[選択項目] 年度：2016 年

0.1 以下の微分方程式の一般解を求めよ．途中の計算手順についても，詳しく記述すること．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 2\left(y^2 + y\right)$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 10y = 9e^{-x}$

(北海道大 2016)　　(m20160101)

0.2 n 次正方行列に関する以下の設問に答えよ．

(1) 1 つの行または列の全ての成分が 0 であるとき，その行列式の値は 0 であることを示せ．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

(2) 次の行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式を求めよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 12 & 12 \\ -1 & 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

(3) $\boldsymbol{B}$ を n 次正方行列，$\boldsymbol{x}$ を n 次列ベクトルとする．$\overline{\boldsymbol{B}}^T = -\boldsymbol{B}$ のとき，$\overline{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ の値は 0 または純虚数であることを示せ．ここで，$\overline{\boldsymbol{B}}^T$ および $\overline{\boldsymbol{x}}^T$ はそれぞれ $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{x}$ の共役転置行列である．

(北海道大 2016)　　(m20160102)

0.3 周期 2π の周期関数　$f(x) = \dfrac{x^2}{\pi}$　$\left(-\pi \leq x \leq \pi\right)$　のフーリエ級数 $S[f]$ を求めよ．

(北海道大 2016)　　(m20160103)

0.4 一次関数 $f = \dfrac{z-i}{z+2}$ による，z 平面上の単位円 $|z| = 1$ の f 平面への写像を求めよ．
ここで，$i = \sqrt{-1}$ である．

(北海道大 2016)　　(m20160104)

0.5 $y = x^4 - 2x^3 + 1$ とする．$0 \leq x \leq 3$ のとき y の最大値，最小値を求めよ．

(北見工業大 2016)　　(m20160201)

0.6 $z = x\sin\left(xy^2\right)$ とする．偏導関数 z_x, z_y を求めよ．

(北見工業大 2016)　　(m20160202)

0.7 次の積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} 2x^3 e^{-x^2} dx$

(北見工業大 2016)　　(m20160203)

0.8 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ とする．ベクトル $\boldsymbol{a}$ をベクトル $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の一次結合 $h\boldsymbol{b} + k\boldsymbol{c}$ で表すとき，係数 h, k を求めよ

(北見工業大 2016)　　(m20160204)

0.9 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ とする．逆行列 A^{-1} を求めよ．

(北見工業大 2016)　　(m20160205)

0.10 3 次元空間上に存在する 3 点 $A(12,12,0)$, $B(0,12,12)$, $C(12,0,12)$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 3 点からなる三角形 ABC の重心 G の座標を求めなさい．

(2) 重心 G を中心とする半径 4 の球面の方程式を示しなさい．

(3) 上の (2) で求めた球面の半径が 4 から毎秒 2 で増加するとき，球面が原点 $O(0,0,0)$ に達するまでの時間を求めなさい．

(岩手大 2016)　　(m20160301)

0.11 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$ を考える．$B'=AB=\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $C=AC$ であるとき，次の問いに答えなさい

(1) a,b,c,d の値をそれぞれ求めなさい．

(2) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めなさい．

(3) $D=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ に対し $D'=\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}=AD$ であるとき，逆行列 A^{-1} を用いて u, v の値をそれぞれ求めなさい．

(4) 行列 A の固有値，および，それに属す固有ベクトルを求めなさい．ただし，固有ベクトルの大きさは 1 とする．

(岩手大 2016)　　(m20160302)

0.12 2 階微分方程式 $y''+3y'+2y=4x^2-14$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 上の微分方程式の特性方程式 $S^2+3S+2=0$ の解を求めなさい．

(2) 微分方程式 $y''+3y'+2y=4x^2-14$ の一般解を求めなさい．

(3) 上の (2) の微分方程式について，初期条件 $y(0)=1$, $y'(0)=-4$ を満たす特殊解を求めなさい．

(岩手大 2016)　　(m20160303)

0.13 2 つの曲線 $y=\cos 2x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$,　$y=\sin x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ とその曲線によって囲まれた図形 S について，次の問いに答えなさい．

(1) 2 つの曲線を図示し，また図形 S を斜線で図示しなさい．

(2) 2 つの曲線の交点の x 座標を求めなさい．

(3) 図形 S を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めなさい．

(岩手大 2016)　　(m20160304)

0.14 ベクトル $\boldsymbol{a}=(2,3)$, $\boldsymbol{p}=\frac{1}{2}(\sqrt{3},1)$ に対して，$\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{p}$ が $\boldsymbol{p}$ と直交するように定数 k を定めなさい．

(秋田大 2016)　　(m20160401)

0.15 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin(x-a)|dx$　(a は $0<a<\pi$の定数)　　(2) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$

(秋田大 2016)　　(m20160402)

0.16 $f(x,y)=x^3-3x+y^2$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ求めなさい．

(2) 点 $P(1,1)$ における $f(x,y)$ の $\boldsymbol{u}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ 方向の微分（$\boldsymbol{u}$ 方向の方向微分係数ともいう）を求めなさい.

(秋田大 2016)　　(m20160403)

0.17 行列

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の原点を通る直線で，次の性質を持つものを考える.

(性質) この直線上の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を，行列 A で変換した点 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ も，この直線上にある.

例えば,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (k \text{ は任意の実数})$$

と表される直線 l_1 は，このような直線の一つである．この性質を持つ，l_1 と異なる直線を全てあげなさい.

(秋田大 2016)　　(m20160404)

0.18 a,b,c を正の実数とするとき，以下の問いに答えよ．ただし，$a \neq 1,\ c \neq 1$ とする.

(1) $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ が成り立つことを示せ.

(2) 方程式 $\log_a x=2x$ の実数解が 1 つだけになるための a の条件を求めよ.

(東北大 2016)　　(m20160501)

0.19 領域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 1,\ \sqrt{2}x^2 \leqq y\right\}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 領域 D の面積 S を求めよ.

(2) 領域 D の重心の座標を求めよ．ここで，領域 D の重心の座標 $(\overline{x},\ \overline{y})$ は以下の式で表される.

$$(\overline{x},\ \overline{y})=\left(\frac{1}{S}\iint_D xdxdy\,,\ \frac{1}{S}\iint_D ydxdy\right) \qquad S：\text{領域 } D \text{ の面積}$$

(東北大 2016)　　(m20160502)

0.20 (1) 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ を求めよ．ただし，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とする.

$$a_1=1,\ \ a_{n+1}=-a_n+S_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(2) 次の数列が収束するとき，実数 x の範囲と数列の極限を求めよ.

$$\frac{(2x-1)^n}{3^n} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(3) ロピタルの定理を用いて，以下の極限を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

(東北大 2016)　　(m20160503)

0.21 次の対称行列 $\boldsymbol{A}$ およびベクトル $\boldsymbol{r}$ について以下の問に答えよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ． ただし，固有ベクトルの大きさを 1 とする．

(2) ベクトル $\boldsymbol{r}$ を回転行列 $\boldsymbol{R}$ によって角度 θ 回転させたものをベクトル $\boldsymbol{s}$ とする．$\theta = 30^\circ$とした場合の回転行列 $\boldsymbol{R}$ とベクトル $\boldsymbol{s}$ を求めよ．ただし，θ は反時計回りを正とする．

(3) 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = [\,1, 0\,]^t$, $\boldsymbol{e}_2 = [\,0, 1\,]^t$ を行列 $\boldsymbol{R}$ によってそれぞれ原点に対して反時計回りに角度 $\theta = 30$回転させたベクトルを $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$ とする．(2) で求めたベクトル $\boldsymbol{s}$ を $(\boldsymbol{e}'_1\ \ \boldsymbol{e}'_2)$ 座標系により表記したベクトル $\boldsymbol{s}'$ を求めよ．さらに $\boldsymbol{s}' = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{s}$ となる変換行列 $\boldsymbol{Q}$ を求めよ．

(東北大 2016)　　(m20160504)

0.22 V を実ベクトル空間とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) n 個の元 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \in V$ の中に同じものがあれば，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は一次従属であることを示せ．

(2) n 個の元の組 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n \in V$ は一次独立とし，$C = (c_{ij})_{ij}$ を n 次実正方行列，$\boldsymbol{a}_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\boldsymbol{b}_j$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とおく．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が一次独立であることの必要十分条件は C が正則行列であることを示せ．

(東北大 2016)　　(m20160505)

0.23 (1) 実正方行列が直交行列であることの定義を述べよ．

(2) 2 次の直交行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \quad (\theta : \text{実数})$$

の形であることを示せ．

(3) A を n 次直交行列とする．2 つのベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して， $A\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{w}$ の間の距離は，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ の間の距離に等しいことを示せ． ただし，距離はユークリット空間における標準的な距離とする．

(東北大 2016)　　(m20160506)

0.24 (1) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\right\}$ に対して重積分 $\displaystyle\iint_D xy^2 dxdy$ の値を求めよ．

(2) $V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leq y \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1\right\}$ の体積を求めよ．

(東北大 2016)　　(m20160507)

0.25 実数列 $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束することを示せ．

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ のある部分列 $\left\{a_{n(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して，$a_{n(k)} < \dfrac{1}{n(k)}$ が成り立つことを示せ．

(3) (2) において，「 $a_{n(k)} < \dfrac{1}{n(k)}$ 」を「 $\left|a_{n(k)}\right| < \dfrac{1}{n(k)}$ 」と置き換えても主張は成り立つか，もし成り立つならばそれを証明し，成り立たない場合は反例をあげよ．

(東北大 2016)　　(m20160508)

0.26 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が以下の条件 (i),(ii) を満たすとする．

(i) $f(0) = 0$　　(ii) $\left|x - y\right| \leq 1$ ならば $\left|f(x) - f(y)\right| \leq 1$ が成り立つ．

以下の問いに答えよ．

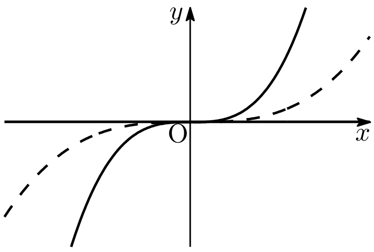
(1) $\left|f(1)\right| \leq 1$ を示せ．　　(2) $\left|f(1.5)\right| \leq 2$ を示せ．

(3) すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $\left|f(x)\right| \leq |x| + 1$ が成り立つことを示せ．

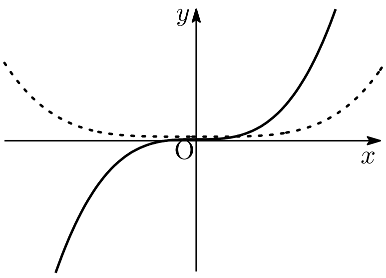
(東北大 2016)　　(m20160509)

0.27 以下の問いに答えよ．

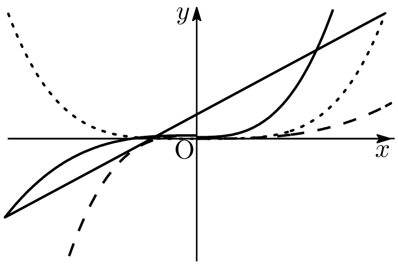
(1) 以下の図は $x = 0$ のまわりで $y = 20x^3 + 40x^4$ と $y = 1000x^5 + 2000x^7$ のグラフを同じ縮尺で重ね合わせて描いたものである（x 軸方向と y 軸方向の縮尺は異なることに注意せよ）．実線のグラフと破線のグラフがそれぞれどちらの多項式に対応しているか答えよ．



(2) $P(x) = a_k x^k + a_{k+1}x^{k+1} + \cdots + a_n x^n \quad (k \leq n)$ という形の多項式について，$m(P) = k$ と定めることにする．以下の図は $x = 0$ のまわりで 2 つの実数係数多項式のグラフを重ね合わせて描いたものである．実線のグラフに対応する $P(x)$ と点線のグラフに対応する $Q(x)$ について，$m(P)$ と $m(Q)$ の偶奇および大小の関係について述べよ．



(3) $x = 0$ のまわりで 3 つの実数係数多項式のグラフを重ね合わせて描いたとき，以下の図のような配置とはならないことを示せ．



(お茶の水女子大 2016)　　(m20160601)

0.28　以下ではすべての自然数 n に対して $\mathbb{R}^n$ の元は列ベクトル（縦ベクトル）で表されるものとする．以下の問いに答えよ．

(1)　a, b, c を実数とし $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ とする．$\mathbb{R}^3$ の部分空間 H を

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| ax + by + cx = 0 \right\}$$

で定める．このとき H の次元とその基底を求めよ．

(2)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

を実行列とする．A の階数が 2 であるための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix} \neq 0\,, \quad 1 \leq i \leq j \leq 3$$

となる自然数 i, j が存在することであることを示せ．

(3)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

を階数 2 の実行列とし，線形写像 $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $f_A(x) = Ax,\ x \in \mathbb{R}^3,$ で定める．このとき f_A の核の次元と基底を求めよ．

(4)

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

を実行列とし、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

とする．線形写像 $f_B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を $f_B(x) = Bx,\ x \in \mathbb{R}^4,$ で定める．このとき f_B の核の次元と基底を求めよ．

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160602)

0.29　次の行列 A について，A^2, A^3, A^4 を求めなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160603)

0.30 ある対称行列 F が直交行列 P によって対角行列 $F' = P^T F P$ へと変換された．ここで T は行列の転置を表す．以下の問に答えなさい．

(1) F のトレース（対角成分の和）はこの変換により不変であること，つまり $T_r\, F = T_r\, F'$ を証明しなさい．

(2) 行列 F が以下のように与えられたとき，P と F' を求めなさい．

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(3) 行列 F と F' のトレースを求めなさい．

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160604)

0.31 常微分方程式 $\dfrac{dN}{dt} = -\lambda N$（$\lambda$ は正の実数）を解きなさい．ただし初期条件を $t = 0$ で $N = N_0$ とすること．

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160605)

0.32 常微分方程式　$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4\dfrac{dx}{dt} + 25x = 0$　を解き，解の振る舞いの概要を説明しなさい．

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160606)

0.33 3 次元微分演算子 $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ に対して ∇r を求めなさい．

ただし $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である．

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160607)

0.34 次の関数を微分せよ．

(1) $y = x^x$　　(2) $y = \sin\bigl(\cos(x^2)\bigr)$

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160608)

0.35 逆正接関数について以下の問に答えよ. ただし値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする.

(1) $\tan^{-1} x + \tan^{-1}(a - x) = \dfrac{\pi}{4}$ が実数解をもつ a の範囲を求めよ.

(2) $\bigl(\tan^{-1} x\bigr)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$ を示せ.

(3) $\displaystyle\int \tan^{-1} x dx$ を求めよ.

(4) $\tan^{-1} x$ を x^{10} の項までマクローリン展開せよ.

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160609)

0.36 次の連立 1 次方程式が

(1) 解を持たない

(2) 無数に多くの解をもつ

ように，それぞれ実数 a の値を定めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -2 \\ a & -1 & 4 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160610)

0.37 次の行列 A, B について，それぞれ固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160611)

0.38 以下の関数の n 次導関数を求めよ．

$$y(x) = x^2 e^x$$

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160612)

0.39 以下の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $(x+3y)dx + (3x-y)dy = 0$　　(2) $y'' + 2y' - 3y = e^x$

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160613)

0.40 以下の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{e^x}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{\log x}{x-1}\right)$

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160614)

0.41 以下の 2 次正方行列について，固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

ただし，$a \neq 0,\ b \neq 0,\ a \neq b$ とし，a, b は実数とする．

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160615)

0.42 3 次元空間におけるデカルト座標系で表される，点 $O(0,0,0)$，点 $A(1,2,3)$，点 $B(-3,1,-2)$ について，以下を求めよ．

(1) $\angle AOB$ の大きさ　　(2) $\triangle AOB$ の面積

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160616)

0.43 微分方程式に関する以下の問いに答えよ; ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

(1) 次の定係数微分方程式

$$y'' - (a+2)y' + 2ay = f(x)$$

について以下の問いに答えよ．ただし，a は実数とする．

(a) $f(x) = 0$ のとき，一般解を求めよ．

(b) $f(x) = 5e^{-3x}$ かつ $a < 0$ のとき，一般解を求めよ．
ただし，e は自然対数の底とする．

(2) 次のオイラー型の微分方程式の一般解を求めよ．

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$$

(3) 次の連立微分方程式において，$y_1(0) = 4,\ y_2(0) = -3$ を満たす解を求めよ．

$$\begin{cases} y_1' + 2y_2' = 2y_1 + 5y_2 \\ 2y_1' - y_2' = 14y_1 + 5y_2 \end{cases}$$

(東京大 2016)　　(m20160701)

0.44　表が出る確率が p であるコイン投げを考える．このとき，以下の問いに答えよ．

ただし，p は，$0<p<1$ を満たすとする．

(1)　コイン投げを 5 回行う．

(a) 表，表，裏，裏，表の順に出る確率を求めよ．

(b) 表がちょうど 3 回出る確率を $f(p)$ とする．このとき，$f(p)$ を求めよ．

(c) (b) で求めた $f(p)$ を最大にする p を求めよ．

(2)　二人のプレイヤー A と B が，次のルールに従い，ゲームを行う．

ルール:コイン投げを 4 回行い，表が 3 回以上出た時は A の勝ち，2 回以下の時は B の勝ちとする．

(a) A の勝つ確率を $g(p)$ とする．このとき，$g(p)$ を求めよ．

(b) $g(p)=\dfrac{1}{2}$ となる p の値は，$\dfrac{3}{5}<p<\dfrac{2}{3}$ を満たすことを証明せよ．

(東京大 2016)　　(m20160702)

0.45　3 次元空間内の四面体 $ABCD$ について以下の問いに答えよ．

(1)　(a) 三角形 ABC の面積を S，三角形 ABC から頂点 D までの高さを h とする．このとき，四面体 $ABCD$ の体積 V を面積 S と高さ h を用いて表せ．なお導出過程も示せ．

(b) 頂点 A と頂点 B,C を結ぶベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}$ とする．このとき，三角形 ABC の面積 S をベクトル $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ を用いて表せ．なお導出過程も示せ．

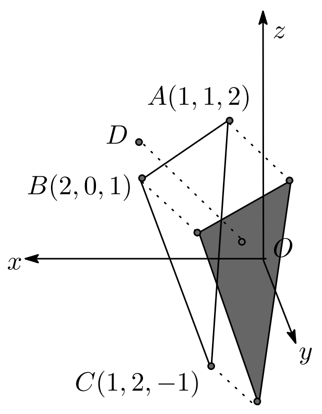
(c) 頂点 A と頂点 D を結ぶベクトルを $\boldsymbol{d}=\overrightarrow{AD}$ とするとき，四面体 $ABCD$ の体積 V をベクトル $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ を用いて表せ．なお導出過程も示せ．

(2)　下図を参照して, 以下の問いに答えよ．

(a) 3 次元空間内に x 軸，y 軸，z 軸からなる直交座標系を考え，頂点 $A(1,1,2)$，$B(2,0,1)$，$C(1,2,-1)$ からなる三角形 ABC と，ベクトル $(1,1,1)$ に垂直な原点 O を通る平面 P を考える．このとき三角形 ABC の，$(-1,-1,-1)$ 方向に無限遠から入射する平行光線 $\boldsymbol{R}$ による平面 P への投影図の面積を求めよ．

(b) 四面体 $ABCD$ の平行光線 $\boldsymbol{R}$ による平面 P への投影を考える．四面体 $ABCD$ が 0 でない体積を持ち，なおかつ頂点 D の投影が三角形 ABC の投影図に内包されるとき，頂点 D の座標が満たす必要条件を求めよ．

ただし，頂点 D の座標 $(d_x,\ d_y,\ d_z)$ は条件 $4d_x+3d_y+d_z-9>0$ を満たすとする．



図

(東京大 2016)　　(m20160703)

0.46 以下の問いに答えよ．i は虚数単位とする．また, z は複素数とする．

(1) $\sin z = 10$ を z について解け．

(2) i^i, 3^i それぞれについて実部と虚部を求めよ．

(3) ある周回経路 C に沿った複素平面上の周回積分

$$\oint_C \frac{1}{z^2+1}dz$$

を考える．経路 C の取り方によって積分値がどのように変化するか考えたい．極の配置を図示し，経路の例を 1 つずつ示しながらとりうる積分値を全て列挙せよ．

(4) z に関する関数

$$\frac{1}{z^2-3z+2}$$

の収束域 $1 < |z| < 2$，および $2 < |z|$ に対するローラン級数を求めよ．

(5) 実積分

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4}dx$$

を，留数の定理を用いて求めたい．適切な複素平面での積分路を定めて図示し，積分値を求めよ．

(東京大 2016)　　(m20160704)

0.47 3 次の正方行列 A の固有値が $-1,\ 1,\ 2$ であるとする．また，I を 3 次の単位行列とする．

(1) A の特性多項式 $\phi(x)$ を求めよ．

(2) A^3 および A^4 を，A^2 と A と I の線形和で表せ．

(3) $A^n = a_nA^2 + b_nA + c_nI$ と表せる．a_{n+1}，b_{n+1}，C_{n+1} を a_n，b_n，c_n を用いて表せ．ただし，n は 1 以上の整数である．

(4) a_n，b_n，c_n を求めよ．逆行列を求める以下の公式を用いてもよい．

公式：

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$ について，$\det P \neq 0$ のとき

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\begin{pmatrix} p_{22}p_{33} - p_{23}p_{32} & p_{13}p_{32} - p_{12}p_{33} & p_{12}p_{23} - p_{13}p_{22} \\ p_{23}p_{31} - p_{21}p_{33} & p_{11}p_{33} - p_{13}p_{31} & p_{13}p_{21} - p_{11}p_{23} \\ p_{21}p_{32} - p_{22}p_{31} & p_{12}p_{31} - p_{11}p_{32} & p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21} \end{pmatrix}$$

(東京大 2016)　　(m20160705)

0.48 a を実数とするとき，連立一次方程式

$$\begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ 2x + y + 2z + aw = 2 \\ 3x + y + 2z + aw = 2 \\ 2x + az + 2w = 1 \end{cases}$$

について次の問に答えよ．

(1) この方程式の係数行列の行列式の値を求めよ.

(2) この方程式を解け.

(東京工業大 2016)　　(m20160801)

0.49　2 変数関数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^4+y^4+2}$ の極値を全て求めよ.

(東京工業大 2016)　　(m20160802)

0.50　全微分可能な関数 $f(x,y,z)$ に対し，$w=f(r-s,\ s-t,\ t-r)$ とするとき，

$$\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial t}$$

を求めよ.

(東京工業大 2016)　　(m20160803)

0.51　次の重積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D e^{y^3}dxdy$,　$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq\ x\leqq\ 1,\ \sqrt{x}\leqq\ y\leqq\ 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xdxdy$,　$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq\ x\right\}$

(東京工業大 2016)　　(m20160804)

0.52　2 変数関数 $f(x,y)=3x^2y+xy^3-5xy$ の極値をすべて求めなさい．ただし，求めたすべての極値について極大値であるか極小値であるかを明記し，さらに極大値もしくは極小値をとる点 (x,y) も書きなさい.

(東京農工大 2016)　　(m20160901)

0.53　領域 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqq\ x,\ y\geqq\ 0\}$ における次の 2 重積分 I の値を求めなさい.

$$I=\iint_D x^2y\,dxdy$$

(東京農工大 2016)　　(m20160902)

0.54　$A=\begin{pmatrix}2&-1&-4\\-3&1&7\\-1&4&-5\end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-5\\t\\u\end{pmatrix}$ とする．ただし，t,u は定数とする.

