{x}$　　(3) $y = x^{\sin x}$

(三重大 2015)　　(m20153105)

0.204 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int xe^{-2x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{b}{\sqrt{b^2 - x^2}}\,dx$　（ ここで b は $b \neq 0$ の実数であり，$|x| < |b|$ ）

(三重大 2015)　　(m20153106)

0.205 次の点 P は，t の値が変化するとどのような曲線，あるいは直線上を動くか，数式およびグラフで示せ.

(1) 放物線 $y = x^2 + 2tx + 1$ の頂点 P

(2) 円 $x^2 + y^2 - 2tx + 2(2t-1)y + 5t^2 - 4t - 8 = 0$ の中心 P

(三重大 2015)　　(m20153107)

0.206 A と B の二人がサイコロを交互に振り最初に 2〜m $(1 \leq m \leq 5)$ のいずれかの目を出した方を勝ちとするゲームを行う．A が最初にサイコロを振る場合について，以下の問に答えなさい．ただし，A が n 回目にサイコロを振ったときに A の勝ちが決まる確率を $P(m, n)$ とする.

(1) $P(2, 1)$ を求めよ.

(2) $P(2, 2)$ を求めよ.

(3) $P(m, n)$ を m と n を用いて表せ.

(4) $m = 2$ のとき，A が勝つ確率を求めよ.

(三重大 2015)　　(m20153108)

0.207 次の連立方程式を行列を用いて解け．ただし，a は定数とする.

(1) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x + 5y = -1 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 7x - 5y = 11 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} a^2x + 2y = 2a \\ ax \quad + y = 2 \end{cases}$

(三重大 2015)　　(m20153109)

0.208 以下の関数を微分せよ．ただし，m, σ は正の定数である.

(1) $y = \exp\left[-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$　　(2) $y = \tan^{-1} x^2$

(奈良女子大 2015)　　(m20153201)

0.209 次の積分を求めよ．ただし，a は正の定数，n は正の整数である.

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} r^3 \exp\left(-ar^2\right) dr\ 2$　　(1) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^n x \cos x\,dx$

(奈良女子大 2015)　　(m20153202)

0.210 以下の微分方程式を考える.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots（ア）$$

ただし，μ, ω は正の定数である．以下の問に答えよ.

(1) $x(t) \propto \exp(-at)$ の形の解を考える．$x(t)$ が式（ア）の解となる a の値を，μ と ω を用いて表せ.

(2) $a = a_R \pm ia_I$ のとき，式（ア）の解は振動しながら減衰する．このとき μ と ω が満たす不等式を答えよ．ただし，a_R と a_I は実数で，$i = \sqrt{-1}$ である.

(3) 前問 (2) の場合に，初期条件が $x(0)=0$, $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}=1$ であるときの 式（ア）の解を求め，a_R と a_I を用いて表せ．

(奈良女子大 2015)　　(m20153203)

0.211 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, $r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ の時，以下の量を計算せよ．ただし，$r\neq 0$ とする．

(1) ∇r^n　(2) $\nabla\times\ r^n\boldsymbol{r}$　(3) $\nabla\cdot\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)$　(4) $\nabla\left(\dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\right)$　(5) $\nabla f(\boldsymbol{r})$

ここで，∇ は以下で定義する微分演算子であり，

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$f(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{r}$ の任意の関数，$\boldsymbol{p}$ は定ベクトル，n は定数である．

(奈良女子大 2015)　　(m20153204)

0.212 次の行列 A に関する以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ただし，a および b は実数であり，$b\neq 0$ とする．

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) 行列 A の固有値を求めよ，

(3) 前問で得られた固有値に対する固有ベクトルを求めよ．なお，固有ベクトルは規格化すること．

(4) 適切な直交行列を使って，行列 A を対角化せよ．

(奈良女子大 2015)　　(m20153205)

0.213 ベクトル

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

に対して，次の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ は一次独立となることを示せ．

(2) a を実数とするとき，3 つのベクトル $a\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_3$, $-\boldsymbol{v}_1+a\boldsymbol{v}_3$, $a\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$ が一次従属となるような a の値をすべて求めよ．

(奈良女子大 2015)　　(m20153206)

0.214 関数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $(-\infty<x<\infty)$ に対して，次の問に答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次導関数を求めよ．

(奈良女子大 2015)　　(m20153207)

0.215 $xy-$ 平面上の曲線

$$C: y=\log(1+x^2)\ \ (x\geqq\ 0)$$

および C 上の点 $(3,\ \log 10)$ における C の接線 ℓ に対して，次の問に答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C の概形をかけ．

(3) 曲線 C，接線 ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(奈良女子大 2015)　　(m20153208)

0.216 次の微分方程式について，(　) 内の条件を満たす解を求めよ．

(1) $x+y\dfrac{dy}{dx}=0$　　($x=0$ のとき $y=2$)

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+y}{y}$　　($x=1$ のとき $y=1$)

(京都大 2015)　　(m20153301)

0.217 次の文章の（あ）〜（え）に適当な数式を入れよ．

ある容積 V の室内の空気には粒子状の汚染物が含まれており，換気を行って汚染物の濃度（単位体積あたりの粒子数）を下げることにした．時刻 t における濃度を $C(t)$ とし，単位時間あたり一定の体積 Q の室内の空気を，汚染物が含まない空気に入れ換えるとすれば，時刻 t から微小時間 δt 後の時刻 $t+\delta t$ までの間に排出される粒子数は $\boxed{\text{（あ）}}$ となる．その結果，濃度は $C(t)$ から $C(t+\delta t)$ に変化した．ただし，室内の濃度は常に空間的に一様であり，換気を開始してからの汚染物の発生はなかったものとする．上記の関係を式で表すと

$$C(t+\delta t)=\boxed{\text{（い）}}$$

である．$\delta t\to 0$ の極限を考えることにより，濃度 $C(t)$ に関する微分方程式

$$\boxed{\text{（う）}}$$

を得る．この微分方程式の解は

$$C(t)=\boxed{\text{（え）}}$$

である．ただし，換気を開始した瞬間を時刻 $t=0$ とし，その時の濃度を C_0 とする．

(京都大 2015)　　(m20153302)

0.218 ある部屋の照明器具を n 台 ($n\geq 1$) 同時に設置した．この照明器具は，1 台の器具について 1 個のランプを使用する．これらの照明器具については，設置後 1 年ごとに定期点検を行い，正常に作動しているランプはそのまま使い続け，ランプに故障が発見されれば正常に作動する新品と交換することにしている．また，定期点検の間で故障しても，ランプは次の定期点検まで交換しないものとする．更に，照明器具本体は故障しないものとし，照明器具を設置したときはすべてのランプが正常に作動する新品であったものとする．定期点検時に正常に作動していたのでそのまま使い続けたランプが次の定期点検時に故障している確率を P_{old} ($P_{old}<1$)，照明器具設置時や定期点検でのランプ交換時に取り付けた新品のランプが次の定期点検時に故障している確率を P_{new} ($P_{new}<1$) とする．このとき，(1)〜(4) に答えよ．

(1) この部屋にある 1 台の照明器具について，設置後 m 年目 ($m\geq 1$) の定期点検でこの照明器具のランプが故障している確率 P_m を求めよ．

(2) (1) の照明器具に対して，この維持管理を長期間続けると P_m は一定値 $\overline{P}$ に近づくという．$\overline{P}$ を P_{new}，P_{old} を用いて表せ．

(3) 十分長期間にわたって照明器具の維持管理を行った結果，この部屋に設置されている n 台の照明器具のそれぞれの P_m は，$m>M$ に対しては (2) で求めた一定値 $\overline{P}$ に等しいとみなしてよいものとする．ここに，M はある正の整数である．これら n 台の照明器具について，設置後 $M+1$ 年目から $M+\ell$ 年目 ($\ell\geq 1$) までの定期点検で取り替えたランプの個数の合計がちょうど i 個 ($i\geq 0$) である確率を求めよ．なお，解答は $\overline{P}$ を用いてもよい．

(4) (3) の n 台の照明器具について，設置後 $M+1$ 年目から $M+\ell$ 年目までの定期点検で取り替えるランプの個数の合計の期待値を求めよ．

(京都大 2015)　　(m20153303)

0.219 A, B, C, D は各々$n\times\ n$ 実行列であり，D は正則であるとする．また，M は

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

として定義する $2n\times\ 2n$ 実行列である．M が正則であるとき，次の (1)〜(3) に答えよ．

(1)
$$\begin{pmatrix} I & F \\ 0 & I \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} I & 0 \\ G & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$
を満たす $n\times\ n$ 実行列 F, G, H を A, B, C, D を用いて表せ．ここに，I は $n\times\ n$ 単位行列，0 は $n\times\ n$ ゼロ行列である．

(2) (1) で求めた行列 H は正則であることを示せ．

(3) M^{-1} を A, B, C, D を用いて表せ．

(京都大 2015)　　(m20153304)

