作成責任者：軽井沢数学 IC 数学教育研究所 所長 碓氷長 (91 歳)

**0.1** 次の各設問に答えなさい.

設問 1. 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} = 10\sin x$ の一般解を求めなさい.

設問 2. 微分方程式 $2xy\dfrac{dy}{dx} + x^2 - y^2 = 0$ の一般解を求め，$xy$ 平面上でどのような図形となるかを説明しなさい.

(北海道大 2018) (m20180101)

**0.2** 次式の三次元ベクトルに関して，次の各設問に答えなさい.

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} p \\ 1 \\ q \end{bmatrix}$$

設問 1. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積を求め，二つのベクトルの関係を調べなさい.

設問 2. $\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ と直交するときの $p$ と $q$ を求めなさい.

設問 3. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次従属となるような $p$ と $q$ を求めなさい.

(北海道大 2018) (m20180102)

**0.3** 次式の $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ の行列について，次の設問に答えなさい.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

設問 1. $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

設問 2. $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$（$\boldsymbol{\Lambda}$ は対角行列）となる行列 $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{\Lambda}$ を求めなさい.

設問 3. $\boldsymbol{B}$ が直交行列であることを示しなさい.

設問 4. ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ を $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ による一次変換としたとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の大きさが等しいことを示しなさい. ただし，ベクトルの大きさの二乗は，$\boldsymbol{x}^T\ \boldsymbol{x}$ で求めることができる. ここで，$T$ は転換を表す.

(北海道大 2018) (m20180103)

**0.4** 次の級数の収束，発散を調べ，収束する場合はその値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{3^{n-1}} + 3\left(-\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3(n+2)}$

(北海道大 2018) (m20180104)

**0.5** 次式の関数について，次の各設問に答えなさい. ただし，$0 < D < 1$ とする.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leqq x < -D\pi) \\ 1 & (-D\pi \leqq x < D\pi) \\ 0 & (D\pi \leqq x < \pi) \end{cases}$$

設問 1. 次式で示されるフーリエ級数の各係数を求めなさい.

$$f(x) = \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

設問 2. 上式において，$n$ が偶数の項の係数がすべて 0 となる $D$ の条件を求めなさい．

(北海道大 2018)　　(m20180105)

**0.6** 次の積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{(\log x)^2}{x}\, dx$

(北見工業大 2018)　　(m20180201)

**0.7** 関数 $z = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $((x,y) \neq (0,0)$ とする$)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(北見工業大 2018)　　(m20180202)

**0.8** 関数 $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$ の $-1 \leqq x \leqq 2$ での最大値と最小値を求めよ．

(北見工業大 2018)　　(m20180203)

**0.9** $D = \left\{(x,y) \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}\right\}$ とする．

(1) 領域 $D$ を図示せよ．

(2) 積分 $\displaystyle\iint_D x^2 y\, dxdy$ を計算せよ．

(北見工業大 2018)　　(m20180204)

**0.10** 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めよ．

(北見工業大 2018)　　(m20180205)

**0.11** $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．等式 $x\boldsymbol{v}_1 + y\boldsymbol{v}_2 + z\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{c}$ をみたす $x$, $y$, $z$ を求めよ．

(北見工業大 2018)　　(m20180206)

**0.12** 点 $O$ を原点とする $xyz$ 座標空間において，中心が点 $(2,\ -1,\ -2)$ で，点 $O$ を通る球面を $S$ とする．次の問いに答えなさい．

(1) 球面 $S$ の方程式を求めなさい．

(2) 球面 $S$ と $xy$ 平面の交わりは円になる．この円の中心の座標と半径を求めなさい．

(3) 球面 $S$ と平面 $z = k$ の交わりが半径 1 の円になる．$k$ の値を求めなさい．

(岩手大 2018)　　(m20180301)

**0.13** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,　$B = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$,　$C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 行列 $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めなさい．

(2) $AB = C$ であるとき，逆行列 $A^{-1}$ を用いて $u$, $v$, $w$ の値をそれぞれ求めなさい．

(3) 行列 $A$ の固有値，固有ベクトルを求めなさい．

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように行列 $P$ を求め，$A$ を対角化しなさい．

(岩手大 2018)　　(m20180302)

**0.14** 関数 $f(x) = xe^{-2x}$ について次の問いに答えなさい.

(1) 関数 $f(x)$ を微分しなさい.

(2) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点を求めなさい.

(3) 関数 $f(x)$ の極限値 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ および $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ をそれぞれ求めなさい.

(4) 関数 $f(x)$ の増減表を作成し，概形を図示しなさい．また，極値と変曲点の座標も示しなさい.

(岩手大 2018)　　(m20180303)

**0.15** 微分方程式 $y'' + 2y' + 2y = 10\cos 2x$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) 微分方程式の特性方程式を示し，その解を求めなさい.

(2) 微分方程式の一般解を求めなさい.

(3) 微分方程式について，初期条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = 2$ をみたす特殊解を求めなさい.

(岩手大 2018)　　(m20180304)

**0.16** オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いて，次の関係が成り立つことを示せ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ である.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

(東北大 2018)　　(m20180501)

**0.17** 関数 $f(x)$ を，以下のように定義する．次の問いに答えよ.

$$f(x) = e^{2x}(\cos^2 x - \sin^2 x) \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

(1) $f(x) = 0$ となる $x$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．また，この関数の増減表を示せ.

(3) $k$ を実数とする．$f(x) = k$ の実数解の個数を求めよ.

(東北大 2018)　　(m20180502)

**0.18** $xyz$ 空間における点 $P$ の座標が実数 $t$ の関数として次の式で与えられる.

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = -a\sin t \end{cases}$$

ここで，$a$ は正の実数である．$0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲で点 $P$ の描く曲線を $C$ とする．以下の問に答えよ.

(1) $t = \dfrac{\pi}{2}$ と $t = \pi$ のそれぞれに対し，点 $P$ の座標とその点における曲線 $C$ の接線方向を表すベクトルを求めよ.

(2) 曲線 $C$ 上の任意の点 $P$ における接線の方程式を求めよ.

(3) 曲線 $C$ が平面上の曲線であることを示し，その平面の方程式と単位法線ベクトルを求めよ.

(4) 曲線 $C$ が $xz$ 平面に投影した曲線で囲まれる領域 $D$ の面積を求めよ.

(東北大 2018)　　(m20180503)

**0.19** 次の行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 9 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(東北大 2018)　　(m20180504)

**0.20**　次の行列 $\boldsymbol{B}$ の行列式 $|\boldsymbol{B}|$ を求めよ．

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -4 & -8 \\ 5 & -7 & -6 & 9 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(東北大 2018)　　(m20180505)

**0.21**　次の行列 $\boldsymbol{C}$ について，以下の問に答えよ．

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{C}$ の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ． ただし，固有ベクトルの大きさを 1 とする．

(2) $\boldsymbol{P}^t\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$ が対角行列となるような直交行列 $\boldsymbol{P}$ を求め，$\boldsymbol{P}^t\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$ を計算せよ．ただし，$\boldsymbol{P}^t$ は行列 $\boldsymbol{P}$ の転置行列を表す．

(東北大 2018)　　(m20180506)

**0.22**　標準的内積をもつ 6 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^6$ の標準基底を $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_6\}$ とし，$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_5$, $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4 + \boldsymbol{e}_6$ とおく．

(1) ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ に直交する $\mathbb{R}^6$ のベクトル全体を $W$ とおくとき，$W$ は部分ベクトル空間であることを示せ．

(2) $W$ の基底を 1 つ与えて，それが基底であることを示せ．

(3) $W$ の直交補空間 $W^{\perp}$ の正規直交基底を求めよ．

(東北大 2018)　　(m20180507)

**0.23**　(1) $n$ 次正方行列 $A$, $B$ を用いて $2n$ 次正方行列 $C$ を

$$C = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

で定めるとき，等式

$$\det C = \det(A+B) \times \det(A-B)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\det C$ は $C$ の行列式を表す．

(2) 4 次正方行列

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のすべての固有値を求め，それぞれの固有値に対応する固有空間の基底を求めよ．

(東北大 2018)　　(m20180508)

**0.24**　$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ．

(2) 任意の $n$ に対し $a_n \geq 0$ であるとする．級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散するならば，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$$

も発散することを示せ．

(東北大 2018)　　(m20180509)

**0.25** $\mathbb{R}^2$ 上の 2 変数関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y) = (0,0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ において連続であることを示せ．

(2) $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ において全微分可能であるか，理由とともに答えよ．
なお，$\mathbb{R}^2$ 内の点 $(a,b)$ の近傍で定義された実数値関数 $g(x,y)$ が $(x,y) = (a,b)$ において全微分可能であるとは，ある定数 $\alpha$, $\beta$ が存在して

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{g(a+h,\ b+k) - g(a,b) - (\alpha h + \beta k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

が成り立つことをいう．

(東北大 2018)　　(m20180510)

**0.26** $\mathbb{R}$ 内の閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数 $f(x)$ は $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 1$ をみたすとする．正の整数 $n$ に対し

$$b_n = \int_0^1 f(x) \cos \frac{x}{\sqrt{n}} dx$$

とおくとき，

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} (b_n)^n = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f(x) dx\right)$$

が成り立つことを以下の設問に沿って証明せよ．

(1) 任意の $x \geq 0$ に対し

$$0 \leq \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^3}{6}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 任意の $n$ に対し

$$\left| b_n - 1 + \frac{1}{2n}\int_0^1 x^2 f(x) dx \right| \leq \frac{1}{6n\sqrt{n}} \int_0^1 x^3 \left| f(x) \right| dx$$

が成り立つことを示せ．

(3) 任意の実数 $\alpha$, $\beta$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n\sqrt{n}}\right)^n = e^{\alpha}$$

が成り立つことを示せ．

(4) (2) および (3) の結果を利用して $(*)$ を結論せよ．

(東北大 2018)　　(m20180511)

**0.27** 整数 $n$ に対して，$x \neq 0$ のとき $f_n(x) = x^n \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f_n(0) = 0$ として $\mathbb{R}$ を定義域とする関数 $f_n$ を定める．

(1) $f_n$ の $x \neq 0$ における微分係数 $f_n'(x)$ を求めよ．また $f_1$ は $x = 0$ で微分可能でないことを確かめよ．

(2) 自然数 $m$ に対して $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上定義された $f_n$ の $m$ 階導関数 $f_n^{(m)}$ が存在する．適当な多項式 $P_m$, $Q_m$ に対して，$x \neq 0$ で

$$f_n^{(m)}(x) = x^{n-2m}\left(P_m(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) + Q_m(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

が成り立ち，$P_m(0)$, $Q_m(0)$ のうち一方だけが 0 でないことを示せ．また $n > 1$ のとき，$f_n^{(m)}$ が $\mathbb{R}$ 全体で定義されるための $m$ の条件を求めよ．

(3) $n \leq 0$ のとき，広義積分

$$\int_0^1 f_n(x)dx$$

の収束，発散を調べよ．

(お茶の水女子大 2018)　　(m20180601)

**0.28** (1) 上三角行列の積は上三角行列になることを示せ．

(2) 次の行列式を計算せよ．

$$A = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

(3) 次の行列を対角化せよ．また，各固有値の固有空間の次元を求めよ．

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2018)　　(m20180602)

**0.29** (1) 以下の完全微分方程式を解け．

$$(3x^2 + 2xy - 2y^2)dx + (x^2 - 4xy)dy = 0$$

(2) 以下の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 2x + 3$$

(お茶の水女子大 2018)　　(m20180603)

**0.30** 以下の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{5x - 7x^3}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3\sin 4x)}{x}$

(お茶の水女子大 2018)　　(m20180604)

**0.31** 行列 $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ について.

(1) 固有値を求めよ.

(2) 固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(お茶の水女子大 2018)　　(m20180605)

**0.32** ある工場において製造される製品 $A$ の含水率 (%) の平均は 56.0 であったが，製法を変えたところ，この製品 $A$ の含水率が変わったのではないかと思われた．これを検証するため，新しい製法による製品 $A$ から無作為に 10 個を取り出して計測したところ，次のようなデータが得られた．

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 54.5 | 57.3 | 57.9 | 57.7 | 58.5 |
| 55.8 | 55.6 | 57.3 | 58.2 | 56.6 |

(1) 計測した 10 個の含水率の平均値を求めよ.

(2) 含水率が変わったか有意水準 5% で検定せよ.
なお母分散は製法変更の前後で $\sigma^2 = 1.6$ で変わらないものとし，$z_{0.025} = 1.96$ とせよ.

(お茶の水女子大 2018)　　(m20180606)

**0.33** 微分方程式に関する以下の問いに答えよ.

(1) 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^x$$

を境界条件 $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ のもとで解け．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする.

(2) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = (1-y)y$$

を解け．ただし，$y(0) = \dfrac{1}{2}$ とする.

(3) $x > 0$ の範囲で定義された関数 $u(x)$ に関する微分方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{A}{x}\,\frac{du}{dx} - u = 0 \cdots (*)$$

に関して，以下の問いに答えよ．ただし，$A$ は定数で $A \leq 1$ とする.

(a) 以下の微分方程式

$$\frac{d^2 f_\alpha}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{d f_\alpha}{dx} - \left(1 + \frac{\alpha^2}{x^2}\right) f_\alpha = 0$$

を満たす関数 $f_\alpha(x) \neq 0$ があるとする．ただし，$\alpha$ は非負の定数とする．ここで，式 $(*)$ の解が，関数 $g(x)$ を用いて $u(x) = f_\alpha(x)g(x)$ と表せると仮定すると，

$$\Big[\quad (\text{ア}) \quad\Big]\frac{d f_\alpha}{dx} + \Big[\quad (\text{イ}) \quad\Big] f_\alpha = 0$$

が成り立つ．空欄 (ア), (イ) に入る数式を，$g(x)$, $A$, $\alpha$ を用いて表せ.

(b) (a) の空欄 (ア), (イ) に入る数式が常にゼロとなるよう，$g(x)$ および定数 $\alpha$ を $A$ を用いて表せ．また，必要であれば，積分定数の記号としては $C$ を用いよ.

(東京大 2018)　　(m20180701)

**0.34** 袋の中に 3 色の玉が 8 個入っており，赤玉が 4 個，緑玉が 2 個，青玉が 2 個である．$A$ さんが袋の中から無作為に玉を 3 個取り出し，5 個の玉が残る袋の中から $B$ さんが無作為に玉を 3 個取り出し，色を確認した後に玉をすべて袋に戻す．この過程を 1 回の試行とし，$A$ さんが赤，緑，青の 3 色の玉を 1 個ずつ取り出せたときを $X = 1$, それ以外をX=0とし, Bさんが赤, 緑, 青の 3 色の玉を 1 個ずつ取り出せたときをY=1, それ以外を $Y = 0$ とする．この試行を繰り返し行うとき，以下の問いに答えよ．

(1) この試行を 1 回行ったときの，次の統計量を求めよ．

(a) 期待値 $E(X)$ および $E(Y)$.

(b) 相関係数 $\rho(X, Y)$.

(2) $A$ さんは $n$ 回目の試行で初めて $X = 1$ となったときに $n$ 点もらえるとする．

(a) もらえる点数が 3 点である確率を求めよ．

(b) $A$ さんのもらえる点数の期待値は，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \alpha \sum_{k=1}^{n} k\beta^{k-1}$ という形で表せる．ただし，$\alpha$ と $\beta$ は実数とする．$\alpha$ および $\beta$ の値を求めた後，期待値を求めよ．

(3) $B$ さんは $n$ 回目の試行で初めて $Y = 1$ となったときに $r^n$ 点もらえるとする．ただし，$r$ は正に実数とする．$B$ さんがもらえる点数の期待値が有限な値をとるための，$r$ の条件を求めよ．

(東京大 2018)　　(m20180702)

**0.35** 3 つのベクトル場 $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ を考える．各ベクトル場は次のように定義する．

$$\overrightarrow{A} = rf(r,z)\overrightarrow{e}_\theta$$

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}$$

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{\nabla}\{zf(r,z)\}$$

ただし，$f(r, z)$ は

$$f(r,z) = (r^2 + z^2)^{-3/2}$$

とする．円柱座標系 $(r, \theta, z)$ における基底ベクトルを $(\overrightarrow{e}_r, \overrightarrow{e}_\theta, \overrightarrow{e}_z)$ とし，以下の問いに答えよ．必要であればスカラー場 $\phi$ およびベクトル場 $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r V_r + \overrightarrow{e}_\theta V_\theta + \overrightarrow{e}_z V_z$ に対する以下の勾配，発散，回転の式を用いてよい．

$$\overrightarrow{\nabla}\phi = \overrightarrow{e}_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \overrightarrow{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \overrightarrow{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right) + \overrightarrow{e}_\theta \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \overrightarrow{e}_z \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)$$

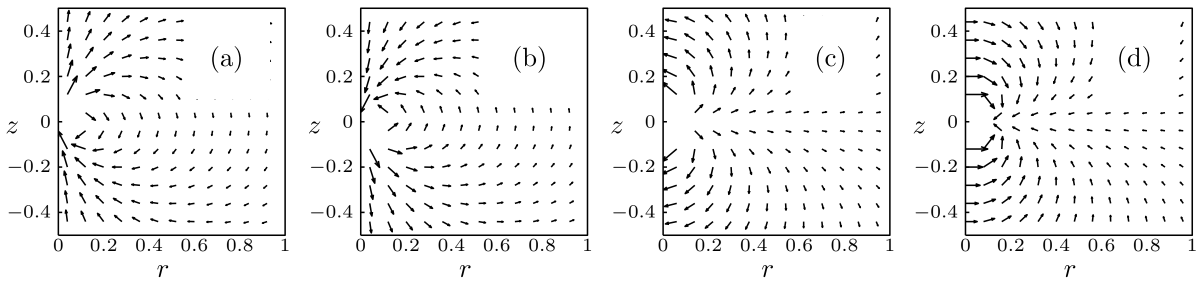
(1) $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B}$ を求めよ．

(2) $r \le r_0$ および $z = z_0$ により定義される円板面 $S_0$ を考える $(z_0 > 0)$．面の法線方向を $\overrightarrow{e}_z$ とするとき，この円板面における次の面積分 $\Phi$ を，必要があれば $r_0$, $z_0$ 用いて，表わせ．

$$\Phi = \int_{S_0} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S}$$

(3) $\overrightarrow{B}$ および $\overrightarrow{C}$ を求めよ．

(4) ベクトル場 $\overrightarrow{B}$ および $\overrightarrow{C}$ の分布の概略として正しい図を下の (a)-(d) からそれぞれ選べ.




(5) $r \leq r_0$ および $z_1 \leq z \leq z_2$ により定義される円柱 $(z_1 > 0)$ に対し，側面と両底面からなる閉曲面 $S_1$ を考える．面の法線方向を円柱外向きとする．この閉曲面における次の面積分 $Q$ を，必要であれば $r_0$, $z_1$, $z_2$ を用いて，表わせ.

$$Q = \int_{S_1} \overrightarrow{C} \cdot d\overrightarrow{S}$$

(東京大 2018) (m20180703)

**0.36** $i$ を虚数単位とする．以下の問いに答えよ.

(1) $-i$ の 3 乗根

$$A = (-i)^{1/3}$$

を考える.

(a) $A$ を全て求めて $a + ib$ の形で答えよ．$a$ と $b$ は実数とする．ただし，最終的な $a$ と $b$ の表式に三角関数を用いてはならない.

(b) $A$ の全ての点を複素平面上に図示せよ.

(2) $x$ と $y$ を実数として複素数 $z = x + iy$ を考える．次の関数に関して以下の問いに答えよ.

$$u = \sin x \cosh y$$

(a) $u$ を実数部分として持つ正則関数 $w(z)$ を求めよ.

(b) $\dfrac{dw(z)}{dz}$ を求めよ.

(3) 次の複素関数積分 $I$ を考える.

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^5 - 3iz^4/2 + z^3} dz$$

ただし，積分路は複素平面上の単位円周上を反時計回りに一周するものとする

(a) 全ての極と対応する次数と留数を求めよ.

(b) 積分 $I$ を求めよ.