(1) 未知数 x_1,x_2,x_3 に関する連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解をもつとき，u を t の式で表しなさい.

(2) u が (1) で求めた t の式で表されるとする．$t=9$ とした場合の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を解きなさい;

(東京農工大 2016)　　(m20160903)

0.55　x の関数 $y=y(x)$ についての微分方程式　$y''-y'-6y=6x+4e^{-x}$
の解のうち，$y(0)=0,\ y'(0)=0$ を満たすものを求めなさい.

(東京農工大 2016)　　(m20160904)

0.56　3 次正方行列 A と $\mathbb{R}^3$ 内の平面 P を次式で定義する.

$$A=\begin{bmatrix}6&-18&3\\2&-6&1\\4&-14&3\end{bmatrix},\qquad P=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ x-2y+z=4\right\}$$

さらに，線形写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$　$(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3)$ で定義する.

このとき，以下の問いに答えよ.

(1) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求めよ.

(2) $\mathrm{Im}\, f$ と P の共通部分 $l = (\mathrm{Im}\, f) \cap P$ は, $\mathbb{R}^3$ 内の直線とみなすことができる.
$\mathbb{R}^3$ 内の原点 O から直線 l へ垂線 OH を下ろすとき, 点 H の座標を求めよ.

(3) $\boldsymbol{x} \in P$ かつ $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を求めよ.

(電気通信大 2016)　　(m20161001)

0.57 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して, 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を次式で定義する.

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_2 \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$$

ただし, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i)$ は, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{v}_i$ の $\mathbb{R}^3$ における標準内積とする $(i = 1, 2)$.
さらに, W を $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^3$ の部分空間とし, 線形写像 $g : W \to W$ を

$$g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \qquad (f(\boldsymbol{x}) \in W)$$

で定義するとき, 以下の問いに答えよ.

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を求めよ.

(2) W の基底 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ に関する g の表現行列 A を求めよ.

(3) A の固有値をすべて求めよ.

(電気通信大 2016)　　(m20161002)

0.58 (1) $z = f(x, y)$ を C^2 級関数とし, $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ であるとする.

(a) z_u を z_x, z_y, u, v を用いて表せ.

(b) z_{uu} を z_x, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, u, v を用いて表せ.

(2) 関数 $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y) \quad \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2},\ 0 < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の極値を求めよ.

(電気通信大 2016)　　(m20161003)

0.59 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{x - y}{(x^2 - y^2)^2 + 1} dxdy$, $\quad D = \{(x, y) : 0 \leqq x + y \leqq 1,\ 0 \leqq x - y \leqq 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D x dxdy$, $\quad D = \{(x, y) : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x \leqq x^2 + y^2 \leqq 1\}$

(電気通信大 2016)　　(m20161004)

0.60 複素関数 $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2 + 1}$ に対して, 以下の各問いに答えよ. ただし, $i = \sqrt{-1}$ で, e は自然対数の底とする.

(1) $f(z)$ のすべての極を求め, 各極における留数を求めよ.

(2) $z = Re^{i\theta}$ $(R > 1,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi)$ のとき, 次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$|f(z)| \leqq \frac{1}{R^2 - 1}$$

(3) 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx$ を求めよ.

(電気通信大 2016)　　(m20161005)

0.61 次の行列 A に対して，多項式 $f(x)$ を $f(x) = \det(xE - A)$ で定義する．ただし，E は $3\times\ 3$ の単位行列とする．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値を求めよ．　(2) $f(A)$ を求めよ．　(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ を求めよ．

(横浜国立大 2016)　(m20161101)

0.62 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = y + e^x \sin x$　(2) $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\dfrac{dy}{dx} = 0$

(横浜国立大 2016)　(m20161102)

0.63 以下の 3 問から 2 問選択して解答せよ．3 問解答してはならない．

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ．　$y' = \dfrac{4x-2y}{2x-y-1}$

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ．　$y'' - y' + y = 0$

(3) 微分方程式　$xy' - y - x\log x = 0$　において，初期条件 $y(1) = 0$ を満たす特殊解を求めよ．

(横浜国立大 2016)　(m20161103)

0.64 (1) 次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(2) 次の行列のランクを求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

(3) 次の行列の逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(横浜国立大 2016)　(m20161104)

0.65 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\tan x}$$

(横浜国立大 2016)　(m20161105)

0.66 次の定積分を計算しなさい．

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 2x dx$$

(横浜国立大 2016)　(m20161106)

0.67 次の関数について，0 でない最初の 4 項までマクローリン展開せよ．

$x \sin 2x$

(横浜国立大 2016)　(m20161107)

0.68 (1) $x=0$ 近傍で次の近次式が成り立つように，定数 A_i $(i=0.1,2,3,4)$ を求めなさい.

$\cos(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4$

(2) 次の関数をテイラー展開しなさい.

$\log(x+1)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{x}$ の極限値を求めなさい.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{1+x^2}}$ の極限値を求めなさい.

(千葉大 2016) (m20161201)

0.69 次の行列 A, B について，以下の問に答えなさい.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&3\\1&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&4&3\\0&2&1\\1&6&4\end{pmatrix}$$

(1) 行列の基本変形を用いて，行列 A および行列 B の階数を求めなさい.

(2) 行列 A および行列 B が正則であるならば，逆行列を求めなさい.

(3) 行列 A を係数行列とした連立方程式 $\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&3\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\33\\10\end{pmatrix}$ を解きなさい.

(4) 行列 B を係数行列とした連立方程式 $\begin{pmatrix}1&4&3\\0&2&1\\1&6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ を解きなさい.

(千葉大 2016) (m20161202)

0.70 次の重積分に関して以下の問に答えなさい.

$$I=\iint_D\frac{x+y}{y^2}\sin(x+y)\,dxdy$$

$$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1\le y\le 2\,,\ 0\le x\le y\right\}$$

(1) 積分領域 D を $u=x+y,\ v=\dfrac{x}{y}$ の関係で (u,v) へ変数変換した場合の D に対応する積分領域を D' とする．$O-xy$ 平面での D，および，$O-uv$ 平面での D' を図示しなさい.

(2) 関数行列式（ヤコビアン）$J(x,y)=\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}&\dfrac{\partial v}{\partial x}\\\dfrac{\partial u}{\partial y}&\dfrac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}$ を求めなさい.

(3) 重積分 I の値を求めなさい.

(千葉大 2016) (m20161203)

0.71 次の微分方程式を解きなさい.

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+2y=\sin t$ 初期条件：$t=0,\ y=1,\ \dfrac{dy}{dt}=1+\sqrt{2}$

(2) $\dfrac{dy}{dx}+2xy=4xe^{x^2}$ の一般解を求めなさい.

(千葉大 2016) (m20161204)

0.72 以下の微分方程式を解き，x の関数 $f(x)$ を求めなさい．ただし，$f(0)=1,\ f'(0)=0$ とする．

$$\left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)^2+3\left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)-4=0$$

(千葉大 2016)　　(m20161205)

0.73 実数 $t \geq 0$，実数 $a>0$ について定義された関数 $f(t)=\sinh at$ に対して，以下の式で定義される関数 $F(s)$ を求めなさい．

$$F(s)=\int_o^\infty f(t)\exp(-st)\,dt$$

(千葉大 2016)　　(m20161206)

0.74 $(4\times\ 4)$ の正方行列 A の第 i 行第 j 列の要素 $\{a_{ij}\}$ が $a_{ij}=(-1)^{i+j}$ で与えられるとき，
行列 A の固有値を求めなさい．

(千葉大 2016)　　(m20161207)

0.75 n 次正方行列 A と B の交換子 $[A,B]$ を $AB-BA$ と定義する．次を示せ．
ただし O は零行列を表すものとする．

(1)　$[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=O$

(2)　A と B が交代行列ならば，$[A,B]$ も交代行列である．

(3)　A と $[A,B]$ が可換ならば，任意の正整数 n に対して $[A^n,B]=n[A,B]A^{n-1}$ である．

(筑波大 2016)　　(m20161301)

0.76 V は実係数の 4 次以下の多項式の全体

$$V=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \mid a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}\right\}$$

とする．V は $1,x,x^2,x^3$ を基底とする実ベクトル空間になることが知られている．
さて，線形変換 $T\ :\ V\to V$ を

$$(T_p)\,(x)=(1-x^2)\frac{d^2p}{dx^2}(x)-2x\frac{dp}{dx}(x)+12p(x)\ ,\quad p\in V$$

によって定義する．次の問いに答えよ．

(1)　V の基底 $1,x,x^2,x^3$ に対する T の表現行列を求めよ．

(2)　$\mathrm{rank}\,T$ を求めよ．

(3)　$\ker T$ を求めよ．

(筑波大 2016)　　(m20161302)

0.77 n は 1 以上の整数とする．2 変数関数

$$f(x,y)=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i-x)^2}{y}+n\log y \qquad (-\infty<x<\infty,\ y>0)$$

について，次の問いに答えよ．

(1) 等式

$$\sum_{i=1}^{n}(i-x)^2 = n(\mu - x)^2 + n\delta$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\mu = \dfrac{n+1}{2}$, $\delta = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i-\mu)^2}{n}$ である．

(2) $f(x,y)$ の最小値を求めよ．

(筑波大 2016)　　(m20161303)

0.78 次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D ye^{xy}dxdy$,　　$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}dxdy$,　　$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ 0 \leqq y \leqq x\}$

(筑波大 2016)　　(m20161304)

0.79 f を実数全体で定義された実数値関数とする．

(1) 「f は至るところ連続ある」という定義を述べよ．

(2) 「f は一様連続ある」という定義を述べよ．

(3) 関数 $f(x) = \sin x$ は一様連続であることを証明せよ．

(4) 関数 $f(x) = x^2$ は一様連続でないことを証明せよ．

(筑波大 2016)　　(m20161305)

0.80 関数 $f(x)$ が，$X = a$ の近傍で C^2 級の関数であり，$f''(a) \neq 0$ を満たすとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $f(a+h)$ に，Taylor の定理を適用して展開しなさい．条件下において，できるだけ高い次数の項まで展開すること．また，剰余項の表記には θ_1 $(0 < \theta_1 < 1)$ を用いること．

(2) $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$　$(0 < \theta < 1)$ において，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\theta = \frac{1}{2}$ となることを示しなさい．

(筑波大 2016)　　(m20161306)

0.81 曲線 $A : y = x \cdot e^x$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 曲線 A, x 軸 $(y = 0)$，そして $x = a$ $(a < 0)$ により囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{a\to -\infty} S(a)$ の値を求めなさい．

(筑波大 2016)　　(m20161307)

0.82 ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ は線形独立であるとする．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ で張られる空間の直交基底 $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ を求めなさい．

(2) 次の連立一次方程式が解を持つための条件を示し，その条件を満たすときの解 $\boldsymbol{x}$ を求めなさい．ここで，$\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ は (1) で求めた直交基底であり，$\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ および $\boldsymbol{x}$ は全て列ベクトルとする．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$$

(筑波大 2016)　　(m20161308)

0.83 $\mathbb{R}^3$ を 3 次元実ベクトル空間とし，次の 2 つの基底（横ベクトル表示）を考える．

$$E = \{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)\}$$

$$S = \{s_1 = (1,0,1),\ s_2 = (2,1,2),\ s_3 = (1,2,2)\}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) 基底 S から基底 E へ変換する行列 P を求めよ．

(2) $[\boldsymbol{v}]_E$ および $[\boldsymbol{v}]_S$ をベクトル $\boldsymbol{v}$ の基底 E および S による横ベクトル表示とする．
$[\boldsymbol{v}]_E = (1,3,5)$ であるとき，$[\boldsymbol{v}]_S$ を求めよ．

(3) A および B を $3\times\ 3$ の行列とする．任意の $[\boldsymbol{v}]_E$ に対して $[\boldsymbol{v}']_E$ が $[\boldsymbol{v}']_E = [\boldsymbol{v}]_E A$ により決められるとき，$[\boldsymbol{v}']_S = [\boldsymbol{v}]_S B$ となる行列 B を $P,\ P^{-1}$ および A を用いて表せ．

(筑波大 2016)　　(m20161309)

0.84 $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の独立な固有ベクトルをすべて求めよ．

(3) A は対角化可能であるかどうかを示せ．もし A が対角化可能ならば，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような P を求めよ．

(筑波大 2016)　　(m20161310)

0.85 関数 $f(x)$ が次式で与えられているとする．

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0)\ , \\ 0 & (x = 0)\ . \end{cases}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) $n = 2$ のとき，$x = 0$ において f は微分可能であるかを示せ．

(2) $n = 2$ のとき，$f'(x)$ は $x = 0$ で連続であるかどうかを示せ．

(3) $n = 3$ のとき，$f'(x)$ は $x = 0$ で連続であるかどうかを示せ．

(筑波大 2016)　　(m20161311)

0.86 関数 $f(x)$ と f の定義域に含まれる区間 $[0,1]$ を考える．

$$x_i = \frac{i}{n} \qquad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

で与えられる区間 $[0,1]$ の分割に対して，

$$I_k = (x_{k-1}, x_k] \qquad (k = 1, \cdots, n)$$

とし，次の和を定義する．

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sup_{x\in I_k} f(x)$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \inf_{x\in I_k} f(x)$$

この S_n, s_n がそれぞれ $n \to \infty$ において極限を持つとき,

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n,$$

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n$$

とする．$S = s$ ならば関数 f が区間 $[0,1]$ で積分可能であるといい,

$$S = s = \int_0^1 f(x)dx$$

と書く．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $f(x) = x$ とするとき，(a) S_n, s_n を求め，(b) f が $[0,1]$ 上で積分可能かどうかを示せ．

(2) 以下の関数 f が $[0,1]$ 上で積分可能かどうかを示せ．

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x\text{ が無理数}) \\ x & (x\text{ が有理数}) \end{cases}$$

ただし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ である．

(筑波大 2016)　　(m20161312)

0.87 確率 p で成功し，確率 $1-p$ で失敗する独立な実験を n 回繰り返す．X_i は i 回目の実験が成功したときに $X_i = 1$，失敗したときに $X_i = 0$ となる確率変数とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 「確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立である」ことの定義を述べよ．

(2) 確率変数 Y が確率 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ で値 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ をとるとき，その期待値を μ，分散を σ^2 とする．このとき任意の実数 λ に対して，「$|Y-\mu| > \lambda\sigma$ となる」確率 $P(|Y-\mu| > \lambda\sigma)$ は以下の不等式を満たすことを，分散 σ^2 の定義を変形することにより示せ．

$$P(|Y-\mu| > \lambda\sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

(3) (2) で得られた不等式を用いて，成功確率が 0.5 の独立な試行を n 回行った時，「成功割合が 40% 以上で，かつ 60% 以下となる」確率が 0.99 以上となるような n の下限（すなわち最低限必要な実験回数）を示せ．

(筑波大 2016)　　(m20161313)

0.88 確率変数 Z が x 以上になる確率を $P(Z \geq x)$ と書くとき，$0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす α に対して Z の $100(1-\alpha)$ パーセント点 z_α は

$$P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$$

で定義される．特に Z が標準正規分布に従うとき，z_α の具体的な値は次表で与えられる．

α	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
z_α	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

また，期待値 μ，分散 σ^2 が正規分布を $N(\mu, \sigma)$ で表すとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 期待値 μ，分散 σ^2 が未知の $N(\mu, \sigma)$ に従う母集団からとった n 個の標本に対して，標本平均と標本分散をそれぞれ $\overline{x}$ と s^2 とする．このとき，$\sqrt{n}\dfrac{(\overline{x}-\mu)}{s}$ は t 分布に従う．t 分布の $100(1-\alpha)$ パーセント点を $t_{n-1;\alpha}$ とするとき，μ の $100(1-\alpha)$ パーセント信頼区間を示せ．

(2) $N(\mu, \sigma)$ に従う母集団から大きさ 4 の標本を選んだところ，観測値は 12.7, 13.0, 13.3, 13.0 であったとする．以下の (a),(b) の場合に μ の 95% 信頼区間を求めよ．

(a) $\sigma^2 = 0.16$ であることがわかっている場合

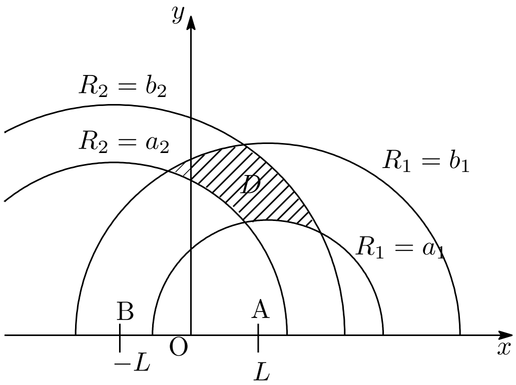
(b) σ^2 が未知である場合（ただし，$t_{n-1;\alpha}$ は z_α に等しいと仮定する）

(筑波大 2016)　　(m20161314)

0.89 xy 平面の $y > 0$ なる領域（上半面）の点 $P(x, y)$ に対して，点 $A(L, 0)$ および点 $B(-L, 0)$ からの距離の二乗

$$R_1 = (x-L)^2 + y^2\ ,\qquad R_2 = (x+L)^2 + y^2$$

を考える．ここで $L > 0$ とする．また，$f(x, y) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)$ とする．



(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) c をゼロでない定数とし，xy 平面の上半面において $f(x, y) = c$ で表される曲線を考える．この曲線上の任意の点 (x_0, y_0) における法線の方程式を求めよ．そして，その法線と x 軸との交点が c と L だけで決まることを示せ．

(3) a_1, a_2, b_1, b_2 を正の定数とし，$R_1 = a_1$ と $R_1 = b_1$ で指定される円がそれぞれ $R_2 = a_2$ と $R_2 = b_2$ で指定される円と交わる場合を考える（図を参照）．ここで $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$ とし，xy 平面の上半面において $a_1 \leq R_1 \leq b_1$, $a_2 \leq R_2 \leq b_2$ で指定される領域を D とするとき，D を x 軸の周りに回転して出来る回転体の体積は

$$V = 2\pi \int_D y\,dx\,dy$$

で与えられる．x, y に関する積分を R_1, R_2 に関する積分に変換することにより V を求めよ．

(4) xy 平面を複素平面と考え，点 $P(x, y)$ を複素数 $z = x + iy$ に対応させ，
複素関数 $g(z) = \log\left(\dfrac{z-L}{z+L}\right)$ を考える．$z - L = r_1 e^{i\theta_1}$, $z + L = r_2 e^{i\theta_2}$ とおくことにより，$g(z)$ の実部は $f(x, y)$ に一致することを示せ．ただし，$0 < r_1$, $0 < r_2$, $0 < \theta_1 < \pi$, および $0 < \theta_2 < \pi$ とする．さらに $g(z)$ の虚部は三角形 PAB のどの内角に対応するか答えよ．

(筑波大 2016)　　(m20161315)

0.90 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする．

(2) A の正規化した固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を求めよ．ただし，$A\boldsymbol{u}_j = \lambda_j \boldsymbol{u}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ とする．

(3) A を $P^{-1}AP = D$（ただし，P は直交行列，D は対角行列）として対角化したとき，P, P^{-1} および D を求めよ．

(4) (3) で求めた P に対して，$P^{-1}(A+aE)^n P$ を求めよ．ただし，E は 3 次の単位行列，a は実定数，n は正の整数とする．

以下では $AB=BA$ となる 3 次の正方行列 B について考える．

(5) (2) で求めた $\boldsymbol{u}_j$ $(j=1,2,3)$ は B の固有ベクトルになることを示せ．

(6) (3) で求めた P に対して，$P^{-1}BP$ が対角行列になることを示せ．

(筑波大 2016)　　(m20161316)

0.91　次の関数 $f(x)$ について，以下の設問に答えよ．

$$f(x)=\begin{cases} x\dfrac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1} & (x\neq 0) \\ a & (x=0) \end{cases}$$

(1) すべての実数 x において連続となる a に関する条件を求めよ．

(2) 上記 (1) の条件のもとで，$x=0$ における微分可能性を調べよ．

(3) 上記 (2) において微分可能である場合は $f'(0)$ を求めよ．　微分可能ではないが，右側微分係数 $f'_+(0)$，左側微分係数 $f'_-(0)$ が存在する場合は，それぞれを求めよ．ただし，存在しない場合は，“存在しない”と答えること．

(筑波大 2016)　　(m20161317)

0.92　関数 $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$ について，以下の設問に答えよ．

(1) 原点を除いた領域において，ラプラス方程式を満足することを示せ．

(2) 広い意味の積分 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq 1} f(x,y)dxdy$ は存在するか．存在するときはその値を求めよ．

(3) 複素数 $z=x+iy$ の関数 $f(x,y)+ig(x,y)$ が，領域 $\mathrm{Re}\,z>0$ $(x>0)$ において正則となるように，関数 $g(x,y)$ を定めよ．

(筑波大 2016)　　(m20161318)

0.93　高々2 次の実係数多項式全体が成す線形空間を $V=\{a+bx+cx^2 \mid a,b,c\in R\}$ とする．ただし，R は実数全体の集合であり，x は実数値をとる変数とする．また，多項式 $f(x)$, $g(x)$ の和とスカラー倍は，$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$ と定義する．以下の設問に答えよ．

(1) $\{1, 1+x, x+x^2\}$ は線形空間 V の基底となることを示せ．

(2) 任意の f, $g\in V$ に対して $(f,g)=f(-1)g(-1)+f(0)g(0)+f(1)g(1)$ なる演算を定義する．この演算 (f,g) は以下の内積の性質それぞれを満たすことを示せ．

① 任意の $f,g\in V$ に対して $(f,g)=(g,f)$

② 任意の $f,g,h\in V$ に対して $(f,g+h)=(f,g)+(f,h)$

③ 任意の $f,g\in V$ と任意の実数 λ に対して $(\lambda f,g)=\lambda(f,g)$

④ 任意の $f\in V$ に対して $(f,f)\geq 0$ で，等号成立は $f(x)=0$ のときに限る．

(3) (2) で定義した内積 (f,g) のもとで $1, x, 3x^2-2$ は直交することを示せ．さらに，$1, x, 3x^2-2$ を正規化して V の正規直交基底を 1 組定めよ．

(4) (3) で求めた V の正規直交基底を $\{L_1, L_2, L_3\}$ とする．線形空間 V から 3 次元の数ベクトル空間 R^3 への線形写像 φ を

$$\varphi(1)=c_1,\ \varphi(1+x)=c_2,\ \varphi(x+x^2)=c_3$$

で定めるとき，$\{L_1,L_2,L_3\}$ と $\{c_1,c_2,c_3\}$ に関する φ の表現行列 A_φ を求めよ．ただし，c_1,c_2,c_3 は R^3 の線形独立な数ベクトルとする．

(5) A_φ の行列式，逆行列を求めよ．

(筑波大 2016) (m20161319)

0.94 次の関数を x について微分せよ．

(1) $y = \tan\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$ (2) $y = x^{(e^{3x})}$

(埼玉大 2016) (m20161401)

0.95 次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{2x}{x^2-2x+3}dx$$

(埼玉大 2016) (m20161402)

0.96 次の 2 重積分を求めよ．ただし，3 つの直線 $x=0,\ y=2,\ -2x+y=0$ で囲まれた領域を D とする．

$$\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^2}dxdy$$

(埼玉大 2016) (m20161403)