0.220 実数のパラメータ θ に依存する行列 $A(\theta)$ が

$$A(\theta)=\begin{pmatrix} 1-\dfrac{2}{3}\cos^2\theta & -\dfrac{2}{3}\cos\theta\sin\theta \\ -\dfrac{2}{3}\cos\theta\sin\theta & 1-\dfrac{2}{3}\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

で与えられている．$\mathbb{R}^2$ の点 $\boldsymbol{x}$ をデカルト座標系 $O-x_1x_2$ を用いて $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2)$ と表す．これらを用いて，集合 $\Omega(\theta)$ を

$$\Omega(\theta)=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\cdot A(\theta)\}\boldsymbol{x}\leq 1\}$$

と定義する．ここに，$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2$ に対して

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{2}x_iy_i$$

である．このとき，次の (1)〜(4) に答えよ．

(1) $A(\theta)$ のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化して単位ベクトルとせよ．

(2) $\Omega(\theta)$ の概形を描け．

(3) $\Omega(0)\cap\Omega(\pi/2)$ の面積を求めよ．

(4) $\displaystyle\bigcup_{0\leq\theta\leq\pi/2}\Omega(\theta)$ を図示し，その面積を求めよ．ここに，$\boldsymbol{x}\in\displaystyle\bigcup_{0\leq\theta\leq\pi/2}\Omega(\theta)$ とは，$0\leq\theta_0\leq\pi/2$ なる θ_0 があって，$\boldsymbol{x}\in\Omega(\theta_0)$ となることである．

(京都大 2015)　　(m20153305)

0.221 (1) 3 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) n を自然数とする．3 次正方行列 $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ に対して，B^n を求めよ．

(京都工芸繊維大 2015)　　(m20153401)

0.222　関数 $f(x,y)=(2x+1)e^{-(x^2+y^2)}$ について，次の問いに答えよ．

(1) xyz 空間の曲面 $z=f(x,y)$ の，点 $(0,0,1)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2015)　　(m20153402)

0.223　xy 平面の領域

$$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq\ x\leqq\ 2,\ 0\leqq\ y\leqq\ x^2\right\}$$

に対して．重積分

$$I=\iint_D\sqrt{x^3+1}\,dxdy$$

の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2015)　　(m20153403)

0.224　微分方程式

$$y''+4y'+4y=0$$

の解 $y=y(x)$ のうちで，$y(0)=0$ を満たし，かつ x が実数全体を動くときの最大値が 2 であるものを求めよ．

(京都工芸繊維大 2015)　　(m20153404)

0.225　関数 $f(x,y)=\dfrac{x+2y}{x^2+2y^2+1}$ について以下の問いに答えよ．

(1) 座標平面全体において $f(x,y)$ が極大になる点と極大値，極小になる点と極小値を求めよ．

(2) 領域 $D\,:\,0\leqq\ x\leqq\ 1,\ y\geqq\ -x$ において $f(x,y)$ が最小になる点と最小値を求めよ．

(大阪大 2015)　　(m20153501)

0.226　曲線 $C\,:\,y=u(x)$ 上の点 (x,y) における接線が y 切片 $2xy^2$ をもち，かつ，曲線 C が点 $\left(1,\ \dfrac{1}{3}\right)$ を通るとき，関数 $u(x)$ を求めよ．

(大阪大 2015)　　(m20153502)

0.227　ベクトル $\boldsymbol{p}=(p_x,\ p_y,\ p_z)$，$\boldsymbol{q}=(q_x,\ q_y,\ q_z)$ に対して，$\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$ の内積，外積をそれぞれ $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{p}\times\ \boldsymbol{q}$ と表す．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{A}=(A_x,\ A_y,\ A_z)$，$\boldsymbol{B}=(B_x,\ B_y,\ B_z)$，$\boldsymbol{C}=(C_x,\ C_y,\ C_z)$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$A\cdot(B\times\ C)=B\cdot(C\times\ A)=C\cdot(A\times\ B)$$

(2) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}=(4,3,5)$，$\boldsymbol{b}=(3,1,4)$，$\boldsymbol{c}=(8,3,2)$ が作る平行六面体の体積を求めよ．

(3) 空間内に直交座標系をとる．$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ をそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルとする．

$$\boldsymbol{e}_r=\cos u\,\cos v\,\boldsymbol{i}+\sin u\,\cos v\,\boldsymbol{j}+\sin v\,\boldsymbol{k}$$

とおく．正の定数 R に対して，原点を中心とした半径 R の球面 S は，次の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ で表せる．

$$\boldsymbol{r}=R\mathbf{e}_r,\ \ 0\leqq\ u\leqq\ 2\pi,\ \ -\frac{\pi}{2}\leqq\ v\leqq\frac{\pi}{2}$$

球面 S 上の各点 P における外向き法線ベクトルが，点 P の位置ベクトルと同じ向きをもつように S の向きを定める．このとき，ベクトル $\boldsymbol{F} = \dfrac{u}{R}\boldsymbol{e}_r$ に対して，S における次の面積分を求めよ．

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot dS$$

(大阪大 2015)　　(m20153503)

0.228　以下のの問いに答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位であり，a, b は $a > b > 0$ を満たす定数とする．

(1)　次の式で表される曲線 C を複素平面上に図示せよ．

$$C : z = z(t) = a \cos t + i\, b \sin t \qquad (0 \leqq\ t \leqq\ 2\pi)$$

(2)　(1) で与えられた曲線 C に沿う次の積分の値を求めよ．

$$\int_C \frac{1}{z} dx$$

(3)　次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt$$

(大阪大 2015)　　(m20153504)

0.229　実数 x に対し $y = \sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ と定義すると $\sinh x$ は逆関数をもつ．そこで逆関数を $\mathrm{sh}^{-1}(x)$ と表す．以下の設問に答えよ．

(1)　$\mathrm{sh}^{-1}(x)$ を求めよ．

(2)　正の実数 a について　$S(a) = \frac{1}{a}\int_0^a \mathrm{sh}^{-1}(x)dx$　と定義する．$S(a)$ を求めよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{a\to 0} S(a)$ を求めよ．

(4)　$\displaystyle\lim_{a\to\infty} \{S(a) - \log a\}$ を求めよ．

(大阪大 2015)　　(m20153505)

0.230　行列の対角化に関する以下の設問に答えよ．

(1)　次の対称行列 A を直交行列によって対角化せよ．ただし，a は実定数である．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

(2)　次の行列 B が正則行列によって対角化できるための実定数 b, c の必要十分条件を求めよ．また，対角化出来る場合は対角化せよ．

$$B = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

(大阪大 2015)　　(m20153506)

0.231　コンピュータがウイルスに感染し，ウイルス対策ソフトがウイルスを駆除する確率について，次のようなモデルを用いて考える．

- 初期状態でコンピュータはどのウイルスにも感染していない．
- コンピュータは毎朝，確率 $p(0 < p < 1)$ で新たなウイルスに感染する．
- コンピュータが感染している場合，ウイルス対策ソフトが毎夕に駆除を試みる．駆除が成功すると，その時点で感染しているすべてのウイルスが駆除される．ただし，駆除は確率 $q(0 \leq q \leq 1)$ で失敗する．

なお，コンピュータがウイルスに感染した場合やウイルスの駆除に成功あるいは失敗した場合でも，以降の感染確率 p と駆除失敗確率 q に一切影響を与えないものとする．

このとき，以下の設問に答えよ．

(1) コンピュータが $n(n \geq 1)$ 日目の終わりにウイルスに感染している確率を $p(n)$ とする．

(a) $P(1)$ を求めよ．

(b) $P(2)$ を求めよ．

(c) $P(n)$ を求めよ．

(2) n 日目の終わりまでに一度も感染しない確率を求めよ．

(3) 1 日目に感染し，n 日目の終わりまでに一度も駆除に成功しない確率を求めよ．

(4) $i(1 \leq i \leq n)$ 日目に初めて感染し，n 日目の終わりまでに一度も駆除に成功しない確率を求めよ．

(大阪大 2015) (m20153507)

0.232 実係数行列

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ -1 & 0 & -a \\ a & -a & a^2-1 \end{pmatrix}$$

について次の問に答えよ．

(1) M の固有値 λ と固有空間 $W(\lambda\,;M)$ を求めよ．

(2) 固有空間 $W(\lambda\,;M)$ の正規直交基底を求めよ．

(神戸大 2015) (m20153801)

0.233 $\mathbb{R}^3$ の部分集合 L を

$$L = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \right\}$$

とおく．次の問に答えよ．

(1) L を含む最小の $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間 V の基底と次元を求めよ．

(2) V の直交補空間を求めよ．

(神戸大 2015) (m20153802)

0.234 実係数行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+t^2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

について，次の問に答えよ．

(1) A^2，A^3，A^4 を求めよ．

(2)
$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$$

を $B_n = x_nE + y_nA$ とするとき，

$$B = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)E + \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)A$$