(東京大 2018) (m20180704)

**0.37** 2 つの正方行列 $A$, $B$ を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & 1 \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

とし，行列 $C$ を $C = BAB^{-1}$ とする．以下の問いに答えよ．なお，以下では任意のベクトル $\overrightarrow{x}$ に対し $\overrightarrow{x}^T$ はその転置を表すものとする． また，行列 $I$ を単位行列とし， ある正方行列 $X$ に対して $\exp(X)$ を

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots$$

と定義する．

(1) 行列 $A$ の固有値を複素数の範囲で求めよ．

(2) 行列 $C$ の固有値を複素数の範囲で求めよ．

(3) あるスカラー変数 $t$ に対して $\exp(At)$ を求めよ．

(4) 3 次元ベクトル $\overrightarrow{x}$ に対してスカラー関数 $f(\overrightarrow{x})$ を

$$f(\overrightarrow{x}) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \exp\left(C\frac{2\pi k}{n}\right)\overrightarrow{a} - \overrightarrow{x} \right\}^T \left\{ \exp\left(C\frac{2\pi k}{n}\right)\overrightarrow{a} - \overrightarrow{x} \right\}$$

とおく．ただし，$n$ は $n > 1$ を満たす整数，$\overrightarrow{a}$ は以下のような 3 次元ベクトルである．

$$\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

関数 $f(\overrightarrow{x})$ を最小にする $\overrightarrow{x}$ は，ある単位ベクトル $\overrightarrow{b}$ を用いて以下のような形式で表せる．

$$\overrightarrow{x} = \boxed{\text{(ア)}} \left( \sum_{k=1}^{n} \boxed{\text{(イ)}} \right) \overrightarrow{b}$$

(a) (ア) と (イ) に入る数式を書け．必要であれば $a_1$，$a_2$，$a_3$，$n$，$k$ を用いてよい．なお，行列を含まない形式で解答すること．

(b) $\overrightarrow{b}$ を求めよ．

(5) (4) で求めた $\overrightarrow{x}$ に対して，$n \to \infty$ としたときの $\overrightarrow{x}$ を $a_1$，$a_2$，$a_3$ を用いて表せ．

(東京大 2018)　　(m20180705)

**0.38** $a$ を実数とする．$x$, $y$, $z$ に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax & +2y & +2z & = & a+3 \\ 2x & +\ y & +az & = & 4 \\ \ x & +\ y & -\ z & = & 2 \end{cases}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) 連立 1 次方程式が解をもつための必要十分条件を $a$ で表せ．

(2) (1) で求めた条件を $a$ がみたすとき，連立 1 次方程式の解を求めよ．

(東京工業大 2018)　　(m20180801)

**0.39** 次の条件 (i)，(ii) をみたす 3 次正方行列 $A$ を求めよ．

(i) $A$ の固有値はすべて正の実数である．

(ii) $A^2 = \begin{pmatrix} 27 & -26 & -10 \\ 13 & -12 & -5 \\ 10 & -10 & -1 \end{pmatrix}$

(東京工業大 2018)　　(m20180802)

**0.40**　条件 $x^2+y^2 \leqq 9$ のもとで，関数 $f(x,y)=x^4+y^4-4(x-y)^2$ の最大値と最小値を求めよ．

(東京工業大 2018)　　(m20180803)

**0.41**　次の重積分を求めよ．ただし，$a,\ b$ は正の実数とする．

$$\iint_D x^4 dxdy \qquad D\ :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqq 1$$

(東京工業大 2018)　　(m20180804)

**0.42**　2 変数関数 $f(x,y)=x^2-2xy+2y^2+3x-4y$ について，次の問いに答えなさい．

(1)　$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ を満たす点 $(x,y)$ を求めなさい．

(2)　$z=f(x,y)$ の極値を求めなさい．

(東京農工大 2018)　　(m20180901)

**0.43**　領域 $D=\big\{(x,y)\mid x^2+4y^2 \leqq 2\big\}$ 上の 2 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{2-x^2-4y^2}dxdy$ の値を求めなさい．

(東京農工大 2018)　　(m20180902)

**0.44**　$x$ を定数とする．行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & x+1 & -3x+1 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 8-x \\ 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい．

(1)　$A\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{v}$ が成り立つような $x$ の値を求めなさい．

(2)　$x=-5$ のとき，ベクトル $\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ と実数 $c$ に対して，$A\boldsymbol{w}=c\boldsymbol{w}$ が成り立つような 3 つの実数の組 $(a,b,c)$ をすべて求めなさい．

(東京農工大 2018)　　(m20180903)

**0.45**　$t$ の関数 $x=x(t),\ y=y(t)$ についての連立微分方程式

$$\begin{cases} x'-3x+y=-2e^{2t} \\ 6x+y'-4y=4e^{2t} \end{cases}$$

の解で，初期条件 $x(0)=4,\ y(0)=1$ を満たすものを求めなさい．ただし，$x'=\dfrac{dx}{dt},\ y'=\dfrac{dy}{dt}$ である．

(東京農工大 2018)　　(m20180904)

**0.46**　$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合として表せ．

(2)　線形写像 $f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\boldsymbol{v}_1)=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\qquad f(\boldsymbol{v}_2)=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\qquad f(\boldsymbol{v}_3)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

で定義する．線形写像 $f$ の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求め，その基底を 1 組求めよ．

(3) (2) で定義した線形写像 $f$ の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求め，その基底を 1 組求めよ．

(電気通信大 2018)　　(m20181001)

**0.47** 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ に対して，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(x) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ で定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ が零ベクトルでない解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ をもつとする．このような実数 $\lambda$ の値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めたそれぞれの $\lambda$ に対して，$\mathbb{R}^3$ の部分空間 $V_\lambda = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\right\}$ の基底を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3)$ をうまくとると，$f$ の基底 $\boldsymbol{B}$ に関する表現行列 $M$ は対角行列となる．このような $\boldsymbol{B}$ および $M$ を 1 組求めよ．

(電気通信大 2018)　　(m20181002)

**0.48** 関数 $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，$e$ は自然対数の底とする．

(1) $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 連立方程式 $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ をみたす点 $(a,b)$ をすべて求めよ．

(3) $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．

(電気通信大 2018)　　(m20181003)

**0.49** 次の重積分，3 重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{x+y}{1+(x-y)^2}dxdy \quad D = \{(x,y) : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1\}$

(2) $\displaystyle\iiint_E xyzdxdydz, \quad E = \left\{(x,y,z) : y \geqq x \geqq 0,\ z \geqq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leqq 1\right\}$

(電気通信大 2018)　　(m20181004)

**0.50** 複素関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ のすべての極を求めよ．

(2) $f(z)$ の極 $z = \alpha$ における留数 $\mathrm{Res}(\alpha)$ を $\alpha$ を用いた簡単な式で表せ．

(3) 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ の値を求めよ．

(電気通信大 2018)　　(m20181005)

**0.51** 以下の行列 $A$ が与えられている．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & a \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ただし，$A$ は異なる 2 つの実数を固有値として持つ．また，定数 $a$ は正の実数である．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $a$ の値を求めよ．

(2) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) $A^{-1}$ を求めよ．

(横浜国立大 2018)　　(m20181101)

**0.52**　次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $y^2\left(\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+1\right)=1$　　　(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y}{x+y}$

(横浜国立大 2018)　　(m20181102)

**0.53**　図のような円柱座標系での微積分に関する以下の問いに答えよ．

(1) 直交座標 $(x,y,z)$ を円柱座標 $(r,\theta,z)$ に変換する，$x$，$y$，$\dfrac{\partial x}{\partial r}$，$\dfrac{\partial x}{\partial \theta}$，$\dfrac{\partial x}{\partial z}$ を $r$，$\theta$，$z$ の関数として示せ．

(2) $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} & \dfrac{\partial r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} & \dfrac{\partial \theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix}=E$ が成り立つことに留意し，$\dfrac{\partial r}{\partial x}$，$\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を $r$，$\theta, z$ を用いて示せ．なお，$E$ は単位行列である．

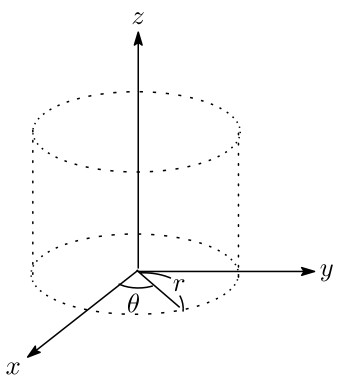
(3) (2) の結果を用いると円柱座標系のラプラシアンは
$\triangle=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ で表される．　関数 $f(r,\ \theta,\ z)=rz\cos\theta$ に対して $\triangle f$ を計算せよ．

(4) 円柱座標系で $r$ だけを変数 $(r>0)$ とする関数 $g(r)$ が $\triangle g(r)=0$，$g(1)=0$，$g(e)=2$ の条件を満たす．この $g(r)$ を求めよ．ただし，$e$ は自然対数の底である．

(5) $x$，$y$，$z$ の $r$，$\theta$，$z$ に対するヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算せよ．

(6) $K$ を積分領域とする以下の三重積分を，円柱座標系への変数変換を用いて計算せよ．ただし，$a$ は正の定数である．

$$\iiint_k y^2\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,\qquad K=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leq 1,\ 0\leq z\leq a\right\}$$




(筑波大 2018)　　(m20181301)

**0.54**　次の漸化式について考える．

$$\begin{cases} a_{n+1}=7a_n-6b_n \\ b_{n+1}=3a_n-2b_n \end{cases}\qquad a_1=1,\ b_1=0$$

以下の問いに答えよ．

(1) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ を満たす行列 $A$ を求めよ．

(2) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 $P$，およびその逆行列 $P^{-1}$ を求めよ．

(4) $a_n$，$b_n$ の一般項を求めよ．

(筑波大 2018)　　(m20181302)

**0.55** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の多項式 $f(A) = A^5 - A^4 + A^3 - A^2 + A - E$ について，以下の問いに答えなさい．ただし，$E$ は単位行列である．

(1) $A$ の固有値 $\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$ および固有ベクトルを求めよ．ただし，$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ となるようにとること．

(2) $A$ を $A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}P^{-1}$ と対角化する行列 $P$，およびその逆行列 $P^{-1}$ を求めよ．

(3) $f(A)$ を求めよ．

(4) $|f(A)|$ を求めよ．

(筑波大 2018)　　(m20181303)

**0.56** $y$ に関する以下の線形微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{3}{x}y = 2x^3 + x^2 + x$　　(2) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - n^2y = 0$　($n$ は定数)

(筑波大 2018)　　(m20181304)

**0.57** 留数定理を用いて，以下の定積分の値を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2 - 2x + 2}dx$$

ただし，$m$ は実定数とする．

(筑波大 2018)　　(m20181305)

**0.58** Newton 法は方程式 $f(x) = 0$ を満たす解 $x$ の近似解を数値的に求める手法の 1 つである．具体的な手順は，以下の通りである．まず，漸化式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

を構成する．ここで，$f'(x_n) = \dfrac{d}{dx}f(x_n) \neq 0$ とする． 次に，この漸化式を適当な初期値 $x_0$ の下で解き，数列 $x_1$，$x_2$，$\cdots$ を計算する． 解が存在する場合には，その収束値 $x_\infty$ は $f(x_\infty) = 0$ を満たす．上述の Newton 法に関して，以下の設問に答えよ．

(1) Newton 法で $x_0$ から $x_1$ を求めることは，点 $(x_0,\ f(x_0))$ における $y = f(x)$ の接線と $x$ 軸の交点を求めることになっている．これを示せ．

(2) Newton 法の漸化式から得られる数列 $\{x_n\}$，$n = 0,\ 1,\ \cdots$ は，初期値 $x_0$ が $f(x) = 0$ の解の近傍にあるときに収束し，その収束値は $f(x) = 0$ の解を与える．これを以下の＜定理＞を用いて示せ．ただし，$f'(x) \neq 0$ かつ $f''(x) = \dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ は連続であるとする．

＜定理＞

関数 $\varphi(x)$ が閉区間 $I$ で微分可能で，$\varphi(x)$ の値域は $I$ に含まれ，$I$ では

$$\left|\frac{d}{dx}\varphi(x)\right| \leq k < 1$$

であるとする．このとき，反復法 $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ によって方程式 $x = \varphi(x)$ のただ 1 つの根 $x_\infty$ が得られる．

(筑波大 2018)　　(m20181306)

**0.59** $x$ を 2 次以下の実数係数の多項式 $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ 全体が作る線形空間 $\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{W}$ について，$\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ の写像 $F$ は，$f(x)$ を $f(x) + f'(x)$ に移す写像とする．

ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ を微分した関数（導関数）を表す．以下の設問に答えよ．

(1) $F$ が上への 1 対 1 の線形写像であることを証明せよ．

(2) $\{x+1,\ x^2+x+1,\ 1\}$ が $\boldsymbol{W}$ の基底となることを証明せよ．

(3) $\boldsymbol{V}$ の基底 $\{x,\ -x^2+1,\ x^2-4x+3\}$ と $\boldsymbol{W}$ の基底 $\{x+1,\ x^2+x+1,\ 1\}$ に関する $F$ の表現行列 $A$ を求めよ．

(4) $A$ を対角化して，行列 $A^n$ を求めよ．($n$ は正の整数)

(筑波大 2018)　　(m20181307)

**0.60** (1) $n$ 次正方行列 $A = (a_{ik})$ において，第 $i$ 行，第 $k$ 列を取り去って得られる $(n-1)$ 次行列式に符号 $(-1)^{i+k}$ をつけたものを $A$ の第 $(i,\ k)$ 余因子といい，$\triangle_{ik}$ により表す．このとき，以下の問に答えよ．

(a) $A$ の行列式 $|A|$ を第 $(n,\ k)$ 余因子 $(k = 1, \cdots, n)$ を使って表せ．

(b) $A$ の逆行列 $A^{-1}$ の第 $(i,\ k)$ 成分を $A$ の行列式と余因子により表せ．

(2) $A$ を $n$ 次正方行列，$D$ を $m$ 次正方行列とする．また，$O_{m,n}$ を $(m,\ n)$ 次の零行列，$I_n$，$I_m$ をそれぞれ $n$ 次と $m$ 次の単位行列とする．$A$ が正則であるとき，

行列の積 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ O_{m,n} & I_m \end{bmatrix}$ を求め，それから，$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ の行列式を求めよ．

(3) $A$, $B$, $C$ を $n$ 次正則行列，$O_n$ を $n$ 次零行列とするとき，$2n$ 次行列 $\begin{bmatrix} A & B \\ O_n & C \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(筑波大 2018)　　(m20181308)

**0.61** $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $S$ の固有値をすべて求めよ．

(2) $S$ の固有値に対応する固有ベクトルをすべて求めよ．

(3) $S$ の固有値に対応する固有ベクトルを並べて得られる直交行列 $P$ を一つ示せ．

(4) (3) の直交行列 $P$ に対して，$P^TSP$ を求めよ．ただし，$P^T$ は $P$ の転置行列である．

(筑波大 2018)　　(m20181309)

**0.62** 関数 $f$ を

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $f$ は原点 $x = 0$ で連続である．その理由を答えよ．

(2) $f$ の原点 $x = 0$ 以外の導関数を求めよ．

(3) $f$ の原点 $x = 0$ での微分係数を定義に従って求めよ．

(4) $f$ の導関数 $f'$ が原点 $x = 0$ で連続かどうかを，その理由とともに答えよ．

(筑波大 2018)　　(m20181310)

**0.63** 以下の関数を積分せよ．ただし，$k$ は整数であり，積分定数は省略してよい．

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$　　(2) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$　　(3) $\dfrac{1}{\sin x}$　　(4) $x^k \ln x$

(筑波大 2018)　　(m20181311)

**0.64** サイコロを 2 個投げて出た目の大きい方を $X$，小さい方を $Y$ とする．ただし，同じ目が出たときは，$X=Y$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 確率 $P(X \geq 5)$ 及び $P(Y \leq 1)$ を求めよ．

(2) 条件付き確率 $P(Y \leq 1 \mid X \geq 5)$ を求めよ．

(3) $X$ の期待値 $E[X]$ を計算せよ．

(4) $E[XY]-E[X]E[Y]$ を計算せよ．

(筑波大 2018)　　(m20181312)

**0.65** $E_1,\cdots,E_n$ を互いに排反で網羅的な事象とし，各事象 $E_k$ が生起する確率を $\theta_k$ とする．今，実験を $m$ 回独立に試みたとき，事象 $E_k$ が観測される度数を $x_k$ とすると，$(x_1,\cdots,x_n)$ が実現する確率 $P(x_1,\cdots,x_n)$ は多項分布により求められる．ここで，$m=x_1+\cdots+x_n$ である．$\theta_1,\cdots,\theta_n$ が既知であるとき，サンプル $(x_1,\cdots,x_n)$ が多項分布に従う母集団からとられたという帰無仮説は次の統計量

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{(x_k-m\theta_k)^2}{m\theta_k}$$

で検定できる．$m$ が十分大きいときは，統計量 $S$ は自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布に従う．自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布の $100\alpha\%$ 有意水準点を $X^2(n-1,\ \alpha)$ により表すとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 上記の問題において，5% 有意水準で帰無仮説が棄却される条件を式で示せ．

(2) サイコロを 120 回投げ，出た目の度数を数えたとき，下記のようになったとする．

| 出た目 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 度　数 | 15 | 19 | 23 | 20 | 21 | 22 | 120 |

このとき，サイコロが偏っていないという帰無仮説が 5% 有意水準で棄却されないという条件を式で示せ．

(3) ランダムに選ばれた 800 個の材料のうち 400 個に処理 1（事象 $A$）を，残りの 400 個に処理 2（事象 $\overline{A}$）を行った．さらに，これらの材料の強度試験を行ったところ，もろい（事象 $B$）ともろくない（事象 $\overline{B}$）という 2 種類に下表のように分離された;

| | もろい | もろくない |
|---|---|---|
| 処理 1 | 77 | 323 |
| 処理 2 | 177 | 223 |

この問題では，$n=4$，$m=800$ となるが，各事象が生起する確率 $P(A)$，$P(B)$ は未知である．そこで，観測された度数の割合で求められる値を $P(A)$，$P(B)$ の推定量として置き換えて計算する．このとき，統計量 $S$ は $m$ が十分に大きいならば，自由度 1 のカイ 2 乗分布に従う．材料の処理と強度とは独立であるという帰無仮説が 5% 有意水準で棄却されるという条件を式で示せ．

(筑波大 2018)　　(m20181313)

**0.66** $xyz$ 直交座標系において円柱面 $x^2+y^2=1$, $xy$ 平面, 平面 $z=x$ により囲まれた部分の体積を求めなさい.

(筑波大 2018)　　(m20181314)

**0.67** 関数 $f(x,y)$ は, $x$ および $y$ について偏微分可能で $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ なる関係を満足する.

関数 $f(x,y)$ を $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\ \ (r>0,\ 0\leq\theta<2\pi)$ で変数変換したときの

$f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ は, 変数 $r$ を含まない関数となることを証明しなさい.

(筑波大 2018)　　(m20181315)

**0.68** 二つのメーカー $X$ および $Y$ からなる市場において, 各メーカーのユーザー数を調査したい. 毎年メーカー $X$ のユーザーのうち $\dfrac{1}{10}$ がメーカー $Y$ のユーザーとなり, 一方で, メーカー $Y$ のユーザーのうち $\dfrac{1}{5}$ がメーカー $X$ のユーザーとなる, それ以外は同じメーカーのユーザーのままでいるものとし, ユーザーの総数は変化しない. このとき以下の問いに答えなさい.

(1) ある年におけるメーカー $X$, $Y$ のユーザー数をそれぞれ $x_n$, $y_n$ で表す. このとき翌年におけるそれぞれのメーカーのユーザー数 $x_{n+1}$, $y_{n+1}$ を二次正方行列 $A$ を使って以下の形で表す. 行列 $A$ を具体的に示しなさい.
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

(2) $A$ の固有値および固有ベクトルを求めなさい.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 $P$ を一つ求めるとともに, $P$ の逆行列 $P^{-1}$ を求めなさい.

(4) 行列 $A^n$ を求めなさい.

(5) (4) の結果を使って, $n\to\infty$ としたときのメーカー $X$ および $Y$ のユーザー数の比率を求めなさい.

(筑波大 2018)　　(m20181316)

**0.69** 0 と異なる実数 $a,\ b,\ c$ に対して, $\boldsymbol{u}=(a,\ b,\ c)$ とし, $A={}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}$ とおく. ただし, ${}^t\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u}$ の転置とする.

(1) $A$ の階数を求めよ.

(2) $A$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) $A$ が対角化可能であるかどうかを判定し, 対角化可能であれば $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 $P$ を求めよ.

(筑波大 2018)　　(m20181317)

**0.70** 以下の命題の真偽を判定し, その根拠を述べよ.

(1) 線形写像 $f\ :\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ であって, $\dim \mathrm{Ker}\, f=1$ かつ全射であるものが存在する.

(2) $V$ を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし, $U_1$, $U_2$ を $V$ の部分空間とする. $V=U_1\oplus U_2$ であれば, $V$ の任意の部分空間 $W$ について $W=(W\cap U_1)\oplus(W\cap U_2)$ が成り立つ.

(3) $V$ を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし, $W$ を $V$ の部分空間とする. $W\neq V$ であれば, $V$ の部分空間 $U$ であって, $U\supset W$ かつ $\dim U=\dim W+1$ を満たすものが存在する.

(筑波大 2018)　　(m20181318)

**0.71** $f(x)=\log(1+\sin x)$ とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)(x \to 0)$ を満たす $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$ を求めよ．但し，$o(\cdot)$ はランダウの記号（スモール・オー）を表す.

(2) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + \sin x) - x}{3x^2}$$

(3) $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ の近似値を誤差 $\dfrac{1}{100}$ 未満で求めよ （求めた近似値の誤差が $\dfrac{1}{100}$ 未満であることの根拠も述べること）.

(筑波大 2018)　　(m20181319)

**0.72** 次の重積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy$ ,　　$D = \{(x, y) \mid 1/4 \leqq x^2 + y^2 \leqq 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (x + y)^3 |x - y| e^{(x^2 - y^2)(x - y)} dxdy$ ,　　$D = \{(x, y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \leqq 1\}$

(筑波大 2018)　　(m20181320)

**0.73** $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数の列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられている.

(1) 「 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ 上で関数 $f(x)$ に各点収束する 」の定義を述べよ.

(2) 「 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ 上で関数 $f(x)$ に一様収束する 」の定義を述べよ.

(3) 次の関数列が $\mathbb{R}$ 上で定数関数 0 に一様収束するかを判定せよ.

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

(4) $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ 上で関数 $f(x)$ に一様収束しているとする．すべての $n = 1, 2, \cdots$ について $f_n(x)$ が連続関数ならば，$f(x)$ も連続関数であることを示せ.

(筑波大 2018)　　(m20181321)

**0.74** 次の関数を積分せよ.

(1) $\displaystyle\int e^{kx} x^3 dx$　　(ただし，$k$ は，0 でない定数)

(埼玉大 2018)　　(m20181401)

**0.75** 次の関数を積分せよ.

(2) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y \frac{x}{1 + y^2} dxdy$

(埼玉大 2018)　　(m20181402)

**0.76** 次の関数を微分せよ.　　$y = \dfrac{x + 1}{(x + 2)^2 (x + 3)^3}$

(埼玉大 2018)　　(m20181403)

**0.77** (1) 関数 $x \cos x$，$\log(1 + 3x)$ をそれぞれ 3 次の項までマクローリン展開せよ.

(2) (1) の結果を用いて極限 $\displaystyle\lim_{x \Rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\log(1 + 3x)} - \frac{1}{3x \cos x} \right\}$ を求めよ.