0.97 xyz 空間のベクトル $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対する線形変換について，以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ を y 軸に対して対称移動させるような $3\times\ 3$ 行列を導出せよ．

(2) $\boldsymbol{A}$ を z 軸のまわりに角 θ だけ回転させるような $3\times\ 3$ 行列を導出せよ．

(埼玉大 2016) (m20161404)

0.98 $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ を基本ベクトルとする xyz 空間上のベクトル場 $\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+3z\boldsymbol{k}$ の面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{A}\cdot dS$ を，発散定理を用いて求めよ．S は原点を中心とする半径 1 の球面とする．

(埼玉大 2016) (m20161405)

0.99 xyz 空間上のスカラー場 $\varphi = x - \dfrac{2}{3}yz$ の曲線 C に沿う線積分 $\displaystyle\int_C \varphi ds$ を求めよ．C は原点 O から $(3,3,3)$ に至る線分とする．

(埼玉大 2016) (m20161406)

0.100 以下の微分方程式を解け．

(1) $2\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{\tan x}$ (2) $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = x^3e^x$ (3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x$

(4) $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 8\dfrac{d^2y}{dx^2} + 16y = x^2$

(埼玉大 2016) (m20161407)

0.101 2 つの曲線 $y=x^2$ と $y=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a>0$ とする) が，$x=-1,\ x=0,\ x=2$ の 3 点で交わっている．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) b と c をそれぞれ a の式で表せ．

(2) 2 つの曲線で囲まれる部分の面積を a の式で表せ．

(3) 2 つの曲線の $x=-1$ における接線が直交するときの a を求めよ．

(群馬大 2016) (m20161501)

0.102 蓋(ふた)のない t 個の箱 $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_t$ が置いてある．いずれの箱も高さは同じである．箱 b_n の幅と奥行きはともに $a_n\ cm$ であり，$a_1 = 10,\ a_t = 30,\ a_n = \sqrt{\dfrac{n}{n-1}}a_{n-1}\ (n = 2, 3, \cdots, t)$ とする．このとき，石を投げて箱に入れるゲームを考える．石がいずれかの箱に入る確率は $\dfrac{5}{6}$ それぞれの箱に石が入る確率は上面の面積に比例しているとする．以下の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) すべての箱の上面の面積の合計を求めよ．

(3) 投げた石が箱 b_1 に入る確率を求めよ．

(4) 箱 b_n に石が入ったときの得点を p_n としたとき，$p_1 = 10,\ p_n = p_{n-1} - 1\ (n = 2, 3, \cdots, t)$ とする．いずれの箱にも入らなかったときの得点を 0 点とする．このとき，石を投げて得られる得点の期待値を求めよ．

(群馬大 2016)　　(m20161502)

0.103 k を実数とし，3 次の正方行列 A，3 次の列ベクトル $\boldsymbol{x}$ をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & k & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

とし，$\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 f を

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

により定める．以下の各問に答えよ．

(1) $k = 1$ のとき，A の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) $k = 1$ のとき，f は全単射となることを示せ．

(3) f は全単射とならないための k についての条件を求めよ．また，f がこの条件を満たすとき，f の核 $\ker(f) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3\ ;\ f(\boldsymbol{x}) = 0\}$ と f の像 $\mathrm{Im}(f) = \{f(\boldsymbol{x})\ ;\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3\}$ の基底を一組求めよ．

(茨城大 2016)　　(m20161701)

0.104 xy 平面内の領域 D を $D = \{(x, y) \mid x + y > 0\}$ とする．D から $\mathbb{R}$ への 2 変数関数

$$f(x, y) = \frac{x - y}{(x + y)^3}$$

について次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $f_x(x, y)$ および $f_y(x, y)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \big(f_x(x, y) + f_y(x, y)\big)$ が存在するかどうか確かめよ．

(茨城大 2016)　　(m20161702)

0.105 xy 平面内の領域 $E = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y,\ 1 \leq y \leq 2\}$ 上の 2 重積分 $\displaystyle\iint_E \frac{x - y}{(x + y)^3}dxdy$ を計算せよ．

(茨城大 2016)　　(m20161703)

0.106 次の連立不等式で表される領域を D とする．　$\dfrac{1}{2}y \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2$

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) 累次積分 $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{2}y}^1 e^{x^2}dx\right)dy$ の順序を交換して，値を計算せよ．

(茨城大 2016)　　(m20161704)

0.107 成分がすべて実数である行列に関して，以下の各問に答えよ．

(1) 行列の積 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ を計算せよ．

(2) 連立 1 次方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解を持つか否か，理由を付けて答えよ．

(3) 一般に，3 行 2 列の行列 A と 2 行 3 列の行列 B の積 AB は単位行列にならないことを示せ．

(茨城大 2016)　　(m20161705)

0.108 $-\infty < x < \infty$ において，微分可能な関数 $y(x)$ が次の等式

$$y(x) = x^2 + \int_0^x ty(t)dt$$

を満たしているとする．関数 $y(x)$ を求めよ．

(茨城大 2016)　　(m20161706)

0.109 複素平面において，0 を始点，π を終点とする曲線 $C : z(t) = t + i\sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$ を考える．以下の各問に答えよ．

(1) 曲線 C を複素平面上に図示せよ．

(2) 導関数 $z'(t)$ を求めよ．

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_C \overline{z}dz$ を計算せよ．ただし，$\overline{z}$ は z の共役複素数を表す．

(茨城大 2016)　　(m20161707)

0.110 x, y を実数としたとき，次のそれぞれが「$x^2 + y^2 \leq 1$」に対して「必要条件」「十分条件」「必要十分条件」「いずれでもない」のうちいずれかを答えよ．

(1) $x \leq 1/2$ または $y \leq 1/2$

(2) $|x| \leq 1$ かつ $y \leq \sqrt{1-x^2}$ かつ $y \geq -\sqrt{1-x^2}$

(3) $|xy| \leq 1/2$

(4) $|x| \leq 1/\sqrt{2}$ かつ $|y| \leq 1/\sqrt{2}$

(山梨大 2016)　　(m20161801)

0.111 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは互いに直交し，かつ大きさを 1 とする．

(山梨大 2016)　　(m20161802)

0.112 コインの表裏を出す確率事象に対して，表がでる確率が 0.1 で裏がでる確率が 0.9 であるとする．この事象を n 回行う試行を考える．

n 回の試行を行ったとき，表が k 回出現する確率分布 $P(k)$ が次式で与えられることを示せ．

$$P(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \qquad \text{ただし } p = 0.1$$

n が 100 であるとき，k に関して $P(k)$ が，$k = 10$ で最大になることを示せ．

(山梨大 2016)　　(m20161803)

0.113 (1) 関数 $f(x)$ が $x = 0$ を含む区間で n 回微分可能であるとき，下式を満たす点 $\theta (0 < \theta < 1)$ が存在する．ただし，$f^{(n)}(x)$ は第 n 次導関数とする．

$$f(x) = f(0) + xf^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)$$

上式の最終項を除いた n 項までの和の部分を関数 $f(x)$ の近似式と呼ぶ．

$f(x) = (1+x)^k$ (k は任意の実数) を 2 次式で近似し，$\sqrt{1.1}$ の近似値を求めなさい．

(2) n 回微分可能な関数 $f(x)$，$g(x)$ の積 $f(x) \cdot g(x)$ の第 n 次導関数 $\Big(f(x) \cdot g(x)\Big)^{(n)}$ が次の式で与えられることを数学的帰納法によって証明しなさい．

$$\Big(f(x) \cdot g(x)\Big)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i f^{(n-i)}(x) \cdot g^{(i)}(x)$$

(山梨大 2016)　　(m20161804)

0.114 方程式 $z = f(x, y) = x^2 + g(y) - 1$ で表される曲面 S について次の設問に答えよ．

但し，$g(y)$ はすべての y において微分可能な関数である:

(1) 点 $(1, s, f(1, s))$ における曲面 S の接平面 S' の方程式を求めよ．

(2) 接平面 S' の z 軸切片が $z = -3s^4 + 2s^2 - 1$ であるとき，$g(y)$ を求めよ．

(3) $z = f(x, y)$ は $(x, y) = (0, 0)$ に停留点を持つとする． このとき，(2) で求めた $g(y)$ を用いて，$z = f(x, y)$ が極大または極小となる (x, y) およびそのときの極値を全て求めよ．

(山梨大 2016)　　(m20161805)

0.115 N 行 N 列の単位行列を E と表し，N 行 N 列の行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

と定義する．N は 1 以外の自然数であるとして，次の設問に答えよ．

(1) 行列 A^2 および $AA^\dagger$ の成分を，$(*)$ にならって示せ．ここで，$\dagger$ は転置行列を表す．

(2) $A^n = A$ を満たす 1 以外の最小の自然数 n を求めよ．

(3) e_n をその第 n 成分が 1，それ以外の成分は 0 である N 次元空間の基本ベクトルとする $(n = 1, 2, \cdots, N)$．このとき，Ae_n および $A^\dagger e_n$ を基本ベクトルを用いて表せ．

(4) 行列 A の固有値と固有ベクトルを全て求めよ．

(山梨大 2016)　　(m20161806)

0.116 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3) \equiv (x_i)$ と時間 t の関数として，ベクトル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ が与えられているとき，次の設問に答えよ．

(1) ベクトル $\mathbf{A}$ の成分 A_i (但し，$i = 1, 2, 3$) を用いて，

(a) $\bigtriangledown \cdot \boldsymbol{A}$　(b) $\bigtriangledown \times \ \boldsymbol{A}$　(c) $\bigtriangledown \cdot \bigtriangledown \boldsymbol{A} \equiv \bigtriangledown^2 \boldsymbol{A}$ を表せ．

(2) $\nabla\times\ \nabla\times\ \boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$ という関係が成り立つことを，i 成分について示せ．

(3) $\nabla\times\ \boldsymbol{B}=\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$ および $\nabla\times\ \boldsymbol{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ から， $\boldsymbol{E}$ を消去して $\boldsymbol{B}$ の満たす方程式を求めよ．但し，c はゼロでない定数とする．

(4) $\boldsymbol{B}=\nabla\times\ \boldsymbol{A}$ かつ $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ が成り立つとき，(2) と (3) の結果を用いて，$\boldsymbol{A}$ の満たす方程式を求めよ．

(山梨大 2016)　　(m20161807)

0.117 平面内の領域 $D=\{(x,y)\,|\,(x,y)\neq(0,0)\}$ で定義される 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して，$\triangle f(x,y)=f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)$ と定める．また，$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\ \ (r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とし，$z=f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，領域 D で $f(x,y)$ の 2 階までのすべての偏導関数が存在して，それらはすべて連続である．

(1) $z_r,\ z_\theta$ を $r,\ \theta,\ f_x,\ f_y$ を用いて表せ．

(2) $z_{rr}+\dfrac{1}{r}z_r+\dfrac{1}{r^2}z_{\theta\theta}=\triangle f$ を示せ．

(3) $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\log(x^2+y^2)$ のとき，$\triangle f(x,y)$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする;

(信州大 2016)　　(m20161901)

0.118 $p>2$ は実数とする．$D_n=\{(x,y)\,|\,0\leqq\ x\leqq\ n,\ 0\leqq\ y\leqq\ n\}\ \ (n=1,2,\cdots)$ とおき，領域 D_n 上の 2 重積分　$I_n(p)=\displaystyle\iint_{D_n}\frac{dxdy}{(1+x+y)^p}$　を考える．

(1) $I_n(p)$ を計算し，極限値 $I(p)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n(p)$ を求めよ．　　(2) $\displaystyle\int_3^\infty I(p)dp$ を計算せよ．

(信州大 2016)　　(m20161902)

0.119 $a,\ b$ は実数とする．実数の未知数 $x,\ y,\ z,\ w$ に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x+2y+3z+4w=1\\ 2x+\ y+4z+aw=1\\ 3x+4y+\ z+2w=1\\ 4x+3y+2z+\ w=b\end{cases}$$

は無数の解をもつとする．このとき，$a,\ b$ が満たす条件を求め，連立 1 次方程式を解け．

(信州大 2016)　　(m20161903)

0.120 行列 $A=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0&1\\0&\sqrt{2}&1\\1&-1&\sqrt{2}\end{pmatrix}$ ，　$B=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値と B の固有値を求めよ．

(2) $A,\ B$ について，それらが対角化できるか調べ，対角化できれば対角化せよ．

(信州大 2016)　　(m20161904)

0.121 関数 $f(x)=-\displaystyle\sum_{n=1}^{N}(a_n-x)^2$ を最大にする x を求めよ．ただし，N は正の整数，$a_n,\ n=1,2,3,\cdots,N$ は任意の実数とする．

(新潟大 2016)　　(m20162001)

0.122 関数 $g(x) = \dfrac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$ の上の曲線の長さ s を $-\log_e 2 \le x \le \log_e 2$ の範囲で求めよ.

(新潟大 2016) (m20162002)

0.123 三つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を辺として持つ平行六面対の体積 V を求めよ.

(新潟大 2016) (m20162003)

0.124 条件 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対して, $2 \times\ 2$ 行列 T による線形変換 $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = T\boldsymbol{x}$ を考える. $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 1$ を満たすための行列 T を求めよ.

(新潟大 2016) (m20162004)

0.125 以下の極限は存在するか, 存在すればその値を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{(1 + \cos x)\log(1 + x)}$$

(新潟大 2016) (m20162005)

0.126 a を定数とする. 以下の連立一次方程式の解が存在する a をすべて求め, そのすべての a に対して連立方程式の解 (x, y, z) をすべて求めよ.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 4y + 2z = 3 \\ 3x + 7y + 5z = a \end{cases}$$

(新潟大 2016) (m20162006)

0.127 行列 $\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値を求め, 各固有値に対応する 2 つの固有ベクトルの交角 θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を示せ

(新潟大 2016) (m20162007)

0.128 関数 $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}} + 2xy$ の 2 次偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を求めよ.

(新潟大 2016) (m20162008)

0.129 以下の関数で表される曲線がある. 区間 $-4 \leqq\ x \leqq\ 4$ における曲線の長さを求めよ.

$$y = 2\left(e^{x/4} + e^{-x/4}\right)$$

(新潟大 2016) (m20162009)

0.130 三角関数に関する以下の問いに答えよ.

(1) e^x, $\cos x$, $\sin x$ を $x = 0$ のまわりでテイラー展開せよ.

(2) オイラーの関係式,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

が成り立つことを，問 (1) のテイラー展開の結果を用いて示せ.

(3) 任意の正の整数 n について，次の恒等式が成り立つことを示せ.

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

(4) 問 (3) の恒等式を用いて，以下の式を証明せよ.

$$\begin{aligned}
&\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\
&\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta \\
&\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta \\
&\sin(3\theta) = 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta
\end{aligned}$$

(新潟大 2016)　　(m20162010)

0.131 自然数 n に対して,

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x}dx\ , \qquad J_n = \int_0^\pi \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx$$

とするとき，次の各問いに答えよ.

(1) 次の公式を利用して，$I_{n+2} = I_n$ を示せ.

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

(2) I_n を求めよ.

(3) 数列 $\{J_n\}$ が等差数列になることを示せ.

(4) J_n を求めよ.

(新潟大 2016)　　(m20162011)

0.132 行列式に関する，次の各問いに答えよ.

(1) $\begin{vmatrix} 103 & 103 & 101 \\ 98 & 100 & 101 \\ 99 & 97 & 98 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & a & b^2 & 1 \\ 1 & a^2 & b^3 & c \\ 1 & a^3 & b^4 & c^2 \\ 1 & a^4 & b^5 & c^3 \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

(3) 方程式 $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 & a \\ x & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & x \\ a & 1 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$ を解け．ただし，a は実定数とする.

(新潟大 2016)　　(m20162012)

0.133 正の定数 $a > 0$ と自然数 n に対して，等式

$$\left(1 + \frac{b_n}{n}\right)^n = 1 + a$$

が成り立つように数列 $\{b_n\}$ を定める．また，関数 $f(x)$ を $f(x) = (1+a)^x$ により定める．このとき，次の問いに答えよ.

(1) b_n を a と n を用いて表せ.

(2) 関数 $f(x)$ の $x=0$ における微分係数 $f'(0)$ を求めよ.

(3) $\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ.

(4) b_n と b_{n+1} の大小関係を不等式で表せ.

(新潟大 2016)　　(m20162013)

0.134 V_1 と V_2 を 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間とし,

$$V_1 + V_2 = \{x + y \mid x \in V_1,\ y \in V_2\}$$

とする. このとき, 次の各問いに答えよ.

(1) $V_1 \cap V_2$ と $V_1 + V_2$ は $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間になることを示せ.

(2) $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$ で $V_1 \neq V_2$ と仮定する. このとき, $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$ を示せ.

(3) V_1 は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生成される $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間とし,

V_2 は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ で生成される $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間とする.

このとき, $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間 $V_1 \cap V_2$ の基底を一組求めよ.

(新潟大 2016)　　(m20162014)

0.135 n を 3 以上の整数とする. 赤玉が n 個, 白玉が n 個, 合計 $2n$ 個が袋に入っている. この袋からでたらめに玉を 1 個取り出し, その玉を元に戻さない. この操作を 3 回繰り返し行い, 取り出した順に一列に並べ, 次の方法で得点 X を計算する.

・「赤赤赤」と並んだ場合は $X=2$ とする.

・「赤赤白」または「白赤赤」と並んだ場合は $X=1$ とする.

・それ以外の場合は $X=0$ とする.

下の問いに答えなさい.

(1) $X=2$ である確率 $P(X=2)$ を求めなさい.

(2) $X=1$ である確率 $P(X=1)$ を求めなさい.

(3) X の期待値 $E(X)$ を求めなさい.

(長岡技科大 2016)　　(m20162101)

0.136 xy 平面において, 原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする. x 軸上に点 $T(t,0)$, $0<t<1$ をとる. 点 T を通る直線 ℓ と円 C との交点を A, B とする. ただし, 直線 ℓ は点 O を通らないとする. $\triangle OAB$ の面積を S とするとき, 下の問いに答えなさい.

(1) 直線 ℓ と点 O の距離を h とするとき, h の取りうる値の範囲を t で表しなさい.

(2) 前問の h を用いて S を表しなさい.

(3) S の最大値 $f(t)$ を t で表しなさい.

(長岡技科大 2016)　　(m20162102)

0.137 微分方程式

$$(*) \qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}+2y=0$$

を考える．$x=e^t$ とするとき，下の問いに答えなさい．

(1) $\dfrac{dy}{dt}$ を，$\dfrac{dy}{dx}$ と x とで表しなさい．

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ を，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ と $\dfrac{dy}{dx}$ と x とで表しなさい．

(3) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めなさい．

(長岡技科大 2016) (m20162103)

0.138 xy 平面において，連立不等式 $\sqrt{y} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ で表される領域を D とする．下の問いに答えなさい．

(1) 領域 D を図示しなさい．

(2) 連立不等式 $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq f(x)$ で表される領域が D であるような $f(x)$ を求めなさい．

(3) 積分順序の変更をして，重積分 $V=\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{1+x^3}\,dxdy$ を求めなさい．

(長岡技科大 2016) (m20162104)

0.139 k を実数とする．R^3 の部分集合

$$W=\left\{ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} 2x+10y+3z=0, \\ 3x+15y+kz=0 \end{array} \right\}$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) W が R^3 の部分空間であることを示せ．

(2) W の次元と基底の 1 組を求めよ．

(3) W の直交補空間 $W^{\perp}$ を求めよ．

(金沢大 2016) (m20162201)

0.140 A, B を n 次正方行列とする，次のことを示せ．

(1) $\det AB=0$ のとき，0 はそれぞれ $AB,\ BA$ の固有値である．

(2) $\det AB \neq 0$ のとき，0 は AB の固有値である．

(3) λ が AB の固有値ならば，λ が BA の固有値でもある．

(金沢大 2016) (m20162202)

0.141 $Q_0(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$Q_n(t)$ は n 次式 $(n=1,2,3)$ で

(a) $\displaystyle\int_{-1}^1 (Q_n(t))^2\,dt=1$,

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 Q_m(t)Q_n(t)dt=0 \ \ (0 \leqq m<n \leqq 3)$,

(c) $Q_n(t)$ の t^n の係数は正

とする．このとき $Q_n(t)$ $(n=1,2,3)$ を求めよ．

(金沢大 2016) (m20162203)

0.142 閉領域

$$\{(x,y) \in R^2 \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1\}$$

上の関数

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - x - y$$

の最大値と最小値を求め，最大値・最小値を与える点 (x,y) を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162204)

0.143 λ を実数，$t > 0$ とする．このとき，閉領域

$$D_t = \{(x,y) \in R^2 \mid x \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq t^2\}$$

上の重積分

$$I(t) = \iint_{D_t} (1 + x^2 + y^2)^{\lambda} dxdy$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) $I(t)$ を具体的に t の式で表せ．

(2) $t \to \infty$ としたとき，$I(t)$ の収束・発散を調べ，収束する場合はその極限値を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162205)

0.144 行列 A は

$$A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満たす．次の問いに答えよ．

(1) $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，行列式 $\det P$ および逆行列 P^{-1} を求めよ．

(2) 行列 A を求めよ．

(3) 行列 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ に対して，$x_{11} + x_{22} + x_{33}$ を $\mathrm{tr(X)}$ で表す．自然数 n に対して $\mathrm{tr}(A^n)$ を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162206)

0.145 関数の列 $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 0,1,2,\cdots)$ をそれぞれ関係式

$$\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} = 1\,, \qquad \varphi_0(0) = 1\,,$$

$$\frac{\varphi_n'(x)}{\varphi_n(x)} = \varphi_{n-1}'(x)\,, \qquad \varphi_n(0) = e^{\varphi_{n-1}(0)}\,, \qquad (n = 1,2,3,\cdots)$$

で定める．次の問いに答えよ．

(1) $\varphi_0(x) = e^x$, $\varphi_n(x) = e^{\varphi_{n-1}(x)}$ $(n = 1,2,3,\cdots)$ であることを示せ．

(2) $\ell = e^{\ell}$ を満たす実数 ℓ は存在しないことを示せ．

(3) 関数列 $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 0,1,2,\cdots)$ において，どんな実数 c に対しても数列 $\{\varphi_n(c)\}$ は収束しないことを示せ

(金沢大 2016)　　(m20162207)

0.146 $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 1 \leqq\ x+y \leqq\ 5,\ x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0\right\}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) 変数変換 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}u + \dfrac{1}{2}v \\ y = \dfrac{1}{2}u - \dfrac{1}{2}v \end{cases}$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ．

(2) (1) の変数変換で，領域 D に対応する uv 平面の領域を E とする．領域 E を図示せよ．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3}dxdy$ の値を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162208)

0.147 次の計算をしなさい．ただし，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸方向の単位ベクトルである．

(1) スカラー関数 $\phi = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ の勾配

(2) ベクトル関数 $\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ の発散

(3) ベクトル関数 $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$ の回転

(金沢大 2016)　　(m20162209)

0.148 始点 $(0,0,0)$ と終点 $(1,1,1)$ を直線で結ぶ経路を C とする．経路 C に沿ったベクトル関数 $\boldsymbol{A} = (x^2+y)\boldsymbol{i} + (xy+z)\boldsymbol{j} - yz\boldsymbol{k}$ の線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{A}\cdot dr$ を計算しなさい．

(金沢大 2016)　　(m20162210)

0.149 平面 $x+y+z=1$ が座標軸と交わる点を A, B, C，3 点 A, B, C を結ぶ線分で囲まれた三角形を S とする．ベクトル関数 $\boldsymbol{A} = 2x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$ の S 上での面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$ を計算しなさい．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の単位法線ベクトルで，原点から S へ引いた垂線の向かう向きとする．

(金沢大 2016)　　(m20162211)

0.150 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を計算しなさい．

(金沢大 2016)　　(m20162212)

0.151 次のことを示せ．

(1) $f(x) = \begin{cases} x^{-1} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ とする．$f(x)$ は連続でない．

(2) $f(x) = \begin{cases} x^m & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$ とする．$m \geq 3$ ならば，$f'(x)$ は微分可能である．

(金沢大 2016)　　(m20162213)

0.152 n を自然数とし，I_n を次の広義積分で定める．　$I_n = \displaystyle\int_1^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$

(1) I_1 の値を求めよ．

(2) $n \geq 2$ のとき，次の漸化式が成り立つことを示せ．　$I_n = \dfrac{1}{e} + (n-1)I_{n-1}$

(3) 次式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ．　$I_n = \dfrac{(n-1)!}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$

(4) 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{(n-1)!}$

(金沢大 2016) (m20162214)

0.153 何回でも偏微分可能な関数 $u(x,y,z)$ が

$$\Delta u = 0 \qquad \left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

を満たしているとする．このとき，

$$v = x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}$$

に対して，Δv を計算せよ．

(金沢大 2016) (m20162215)

0.154 (1) 自然数 n に対して，集合 $D_n=\left\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\leq n^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0\right\}$ における関数 $e^{-x^2-y^2}$ の積分 $\displaystyle\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ．

(2) 集合 $\left\{(x,y)\in R^2 \mid 0\leq x\leq n,\ 0\leq y\leq n\right\}$ を R_n と表すとき，
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\iint_{R_n} e^{-x^2-y^2}dxdy-\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy\right)=0$ を示せ．

(3) 次の積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

(金沢大 2016) (m20162216)

0.155 変数 x,y が集合

$$D=\left\{(x,y)\in R^2 \mid 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1,\ 1\leq x+y\right\}$$

を動くとき，関数

$$f(x,y)=(1-x)(1-y)(x+y-1)$$

の最大値を求めよ（その値が最大値となることの証明をつけること）．

(金沢大 2016) (m20162217)

0.156 $x>0$ の範囲で考えて， $f(x)=x^2\log x$ と置く. 次の小問に答えよ.