を求めよ．ここで E は単位行列を表す．

(3) $B = E$ を満たすような t を求めよ．

(神戸大 2015) (m20153803)

0.235 領域 $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 < x^2 + y^2 < 4,\ x + y > 0\right\}$ 上での積分

$$\iint_D \frac{x \log(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dxdy$$

を計算せよ．

(神戸大 2015) (m20153804)

0.236 正の実数 x に対し $f(x) = x^{x^x}$ と定義する．$f'(x)$ を計算せよ．

(神戸大 2015) (m20153805)

0.237 未知関数 $y = y(x)$ に関する以下の各微分方程式に対し，その一般解を求めよ．
ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

(1) $2y'' - 5y' + 2y = 0$, (2) $2y'' - 5y' + 2y = e^x$,

(神戸大 2015) (m20153806)

0.238 実数 $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$f_n(x) = \min_{k \in \mathbb{Z}} \left| x - \frac{k}{2^n} \right|$$

と定義する．$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合である．次の問に答えよ．

(1) 関数 f_0, f_1, f_2 のグラフの概形を書け．

(2) 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して級数

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \qquad (*)$$

は収束することを示せ．

(3) $(*)$ で与えられる $x \in \mathbb{R}$ の関数 $S(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを示せ．

(神戸大 2015) (m20153807)

0.239 開区間 $(-1, 1)$ 上で定義されたなめらかな関数 $f(x)$ を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = f(0) + f'(0)x + \displaystyle\int_0^x (x - t) f''(t) dt$ を示せ．

(2) $f(x) = (1 + x)^{1/3}$ のとき，

$$\left| \int_0^x (x - t) f''(t) dt \right| \leqq \frac{x^2}{9} \qquad (x \geqq 0)$$

が成り立つことを示せ．

(3) $7^3 = 343$ に注意して，$(345)^{1/3}$ の値を小数第 3 位まで求めよ．

(岡山大 2015) (m20154001)

0.240 (1) 不等式 $0 \leqq t - \log(1 + t) \leqq \dfrac{t^2}{2}$ $(t \geqq 0)$ が成り立つことを示せ．

(2) 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

は $K = 1$ のときに発散し，$k = 2$ のとき収束することを示せ．

(3) 全ての $x > 0$ に対して，級数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

は発散することを示せ.

(4) 全ての $x \geqq 0$ に対して，級数

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\log\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right\}^2$$

は収束することを示せ.

(岡山大 2015)　　(m20154002)

0.241 $\mathbb{R}^4$ 上の線形変換 f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ で定める．ただし，A は次で与えられる行列とする.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の階数（ランク）を求めよ.

(2) 写像 f の像 $\mathrm{Im}(f)$ の基底を一組求めよ.

(3) 写像 f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の次元を求めよ.

(4) $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$ であるか判定せよ.

(岡山大 2015)　　(m20154003)

0.242 3 次正方行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad B = {}^tAA$$

により与えられる．ここで，${}^tA$ は A の転置行列である．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) A および B の行列式を計算せよ.

(2) $P^{-1}BP$ が対角行列となるような直交行列 P を一つ求めよ.

(3) $B = C^2$ となる対称行列 C を求めよ.

(4) C は正則行列であり，AC^{-1} は直交行列であることを示せ.

(岡山大 2015)　　(m20154004)

0.243 $2\times\ 2$ 行列 A は，固有値 1 に属する固有ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ と 固有値 4 に属する固有ベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を持つとする．また，$2\times\ 2$ 行列 B を $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ により定義する．以下の問いに答えよ.

(1) $2\times\ 2$ 行列 P で $A = PBP^{-1}$ が成り立つようなものをひとつ見つけよ．（答だけで良い.）

(2) 行列 A を求めよ.

(3) $2\times\ 2$ 行列 X で $X^2 = B$ となるようなものを全て求めよ.

(4) $2\times\ 2$ 行列 Y で $Y^2 = A$ となるようなものはいくつあるか．また，そのような Y をひとつ見つけよ.

(5) $2\times\ 2$ 行列 Z で $Z^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるようなものを全て求めよ.

(広島大 2015)　　(m20154101)

0.244 (1) 広義積分 $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ の値を求めよ.

(2) $J=\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{x}$ とおく．J を求めよ.

(3) 定数 $C>0$ と $R>0$ が存在して $x\geq R$ ならば $\log(1+x^2)<C\sqrt{x}$ となることを示せ.

(4) 広義積分 $K=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\log(1+x^2)}{x^2}dx$ の値を求めよ.

(広島大 2015)　　(m20154102)

0.245 $a\in\mathbb{R}$ に対し

$$f\Bigg(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\Bigg)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

で定義される $\mathbb{R}^4$ の線形変換 f を考える．以下の問いに答えよ.

(1) f の像および核の次元を求めよ.

(2) $a=0$ のとき，f の逆写像に対応する行列を求めよ.

(3) 次の基底に関する f の表現行列を求めよ.

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

(広島大 2015)　　(m20154103)

0.246 $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{4}{a_n+4}$ で定義される数列について，以下の問いに答えよ.

(1) 任意の自然数 n に対して，$\dfrac{4}{5}\leq a_n\leq 1$ を示せ.

(2) $b_n=a_{n+1}-a_n$ とする．級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ が収束することを示せ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示し，極限値を求めよ.

(広島大 2015)　　(m20154104)

0.247 (1) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0), \\ 0 & (x=0), \end{cases}$ とする.

(a) $f(x)$ が $\mathbb{R}$ で微分可能であることを示せ.

(b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が $x=0$ で連続であるか否か理由もつけて答えよ.

(2) $g(x)$ は閉区間 $I\subset\mathbb{R}$ 上の微分可能な関数とし，$a,\ b\in I$ は $a<b$ を満たすとする.

(a) $g'(a)<0<g'(b)$ とする．$g(x)$ は $a<\xi<b$ を満たすある $\xi\in\mathbb{R}$ で閉区間 $[a,\ b]$ での最小値をとることを示せ．また $g'(\xi)$ を求めよ.

(b) $g'(a)<k<g'(b)$ を満たす任意の $k\in\mathbb{R}$ に対して，$g'(\eta)=k,\ a<\eta<b$ を満たす $\eta\in\mathbb{R}$ が存在することを示せ.

(c) $g'(x)$ が I で狭義単調増加であるならば，$g'(x)$ は I で連続であることを示せ.

(広島大 2015)　　(m20154105)

0.248　次の微分方程式の一般解を求めなさい.

$$9\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+y=2e^x$$

(山口大 2015)　　(m20154301)

0.249　以下に示す行列 A について，行列式 $|A|$ の値を求めなさい．さらに逆行列 A^{-1} の $(1,1)$ 成分を求めなさい.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 4 & 3 & 0\\ 2 & 5 & -3\end{pmatrix}$$

(山口大 2015)　　(m20154302)

0.250　下に示す関数 y の最大値および最小値を求めなさい．また，そのときの θ の値を求めなさい.

$$y=\cos^2\theta+\sin\theta \qquad (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

(山口大 2015)　　(m20154303)

0.251　次の不定積分を求めなさい.　$\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+5x+6}$

(山口大 2015)　　(m20154304)

0.252　次の問いに答えよ.

(1)　$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，　$B=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ とする．B が A の逆行列となるような a を求めよ.

(2)　$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$，　$B=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & \frac{1}{2} & c\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ とする．B が A の逆行列となるような a, b, c を求めよ.

(3)　$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(徳島大 2015)　　(m20154401)

0.253　$f(x)=x\log\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$　$(x>0)$ について，次の問いに答えよ.

(1)　$\alpha=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ とする．α を求めよ.

(2)　(1) で求めた α に対して，$\beta=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\Big(f(x)-\alpha x\Big)$ とする.

$t=\dfrac{1}{x}$ とおくと，$x\to\infty$ のとき $t\to+0$ であることを利用して，β を求めよ.

(3)　(1),(2) で求めた α, β に対して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(\alpha x+\beta)}{\frac{1}{x}}$ を求めよ.