(埼玉大 2018)　　(m20181404)

**0.78** 行列 $A$ が次式で与えられるものとして以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の固有値を求めよ．

(2) 各固有値に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ を求めよ．

(3) (2) で求めた固有ベクトルを列ベクトルとする行列 $V = [\ \boldsymbol{v}_1 \ \ \boldsymbol{v}_2 \ \ \boldsymbol{v}_3\ ]$ の逆行列 $V^{-1}$ を求めよ．

(4) $\hat{A} = V^{-1}AV$ を求めよ．

(5) $\hat{A}^n$ を求めよ．ただし，$n$ は任意の自然数 $(1,\ 2,\ \cdots)$ とする．

(6) (5) の結果を利用して $A^n$ を求めよ．

(埼玉大 2018)　　(m20181405)

**0.79** 以下の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $1 - (\cos x)^2 \dfrac{dy}{dx} = 0$　　(2) $x\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y$

(3) $x^2 \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 5xy\dfrac{dy}{dx} + 6y^2 = 0$　　(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 4y = x^3 + 1$

(埼玉大 2018)　　(m20181406)

**0.80** $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 $f, g$ を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して次のように定める；

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_2 + 5x_3 \\ x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}, \quad g(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - {x_2}^2 \\ 2x_2 + 5x_3 \\ x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

以下の各問に答えよ．

(1) $f$ が線形写像であることを示し，その表現行列 $A$ を求めよ．

(2) 上で求めた行列 $A$ の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(3) 上で求めた行列 $A$ の逆行列を求めよ．

(4) $g$ は線形写像でないことを示せ．

(5) $g$ は全単射であることを示せ．

(茨城大 2018)　　(m20181701)

**0.81** $\boldsymbol{R}^2$ 上に定義域 $D$ をもつ実数値関数 $f(x, y)$ を考える．

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{y^2 - 1}}$$

このとき，次の小問 (1) と (2) に答えよ．

(1) 関数 $f(x, y)$ の定義域 $D$ を調べ，$xy$ 平面上に図示せよ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ となる点 $(x, y)$ が，(1) で求めた定義域 $D$ 上に何個存在するか調べよ．

(茨城大 2018)　　(m20181702)

**0.82** 次の関数を考える．

$$f(x,y)=x^2+y^2-(x^2+y^2)^2$$

$0 \leqq t$ に対して $D(t)=\left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqq 1,\ f(x,y)\geqq t\right\}$ とするとき，次の小問 (1), (2) および (3) に答えよ．

(1) 極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta(r\geqq 0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ を用いて，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_{D(0)} f(x,y)dxdy$$

(2) 平面上の集合 $D(t)$ が表す領域の面積を $F(t)$ とするとき，$F(t)$ を求めよ．
ただし，平面上の集合 $D(t)$ が表す領域が空集合である場合や正の面積を持たない場合の $t$ では $F(t)=0$ とする．

(3) 次の等式を示せ．

$$\int_0^{\infty} F(t)dt=\iint_{D(0)} f(x,y)dxdy$$

(茨城大 2018)　　(m20181703)

**0.83** 開区間 $(-\pi,\ \pi)$ において，実関数 $f(x)$ が微分可能であり，その導関数 $f'(x)$ が連続であるとする．このような $f(x)$ を用いて，$a_n$（但し，$n$ は自然数）が次式で定義されているとき，以下の小問に答えよ．

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

(1) $f(x)=\sin x$ のとき，微分の定義に従って，導関数 $f'(x)$ を導け．

(2) $f(x)=\sin 3x$ のとき，$a_n$ を求めよ．

(3) $f(x)=x$ のとき，$a_n$ を求めよ．

(山梨大 2018)　　(m20181801)

**0.84** $\theta$ と $\phi$ を実数とし，行列 $A=\begin{pmatrix}\cosh\theta & \sinh\theta\\ \sinh\theta & \cosh\theta\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\cosh\phi & \sinh\phi\\ \sinh\phi & \cosh\phi\end{pmatrix}$ を考える．以下の小問に答えよ．

(1) 行列の積 $AB$ を計算し，その結果を行列 $A,\ B$ と同じ形に変形せよ．

(2) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．なお，固有ベクトルは規格化しなくてもよい．

(3) 行列 $A$ により $xy$ 平面上の 4 点 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ が変換される点を求め，$\theta$ を正として図示せよ．また変換後の点が囲む面積を求めよ．

(山梨大 2018)　　(m20181802)

**0.85** $z$ は複素数で，$z^n=1$ を満たす 1 の $n$ 乗根（但し，$n$ は自然数）であるとする．このとき，以下の小問に答えよ．

(1) 全ての $z$（$n$ 乗根）を求めよ．また要点を押さえて，$n$ 乗根の概略を複素平面上に図示せよ．

(2) 1 でない $n$ 乗根の一つを $\omega$ とし，$\omega^2,\ \cdots,\ \omega^{n-1}$ のいずれも 1 でないとする．また，$m$ が自然数で $n$ の倍数でないとき，次の 2 式 $P,\ S_m$ の値を求めよ．

$$P=(1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{n-1})\ ,$$

$$S_m=1+\omega^m+\omega^{2m}+\cdots+\omega^{(n-1)m}\ .$$

(3) $n=10$ の場合を考え，$\omega$, $\omega^2$, $\omega^3$, $\cdots$ , $\omega^9$ がいずれも 1 にならないような $\omega$ はいくつあるか求めよ．

(山梨大 2018)　　(m20181803)

**0.86** 命題の証明に関する以下の問いに答えなさい．

(1) $p$ と $q$ を命題とする．命題 $p \to q$ が真であることを証明するために，下表に示す 3 つの方法がある．直接法に関する説明を参考にして，対偶法と背理法についてそれぞれ説明しなさい．

| | |
|---|---|
| 直接法 | pを真と仮定して, qが真であることを証明する． |
| 対偶法 | （解答用紙に説明しなさい） |
| 背理法 | （解答用紙に説明しなさい） |

(2) 命題関数 $P(n)$ を「最初の $n$ 個の正の奇数の和は $n^2$ である」とする．すべての正の奇数 $n$ に対して $P(n)$ が真であることを，数学的帰納法を用いて証明しなさい．

(山梨大 2018)　　(m20181804)

**0.87** 2 つの箱 $A$, $B$ があって，箱 $A$ には赤玉 1 個と白玉 5 個，箱 $B$ には赤玉 5 個と白玉 1 個が入っている．このとき，以下の問に答えなさい．

(1) 任意に箱を選んで 1 個の玉を取り出したとき，その玉が赤玉である確率を求めなさい．

(2) 任意に箱を選んで 1 個の玉を取り出し, 元の箱に戻し，もう一度同じ箱から玉を取り出す．このとき，2 回連続して赤玉である確率を求めなさい．

(3) 任意に箱を選んで 1 個の玉を取り出したら赤玉であった．その玉を元の箱に戻し，もう一度同じ箱から玉を取り出したとき，赤玉である確率を求めなさい．

(山梨大 2018)　　(m20181805)

**0.88** $x$, $y$ を実数としたとき，命題 $A$「$x^2+y^2 \leq 1$」と命題 $B$「$y^2 \leq x$」に対して答えよ．

(1) それぞれ $A$ と $B$ が真である $x$, $y$ の領域を図示せよ．

(2) $A$ と $B$ が同時に真である $x$, $y$ の領域を図示せよ．

(3) $A$ または $B$ が真である $x$, $y$ の領域を図示せよ．

(4) 「$A$ と $B$ の否定」あるいは「$A$ の否定と $B$」が真である $x$, $y$ の領域を図示せよ．

(山梨大 2018)　　(m20181806)

**0.89** $a>0$ をパラメータとした行列 $A=\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは大きさを 1 とする．さらに $A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ を求めよ．ここで $n$ は任意の自然数である．

(山梨大 2018)　　(m20181807)

**0.90** 連続な確率変数 $X$ の確率密度関数 $p(x)$ が次の式で与えられている．

$$p(x)=\begin{cases} 0 & for \;\; x \leq -1 \\ 2(1+x)/3 & for \;\; -1 \leq x \leq 0 \\ (2-x)/3 & for \;\; 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & for \;\; 2 \leq x \end{cases}$$

(1) この確率分布に対して，平均値 $m$ と分散 $\sigma^2$ を求めよ．

(2) 不等式 $P(|X-m| \geq 1) \leq \sigma^2$ がこの確率密度関数に対して成立することを示せ．
なお $P(|X-m| \geq 1)$ は確率変数 $X$ が平均値より 1 以上離れている事象の確率である．

(山梨大 2018)　　(m20181808)

**0.91**　2 変数関数 $f(x,y) = -\sin^3 x + 2\sin x \cos^2 y$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$D = \{(x,y) \mid 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi\}$ における $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2)　$E = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \pi\}$ における $f(x,y)$ の最大値，最小値を求めよ．

(信州大 2018)　　(m20181901)

**0.92**　$a$, $b$ は定数で $a < b$ とする．$a < p < q < b$ を満たす $p$, $q$ に対して，

$$I(p,q) = \int_p^q \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$t = \sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}$　$(p \leqq x \leqq q)$ とおいて，置換積分法により $I(p,q)$ を求めよ．

(2)　極値 $I = \lim\limits_{p \to a+0} \left\{ \lim\limits_{q \to b-0} I(p,q) \right\}$ を求めよ．

(信州大 2018)　　(m20181902)

**0.93**　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$A$ の行列式の値を求めよ．

(2)　6 次正方行列 $\begin{pmatrix} 3A & A \\ A & 2A \end{pmatrix}$ の行列式の値を求めよ．

(信州大 2018)　　(m20181903)

**0.94**　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．ただし，$a$, $b$ は実定数で，$b > 0$ とする．

(1)　$A$ の固有値がすべて正になる条件を $a$, $b$ を用いて表せ．

(2)　$A$ の固有ベクトルでその成分がすべて正となるものを 1 つ求めよ．

(信州大 2018)　　(m20181904)

**0.95**　$\mathbb{R}$ で定義された実数値関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続とは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し或る $\delta > 0$ が存在して $|x-a| < \delta$ なる任意の $x$ に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つことである．いま $\varepsilon$, $a$ が与えられたとして，関数 $f(x) = \sin x$ について $\delta$ の 1 つを求めよ．

(信州大 2018)　　(m20181905)

**0.96**　2 変数関数 $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$ の停留点を全て求め，それが極大点，極小点，峠点 (鞍点) のいずれであるかを判定せよ．

(信州大 2018)　　(m20181906)

**0.97**　関数列 $f_n(x) = xe^{-nx}$　$n = 1, 2, 3, \cdots$ が区間 $[0, \infty)$ 上で一様収束するかどうか判定せよ．

(信州大 2018)　　(m20181907)

**0.98** $D = \{(x,y) \mid 1 \leq x+y \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ とする．次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3} dxdy$$

(信州大 2018) (m20181908)

**0.99** 以下の正方行列 $A_i$ $(i=1,2,3)$ それぞれについて，$PA_iP^{-1}$ を対角行列にする正方行列 $P$ が存在するかどうかを答え，存在する場合はそのような $P$ および $PA_iP^{-1}$ を答えよ．

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(信州大 2018) (m20181909)

**0.100** 成分がすべて実数である $n$ 次正方行列 $A$ が ${}^tA = A$ を満たすとする．ここで ${}^tA$ は $A$ の転置行列である．部分ベクトル空間 $\mathrm{Ker}\ A \subset \mathbb{R}^n$ を次で定める．

$$\mathrm{Ker}\ A = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{v} = 0\}$$

また，$(\mathrm{Ker}\ A)^\perp \subset \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の標準的な内積についての $\mathrm{Ker}\ A$ の直交補空間とする．

(1) 任意の $\boldsymbol{v} \in (\mathrm{Ker}\ A)^\perp$ に対して，$A\boldsymbol{v} \in (\mathrm{Ker}\ A)^\perp$ であることを示せ．

(2) 線形写像 $f : (\mathrm{Ker}\ A)^\perp \to (\mathrm{Ker}\ A)^\perp$ を，$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ によって定める． $f(\boldsymbol{v}) = 0$ を満たす $\boldsymbol{v} \in (\mathrm{Ker}\ A)^\perp$ は，$\boldsymbol{v} = 0$ に限ることを示せ．

(3) $f$ を (2) で定めた線形写像とする． ベクトル $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w} \in (\mathrm{Ker}\ A)^\perp$ が $f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{w})$ を満たせば，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ であることを示せ．

(4) $f$ を (2) で定めた線形写像とする． 任意の $\boldsymbol{w} \in (\mathrm{Ker}\ A)^\perp$ に対して，$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ となるような $\boldsymbol{v} \in (\mathrm{Ker}\ A)^\perp$ が存在することを示せ．

(信州大 2018) (m20181910)

**0.101** 次の (1)〜(3) の関数を $x$ で微分せよ．ただし，$e$ は自然対数の底とする．

(1) $y = \sqrt{1+\sin x}$ (2) $y = xe^{1/x}$ (3) $y = -\log_e(\cos x)$

(新潟大 2018) (m20182001)

**0.102** 次の (1)〜(3) の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \left(\frac{x+3}{x}\right)^2 dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(2x-1)^3} dx$ (3) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos x dx$

(新潟大 2018) (m20182002)

**0.103** 次の (1),(2) の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+3x+2}{3x^2+2}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{4^x-3^x}{4^x+3^x}$

(新潟大 2018) (m20182003)

**0.104** 次の (1),(2) の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\displaystyle\frac{dy}{dx} = 2xy^2$ (2) $\displaystyle\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}$

(新潟大 2018) (m20182004)

**0.105** ベクトル場 $\vec{V}(\vec{r}) = \dfrac{A\vec{r}}{r^3}$ が存在する．ここで $A$ は定数であり，$\vec{r} = (x,\ y,\ z)$ で，$r = |\vec{r}|$ である．$r \neq 0$ として以下のものを計算せよ．計算過程も書くこと．

(1) $\mathrm{div}\ \vec{V}(\vec{r})$　　(2) $\mathrm{rot}\ \vec{V}(\vec{r})$

(新潟大 2018)　(m20182005)

**0.106** 原点を中心として球対称な密度分布 $\rho(r) = B\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)$ が存在する．ここで $r$ は原点からの距離である．ただし，$B$ は定数で，$R < r$ では $\rho(r) = 0$ である．

(1) 半径 $r + \triangle r$ の球面と半径 $r$ の球面に挟まれた領域の体積 $\triangle V$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\triangle r}{r} \ll 1$ とすると，近似的に $\triangle V$ は $\triangle r$ に比例し，$\triangle V = f(r)\triangle r$ と書ける．$f(r)$ を求めよ．

(3) $\triangle V$ の領域内の質量は $\rho(r)\triangle V = f(r)\rho(r)\triangle r$ となることから，半径 $r$ の球面より内側に含まれる質量 $M(r)$ は，$M(r) = \displaystyle\int_0^r f(r')\rho(r')dr'$ となる．$r \leqq R$ に対して，$M(r)$ を求めよ．

(4) 密度分布が球対称である場合には，$r$ の位置にある質点が受ける単位質量あたりの重力の大きさ $F_G$ は，$F_G(r) = \dfrac{GM(r)}{r^2}$ となる．$r \leqq R$ と $R < r$ のそれぞれについて，$F_G(r)$ を求めよ．

(5) 横軸を $r$，縦軸を $F_G(r)$ とするグラフの概形を描け．

(新潟大 2018)　(m20182006)

**0.107** 次のような行列 $C$ について考える．ここで $i^2 = -1$ である．

$$C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $C$ の固有値をすべて求めよ．

(2) 行列 $C$ の固有ベクトルをすべて求めよ．ただし，固有ベクトルは大きさ 1 に規格化すること．

(3) 行列 $C$ を対角化した行列を $D$ とする．行列 $D$ を求めよ．

(4) $D^n$ を計算し，$C^n$ を求めよ．

(新潟大 2018)　(m20182007)

**0.108** $n$ を $n \geqq 2$ となる自然数とし，$t$ を $0 < t < 1$ となる実数とする．このとき，$(1-t)^n$ と $1 - nt$ の大小関係を不等式で表せ．

(新潟大 2018)　(m20182008)

**0.109** $a,\ b$ を $0 < a < b < 1$ となる実数とする．このとき，定積分 $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$ を求めよ．

(新潟大 2018)　(m20182009)

**0.110** $4 \times 4$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

について，次の各問いに答えよ．

(1) $A$ の行列式の値を求めよ．

(2) $A$ の固有値をすべて求めよ．

(3) $A$ の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ．

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 $P$ と $P^{-1}$ を求め，$A$ を対角化せよ．

(新潟大 2018)　(m20182010)

**0.111** 自然数 $n$ に対して，

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

と定義する．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$, $H_4(x)$ を求めよ．

(2) $\dfrac{d}{dx}H_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$ を示せ．

(3) $H_n(x)$ は $n$ 次の多項式であることを示せ．

(4) $n \geqq 3$ のとき，任意の実数 $T > 0$ に対して

$$\int_0^T xH_n(x)e^{-x^2}dx = -TH_{n-1}(T)e^{-T^2} - H_{n-2}(T)e^{-T^2} + H_{n-2}(0)$$

なることを示せ．

(5) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty xH_6(x)e^{-x^2}dx$ を求めよ．

(新潟大 2018)　(m20182011)

**0.112** 次の各問いに答えよ．

(1) 実対称行列の固有値はすべて実数であることを示せ．

(2) 実変数 $x$, $y$, $z$ に対して，関数 $f(x, y, z)$ を

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4xy + 4zx$$

により定める．このとき，条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ のもとで，$f(x, y, z)$ の最大値と最小値を求めよ．

(新潟大 2018)　(m20182012)

**0.113** $a$ を 1 でない実数とし，$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ とする．下の問いに答えなさい．

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような 2 次直交行列 $P$ を 1 つあげなさい．また，$P^{-1}AP$ を求めなさい．

(長岡技科大 2018)　(m20182101)

**0.114** $x$ の関数 $y$ についての微分方程式を

$$(*) \qquad xy'' + 2y' + 4xy = 0$$

とする．下の問いに答えなさい．

(1) $z = xy$ とおいて，$(*)$ を $z$ についての微分方程式として表しなさい．

(2) 前問 (1) で求めた微分方程式を解くことによって，微分方程式 $(*)$ の一般解を求めなさい．

(長岡技科大 2018)　(m20182102)

**0.115** 表に 1，裏に 2 と書かれている硬貨がある．$A$ さんがこの硬貨を 1 回投げて，出た数を $X$ とする．次に $B$ さんがこの硬貨を 2 回投げて，出た数の大きい方（等しければその等しい数）を $Y$ とする．下の問いに答えなさい．

(1) 確率 $P(X=k),\ k=1,\ 2$ と確率 $P(Y=k),\ k=1,\ 2$ とをそれぞれ求めなさい.

(2) $X>Y$ となる確率 $P(X>Y)$ と $X<Y$ となる確率 $P(X<Y)$ とをそれぞれ求めなさい.

(3) 次のようなゲームを考える．「$X>Y$ のとき，$A$ さんは 300 点を得て，$B$ さんは 300 点を失う．$X<Y$ のとき，$B$ さんは $n$ 点を得て，$A$ さんは $n$ 点を失う．$X=Y$ のとき，両者とも得失点はない．」このゲームで，$A$ さんの得点の期待値 $E_A$ と $B$ さんの得点の期待値 $E_B$ とをそれぞれ求めなさい.

(4) 前問 (3) のゲームが公平となる，すなわち，$E_A=E_B$ となるような $n$ を求めなさい.

(長岡技科大 2018)　　(m20182103)

**0.116** $a,\ h$ を正の定数とし，関数 $f(x,y)$ を $f(x,y)=h-a(x^2+y^2)$ とする．$f(x,y)\geqq 0$ で表される $xy$ 平面における領域を $D$ とし，その面積を $S$ とする．また，$xyz$ 空間で，曲面 $z=f(x,y)$ と $xy$ 平面で囲まれる立体の体積を $V$ とする．下の問いに答えなさい.

(1) $D$ を $xy$ 平面上に図示しなさい．また，$S$ を $a$ と $h$ で表しなさい.

(2) $V=\dfrac{1}{2}Sh$ であることを示しなさい.

(長岡技科大 2018)　　(m20182104)

**0.117** (1) 線形写像

$$f:\boldsymbol{R}^4\ni\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\3&5&3&-4\\5&8&8&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3$$

の像 (Im $f$) と核 (Ker $f$) の基底をそれぞれ一組求めよ.

(2) $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合 $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\ \middle|\ z^2\geqq x^2+y^2\right\}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではないことを示せ.

(3) $\boldsymbol{R}^n(n\geq 3)$ のベクトル $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ が 1 次独立であるとき，$\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_3+\boldsymbol{u}_1$ も 1 次独立であることを示せ.

(金沢大 2018)　　(m20182201)

**0.118** 行列 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$ について 次の問いに答えよ.

(1) ${}^tPAP$ が対角行列となるような 3 次の直交行列 $P$ を一つ求めよ．ただし ${}^tP$ は $P$ の転置行列を表す.

(2) $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3$ に対して，$f(\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ とおく（${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す）.

集合 $S=\left\{\boldsymbol{x}={}^t(x,y,z)\in\boldsymbol{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=1\right\}$ における，$f(\boldsymbol{x})$ の最大値と最小値，およびそれらを与える $\boldsymbol{x}\in S$ をすべて求めよ.

(3) $A^5-5A^4+2A^3+9A^2$ を求めよ.

(金沢大 2018)　　(m20182202)

**0.119** (1) 任意の非負整数 $n=0,1,2,\cdots$ に対して

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$$

が成り立つことを示せ.

(2) 次の関数 $f(x)$ は $x=0$ で微分可能であることを示せ.

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

(3) (2) の関数 $f(x)$ は $\boldsymbol{R}$ 上で 2 回微分可能であり，2 階導関数 $f''(x)$ は $x=0$ で連続であることを示せ.

(4) 関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け.