(1) $f(x)$ のグラフの概形をかけ，また $f(x)$ の極値を求めよ.

(2) すべての自然数 n に対して $f(x)$ の n 次導関数を求めよ

(金沢大 2016) (m20162218)

0.157 函数 $y=\sin^{-1}x,\ x\in[-1,1]$ に対して，次の問いに答えよ.

(1) $y=\sin^{-1}x$ の導函数を求めよ.

(2) $y=\sin^{-1}x$ のグラフの概形をかけ.

(3) $\displaystyle\int_0^1 \sin^{-1}x dx$ を求めよ.

(金沢大 2016) (m20162219)

0.158 次の問いに答えよ．ただし，以降 a,b は正の定数とする．

(1) $f(x)=a^x$ の導函数を求めよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}\log\frac{a^x+b^x}{2}$ を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162220)

0.159 $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$ とするとき，次の問いに答えよ.

(1) $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}\quad (n\geq 2)$ を示せ.

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x dx$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\cos^5 x dx$ を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162221)

0.160 x は $0<x<1$ を満たす実数とし，n は $n>2$ を満たす整数とする.

(1) $f(x)=\sin^{-1}x$ の導関数を求めよ．ここで，$\sin^{-1}x$ は $\sin x$ の逆関数である.

(2) $\sqrt{1-x^2}<\sqrt{1-x^n}<1$ を示せ.

(3) $\dfrac{1}{2}<\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^n}}dx<\frac{\pi}{6}$ を示せ.

(金沢大 2016)　　(m20162222)

0.161 a,b,c は正の定数とし，x,y は次で定義される R^2 の領域 D の点とする.

$$D=\left\{(x,y)\in R^2\,\middle|\,0\leq\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq c^2\right\}$$

(1) 変数 r,θ を用いて $x=ar\cos\theta,\ y=br\sin\theta$ と変数変換を行う．この時,
関数行列式（ヤコビアン）$\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|$ を求めよ.

(2) (1) の変数変換を用いて重積分 $\displaystyle\iint_D\sqrt{c^2-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$ を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162223)

0.162 重積分

$$I=\iint_D\frac{x}{y}dxdy,\qquad D=\left\{(x,y)\in R^2\ \middle|\ 1\leq xy\leq 6,\ 0<y\leq x\leq 4y\right\}$$

を考える．次の各小問に答えよ.

(1) 変数 u,v を用いて，変数変換 $x=uv,\ y=u/v$ を行なう．このときヤコビアンを求めよ.

(2) (1) の変数変換を用いて I の値を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162224)

0.163 連立方程式

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0\\4x_1+3x_2+2x_3+x_4=0\end{cases}$$

を満たす点 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in R^4$ の全体を V とする.

(1) V は R^4 の線形部分空間であることを示せ.

(2) V の基底を一つ求めよ.

(3) R^4 の基底で，(2) で求めた V の基底を含むものを一つ求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162225)

0.164 次の 4× 4 行列 A とベクトル $\boldsymbol{b} \in R^4$ ついて以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 10 & -8 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \\ a \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in R^4$ に対する連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つように定数 a を定めよ.

(2) (1) で求めた a に対して，連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を求めよ.

(3) 像空間 $\mathrm{Im}A = \{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in R^4\}$ の基底と次元を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162226)

0.165 $A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 4 \\ 16 & 15 & -16 \\ 10 & 10 & -11 \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162227)

0.166 実数を成分とする 2 次正方行列全体がつくるベクトル空間を M とする.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M$ に対し，線形写像 $F : M \to M$ を

$$F(X) = AX - XA \qquad (X \in M)$$

によって定義するとき，M の部分空間

$$\mathrm{Ker}\, F = \big\{X \in M \mid F(X) = O\big\}. \qquad \mathrm{Im}\, F = \big\{F(X) \mid X \in M\big\}$$

の次元を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162228)

0.167 写像 $f : R^3 \to R^3$ を

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 4x_1 - x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$$

によって定める.

(1) f は線形写像であることを示せ.

(2) $\mathrm{Im}\, f$ と $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求めよ．ただし，

$$\mathrm{Im}\, f = \left\{ f(\boldsymbol{x}) \;\middle|\; \boldsymbol{x} \in R^3 \right\}$$
$$\mathrm{Ker}\, f = \left\{ \boldsymbol{x} \in R^3 \;\middle|\; f(\boldsymbol{x}) = 0 \right\}$$

である．

(3) 写像 f は逆写像 f^{-1} を持つか．持つならばそれを求め，持たなければその理由を記せ．

(金沢大 2016)　　(m20162229)

0.168 $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) A の固有値とその固有値に属する固有空間を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162230)

0.169 R^3 の 2 つの部分集合

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle|\, 2x + y + z = 0 \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle|\, x - 2y + z = 0 \right\}$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) $V \cap W$ の基底を求めよ．

(2) V と W の基底を求めよ．

(3) $V + W$ を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162231)

0.170 (1) $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ の階数 ($\mathrm{rank}M$) を求めよ．

(2) 次の連立方程式を解け．

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 & = & 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 3x_4 & = & -2 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 6x_4 & = & 5 \end{array} \right.$$

(金沢大 2016)　　(m20162232)

0.171 (1) 次の行列式を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

(2) 次の n 次正方行列（対角成分は 0，対角成分以外は 1）の行列式を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

(金沢大 2016)　　(m20162233)

0.172 $7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 1 \cdots (*)$ を次の手順で，(x, y) 平面に図示せよ．

(1) $(*)$ の左辺は $2\times\ 2$ の対称行列 A を用いて，$(x \quad y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すことが出来る．A を求めよ．

(2) A の固有値 $(\lambda_1 < \lambda_2)$，および，長さ 1 の固有ベクトル $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (λ_1に対応)，

$v_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ (λ_2に対応) を求めよ．ただし，$a > 0$，$c > 0$ と選ぶ．

(3) 行列 $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ とおく．$P^{-1}AP$ を計算せよ．

(4) 変数変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ としたとき，(x, y) 平面上の図形は，反時計回りに q ラジアン回転すると (X, Y) 平面上の図形に移る．q を求めよ．また，上記の図形を (X, Y) 平面上で図示せよ．

(5) $(*)$ を (x, y) 平面上で図示せよ．

(金沢大 2016)　　(m20162234)

0.173 n 次正方行列 A, B に対して，$[A, B] = AB - BA$ と定める．

(1) 任意の A に対して，$[A, X] = 0$ を満たす X を求めなさい．

(2) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ を示しなさい．

(金沢大 2016)　　(m20162235)

0.174 (1) $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を R^3 の標準的な基底とし，R^3 の線形写像 f を次で定義する．

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3,$$
$$f(\boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2,$$
$$f(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3$$

このとき，標準的な基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ に関する f の表現行列を求めよ．

(2) R^3 の部分空間 V を $V = \left\{\boldsymbol{v} \in R^3 \;\middle|\; f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\right\}$ で定義する．V の基底を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162236)

0.175 行列 $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を考える．次の各小問に答えよ．

(1) P の固有値をすべて求めよ．またそれぞれの固有値に属する固有ベクトルを一つずつ求めよ．ただし固有ベクトルの成分は整数値に選べ．

(2) $\boldsymbol{v}$ を (1) で求めた固有ベクトルの線形結合として表せ.

(3) $P^n\boldsymbol{v}$ を求めよ．さらに極限 $\lim_{n\to\infty} P^{2n+1}\boldsymbol{v}$ と $\lim_{n\to\infty} P^{2n}\boldsymbol{v}$ を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162237)

0.176 a を実数の定数とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 x^a \log x dx$ が収束する a の値の範囲を求めよ.

(2) (1) の広義積分が収束するとき，その値を求めよ.

(富山大 2016)　　(m20162301)

0.177 3 次実対称行列 A は固有値 2 と 3 をもち，固有値 2 に対する固有空間 W_2 はある実数 x, y を用いて

$W_2 = \left\{ c\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$ と表され，固有値 3 に対する固有空間 W_3 は

$W_3 = \left\{ c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| c_1,\ c_2 \in \mathbb{R} \right\}$ と表されている．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $x,\ y$ を求めよ.

(2) $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を W_2 と W_3 のベクトルの和で表せ.

(3) 自然数 n に対して $A^n\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(富山大 2016)　　(m20162302)

0.178 $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ を有界な実数列とするとき,

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

ならば，$\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ.

ただし，$\limsup_{n\to\infty} a_n$，$\liminf_{n\to\infty} a_n$ はそれぞれ数列 $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ の上極限，下極限を表す.

(富山大 2016)　　(m20162303)

0.179 $\mathbb{N}$ を自然数全体の集合とする．$a_n \geqq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ とし，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が実数 α に収束するとする.

このとき，全単射 $f\ :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対し $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = \alpha$ となることを示せ.

(富山大 2016)　　(m20162304)

0.180 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{x}}{x-1}$

(福井大 2016)　　(m20162401)

0.181 次の関数の導関数を求めよ．

(1) $y = x^3\sqrt{3x^2+1}$　　　(2) $y = (1+x)^x$

(福井大 2016)　　(m20162402)

0.182 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \left|\sin 3x\right| dx$　　（必要であれば，変数変換 $3x = t$ を使用せよ.）

(福井大 2016)　　(m20162403)

0.183 テイラーの定理を使って，$f(x,y) = \sin xy$ を $(x - \pi/2)$ と $(y-1)$ の 2 次のベキまで展開せよ．

(福井大 2016)　　(m20162404)

0.184 $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 \sqrt{1+x^2}dxdy$ の積分順序を変更することによって，その値を求めよ． また積分領域も図示せよ．

(福井大 2016)　　(m20162405)

0.185 次の行列について，以下の問いに答えよ．

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) 固有値を求めよ

(2) 大きさが 1 となるように正規化した固有ベクトルを求めよ．

(3) (2) で求めた固有ベクトルを用いて対角化せよ．

(福井大 2016)　　(m20162406)

0.186 次の行列について，以下の問いに答えよ．

$$[B] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) 行列式の値を求めよ．　　(2) 余因子を求めよ．　　(3) 逆行列を求めよ

(福井大 2016)　　(m20162407)

0.187 次の微分方程式の一般解を導出せよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} + y\sin x = 0$　　(2) $\sqrt{x}\dfrac{dy}{dx} + 2xy = x$　　(3) $(x+y)\dfrac{dy}{dx} = -y$

(福井大 2016)　　(m20162408)

0.188 (1) $A = \begin{pmatrix} a+b & a & a \\ a & a+c & a \\ a & a & a+d \end{pmatrix}$ に対して，　$|A| = abcd\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\right)$

となることを示せ．ただし，$abcd \neq 0$ とする．

(2) 行列 $A_n = \left(a_{ij}\right)$ $\big(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n,\ n$ は 3 以上の整数$\big)$ を，

$$a_{ij} = a_0 + a_i\delta_{ij}\ , \qquad a_i : \text{実数}\ (1 \leq i \leq n)$$

で定義するとき，

$$|A_n| = a_0 a_1 \cdots a_{n-1} a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} \right)$$

となることを示せ．ただし，$a_0 a_1 \cdots a_{n-1} a_n \neq 0$ である．また，δ_{ij} は，$i = j$ のときに 1，$i \neq j$ のときに 0 をとるものとする．

(福井大 2016)　　(m20162409)

0.189　連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax \ - \ y - 6 \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 2y + 1 \end{cases}$$

について，以下の問いに答えよ．ただし，この微分方程式の解 $x(t)$，$y(t)$ を要素とするベクトルを $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする．ただし，$a \neq \dfrac{5}{2}$ とする．

(1)　任意の t に対して $\boldsymbol{r}(t)$ が不変となるような解 $\boldsymbol{r}_0 \in \mathbb{R}^2$ を，a を用いて表せ．

(2)　今，$\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とするとき，$X(t)$ および $Y(t)$ に関する連立微分方程式を導け．

(3)　(2) で求めた連立微分方程式を満たす解 $\boldsymbol{d}(t)$ が，任意の初期値に対して $t \to +\infty$ で $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に収束する条件を a を用いて表せ．

(4)　$a = -4$，初期値ベクトル $\boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ としたときの解 $\boldsymbol{r}(t)$ を求めよ．

(福井大 2016)　　(m20162410)

0.190　次の関数を微分せよ．

(1) $y = (x^2 - 2x + 3)^5$　　(2) $y = \cot x$　　(3) $y = \sin^{-1} x$　　(4) $y = xe^{2x}$

(福井大 2016)　　(m20162411)

0.191　次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $y = \left(x - \dfrac{1}{x} \right)^3$　　(2) $y = \sin^3 x \cos^3 x$　　(3) $y = \dfrac{1}{e^x + 1}$　　(4) $y = \dfrac{1}{(1 - x^2)^{3/2}}$

(福井大 2016)　　(m20162412)

0.192　次の微分方程式を解け．

(1) $x\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$　　(2) $(1 + x)dy + (1 + y)dx = 0$

(福井大 2016)　　(m20162413)

0.193　次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(福井大 2016)　　(m20162414)

0.194　次の行列の階数を求めよ．

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -6 \\ 2 & 4 & -2 & 10 \\ 2 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

(福井大 2016)　　(m20162415)

0.195 次の行列の逆行列を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

(福井大 2016) (m20162416)

0.196 行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) (1) で求めた全ての固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(福井大 2016) (m20162417)

0.197 2 変数関数 $f(x,y) = x^4 - 4xy + 2y^2$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の 1 階の偏導関数

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = f_x(x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = f_y(x,y)$$

ならびに 2 階の偏導関数

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = f_{xx}(x,y), \qquad \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) = f_{xy}(x,y), \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = f_{yy}(x,y)$$

を，すべて求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ について，$z = f(x,y)$ は，xyz 空間において曲面を表す．
この曲面上の点 $\big(x_0,\ y_0,\ f(x_0,y_0)\big)$ における接平面の方程式は

$$z - f(x_0,y_0) = \big(f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0)\big) \bullet (x - x_0,\ y - y_0)$$

によって与えられる．ただし，上式の $\bullet$ は 2 次元ベクトルの内積を表している．このとき，点 $\big(1,\ 2,\ f(1,2)\big)$ における接平面の方程式を $ax + by + cz = d$ の形式で求めよ．すなわち，上式が点 $\big(1,\ 2,\ f(1,2)\big)$ での曲面 $z = f(x,y)$ の接平面の方程式となるような a, b, c, d を求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ について，

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

を満たす (x,y) の組を，$f(x,y)$ の極値の候補と呼ぶ．関数 $f(x,y)$ の極値の候補をすべて求めよ．

(4) 2 次の偏導関数を用いて，関数 $\phi(x,y)$ を

$$\phi(x,y) = \big\{f_{xy}(x,y)\big\}^2 - f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y)$$

と定義すると，極値の候補である (x_1,y_1) に対して，

- $\phi(x_1,y_1) < 0$ かつ $f_{xx}(x_1,y_1) > 0$ ならば (x_1,y_1) は極小
- $\phi(x_1,y_1) < 0$ かつ $f_{xx}(x_1,y_1) < 0$ ならば (x_1,y_1) は極大
- $\phi(x_1,y_1) > 0$ ならば (x_1,y_1) は極値ではない

といえる．上の (3) で求めた極値の候補について，それぞれ極小であるか，極大であるか，あるいは極値ではないか，調べよ．

(福井大 2016) (m20162418)

0.198 次式に与えられる行列 A について，以下の問いに答えよ．(4) 以外については計算の課程も示すこと．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値を λ として，固有方程式を“ $(1-\lambda)$ の多項式 $=0$ ”の形に表せ．

(2) A の固有値を全て求めよ．固有方程式“ $(1-\lambda)$ の多項式 $=0$ ”の左辺をどのように因数分解したのかがわかるように解答すること．

(3) A の固有値を $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ (\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3)$ とする．固有値 λ_n に対応する正規化（規格化）された固有ベクトル $\boldsymbol{u}_n$ を以下の形で求めよ．

$$\boldsymbol{u}_1=\frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 \\ \square \\ \square \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ \square \\ \square \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_3=\frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$$

(4) 以下の空欄を生めよ．ただし，(あ) と (い) には数値，(う) と (お) には語句，(え) には行列が入る．なお，$\boldsymbol{u}_n\cdot\boldsymbol{u}_m$ は $\boldsymbol{u}_n$ と $\boldsymbol{u}_m$ の内積，${}^tP$ は P の転置行列を表す．3 つの固有ベクトル $\boldsymbol{u}_n$ の長さは全て $\boxed{\text{(あ)}}$ であり，さらに $\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{u}_3\cdot\boldsymbol{u}_1=\boxed{\text{(い)}}$ である．従って，行列 $P=(\boldsymbol{u}_1\,\boldsymbol{u}_2\,\boldsymbol{u}_3)$ は $\boxed{\text{(う)}}$ 行列である．よって，${}^tP$ と $\boxed{\text{(え)}}$ の積は単位行列となる．なお，P が $\boxed{\text{(う)}}$ 行列であるのは A が $\boxed{\text{(お)}}$ 行列であることの必然的な結果である．

(5) P^{-1} を求めよ．

(6) $P^{-1}A^2P$ を求めよ．

(福井大 2016)　　(m20162419)

0.199 以下の行列 A に関して，次の問いに答えなさい．

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式を計算しなさい．

(2) 逆行列を求めなさい．

(3) 固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(福井大 2016)　　(m20162420)

0.200 以下の積分をおこないなさい．

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x\ln x}dx$　　　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx$

(福井大 2016)　　(m20162421)

0.201 以下の積分をおこないなさい．

$\displaystyle\iint_D dxdy$　　ただし，$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leq 4\right\}$

(福井大 2016)　　(m20162422)

0.202 以下の積分をおこないなさい．ただし，$i=\sqrt{-1}$ とする．

(1) $\displaystyle\int e^{-i\omega t}dt$　　　(2) $\displaystyle\int_0^{1-i}(iz+2)dz$　　なお，積分経路は直線とする．

(福井大 2016)　　(m20162423)

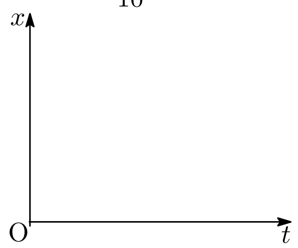
0.203 以下の微分方程式について答えなさい．（なお，$\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ である.）

$$\dot{x} = \left(1 - \frac{x}{K}\right) x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，K は正の定数である．

(1) 十分時間が経過したとき，つまり $t \to \infty$ のとき，x はどうなるかを答えなさい．

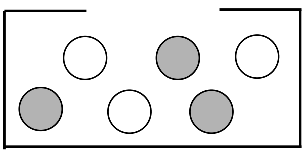
(2) $t = 0$ のとき，$x = \dfrac{K}{10}$ であった．t - x のグラフを描きなさい．



(3) 微分方程式 ① の解を求めなさい．

(福井大 2016)　　(m20162424)

0.204 下図のように，箱の中に赤玉と白玉が 3 個ずつ入っている．二人で交互に箱の中から玉を取り出すとき，次の問いに答えなさい．ただし，箱の中は見えないものとする．なお，先に玉を取り出すものを先攻，後で玉を取り出すものを後攻と呼ぶことにする．また，勝敗は点数の高いほうを勝ちとする．



(1) 赤玉を 1 点，白玉を -2 点として，それぞれ交互に 3 回，玉を取り出して合計得点を競う．ただし，取り出した玉は，箱には戻さないものとする．先攻と後攻では，どちらが有利かを議論しなさい．

(2) 赤玉を 1 点，白玉を -2 点として，それぞれ交互に 3 回，玉を取り出して合計得点を競う． 今回は，取り出した玉を箱に戻すか，戻さないかを取り出した後に決められるものとする． 先攻と後攻では，どちらが有利かを議論しなさい．

(3) 赤玉を 1 点，白玉を α 点として，それぞれ交互に玉を取り出し， 合計得点が先に 5 点を超えたものを勝ちとする．ただし，取り出した玉は，箱に戻すものとする． 先攻と後攻のどちらが有利かを α の値を考慮して，議論しなさい．

(福井大 2016)　　(m20162425)

0.205 次の不定積分を求めなさい．

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

(静岡大 2016)　　(m20162501)

0.206 次の微分方程式を解きなさい．　$\left(x^2 - y^2\right)y' = xy$

(静岡大 2016)　　(m20162502)

0.207 (1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の階数を求めなさい．

(2) x, y, z を実数とするとき，$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$ ならば $x = y = z$ が成り立つことを示しなさい．

(3) 行列 $\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}$ の階数を求めなさい．ただし，x, y, z は実数とする．

(静岡大 2016)　　(m20162503)

0.208 $a, b > 0$ とする．xy 平面の第 1 象限において $\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}} = 1$ が表す曲線を C とする．

また，x 軸，y 軸および C で囲まれる閉領域を A とする．以下の問に答えよ．

(1) $x = a\cos^4 t.\ y = b\sin^4 t$ とする．このとき，$\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}}$ の値を求めよ．また，$\dfrac{dx}{dt}$ を t を用いて表せ．