(徳島大 2015)　　(m20154402)

0.254 $D = \{(x, y) : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \geqq 1\}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $u = x + y,\ v = \dfrac{y}{x+y}$ とおく．x, y を u, v の式で表せ．また，行列式 $J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 v \sin(\pi v) dv$ を求めよ．

(3) $f(x, y) = \dfrac{y}{x+y} e^{-(x+y)} \sin\left(\dfrac{\pi y}{x+y}\right)$ に対して，$I = \displaystyle\iint_D f(x, y) dxdy$ を求めよ．ここで，(1) の変換により $\displaystyle\iint_D f(x, y) dxdy = \int_0^1 dv \int_1^\infty f\bigl(x(u, v),\ y(u, v)\bigr) |J(u, v)| du$ となることを用いてよい．

(徳島大 2015)　　(m20154403)

0.255 (1) $f(x) = \log(1 + x^2)$ とする．$f''(x)$ を求めよ．

(2) $y = y(x)$ が微分方程式 $y'' - 2y' + y = 0$ を満たしている．このとき，$u = e^{-x} y$ とおいて，u が満たす微分方程式を求めよ．また，この u の微分方程式の一般解を求めよ．

(3) 微分方程式 $y'' - 2y' + y = \dfrac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} e^x$ の一般解を求めよ．

(徳島大 2015)　　(m20154404)

0.256 次の問いに答えよ．

(1) 実数 s に対して，不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{s + x} dx$ を求めよ．

(2) 正の整数 n と正の実数 t に対して　$f_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t + \frac{k}{n}}$　とおく．
t を固定したとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(t)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた極限を $f(t)$ とおく．$\displaystyle\lim_{t\to+0} \frac{f(t)}{\log(1 - e^{-t})}$ を求めよ．

(高知大 2015)　　(m20154501)

0.257 平面内のある領域で定義された C^1 級の 2 変数関数 $f(x, y),\ g(x, y)$ が

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

を満たすとき，(f, g) はコーシー・リーマンの関係式を満たすという．次の問いに答えよ．

(1) $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$，$g(x, y) = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$　$\bigl((x, y) \neq (0, 0)\bigr)$ のとき，(f, g) はコーシー・リーマンの関係式を満たすことを示せ．

(2) $f(x, y) = x^2 - y^2$ のとき，(f, g) がコーシー・リーマンの関係式を満たすような x, y の多項式 $g(x, y)$ の例をひとつあげよ．

(3) 一般に (f, g) および (h, k) がコーシー・リーマンの関係式を満たすとき

$$p(x, y) = h\bigl(f(x, y),\ g(x, y)\bigr)$$

$$q(x, y) = k\bigl(f(x, y),\ g(x, y)\bigr)$$

とおくと，(p, q) も（これらの合成関数が意味ある範囲で）コーシー・リーマンの関係式を満たすことを示せ．

(高知大 2015)　　(m20154502)

0.258　4 次の正方行列 A が 2 次の正方行列 P, Q, R を用いて

$$A = \begin{pmatrix} P & Q \\ O_2 & R \end{pmatrix}$$

のように表されているとする．ただし，O_2 は $2\times\ 2$ の零行列である．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　A が正則なら，P, R も正則であることを示せ．

(2)　P, R は正則であるとする．このとき

$$A\begin{pmatrix} P^{-1} & X \\ O_2 & R^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \\ O_2 & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^{-1} & X \\ O_2 & R^{-1} \end{pmatrix}$$

が 4 次の単位行列と等しくなるような 2 次の正方行列 X を，P, Q, R を用いて書き表せ．

(3)　次の 4 次の正方行列 B の逆行列を求めよ．

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(高知大 2015)　　(m20154503)　　大 2015)

0.259　2 次の実正方行列全体の集合を $M_2(\mathbb{R})$ とおく．$M_2(\mathbb{R})$ は通常の和とスカラー倍で $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になっている．写像 $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ を

$$f(A) = {}^tA \quad \bigl(a \in M_2(\mathbb{R})\bigr)$$

で定める．ただし，${}^tA$ は A の転置行列を表す．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　f は一次写像であることを示せ．

(2)　$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は $M_2(\mathbb{R})$ の基底となることを示せ．

(3)　(2) の基底に関する f の表現行列を求めよ．

(高知大 2015)　　(m20154504)

0.260　不定積分 $\displaystyle\int \sin^3\theta d\theta$ を求めよ．

(高知大 2015)　　(m20154505)

0.261　x, y, z, w を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x\ +y\ +z\ +w = 2 \\ 3x \qquad -z \qquad = 0 \\ x + 2y + 3z + 2w = 2 \\ \qquad 2y \qquad -w = 0 \end{cases}$$

について，次の各問いに答えよ．

(1)　この連立 1 次方程式の係数行列 A の行列式 $|A|$ の値を求めよ．

(2) 以下の 4 次正方行列 A_x, A_y, A_z, A_w の行列式の値をそれぞれ求めよ.

$$A_x = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_w = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) クラーメルの公式を用いて，この連立 1 次方程式を解け.

(高知大 2015) (m20154506)

0.262 (1) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\cos\frac{4}{x}\right)^{x^2}$

(2) x の関数 $x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x$ を微分せよ.

(3) 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi$$

ただし，$\cos^{-1} x$ の値域は $[0,\ \pi]$ とする.

(愛媛大 2015) (m20154601)

0.263 (1) 次の不定積分を求めよ. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2-1)}dx$

(2) 次の広義積分を求めよ．ただし，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いてよい.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^\infty x^2e^{-x^2-2x-2}dx$

(愛媛大 2015) (m20154602)

0.264 $f(x,y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ とする．$y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ と $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ.

(愛媛大 2015) (m20154603)

0.265 $D = \left\{(x,y) \mid 1 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 4,\ 0 \leqq\ y \leqq\ x\right\}$ とするとき，次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D xydxdy$$

(愛媛大 2015) (m20154604)

0.266 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする，また，n を自然数とする.

次の行列の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

(i) E (ii) A (iii) A^n

(愛媛大 2015) (m20154605)

0.267 (1) C^1 級の関数 $z = f(x, y)$ と $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ の合成関数 $z = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ に対して

$$z_x{}^2 + z_y{}^2 = z_r{}^2 + \frac{1}{r^2} z_\theta{}^2$$

が成り立つことを示せ.

(2) $f(x, y) = 2x^4 - 8xy^3 + y^4 + 5$ とする．関数 $f(x, y) = 0$ で定まる陰関数 y の極値を求めよ.

(愛媛大 2015) (m20154606)

0.268 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 \sqrt{y^2 + y}\, dy dx$$

(愛媛大 2015) (m20154607)

0.269 a を正の整数とし，2 曲線 $C_1 : y = |x|e^{-x}$, $C_2 : y = ae^{-x}$ で囲まれた図形の面積を S とする.

(1) 関数 $y = |x|e^{-x}$ の増減，極値を調べ，グラフの概形をかけ.

(2) S を a を用いて表せ.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{S}{a^2}$ を求めよ.

(愛媛大 2015) (m20154608)

0.270 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．ただし，a は実数値とする.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の逆行列が存在するための a の必要十分条件を示せ.

(2) a が小問 (1) の条件を満たす時，A の逆行列を求めよ.

(3) A の固有値を求めよ.

(4) A が対角化可能であるための a の必要十分条件を示せ.

(九州大 2015) (m20154701)

0.271 (1) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

(2) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^{3x}$$

(3) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

(九州大 2015) (m20154702)

0.272 C を区間 $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で定義された媒介変数方程式 $x(t) = e^t \sin t,\ y(t) = e^t \cos t$ で表される xy 平面上の曲面とする.

(1) 導関数 $\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dy}{dx}$ をそれぞれ求めよ.

(2) 曲線 C の増減を調べ，xy 平面上にグラフをかけ．ただし，$e^{\frac{\pi}{4}} \fallingdotseq 2.19$ である．

(3) 曲線 C の x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(九州大 2015) (m20154703)

0.273 次の重積分を求めよ．

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{y}}\,dxdy \qquad D : x^2 + y^2 \leqq y$$

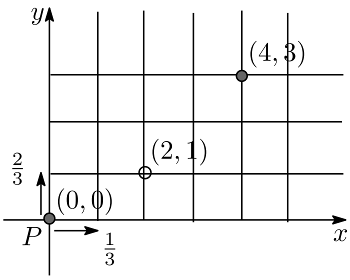
(九州大 2015) (m20154704)

0.274 点 P は原点 $(0,0)$ から開始し，平面格子点上を移動する．1 回の移動において，

P は確率 $\dfrac{1}{3}$ で x 軸の正の方向に 1 移動し，

確率 $\dfrac{2}{3}$ で y 軸の正の方向に 1 移動する．

以下の問いに答えよ．



(1) 点 P が通り得る，原点から点 $(4,3)$ に至る通り方の数を求めよ．

(2) 点 P が 7 回の移動後に点 $(4,3)$ に到達する確率を求めよ．

(3) 点 P が通り得る，原点から点 $(4,3)$ に至る通り方ののうち，
点 $(2,1)$ を通らない通り方の数を求めよ．

(4) 点 P が通り得る，原点から点 $(4,3)$ に至る通り方ののうち，点 P の座標 (x,y) が移動中常に $4y \leq 3x$ を満たす通り方の数を求めよ．

(5) 点 P の座標 (x,y) が 7 回の移動中常に $4y \leq 3x$ を満たすとき，点 P が 7 回の移動後に点 $(4,3)$ に到達する条件付き確率を求めよ．

(九州大 2015) (m20154705)

0.275 a を実数として，4 次正方行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a & 1 \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \\ 1 & a & 0 & a \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) A の行列式を求めよ．

(2) A の行列式が 0（ゼロ）となるような a の値をすべて求めよ．

(3) 前問 (2) の解のうちの最小値を a_0 とおく．(前問 (2) の解がただ一つの場合は，それを a_0 とおく．) $a = a_0$ の場合に，A の階数 (rank) を求めよ．

(九州大 2015) (m20154706)

0.276 a, b を実数として，3 次元空間（$xyz-$ 空間）内の 3 つの平面を次のように定義する．

平面 $S_1 = \left\{(x,y,z) \,|\, x + y + z = 1\right\}$

平面 $S_2 = \left\{(x,y,z) \,|\, 2x + 3y + 4z = 7\right\}$

平面 $S_3 = \left\{(x,y,z) \,|\, 4x + 6y + az = b\right\}$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $a=7$ とし，b は任意の値に固定する．3 つの平面の共通部分 $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ は 1 点となることを示せ．また，その点を b を用いて表せ.