(金沢大 2018)　　(m20182203)

**0.120** $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ を収束する単調増加数列とし，その極限値を $p$ とする．自然数 $n=1,2,\cdots$ に対して，$\boldsymbol{R}$ 上の関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}|x-p_k|$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ.

(1) $f_1(x)$, $f_3(x)$ の最小値を与える $x$ を求めよ.

(2) $f_{2n+1}(x)$ の最小値を与える点を $q_n$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}q_n$ を求めよ.

(金沢大 2018)　　(m20182204)

**0.121** 実数 $t\,(0<t<1)$ に対して，集合 $R_t$ を

$$R_t=\left\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \mid x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ t\leqq x+y\leqq 1\right\}$$

と定める．このとき次の問いに答えよ.

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_{R_t}\frac{dxdy}{x+y}$ の値を求めよ.

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{t\to+0}\iint_{R_t}\frac{dxdy}{(x+y)^{\lambda}}$ が存在するような，実数 $\lambda$ の範囲を求めよ.

(金沢大 2018)　　(m20182205)

**0.122** 行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．以下において，$I$ は 3 次の単位行列，$O$ は 3 次の零行列である.

(1) $A$ の特性多項式 $\det(\lambda I-A)$ を求めよ.

(2) $A$ の実数の固有値をすべて求め，各固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(3) $A^3+aA^2+bA+cI=O$ を満たす実数 $a,b,c$ を求めよ.

(4) 行列 $A^{2018}$ を計算せよ.

(金沢大 2018)　　(m20182206)

**0.123** 定数 $a>0$ を与えて，開区間 $\left(0,\dfrac{\pi}{a}\right)$ 上で関数 $f(x)=\dfrac{\cos(ax)}{\sin(ax)}$ を考える．次の問いに答えよ.

(1) $x=0$ での右側極限 $\displaystyle\lim_{x\to0+0}f(x)$ と $x=\dfrac{\pi}{a}$ での左側極限 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{a}-0}f(x)$ をそれぞれ調べよ.

(2) $f(x)$ は $\left(0,\dfrac{\pi}{a}\right)$ 上で，$f'(x)=-a\left(1+f(x)^2\right)$ を満たすことを示せ.

(3) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在することを示し，その導関数 $(f^{-1})'(x)$ を求めよ.

(4) (3) の関数 $f^{-1}(x)$ と $f(b)=b$ を満たす定数 $b$ $\left(0<b<\dfrac{\pi}{a}\right)$ に対して，広義積分

$$\int_b^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)\left\{1+\left(f^{-1}(x)\right)^2\right\}}dx$$

を $a$ と $b$ を用いて表せ.

(金沢大 2018)　　(m20182207)

**0.124** 関数 $f(x,y)=(x+y)e^{-(x^2+y^2)}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 曲面 $z=f(x,y)$ 上で点 $(1,0,f(1,0))$ における接平面の方程式を $z=ax+by+c$ と表すとき，定数 $a,b,c$ を求めよ.

(2) $f(x,y)$ の極値を調べよ.

(3) 次の広義重積分の値を求めよ．必要ならば，$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを利用してよい.

$$\iint_D f(x,y)dxdy, \quad D=\{(x,y)\,|\,x\geqq 0,\ y\geqq 0\}$$

(金沢大 2018)　　(m20182208)

**0.125** $y=a\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{x}{a}}\right)+\sqrt{ax-x^2}$ 　($a$： 定数，$0<x\leq a$) の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(富山大 2018)　　(m20182301)

**0.126** $\log_e y-a^x$ 　($a$： 定数，$a>0$) で定義される関数 $y$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(富山大 2018)　　(m20182302)

**0.127** 不定積分 $\displaystyle\int e^x\sin x dx$ を求めよ.

(富山大 2018)　　(m20182303)

**0.128** $D=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq \sin y,\ 0\leq y\leq \pi\}$ のとき，二重積分 $\displaystyle\iint_D xdxdy$ の値を求めよ.

(富山大 2018)　　(m20182304)

**0.129** 直角座標系 $xyz$ におけるベクトル場 $\overrightarrow{F}(x,y,z)=-y\overrightarrow{i}+(z-x)\overrightarrow{j}+y\overrightarrow{k}$,
スカラー場 $\phi(x,y,z)=axy+byz+czx$ ($a,b,c$ は定数) について，次の問いに答えよ.
ただし，$\overrightarrow{i}$，$\overrightarrow{j}$，$\overrightarrow{k}$ はそれぞれ $x$，$y$，$z$ の各軸方向の単位ベクトルとする.

(1) 次の計算をせよ.
($a$) div $\overrightarrow{F}$　　($b$) rot $\overrightarrow{F}$
($c$) grad $\phi$　　($d$) rot(grad $\phi$)

(2) $a=1,\ b=-1,\ c=0$ のとき，
$\phi$ がベクトル場 $\overrightarrow{F}$ のポテンシャル（スカラーポテンシャル）となることを示せ.

(3) $a=1,\ b=-1,\ c=0$ のとき，
点 $P(1,1,1)$ から点 $Q(0,2,2)$ までの線積分 $\displaystyle\int_P^Q \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$ を求めよ.
ここで $\overrightarrow{r}$ は $P$ から $Q$ へ向かう経路上の点の位置ベクトルである.

(富山大 2018)　　(m20182305)

**0.130** 次の各問いに答えよ．ただし，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ は 2 行 2 列の正則な実数行列，$\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{O}$ はそれぞれ 2 行 2 列の単位行列と零行列とする．

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I} \end{vmatrix}$ と $\begin{vmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{vmatrix}$ をそれぞれ求めよ．

(2) 次の等式が成立することを示せ．

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$$

(3) 次の分割行列（ブロック行列）の積を計算せよ．なお計算結果は，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{O}$ のうち必要なものを小行列とする一つの分割行列として示すこと．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

(4) 次の等式が成立することを (1),(2),(3) の結果を利用して示せ．

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}^{-1}|$$

(富山大 2018)　　(m20182306)

**0.131** 半径 $a(a > 0)$ の円が $x$ 軸に接して滑らずに転がるとき，円周上の定点が描く曲線をサイクロイドといい，パラメータを $t$ として

$$x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

で与えられる．このとき次の各問いに答えよ．

(1) 導関数 $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ を計算せよ．

(2) $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$ を求めよ．

(3) 一般に，パラメータ $t$ が $\alpha$ から $\beta$ まで変化したとき，点 $(x(t), y(t))$ が描く曲線の長さ $l$ は次式で表される．

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

サイクロイドにおいて，$t = t_0$ $(0 < t_0 < 2\pi)$ を初期値として
円が一回転したとき $(t = t_0 + 2\pi)$ の曲線の長さを求めよ．

(富山大 2018)　　(m20182307)

**0.132** 次の各問いに答えよ．

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$(1 - x^2)y' = \frac{x}{y}$$

(2) 次の微分方程式について，与えられた条件を満たす特殊解を求めよ．

$$xy^2y' - 2x + 4 = 0, \qquad x = 1 \text{ の時，} y = 3$$

(3) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$$

(4) 次の微分方程式について，一つの特殊解を求めた上で，一般解を求めよ．

$$2y'' - 6y' + 5y = 5e^{-2x}$$

(富山大 2018)　　(m20182308)

**0.133** (1) $F(x,y)=0$ のとき，$F_y \neq 0$ ならば $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$ となることを示せ．

(2) $f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$ のとき，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ となることを示せ．

(福井大 2018) (m20182401)

**0.134** $\displaystyle\int a^x dx=\frac{1}{\log a}a^x+C \quad (a>0,\ a\neq 1)$ となることを示せ．ただし $C$ は積分定数である．

(福井大 2018) (m20182402)

**0.135** $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{x}(y-x^3)dydx$ の <u>積分順序を変更し</u> て，その値を求めよ． また積分領域も図示せよ．

(福井大 2018) (m20182403)

**0.136** $x$ を実数とする時以下の 3 つのベクトルが一次従属となる $x$ を求めよ．

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ x \end{pmatrix}$$

(福井大 2018) (m20182404)

**0.137** $x,y,z$ を実数とする．以下のベクトルがそれぞれ直交するときの $x,y,z$ を求めよ．また，そのときのベクトルを長さ 1 の単位ベクトルとして示せ．

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ z \end{pmatrix}$$

(福井大 2018) (m20182405)

**0.138** 2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 及びベクトル $\boldsymbol{q}_0=\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ を用いて以下のような漸化式を定義する．このとき，以下の設問に答えよ．

$$\boldsymbol{q}_{n+1}=A\boldsymbol{q}_n \quad (n \text{ は整数})$$

(1) $\boldsymbol{q}_n$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{\varepsilon}_n=\dfrac{{}^T\boldsymbol{q}_n\,A\,\boldsymbol{q}_n}{{}^T\boldsymbol{q}_n\,\boldsymbol{q}_n}$ 及び $\boldsymbol{p}_n=\dfrac{\boldsymbol{q}_n}{|\boldsymbol{q}_n|}$ とするとき，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 及び $\boldsymbol{p}_n$ を求めよ．ここで，${}^T\boldsymbol{q}_n$ は $\boldsymbol{q}_n$ を転置したベクトルである．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 及び $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{p}_n$ を求めよ．

(福井大 2018) (m20182406)

**0.139** $A$ の袋に数字 $1,2,3,4$ が 1 つずつ書かれたカードが，1 枚ずつ，合計 4 枚入っている．$B$ の袋に数字 $1,2,3,4,5$ が 1 つずつ書かれたカードが，1 枚ずつ，合計 5 枚入っている．$C$ の袋に数字 $1,2,3,4,5,6$ が 1 つずつ書かれたカードが，1 枚ずつ，合計 6 枚入っている．$A,B,C$ の袋から 1 枚ずつかカードを取り出すとき，その数字をそれぞれ $x_A$，$x_B$，$x_C$ とする．次の問いに答えなさい．

(1) $A$ と $B$ の袋から 1 枚ずつカードを取り出すとき，$x_A \leq x_B$ である確率を求めよ．

(2) $A$ と $B$ と $C$ の袋から 1 枚ずつカードを取り出すとき，$x_A \leq x_B \leq x_C$ である確率を求めよ．

(3) $A$ と $B$ と $C$ の袋から 1 枚ずつカードを取り出すとき，$x_A \leq x_B > x_C$ である確率を求めよ．

(4) $A$ と $B$ の袋から 1 枚ずつカードを取り出し，$x_A \leq x_B$ となった場合を考える．このとき，$C$ の袋からもう 1 枚カードを引き，$x_B > x_C$ となる確率を求めよ．

(福井大 2018)　　(m20182407)

**0.140** 以下の微分方程式を解きなさい．

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = \cos x$

(福井大 2018)　　(m20182408)

**0.141** 以下の微分方程式を解きなさい．また，特殊解のグラフは一般解のグラフにどのように関係づけられるかを答えなさい．

$$y = x\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

(福井大 2018)　　(m20182409)

**0.142** 関数 $f(t)$ のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

について，以下の問に答えなさい．ただし，$\theta(t-\alpha)$ は単位階段関数で

$$\theta(t-\alpha) = \begin{cases} 1 & (t \geq \alpha) \\ 0 & (t < \alpha) \end{cases}$$

によって定義される．

(1) 単位階段関数 $\theta(t)$ および $\theta(t-1)$ のラプラス変換を求めなさい．

(2) $\mathcal{L}[e^{-(t-1)}\theta(t-1)]$ について，変数 $s$ を用いて表しなさい．必要であれば以下の関係を用いてもよい．

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha)\theta(t-\alpha)] = e^{-s\alpha}F(s)$$

(福井大 2018)　　(m20182410)

**0.143** (1) 積分方程式

$$f(t) + \int_0^t f(\tau)d\tau = \theta(t-1)$$

を満たす関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ を求めなさい．

(2) (1) の積分方程式を解きなさい．

(福井大 2018)　　(m20182411)

**0.144** 次の微分方程式にいて，以下の (1)〜(3) の問いに答えよ．

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + b^2x = 0$$

ただし，$x$ は $t(t \geqq 0)$ の関数で，$a$ および $b$ は正の定数である．

(1) $a < b$ の場合，この微分方程式の一般解を求めよ．

(2) $a < b$ の場合，初期条件「$t = 0$ のとき，$x = x_0$，$\dfrac{dx}{dt} = 0$」のもとでこの微分方程式の解を求めよ．

(3) $a = b$ の場合，初期条件「$t = 0$ のとき，$x = 0$，$\dfrac{dx}{dt} = 1$」のもとでこの微分方程式の解を求め，$t$ と $x$ の関係を図示せよ．

(福井大 2018)　　(m20182412)

**0.145** 以下の (1)〜(3) に示した行列の逆行列を，それぞれ求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$　　(3) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

(福井大 2018)　　(m20182413)

**0.146** ベクトル $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ は一次独立であるとする．これら $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ の一次結合である以下のような 3 つのベクトル $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{Q}$, $\overrightarrow{R}$ を考える．

$$\overrightarrow{P} = \alpha\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}, \quad \overrightarrow{Q} = \overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}, \quad \overrightarrow{R} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \gamma\overrightarrow{C}$$

ただし，$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ は定数とする．

上記の 3 つのベクトル $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{Q}$, $\overrightarrow{R}$ が一次独立であるためには，定数 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ に関して，$\alpha\beta\gamma - \alpha - \beta - \gamma + 2 \neq 0$ が成り立たなければならないことを証明せよ．

(福井大 2018)　　(m20182414)

**0.147** 未知数 $x$ と $y$ に関する以下の連立一次方程式を解け．ただし，$a$ は定数であるとする．

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ 2x + (a^2 - 3)y = a - 1 \end{cases}$$

〈注〉この連立一次方程式は定数 $a$ によって，「一意的な解」，「2 つ以上の解」，「解なし」の 3 つの状態を取りえることに注意せよ．

定数 $a$ のどのような値に対して，どのような解をもつのか，あるいは解をもたないのかを場合分けして答えよ．

(福井大 2018)　　(m20182415)

**0.148** $\dfrac{\partial}{\partial t}\cos(kx - \omega t + \theta)$ を計算せよ．

(福井大 2018)　　(m20182416)

**0.149** $\displaystyle\int_0^\infty \left\{ \int_0^1 \sqrt{x}e^{-2y} dx \right\} dy$ を計算せよ．

(福井大 2018)　　(m20182417)

**0.150** $e^x$ をマクローリン展開し，最初の 4 項までを答えよ．

(福井大 2018)　　(m20182418)

**0.151** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x}{x}$ を求めよ．

(福井大 2018)　　(m20182419)

**0.152** 縦，横，高さがそれぞれ $x$, $y$, $z$ である直方体を考える．この直方体の全ての辺（12 辺）の長さの和を $L$，表面積を $S$ とする．$L$ の値を一定に保ちながら $x$, $y$, $z$ の値を変化させると，$x$, $y$, $z$ がある値のとき $S$ は最大値をとる．このことがわかっているものとして，以下の (1)〜(3) に答えよ．

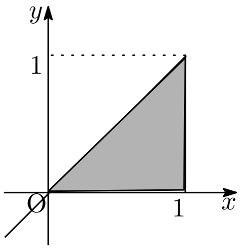
(1) 表面積 $S$ を $x$, $y$, $L$ のみを用いて表せ．

(2) $\dfrac{\partial S}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial S}{\partial y}$ を求めよ．

(3) 上の (2) の結果を利用して，$S$ が最大となるときの $x$, $y$, $z$ の値，および $S$ の最大値を，$L$ を用いて表せ.

(福井大 2018)　　(m20182420)

**0.153** 下図の灰色で塗られた領域の面積を式 (A) の形に表したとき，$\boxed{①}$ から $\boxed{④}$ にあてはまる値や式を答えよ（積分の計算を行う必要はない）.




$$\int_{\boxed{③}}^{\boxed{④}} \left\{ \int_{\boxed{①}}^{\boxed{②}} dy \right\} dx \qquad (A)$$

(福井大 2018)　　(m20182421)

**0.154** (1) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

は 3 個の固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ を持つ．ただし，$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ とする．$\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ を求めよ.

(3) (2) で求めた固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ をそれぞれ 1 列目，2 列目，3 列目に持つ行列を $P$ とする．$P$ の逆行列 $P^{-1}$ を求めよ.

(福井大 2018)　　(m20182422)

**0.155** $xy$ 平面上の座標 $(m, n)$ ($m$ と $n$ は整数) に，サイコロの目に従って右方向と上方向へ移動する点 $P$ が存在する (図 1 参照)．この点 $P$ は，サイコロを振って出た目が整数 $D$ 以下の場合には右方向へ 1 移動して座標が $(m+1, n)$ となる．一方，出た目が $D$ より大きい場合には，上方向へ 1 移動して座標が $(m, n+1)$ となる.

また，点 $P$ から $x$ 軸におろした垂線と $x$ 軸との交点を点 $Q$，点 $P$ から $y$ 軸におろした垂線と $y$ 軸との交点を点 $R$ とし，座標 $(0, 0)$ を原点 $O$ とする.

サイコロの各目が出る確率を $\dfrac{1}{6}$ とするとき，以下の (1)〜(3) に答えよ.

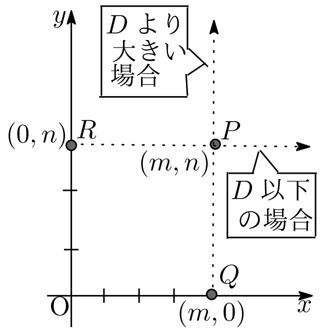



図 1：$xy$ 平面の点 $P$

(1) $D = 4$ の場合を考える．すなわち，サイコロを振って 1 から 4 の目が出たら点 $P$ が右方向に 1 移動し，5 か 6 の目が出たら上方向に 1 移動する．いま，原点 $O$ に位置する点 $P$ がサイコロを 2 回振ったときに座標 $(2, 0)$ へ移動したとする．このとき，

(a) 4 以下の目が出た回数，4 より大きい目が出た回数をそれぞれ示せ.

(b) サイコロを 2 回振ったときに，点 $P$ が座標 $(2, 0)$ に位置する確率を求めよ.

(2) 原点 $O$ に位置する点 $P$ が，サイコロを 3 回振ったときに座標 $(2, 1)$ へ移動したとする．このとき，

(a) 例えば，1 回目に $D$ 以下の目（右へ移動），2 回目に $D$ 以下の目（右へ移動），3 回目に $D$ より大きい目 (上へ移動) が出ると，点 $P$ は座標 $(2, 1)$ へ移動する．このように，原点 $O$ から $(2, 1)$ へ点 $P$ が移動する経路の総数を答えよ.

(b) サイコロを 3 回振ったときに; 点 $P$ が座標 $(2,1)$ に位置する確率を $D$ を使って表せ.

(3) 原点 $O$ に位置する点 $P$ が，サイコロを $L$ 回振ったときに座標 $(s,t)$ ($s$ と $t$ は整数) へ移動したとする．このとき，

(a) 座標 $(s,t)$ の $y$ 座標 $t$ を $L$ と $s$ を使って表せ.

(b) サイコロを $L$ 回振ったときに，点 $P$ が座標 $(s,t)$ に位置する確率を $D,L,s$ を使って表せ.

(c) $L$ が偶数のときに，四角形 $OQPR$ の面積を $s$ と $L$ を使って表せ．さらに，四角形 $OQPR$ の面積が最大となる点 $P$ の座標が 1 つだけ存在することを示し，面積が最大になるときの点 $P$ の座標と面積を求めよ.

(d) $L$ が偶数のときに，四角形 $OQPR$ の面積が最大となる座標に点 $P$ が位置する確率を $D$ と $L$ を使って表せ.