(2) 曲線 C を $y = y(x)$ と表し，$y'(x) = \dfrac{dy(x)}{dx}$ とする．このとき，$\lim_{x \to a-0} y'(x)$ および $\lim_{x \to 0+0} y'(x)$ を求めよ．

(3) A の概形を描け．

(4) A の面積を求めよ．

(岐阜大 2016)　　(m20162601)

0.209 k を実数とする．連立 1 次方程式

$$(E) \qquad \begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 3k+2 \\ & 4x_2 & +kx_3 & +x_4 & = & 8 \\ 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & -kx_4 & = & -10 \end{cases}$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) (E) の係数行列の行列式の値を求めよ．

(2) (E) が解を持たないときの k の値を求めよ．

(3) (E) が複数個の解を持つときの k の値を求め，さらにそのときの解を示せ．

(岐阜大 2016)　　(m20162602)

0.210 xyz 空間 $(\mathbb{R}^3)$ の線形変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を表す行列を $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とする．すなわち，A は $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を満たす行列である．次の問に答えよ．

(1) 線形変換 f がベクトルの大きさを変えないとき，行列 A の満たすべき条件を求めよ．

(2) 線形変換 f が x 軸上の点を動かさないとき，行列 A の満たすべき条件を求めよ．

(3) (1) と (2) の条件を満たし，平面 $x + y + z = 0$ 上の点を平面 $5x - y + 7z = 0$ 上に移す線形変換 f を表す行列 A を求めよ

(岐阜大 2016)　　(m20162603)

0.211 $y = y(x),\ y' = \dfrac{dy(x)}{dx}$ とする．微分方程式

$$(E) \qquad y' + y\cos x = \sin x \cos x$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) 同次方程式 $y' + y\cos x = 0$ の一般解を求めよ．

(2) (E) の一般解を求めよ．

(3)　(E) の解で，条件 $y(0)=0$ を満たすものを求めよ．

(4)　(3) で求めた y について，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{y(x)}{x^2}$ を求めよ．

(岐阜大 2016)　　(m20162604)

0.212　次の関数 $f(t)$ と $g(t)$ について，以下の問いに答えよ．ここで，e は自然対数の底である．

$$f(t)=5e^{-t}\ ,\qquad g(t)=t^2+t+1$$

(1)　$\dfrac{df}{dt}$, $\dfrac{dg}{dt}$ をそれぞれ求めよ．

(2)　t を媒介変数とする媒介変数方程式

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$$

に対し，以下の問いに答えよ．

ア．$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数で表せ．

イ．$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数で表せ．

(3)　$z(t)=f(t)g(t)$ とし，以下の問いに答えよ．なお，答えは e を含んだままでもよい．

ア．$z(t)$ に関して，すべての極値を求めよ．また，そのときの t も示せ．

イ．$\displaystyle\int_0^1 z(t)dt$ を求めよ．

(豊橋技科大 2016)　　(m20162701)

0.213　合宿で 11 人を 3 つの定員 4 人の部屋に割り振りたい．ここで 11 人中特定の 2 人は必ず別々の部屋になるようにしたい，なお，11 人は区別できる個人として扱うが，3 つの部屋は同等に扱い，区別しない．部屋割りは何通りあるか．場合の数を求めよ．

(豊橋技科大 2016)　　(m20162702)

0.214　行列を $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ とするとき，次の式を計算せよ．

ア．　AC　　　　　イ．　$(3C)A-C(2B)$

(豊橋技科大 2016)　　(m20162703)

0.215　次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

(豊橋技科大 2016)　　(m20162704)

0.216　ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ について，以下を求めよ．

ア．内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

イ．それぞれの大きさ $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$

ウ．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に直交し，かつ大きさが 6 であるすべてのベクトル $\boldsymbol{c}$

(豊橋技科大 2016)　　(m20162705)

0.217 次の値を求めよ．ただし，オ．において，1 以上 100 以下の整数を全体集合とし，$A = \{1, 2, 3, 5, 7, 13\}$ とする．また，$n(A)$ は集合 A の要素数を表し，$\overline{A}$ は集合 A の補集合を表す．

ア．3!　　イ．0!　　ウ．${}_5P_2$　　エ．${}_7C_2$　　オ．$n\left(\overline{A \cup \overline{A}}\right)$

(豊橋技科大 2016)　　(m20162706)

0.218 ある工場は午前 4 時間，午後 6 時間，夜間 2 時間の合計 12 時間稼動し，稼動中はいつも製品 X を時間当たり一定の個数生産している．生産後にすべての製品 X を検査し，ある基準値以上の性能があれば高価な S 級として，それ以外を通常の E 級として出荷している．午前に生産した製品 X は $\dfrac{1}{2}$ が S 級となる．同様に午後は $\dfrac{1}{3}$ が S 級となり，夜間は $\dfrac{3}{4}$ が S 級となる．この工場から出荷された E 級の製品 X のある一つが，午前に生産されたものである確率を求めよ．答えは規約分数で記せ．

(豊橋技科大 2016)　　(m20162707)

0.219 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に関して，以下の設問に答えよ．

(1) 行列 A が 2 個の固有値を持つような a を全て求めよ．またそのときの固有値を求めよ．

(2) 行列 A が 3 個の固有値を持つような a の場合について，

(a) 全ての固有値と固有ベクトルを a を用いて記せ．

(b) 行列 A は，ある正則行列 P によって $D = P^{-1}AP$ と対角化可能である．　P を一つ示し，その P に対応する，P^{-1}，D をそれぞれ求めよ．

(名古屋大 2016)　　(m20162801)

0.220 3 つのつぼがあり，つぼ A には白玉 5 個，赤玉 3 個，つぼ B には白玉 4 個，赤玉 4 個，つぼ C には白玉 1 個，赤玉 7 個が入っている．1 から 6 の目が等しい確率で出るサイコロを振って，1 の目が出たらつぼ A を，$2, 3$ の目が出たらつぼ B を，$4, 5, 6$ の目が出たらつぼ C を選択して，そのつぼから玉を無作為に 1 個取り出して元に戻す試行を繰り返す．

(1) 1 回の試行を行った時に白玉を取り出す確率を求めよ．

(2) 1 回の試行を行って白玉を取り出した場合にサイコロの 4 の目が出た確率を求めよ．

(3) 4 回試行した場合の白玉が出る回数の確率の分布を求めよ．

(4) 10 回試行した場合の白玉が出る回数の確率の期待値 $\left(E(X)\right)$ と分散 $\left(V(X)\right)$ を求めよ．

(名古屋大 2016)　　(m20162802)

0.221 次式 (n は整数) で示される関数のフーリエ級数を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & (2n-1)\pi < x \leqq 2n\pi \\ 1 & 2n\pi < x \leqq (2n+1)\pi \end{cases}$$

(名古屋大 2016)　　(m20162803)

0.222 次の不定積分を求めよ．　$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^3 x} dx$

(名古屋大 2016)　　(m20162804)

0.223 互いに直交する三つの単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ による正規直交座標系 ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 座標系) 上の点 $p(x, y, z)$ を，この座標系と原点を共有し，別の直交する三つの単位ベクトル $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ による正規直交座標系 ($\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ 座標系) で示した場合，p の座標値は (x', y', z') となった．なお，座標系は右手系とする．

(1) x', y', z' を x, y, z へ変換する行列 M を求めよ．

(2) いま，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 座標系における， ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ を $\boldsymbol{k}$ の正側から見て，$\boldsymbol{k}$ を軸として右回りに $45°$ 回転し，回転後の $\boldsymbol{i}$ の正側から見て，$\boldsymbol{i}$ を軸として右回りに $45°$ 回転した後のベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ による座標系を $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ 座標系とする．

(a) $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ 座標系で $p_1(1, 0, 0)$, $p_2(0, 1, 0)$, $p_3(0, 0, 1)$ で示される点の，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 座標系での座標を求めよ．

(b) $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ 座標系から $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 座標系に変換する行列 M の各要素の値を求めよ．

(c) M の転置行列は M の逆行列と等しくなる． $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 座標系で $p_4(2, 1, 1)$ で示される点の $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ 座標系での座標を求めよ．

(名古屋大 2016)　　(m20162805)

0.224 関数 $f(x, y) = 3x^2y$ について，条件 $2x^4 + y^4 = 48$ の下での $f(x, y)$ の極値を求めよ．

(名古屋工業大 2016)　　(m20162901)

0.225 次の不定積分を求めよ． $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx$

(名古屋工業大 2016)　　(m20162902)

0.226 次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\ , \qquad D = \left\{(x, y)\,|\,(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqq\ 2\right\}$$

(名古屋工業大 2016)　　(m20162903)

0.227 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

の固有値を求めよ．また，A の最大固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(名古屋工業大 2016)　　(m20162904)

0.228 空間ベクトルを

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ , \qquad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

とおく．

(1) $\{\boldsymbol{a}_1\ ,\ \boldsymbol{a}_2\}$ からグラム・シュミットの正規直交化法を用いて，正規直交系 $\{\boldsymbol{u}_1\ ,\ \boldsymbol{u}_2\}$ を求めよ．

(2) (1) で求めた $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ を含む R^3 の正規直交基底を 1 組求めよ．

(名古屋工業大 2016)　　(m20162905)

0.229 点 (1, −1), (−3, 7) をそれぞれ (5, −5), (−11, 23) に移す 1 次変換を行うことができる 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えなさい.

(1) 行列 A を求めなさい.

(2) 行列 A は $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=0$ を満たす，このとき A^4 を求めなさい．ただし，E は単位行列である.

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(三重大 2016)　　(m20163101)

0.230　3 次元直交座標系の xyz 空間に点 A(0, 1, 1)，点 B($-a$, 0, 1)，点 C($a\cos t$, $a\sin t$, 0) がある．ただし，a は正の実数で，$0 \leqq t < 2\pi$ である．このとき，以下の問いに答えなさい.

(1) $\angle ACB=\theta$, $t=\pi$ とした場合，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ となる a を求めなさい.

(2) (1) の条件において，$\triangle ABC$ の面積を求めなさい.

(3) $\triangle ABC$ の重心を G とする．点 C について t を変化させたとすると，$\overrightarrow{AG}$ と $\overrightarrow{AC}$ が垂直となるような a がただ一つ決まる場合の $\cos t$ と $\sin t$ を求めよ.

(三重大 2016)　　(m20163102)

0.231　以下の問いに答えなさい．ただし，$y'=\dfrac{dy}{dx}$ である.

$y=x^x\ (x>0)$ のとき，y' を求めよ.

(三重大 2016)　　(m20163103)

0.232　$\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$　(C は定数) を証明せよ.

(三重大 2016)　　(m20163104)

0.233　以下の問いに答えなさい．ただし，$y'=\dfrac{dy}{dx}$, $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ である.

$y''+4y'+3y=e^{2x}$ の一般解を求めよ.

(三重大 2016)　　(m20163105)

0.234　次の関数 $f(x)$ の第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めなさい.

$f(x)=e^x\sin x$

(三重大 2016)　　(m20163106)

0.235　関数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ に関して，次の問いに答えなさい.

(1) 範囲 $0 \leqq x \leqq a$ (a は 1 未満の正の定数) で $y=f(x)$ の描く曲線を xy 平面上に図示し，$\displaystyle\int_0^a f(x)dx$ の示す意味を説明しなさい.

(2) 次の式が成り立つことを，問 (1) を利用して図形を用いて説明しなさい.

$$\int_0^a \sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\left(a\sqrt{1-a^2}+\sin^{-1}a\right)$$

(三重大 2016)　　(m20163107)

0.236　以下の 3 次正方行列 A について，以下の問いに答えなさい.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \\ 3a & 3 & a \end{bmatrix}$$

(1) $\mathrm{rank}A$ を求めなさい.

(2) $\det A$ を求めなさい.

(3) $a=-1$ のとき，A^{-1} を求めなさい.

(4) 行列 A が 0 を固有値として持つとき，a の値と 0 以外の固有値を求めなさい.

(三重大 2016)　　(m20163108)

0.237 次の関数を微分せよ.

(1) $y=\dfrac{\sin x - x\cos x}{x\sin x+\cos x}$　　(2) $y=\sqrt{x^2+3x+2}$　　(3) $y=x^{\log_e x}$

(三重大 2016)　　(m20163109)

0.238 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1}dx$　　(2) $\displaystyle\int x^2\sin x dx$

(三重大 2016)　　(m20163110)

0.239 行列に関する以下の問いに答えよ.

(1) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ のとき，積 AB および積 AB の逆行列 $(AB)^{-1}$ を求めよ.

(2) 上記の設問 (1) において，$C=xA+B$ とすれば，逆行列 C^{-1} が存在しない場合の x を求めよ.

(3) 次の連立方程式を満たす行列 X, Y を求めよ.

$$2X+Y=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$
$$X+2Y=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(三重大 2016)　　(m20163111)

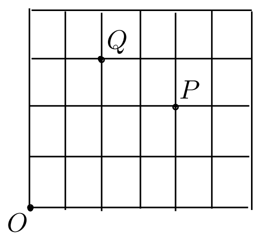
0.240 (1) 曲線 $y=\log_e x$ 上の点 $(1,\ 0)$ における接線が曲線 $y=ae^x$ の接線でもあるとき，定数 a の値を求めよ.

(2) この接線，曲線 $y=ae^x$，および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(三重大 2016)　　(m20163112)

0.241 (1) 異なる n 個のものから r 個をとって並べる方法（順列）の数 ${}_nP_r$，および組合せの数 ${}_nC_r$ を式で表せ．また，それぞれの式の意味および両式の関係について説明せよ.

(2) 下図の点 O から出発し，サイコロを投げて次の規則に従って 1 目盛りだけ進むものとする.
（規則）1 または 2 の目が出れば右に進み，それ以外の目が出れば上に進む.
このとき，点 Q に達する確率は，点 P に達する確率の何倍になるか.



(三重大 2016)　　(m20163113)

0.242 xy 平面上のサイクロイドは，θ をパラメータとして

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$$

で与えられる．ただし，a は正の定数である．この曲線の $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ 部分の長さを求めよ.

(三重大 2016)　　(m20163114)

0.243 xyz 空間中の曲面 $z = 5 - x^2 - y^2$，z 軸を中心軸とする半径 1 の円筒，および xy 平面によって囲まれた領域の体積を求めよ．

(三重大 2016)　　(m20163115)

0.244 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 (\log x)^2 dx$ の値を求めよ．

(三重大 2016)　　(m20163116)

0.245 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について以下に答えよ．

(1) A^5 の行列式 $|A^5|$ の値を求めよ．

(2) A の固有値および互いに直交する長さ 1 の固有ベクトルをすべて求めよ．

(3) A を変換 P^TAP によって対角化する直交行列 P を構成し，対角化を実行せよ．ただし，P^T は P の転置行列である．

(三重大 2016)　　(m20163117)

0.246 次の 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値を λ_1，λ_2，λ_3 $(\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) λ_1，λ_2，λ_3 の値を求めよ．

(2) 次の等式が成り立つような正則行列 P を求めよ．

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2016)　　(m20163201)

0.247 (1) 次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{5x-4}{2x^2+x-6} dx$$

(2) 自然数 m, n に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

(奈良女子大 2016)　　(m20163202)

0.248 初項 $a_1 = \sqrt{2}$ であり，次の漸化式を満たす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．

$$a_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{a_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

数学的帰納法を用いて，次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，不等式 $a_n < 2$ を示せ．

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加であることを示せ．

(奈良女子大 2016)　　(m20163203)

0.249 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$ を求めよ．

(2) 関数 $y=\log\sqrt{1-x^2}$ を微分せよ．ただし，x は実数で $|x|<1$ とする．

(奈良女子大 2016) (m20163204)

0.250 関数 $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^4}$ を考える．ただし，x は正の実数とする．

(1) 最小点 $x=x_0$ を求めよ．

(2) $x=x_0$ の周りでテイラー展開をして $x-x_0$ の 2 乗の項までの近似式を求めよ．

(奈良女子大 2016) (m20163205)

0.251 正の実数 a に対して，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ が成り立つことを利用して，

定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(x-1)^2e^{-a(x^2-2x)}dx$ を計算せよ．

(奈良女子大 2016) (m20163206)

0.252 微分方程式に関する以下の問題に答えよ．

(1) 微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=-x+\sin t$ を解いて，$t=0$ で $x=0$ となる解 $x(t)$ を求めよ．

(2) 微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}=1-\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2$ を考える．

(a) $v=\dfrac{dx}{dt}$ とおく．$t=0$ で $v=0$ となる解 $v(t)$ を求めよ．
(b) $t=0$ で $x=0$ かつ $v=0$ となる解 $x(t)$ を求めよ．

(奈良女子大 2016) (m20163207)

0.253 xy 座標で多項式 $5x^2-6xy+5y^2=8$ で表される曲線を考える．

(1) この式は実数の定数 a,b,c を成分に持つ $2\times\ 2$ 対称行列

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

を使って，

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=1$$

と書き換えることができる．行列 A を求めよ．

(2) 行列 A は異なる 2 つの実数の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ をもつ ($\lambda_1<\lambda_2$ とする)．$\lambda_1,\ \lambda_2$ を求めよ．

(3) 前問で得られた固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ の固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ とする．$\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ が直交していることを示せ．

(4) $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ をそれぞれ長さ 1 になるように決めて，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=X\boldsymbol{e}_1+Y\boldsymbol{e}_2$$

によって新しく XY 座標を定義する．問題で与えた多項式を XY 座標で表し，もとの xy 座標で曲線のグラフをかけ.

(奈良女子大 2016) (m20163208)

0.254 地球の人口変化を微分方程式で表す．(1)〜(3) に答えよ．

(1) ある時刻 t における人口を $P(t)$ とし，その時の人口増加率（単位時間あたりに増加する人口）は人口に比例すると仮定すれば，次式が成り立つ．

$$\frac{dP}{dt} = aP \qquad ①$$

ただし，a は正の定数である．時刻 0 における人口を $P_0\ (> 0)$，すなわち $P(0) = P_0$ とおいて，式 ① を解いて P を求めよ．

(2) 式 ① に従うと人口は単調増加することになるが，現実の地球の人口収容力には限界がある．収容できる限界の人口 $P_{\max}$ に近づくと人口増加が鈍化することを表すため，人口増加率を $(1-P/P_{\max})$ 倍する．

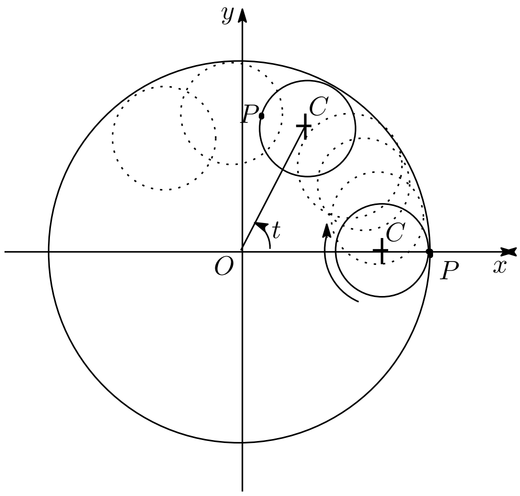
$$\frac{dP}{dt} = a\left(1 - \frac{P}{P_{\max}}\right)P \qquad ②$$

これを解いて P を求めよ．ただし，a と P_0 は (1) と同じとする．

(3) (1) と (2) の解の概形を解答用紙の所定欄に図示せよ．

(京都大 2016)　　(m20163301)

0.255 原点を中心とした半径 a の大円がある．大円の中に半径 $a/4$ の小円があり，初期状態において座標 $(a, 0)$ にある点 P で大円に内接している．　小円が大円に内接したまま時計回りに回転すると，小円は反時計回りに大円の内側を移動する．　点 P は小円の移動と回転に従って移動する．大円と小円の接触点では滑りは生じないものとする．　このとき，(1)〜(6) に答えよ．



(1) 原点 O と小円の中心 C を結ぶ線分と x 軸が成す角が t のとき，　点 P の座標 (x_p, y_p) を t で表せ，ただし，$0 < t < \pi/2$ とする．

(2) 点 P の軌跡のうち第 1 象限の部分 $(0 < t < \pi/2)$ の曲線の方程式を求めよ．

(3) 小円が大円の中を一周して元の位置に戻るまでに点 P が描く軌跡 M を解答用紙に作図せよ．

(4) 軌跡 M の全長を求めよ．

(5) 軌跡 M で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(6) 軌跡 M のうち，$0 < t < \pi/2$ における接線が x 軸および y 軸によって切り取られる線分の長さを求めよ．

(京都大 2016)　　(m20163302)

0.256 あるスポーツチームの試合結果は「勝ち」,「負け」,「引き分け」のいずれかとする．また,

- ある試合に勝った場合，次の試合に勝つ確率は 7/10，負ける確率は 3/10
- ある試合に負けた場合，次の試合に勝つ確率は 6/10，負ける確率は 4/10

- ある試合に引き分けた場合，次の試合に勝つ確率は 1/3，負ける確率は 1/3，
  引き分ける確率は 1/3

である．次の (1)〜(3) に答えよ．

(1) 最初の試合に引き分けた場合，3 試合目に勝つ確率を求めよ．

(2) 最初の試合に引き分けた場合，$n(\geq 2)$ 試合目に勝つ確率を求めよ．

(3) 最初の試合に引き分けた場合，$n(\geq 2)$ 試合目に初めて勝つ確率を求めよ．

(京都大 2016)　　(m20163303)

0.257 表が出る確率が p．裏が出る確率が $(1-p)$ の硬貨を投げ，表が出れば得点が 1 点増え，裏が出れば得点が 1 点減るゲームをする．硬貨を t 回投げた後の得点を Z_t 点とするとき，次の (1)〜(4) に答えよ．ただし，$Z_0 = 0$ とする．

(1) $Z_3 = 1$ となる確率を求めよ．

(2) $Z_3 = 1$ かつ $Z_7 = 3$ となる確率を求めよ．

(3) $Z_t = k$ となる確率を求めよ．ただし，$-t \leq k \leq t$ とする．

(4) 硬貨を t 回投げたとき，表が偶数回出る確率を求めよ．

(京都大 2016)　　(m20163304)

0.258 a を定数とする．x, y, z に関する連立 1 次方程式

$$(*) \quad \begin{cases} x - y + az = 1 \\ ax - ay + 4z = -2 \\ (a+1)x - 3y + (a+4)z = -1 \end{cases}$$

の解が 2 組以上存在するような a の値を求め，さらにその a の値に対して $(*)$ の解を求めよ．

(京都工芸繊維大 2016)　　(m20163401)

0.259 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$ を求めよ．　　(2) 広義積分 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2016)　　(m20163402)

0.260 xy 平面上の関数 $f(x,y) = x^3 + 2xy - y^2 - 3x - 2y$ の極値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2016)　　(m20163403)

0.261 a を正の定数とする．2 階の微分方程式　$y'' + ay = 0$　の解のうち，
2 条件　$y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$　を満たすものをすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2016)　　(m20163404)

0.262 $\mathbb{R}^2$ は 2 次元実数列ベクトルの集合とする．$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ の大きさを $|\boldsymbol{x}|$ とし，実数を成分とする 2 次の正方行列 B に対して

$$||B|| = \max_{|\boldsymbol{x}|=1} |B\boldsymbol{x}|$$

と定める．$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，$||B||$ の値を求めよ．また，その値を与える $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ をすべて求めよ．

(大阪大 2016)　　(m20163501)

0.263 (1) 実数を成分とする 2 次の正方行列 A, B は対称行列とし，A は相異なる固有値を持つとする．このとき，$AB = BA$ ならば A と B は同じ直交行列によって対角化されることを示せ．

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ を同じ直交行列によって対角化せよ.