(2) $a=8$ とする，このとき，3 つの平面の共通部分 $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ が空集合にならないための b に関する条件を求めよ．また，そのとき，この共通部分は「1 点」「直線」「平面」のいずれになるか，理由を述べて答えよ.

(九州大 2015)　　(m20154707)

0.277 a は $a \geqq 0$ なる定数とする．$0 < x \leqq 1$ において関数 $f(x)$ を次の式で定義する．　$f(x) = x^a \log x$

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$ を求めよ.

(2) $0 < x \leqq 1$ における $f(x)$ の増減表を与えよ．さらに，$f(x)$ の最大値および最小値が存在する場合には，それらを求めよ.

(3) 次の積分（広義積分）を求めよ．　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

(九州大 2015)　　(m20154708)

0.278 a, b, c は $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ なる定数とする．$x > 0,\ y > 0$ において 2 変数関数 $f(x, y)$ を次の式で定義する.

$$f(x, y) = \frac{cy}{ax^2 + by^2}$$

このとき，以下の各問いに答えよ.

(1) $f(x, y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ.

(2) $x > 0$ なる x を固定するとき，次の積分（広義積分）を求めよ.

$$\int_0^1 f(x, y)\,dy$$

(3) $y > 0$ なる y を固定するとき，次の積分（広義積分）を求めよ.

$$\int_0^\infty f(x, y)\,dx$$

(九州大 2015)　　(m20154709)

0.279 次の関数を微分せよ.

(1) $\ln \dfrac{1}{x^4 + 1}$　　(2) $y = e^{x^3} \cos x$

(佐賀大 2015)　　(m20154901)

0.280 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$　について，以下の積分を計算せよ．ただし，$\lambda > 0,\ x > 0$ である.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty x f(x) dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty x^2 f(x) dx$

(佐賀大 2015)　　(m20154902)

0.281 次の行列について，問いに答えよ．ただし E は単位行列，O はゼロ行列である.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) 行列 A が $A^2 - 2A - 3E = O$ を満たすことを示せ.

(3) (2) で求めた結果を使って（$A^4 = A^2 A^2$ の計算を行うことなく）A^4, A^{-1} を求めよ.

(佐賀大 2015)　　(m20154903)

0.282 次の関数 y の導関数 dy/dx を求めなさい.

(1) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d} \quad (ad-bc\neq 0)$　　(2) $y=\log_e\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

(3) $y=e^x\left(x^2+1\right)$　　(4) $y=2^{\sin x}$

(佐賀大 2015)　　(m20154904)

0.283 次の関数 z の偏導関数 $\partial z/\partial x$ を求めなさい.

(1) $z=\sin xy$　　(2) $z=x^y+y^x$

(佐賀大 2015)　　(m20154905)

0.284 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}$　　(2) $\displaystyle\int x\log_e x dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{e^x-1}{e^x+1}$　　(4) $\displaystyle\int \sin^3 x dx$

(佐賀大 2015)　　(m20154906)

0.285 次の無限級数の和を求めなさい.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+3^n}{5^n}$

(佐賀大 2015)　　(m20154907)

0.286 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2}{2y}$　　(2) $x\dfrac{dy}{dx}=y(1+xy)$

(佐賀大 2015)　　(m20154908)

0.287 次の関数をマクローリン展開して係数 a_n を求めよ.

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

(佐賀大 2015)　　(m20154909)

0.288 次の関数について答えよ.　　$f(x)=x-1-\log x \quad (x>0)$

(1) 関数の増減，凹凸，極値などを調べ，グラフの概形を描け.

(2) 極値をとる点の回りでテイラー展開をし，ゼロでない最低次の項を求めよ.

(3) 次の広義の積分を求めよ.　　$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$

(佐賀大 2015)　　(m20154910)

0.289 次の行列 A について以下の問いに答えよ.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&5&1\\3&1&1\end{pmatrix}$$

(1) A のすべての固有値を求めよ.

(2) ３つの固有値に対応する規格化された（長さが１の）固有ベクトルをそれぞれ求めよ.

(3) 行列 A を対角化した行列 A_d を求めよ.

(4) 次の関係式を満たす直交行列 O を求めよ．ここで，O^T は O の転置行列である．

$$A_d = O^T A O$$

(佐賀大 2015)　　(m20154911)

0.290　n 行 n 列の直交行列の行列式は ± 1 となることを示せ．

(佐賀大 2015)　　(m20154912)

0.291　2 次元 xy 平面を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 点 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ を原点の回りに角 ϕ だけ回転して $(x', y') = \big(r\cos(\theta+\phi),\ r\sin(\theta+\phi)\big)$ に移すときの回転行列 $R(\phi)$ を求めよ．

(2) $\Delta\phi$ が十分小さいとき，$R(\phi)$ が次のように表されることを示せ．

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\phi \\ \Delta\phi & 1 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2015)　　(m20154913)

0.292　次の 2 重積分を 2 つの方法を使って計算せよ．

$$\iint_D y dx dy\,, \qquad D = \{x^2 + y^2 \leq a^2,\ y \geq o \quad (a > 0)\}$$

(1) 逐次積分（累次積分）を使って計算せよ．

(2) 2 次元極座標に変換して計算せよ．

(佐賀大 2015)　　(m20154914)

0.293　関数 $f(x, y) = x^3 - 6xy + y^3$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ および $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ を満たす (x, y) を求めよ．

(3) (2) で求めた (x, y) について，$f(x, y)$ が極大値か，極小値か，あるいは極値ではないか示せ．
また，極値である場合はその値を求めよ．

(佐賀大 2015)　　(m20154915)

0.294　関数 $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}$ を満たす係数 A, B, C, D を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を求めよ．

(佐賀大 2015)　　(m20154916)

0.295　次の行列 M と列ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ について，以下の問いに答えよ．

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 7 & -3 & 15 \\ 2 & -4 & 11 & 8 \\ 1 & 7 & -8 & 4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$$

(1) 行列 M の階数を求めよ.

(2) 連立方程式 $M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつように a の値を定めよ.

(3) (2) の条件のもとで, 連立方程式 $M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を求めよ.

(佐賀大 2015)　　(m20154917)

0.296 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -5 & -4 & 2 \\ -3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 行列式 $\det A$ を求めよ.

(2) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(4) 行列 A は対角化可能かどうか理由を述べて答えよ.

(佐賀大 2015)　　(m20154918)

0.297 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-3x}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$

(佐賀大 2015)　　(m20154919)

0.298 ある町の人口 x の増加率が, 各時刻 t での人口 x に比例し, さらに, 人口の飽和数を A として, 各時点での人口との差 $A - x$ にも比例するものとする. 以下の問いに答えよ.

(1) 人口 x を微分方程式で表せ.

(2) 上記の微分方程式を解け. ただし, 人口の初期値を x_0 とする.

(佐賀大 2015)　　(m20154920)

0.299 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ とするとき, 以下の問いに答えよ

(1) $AX = 0$ を満たす 2 次正方行列 X をすべて求めよ.

(2) $AX = XA = 0$ を満たす X をすべて求めよ.

(佐賀大 2015)　　(m20154921)

0.300 次の行列式の値を計算せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(佐賀大 2015)　　(m20154922)

0.301 xy 平面上の原点回りの回転角 -45°, 60°の 1 次変換を ，それぞれ f, g とする. 次の問いに答えよ.

(1) 合成関数 $g \circ f$ の行列を求めよ.

(2) 点 $(1, 1)$ を合成関数 $g \circ f$ で写像した点を求めよ.