(福井大 2018)　　(m20182423)

**0.156** 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$　　(2) $y = xe^{-x^2}$

(3) $y = (2^x + 1)^3$　　(4) $y = \sqrt{\sin x}$

(福井大 2018)　　(m20182424)

**0.157** 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int (\sin 3x + \cos x)^2 dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{5x-5}} dx$

(福井大 2018)　　(m20182425)

**0.158** 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^2 (x^3 + x^2 + 5x + 3 + 4\pi \sin \pi x + e^{2x}) dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^3 \cos x dx$

(福井大 2018)　　(m20182426)

**0.159** 次の微分方程式を解け.

$$(7x + 4y)\frac{dy}{dx} = -8x - 5y$$

(福井大 2018)　　(m20182427)

**0.160** 次のベクトルと行列の演算を行え.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$　　(2) $4\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　　(4) ${}^t\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$　($t$:転置を表す)

(5) $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(福井大 2018)　　(m20182428)

**0.161** $x$ の関数 $p(x),\ q(x)$ が $a,\ b$ を定数として $\begin{pmatrix} p(x) \\ q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ix} & e^{-ix} \\ ie^{ix} & -ie^{-ix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ で表されるとする．

ただし，$i$ は虚数単位，$e$ は自然対数の底である．この時，以下の問いに答えよ．

(1) $x = 0$ のとき上式を $\begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix} = (A) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と表す．行列 $(A)$ を求めよ．

(2) 上の式を $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (B) \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$ と変形したときの行列 $(B)$ を求めよ．

(3) (1)(2) の結果を利用し $\begin{pmatrix} p(x) \\ q(x) \end{pmatrix} = (C) \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$ と表したとき，行列 $(C)$ を求めよ．

(4) $(C)$ の成分を三角関数で表せ．

(福井大 2018) (m20182429)

**0.162** 次の行列の逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(福井大 2018) (m20182430)

**0.163** 次の連立方程式を行列とベクトルを用いて書き直し，クラメルの公式を用いて解け．

$$\begin{cases} 2x - \ y + \ z = \ 7 \\ x + 2y - 3z = -1 \\ x - 3y - \ z = -2 \end{cases}$$

(福井大 2018) (m20182431)

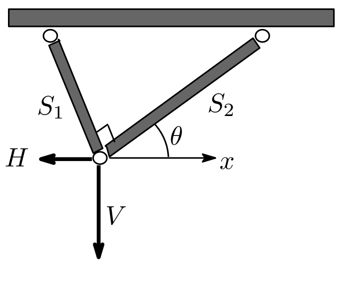
**0.164** 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(福井大 2018) (m20182432)

**0.165** 図のように水平で剛な天井にピン支持されたトラスが荷重を支えている．

ただし $\theta$ は水平方向 ($x$ 軸) からの角度




(1) 部材力 $S_1,\ S_2$ と外力 $H,\ V$ との間のつり合式を行列とベクトルを用いた形で示せ．

(2) $H = 10\mathrm{kN},\ V = 20\mathrm{kN},\ \theta = 30^\circ$の時 ，部材力を求めよ．

(福井大 2018) (m20182433)

**0.166** (1) 次の行列 $H$ が正則かどうか判定せよ．

$$H = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) $A,\ B,\ C$ 及び $X,\ Y,\ Z,\ W$ を $n$ 次行列とし，$A,\ B$ を正則とする．以下の問いに答えよ．

(a) $2n$ 次行列

$$P = \begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$$

の積 $PQ$ を求めよ．ただし $O$ は $n$ 次零行列である．

(b) $P^{-1}$ を $A$, $B$, $C$ を用いて表せ．

(岐阜大 2018)　　(m20182601)

**0.167** $a = \log 2$ とし，関数 $f$ と $g$ を

$$f(x) = ax - a - \log x$$
$$g(x) = x^2 - ae^x$$

で定義する．ただし，log は $e$ を底とする自然対数である．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ と $g(x)$ の導関数を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の閉区間 $[1,\ 2]$ における最大値と最小値，およびそのときの $x$ の値を求めよ．

(3) 次の累次積分 $I$ の積分順序を変更せよ:

$$I = \int_1^2 \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \sin(g(y))dy \right) dx\ ,$$

ただし，

$$\alpha(x) = ax$$
$$\beta(x) = a + \log x$$

とする．

(4) $I$ の値を求めよ．

(岐阜大 2018)　　(m20182602)

**0.168** 箱の中に 7 本の「はずれ」と 3 本の「当たり」が入っているくじがあう．以下の設問に答えよ．なお，1 回につき，くじは 1 本引くものとする．　また，特に断らない限り，続けてくじを引く場合，一度引いたくじは箱の中に戻すものとする．

(1) このくじを 1 回引いて，当たりが出る確率を求めよ．

(2) このくじを 3 回引いて，1 回も当たりが出ない確率を求めよ．

(3) このくじを 3 回引いて，1 回以上当たりが出る確率を求めよ．

(4) このくじを 3 回引いて，1 回だけ当たりが出る確率を求めよ．

(5) このくじを 3 回引いて，3 回連続で当たりが出る確率を求めよ．

(6) 一度引いたくじを箱の中に戻さないようにする．このとき，くじを 3 回引いて，3 回連続で当たりが出る確率を求めよ．

(豊橋技科大 2018)　　(m20182701)

**0.169** 以下に示した不定積分を求めよ．ただし，$e$ は自然対数の底とする．

(1) $\displaystyle\int \sin^3 x dx$　　(2) $\displaystyle\int x^2 e^x dx$　　(3) $\displaystyle\int x e^{-x^2} dx$

(豊橋技科大 2018)　　(m20182702)

**0.170** (1) 行列 $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ -4 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ の行列式を求めよ．

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(3) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を全て求めよ．また，最も小さい固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めよ．

(豊橋技科大 2018)　　(m20182703)

**0.171** $xy$ 平面上の二つの曲線 $y = \sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$ と $y = -\sin 2x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$ とで囲まれる領域 $R$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y = \sin x$ と曲線 $y = -\sin 2x$ の交点を $0 < x < \pi$ の範囲で求めよ．

(2) 領域 $R$ を図示せよ．

(3) 領域 $R$ の面積 $S$ を求めよ．．

(4) 曲線 $y = \sin x$ と 曲線 $y = |\sin 2x|$ の交点を $0 < x < \pi$ の範囲で求めよ．

(5) 領域 $R$ を $x$ 軸を中心として 1 回転させて得られる回転体の体積 $V$ を求めよ．

(豊橋技科大 2018)　　(m20182704)

**0.172** 原点と正規直交する基底ベクトル $\overrightarrow{e}_x$, $\overrightarrow{e}_y$, $\overrightarrow{e}_z$ をもち， それぞれの基底ベクトルに対応する座標を $x$, $y$, $z$ とするユークリット空間を考える．また，演算子 $\nabla$ を $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{e}_x + \dfrac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{e}_y + \dfrac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{e}_z$ と定義する．

(1) $V = xy(x^2 + y^2 + z^2)$ とする．$\nabla V$ を基底ベクトルと $x$, $y$, $z$ を用いて表せ．

(2) 以下に示す $\overrightarrow{f}$ に対して，$\nabla W = \overrightarrow{f}$ となるスカラー関数 $W(x,\ y,\ z)$ が存在するかを考える．ここで，$W$ の 2 階偏導関数は連続であり，$W(0,0,0) = 0$ とする．$W$ が存在するならばそれをひとつ示し，$W$ が存在しないならばそれを証明せよ．

(i) $\overrightarrow{f} = (2x + yz)\overrightarrow{e}_x + (2y + zx)\overrightarrow{e}_y + (xy + 1)\overrightarrow{e}_z$

(ii) $\overrightarrow{f} = (2x + yz)\overrightarrow{e}_x + (2y + z)\overrightarrow{e}_y + (xy + 1)\overrightarrow{e}_z$

(名古屋大 2018)　　(m20182801)

**0.173** 10 個の玉に，互いに区別できるように 1 から 10 の番号を記して箱に入れた．箱の中から無作為に玉を一つ取り出す試行を行う．一度取り出した玉は箱に戻さずに試行を $N$ 回行い，取り出した順に，玉に記された番号を $a_1$, $a_2$, $\cdots$ , $a_N$ として，以下の問いに答えよ．

(1) $N = 3$ のときに $a_1$, $a_2$, $a_3$ がすべて偶数である確率を求めよ．

(2) $N = 5$ のときに $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ となる場合は何通りあるか求めよ．

(3) $N = 5$ で $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ となった場合に，$a_1 > 2$ である条件付き確率を求めよ．

(4) $N = 3$ のときに $a_1 + a_2 + a_3$ が 3 の倍数となる確率を求めよ．

(名古屋大 2018)　　(m20182802)

**0.174** $\log x$ は自然対数とし，次の不定積分を求めよ．　$\displaystyle\int x \log x dx$

(名古屋大 2018)　　(m20182803)

**0.175** (1) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = x + 1$$

(2) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．（ヒント：$u = y/x$ と置換せよ）

$$x\frac{dy}{dx} = -x + y$$

(名古屋大 2018)　　(m20182804)

**0.176** 次の行列 $A$ を考える．

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) $A$ の全ての固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ．なお固有ベクトルの大きさは 1 とする．

(2) 定数 $a,\ b,\ c,\ d$ に対して，$aA^4 + bA^3 + cA^2 + dA$ は単位行列となった．$a,\ b,\ c,\ d$ を一組求めよ．

(3) 大きさが 1 のベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ に $A^k$ を乗じた $A^k\boldsymbol{v}$ を考える．ここで $k$ は正の整数である．

(i) $A^k\boldsymbol{v}$ を $v_1,\ v_2$ を用いて表せ.

(ii) $k \to \infty$ としたとき，$A^k\boldsymbol{v}$ の大きさの最大値を示し，それを与える $\boldsymbol{v}$ をすべて求めよ.

(名古屋大 2018)　　(m20182805)

**0.177** 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ を $|x-1| < 1$ に対して

$$f(x) = \sum_{n=0}^{4} a_n (x-1)^n + R(x), \qquad \lim_{x\to 1}\frac{R(x)}{(x-1)^4} = 0$$

と表すとき，係数 $a_n$ $(0 \leqq n \leqq 4)$ をすべて求めよ.

(名古屋工業大 2018)　　(m20182901)

**0.178** (1) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ と置くとき，$t$ を用いて $\cos x$ を表せ．また $\dfrac{dx}{dt}$ を $t$ で表せ.

(2) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ と置換して定積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi/3} \frac{1}{5+4\cos x}dx$ の値を求めよ.

(名古屋工業大 2018)　　(m20182902)

**0.179** 関数 $f(x,y) = \cos x + \cos y + \cos(x-y)$ について，３点

(i) $(x,y) = (0,0)$ ,　　(ii) $(x,y) = \left(\dfrac{2\pi}{3},\ -\dfrac{2\pi}{3}\right)$ ,　　(iii) $(x,y) = (\pi, 0)$

は，$f_x(x,y) = 0,\ f_y(x,y) = 0$ を満たす．このとき各点で $f(x,y)$ が極値を取るかどうかを判定せよ．また，極値を取る場合には極値を求めよ.

(名古屋工業大 2018)　　(m20182903)

**0.180** 重積分 $I = \displaystyle\iint_D y^2\sqrt{1-x^2}\,dxdy, \qquad D = \left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0\right\}$ の値を求めよ.

(名古屋工業大 2018)　　(m20182904)

**0.181** (1) 次の $x, y, z$ に関する連立一次方程式が，解を持たないための定数 $k$ の条件を求めよ.

$$\begin{cases} \quad - 3y + z = -3 \\ 3x \quad - 2z = k \\ -x + 2y \quad = 1 \end{cases}$$

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$， ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ について，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考える．$\boldsymbol{b}$ として $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶとき，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ のそれぞれの解 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$ を求めよ．

(名古屋工業大 2018)　　(m20182905)

**0.182** 対称行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ．

(1) $A$ の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) グラム・シュミットの正規直交化法で，(1) で求めた固有ベクトルから正規直交系 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ を求めよ．

(名古屋工業大 2018)　　(m20182906)

**0.183** 3 次元空間の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 $S$ を求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の両方に垂直で，大きさが 1 となるベクトルを全て求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積 $V$ を求めよ．

(4) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ からなる行列 $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ．

(三重大 2018)　　(m20183101)

**0.184** 三角関数について，以下の問いに答えよ．ただし，$n$ は自然数である．
この際，オイラーの公式 ($e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$) を用いても良い．ただし，$i$ は虚数単位である．

(1) $\sin(2\theta)$ および $\cos(2\theta)$ を $\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いて表現せよ．

(2) $\sin(3\theta)$ および $\cos(3\theta)$ を $\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いて表現せよ．

(3) $\sin(4\theta)$ および $\cos(4\theta)$ を $\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いて表現せよ．

(4) $\cos(10\theta)$ を $\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いて表現せよ．

(5) $\cos(n\theta)$ は，$\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いてどのように表現されるか推定せよ．

(三重大 2018)　　(m20183102)

**0.185** 時間 $t$ の関数 $f(t) = p(1 - e^{-qt})$ について，以下の問いに答えよ．ただし，$p$, $q$ は正の実数である．

(1) $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(t)dt$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t)$ を求めよ．

(3) $0 \leqq t$ に対する $f(t)$ の変化を図示せよ．ただし $\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t)$ がどうなるかも図示すること．

(4) $0 \leqq t$ に対する $g(t)$ の変化を図示せよ．ただし $\lim_{t\to\infty} g(t)$ がどうなるかも図示すること．

(5) $f(t)$ が満たす微分方程式を求めよ．

(三重大 2018)　　(m20183103)

**0.186** (1) 関数 $f(x) = \log(1-x)$ を $x < 1$ において定義する．任意の自然数 $n$ に対して，下の式が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明しなさい．ここで，$\log x$ は実数 $x$ の自然対数を表すとする．

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

(2) 関数 $g(x,y)$ について，$m \geqq 0,\ n \geqq 0,\ m+n > 0$ の条件を満たす任意の整数 $m,\ n$ に対して式 ㋐ が成り立つとする．また，式 ㋑ が成り立つとする．

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} g(x,y) = g(x,y) \cdots\cdots\cdots ㋐$$

$$g(0,0) = e \cdots\cdots\cdots ㋑$$

なお，$m = 0$ のとき式 ㋐ は以下の式を表すものとする．

$$\frac{\partial^{0+n}}{\partial x^0 \partial y^n} g(x,y) = \frac{\partial^n}{\partial y^n} g(x,y) = g(x,y)$$

また，$n = 0$ のとき式 ㋐ は以下の式を表すものとする．

$$\frac{\partial^{m+0}}{\partial x^m \partial y^0} g(x,y) = \frac{\partial^m}{\partial x^m} g(x,y) = g(x,y)$$

(a) $g(x,y) = u(x)w(y)$ とおく．任意の自然数 $m$ に対して以下の式が成り立つことを示しなさい．ここで，$u(x)$ は変数 $x$ に関する関数，$w(y)$ は変数 $y$ に関する関数とする．

$$\frac{d^m}{dx^m} u(x) = u(x)$$

(b) 関数 $g(x,y)$ を求めなさい．

(三重大 2018)　　(m20183104)

**0.187** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えなさい．

(1) $A$ の逆行列を求めなさい．

また，それを利用して $x,\ y$ に関する連立方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を解きなさい．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正方行列 $P$ を求めなさい．

また，それを利用して $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ により定義される数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ の一般項を求めなさい．ここで，$n$ は自然数とする．

(三重大 2018)　　(m20183105)

**0.188** 次の関数を微分せよ．

(1) $y = 5^{-2x}$　　(2) $y = \sin^4 x \cos^4 x$　　(3) $y = x^{\log x}$

(4) $y = \dfrac{(x-1)\cdot\sqrt[3]{3x+1}}{\sqrt{(2x+5)^3}}$　　(5) $y = \log_a(2x^2-4)\quad (a > 0,\ a \neq 1)$

(三重大 2018)　　(m20183106)

**0.189** 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx$　　　　(2) $\displaystyle\int_1^e (\log x)^2 dx$

(三重大 2018)　　(m20183107)

**0.190** 次の連立 1 次方程式を行列を用いて解け．

(1) $\begin{cases} 5x+6y-7z=-3 \\ 4x+7y+3z=4 \\ -3x-9y+z=4 \end{cases}$　　　　(2) $\begin{cases} -x+y-z=2 \\ 2x-y+3z=4 \\ x+2z=1 \end{cases}$

(三重大 2018)　　(m20183108)

**0.191** $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ とするとき，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持つように $a$, $b$ を定めよ．

(三重大 2018)　　(m20183109)

**0.192** 以下の設問 (1) から (3) に答えよ．

(1) $A=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$,　$B=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ とすると，$A=B$ であることを示せ．

(2) (1) の結果を利用して $A$ の値を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$ の値を計算せよ．

(三重大 2018)　　(m20183110)

**0.193** 袋 $A$ の中に赤玉と白玉がそれぞれ 2 つ，袋 $B$ に赤玉 3 つと白玉 2 つが入っている．解答者はそれぞれの袋の中にある赤玉，白玉の個数をあらかじめ知っているものとし，以下の設問に答えよ．

(1) 袋 $B$ から 2 つの玉を取り出すとき，取り出される赤玉の個数（0 個，1 個，2 個）の期待値をそれぞれ求めよ．

(2) 袋 $A$ から 1 つの玉を取り出し，その後，袋 $B$ から 2 つの玉を取り出すとき，その 3 つの玉のうち赤玉が 2 つである確率を求めよ．

(3) 袋 $A$ から 1 つの玉を取り出した後で，2 つの玉を袋 $A$ から取り出すか，あるいは袋 $B$ から取り出すかのどちらかを選択できるとする．できるだけ多くの赤玉を取り出す可能性が高いほうを選択したとき，最終的に取り出される赤玉の個数の期待値を求めよ．

(三重大 2018)　　(m20183111)

**0.194** (1) 次の行列 $A$ の行列式 $|A|$ を求めよ．また行列 $A$ と次のベクトル $\vec{v}$ の積 $A\vec{v}$ を計算し，$A\vec{v}=\vec{v}$ となることを示せ．　ただし $\theta$, $\phi$ は実数，$i$ は虚数単位とする．

$$A=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)e^{-i\phi} \\ \sin(\theta)e^{i\phi} & -\cos(\theta) \end{pmatrix},\quad \vec{v}=\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

(2) (1) の行列 $A$ について，$\phi=0$ としたときの 2 つの固有値および固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさは 1 とせよ．

(3) 次の行列 $B$ の 2 つの固有値を求めよ．ただし $k$ は実数とする．また $|k|\leq 1$ として，大きさ 1 とした 2 つの固有ベクトルを求めよ．また 2 つの固有値を $k$ の関数として，$|k|\leq 1$ の範囲でグラフに描け．

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$$

(三重大 2018)　　(m20183112)

**0.195**　曲線 $y=\dfrac{\log x}{x}$ の極値及び変曲点を求め，この曲線の概形を書け．

(三重大 2018)　　(m20183113)

**0.196**　星芒形 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, $(a>0)$ の概形を書け．またこの曲線の全長を求めよ．

(三重大 2018)　　(m20183114)

**0.197**　3 次正方行列 $A$ とベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ を次で定める．

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & a & b \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

さらに，$f_1=A\mathbf{e}_1$, $f_2=A\mathbf{e}_2$, $f_3=A\mathbf{e}_3$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$f_1$, $f_2$, $f_3$ が一次従属となる $a$, $b$ の条件を求めよ．

(2)　$Bf_1=\boldsymbol{e}_1$, $Bf_2=\boldsymbol{e}_2$, $Bf_3=\boldsymbol{e}_3$ となる 3 次正方行列 $B$ が存在するための $a$, $b$ を求めよ．

(奈良女子大 2018)　　(m20183201)

**0.198**　$a<b$ となる正の実数 $a$, $b$ に対して，数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次で定義する．

$$a_1=a, \quad b_1=b, \quad a_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, \quad b_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$$

以下の問いに答えよ．

(1)　$n \geqq 2$ に対し，$a_{n-1}<a_n<b_n<b_{n-1}$ が成り立つことを示せ．

(2)　$n \geqq 2$ に対し，$b_n-a_n<\dfrac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}$ が成り立つことを示せ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$ となる実数 $\alpha$ が存在することを示せ．

(奈良女子大 2018)　　(m20183202)

**0.199**　関数 $f(x)=x^2(1-x)^4$ と $g(x)=x^4(1-x)^2$ を，$0 \leqq x \leqq 1$ において考える．以下の問いに答えよ．

(1)　$f$ の増減を $0 \leqq x \leqq 1$ において調べ，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．さらに，$y=g(x)$ のグラフの概形をかけ．

(2)　不等式 $0 \leqq y \leqq f(x)$ かつ $0 \leqq y \leqq g(x)$ の表す領域の面積を求めよ．

(奈良女子大 2018)　　(m20183203)

**0.200**　与えられた条件の下で，以下の関数を微分せよ．

(1)　$y=xe^x$

(2)　$y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$，　($\sigma$および $m$ は正の定数)

(3)　$y=\sin^{-1}x$　($x$ のとりうる値は $\left[-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right]$ を満たす範囲のみとする)

(奈良女子大 2018)　　(m20183204)

**0.201** $a$ を正の定数として, $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)dx$ の値を以下の手順で求めよう.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ay^2)dy$$

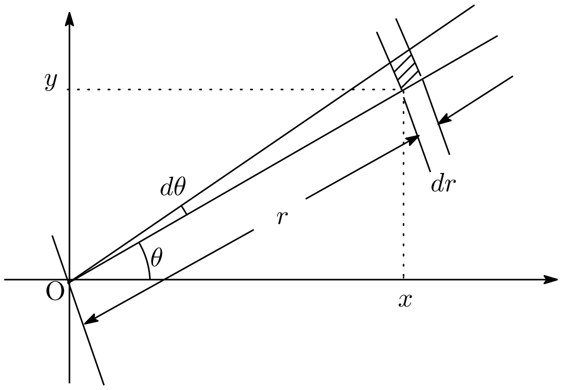
であるから,

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ay^2)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-a(x^2+y^2)\right] dxdy$$

という面積分を実行し，その結果の平方根をとればよい．このとき，点 $(x, y)$ の位置ベクトルを $\vec{r}$ として，$r = |\vec{r}|$，$\vec{r}$ と $x$ 軸のなす角を $\theta$ とおく.

(1) $x$ および $y$ を $r$ と $\theta$ の式で表せ.

(2) 下図の斜線部の微小面積を，$r$, $dr$, $\theta$, $d\theta$ のうち必要なものを用いて表せ.




(3) $I^2$ を $xy$ 直交座標による面積分から $r$ と $\theta$ で表される極座標での面積分に変換せよ.

(4) 前問の面積分を実行し，それにより $I$ の値を求めよ.

(奈良女子大 2018) (m20183205)

**0.202** 時間 $t$ $(t \geqq 0)$ の関数 $N_1(t)$ および $N_2(t)$ に関する以下の連立微分方程式についての問いに答えよ．ただし，$\lambda_1$, $\lambda_2$ は時間に依存しない正の定数とする.

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_1 N_1(t) \\ \dfrac{dN_2(t)}{dt} = -\lambda_2 N_2(t) + \lambda_1 N_1(t) \end{cases}$$

(1) $N_1(t)$ を求めよ．ただし，$N_1(t)$ の初期値は $N_1(0)$ とする.

(2) 時間 $t$ を横軸にとり，$N_1(t)$ のグラフの概形を描け.

(3) $N_2(t) = e^{-\lambda_2 t}C(t)$ とおいて $C(t)$ についての微分方程式を導出せよ.

(4) $C(t)$ についての微分方程式を解き，$N_2(t)$ を求めよ．ただし，$N_2(t)$ の初期値はゼロとする.