(大阪大 2016)　　(m20163502)

0.264 m を 6 以上の偶数, n を $3 \leqq n \leqq \dfrac{m}{2}$ を満たす自然数とする. 正 m 角形の m 個の頂点に, 時計回りに $1, 2, 3, \cdots, m$ と番号をふる. この m 個の頂点から n 個の頂点を無作為に選んで n 角形を作る. ただし, 頂点が一つでも異なる n 角形は異なるものとする. このとき, 以下の設問に答えよ.

(1) $m = 8$ のとき, 辺上, または内部に正 8 角形の中心を持たない 3 角形の総数を答えよ.

(2) n 角形が, 辺上, または内部に正 m 角形の中心を持たない確率を $P_{n,m}$ とする. $P_{n,m}$ を n と m を用いて表せ. また, $\displaystyle\lim_{m\to\infty} P_{n,m}$ を求めよ.

(大阪大 2016)　　(m20163503)

0.265 実定数 a, b, c は $b^2 - ac > 0,\ b > 0$ を満たしている. $D = b^2 - ac$ と記す. 以下の設問に答えよ.

(1) 連立常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} + bx + cy = 0,\ t \geq 0$$
$$\frac{dy}{dt} - ax - by = 0,\ t \geq 0$$

の解 $x = x(t),\ y = y(t)$ で初期条件 $x(0) = 0,\ y(0) = 1$ を満たすものを求め $b,\ c,\ D$ と t を用いて表せ.

(2) (1) の解 $y = y(t)$ に対して, $y(t) > 0$ が任意の $t \geq 0$ に対して成立することを示せ.

(3) (1) の解を用いて

$$z(t) = \frac{x(t)}{y(t)}, \quad t \geq 0$$

と置くと

$$\frac{dz}{dt} + az^2 + 2bz + c = 0, \quad z(0) = 0$$

を満たすことを示せ.

(4) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} z(t)$ と $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{dz(t)}{dt}$ の値を求め $b,\ c,\ D$ を用いて表せ.

(大阪大 2016)　　(m20163504)

0.266 (1) 複素変数 z の関数 $f(z) = \overline{z}$ は正則であるか否かを判定せよ. ただし, $\overline{z}$ は z の複素共役とする.

(2) $a > b > 0$ となる実定数 a, b において, 積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\cos t}$ の値を求めよ.

(3) 複素平面 C から 1 点 α だけを除いた領域 $D(\alpha) = C - \{\alpha\}$ において, 複素変数 z の関数 $g(z) = 1/(z - \alpha)$ の原始関数を求めよ. もし存在しないならばその理由を述べよ.

(大阪大 2016)　　(m20163505)

0.267 (1) α は整数でない実数とする. $\cos(\alpha x)\ (-\pi < x < \pi)$ をフーリエ級数展開せよ. すなわち

$$\cos(\alpha x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\Big\}, \qquad -\pi < x < \pi$$

を満たす

$$a_n\ , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$
$$b_n\ , \quad n = 1, 2, \cdots$$

を求めよ.

(2) y は $\sin y \neq 0$ を満たす実数とする．(1) の結果を利用して

$$\frac{1}{\sin y} = \frac{1}{y} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left\{ \frac{1}{y+n\pi} + \frac{1}{y-n\pi} \right\}$$

が成立することを示せ.

(大阪大 2016)　　(m20163506)

0.268 2 次元平面において，4 点 $(\sqrt{2}, 0)$, $(0, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(0, -\sqrt{2})$ で囲まれた菱形を考える．その内部において，ランダムに点 P をとる．P から最も近い菱形の周上の点を Q とし，PQ の長さを X とする．PQ の長さを求める操作を独立に n 回繰り返し，X_1, X_2, $\cdots$, X_n を得た．ただし n は自然数とする．以下の設問に答えよ.

(1) X の分布関数，すなわち，$F(x) = P(X \leq x)$ を求めよ.
また，$F(x) = \displaystyle\int_0^x f(y)dy$ を満たす確率密度関数 $f(x)$ も求めよ.

(2) PQ の長さの平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ の期待値 $E(\overline{X})$ を求めよ.

(3) 平均 $\overline{X}$ の分散 $V(\overline{X})$ を求めよ.

(大阪大 2016)　　(m20163507)

0.269 曲面 S : $x^2 + y^2 - z^2 + x + y + 2 = 0$ $(z > 0)$ について以下の問いに答えよ.

(1) 曲面 S と平面 $z = 2$ の交線の長さを求めよ.

(2) 曲面 S と平面 $z = 2$ に囲まれた領域の体積を求めよ.

(3) 点 (x, y, z) が曲面 S 上にあるとき，$x + y - 2z$ の最大値を求めよ.

(大阪大 2016)　　(m20163508)

0.270 関数 $x(t)$, $y(t)$ に関する次の連立微分方程式について，以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 2y + \cos 2t \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

(1) $x(t)$ および $y(t)$ の一般解を求めよ.

(2) 初期条件 $x(0) = y(0) = 0$ として $x(t)$ と $y(t)$ を求めよ.

(3) $t \to \infty$ において $x(t)$ が $A\cos(\omega t + \theta)$ なる関数形に漸近することを示し，その時の A, ω, θ の値を求めよ．ただし，A, ω, θ は実数であり，$A > 0$, $\omega > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ とする．また，θ は逆三角関数を用いて表しても構わない.

(大阪大 2016)　　(m20163509)

0.271 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に関して以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A が対角化する直交行列 P の中で対称行列を求めよ.

(3) A の逆行列を，問い (1), (2) で求めた A の固有値と P を用いて表せ.

(4) 問い (3) の結果を用いて，連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ の解を求めよ．

(5) 問い (3) の結果および直交行列の性質 $P^TP = I$ を用いて，正の整数 n に対する連立方程式 $A^n\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ の解 $\boldsymbol{x}_{(n)}$ を P, n および A の固有値を用いて表せ．，$n \to \infty$ としたときの $\boldsymbol{x}_{(n)}$ の極限を示せ．ただし，P^T は P の転置行列を，I は単位行列を表す．

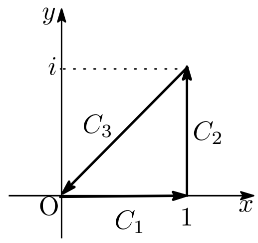
(大阪大 2016)　　(m20163510)

0.272 以下の問いに答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) $\dfrac{(1-\sqrt{3}i)^5}{(\sqrt{3}-i)^3}$ を $x+iy$ の形で表せ．

(2) 複素関数 $f(z) = f(x+iy) = x^2 - y^2 + 2xyi$ は正則であることを示し，
導関数 $f'(z)$ を求めよ．また，$f'(z)$ も正則であることを示せ．

(3) 図に示す複素平面上の積分経路 C_1, C_2, C_3 に沿って，
問い (2) の複素関数 $f(z)$ をそれぞれ積分した，
$\displaystyle\int_{C_1} f(z)dz$, $\displaystyle\int_{C_2} f(z)dz$, $\displaystyle\int_{C_3} f(z)dz$ を求めよ．
また，積分経路 $C = C_1 + C_2 + C_3$ に沿って
$f(z)$ を積分した $\displaystyle\int_C f(z)dz$ を求めよ．



(大阪大 2016)　　(m20163511)

0.273 (1) 次の方程式において，z についてすべての解を極形式で表せ．また，それを複素平面上に図示せよ．ただし，i は虚数単位である．　　$z^3 = -2+2i$

(2) 留数定理を用いて，次の積分値を求めよ．　　$I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+1}dx$

(大阪府立大 2016)　　(m20163601)

0.274 次の微分方程式を解け．

(1) $(1+x^2)dy + (1+y^2)dx = 0$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} - 8y = e^{3x}$

(大阪府立大 2016)　　(m20163602)

0.275 4 次の正方行列 A を $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ により定める．

(1) 行列 A の階数を求めよ．

(2) 行列 A の固有値をすべて求めよ．さらに，そのうちで絶対値が最小の固有値に対する固有ベクトルを 1 つ求めよ．

(大阪府立大 2016)　　(m20163603)

0.276 実ベクトル空間 V とそのベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{x}_n$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{x}_n$ が一次独立であるとはどういうことか，その定義を述べよ．

(2) $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{x}_n$ が V を生成するとはどういうことか，その定義を述べよ．

(3) $V = R^4$ で

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

のとき，$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$，$\boldsymbol{x}_4$，$\boldsymbol{x}_5$ が V を生成するかどうかを，(2) で述べた定義にしたがって調べよ．

(大阪府立大 2016)　　(m20163604)

0.277 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

とするとき，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) A を直交行列を用いて対角化せよ．

(大阪府立大 2016)　　(m20163605)

0.278 A を n 次の複素正方行列とする．ある自然数 m について，$A^m = O$ が成り立つならば，$A^n = O$ が成り立つことを示そう．

証明は背理法により行う．すなわち，$A^n \neq O$ と仮定して矛盾を導く．$A^n \neq O$ より，ある n 次元複素数ベクトル $\boldsymbol{x}$ をとると，$A^n\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ となる．　このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{x}$, $A\boldsymbol{x}$, $\cdots$, $A^n\boldsymbol{x}$ は一次独立であることを示せ．

(2) 複素 n 次元数ベクトル空間 C^n の $n+1$ 個のベクトルは必ず一次従属であることを示せ．

(3) 上記の (1)，(2) を用いて証明を完成せよ．

(大阪府立大 2016)　　(m20163606)

0.279 a を実数の定数とする．関数 $f(x)$ を

$$f(x) = 1 + a\sqrt{x} - \log x$$

とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x) = 0$ の異なる実数解の個数を調べよ．

(2) $F(x, y) = f(x^y)$ $(x > 0)$ とおくとき，$(\log x)\dfrac{\partial F}{\partial x} - \dfrac{y}{x}\dfrac{\partial F}{\partial y}$ を計算せよ．

(大阪府立大 2016)　　(m20163607)

0.280 自然数 n に対して，I_n を　$I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{n+1}}dx$　とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) I_1 の値を求めよ．

(2) I_{n+1} を I_n と n を用いて表せ．

(3) I_n の値を求めよ．

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(I_{n+1} + I_{n+2} + \cdots + I_{2n})$ を求めよ．

(大阪府立大 2016)　　(m20163608)

0.281 領域 D を　$D=\left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\leqq 1\right\}$　とするとき，次の問いに答えよ．

(1) D を図示せよ．　(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ の値を求めよ．

(大阪府立大 2016)　　(m20163609)

0.282 行列 $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値 λ と固有空間 $W(\lambda;A)$ を全て求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P を 1 つ求めよ．なお，${}^tPP=E$（単位行列）を満たす実正方行列 P を直交行列という．

(3) $n\in\mathbb{N}$ に対して，A^n のトレース $\mathrm{Tr}\,A^n$ を計算せよ．

(神戸大 2016)　　(m20163801)

0.283 行列 $A=\begin{pmatrix} \dfrac{11}{6} & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ に対して，$B=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}kA^{k-1}$ とする．ただし，A^0 は単位行列 E を表すものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) B を求めよ．

(2) $(E-A)^2B$ を計算せよ．

(神戸大 2016)　　(m20163802)

0.284 $f(x,y)=\dfrac{\sin x}{\cos x+\cosh x}$ に対して，$\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(x,y)+\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x,y)$ を計算せよ．

ただし，$\cosh y=\dfrac{e^y+e^{-1}}{2}$ である．

(神戸大 2016)　　(m20163803)

0.285 $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(2x^2+2\sqrt{2}xy+3y^2)}dxdy$ の値を求めよ．

(神戸大 2016)　　(m20163804)

0.286 $D_0(x)\equiv 1,\ D_n(x)=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2\cos kx\ (n\geq 1)$，$F_n(x)=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}D_k(x)\ (n\geq 0)$ で $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{D_n\}$ と $\{F_n\}$ を定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $D_n(x)\sin\dfrac{x}{2}=\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x$ となることを示せ．

(2) $F_n(x)\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2(n+1)}\left\{1-\cos(n+1)x\right\}=\dfrac{1}{n+1}\sin^2\dfrac{n+1}{2}x$ となることを示せ．

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}F_n(y)dy=2\pi$ となることを示せ．

(4) $0<\delta<\pi$ なる δ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\delta\leq|y|\leq\pi}F_n(y)dy=0$ となることを示せ．

(神戸大 2016)　　(m20163805)

0.287 k を整数とし,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & k & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & -k \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とおく．以下の各問に答えよ.

(1) A が正則であるための k の条件を求めよ.

(2) $k = 1$ のとき，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{j}$ の解を求めよ.

(3) A が正則行列であるとき，A の逆行列の成分がすべて整数となるための必要十分条件は $k = 1$ であることを示せ.

(神戸大 2016) (m20163806)

0.288 自然数 n に対して，次数 n 以下の実数係数 1 変数多項式全体からなる実ベクトル空間 P_n を考え,

$$H_n(x) = e^{x^2} \left(\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2}$$

とおく．以下の各問に答えよ.

(1) $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$ を具体的に求めよ.

(2) $H_n(x)$ が次数 n の多項式であることを示せ.

(3) $H_0(x)$, $H_1(x)$, $\cdots$, $H_n(x)$ が P_n の基底をなすことを示せ.

(4) $0 \leqq m < n$ を満たす任意の整数 m について，次の式が成り立つことを示せ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m H_n(x) e^{-x^2} dx = 0$$

(神戸大 2016) (m20163807)

0.289 xy 平面上に 4 点 $P = (0, \pi)$, $Q = (\pi, 0)$, $R = (2\pi, \pi)$, $S = (\pi, 2\pi)$ をとり，四辺形 $PQRS$ で囲まれた領域（周上の点も含む）を D とする．関数 $f(x, y) = \cos x + \sin y$ について以下の各問に答えよ.

(1) D の内部における $f(x, y)$ の極値を調べよ.
（ここで，D の内部とは D から周上の点を除いた領域である.）

(2) D における $f(x, y)$ の最大値と最小値を求めよ.

(神戸大 2016) (m20163808)

0.290 (1) $x = \sin^2 \theta$ と変数変換して，次の積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$

(2) 次の xy 平面上の領域 D を図示せよ． $D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 1 \leqq x + y \leqq 4,\ 0 \leqq x,\ 0 \leqq y \right\}$

(3) 変数変換 $x = st$, $y = s(1-t)$ により，次の st 平面上の領域 E が (2) の領域 D に 1 対 1 に写されることを示せ． $E = \left\{ (s, t) \;\middle|\; 1 \leqq s \leqq 4,\ 0 \leqq t \leqq 1 \right\}$

(4) 次の重積分の値を求めよ．ただし，D は (2) で定義した領域とする． $\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{x}{y(x+y)}} dxdy$

(神戸大 2016) (m20163809)

0.291 関数 $f_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ を

$$f_n(x) = c_n \left(\frac{1+\cos x}{2} \right)^n$$

で定める．ただし，c_n は正の定数で

$$\int_0^\pi f_n(x)dx = 1$$

となるように選ぶ．以下の問いに答えよ．

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_0^\pi \left(\frac{1+\cos x}{2} \right)^n \sin x dx$$

を求めよ．

(2) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $c_n < \dfrac{n+1}{2}$ が成り立つことを示せ．

(3) $0 < x \leqq \pi$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．

(岡山大 2016)　　(m20164001)

0.292 関数 $f(x)$ を　$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$　で定める．以下の問いに答えよ．

(1) e^x のマクローリン展開を書け．

(2) a_k $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ を　$f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$　により定める．a_k $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ の値を求めよ．

(3) $f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ で表す．$f^{(99)}(0)$ を求めよ．

(4) 広義積分　$\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(x)dx$　が収束するか発散するかを判定せよ．

(岡山大 2016)　　(m20164002)

0.293 実数を成分とする 3 次正方行列 A で次の条件を満たすものを考える．

$$(*) \qquad A^2 \neq O, \qquad A^3 = O$$

以下の問いに答えよ．

(1)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると，B は上記の条件 $(*)$ を満たすことを示せ．

(2) $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $A^2\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ が存在することを示せ．

(3) 上記 (2) における $\boldsymbol{u}$ に対して，$\boldsymbol{u}$, $A\boldsymbol{u}$, $A^2\boldsymbol{u}$ は 1 次独立であることを示せ．

(4) ある正則行列 P を用いて

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

と表されることを示せ．

(岡山大 2016)　　(m20164003)

0.294 $t \in \mathbb{R}$ に対して，3 次正方行列 A を次で定める．

$$A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ．

(1) A の行列 $\det A$ を t の多項式で表し，かつ，$\det A = 0$ となる t を求めよ．

(2) $\mathrm{rank}(A)$ を t の値で場合分けして求めよ．

(3) 3 個の列ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ を次のようにとる．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

そして，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a} \rangle\, \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{b} \rangle\, \boldsymbol{b} + \langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{c} \rangle\, \boldsymbol{c}\,, \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$$

と定める．ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は，$\boldsymbol{x} =^t (x_1,\ x_2,\ x_3,)$，$\boldsymbol{y} =^t (y_1,\ y_2,\ y_3,) \in \mathbb{R}^3$ に対して
$\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ で与えられる $\mathbb{R}^3$ 上の標準内積である．
$\mathrm{rank}(f)$ を t の値で場合分けして求めよ．

(岡山大 2016)　　(m20164004)

0.295 実行列　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　を考える．以下の問いに答えよ．

(1) A の階数を求めよ．

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) 実 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の中で，次の図形 S を考える．

$$S = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \boldsymbol{v} \cdot A\boldsymbol{v} = \sqrt{2} \right\}$$

ただし，$\boldsymbol{v} \cdot A\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{v}$ との内積を表す．S の概形を図示せよ．

(4) S の点で，原点との距離が最小のものをすべて求めよ．

(広島大 2016)　　(m20164101)

0.296 (1) 2 以上の自然数 n に対して，

$$\int \cos^n \frac{x}{3} dx = \frac{3}{n} \cos^{n-1} \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} \frac{x}{3} dx$$

が成り立つことを示せ．

(2) $f(\theta) = \cos^3 \dfrac{\theta}{3}$ とし，xy平面上の曲線

$$C\ :\ \begin{cases} x = f(\theta) \cos\theta \\ y = f(\theta) \sin\theta \end{cases} \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

を考える．次の (i)，(ii)，(iii) に答えよ．

(i) C の概形を図示せよ（x 軸，y 軸との交点の座標も記すこと）．

(ii) C の長さを求めよ.

(iii) C で囲まれた部分の面積を求めよ.

(広島大 2016)　　(m20164102)

0.297 A は実 $n\times\ k$ 行列でその階数は $\mathrm{rank}\,A = k < n$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) ${}^tAA$ が対称行列であることを示せ.

(2) ${}^tAA$ が正定数かつ正則であることを示せ.

(3) ${}^tAA$ の逆行列が対称行列であることを示せ.

(4) $\boldsymbol{b}$ は実 n 次元列ベクトルとし，実 k 次元列ベクトル空間 $\mathbb{R}^k$ から $\mathbb{R}$ への写像 f を

$$f(\boldsymbol{x}) = {}^t(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x})$$

を定める．このとき，

$$f(\boldsymbol{x}) = {}^t\big(\boldsymbol{x} - ({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\boldsymbol{b}\big)({}^tAA)\big(\boldsymbol{x} - ({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\boldsymbol{b}\big) + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{b} - {}^t\boldsymbol{b}A({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\boldsymbol{b}$$

であることを示し，$f(\boldsymbol{x})$ を最小にする $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(広島大 2016)　　(m20164103)

0.298 逆正弦関数 $f(x) = \sin^{-1} x$ を考える．ただし，f の値域は閉区間 $[-\pi/2,\ \pi/2]$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) 開区間 $(-1, 1)$ において f の導関数 f' を求めよ.

(2) $n = 0, 1, 2, \cdots$ と $-1 < x < 1$ に対して，

$$(1 - x^2)f^{(n+2)}(x) = (2n + 1)xf^{(n+1)}(x) + n^2f^{(n)}(x)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$f^{(n)}$ は f の n 次導関数を表す.

(3) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，$\dfrac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n)!} = \dfrac{(2n)!}{(2^nn!)^2}$ であることを示せ．ただし，$0! = 1$ とする.

(4) F は開区間 $(-1, 1)$ 上の C^∞ 級関数とする．自然数 N と $N + 1$ 個の実数 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_N$ に対して，$g_N(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_kx^k$ と定める．ただし，$x^0 = 1$ とする．このとき，

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x) - g_N(x)}{x^N} = 0$$

となるための必要十分条件は，$a_k = \dfrac{F^{(k)}(0)}{k!}$ $(k = 0,\ 1,\ \cdots,\ N)$ であることを示せ.

(5) 自然数 N に対して，$S_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N}\frac{(2k)!\,(2N - 2k)!}{(k!)^2\big((N - k)!\big)^2}$ を求めよ.

(広島大 2016)　　(m20164104)

0.299 実行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 9 \\ -2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$ を考える．以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) A^{-1} の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) 実 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の基底 $\{\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}\}$ を任意にとり，$\mathbb{R}^3$ のベクトルの列 $\{\boldsymbol{v}_n\}$ に対して $\boldsymbol{v}_n = a_n\boldsymbol{x} + b_n\boldsymbol{y} + c_n\boldsymbol{z}$ とする．ただし，$a_n,\ b_n,\ c_n$ は実数である．このとき，$\{\boldsymbol{v}_n\}$ が有界であることと，$\{a_n\},\ \{b_n\},\ \{c_n\}$ がすべて有界数列であることとが同値であることを示せ．ただし，$\{\boldsymbol{v}_n\}$ が有界であるとは，$\boldsymbol{v}_n$ の長さからなる数列 $\{||\boldsymbol{v}_n||\}$ が有界であることと定義する．

(4) $W = \left\{ \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \{A^n\boldsymbol{w} \mid n = 1, 2, 3, \cdots\} \text{ は有界} \right\}$ とおく．W が $\mathbb{R}^3$ の部分線形空間になることを示し，その基底を求めよ．

(広島大 2016)　　(m20164105)

0.300 三角不等式 $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$ を証明せよ．ただし，$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ は任意のベクトルである．

(広島大 2016)　　(m20164106)

0.301 $\nabla \times (r\,\boldsymbol{r})$ の値を計算せよ．ただし，途中の計算式も解答用紙に明記すること．与式において，右側の $\boldsymbol{r}$ は任意の点の位置ベクトルで，左側の r は $r = |\boldsymbol{r}|$ なるスカラーである．

(広島大 2016)　　(m20164107)

0.302 $\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & m \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & n \end{bmatrix}$ が直交行列となるように，$m,\ n$ を定めよ．

(広島大 2016)　　(m20164108)

0.303 (1) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t\ \ (a > 0)$ のとき，$\dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．ただし，途中の計算式も解答用紙に明記すること．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$ の値を求めよ．ただし，途中の計算式も解答用紙に明記すること．

(広島大 2016)　　(m20164109)

0.304 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$ について，$t = \tan\dfrac{x}{2}$ と置換することによって計算せよ．

(広島大 2016)　　(m20164110)

0.305 次の初期値問題を求めなさい．

(1) 次の微分方程式の一般解を求めなさい．

$$\frac{dy}{dx} = xe^{-2y}$$

(2) さらに，次の式を満足する上記 (1) で求めた一般解の特殊解を求めなさい．

$$y(0) = 2$$

(山口大 2016)　　(m20164301)

0.306 次に示す行列 A の固有値および対応する固有ベクトルを求めなさい．固有ベクトルは，いずれか一つの固有値に対して求めればよい．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(山口大 2016)　　(m20164302)

0.307 二つの放物線，$y = x^2 + 5x + 9$ と $y = -\dfrac{x^2}{2} + x - 2$ の両方に接する接線の方程式を求めなさい．

(山口大 2016)　　(m20164303)

0.308 $y = \dfrac{1}{3}x\sqrt{x} + 3$ に関する次の問いに答えなさい．

(1) $\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ を求めなさい.