(佐賀大 2015)　　(m20154923)

0.302 次の行列が直交行列となるように，a, b, c を決めよ．

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & b & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ c & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2015)　　(m20154924)

0.303 ベクトル $\boldsymbol{x}(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$ に，次の関係があるとする．

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n)$$

ただし，$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$， $\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ である．

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(2) $\boldsymbol{x}(n)$ を求めなさい．

(3) $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}(n)$ を求めなさい．

(熊本大 2015)　　(m20155201)

0.304 $S = \int_0^\pi (x - a\cos x - b)^2 dx$ とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $A = \int_0^\pi x\cos x dx$， $B = \int_0^\pi \cos^2 x dx$ をそれぞれ求めなさい．

(2) S を最小とする a と b を求めなさい．

(熊本大 2015)　　(m20155202)

0.305 次の各問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 2 つの複素数 $1-i$ と $(1-i)^2$ を複素数平面上に図示せよ．

(2) $(1-i)^5$ を計算し，$x+yi$ の形（x, y は実数）で表せ．

(宮崎大 2015)　　(m20155301)

0.306 連立一次方程式

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

について，次の各問いに答えよ．

(1) この連立一次方程式を，行列 A を用いて $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表したときの A を求めよ．ただし，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{b}$ はベクトルであり，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．

(2) この連立一次方程式を解け．

(宮崎大 2015)　　(m20155302)

0.307 2 つの 2 変数関数

$$f(x,y) = x^3 + 2x^2y - 4x + y \ ,$$
$$g(x,y) = e^{-x^2-y^1}$$

について，次の各問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, $g_x(x,y)$, $g_y(x,y)$ と $(x,y)=(0,0)$ における値 $f(0,0)$, $g(0,0)$, そして $(x,y)=(0,0)$ における偏微分係数 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$, $g_x(0,0)$, $g_y(0,0)$ を求めよ.

(2) $z=f(x,y)$, $z=g(x,y)$ で定義される空間内の 2 つの曲面上の点 $(x,y,z)=\big(0,0,f(0,0)\big)$, $\big(0,0,g(0,0)\big)$ における接平面の方程式をそれぞれ求めよ.
ただし，曲面 $z=h(x,y)$ 上の点 $(x,y,z)=\big(a,b,h(a,b)\big)$ における接平面の方程式は
$$z-h(a,b)=h_x(a,b)(x-a)+h_y(a,b)(y-b)$$
である.

(3) (2) で得られた 2 つの接平面が交わるならば，交わりの図形を表す方程式を求めよ．交わらないならばその理由を書け.

(宮崎大 2015)　　(m20155303)

0.308 重積分
$$I=\iint_D xy\,dxdy\,,\quad D=\left\{(x,y)\,|\,x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0,\ x^2+\frac{y^2}{4}\leqq\ 1\right\}$$
について，次の各問に答えよ.

(1) 値域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2015)　　(m20155304)

0.309 $y=y(x)$ に関する微分方程式
$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+3y}{3x-y}\qquad\cdots\cdots(*)$$
について，次の各問に答えよ.

(1) $y=xu$ とおいて，$(*)$ を $u=u(x)$ についての微分方程式に書き直せ.

(2) $(*)$ の一般解を求めよ．ただし，$\displaystyle\int\frac{1}{1+u^2}du=\tan^{-1}u+C$ （C は積分定数）を用いてもよい.

(宮崎大 2015)　　(m20155305)

0.310 以下の微分を計算せよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\left(1-xe^{-x^m/m}\right)$　（ただし，$m\neq 0$）

(鹿児島大 2015)　　(m20155401)

0.311 以下の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\log x}{x^2}dx$

(鹿児島大 2015)　　(m20155402)

0.312 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx}+2xy=0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+5y=0$

(3) $(1+2xy^2)dx+(1+2x^2y)dy{=}0$

(鹿児島大 2015)　　(m20155403)

0.313 直交座標系 $O-xyz$ において，点 $A(1,0,1)$ および点 $B(-2,2,0$ がある．以下の問いに答えよ.

(1) $\triangle OAB$ において $\angle AOB$ を求めよ．また，$\triangle OAB$ の面積 S を求めよ．

(2) 点 A，点 B を通る直線 ℓ の方程式を求めよ

(3) 原点 O を中心とする半径 R の球面：$x^2+y^2+z^2=R^2$ が直線 ℓ と点 Q で接するとき，半径 R ならびに点 Q の座標を求めよ．

(鹿児島大 2015)　　(m20155404)

0.314　下記の行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A を構成する三つの縦ベクトルは線形独立かどうかを調べよ．

(2) 直交座標系 $O-xy$ において，行列 A の各要素からなる三直線：$a_ix+b_iy=c_i \quad (i=1,2,3)$ の交点を求めよ．

(鹿児島大 2015)　　(m20155405)

0.315　次の微分を求めなさい．ただし，n は自然数である．　$\dfrac{d^n}{dx^n}\cos^2 xdx$

(鹿児島大 2015)　　(m20155406)

0.316　次の不定積分を求めなさい．

$$\int x^2\log xdx$$

(鹿児島大 2015)　　(m20155407)

0.317　直交座標系で $\overrightarrow{OP}=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$，$\overrightarrow{OQ}=\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ とする．ただし，$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ は互いに平行ではない．$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ はいずれも零ベクトルではない．

(1) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めなさい．

(2) $\triangle OPQ$ の面積 S を求めなさい．

(鹿児島大 2015)　　(m20155408)

0.318　次の行列式の値を求めなさい．

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 9 & 7 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

(鹿児島大 2015)　　(m20155409)

0.319　次のように行列 A が定義されている．A^6 を求めなさい．

$$A=\begin{pmatrix} -a & \dfrac{1}{2} \\ 2 & a \end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2015)　　(m20155410)

0.320　曲線 $y^2=-x$ と $\dfrac{y^2}{2}=-x-a$ とについて，以下の問いに答えなさい．ただし，$a>0$ であり，かつ，a は実数であるとする．

(1) 手書きでグラフを描きなさい．

(2) 2 本の曲線で囲まれた部分の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2015)　　(m20155411)

0.321 太陽光はあるガラスの板を 1 枚透過すると，その強さの 20%が失われる．太陽光の強さを元の 10%以上に保ちたい．このガラスを何枚まで重ねても良いか．以下の (1),(2) に答えよ．

(1) 重ねても良いガラスを何枚を求める式を答えよ．

(2) (1) の式の計算方法を説明し，その結果を答えよ．ただし，必要であれば $\log_{10} 0.8 = -0.1$ を用いよ．

(鹿児島大 2015)　　(m20155412)

0.322 同じ長さの白い棒と赤い棒を 6 本使用して図 1 のような正四面体をつくる．ただし，各辺が白い棒である確率は 1/3，赤い棒である確率は 2/3 とする．以下の (1),(2) に答えよ．

なお，計算結果を求める必要はない．

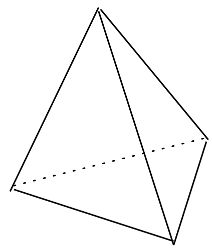


図 1 正四面体

(1) 6 辺が白い棒である確率を求める方法を説明せよ．式を答えても良い．

(2) 3 辺が白い棒である確率を求める方法を説明せよ．式を答えても良い．

(鹿児島大 2015)　　(m20155413)

0.323 (1) 次の完全微分方程式の一般解を求めよ．

(a) $(3x + 4y)dx + (4x - 5y)dy = 0$　　(b) $2xydx + (1 + x^2)dy = 0$

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0$　　(b) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - \dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$　　(c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$

(鹿児島大 2015)　　(m20155414)

0.324 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が，逆行列と転置行列の等しい直交行列（$A^T = A^{-1}$）であることを示せ．

(鹿児島大 2015)　　(m20155415)

0.325 行列を用いて，次の連立一次方程式を解け;

(1) $\begin{cases} 4x + 6y + z = 2 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ 3x - 2y + 5z = 8 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 4x + 6y + z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \\ 3x - 2y + 5z = 0 \end{cases}$

(鹿児島大 2015)　　(m20155416)

0.326 次の関数を x で微分しなさい．　$y = x^{\sin(x)}$

(鹿児島大 2015)　　(m20155417)

0.327 次の定積分を求めなさい．ただし，$m.n$ は自然数とする．

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx$$

(鹿児島大 2015)　　(m20155418)

0.328 次の常微分方程式の一般解を求めなさい．

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 15y = 0$$

(鹿児島大 2015)　　(m20155419)

0.329 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求め，行列 A を対角化しなさい．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

(鹿児島大 2015)　　(m20155420)

0.330 行列 $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ．

(室蘭工業大 2015)　　(m20155501)

0.331 $y = e^{-5x}\cos 5x$ を x で微分せよ．e は自然対数の底である．

(室蘭工業大 2015)　　(m20155502)

0.332 $y = \cos x \quad \left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

(室蘭工業大 2015)　　(m20155503)

0.333 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x(y^2+3)}{5y(x^2+2)}$ の一般解を求めよ．

(室蘭工業大 2015)　　(m20155504)

0.334 $x^2 - 2x + 2y^2 - 3 = 0$ を xy 平面へ図示せよ．

(室蘭工業大 2015)　　(m20155505)

0.335 不定積分 $I = \displaystyle\int e^{-px}\cos(kx)dx$ を求めよ．ただし，p と k はゼロでない定数とする．

(室蘭工業大 2015)　　(m20155506)