(奈良女子大 2018) (m20183206)

**0.203** 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 行列式を求めよ．

(2) 固有値を全て求めよ．

(3) 前問で求めた固有値のそれぞれに対応する固有ベクトルを示せ． ここで固有ベクトルの長さは任意でよく，また必ずしも互いに直交せずともかまわない．

(奈良女子大 2018)　　(m20183207)

**0.204** 次の定積分の値を求めよ．

（イ） $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{5dx}{\sqrt{1-x^2}}$　　（ロ） $\displaystyle\int_0^{3} \frac{3dx}{x^2+3}$

(京都大 2018)　　(m20183301)

**0.205** 次の三角関数または指数関数を含む定積分の値を求めよ．（ただし，$e$ は自然対数の底）

（イ）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos^3 x}{1+\sin x}dx$　　（ロ）$\displaystyle\int_0^{1} \frac{7e^x}{e^x+1}dx$

(京都大 2018)　　(m20183302)

**0.206** $e_1$，$e_2$ を，$n$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の単位ベクトルとし，両者がなす角 $\theta$ は $0<\theta<\pi/2$ をみたすものとする．$e_1$ によって張られる $\mathbb{R}^n$ の 1 次元部分空間を $L_1$，$e_2$ によって張られる $\mathbb{R}^n$ の 1 次元部分空間を $L_2$ とし，$\mathbb{R}^n$ から $L_1$，$L_2$ への正射影をあらわす線形変換をそれぞれ $P_1$，$P_2$ とする．問 1 〜問 4 に答えよ．

問 1 $P_1$ の固有値を，重複度を含めてすべて答えよ． また，0 でない固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

問 2 $P_1+P_2$ の固有値を，重複度を含めてすべて答えよ． また，0 でない固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

問 3 $P_1-P_2$ は，$\pm\sin\theta$ を固有値としてもつことを示せ．

問 4 $P_1-P_2$ の固有値 $\sin\theta$ に対応する固有ベクトルを，$e_1$ とのなす角 $\alpha$ が $\pi/2$ より小さくなるようにとったとき，$\alpha=\pi/4-\theta/2$ であることを示せ．

(京都大 2018)　　(m20183303)

**0.207** 次の三角関数を含む微分方程式の一般解を，定数 $C$ を用いて求めよ．

（イ） $\displaystyle x\tan\frac{y}{x}-y+x\frac{dy}{dx}=0$　　（ロ） $\displaystyle \left(\tan y-6x^2\right)dx+\frac{x}{\cos^2 y}dy=0$

(京都大 2018)　　(m20183304)

**0.208** 次の指数関数を含む微分方程式の一般解を，定数 $C$ を用いて求めよ．

（イ） $\displaystyle \frac{dy}{dx}+e^x y=7e^x$　　（ロ） $(y+e^x\sin y)\,dx+(x+e^x\cos y)\,dy=0$

(京都大 2018)　　(m20183305)

**0.209** $n$ を 2 以上の整数，$m$ を 0 以上 $n$ 以下の整数とする．　テーブルの上に置かれた $n$ 枚の硬貨に対して，以下の試行 $T$ を考える．

試行 $T$：$n$ 枚の硬貨から 2 枚を無作為に選び，選んだ 2 枚の表裏を反転させる．

(1) $n$ 枚の硬貨のうち $m$ 枚が表を上にしているとき，試行 $T$ によって選ばれた硬貨が 2 枚とも表から裏に反転させる確率を求めよ．

(2) $n$ 枚の硬貨のうち $m$ 枚が表を上にしているとき，試行 $T$ ののちに表を上にしている硬貨の枚数の期待値を求めよ．

(3) $n$ 枚の硬貨がすべて裏を上にしている状態から始め，試行 $T$ を $k$ 回繰り返したのちに表を上にしている硬貨の枚数をあらわす確率変数を $X_k$ とおく．$X_k$ の期待値 $a_k$ $(k=0,1,2,\cdots)$ を求めよ．

(京都大 2018)　　(m20183306)

**0.210** $a$ を実数とする．行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2018)　　(m20183401)

**0.211** $\boldsymbol{R}^4$ の 3 つのベクトル

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が 1 次独立であるかどうかを調べよ．

(京都工芸繊維大 2018)　　(m20183402)

**0.212** $a$ を実数とする．実数全体で定義された関数 $f(x)$ が

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & (x\neq 0) \\ a & (x=0) \end{cases}$$

を満たし，$x=0$ で連続であるとする．

(1) $a$ の値を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ は $x=0$ で微分可能であることを示せ．さらに，$f'(0)$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2018)　　(m20183403)

**0.213** $xy$ 平面上の関数 $f(x,y)=\dfrac{x(y^2-1)}{x^2+1}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $xyz$ 空間の曲面 $z=f(x,y)$ の，点 $(1,1,0)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2018)　　(m20183404)

**0.214** 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=e^{2x-y}$ の解 $y=y(x)$ で，$y(0)=1$ を満たすものを求めよ．さらに，極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2018)　　(m20183405)

**0.215** 行列 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & c & 3 \end{bmatrix}$ について以下の問いに答えよ．ただし，$c$ は実定数である．

(1) 行列 $A$ の固有多項式 $f(\lambda)=|\,\lambda I-A\,|$ を変数 $\lambda$ の関数とみなし， その極値を求めよ．ただし，$I$ は単位行列を表すものとする．さらに，$c=0$ のときの $f$ のグラフの概形を図示せよ．

(2) 行列 $A$ のすべての固有値が実数となる，$c$ に関する必要十分条件を示せ．

(3) $c=0$ のときの行列 $A$ のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(大阪大 2018)　　(m20183501)

**0.216** 以下の微分方程式の解を求めよ．ただし，$y$ は $x$ の関数，$y'$ および $y''$ はそれぞれ 1 階および 2 階微分を示している．

(1) $y'' - 4y' + 5y = 0$　ただし，$y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ とする．

(2) $\dfrac{x}{y}y' + \log(xy) + 1 = 0$　ただし，$y(1) = 1$ とする．なお，対数の底は $e$ とする．

(大阪大 2018)　　(m20183502)

**0.217** 複素数 $z = x + iy$ について以下の問いに答えよ．ただし，$x,\ y$ は実数，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) 複素数 $1 + \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{99}$ の絶対値と偏角を求めよ．

(2) 曲線 $C$ を放物線 $y = x^2 - 1$ の $z = -1$ から $z = 1$ に向かう曲線とする．このとき，複素関数 $f(z) = \overline{z} + z^2$ を $C$ 上で積分せよ（$\overline{z}$ は $z$ の共役複素数）．

(3) 複素数 $g(z) = \dfrac{1}{(z-1)(3-z)}$ において，中心が $z = 0$ のべき級数展開を求めよ．ただし，$|z| < 3$ とし，この範囲で収束するものをすべて求めること．なお，以下の幾何級数を用いてもよい．

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}\ , \qquad |z| < 1$$

(大阪大 2018)　　(m20183503)

**0.218** 以下の問題に対して全て有効数字 3 桁で答えよ．

(1) 次の問いに答えよ．

(1-1) 区間 [1, 6] 上の一様分布の平均を求めよ．

(1-2) ある企業の工場 $A,\ B,\ C$ が不良液晶ディスプレイを製造する確率はそれぞれ 5%, 4%, 2% である．その企業で生産される全液晶ディスプレイの 40% が工場 $A$ で，40% が工場 $B$ で，20% が工場 $C$ で製造されている．もしその企業の液晶ディスプレイの中から取り出した一台が不良品だったとき，その不良液晶ディスプレイが工場 $A$ で製造されたものである確率を求めよ．

(2) 200 人が受験した試験において無作為に 5 名の受験生を抽出した所，以下の標本を得た．次の問いに答えよ．

| | 学生 $A$ | 学生 $B$ | 学生 $C$ | 学生 $D$ | 学生 $E$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 数学の得点 | 50 | 50 | 50 | 50 | 60 |
| 電磁気学の得点 | 90 | 60 | 70 | 75 | 80 |

(2-1) 数学の得点の標本平均 $\overline{x}$，標本分散 $s_x^2$，不偏分散 $u_x^2$ を求めよ．

(2-2) 数学の得点の母分散が $\sigma_x^2 = 45$ の場合，母平均 $\mu_x$ の 95% 信頼区間を求めよ．数値計算に際して，必要ならば標準正規分布表を用いよ．

(2-3) 数学と電磁気学の得点の相関係数 $\rho$ を求めよ．

(大阪大 2018)　　(m20183504)

**0.219** $\alpha$ を 1 以上の実数とする．1 回微分可能な関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_2^{2x} \left\{ f\left(\frac{t}{2}\right) \right\}^{\alpha} dt + 1 \qquad ①$$

を満たすという．以下の設問に答えよ．

(1) $f(1) = A$ を満たす実数 $A$ を求めよ.

(2) $y = f(x)$ とおく．式 ① の両辺を $x$ で微分することにより，微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y^{\alpha} \qquad ②$$

が成り立つことを示せ.

(3) 初期条件「$x = 1$ のとき $y = A$ （ただし $A$ は (1) で求めた値)」のもとで微分方程式 ② の特殊解を $Y$ とする．「1 以上の任意の実数 $x$ に対して，$Y$ の $x$ における値が実数になる」ための，$\alpha$ に対する条件を求めよ.

(大阪大 2018)　　(m20183505)

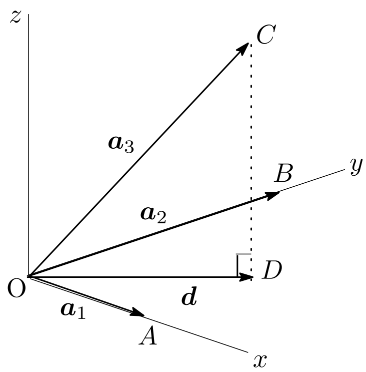
**0.220** $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は空間の 3 次元ベクトルとして，以下の設問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が一次独立であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$ が一次独立であることを証明せよ.

(2) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が一次独立で $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3$ とおくと，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は一次独立であることを証明せよ．ただし，$\lambda_2$, $\lambda_3$ は実定数である.

(3) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が一次独立で $\boldsymbol{a} = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3$ とする．$\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}$ が一次独立であるための必要十分条件は，$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \neq 1$ であることを証明せよ．ただし，$\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ は実定数である.

(4) 空間に直交座標系 $O - xyz$ が与えられているものとする．図に示すように，$x$ 軸上の点 $A$ に対し $\boldsymbol{a}_1 = \overrightarrow{OA}$，$y$ 軸上の点 $B$ に対し $\boldsymbol{a}_2 = \overrightarrow{OB}$，空間内の点 $C$ に対し $\boldsymbol{a}_3 = \overrightarrow{OC}$ とする．点 $C$ から $xy$ 平面に垂線 $CD$ を引くとき，ベクトル $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{OD}$ を $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の線形結合で表せ.




(大阪大 2018)　　(m20183506)

**0.221** 1 から $N$ まで異なる番号が振られた $N$ 個の地点があるとする．最初に無作為にスタート地点を選ぶ．その後，無作為に選んだ現在とは異なる地点へと移動を繰り返す．このとき，以下の設問に答えよ．なお，$k$ は $N$ 未満の自然数とする.

(1) 異なる $k$ 個の地点を回った状態から，$m$ 回目の移動ではじめて今までに移動したことのない新たな地点へ移動する確率を求めよ.

(2) 異なる $k$ 個の地点を回った状態から，今までに移動したことのない新たな地点へ移動するまでの移動回数の平均を求めよ.

(3) $N$ 個すべての地点へ移動するまでの移動回数の平均を求めよ．ただし，スタート地点の選択も 1 回と数える.

(大阪大 2018)　　(m20183507)

**0.222** 4 次の正方行列 $A$ と 4 次の実数ベクトル $\boldsymbol{b}$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

により定める.

(1) 行列 $A$ の階数を求めよ.

(2) $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を満たす 4 次の実数ベクトル $\boldsymbol{v}$ のうち, $||\boldsymbol{b} + \boldsymbol{v}||$ を最小にする $\boldsymbol{v}$ を求めよ. ただし, $\boldsymbol{0}$ は 4 次の零ベクトルとし, $||\boldsymbol{b} + \boldsymbol{v}||$ はベクトル $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{v}$ の大きさ（ノルム）を表すとする.

(大阪府立大 2018) (m20183601)

**0.223** 次の微分方程式を解け.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + 2y^2}{xy}$ (2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} = 6$

(大阪府立大 2018) (m20183602)

**0.224** (1) $z$ 平面上に領域 $0 < y < 2$ が $w = 1/z$ により写像される $w$ 平面上の領域を示せ.

(2) 複素積分を用いて, 次の定積分の値を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 16} dx$$

(大阪府立大 2018) (m20183603)

**0.225** 非負の整数 $n$ に対して

$$S_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$$

とおく. このとき, 各問に答えよ.

(1) $n \geqq 2$ に対して等式 $S_n = \dfrac{n-1}{n} S_{n-2}$ を示し, $n$ の偶奇で場合分けをして, $S_n$ の値を求めよ.

(2) 比 $\dfrac{S_{2n}}{S_{2n-1}}$ を考え, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \dfrac{S_{2n}}{S_{2n-1}}$ の値を求めることで, 次を示せ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$$

(大阪府立大 2018) (m20183604)

**0.226** 2 変数関数

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + xy - y^2$$

について各問に答えよ.

(1) $f(x, y)$ の停留点をすべて求めよ.

(2) 各停留点は, 極値となっているかどうかを判定せよ.

(大阪府立大 2018) (m20183605)

**0.227** 2 次元平面での領域 $D$ を

$$D = \{(x, y) \mid x \geqq 0, \ y \geqq 0, \ 0 \leqq x + y \leqq 1\}$$

とおく. このとき, 各問に答えよ

(1) $x = u(1-v)$, $y = uv$ とおく．点 $(x, y)$ が領域 $D$ 上を動くとき，この変換により点 $(u, v)$ はどのような領域を動くか．$uv$ 平面上で動きうる範囲を図示せよ．

(2) (1) の変換のヤコビ行列式の値を求めよ．

(3) 積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)^{10}\,dxdy$ の値を求めよ．

(大阪府立大 2018)　　(m20183606)

**0.228** $A$ を $n$ 次正方行列，$E$ を $n$ 次単位行列，$O$ を $n$ 次零行列とする（$n$ は 2 以上の整数）．

(1) $A^2 - 2A + E = O$ のとき，$A - E$ は正則でないことを示せ．

(2) $A^2 - 2A + E = O$ のとき，$A - 2E$ は正則であることを示せ．

(3) $A^3 - 3A^2 + A + E = O$ のとき，$A - 2E$ の逆行列を $A^2$, $A$, $E$ の式として表せ．

(大阪府立大 2018)　　(m20183607)

**0.229** 線形写像 $f\ :\ \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ を，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & & +2x_3 & \\ 2x_1 & +x_2 & +7x_3 & +x_4 \\ x_1 & & +2x_3 & +x_4 \end{pmatrix}$$

と定める．ただし，$\boldsymbol{R}^n$ は実数を成分とする $n$ 次元列ベクトルの全体を表す．

(1) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を満たす行列 $A$ の第 $j$ 列ベクトルを $\boldsymbol{a}_j$ とする．$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}$ は 1 次従属であることを示せ．

(2) $f$ の像 $\mathrm{Im}\, f = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4\}$ の次元と 1 組の基底を求めよ．

(3) $f$ の核 $\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4 \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ の次元と 1 組の基底を求めよ．

(4) $f$ は全射か単射か示せ．
注意：「全射」は「上への写像」，「単射」は「1 対 1 写像」とも呼ばれる．

(大阪府立大 2018)　　(m20183608)

**0.230** 行列 $A$ を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

とする．

(1) $A$ のすべての固有値を求めよ．

(2) $A$ の各固有値に対する固有空間の基底を 1 組ずつ求めよ．

(3) 行列 $A$ を対角化する直交行列 $P$ を 1 つ求め，対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ．

(大阪府立大 2018)　　(m20183609)

**0.231** 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $A$ の固有値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めたそれぞれの固有値に対して固有ベクトル空間を求めよ．

(3) $B = P^{-1}AP$ となるような直交行列 $P$ と対角行列 $B$ の組を一つ求めよ．

(神戸大 2018)　　(m20183801)

**0.232** 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $A = B\,{}^tB$ をみたし，すべての対角成分が正の下三角行列 $B$ を求めよ．　ただし，${}^tB$ は $B$ の転置行列とする．

(2) $A$ の行列式の値を求めよ．

(3) $B$ の逆行列を求めよ．

(4) $A^{-1}$ の第 4 行を求めよ．

(神戸大 2018)　　(m20183802)

**0.233** (1) $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $g(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy$ の臨界点を全て求め，それぞれの点で関数が極値をとるかどうか判定せよ．

(2) $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x, y)$ が回転対称であるとき，$x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ を満たすことを示せ．ただし，$f(x, y)$ が回転対称であるとは，任意の $x, y, \theta \in \mathbb{R}$ に対し

$$f(x, y) = f(x\cos\theta + y\sin\theta,\ -x\sin\theta + y\cos\theta)$$

を満たすことをいう．

(神戸大 2018)　　(m20183803)

**0.234** 積分 $\displaystyle\iint_{x^2-xy+y^2\leqq 1}(x - y)^2 dxdy$ の値を求めよ．

(神戸大 2018)　　(m20183804)

**0.235** $(-1, 1)$ で定義された $C^\infty$-級関数 $f(x)$ は次の微分方程式を満たすとする：

$$(1 - x^2)f'(x) - xf(x) = 1, \quad f(0) = 0.$$

自然数 $n$ に対し，$a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ とおく．

(1) $a_n$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 (1 - x^2)^n dx \leqq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$ が成り立つことを示せ．ただし，不等式 $1 - x \leqq e^{-x}$　$(0 \leqq x \leqq 1)$ および等式 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明せずに用いてよい．

(3) $n \to \infty$ のとき数列 $\{a_n\}$ の収束・発散を判定せよ．また，収束するときは極限値を求めよ．

(神戸大 2018)　　(m20183805)

**0.236** 4 次の正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $A^2$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とするとき，連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$ を解け.

(3) ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4 \in R^4$ を 1 次独立とする。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 + x_4 \\ \boldsymbol{y}_2 &= \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 - x_4 \\ \boldsymbol{y}_3 &= \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 - x_4 \\ \boldsymbol{y}_4 &= \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 + x_4 \end{aligned}$$

とするとき，ベクトル $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3, \boldsymbol{y}_4$ も 1 次独立となることを示せ.

(神戸大 2018)　　(m20183806)

**0.237** $a$ を実数とする．3 次の正方行列 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5-a & 2 & a-4 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ に対し，以下の各問に答えよ.

(1) $B$ の固有値をすべて求めよ.

(2) $B$ の固有値に属する固有空間の各々について，基底を一組求めよ.

(3) $B$ が対角化可能であるための $a$ の条件を求めよ.

(神戸大 2018)　　(m20183807)

**0.238** $xy-$ 平面上の 2 変数関数 $f$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ のとき} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ のとき} \end{cases}$$

として定義するとき，$f$ の原点 $(0,0)$ での連続性，偏微分可能性，全微分可能性を判定せよ.

(神戸大 2018)　　(m20183808)

**0.239** (1) $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ を求めよ.

ただし，$D = \{(x,y) \mid x, y \in R,\ 0 \leqq x^2+y^2 < \infty\}$ とする.

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ となることを示せ.

(神戸大 2018)　　(m20183809)

**0.240** $a, b$ を実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & a & -6 \\ 2 & -6 & b \end{pmatrix}$ によって表される $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像をそれぞれ $f, g$ とおく．以下の問いに答えよ.

(1) $f$ の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求めよ.

(2) $g$ の核 $\mathrm{Ker}\, g$ の次元を求めよ.

(3) $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$ となるために $a, b$ が満たすべき必要十分条件を求めよ.

(広島大 2018)　　(m20184101)

**0.241** $a$ を実数，$r$ を正の実数とする．座標平面において，$y$ 軸上の点 $(0, a)$ を中心とし半径が $r$ である円を $C$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) 円 $C$ の下半分を表す方程式を $y = f(x)$ の形で表せ.

(2) (1) で求めた $f(x)$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ. ただし, 剰余項は不要である.

(3) 円 $C$ が $x = 0$ の近くで最も良く放物線 $y = x^2$ を近似するような $a$ と $r$ の値を求めよ.

(広島大 2018)　　(m20184102)

**0.242** (1) 方程式 $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ が表す座標平面上の 2 次曲線を図示せよ.

(2) (1) の 2 次曲線で囲まれた図形の面積を求めよ.

(3) (1) の 2 次曲線上での $xy$ の最小値を求めよ.

(広島大 2018)　　(m20184103)

**0.243** $0 < r < 1$ とする. 座標空間において, 原点を中心とし半径が 1 である球体 $B$ から, 領域 $\left\{(x, y, z) \in B \;\middle|\; x^2 + y^2 < r^2\right\}$ を取り除いて得られる物体を $B(r)$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $B(r)$ の体積を求めよ.

(2) $B(r)$ の体積が $B$ の体積の $\dfrac{1}{8}$ であるとする. このとき, $r$ の値と $B(r)$ の表面積を求めよ.

(3) $B(r)$ の表面積の最大値と, 最大値を与える $r$ の値を求めよ.

(広島大 2018)　　(m20184104)

**0.244** $A, B$ を $n$ 次正方複素行列とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ i & -1 & i \end{pmatrix}$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ. ただし $i$ は虚数単位である.

(2) ある $n$ 次正則行列 $P$ が存在して $P^{-1}AP = B$ が成り立つとき, $A$ と $B$ の固有値の集合は一致することを示せ.

(3) $A$ が正則であるとき, $AB$ と $BA$ の固有値の集合は一致することを示せ.

(4) $AB = BA$ が成り立つとき, $A$ と $B$ は少なくとも 1 つの共通の固有ベクトルを持つことを示せ.

(広島大 2018)　　(m20184105)

**0.245** 行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ を計算せよ.

(広島大 2018)　　(m20184106)

**0.246** 積分 $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ を考える. 重積分 $I^2$ を, 二次元極座標を用いて計算することにより, $I$ を求めよ.

(広島大 2018)　　(m20184107)

**0.247** $s$ を正の実数とするとき, ガンマ関数 $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$ について, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ を示せ.