(2) 区間 $(4 \leq x \leq 8)$ における曲線 y の長さ L を求めなさい.

(山口大 2016)　　(m20164304)

0.309 $a_1 = 1$ および $a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について次の問いに答えよ.

(1) 任意の自然数 n に対して，$\dfrac{1}{2} \leqq a_n \leqq 1$ であることを示せ.

(2) 任意の自然数 n に対して，$\left|a_{n+2} - a_{n+1}\right| \leqq \dfrac{4}{9}\left|a_{n+1} - a_n\right|$ であることを示せ.

(3) $\{a_n\}$ はコーシー列であることを示せ．また，その極限値を求めよ.

(高知大 2016)　　(m20164501)

0.310 $f(x)$ は開区間 $(-1, 1)$ 上で連続な正値関数で，

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = 1$$

を満たすとする．さらに，正の整数 n ごとに実数直線 $\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f_n(x)$ を，

$$f_n(x) = \begin{cases} nf(nx) & \left(x \in \left(-\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n}\right) \text{のとき}\right) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

で与える．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$ を求めよ.

(2) N を正の整数とし，ε を正の数とする．$\mathbb{R}$ 上で定義された連続関数 $g(x)$ が閉区間 $\left[-\dfrac{1}{N},\ \dfrac{1}{N}\right]$ 上で $\left|g(x)\right| < \varepsilon$ を満たせば，$n > N$ を満たす任意の整数 n に対して，

$$-\varepsilon \leqq \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x)dx \leqq \varepsilon$$

であることを示せ.

(3) $\mathbb{R}$ 上で定義された任意の連続関数 $h(x)$ に対して，$a_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)h(x)dx$ とおく.

このとき，$g(x) = h(x) - h(0)$ に対して (2) の結果を利用することにより，
数列 $\{a_n\}$ は $n \to \infty$ のとき $h(0)$ に収束することを示せ.

(高知大 2016)　　(m20164502)

0.311 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 10 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A の各固有値に対して，固有空間の基底を一組求めよ.

(3) A は対角化可能かどうかを理由を付けて答えよ

(高知大 2016)　　(m20164503)

0.312 a, b, c は実数であるとする．$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$．$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A^{-1} を求めよ．

(2) $B = AJA^{-1}$ とおく．B を求めよ．

(3) (2) の B によって定まる線形写像を $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ と書く．このとき $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ であることを示せ．ただし，$\mathrm{Im}(f)$ と $\mathrm{Ker}(f)$ はそれぞれ f の像と f の核を表すものとする．

(4) (3) の線形写像 f に対して，$\mathrm{Ker}(f)$ の基底を一組求めよ．

(高知大 2016)　　(m20164504)

0.313 次の極限値　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)$　を求めよ．

(高知大 2016)　　(m20164505)

0.314 x を実数とする．3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の 3 つのベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}$$

に対して，以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ が 1 次独立であることを示せ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ が 1 次従属であるとき，x の値を求めよ．

(3) $x = 5$ のとき，ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ が $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ．

(愛媛大 2016)　　(m20164601)

0.315 (1) 行列 A を　$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -10 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$　で定める．

(a) A のすべての固有値を求めよ．

(b) 適当な正則行列 P を用いて，A を対角化せよ．

(2) B を正方行列とし，B^2 が零行列になるとする．このとき，B は 0 を固有値にもつこと，および 0 以外には固有値をもたないことを示せ．

(愛媛大 2016)　　(m20164602)

0.316 (1) 次で定義される関数 $f(x, y)$ の原点 $(0, 0)$ での連続性を調べよ．

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(2) C^1 級の関数 $f(x, y)$ は

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

を満たすとする．このとき，$z = f(x, y)$ と $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ の合成関数 $z = f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ は r だけの関数であることを示せ．

(3) 連続関数 $f(x)$ について，次の等式を示せ．

$$\int_0^x dy \int_0^y dz \int_0^z f(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt$$

(愛媛大 2016)　　(m20164603)

0.317 $a > 1$ とし，$f(x) = (e^x - 1)(e^x - a)$ とおく．

(1) 関数 $y = f(x)$ の増減，極値，および $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ を調べ，グラフの概形をかけ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(3) S を (2) で求めた値とするとき，$\displaystyle\lim_{a\to 1+0} \frac{S}{(a-1)^3}$ を求めよ．

(愛媛大 2016)　　(m20164604)

0.318 x, y を実数とし，行列 A, B および $\boldsymbol{p}$ を下記のように定義する．

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

また，$C = AB({}^tA)$ とする．ここで ${}^tA$ は A の転置行列である．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 行列 C の固有値を求めよ．

(3) 行列 C の行列式 $\det(C)$ を求めよ．

(4) $x > 0$, $x^2 + y^2 = 1$ および $\boldsymbol{p}\cdot(C\boldsymbol{p}) = 1$ を満たす x と y を求めよ．

(九州大 2016)　　(m20164701)

0.319 (1) 次の $y(x)$ に関する微分方程式について，以下の問いに答えよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 3y = f(x)$$

(a) $f(x) = 0$ のときの一般解を求めよ．

(b) $f(x) = \sin x$ のときの一般解を求めよ．

(2) 次の $y(x)$ に関する微分方程式を，$y(1) = 1$ のもとで解け．

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{2y + x}$$

(九州大 2016)　　(m20164702)

0.320 (1) (a) 周期 $2L$ の区分的に連続な関数 $f(x)$ をフーリエ級数で表現した式を示し，そのフーリエ係数を求める式を示せ．

(b) 次の関数 $f(x)$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 4 & (-2 \leqq x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 4 - 2x & (0 < x \leqq 2) \end{cases}$$

(2) $t > 0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \mathfrak{L}[f(t)] = \displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ とする．必要ならば下記の表にある関係式を用いて，次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．また (b) については，$f(t)$ $(t > 0)$ のグラフをかけ．

(a) $F(s) = \dfrac{2}{s(s+1)(s+2)}$

(b) $F(s) = \dfrac{-s+2}{s^2+2s+4}$

表：

$$\mathfrak{L}[1] = \frac{1}{s},\quad \mathfrak{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}\ (n=1,2,\cdots),\quad \mathfrak{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a},\quad \mathfrak{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$
$$\mathfrak{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2},\ \mathfrak{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),\ \mathfrak{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a),\ \mathfrak{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau}F(s)$$

(九州大 2016)　　(m20164703)

0.321 直交座標系の x, y, z 軸の基本ベクトルを $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とし，位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とする．閉曲線 $C : \boldsymbol{r} = 2\cos\theta\boldsymbol{i} + 2\sin\theta\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 閉曲線 C 上の点における大きさ 1 の接ベクトルを求めよ．

(2) スカラー場 $\varphi = \dfrac{1}{4}x^2y$ の 閉曲線 C に沿う線積分を求めよ．

(3) 閉曲線 C で囲まれた円板を S とし，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{A} = -\frac{1+z}{x^2}\boldsymbol{i} + \frac{z^2}{xy}\boldsymbol{j} + (x^2z - y)\boldsymbol{k}$$

とする．$(\triangledown\varphi)\times\ \boldsymbol{A} + \varphi(\triangledown\times\ \boldsymbol{A})$ の S 上の面積分を求めよ．

(九州大 2016)　　(m20164704)

0.322 a を定数として，変数 x, y, z, w に関する次の連立一次方程式を考える．

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - w = a \\ x + 3y\ \ - z\ \ + w = 1 \\ x + 2y\ \ + z\ \ - w = 0 \\ \quad\ \ y + 2z + 2w = -1 \end{cases}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) この方程式が解を持つための a の値を求めよ．

(2) 前問 (1) の a の値に対して，方程式の解を求めよ．　解がただ一つではない場合には，適切な方法を用いて解（一般解）を表現すること．

(九州大 2016)　　(m20164705)

0.323 3 次正方行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -2 \\ -5 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の固有値のうちで最小なものを λ_0 とおく．（固有値がただ一つの場合には，それを λ_0 とおく.）λ_0 に対応する固有ベクトルで，「ベクトルの長さ（大きさ）は 1」かつ「第 1 成分は負ではない」という条件を満たすものを求めよ．

(九州大 2016)　　(m20164706)

0.324　a, b は $a > 1,\ b > 0$ なる定数とする．$x \geqq 0$ において関数 $f(x)$ を次の式で定義する．　$f(x) = a^{-bx}$

(1) $f(x)$ の導関数を求めよ．

(2) 次の積分（広義積分）を求めよ．　$\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$

(3) 次の積分（広義積分）を求めよ．　$\displaystyle\int_0^{\infty} a^{-x}\cos x dx$

(九州大 2016)　　(m20164707)

0.325　a, b は $a > 0,\ b > 0$ なる定数とする．$x > 0,\ y > 0$ において 2 変数関数 $f(x, y)$ を次の式で定義する．

$$f(x, y) = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{b}{y}}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ．

(2) $y > 0$ なる y を固定する．このとき，次の積分（広義積分）は収束するか発散するかを理由を示して答えよ．さらに，収束する場合には，積分の値を求めよ

$$f(y) = \int_0^1 f(x, y)dx$$

(九州大 2016)　　(m20164708)

0.326　次の関数の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{x^2 - 3ax + 2a^2}{x^2 - a^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

(佐賀大 2016)　　(m20164901)

0.327　次式で定義される関数について，以下の問いに答えよ．

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき} \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \text{ のとき} \end{cases}$$

(1) 偏導関数 $f_x,\ f_y,\ f_{xy},\ f_{yx}$ を求めよ．

(2) $f(x, y)$ が原点 $(0, 0)$ で連続であることを示せ．

(3) $f_x(x, y)$ および $f_y(x, y)$ が原点 $(0, 0)$ で連続であることを示せ．

(4) $f_{xy}(x, y)$ および $f_{yx}(x, y)$ が原点 $(0, 0)$ で不連続であることを示せ．

(佐賀大 2016)　　(m20164902)

0.328　次の積分について，問いに答えよ．ただし，log は自然対数である．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^4 + x^2 + x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}dx$ を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 x^2 \log x dx$ を求めよ．

(3) $D = \left\{(x, y)\ :\ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$ として，2 重積分 $\displaystyle\iint_D \cos(x + y)dxdy$ を求めよ．

(佐賀大 2016)　　(m20164903)

0.329 次式は変数 x, y, z に関する連立方程式であり，k は定数である．以下の問いに答えよ．

$$\begin{cases} 2x+2y+z=k \\ 5x+3y-z=7 \\ x-y-3z=3 \end{cases}$$

(1) 連立方程式が解をもつように k の値を定めよ．

(2) (1) の条件のもとで，連立方程式の解を求めよ．

(佐賀大 2016) (m20164904)

0.330 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の行列式を求めよ．

(2) A の逆行列を求めよ．

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(佐賀大 2016) (m20164905)

0.331 次の関数を微分しなさい．

(1) $-3x^2+x+\dfrac{1}{x^2}$ (2) x^3e^{-x} (3) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3$ (4) $\dfrac{x^2}{\log x}$

(佐賀大 2016) (m20164906)

0.332 次の関数の n 次導関数を求めなさい．

(1) $\sin x$ (2) $\dfrac{1}{x^2-1}$

(佐賀大 2016) (m20164907)

0.333 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int(x^5-3x^2+2x)dx$ (2) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$ (3) $\displaystyle\int\sin^3 xdx$ (4) $\displaystyle\int\frac{\log x}{x}dx$

(佐賀大 2016) (m20164908)

0.334 点 $(1,4)$ を通る関数 $y=x^2+2x$ の接線は存在しないことを証明しなさい．

(佐賀大 2016) (m20164909)

0.335 次の微分方程式を解きなさい．

(1) $x\dfrac{dy}{dx}=y^2-1$ (2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{x^2-y2}$

(佐賀大 2016) (m20164910)

0.336 次の微分を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

(1) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ (2) $y=e^{-x}\sin x$ (3) $y=\dfrac{\log x}{x}$

(佐賀大 2016) (m20164911)

0.337 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$ (2) $\displaystyle\int\frac{2x^2-6}{(x-1)^2(x+1)}dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx$

(佐賀大 2016) (m20164912)

0.338 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ \alpha & 2 \end{bmatrix}$ について，固有値の 1 つが $\lambda = 1$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1) α の値を求めよ．

(2) 残りの固有値を求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるように，行列 P とその逆行列 P^{-1} をそれぞれ求めよ．

(佐賀大 2016)　　(m20164913)

0.339 次の微分方程式を解け．ただし e は自然対数の底である．

(1) $y'' + 3y' + 2y = 2e^{2x}$　　(2) $4x - 3y + 2 = (2x - y - 1)y'$

(佐賀大 2016)　　(m20164914)

0.340 次の二重積分について以下の問いに答えよ．

ただし，$D = \left\{(x, y) \,\middle|\, 1 \leqq x - 2y \leqq 3,\ 0 \leqq x + y \leqq 1\right\}$ とする．

$$\iint_D (x - 2y)e^{x+y}\,dxdy$$

(1) 積分領域 D を図示せよ．　　(2) 二重積分を求めよ．

(佐賀大 2016)　　(m20164915)

0.341 $u = \dfrac{y}{x}$ と置くことによって，次の 1 階微分方程式の一般解を求めよ．　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + 2y^2}{2xy}$

(佐賀大 2016)　　(m20164916)

0.342 次のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ について以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{c}$ に垂直で大きさが $\sqrt{5}$ であるベクトル $\boldsymbol{p}$ を求めよ．

(佐賀大 2016)　　(m20164917)

0.343 次の行列 A, B について以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の逆行列を求めよ．

(2) 行列 AB の積を求めよ．

(佐賀大 2016)　　(m20164918)

0.344 次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

(佐賀大 2016)　　(m20164919)

0.345 次の行列 P について以下の問いに答えよ.

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -4 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 P の固有値を求めよ.

(2) 行列 P の固有ベクトルを求めよ.

(佐賀大 2016) (m20164920)

0.346 次の関数を微分せよ.

(1) e^{3x} (2) $\log_a x$ $\left(\text{ヒント}:\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}\right)$ (3) $\log_{10}\left(\log_{10} x\right)$

(佐賀大 2016) (m20164921)

0.347 次の積分をせよ. ただし, $\lambda > 0$ である.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} dx$ (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} dx$ (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} dx$

(佐賀大 2016) (m20164922)

0.348 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ a & 5 & 1 \end{bmatrix}$ について, 次の問いに答えよ. ただし $a > 0$ とする.

(1) 行列 A の行列式が 0 となる a の値を求めよ.

(2) (1) で求めた a を用いて行列 A のランク（階数）を求めよ.

(3) $a = 2$ のとき, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ の解をはき出し法（ガウスの消去法）を用いて求めよ.

(佐賀大 2016) (m20164923)

0.349 次の微分方程式を解け. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = -x^3y^3$

(佐賀大 2016) (m20164924)

0.350 次の関数の極限を求めよ. ただし, $a > 0$ とする.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$

(佐賀大 2016) (m20164925)

0.351 関数 $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{xy}{8}$ の極値を求めよ.

(佐賀大 2016) (m20164926)

0.352 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2+4)}$ を求めよ. (2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$ を求めよ.

(3) $D = \left\{(x, y) \,:\, 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x^2\right\}$ として, 2 重積分 $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を求めよ.

(佐賀大 2016) (m20164927)

0.353 R を実数全体の集合とする. R^3 のベクトル $\boldsymbol{a} = (2, 1, 3)$, $\boldsymbol{b} = (1, -1, 2)$, $\boldsymbol{c} = (0, 3, -1)$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 1 次独立なベクトルの最大個数 r を求めよ.

(2) r 個の 1 次独立なベクトルを 1 組答えよ. また, その組に含まれるベクトルの 1 次結合によって, 他のベクトルを表せ.

(3) $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ によって生成される部分空間を $\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \rangle$ とする. R^3 のベクトル $\boldsymbol{v}$ が $\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \rangle$ に属するための $\boldsymbol{v}$ の成分に関する条件を求めよ.

(佐賀大 2016) (m20164928)

0.354 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 行列式 $\det A$ を求めよ.

(2) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(4) 行列 A を対角化して得られる行列 B を求めよ. また, $B = PAP^{-1}$ を満たす正則行列 P とその逆行列 P^{-1} を求めよ.

(佐賀大 2016) (m20164929)

0.355 次の関数 y の導関数 dy/dx を求めなさい.

(1) $y = \sqrt[3]{x^2+1}$ (2) $y = \left\{1-(1-x^2)^2\right\}^2$ (3) $y = \tan 4x$ (4) $y = x^{\sin x}$

(佐賀大 2016) (m20164930)

0.356 次の関数 z の偏導関数 $\partial z/\partial x,\ \partial z/\partial y$ を求めなさい.

(1) $z = \dfrac{x-y}{x+y}$ (2) $z = \sin x\,\cos y$

(佐賀大 2016) (m20164931)

0.357 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+3x+1}{x^2+1}dx$ (2) $\displaystyle\int \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$

(3) $\displaystyle\int \cos^4 x\,\sin x dx$ (4) $\displaystyle\int xe^{x^2}dx$

(佐賀大 2016) (m20164932)

0.358 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

(1) $x\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 1$ (2) $(x^2-y^2)dy = 2xydx$

(佐賀大 2016) (m20164933)

0.359 大気中に置かれた物体が冷却する速さは, その物体の温度と周囲の温度の差に比例する. 次の設問に答えなさい.

(1) 周囲温度（一定）を θ_{at}, 比例定数を k とおき, 時刻 t における物体の温度 θ を表す微分方程式を答えなさい.

(2) θ の一般解を答えなさい.

(3) 初期条件 $t=0$ のとき $\theta = \theta_0$ として, θ の特殊解を答えなさい.

(4) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \theta$ を答えなさい.

(佐賀大 2016) (m20164934)

0.360 次に示す 3 つの 3 次元ベクトル，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，および $\boldsymbol{a}_3$ について以下の問いに答えなさい．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，および $\boldsymbol{a}_3$ は線形独立（1 次独立）であることを示しなさい．

(2) $\boldsymbol{a}_1$ を正規化しなさい．

(3) グラム・シュミットの直交化を用いて，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，および $\boldsymbol{a}_3$ を正規直交化しなさい． ただし，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，および $\boldsymbol{a}_3$ の順に正規直交基底を求めなさい．

(熊本大 2016) (m20165201)

0.361 (1) t の有理関数 $\dfrac{1}{(t+1)(t+5)}$ を部分分数に分解しなさい．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)(e^x+5)}dx$ の値を計算しなさい．

(熊本大 2016) (m20165202)

0.362 関数 $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + x - 8y - 2$ について．次の各問に答えよ．

(1) 2 階までの偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$，$f_{xx}(x,y)$，$f_{xy}(x,y)$，$f_{yx}(x,y)$，$f_{yy}(x,y)$ をすべて求めよ．

(2) $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)$ の極値をすべて求め，それらが極大値であるのか，極小値であるのか，答えよ．

(宮崎大 2016) (m20165301)

0.363 複素数 $z = 2 + 2\sqrt{3}i$ について，次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) z を複素平面上に図示せよ．

(2) 絶対値 $|z|$ と偏角 $\arg z$ の値を，それぞれ求めよ．ただし，$0 \leqq \arg z < 2\pi$ とする．

(3) z を極形式で表せ．

(宮崎大 2016) (m20165302)

0.364 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の固有ベクトルをすべて求めよ．

(3) A^{99} を求めよ．

(宮崎大 2016) (m20165303)

0.365 次の微分方程式の一般解 $y = y(x)$ を求めよ

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$ (2) $\dfrac{dy}{dx} - 2y = e^{3x}$

(宮崎大 2016) (m20165304)

0.366 重積分

$$I = \iint_D \sin\frac{2x+y}{9}dxdy\,, \qquad D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \leqq\ y \leqq\ x,\ x + \frac{y}{2} \leqq\ 3\pi \right\}$$

について，次の各問に答えよ．

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) 等式 $I=\int_{\boxed{ア}}^{\boxed{イ}}\left(\int_{\boxed{ウ}}^{\boxed{エ}}\sin\frac{2x+y}{9}dx\right)dy$ の空欄 $\boxed{ア}$〜$\boxed{エ}$ に当てはまる数値あるいは数式を答えよ.

(3) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2016) (m20165305)

0.367 以下の微分を計算せよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\log(x^2+4x+4)$ (ただし, $x>0$) (2) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right)$ (ただし, $0<x<\pi$)

(鹿児島大 2016) (m20165401)

0.368 以下の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{x}{\cos^2 x}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\pi}e^x\sin x dx$

(鹿児島大 2016) (m20165402)

0.369 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $xdy=3ydx$ (2) $5\dfrac{d^2y}{dx^2}+6\dfrac{dy}{dx}+y=0$ (3) $(2xy+x^3)dx+(x^2+y^2)dy=0$

(鹿児島大 2016) (m20165403)

0.370 $O-xyz$ 座標系において, 次の法線ベクトルをもつ二つの平面に関して以下の問いに答えよ.

$\boldsymbol{n}_1=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{n}_2=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$

ただし, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は, それぞれ x 軸方向, y 軸方向, z 軸方向の単位ベクトルを表す.

(1) 二つの平面が直交することを示せ.

(2) 二つの平面に平行な直線の単位方向ベクトルを求めよ.

(鹿児島大 2016) (m20165404)

0.371 (1) 行列 $A=\begin{pmatrix}1&1&5\\1&2&-1\\1&3&-7\end{pmatrix}$ が正則であるかどうかを調べよ.

(2) $x-y$ 平面上において, 次に示す三直線の交点の座標 (x,y) を求めよ.

$l_1:\ x+y=5$

$l_2:\ x+2y=-1$

$l_3:\ x+3y=-7$

(鹿児島大 2016) (m20165405)

0.372 次の微分を求めなさい.

$\dfrac{d}{dx}(\cos^2 x+\cos^2 y)$ (ただし, $x+y=\pi/2$ とする.)

(鹿児島大 2016) (m20165406)

0.373 次の不定積分を求めなさい. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+4x-21}$

(鹿児島大 2016) (m20165407)

0.374 O を原点とする直交座標系の 2 点 P, Q の位置ベクトルを $\overrightarrow{OP}=\begin{bmatrix}3\\a\end{bmatrix}$, $\overrightarrow{OQ}=\begin{bmatrix}-1\\\frac{3}{2}\end{bmatrix}$ とする.

(1) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ が直交するような a を求めなさい.

(2) 前問で求めた a の値を用いて，$\triangle OPQ$ の面積 S を求めなさい.

(鹿児島大 2016)　　(m20165408)

0.375 (1) 次の行列式の値を求めなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

(2) 次の行列 A に対して $A = A^{-1}$ が成り立つとする．このときの x と y を求めよ．ただし，x は自然数であり，y は整数であるとする.

$$A = \begin{pmatrix} x & -3 \\ 8 & y \end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2016)　　(m20165409)

0.376 曲線 $y = |x^2 - 2|$ について以下の問いに答えなさい.