0.336 (1) から (3) の関数をそれぞれ微分せよ．

(1) $y = -\cos(2x)$　　(2) $y = e^{-3x^2}$　　(3) $y = \log(2x^2+1)$

(室蘭工業大 2015)　　(m20155507)

0.337 3 つの行列が，以下のように与えられているとする．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき，次の行列積をそれぞれ求めよ．

$$AB, \qquad CAB, \qquad BC$$

(室蘭工業大 2015)　　(m20155508)

0.338 3 つのベクトルが，以下のように与えられているとする．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

このとき，$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ を求めよ．さらに，次の行列式を計算せよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(室蘭工業大 2015)　　(m20155509)

0.339 次の微分を求めよ．　$\dfrac{de^{x\ln x}}{dx}$　　(室蘭工業大 2015)　　(m20155510)

0.340 以下の不定積分を求めよ．ただし，不定積分では積分定数は省略してよい．

(1) $\displaystyle\int \frac{3x+3}{x^2+x-2}$ (2) $\displaystyle\int xe^{2x}dx$

(室蘭工業大 2015) (m20155511)

0.341 2 変数関数 $z = z(x, y)$，$x(r, \theta) = r\cos\theta$，$y(r, \theta) = r\sin\theta$ の偏微分に関する以下の問いに答えよ．ただし，以下では，$r = 0$ の場合は除いて考える．

(1) 偏微分 $\dfrac{\partial z}{\partial r}$，$\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を用いて表せ．

(2) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$ となることを示せ．

(室蘭工業大 2015) (m20155512)

0.342 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $(x+1)^2\dfrac{dy(x)}{dx} = y(x)$ (2) $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2} + \dfrac{dy(x)}{dx} - 2y(x) = -2x^2$

(室蘭工業大 2015) (m20155513)

0.343 次の関数を微分せよ．

(1) $y = x^3\cos 3x$ (2) $y = \log\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ (3) $y = \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^3$

(室蘭工業大 2015) (m20155514)

0.344 行列に関する設問に答えよ．

(1) 下記に示す行列 A の固有値，固有ベクトルを全て求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 下記に示す行列 B の固有値，固有ベクトルを全て求めよ．

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2015) (m20155515)

0.345 以下の式で表される多変数関数 z について，次の問いに答えよ．

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

(1) z の定義域ならびに値域を求めよ．

(2) z の表す曲面の概形をグラフに表せ．

(3) この曲面上の $x = 2$, $y = 2$ に対応する点における接平面の方程式を求めよ．

(4) この曲面と座標平面で囲まれる図形の体積を V とする．V の値を求めるための二重積分の式，ならびにその積分領域 D を数式で表せ．
（積分計算を求める必要はない）

(香川大 2015) (m20155701)

0.346 以下に表す対称行列 $\boldsymbol{A}$ について，次の各問に答えよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ.

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルを求めよ.

(3) 直交行列 $\boldsymbol{P}$ を求めよ.

(4) 直交行列 $\boldsymbol{P}$ を用いて，行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ.

(香川大 2015)　　(m20155702)

0.347 平面座標系 $(o-xy)$ において，曲線 C を $y=x^2-4x+3$ とする．以下の設問に答えよ.

(1) 曲線 C と x 軸との交点の x 座標 $x_1,\ x_2\ \ (x_1>x_2)$ を求めよ.

(2) 曲線 C の頂点の座標 $(x_0,\ y_0)$ を求めよ.

(3) 曲線 C の概形を描き，頂点及び x 軸との交点を図示せよ.

(4) 点 $(x_1,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ.

(5) 曲線 C と x 軸の囲む面積を求めよ.

(島根大 2015)　　(m20155801)

0.348 次に示す連立方程式が与えられている時，以下の設問に答えよ．ただし，c は定数である.

$$\begin{aligned} x_1\ \ +x_2+cx_3&=5\\ x_1+2x_2\ \ +x_3&=1\\ 2x_1+5x_2+3x_3&=4 \end{aligned}$$

(1) 上の方程式を $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ のように表現する場合に，行列 A と $\boldsymbol{b}$ を示せ．ただし，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{bmatrix}$ とする.

(2) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(3) $c=0$ の時，以下の問いに答えよ.

(a) 行列 A の固有値をすべて求めよ.

(b) 問い (a) で求めた固有値の最大なものに関する固有ベクトルを求めよ.

(島根大 2015)　　(m20155802)

0.349 (1) 次の行列 A と行列 A' の階数を求めよ.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix},\quad A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5\\ 2 & -1 & 3 & 4a+13\\ 3 & 0 & 4 & a \end{pmatrix}$$

(2) 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=5\\ 2x-\ \ y+3z=4a+13\\ 3x\qquad +4z=a \end{cases}$$

の解が存在するための必要十分条件を (1) で求めた階数を用いて述べよ．さらに，解が存在するような a の値をすべて求めよ.

(3) (2) の連立 1 次方程式が解をもつとき，その一般解を求めよ.

(島根大 2015)　　(m20155803)

0.350 行列 $B = \begin{bmatrix} 2 & b & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 行列 B の余因子行列を求めよ.

(2) B が正則であるための b の条件を求めよ．さらに B が正則であるとき，B の逆行列を求めよ.

(島根大 2015)　　(m20155804)

0.351 次の問いにおいて V は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間，$f : V \to V$ は線形写像とする．$\mathbb{R}$ は実数全体を表すものとする.

(1) ベクトル空間 V の次元 $\dim(V)$ の定義を述べよ.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ をベクトル空間 V のベクトルとする．このとき，$f(\boldsymbol{v}_1), \cdots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が 1 次独立であるならば，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立であることを示せ.

(3) 不等式 $\dim(V) \leq \dim\bigl(f(V)\bigr) + \dim(\mathrm{Ker}\, f)$ を示せ．ただし，$\mathrm{Ker}\, f$ は f の核である.

(島根大 2015)　　(m20155805)

0.352 関数 $f(x) = \arcsin x \ \ (-1, x < 1,\ -\pi/2 < y < \pi/2)$ に関する次の問いに答えよ.

(1) 逆関数の微分法を用いて $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を証明せよ.

(2) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ.

(3) $f^{(n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次導関数とする．ただし $f^{(0)}(x) = f(x)$ である．このとき，0 以上の整数 n に対し，

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (1+2n)xf^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0$$

が成り立つことを証明せよ.

(4) $f(x) = \arcsin x$ のマクローリン展開を 5 次の項まで求めよ.

(島根大 2015)　　(m20155806)

0.353 $D = \bigl\{(x, y) : 5x^2 - 6xy + 5y^2 \leq 4,\ y \geq x\bigr\}$ とする.

(1) 変数変換 $x = u - \dfrac{v}{2},\ y = u + \dfrac{v}{2}$ を考える．この変換により，D にうつされる (u, v) 平面の領域を求めよ.

(2) $\displaystyle\iint_D \exp\left(\frac{5x^2 - 6xy + 5y^2}{4}\right) dxdy$ の値を求めよ．ただし $\exp(x) = e^x$ である.

(島根大 2015)　　(m20155807)

0.354 行列 A について以下の (1),(2) に答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式 $|A|$ を求めなさい.

(2) 行列 A の逆行列を求めなさい.

(首都大 2015)　　(m20155901)

0.355 ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ について以下の (1),(2) に答えよ.

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6-k \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6+k \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するための k の条件を求めなさい.

(2) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が線形独立であるための k の条件を求めなさい.

(首都大 2015) (m20155902)

0.356 行列 A について以下の (1),(2) に答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) 行列 A を対角化しなさい.

(首都大 2015) (m20155903)

0.357 次の関数を微分しなさい.

(1) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ (2) $f(x) = \sin^2(x^2+1)$

(首都大 2015) (m20155904)

0.358 次の微分方程式が完全形であることを示し，一般解を求めなさい.

$$(y-3x^2+2)dx + (x-y^2+2y)dy = 0$$

(首都大 2015) (m20155905)

0.359 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めなさい.

(首都大 2015) (m20155906)

0.360 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ を求めなさい.

(首都大 2015) (m20155907)

0.361 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int x \log x \, dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$

(首都大 2015) (m20155908)

0.362 (1) $|x|$ が 1 と比べて非常に小さいときに $\sqrt{1+x}$ を最もよく近似する x の 1 次式 $p_1(x)$ を求めよ.

(2) 上の $p_1(x)$ に対して，$x \geqq 0$ のとき $\left|\sqrt{1+x} - p_1(x)\right| \leqq \dfrac{x^2}{8}$ が成り立つことを示せ.

(滋賀県立大 2015) (m20156001)

0.363 (1) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} + x(y^2-1) = 0$ の一般解を求めよ.

(2) 上の微分方程式の解で $y(0) = -1$ を満たすものを求めよ.