(広島大 2018)　　(m20184108)

**0.248** $xy$ 平面上において, $\theta$ を変数として, 座標 $x$, $y$ が, $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ で与えられる曲線を, サイクロイドと呼ぶ. ここで, $a$ は定数である. $\theta \geq 0$ におけるこの曲線上で, $x$ 軸に対する曲線の傾きが 0 となる点 $(x,\ y)$ のうち, 原点 $(x = 0,\ y = 0)$ に最も近い点を $(x_1,\ y_1)$, 2 番目に近い点を $(x_2,\ y_2)$, $\cdots$, $n$ 番目に近い点を $(x_n,\ y_n)$ とする. $x_n$, $y_n$ を求めよ.

(広島大 2018)　　(m20184109)

**0.249** 3 次元空間における点 P, Q, R を考える．原点を O とするとき，$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\boldsymbol{q}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$, $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ が，$\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$ を満たしているとする．ここで，$\boldsymbol{0}$ はゼロベクトルである．このとき，P, Q, R は同一直線上にあることを示せ．

(広島大 2018)　　(m20184110)

**0.250** 次式 (1) に関する次の問題 $(A)$ と $(B)$ を解答しなさい．

$$(y')^2+(xy-2x+y+1)y'+xy^2-xy-2x=0\cdots\cdots(1)$$

ただし，$y'=\dfrac{dy}{dx}$ とする．

(A) 式 (1) を 1 次の微分方程式の積に因数分解しなさい．

(B) 式 (1) の一般解を求めなさい．

(山口大 2018)　　(m20184301)

**0.251** 次の行列 $A$ を対角化した行列 $B$ を求めなさい．また，$A$ を対角化させる正則行列 $C$ を求めなさい．

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(山口大 2018)　　(m20184302)

**0.252** 4 桁の自然数のうち次の条件にあてはまるものの個数を求めなさい．

(1) 9852, 7421 のように千の位の数，百の位の数，十の位の数，一の位の数が順に小さくなるもの．

(2) 0 を含むもの．

(山口大 2018)　　(m20184303)

**0.253** $0\leq x\leq\pi$ のとき，2 つの曲線 $y=-\sin x$ と $y=\sin 2x$ で囲まれた図形の面積を求めなさい．

(山口大 2018)　　(m20184304)

**0.254** 3 次実正方行列 $A$ は，$-2$ と 7 を固有値にもつ．$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ は固有値 $-2$ に対応する $A$ の固有ベクトル，$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix} b \\ c \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 7 に対応する $A$ の固有ベクトルである．3 つのベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ が，どの 2 つも直交するとき，次の問いに答えよ．

(1) 実数 $a$, $b$, $c$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ を並べた 3 次正方行列を $P=\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix}$ とする．$P^{-1}$ を求めよ．

(3) $A$ を求めよ．

(徳島大 2018)　　(m20184401)

**0.255** 関数 $f(x)$ は，$\sin f(x)=\cos^2 x$, $0\leqq f(x)\leqq\dfrac{\pi}{2}$ を満たす．

(1) $f(0)$, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ をそれぞれ求めよ．

(2) $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ をそれぞれ求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0}f'(x)$ を求めよ．

(徳島大 2018)　　(m20184402)

**0.256**　$xy$ 平面上の領域を $D = \left\{(x,\ y)\ ;\ x^2 + y^2 \leqq 2x,\ y \geqq \dfrac{x}{\sqrt{3}}\right\}$ とする．

(1)　$D$ の概形を図示せよ．

(2)　変数変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ (r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ により，$D$ に対応する $r\theta$ 平面上の領域を $E$ とする．$E$ は，定数 $\alpha,\ \beta$ および関数 $f(\theta)$ を用いて $\{(r,\ \theta)\ ;\ \alpha \leqq \theta \leqq \beta,\ 0 \leqq r \leqq f(\theta)\}$ と表される．$\alpha,\ \beta,\ f(\theta)$ を求めよ．

(3)　$\displaystyle\iint_D xydxdy$ を求めよ．

(徳島大 2018)　　(m20184403)

**0.257**　$x = x(t)$ が微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} + 3x = 0$ を満たす．$x(0) = 2$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1)　$x(t)$ を求めよ．

(2)　$y = y(t)$ に関する微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} + y = 3x$ の一般解を求めよ．

(3)　(2) の $y(t)$ に対して，$y(0) = y(1)$ が成り立つとする．このとき，$x(1) + \displaystyle\int_0^1 y(t)dt = x(0)$ となることを示せ．

(徳島大 2018)　　(m20184404)

**0.258**　(1)　$\mathbb{R}$ 上の実数値関数 $f$ を次で定義する．

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，$\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$ は存在するか．理由をつけて答えよ．

(2)　$a,\ A,\ B \in \mathbb{R}$ を定数とする．$g,\ h$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数とする． $\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) = A$ と $\displaystyle\lim_{x \to A} h(x) = B$ が成り立つとする．また，$x \neq a$ のとき, $g(x) \neq A$ であるとする． このとき，$\displaystyle\lim_{x \to a} h(g(x)) = B$ が成り立つことを $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて示せ．

(3)　$a,\ A,\ B \in \mathbb{R}$ を定数とする．$g,\ h$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数とする．$\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) = A$ と $\displaystyle\lim_{x \to A} h(x) = B$ が成り立つとする．このとき，$\displaystyle\lim_{x \to a} h(g(x) = B$ が常に成り立つか．理由をつけて答えよ．

(高知大 2018)　　(m20184501)

**0.259**　$\mathbb{R}^2$ 上の $C^2$ 級関数 $f(x, y)$ が与えられているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$f$ が $x - y$ のみの関数のとき，すなわち，$f(x, y) = h(x - y)$ が任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して成り立つような一変数関数 $h$ が存在するとき，$\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ であることを示せ．

(2)　$f$ が $x + y$ のみの関数のとき，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ がみたす関数式を求めよ．

(3)　$\mathbb{R}^2$ 上で $C^2$ 級関数 $f_1(x, y), f_2(x, y)$ が与えられていて，$f_1$ が $x - y$ のみの関数，$f_2$ が $x + y$ のみの関数とする．$f$ が $f = f_1 + f_2$ をみたすならば，$f$ は

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

をみたすことを示せ．

(高知大 2018)　　(m20184502)

**0.260** ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の内積を，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して，

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + 2a_2b_2 + 3a_3b_3$$

により定義する．$\mathbb{R}^3$ を通常の内積ではなく，この内積に関する計量ベクトル空間とみなすとき，次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ が正規直交系であるならば．$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ は一次独立であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{c} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく．$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ は一次独立であるが，正規直交系ではないことを示せ．

(3) (2) の $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ をシュミットの直交化法を用いて直交化せよ．

(高知大 2018)　　(m20184503)

**0.261** 3 次の実正方行列 $A$ が $A^2 - 5A = O$ ($O$ は 3 次の零行列) をみたすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ に対して，$A\boldsymbol{v}$ は $A$ の 5− 固有空間 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = 5\boldsymbol{x}\}$ の元であることを示せ．

(2) 任意の $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ に対して，$(A-5E)\boldsymbol{w}$ は $A$ の 0− 固有空間 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ の元であることを示せ．ただし，$E$ は 3 次の単位行列とする．

(3) $\mathbb{R}^3$ は $A$ の 0− 固有空間と 5− 固有空間の直和であることを示せ．

(4) 題意をみたすような $A$ で．$E$ の実数倍とは異なるものの例を一つあげよ．

(高知大 2018)　　(m20184504)

**0.262** 次の媒介変数で表された曲線

$$x = f(t) = \cos^3 t\ , \quad y = g(t) = \sin^3 t$$

について以下の問いに答えよ．

(1) この曲線は通常何と呼ばれているか答えよ．

(2) $f'(t)$ と $g'(t)$ を求めよ．

(3) $t$ の範囲を $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ とした時の曲線の長さ $L$ を求めよ．

(高知大 2018)　　(m20184505)

**0.263** (1) 次の関数の導関数を求めよ．ただし，$a$ は正の定数とする．

(a) $\sin^{-1}(x^2)$　　(b) $x^{\sin x}$　$(x > 0)$　　(c) $\log\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)$

(2) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x}$

(愛媛大 2018)　　(m20184601)

**0.264** (1) 次の不定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$　　(b) $\displaystyle\int e^{\cos x} \sin 2x dx$

(2) 次の広義積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+3}$$

(愛媛大 2018)　　(m20184602)

**0.265** 次の方程式で与えられる曲線の点 (1, 3) における接線の方程式を求めよ.

$$f(x,y) = x^3 - 2xy + y^2 - x - 3 = 0$$

(愛媛大 2018)　　(m20184603)

**0.266** $D = \left\{(x,\ y) \;\middle|\; 0 \leqq y \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}\right\}$ とする.

(1) $D$ を図示せよ.

(2) 次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D \sin(x+y)dxdy$$

(愛媛大 2018)　　(m20184604)

**0.267** 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ a & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ は 0 を固有値として持つとする．ただし，$a$ は定数とする.

(1) 定数 $a$ を求めよ.

(2) $A$ の 0 でない固有値をすべて求めよ.

(3) 固有値 0 に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

(愛媛大 2018)　　(m20184605)

**0.268** (1) 次の $y(x)$ に関する微分方程式を初期条件 $y(0) = 2,\ y'(0) = 0$ のもとで解け.

$$y'' + 4y' + 20y = 0$$

(2) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ.

$$y'' + 2y' + y = 50\sin x\cos x$$

(3) 次の完全微分形の方程式について，一般解を求めよ.

$$(4x^3 - 6xy)dx + (8y - 3x^2)dy = 0$$

(九州大 2018)　　(m20184701)

**0.269** 次の行列 $A$ について，以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) $A$ のすべての固有値を求めよ.

(2) $A^n$ を求めよ．ただし，$n$ は自然数とする.

(3) $AC = A^2 + \alpha E$ を満たす行列 $C$ の行列式 $|C|$ が，$|C| = 0$ を満たす定数 $\alpha$ の値をすべて求めよ．ただし，$E$ は単位行列である.

(九州大 2018)　　(m20184702)

**0.270**　確率変数 $X$ が次の形の確率密度関数を持つ．

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2} & (|x|\leqq 2)\\ 0 & (|x|>2)\end{cases}$$

(1) 確率 $P(-1\leqq X\leqq 1)$ を求めよ．

(2) $I_n=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta$　は次の漸化式　$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}\quad(n\geqq 2)$　を満たすことを示せ．

(3) 期待値 $E[X^4]$ を求めよ．

(九州大 2018)　　(m20184703)

**0.271**　$z$ を複素数とし，$a>2$ とする．次の問いに答えよ．

(1)
$$\int_C\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2-az+1)}dz$$
を求めよ．ただし，$C$ は原点を中心とする半径 1 の円周を反時計回りに進む積分路とする．

(2)
$$\int_0^{2\pi}\frac{4\sin^2\theta}{a-2\cos\theta}d\theta$$
を求めよ．

(九州大 2018)　　(m20184704)

**0.272**　4 次正方行列 $A$ を次のように定義する．

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0&-1\\1&2&0&-1\\0&0&2&0\\-1&-1&0&2\end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $A$ の固有値をすべて求めよ．

(2) $A$ の固有値のうちで最大のものを $\lambda_0$ とおく．$\lambda_0$ に対応する固有ベクトルで，第 1 成分が 1 であるものを求めよ．

(九州大 2018)　　(m20184705)

**0.273**　$a,\ b,\ c,\ r$ を実数として，3 次元空間（$xyz-$ 空間）内の 3 つの平面を次のように定義する．

$$\text{平面 } S_1=\{(x,y,z)\mid x+2y+z=a\}$$

$$\text{平面 } S_2=\{(x,y,z)\mid -2x+y+z=b\}$$

$$\text{平面 } S_3=\{(x,y,z)\mid 2x+5y+rz=c\}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) 任意の $a,\ b,\ c$ の値に対して常に 3 つの平面の共通部分 ： $S_1\cap S_2\cap S_3$ が 1 点となるための $r$ に関する条件を求めよ．

(2) $r$ が前問 (1) の条件を満たさないとする． このとき，以下の (i) と (ii) のそれぞれについて，$S_1 \cap S_2 \cap S_3$ は「空集合」「1 点」「直線」「平面」のいずれになるかを答えよ．「空集合」となる場合には，その理由を示すこと．それ以外の場合には，集合 ： $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ を具体的に求めること．

(i) $a = b = c = 0$ の場合．

(ii) $a = 1,\ b = 2,\ c = 3$ の場合．

(九州大 2018) (m20184706)

**0.274** $x \geqq 1$ において，関数 $f(x)$ を次の式で定義する．

$$f(x) = \sin(\log x)$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $y \geqq 1$ なる $y$ を固定するとき，次の積分を求めよ．

$$g(y) = \int_1^y f(x)dx$$

(2) $1 \leqq y \leqq e^{2\pi}$ における $g(y)$ の最大値および最小値を求めよ．ただし，$e$ は自然対数の底，$\pi$ は円周率である．

(九州大 2018) (m20184707)

**0.275** $x \geqq 0,\ y \geqq 0$ において，2 変数関数 $f(x, y)$ を次の式で定義する．

$$f(x, y) = \frac{y}{(xy + 1)^2(y^2 + 1)}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $y > 0$ なる $y$ を固定し，$a$ を任意の正の定数として，

$$g(y, a) = \int_0^a \frac{1}{(xy + 1)^2}dx$$

とおく．このとき，$g(y, a)$ を求めよ．

(2) 領域 $D_1 = \{(x, y) \mid x > 0,\ y > 1,\ xy < 1\}$ における $f(x, y)$ の 2 重積分を求めよ．

(3) 領域 $D_2 = \{(x, y) \mid 0 < x < y < 1\}$ における $f(x, y)$ の 2 重積分を求めよ．

(九州大 2018) (m20184708)

**0.276** 次の極限値を求めなさい．.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \left( \frac{2x^2 - 1}{x^2(x^2 - 1)} - \frac{x}{x^2 - 1} \right)$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{3 \arcsin \frac{x}{5}}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x \{\log(3x + 1) - \log 3x\}$

(佐賀大 2018) (m20184901)

**0.277** 関数 $(1 - x)e^x$ のマクローリン展開 ($x = 0$ を中心とするテイラー展開) を 3 次の項まで求めなさい．

(佐賀大 2018) (m20184902)

**0.278** $xy$ 平面上の集合 $\left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < R^2\right\}$ で定義された関数 $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ について，下記の問いに答えなさい．ただし，定数 $R$ は $R > 2$ を満たすとする．

(1) $\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$ を求めなさい.

(2) 集合 $D$ を $D=\left\{(x,y)\mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\right\}$ とし，極座標を利用して，

重積分 $I=\displaystyle\iint_D\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy$ を求めなさい.

(佐賀大 2018)　　(m20184903)

**0.279** 一次連立方程式

$$\begin{cases} x-2y+2z=3 \\ x-y+cz=2 \\ 2x+cy-z=1 \end{cases}$$

について，以下の問いに答えなさい.

(1) 方程式が解を持たない場合について，$c$ の値を求めなさい.

(2) 方程式が解が無数に解を持つ場合について，$c$ の値を求めなさい.

(佐賀大 2018)　　(m20184904)

**0.280** $A=\begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるとき，以下の問いに答えなさい.

(1) $A$ の行列式を求めなさい.

(2) $A$ の逆行列 $A^{-1}$ の $(4,4)$ 成分を求めなさい.

(佐賀大 2018)　　(m20184905)

**0.281** (1) 2 次式 $5x^2+4xy+5y^2$ を対称行列 $A$ を用いて，以下のように表す．行列 $A$ を求めなさい.

$$5x^2+4xy+5y^2=\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(2) 行列 $A$ の固有値を求めなさい.

(3) 固有値に対する大きさ 1 の固有ベクトルを求めなさい.

(4) 固有値の小さい順に，その固有ベクトルを第 1 列，第 2 列とする正方行列を $P$ とおく．変換

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

により，方程式 $5x^2+4xy+5y^2-1=0$ を $X$, $Y$ を用いて表すとともに，この図形がどんな図形を表すか答えなさい.

(佐賀大 2018)　　(m20184906)

**0.282** (1) 微分方程式 $y'=-\dfrac{y}{x^2}$ の一般解を求めなさい.

(2) 微分方程式 $2y''+y'-y=5x-3$ の一般解を求めなさい.

(佐賀大 2018)　　(m20184907)

**0.283** ある物質の質量 $m(t)$ は，時刻 $t$ の関数として微分方程式

$$\frac{dm}{dt}=-km+1 \quad (k \text{ は正の定数})$$

にしたがって変化するとする.

(1) この微分方程式の一般解を求めなさい．

(2) 十分時間が経ったとき，$m(t)$ は，定数 $a$ に近づく．定数 $a$ を求めなさい．

(3) $m(t)$ について $m(0) \neq a$ で

$$|m(0) - a| = 8|m(4) - a|$$

が成り立つときの $k$ の値を求めなさい．

(佐賀大 2018)　　(m20184908)

**0.284** 次の関数を微分せよ．

(1) $\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+1}$　　(2) $\log \dfrac{\cos x}{x}$

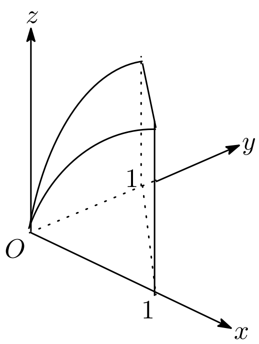
(佐賀大 2018)　　(m20184909)

**0.285** 次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$$

(佐賀大 2018)　　(m20184910)

**0.286** 図に示されている，曲線 $z = \sqrt{x+y}$ と平面 $x + y = 1$ および三つの座標平面で囲まれた立体の体積を求めよ．




(佐賀大 2018)　　(m20184911)

**0.287** 次の微分方程式について，括弧内の条件を満たす解を求めよ．

(1) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{4x}{t}$　( $t = 1$ のとき $x = 3$ )

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 3\dfrac{dx}{dt} + 2x = 0$　( $t = 0$ のとき $x = 3$ かつ $\dfrac{dx}{dt} = 4$ )

(佐賀大 2018)　　(m20184912)

**0.288** 次のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ について以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ のなす角 $\theta$ を求めよ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2018)　　(m20184913)

**0.289** 次の行列 $A$ について以下の問いに答えよ．

(1) ${}^tAA$ を求めよ．

(2) $A$ の逆行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2018)　　(m20184914)

**0.290** 次の行列 $A$ について以下の問いに答えよ．

(1) 固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) 正則行列 $P$ を求め，対角化せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2018)　　(m20184915)

**0.291** 関数 $f(x, y) = xy(2 - x - y)$ について, 次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $f_x$，$f_y$，$f_{xx}$，$f_{xy}$，$f_{yy}$ を求めよ．

(2) $f(x, y)$ の極値を求めよ．

(佐賀大 2018)　　(m20184916)

**0.292** 次の問いに答えよ．ただし，log は自然対数であり，$e$ は自然対数の底である．

(1) 次の不定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{3 + \cos x}$　　(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x + 1}$

(2) 次の定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_1^e x \log x dx$　　(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

(佐賀大 2018)　　(m20184917)

**0.293** 円柱面 $x^2 + y^2 = 1$ ($z$ は任意) と 2 平面 $z = y$ および $z = 0$ で囲まれた立体について考える．次の問いに答えよ．

(1) 円柱面と 2 平面で囲まれた領域 $D$ を式で表せ．

(2) 円柱面と 2 平面で囲まれた立体の体積を求めるための積分の式を示せ．

(3) (2) の積分を求めよ．

(佐賀大 2018)　　(m20184918)

**0.294** 次の行列 $A$ と列ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -5 & -4 & 2 \\ -3 & -3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の行列式を求めよ．

(2) 行列 $A$ の逆行列を求めよ．

(3) 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を求めよ．

(4) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(佐賀大 2018)　　(m20184919)

**0.295** $R$ を実数全体の集合とする．$\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}=(2,1,3),\ \boldsymbol{b}=(2,-2,4),\ \boldsymbol{c}=(0,3,-1)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が一次独立であるか，または一次従属でるか，理由を含めて答えよ．

(2) $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ によって生成される部分空間を $\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \rangle$ とする．$\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3)$ が $\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \rangle$ に属するための条件を答えよ．

(佐賀大 2018)　　(m20184920)

**0.296** 次の関数 $y$ の導関数 $dy/dx$ を求めよ．

(1) $y=x^2e^{-x}$　　(2) $y=\tan x$　　(3) $y=\dfrac{x^2}{\log x}$　　(4) $y=\sqrt{\dfrac{(1-x)(x^2+3)}{(x-1)^2}}$

(佐賀大 2018)　　(m20184921)

**0.297** 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \frac{1+x}{x^2}dx$　　(2) $\displaystyle\int e^{-2x+2}dx$　　(3) $\displaystyle\int (2x-5)^4 dx$　　(4) $\displaystyle\int xe^x dx$

(佐賀大 2018)　　(m20184922)

**0.298** 次の関数 $z$ の偏導関数 $\partial z/\partial x,\ \partial z/\partial y$ を求めなさい．

(1) $z=x\log\dfrac{y}{x}$　　(2) $z=e^{3x}\sin 2y$

(佐賀大 2018)　　(m20184923)

**0.299** 次の関数を $x^3$ の項までマクローリン展開しなさい．

(1) $e^x$　　(2) $\sin x$

(佐賀大 2018)　　(m20184924)

**0.300** 次の微分方程式を解きなさい．

(1) $2x\dfrac{dy}{dx}=y$　　(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{x^2+xy}$

(佐賀大 2018)　　(m20184925)

**0.301** つぎの関数の 3 階導関数を求めよ．

(1) $x^3\log x$　　(2) $e^{ax}\sin bx$

(佐賀大 2018)　　(m20184926)

**0.302** つぎの関係を示せ．

(1) $n$ が正の奇数 $n=1,3,5,\cdots$ のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}$$

(2) $n$ が正の偶数 $n=2,4,6,\cdots$ のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{\pi}{2}\frac{(n-1)!!}{n!!}$$

ここで !! は 1 つ飛ばしの階乗を表す．たとえば $4!!=4\cdot 2=8,\ 5!!=5\cdot 3\cdot 1=15$ である．

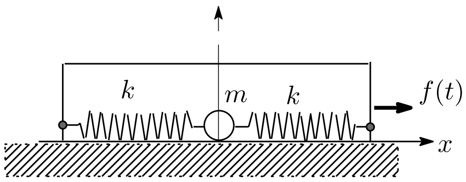
(佐賀大 2018)　　(m20184927)

**0.303** つぎの連立一次方程式が成り立つベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & -5 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2018) (m20184928)

**0.304** 図に示すように，滑らかな台の上にのせた，軽い容器の中にバネ定数 $k$ の軽いバネで両側から支えられた質量 $m$ のおもりの運動を考える．なお，「軽い」とは質量ゼロを意味し，おもりと容器，容器と台の間の摩擦は無いものとする．いま，容器に対して $f(t) = \sin \omega t$ の外力が加えられたときの，おもりの中心位置 $x(t)$ を導出せよ．ただし，$t = 0$ において $x = 0$, $\dfrac{dx}{dt} = 1$ とする.