(1) 手書きでグラフを描きなさい.

(2) 曲線と直線 $y = 3$ で囲まれた部分の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2016)　　(m20165410)

0.377 三角形の加法定理を用いて,

$$\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin(\theta - a)$$

の式における a を決定したい．どのように決定するか解法の過程を説明せよ．また a の値を答えよ.

(鹿児島大 2016)　　(m20165411)

0.378 対数についての以下の問いに答えよ．ただし，a, b, c, M は 1 でない正の数が入るものとする.

(1) 底とは $\log_a M = b$ の式のどの記号であるか.

(2) 底の変換公式とは次の (ア) から (エ) のうちのどれか.

（ア）$\log_a M = \dfrac{\log_a b}{\log_M b}$　　（イ）$\log_a M = \dfrac{\log_M b}{\log_a b}$

（ウ）$\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_a b}$　　（エ）$\log_a M = \dfrac{\log_c M}{\log_c a}$

(鹿児島大 2016)　　(m20165412)

0.379 $\log M$ は $\log_{10} M$ の 2.303 倍で近似される（≒で結ばれる）．近似ではなく完全に等号（＝）で結ぶには対数表記で何倍すればよいか．ただし，$\log M = \log_e M$ である.

(鹿児島大 2016)　　(m20165413)

0.380 次の関数を x で微分しなさい.

$$y = x^{\cos(x)}$$

(鹿児島大 2016)　　(m20165414)

0.381 次の 2 つのベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の内積と外積を求めなさい．ただし，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は x 軸，y 軸，z 軸の基本単位ベクトルとする.

$$\boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{B} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$$

(鹿児島大 2016)　　(m20165415)

0.382 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求め，行列 A を対角化しなさい．

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(鹿児島大 2016)　　(m20165416)

0.383 曲線 $y = f(x)$ の任意の点 $(t,\ f(t))$ における接線が x 軸と点 $\left(\dfrac{t}{2},\ 0\right)$ で交わるような $f(x)$ を求めなさい．ただし，$f(x)$ は微分可能であるとする．

(鹿児島大 2016)　　(m20165417)

0.384 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x dx$ を計算しなさい．

(室蘭工業大 2016)　　(m20165501)

0.385 関数 $f(x) = \sin 2x - \cos 3x$ について，x^3 までのマクローリン展開を求めなさい．

(室蘭工業大 2016)　　(m20165502)

0.386 3 つのベクトル $\boldsymbol{u} = (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{v} = (1, 2, 1)$, $\boldsymbol{r} = (0, -3, 2)$ がある．$\boldsymbol{p} = (1, 1, 1)$ としたとき，関係式 $\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} + \gamma\boldsymbol{r}$ を満たす係数 α, β, γ を求めなさい．

(室蘭工業大 2016)　　(m20165503)

0.387 以下の行列 A の行列式を求めなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2016)　　(m20165504)

0.388 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(2x+1)(x+1)}dx$ を計算しなさい．

(室蘭工業大 2016)　　(m20165505)

0.389 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = -y$ を解きなさい．

(室蘭工業大 2016)　　(m20165506)

0.390 行列に関する以下の問いに答えよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ の逆行列を計算せよ．

(2) (1) で求めた逆行列を利用して，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

の x, y, z を求めよ．

(室蘭工業大 2016)　　(m20165507)

0.391 直交座標系の任意の点 $P(x, y, z)$ において，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を考える．

$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = (A_x,\ A_y,\ A_z) = (x, y, z)$ とし，原点を中心として半径 a の球面を閉曲面 S とした時，以下の問いに答えよ．

(1) 閉曲面 S 上の任意の点における法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ ($|\boldsymbol{n}| = 1$) を求めよ.

(2) 閉曲面 S 上全体にわたる面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ を求めよ.

(3) 閉曲面 S 内全体にわたる体積分 $\displaystyle\iiint \mathrm{div}\, \boldsymbol{A}\, dV = \iiint \nabla \cdot \boldsymbol{A}\, dV$ を求めよ.

(室蘭工業大 2016)　　(m20165508)

0.392　以下の微分を計算せよ.

$$\frac{d \sin^3 x}{dx}$$

(室蘭工業大 2016)　　(m20165509)

0.393　以下の不定積分を計算せよ．なお，積分定数は省略してよい.

$$\int \frac{-x^2 + 2x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$$

(室蘭工業大 2016)　　(m20165510)

0.394　以下の不定積分を計算せよ．なお，積分定数は省略してよい.

$$\int x e^{-jx} dx \qquad (j \text{ は虚数単位を表す})$$

(室蘭工業大 2016)　　(m20165511)

0.395　微分方程式に関する以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} - 2e^{x+y} = 0$ の一般解を求めよ.

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 3y = 4e^x$ の一般解を求めよ.

(室蘭工業大 2016)　　(m20165512)

0.396　次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2016)　　(m20165513)

0.397　以下の 3 つのベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ が一次独立であるとき，実数 x が満たす条件を求めよ.

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ x \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2016)　　(m20165514)

0.398　D : $0 \leqq y \leqq x \leqq 1$ により定義される領域を D として，次の重積分を計算せよ.

$$I = \iint_D \left(2x + 3y^2\right) dx dy$$

(室蘭工業大 2016)　　(m20165515)

0.399　次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 3y = 5e^{2x}$$

(室蘭工業大 2016)　　(m20165516)

0.400 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-4x^2}{8x^4+5x^3}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{4x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x\right)$

(香川大 2016) (m20165701)

0.401 $z=x^2+y^2$ について次の問いに答えよ.

(1) $w=\log(z)$ の関係があるとき, 2 階偏導関数 w_{xx}, w_{xy}, w_{yx}, w_{yy} を求めよ.

(2) 曲面 z と平面 $x+y=2$, ならびに 3 つの座標平面で囲まれる立体の体積 V を求めるための 2 重積分の式を記述せよ. ただし, 体積 V は計算で求めなくともよい.

(香川大 2016) (m20165702)

0.402 直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ に関する以下の点の対称移動をそれぞれ求めよ.

(1) $(1,\ \sqrt{3})$ (2) $(0,\ 1)$

(香川大 2016) (m20165703)

0.403 行列 $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\ -1\end{pmatrix}$, $C=(1 \quad -2)$ のとき, 次の問いに答えよ.

(1) $AX=B$ を満たす行列 X を求めよ.

(2) $YA=C$ を満たす行列 Y を求めよ.

(香川大 2016) (m20165704)

0.404 (1) 3 次実列ベクトル全体からなるベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の 4 つのベクトルを

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}2\\3\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4=\begin{bmatrix}2\\3\\6\end{bmatrix}$$

とする. このとき,

(ア) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立であることを示せ.

(イ) $\boldsymbol{a}_4$ を $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表せ.

(2) 実数上のベクトル空間 V の基底を $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ とする. 線形写像 $f:V\to V$ が次を満たすとき,

$$\left\{\begin{array}{lcrcrcr} f(\boldsymbol{v}_1) & = & \boldsymbol{v}_1 & + & 2\boldsymbol{v}_2 & + & \boldsymbol{v}_3\\ f(\boldsymbol{v}_2) & = & 2\boldsymbol{v}_1 & + & \boldsymbol{v}_2 & + & \boldsymbol{v}_3\\ f(\boldsymbol{v}_3) & = & 4\boldsymbol{v}_1 & + & 2\boldsymbol{v}_2 & + & 2\boldsymbol{v}_3 \end{array}\right.$$

このとき,

(ウ) f の像 $f(V)$ の次元を求めよ.

(エ) $f(W)=W$ を満たす V の 1 次元の部分空間 W をすべて求めよ.

(島根大 2016) (m20165801)

0.405 4 次実正方行列 B のすべての固有値は 0 であるとする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) B^4 は零行列であることを示せ.

4 次実列ベクトル全体からなるベクトル空間を $\mathbb{R}^4$ とする. $c\in\mathbb{R}^4$ は $B^3c\neq 0$ を満たすとし,
$P=[\ c\quad Bc\quad B^2c\quad B^3c\ ]$ を c, Bc, B^2c, B^3c をそれぞれ第 1, 第 2, 第 3, 第 4 列にもつ
4 次実正方行列とする.

(2) $c,\ Bc,\ B^2c,\ B^3c$ は $\mathbb{R}^4$ の基底であることを示せ.

(3) P は正則行列であることを示し，$P^{-1}BP$ を求めよ.

(島根大 2016) (m20165802)

0.406 自然数 $n = 1, 2, \cdots$ に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = n^2 x^{n+1} \log x \quad (x > 0)$$

と定める．次の問いに答えよ.

(1) $f_n(x)$ の最小値を求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ を計算せよ.

(3) $0 < x \leq 1$ を満たす各 x に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．さらに $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とするとき，次の等式が成り立つかどうかを調べよ.

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

(島根大 2016) (m20165803)

0.407 (1) $R > 0$ とする．$\Omega(R) = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2,\ 0 \leq y \leq x\right\}$ とするとき，重積分 $\displaystyle\iint_{\Omega(R)} \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2} dxdy$ を計算せよ.

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_0^R \left(\int_0^x \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2} dy \right) dx$ を求めよ.

(3) α を定数とし，$(x, y) \neq (0, 0)$ に対して $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\alpha/2}$ と定める．$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ.

(島根大 2016) (m20165804)

0.408 次の 3 次の正方行列 A について，以下の設問に答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.

(2) 設問 (1) で求めた固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ．ただし，固有ベクトルは大きさが 1 となるように正規化（規格化）すること.

(3) 設問 (2) で求めた固有ベクトルを用いて，行列 A を対角化せよ.

(4) A^{12} を計算せよ.

(島根大 2016) (m20165805)

0.409 微分方程式 $y = x\dfrac{dy}{dx} + 3 \cdot \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ について，以下の設問に答えよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = p$ と置き，置き換えた式を示せ.

(2) 設問 (1) の結果を x に関して微分せよ.

(3) 設問 (2) の結果から p, x のみを含む微分方程式を示せ.

(4) $\dfrac{dp}{dx} \neq 0$ のとき x を p を用いて表せ.

(5) $\dfrac{dp}{dx} \neq 0$ のとき y を p を用いて表せ.

(6) $\dfrac{dp}{dx} \neq 0$ のとき x と y はある 1 つの半円上にあることを示せ．また，その半径を示せ.

(島根大 2016)　　(m20165806)

0.410　下を満たす x, y, z の値をそれぞれ求めなさい.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(首都大 2016)　　(m20165901)

0.411　行列 A について下記の (1),(2),(3) に答えなさい.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(1) すべての固有値とそれぞれの固有値の固有ベクトルをすべて求めなさい.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P と $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(3) A^5 を求めなさい.

(首都大 2016)　　(m20165902)

0.412　ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ について,

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} u \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

で定める．下記の (1), (2), (3) に答えなさい．ただし，u は正の実数である.

(1) 内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ とベクトルの長さ $||\boldsymbol{a}||$, $||\boldsymbol{b}||$ をそれぞれ求めなさい.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ としたときの $\cos\theta$ を求めなさい.

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するための u を求めなさい.

(首都大 2016)　　(m20165903)

0.413　次の関数を微分しなさい.

(1) $f(x) = \sqrt{3 - 2x^2}$　　(2) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$　　(3) $f(x) = \tan^{-1}(1 - x)$

(首都大 2016)　　(m20165904)

0.414　次の微分方程式が完全形であることを示し，一般解を求めなさい.

$$\Big(x^3 + \log y\Big)dx + \frac{x}{y}dy = 0$$

(首都大 2016)　　(m20165905)

0.415　次の文章中の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ウ}}$ に入れるのに最も適当な数を答えなさい.

$-\log(1 - 3x)$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めると，$\boxed{\text{ア}}x + \boxed{\text{イ}}x^2 + \boxed{\text{ウ}}x^3$ が得られる.

(首都大 2016)　　(m20165906)

0.416　極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1}$ を求めなさい.

(首都大 2016)　　(m20165907)

0.417 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int 8x\left(4x^2-1\right)^{10}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$

(首都大 2016) (m20165908)

0.418 次の 4 次正方行列 A について，以下の問いに答えよ.

$$A=\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}$$

(1) ${}^tA$ を A の転置行列とするとき，積 ${}^tAA$ を計算せよ.

(2) (1) の結果を用いて，A の行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(首都大 2016) (m20165909)

0.419 (1) 次の 2 次正方行列 A の固有値および長さが 1 であるすべての固有ベクトルを求めよ．ただし，実数の範囲で扱うものとする.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) 次の 3 次正方行列 P が直交行列であるとき，a,b,c の値をすべて求めよ.

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & a \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & b \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & c \end{bmatrix}$$

(首都大 2016) (m20165910)

0.420 $t(0<t<2\pi)$ の関数 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ について，以下の問いに答えよ．ただし，a は 0 でない定数とする.

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ. (2) (1) の結果を用いて，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ.

(首都大 2016) (m20165911)

0.421 陰関数 $x^2+xy+y^2=3$ で定まる x の関数 y の極値および極値を与える x の値を求めたい．以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ を x と y を用いて表せ.

(2) $\dfrac{dy}{dx}=0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めよ.

(3) (2) において $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ の符号を調べることによって，y の極値および極値を与える x の値を求めよ.

(首都大 2016) (m20165912)

0.422 ベクトル場 $\overrightarrow{a}=y\overrightarrow{i}-x\overrightarrow{j}$ と曲線 C： $\overrightarrow{r}=(\cos^2 t)\overrightarrow{i}+(\sin^2 t)\overrightarrow{j}$ $\left(0\leq t\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $d\overrightarrow{r}$ を計算せよ.

(2) 内積 $\overrightarrow{a}\cdot d\overrightarrow{r}$ を計算せよ.

(3) (2) の結果を用いて，C に沿う線積分 $I = \displaystyle\int_C \overrightarrow{a} \cdot d\overrightarrow{r}$ の値を求めよ．

(首都大 2016)　　(m20165913)

0.423 $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}x$ について，次を求めよ．ただし，$\mathrm{Sin}^{-1}x$ の値域は $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - x}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

(滋賀県立大 2016)　　(m20166001)

0.424 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ について　次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．ただし，重複がある場合は，その重複度も答えよ．

(2) A の固有ベクトルを求めよ．

(滋賀県立大 2016)　　(m20166002)

0.425 $f(x, y) = x^3 + 8y^3 + 12xy$ の極値とそれを与える (x, y) を求めよ．

(滋賀県立大 2016)　　(m20166003)

0.426 未知関数 $y = y(x)$ に対する微分方程式：$y'' + 4y = e^{3x}$ の一般解を求めよ．

(滋賀県立大 2016)　　(m20166004)

0.427 下の問いに答えよ．なお，計算過程も記入せよ．

(1) 次の行列の階数を求めよ．

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

(2) 次の連立 1 次方程式が解を持つときの a の値を求めよ．

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = a \\ 2x + 3y - z = 2a \\ 2x + 5y + 9z = 6 \end{cases} \qquad (*)$$

(3) (2) で求めた a の値に対する連立 1 次方程式 $(*)$ の解を求めよ．

(宇都宮大 2016)　　(m20166101)

0.428 次の行列 A について下の問いに答えよ．なお，計算過程も記入せよ．

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) 行列 A が対角化可能かどうか調べ，対角化可能であるときは適当な正則行列を求めて対角化せよ．

(宇都宮大 2016)　　(m20166102)

0.429 方程式 $(x^2 - 1)^2 + y^2 = 1$ の表す曲線 C について，下の問いに答えよ．

(1) 曲線 C で囲まれた図形の面積を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(2) 曲線 C を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．なお，円周率は π と表記し，計算過程も記入せよ．

(宇都宮大 2016)　　(m20166103)

0.430 下の問いに答えよ．なお，計算過程も記入せよ．

(1) 微分方程式

$$2\frac{d^2y(x)}{dx^2}+3\frac{dy(x)}{dx}-2y(x)=0 \qquad (*1)$$

の一般解を求めよ．

(2) 微分方程式

$$2\frac{d^2y(x)}{dx^2}+3\frac{dy(x)}{dx}-2y(x)=x^2-8 \qquad (*2)$$

の一般解を求めよ．

(3) 微分方程式

$$2\frac{d^2y(x)}{dx^2}+3\frac{dy(x)}{dx}-2y(x)=e^{-2x} \qquad (*3)$$

の一般解を求めよ．

(宇都宮大 2016)　　(m20166104)

0.431 実数 $a>0$ に対して，行列 A,P,B を

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B=P^{-1}AP$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) P^{-1} を求めよ．

(2) B が異なる 3 個の固有値をもたないとき，a の値を定めよ．

(3) a が (2) で求めた値であるとき，$n=1,2,3,\cdots$ に対し

$$B^n\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満たす x,y,z を求めよ．

(はこだて未来大 2016)　　(m20166301)

0.432 関数 $f(x)=e^x(ax^2+b)$ に対し，$f^{(n)}(x)$ を $f(x)$ の n 次導関数とする．ただし a,b は 0 でない実数，n は自然数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $f^{(1)}(x)$，$f^{(2)}(x)$ を求めよ．

(2) $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(3) x についての方程式 $f^{(n)}(x)=0$ が実数解をもつための必要十分条件を，n,a,b を用いて表せ．

(はこだて未来大 2016)　　(m20166302)

0.433 次の関数を x で微分しなさい．

(1) $x^2(x^3-x^2)$　　(2) $(x^2-2x+5)^4$　　(3) $e^{2x}\sqrt{x}$　　(4) $\dfrac{\sin x}{x}$　　(5) $x\log_e x$

(東京海洋大 2016)　　(m20166401)

0.434 次の定積分，または不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x}$ (2) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\, dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$ (4) $\displaystyle\int x(2x+1)^2 dx$ (5) $\displaystyle\int e^x \sin x\, dx$

(東京海洋大 2016) (m20166402)

0.435 次の曲線および直線で囲まれた部分からなる図形について，各問に答えなさい．

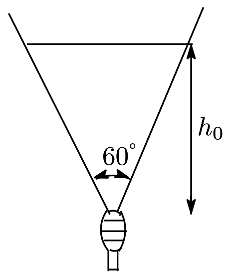
$$y = \sqrt{2x}\,, \quad x = 9\,, \quad y = 0$$

(1) この図形の面積を求めなさい．

(2) この図形を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めなさい．

(東京海洋大 2016) (m20166403)

0.436 右の図のような頂角が 60° の円錐形の容器に，水が h_0[cm] の深さまで入っている．但し，この円錐形の容器の頂点は真下を向いており，中心線は垂直に保たれている．いま，時刻 $t=0$ において，この容器の底から水を抜き始めた．



(1) 時刻 t[分] における水位を h[cm] とする．この時の容器に残っている水の体積 V[cm^3] の時間変化は次式のように表すことが出来る．空欄 $\boxed{\text{ア}}$ に適切な記号や数値からなる数式を入れなさい．

$$-\frac{dV}{dt} = -\frac{\boxed{\text{ア}}\,dh}{dt}$$

(2) 流出速度が水位に比例する時，$-dV/dt = kh$ と表せるので上式は次式となる．

$$-\frac{\boxed{\text{ア}}\,dh}{dt} = kh$$

ここで，k[cm^2/分] は比例定数である．時刻 t[分] における水位 h[cm] を，数値や記号などを用いて表しなさい．

(東京海洋大 2016) (m20166404)

0.437 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

(2) x, y, z に対する連立方程式 $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ ax - 2y - 7z = 0 \\ 3x - 3y + az = 0 \end{cases}$ が非自明解を持つときの a の値を求め，そのとき連立方程式を解け．

(東京海洋大 2016) (m20166405)

0.438 行列 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(東京海洋大 2016) (m20166406)

0.439 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2-2}$ を計算せよ.

(2) $n=0,1,2,\cdots$ に対し，定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(nx)dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2016)　　(m20166407)

0.440 関数 $f(x,y)=x^3+3x^2y+2y^3+3x^2-12y$ の極値を求めよ.

(東京海洋大 2016)　　(m20166408)

0.441 (1) $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leqq\ x+y \leqq\ 1,\ 0 \leqq\ x-y \leqq\ 2\right\}$ に対し，重積分 $\displaystyle\iint_D e^{x+y}dxdy$ の値を求めよ.

(2) 積分の順序を入れ替えることにより，重積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_x^1 y^2e^{xy}dy\right)dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2016)　　(m20166409)

0.442 次の極限値を求めなさい.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$$

(和歌山大 2016)　　(m20166501)

0.443 関数 $f(x)=x^n\log x$ を積分しなさい．ただし, n は整数である.

(和歌山大 2016)　　(m20166502)

0.444 次の 2 重積分の値を求めなさい.　$\displaystyle\iint_D \sqrt{x}dxdy$,　　$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \le x\right\}$

(和歌山大 2016)　　(m20166503)

0.445 $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき，次の各問いに答えなさい.

(1) A のすべての固有値を求めなさい.

(2) A の各固有値に対する固有ベクトルを求めなさい.

(3) A を対角化する正則行列 P を求め, A を対角化しなさい.

(和歌山大 2016)　　(m20166504)

0.446 次の微分方程式の一般解を求めなさい．ただし，e を自然対数の底とする.

(1) $\dfrac{dy}{dx}=xe^{x-y}$　　(2) $\dfrac{dy}{dx}-2xy=4x$　　(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}-6y=-6x+7$

(和歌山大 2016)　　(m20166505)

0.447 次の各問いに答えなさい．ただし，i を虚数単位とする.

(1) $z=x+yi$（x,y は実数）とするとき，複素関数 $f(z)=(x^2+x+ay^2)+(bxy+y)i$ が複素数全域で正則になるよう，実数の定数 a,b を定めなさい.

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^2+1}$ を求めなさい.

ただし，積分経路 C は，複素平面において $-1,\ 1,\ 2i$ を頂点とする三角形の周に，反時計回りの向きを付けたものとする.

(和歌山大 2016)　　(m20166506)

0.448 (1) $f(x)=|\sin x|\ (-\pi \le x \le \pi)$ で定められる周期関数をフーリエ級数に展開しなさい.

(2) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2(2m+1)^2}$ の値を求めなさい.

(和歌山大 2016)　　(m20166507)

0.449 (1) 事象 A と B は, $P(A) = 0.3$ および $P(A \cup B) = 0.5$ を満たしているとする. このとき, 次の (ア) と (イ) の場合における $P(B)$ の値をそれぞれ求めなさい.

(ア) A と B が排反である場合　　(イ) A と B が独立である場合

(2) 確率変数 X は $1, 2, 3, 4$ いずれかの値をとり, その確率分布は
$P(X = k) = \dfrac{ck}{4}$　$(k = 1, 2, 3, 4)$　で与えられるとする. ただし, c は定数である. このとき, つぎの (ア) から (ウ) の値をそれぞれ求めなさい.

(ア) 定数 c の値　　(イ) X の期待値　　(ウ) X の分散

(和歌山大 2016)　　(m20166508)

0.450 次の行列 A, B, C, D について, あとの問いに答えなさい. 解答は途中の式も省略せずに書きなさい.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) AB を答えなさい.

(2) 行列 A, B の階数（ランク）をそれぞれ答えなさい.

(3) 行列式 $|A|$, $|C|$ をそれぞれ答えなさい.

(4) 行列 A, C の逆行列をそれぞれ答えなさい. 定義されないときには「定義されない」と答えなさい.

(5) 行列 D の固有値と固有ベクトルを答えなさい.

(岩手県立大 2016)　　(m20167001)