(滋賀県立大 2015) (m20156002)

0.364 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ （ただし，a, b, c, d は実数）に対して，A が正則になるための条件を求め，

A の余因子行列を用いて A^{-1} を求めよ．

(滋賀県立大 2015)　　(m20156003)

0.365 D を $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1$ （a, b は正の実数）で与えられる領域とするとき，$x = ar\cos\theta$，$y = br\sin\theta$ とおくことにより，$\displaystyle\iint_D x^2 dxdy$ を求めよ．

(滋賀県立大 2015)　　(m20156004)

0.366 座標の定められた空間における平面と直線について，下の問いに答えよ．

(1) 直線 ℓ は 2 点 $(2, 1, 3)$ および $(0. -1, 1)$ を通り，直線 m は 2 点 $(4, 3, 1)$ および $(3, 0, 2)$ 通る．直線 ℓ を含み，直線 m に平行な平面 p の方程式を求めよ．計算経過も記入せよ．

(2) 点 $(1, -1, -3)$ を通り，(1) で求めた平面 p と直交する直線を k とする．平面 p と直線 k の交点を求めよ．計算経過も記入せよ．

(宇都宮大 2015)　　(m20156101)

0.367 次の行列 A について下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．計算経過も記入せよ．

(2) 行列 A が対角化可能か調べよ．対角化可能であるときは適当な正則行列を求め，行列 A を対角化せよ．計算経過も記入せよ．

(3) $A = B^3$ を満たす行列 B を 1 つ求めよ．計算経過も記入せよ．

(宇都宮大 2015)　　(m20156102)

0.368 平面上の，曲線 $y^2 = x - 1$，および，直線 $y = x - 3$，について下の問いに答えよ．

(1) これらの曲線と直線で囲まれた図形 S の面積を求めよ．計算経過も記入せよ．

(2) (1) の図形 S を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．計算経過も記入せよ．

(宇都宮大 2015)　　(m20156103)

0.369 平面上の閉領域 D を，

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq y,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$$

と定める．D における積分 $I = \displaystyle\int_D e^{y^2} dxdy$ について，下の問いに答えよ．

(1) 閉領域 D を図示せよ．途中の過程も記入せよ．

(2) 積分 I を，累次積分 $\displaystyle\int_a^b \left(\int_c^d e^{y^2} dx \right) dy$ の形で表し，a, b, c, d を求めよ．なお，a, b, c, d は定数とは限らない．計算経過も記入せよ．

(3) 積分 I の値を計算せよ．計算経過も記入せよ．

(宇都宮大 2015)　　(m20156104)

0.370 3次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ．

(3) 行列 A が対角化可能かどうか調べよ．さらに，対角化可能であれば行列 A を対角化せよ．

(はこだて未来大 2015)　　(m20156301)

0.371 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\left(\frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}\right)$ を求めよ．

(2) $0<x<\pi$ のおいて，$\displaystyle\frac{d}{dx}\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\mathrm{Sin}^{-1}\frac{3}{5}+\mathrm{Sin}^{-1}\frac{4}{5}$ を求めよ．
ただし．$\sin x$ の逆関数 $\mathrm{Sin}^{-1}x$ の値域は，$\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ とする．

(はこだて未来大 2015)　　(m20156302)

0.372 (1) $0<x<\pi$ において，$\displaystyle\int(\sin x)\log(\sin x)dx$ を求めよ．

(はこだて未来大 2015)　　(m20156303)

0.373 次の関数を x で微分しなさい．

(1) $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}+x+1$　　(2) $y=\dfrac{1}{4x+3}$　　(3) $y=x^2\sin\dfrac{1}{x}$　　(4) $y=\sqrt{1-x^2}$

(東京海洋大 2015)　　(m20156401)

0.374 次の不定積分，または定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int 2\sin x\cos x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^1(x^3+3x^2-x+1)\,dx$

(東京海洋大 2015)　　(m20156402)

0.375 (1) 曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ と直線 $x=2,\ x=5,\ y=0$ で囲まれる面積を求めなさい．

(2) 曲線 $y=\cos x$ の $-\dfrac{3}{4}\pi\le x\le\dfrac{3}{4}\pi$ の範囲と，直線 $y=0$ で囲まれる面積を求めなさい．

(東京海洋大 2015)　　(m20156403)

0.376 ある時間における細胞の増殖速度は，その時，生きている細胞数（または細胞濃度）に比例すると考える．以下の問いに答えなさい．

(1) 生きている細胞濃度を X[個$/m^3$]，時間を $t[h]$，比例定数を $k[1/h]$ として，次のアおよびイにそれぞれ適切な記号を入れて細胞の増殖をあらわす速度式を完成させなさい．

$$\frac{dX}{dt}=\boxed{\text{ア}}\ \boxed{\text{イ}}$$

(2) 時間 $t=0$ における細胞濃度を X_0[個$/m^3$] として，t 時間後のおける細胞濃度をあらわす式を導きなさい．ただし，導出過程も答案用紙に書きなさい．

(3) 比例定数を $k[1/h]$ は比増殖速度と呼ばれる．37℃ における大腸菌の比増殖速度 $k[1/h]$ が 2 であるとき，細胞濃度 X_0[個$/m^3$] が X_0 の 10 倍になる時間を求めなさい．ただし，温度は 37℃ で一定であるとし，$\log_e 10=2.302$ とする．

(東京海洋大 2015)　　(m20156404)

0.377 正方形 $ABCD$ を底面とした四角錐 O-$ABCD$ において，$OA=1,\ AB=2,\ BC=2$ とする．また，$OA\perp AB,\ OA\perp AD$ とする．このとき，次の各問いに答えなさい．

(1) 内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ と外積の大きさ $|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|$ を求めなさい．

(2) 線分 OD を $2:3$ に内分する点を E，線分 OC の中点を F とする．また，3 点 A, E, F を含む平面と辺 OB またはその延長と交わる点を G とする．このとき，$\overrightarrow{OG}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ を用いて表しなさい．

(3) 三角形 AEF の面積を求めなさい．

(和歌山大 2015)　　(m20156501)

0.378 次の関数の $x=\dfrac{\pi}{2}$ のまわりのテイラー展開を 3 次の項まで求めなさい．

$$f(x)=x\cos x$$

(和歌山大 2015)　　(m20156502)

0.379 次の値を求めなさい．　$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\exp(\cos x)}{\cos x}$

(和歌山大 2015)　　(m20156503)

0.380 次の 2 重積分を求めなさい．

$$\iint_D x\cos y\,dxdy\,,\quad D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\pi,\ x\le y\le 2x\}$$

(和歌山大 2015)　　(m20156504)

0.381 次の微分方程式の一般解を求めなさい．

(1) $\dfrac{dy}{dx}=y(y+1)$　　(2) $\dfrac{dy}{dx}-2y=e^{5x}$　　(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}-2y=6$

(和歌山大 2015)　　(m20156505)

0.382 (1) 複素数関数 $w=\dfrac{z}{1-z}$ について次の問いに答えなさい．

(a) $w=u+iv,\ z=x+iy$ とおくとき，u, v を x, y を用いて表しなさい．ただし，u, v, x, y は実数とする．

(b) コーシー・リーマンの方程式が成り立つことを示しなさい．

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C\frac{\sin z}{z^2-\frac{\pi^2}{4}}\,dz$ を求めなさい．ただし，積分路 C は $|z|=2$ とし，向きは反時計回りとする．

(和歌山大 2015)　　(m20156506)

0.383 (1) 正数 L に対し $\omega=\dfrac{2\pi}{L}$ と置く．整数 k に対し，次式が成り立つことを示しなさい．

$$\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}e^{ik\omega t}dt=\begin{cases}1 & (k=0)\\ 0 & (k\neq 0)\end{cases}$$

(2) (1) の条件のもと，自然数 n に対し，$D_n(t)=\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}e^{ik\omega t}$ とおく．このとき，以下の式が成立することを示しなさい．

(a) $\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}D_n(t)dt=1$

(b) $\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-\frac{l}{2}}^{0} D_n(t)dt = \dfrac{1}{L}\int_{0}^{\frac{l}{2}} D_n(t)dt = \dfrac{1}{2}$

(c) $D_n(t+L) = D_n(t)$

(d) $D_n(t) = \dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})\omega t)}{\sin(\frac{\omega}{2}t)}$

(和歌山大 2015)　　(m20156507)

0.384 1 つのサイコロを繰り返し投げて，同じ目が 2 回続けて出たら終了するゲームを行う，このとき，次の各問いに答えなさい.

(1) サイコロを投げる回数が k 回 $(k>0)$ になる確率を求めなさい,

(2) サイコロを投げる回数の期待値を求めなさい,

(3) ゲームの終了条件を「同じ目が 2 回続けて出るか，または n 回 $(n>0)$ 投げたら終了する」と変更した場合の，サイコロを投げる回数の期待値を求めなさい.

(和歌山大 2015)　　(m20156508)