(佐賀大 2018) (m20184929)

**0.305** 以下の関数を全微分せよ.

$$z = e^{-x} \sin 2y$$

(熊本大 2018) (m20185201)

**0.306** 以下の積分を計算せよ．ただし，領域 $D$ は図 4 に示す通りである.

$$I = \iint_D xy\,dx\,dy$$

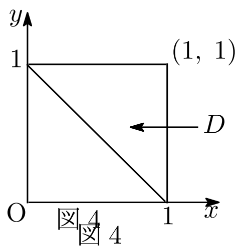


図 4
図 4

(熊本大 2018) (m20185202)

**0.307** 次の微分方程式を，$y(0) = 2$, $\dfrac{dy}{dx}(0) = -2$ という条件の下で解け.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

(宮崎大 2018) (m20185301)

**0.308** 次の複素数を，極形式を用いて計算し，その答を $x + yi$ ($x, y$ は実数) の形で表せ．ただし，$n$ は整数とし，$i$ は虚数単位とする.

(1) 1 の 3 乗根　　(2) $(1 + \sqrt{3}i)^n$

(宮崎大 2018) (m20185302)

**0.309** 連立一次方程式 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$ について，次の各問に答えよ.

(1) この連立一次方程式を，行列 $A$ を用いて $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表したときの $A$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{b}$ はベクトルであり，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ とする.

(2) $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めよ.

(3) 連立一次方程式を解け.

(宮崎大 2018)　　(m20185303)

**0.310** 関数 $f(x,\ y) = \sqrt{x^2+y^2}$ について，次の各問に答えよ.

(1) $(x,\ y) \neq (0,\ 0)$ のとき，$f_x(x,\ y)$ と $f_{xx}(x,\ y)$ をそれぞれ求めよ.

(2) 次のそれぞれの極限について，存在する場合はその値を求め，存在しない場合はその理由を述べよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f_{xx}(x,\ y)\right)$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f_x(x,\ y)\right)$

(宮崎大 2018)　　(m20185304)

**0.311** 座標空間において，原点を中心とした半径 $a$ の球 $B$ の体積 $V$ を，以下の手順で求める.

球 $B$ を $xy$ 平面で切ったときの断面のうち，$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ を満たす部分を $D$ と表す.

また，球 $B$ の表面（球面）のうち $z \geqq 0$ を満たす部分を表す方程式を $z = f(x,\ y)$ とする.

さらに，$D$ を $xy$ 平面内の領域とみなし，重積分 $I = \displaystyle\iint_D f(x,\ y)dxdy$ を考える.

このとき，次の各問に答えよ.

(1) 方程式 $z = f(x,\ y)$ を具体的に書き下せ.

(2) 領域 $D$ を $xy$ 平面に図示せよ.

(3) 領域 $D$ を極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて表すと，$I$ は

$$I = \int_{\boxed{\text{ア}}}^{\boxed{\text{イ}}}\left(\int_{\boxed{\text{ウ}}}^{\boxed{\text{エ}}} \boxed{\quad\text{オ}\quad}\, d\theta\right) dr$$

と書き直せる. 空欄 $\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{オ}}$ に当てはまる数または式を答えよ.

(4) $I$ を計算することによって，$V = \dfrac{4}{3}\pi a^3$ であることを示せ.

(宮崎大 2018)　　(m20185305)

**0.312** 以下の微分を計算せよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left\{(x^2+3x-1)(5-2x-3x^2)\right\}$　　(2) $\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1} x)^2$

(鹿児島大 2018)　　(m20185401)

**0.313** 次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^3 (9x^2+4x)\log x dx$

(鹿児島大 2018)　　(m20185402)

**0.314** 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $x(x+1)\dfrac{dy}{dx} = -y$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + y = \sin x$　　(3) $(2xy+x)dx + (x^2+y)dy = 0$

(鹿児島大 2018)　　(m20185403)

**0.315** 原点 $O(0,0,0)$ を有する直交座標系 $xyz$ において，点 $A(1,0,1)$，点 $B(1,1,0)$ がある．以下の問いに答えよ.

(1) 線分 $OA$ と線分 $OB$ のなす角 $\theta$ を求めよ.

(2) 原点 $O$ を中心とし，表面が線分 $AB$ に接する球の方程式を求めよ．

(3) 点 $O$, $A$, $B$ を含む平面に平行で，点 $C(1,1,1)$ を含む平面の方程式を求めよ．

(鹿児島大 2018)　　(m20185404)

**0.316** 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) 行列 $A$ の固有値を $\lambda$ とするとき，固有方程式ならびに固有値を求めよ．

(鹿児島大 2018)　　(m20185405)

**0.317** 次の微分を求めなさい．

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^3(x^2+1)\right)$$

(鹿児島大 2018)　　(m20185406)

**0.318** 次の不定積分を求めなさい．

$$\int x^2\sqrt{x^3+2}dx$$

(鹿児島大 2018)　　(m20185407)

**0.319** $O$ を原点とする座標平面上に点 $P(1,2)$，点 $Q(3,3)$，点 $R(a,b)$ があるとき，以下の問いに答えなさい．

(1) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OR}$ を 2 辺とする四角形 $OPQR$ が平行四辺形となるときの $a$ と $b$ の値を求めなさい．

(2) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OR}$ が直交し $\left|\overrightarrow{OR}\right| = 1$ であるときの $a$ と $b$ の値を求めなさい．ただし，$a > 0$ とする．

(鹿児島大 2018)　　(m20185408)

**0.320** 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ の値を求めなさい．

(鹿児島大 2018)　　(m20185409)

**0.321** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(鹿児島大 2018)　　(m20185410)

**0.322** 曲線 $y = \sin^2 x$ について以下の問いに答えなさい．

(1) 曲線のグラフを $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で描きなさい．

(2) $0 \leq x \leq \pi$ の範囲において，曲線と直線 $y = \dfrac{1}{2}$ で囲まれた部分の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2018)　　(m20185411)

**0.323** $x^{\sin x}$ $(x > 0)$ の導関数を求めなさい．

(鹿児島大 2018)　　(m20185412)

**0.324** $\displaystyle\int \log x dx$ $(x > 0)$ の不定積分を計算しなさい．

(鹿児島大 2018)　　(m20185413)

**0.325** (1) $f(x,y)=x^2+xy+y^3,\ x(t)=\cos t,\ y(t)=\sin t$ のとき，$\dfrac{d}{dt}f\left(x(t),\ y(t)\right)$ を計算しなさい．

(2) $g(x)=e^x,\ x=r\cos t$ のとき，$\dfrac{\partial}{\partial t}g(r\cos t),\ \dfrac{\partial}{\partial r}g(r\cos t)$ を計算しなさい．

(鹿児島大 2018)　　(m20185414)

**0.326** (1) 次の行列を計算しなさい．

$$3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列の積を計算しなさい．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めなさい．

(鹿児島大 2018)　　(m20185415)

**0.327** 次の関数を $x$ で微分しなさい．

$$y=(\tan(x))^x$$

(鹿児島大 2018)　　(m20185416)

**0.328** 2 つのベクトル $\boldsymbol{A}=(\sqrt{3},1),\ \boldsymbol{B}=(\sqrt{3},-1)$ のなす角 $\theta\ (0\le\theta\le\pi)$ を求めなさい．(鹿児島大 2018) (m20185417)

**0.329** 次の 2 次行列 $\boldsymbol{U}$ が直交行列になるように，正規直交基底 $a,\ b$ を求めなさい．

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & a \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & b \end{bmatrix}$$

(鹿児島大 2018)　　(m20185418)

**0.330** 次式を満たす $f(x)$ を求めなさい．ただし，$f(x)$ は連続な関数である．

$$f(x)=x\int_1^x f(t)dt+x$$

(鹿児島大 2018)　　(m20185419)

**0.331** 次の微分を計算しなさい．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2x}{1+2x^2}\right)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}(\sin 2x\cos^2 x)$

(鹿児島大 2018)　　(m20185420)

**0.332** 次の定積分を計算しなさい．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{4+x^2}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{(5x+4)^3}dx$

(鹿児島大 2018)　　(m20185421)

**0.333** 以下の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}+4y=4x^2+6$　　(2) $xdy=5ydx$　　(3) $(xy^2-y)dx+x(xy-1)dy=0$

(鹿児島大 2018)　　(m20185422)

**0.334** 3 次元の直交座標系 $O-xyz$ において，点 $A(1,2,-1)$，点 $B(2,1,1)$，点 $C(-1,4,5)$ がある．ただし，点 $O$ は $xyz$ 座標系の原点 $(0,0,0)$ である．以下の問いに答えよ．

(1) $\triangle ABC$ の面積 $S$ を求めよ．

(2) 線分 $BC$ の中点を点 $D$ とする．点 $A$, $D$ を通る直線 $\ell$ の方程式を求めよ．

(3) 線分 $OA$, $OB$, $OC$ とこれらに平行な辺で囲まれる平行六面体の体積 $V$ を求めよ．

(鹿児島大 2018)　　(m20185423)

**0.335** 次の行列 $A$ がある．以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めよ．

(2) 以下の連立方程式の解を求めよ．

$$4x+6y=8, \qquad 4x+2y=24$$

(3) 行列 $A$ の固有値を求めよ．

(鹿児島大 2018)　　(m20185424)

**0.336** 以下の微分を求めなさい．

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\cos x+1}\right)$$

(鹿児島大 2018)　　(m20185425)

**0.337** 以下の不定積分を求めなさい．

$$\int x\cos 2x dx$$

(鹿児島大 2018)　　(m20185426)

**0.338** $O$ を原点とする直交座標系の 2 点 $P$, $Q$ の位置ベクトルを $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えなさい．

(1) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角が $45^\circ$ のときの　$a$ の値を求めなさい．

(2) $a=2$ のときの $\triangle OPQ$ の面積 $S$ を求めなさい．

(鹿児島大 2018)　　(m20185427)

**0.339** 行列 $A$ を $A=\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えなさい．

(1) $A^2$ を求めなさい．

(2) 行列式 $|A|$ が $|A|=0$ となる $a$ の値を求めなさい．

(鹿児島大 2018)　　(m20185428)

**0.340** 曲線 $y=\sin x\cos x$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 曲線のグラフを $0\leq x\leq\pi$ の範囲でかきなさい．

(2) $0\leq x\leq\pi$ の範囲において，曲線と直線 $y=\dfrac{1}{4}$ で囲まれた部分の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2018)　　(m20185429)

**0.341** 次の関数の導関数を求めよ.

$$f(x) = e^x \cdot \cos x$$

(鹿児島大 2018) (m20185430)

**0.342** 次の関数について $x$, $y$ 方向の偏微分の和を求めよ.

$$f(x, y) = \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}$$

(鹿児島大 2018) (m20185431)

**0.343** 次の関数の不定積分を求めよ.

$$f(x) = 4x^2 \cdot \cos 2x$$

(鹿児島大 2018) (m20185432)

**0.344** 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^1 \int_{-2}^4 \left( x^3 \cdot \sqrt{3y+1} \right) dxdy$$

(鹿児島大 2018) (m20185433)

**0.345** (1) 次の行列の計算をせよ.

$$5 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \\ -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列の計算をせよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2018) (m20185434)

**0.346** 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

(鹿児島大 2018) (m20185435)

**0.347** 長さ $5m$ の棒 $AB$ が垂直な壁に立てかけてあり，下端 $B$ が水平な地面を $0.8m/s$ で壁から遠ざかるとする．$B$ が壁から $3m$ 離れたとき，上端 $A$ の速度及び加速度を求めなさい．ただし，この問題では，重力加速度を考慮せず，棒の上部 $A$ は壁から離れず接した状態で地面方向に移動するものとする．

(鹿児島大 2018) (m20185436)

**0.348** 次式を満たす $f(x)$ を求めなさい．ただし，$f(x)$ は連続な関数である．

$$f(x) = x^2 + \int_0^1 \{t \cdot f(t)\} \, dt$$

(鹿児島大 2018) (m20185437)

**0.349** 直線 $\dfrac{x-1}{2} = y - 8 = \dfrac{z-8}{3}$ と $xy$ 平面との交点を求めなさい．

(鹿児島大 2018) (m20185438)

**0.350** 微分可能な関数 $f(x)$ がすべての実数 $x$ に対して次式を満たすとき，$f(x)$ を $x$ の関数として表しなさい．

$$\int_0^x \{2f(t)-1\}\,dt = f(x)-1$$

(鹿児島大 2018) (m20185439)

**0.351** 2 次正方行列 $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ について以下を答えよ．

(1) $A$ の固有多項式と固有値を求めよ．

(2) $A$ の各々の固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(室蘭工業大 2018) (m20185501)

**0.352** 次の不定積分を求めよ．

$$\int (\log x)^2 dx$$

(室蘭工業大 2018) (m20185502)

**0.353** 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$y''+3y'+2y=\cos x$$

(室蘭工業大 2018) (m20185503)

**0.354** 次の連立方程式 (1) を解け．

$$\left.\begin{aligned} -x+2y &= 1 \\ -x+3y+z &= 2 \\ x-y+2z &= -2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

(室蘭工業大 2018) (m20185504)

**0.355** 関数 (1) と (2) を $x$ で微分せよ．

(1) $y=\log\left(x^3+4x^2+5x+2\right)$ (2) $y=\cos\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)e^{-x}$

(室蘭工業大 2018) (m20185505)

**0.356** 次の積分の値を求めよ．

$$I=\iint_D \frac{1-3y^2}{x^2}dydx \qquad D=\{1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq x\}$$

(室蘭工業大 2018) (m20185506)

**0.357** $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{1}{2x-1}\right)$ を計算せよ．ただし，$x \neq \dfrac{1}{2}$ とする．

(室蘭工業大 2018) (m20185507)

**0.358** 積分に関する以下の問いに答えよ．ただし，不定積分では積分定数は省略してよい．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-2x-8}dx$ を計算せよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 4x dx$ を計算せよ．

(室蘭工業大 2018) (m20185508)

**0.359** 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に関する以下の問いに答えよ.

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ.

(2) 行列式 $|A|$ を計算せよ.

(室蘭工業大 2018)　　(m20185509)

**0.360** 常微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 3y = 13\sin 2x$ に関する以下の問いに答えよ.

(1) この方程式の右辺がゼロの場合の解（同次解）$y_0$ を求めよ.

(2) 特解 $y_1$ を $y_1 = A\sin 2x + B\cos 2x$ の形を仮定して求めよ．ただし，$A$, $B$ は定数とする.

(3) 初期条件を，$x = 0$ で，$y = 0$, $\dfrac{dy}{dx} = 2$ として，解 $y$ を求めよ.

(室蘭工業大 2018)　　(m20185510)

**0.361** ベクトル解析に関する以下の問いに答えよ.

(1) $f(\boldsymbol{r}) = f(x, y, z)$ を任意のスカラー場として，$\nabla \times (\nabla f(\boldsymbol{r})) = 0$ が成り立つことを示せ.
ここに，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ をそれぞれ $x$, $y$, $z$ 方向の単位ベクトルとして，$\nabla \equiv \dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$ である.

(2) $f(\boldsymbol{r}) = |\boldsymbol{r}|$ のとき，$\nabla f(\boldsymbol{r})$ を計算せよ．ただし，$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする.

(室蘭工業大 2018)　　(m20185511)

**0.362** 以下の行列式の値を求めなさい.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

(室蘭工業大 2018)　　(m20185512)

**0.363** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，以下の行列

$$2A^3 - 9A^2 + 10A + 8E$$

を求めなさい．ただし，$E$ は単位行列とする.

(室蘭工業大 2018)　　(m20185513)

**0.364** 以下の積分の値を求めなさい．ただし，$\mathbb{R}$ はすべての実数の集合とする.

$$\iint_A xy\,dx\,dy, \qquad \text{ただし，} A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2x + y \leq 2\right\}$$

(室蘭工業大 2018)　　(m20185514)

**0.365** 関数 $e^x \sin x$ に関するマクローリン展開について，$x^3$ の項まで書きなさい．$e$ は自然対数の底とする.

(室蘭工業大 2018)　　(m20185515)

**0.366** 以下の微分方程式を解きなさい.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(室蘭工業大 2018)　　(m20185516)

**0.367** 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8}$

(香川大 2018)　　(m20185701)

**0.368** $z = 2y^3 - x^2y + 3$ の $(x, y) = (2, 1)$ における接平面の方程式を求めよ.

(香川大 2018)　　(m20185702)

**0.369** 以下の重積分を求めよ.

$$\iint_D (2x+3y+1)dxdy \qquad D = \{(x, y) \mid 1 \leqq x \leqq 2,\ x \leqq y \leqq 2x\}$$

(香川大 2018)　　(m20185703)

**0.370** 以下の行列 $U$ の階数（ランク）を求めよ.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -7 \\ -1 & 0 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

(香川大 2018)　　(m20185704)

**0.371** 以下の行列 $V$ に関して，次の問いに答えよ.

$$V = \begin{bmatrix} \dfrac{2\sqrt{2}}{3} & a \\ \dfrac{1}{3} & b \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $V$ の固有値が $1,\ \sqrt{2}$ となる $a,\ b$ を求めよ.

(2) 行列 $V$ が直交行列になるための $a,\ b$ を求めよ.

(香川大 2018)　　(m20185705)

**0.372** $xy$ 座標平面において放物線を $y = \dfrac{1}{3}x^2$ とし，直線を $y = x$ とする．以下の設問に答えよ.

(1) 放物線と直線の二つの交点 $A(x_1,\ y_1)$ と $B(x_2,\ y_2)$ の座標を求めよ．ただし，$x_2 > x_1$ とする.

(2) 点 $A(x_1,\ y_1)$ から点 $B(x_2,\ y_2)$ までの放物線の長さ $L$ を求める式を示せ．すなわち，式だけを示せばよく，値を求める必要はない.

(3) 点 $B(x_2,\ y_2)$ における放物線の接線と法線の方程式を求めよ.

(4) 放物線と直線で囲まれた部分の面積 $S$ を求めよ.

(5) 放物線と直線で囲まれた部分が，$x$ 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 $V$ を求めよ.

(島根大 2018)　　(m20185801)

**0.373** 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ とするとき，次の設問に答えよ.

(1) $AB,\ BA$ を計算し，$AB = BA$ が成立しないことを示せ.

(2) 行列 $A,\ B$ が正則であるかどうかを調べ，正則ならば逆行列を求めよ.

(3) 行列 $A$ と 2 行 2 列の零行列 $O$ に対して．$AX = XA = O$ をみたす $O$ でない行列 $X$ を一つ見つけよ．

(4) 次の条件をみたすような行列 $C = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ を求めよ．

$$C\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad C\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(5) 点 $(x, y)$ が直線 $x - y = 1$ 上を動くとき，$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ により定義される点 $(X, Y)$ の軌跡を求めよ．

(島根大 2018)　　(m20185802)

**0.374** 正則行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めよ．

(島根大 2018)　　(m20185803)

**0.375** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ とする．線形写像 $f_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ を $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と定める．また，$A = [\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5]$ を $A$ の列ベクトルへの分割とする．すなわち，

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とする．$W = \langle\ \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5\ \rangle$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5$ で張られる $\mathbb{R}^4$ の部分空間とする．次の問いに答えよ．

(1) $f_A(\mathbb{R}^5) = W = \langle\ \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5\ \rangle$ となることを示せ．

(2) $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5$ の中から，$W$ を生成する最小個数のベクトルの組を 1 組求めよ．また，$W$ の次元を述べよ．

(3) $f_A$ の核 $\mathrm{Ker}\, f_A$ の基底を 1 組求めよ．

(島根大 2018)　　(m20185804)

**0.376** $V$, $W$ を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし，$V_1$, $V_2$ を $V$ の部分空間とする．　また $f$ を $V$ から $W$ への線形写像とする．次の問いに答えよ．

(1) 線形写像 $f$ は $V$ の零ベクトル $0_V$ を $W$ の零ベクトル $0_W$ に写すことを示せ．

(2) $f$ の像 $\mathrm{Im}\, f$ は $W$ の部分空間であることを示せ．

(3) $V_1 \cap V_2$ は $V$ の部分空間であることを示せ．

(島根大 2018)　　(m20185805)

**0.377** $f(x) = -\log\cos x$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{f(x)}$ を求めよ.

(3) $-\pi/2 < x < \pi/2$ のとき，$f(x) \geq x^2/2$ であることを示せ.

(4) 曲線 $y = f(x)$ の，$0 \leq x \leq \pi/3$ の部分の長さを求めよ.

(島根大 2018)　　(m20185806)

**0.378** $z = f(x, y)$, $x = \dfrac{1}{2}(u - v)$, $y = \dfrac{1}{2}(u + v)$ とするとき，次の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を用いて表せ.

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ ならば，1 変数関数 $g$ が存在して $z = g(x + y)$ と表せることを示せ.

(島根大 2018)　　(m20185807)

**0.379** $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x - y \leq 1,\ 0 \leq x + y \leq \pi\}$ とするとき，重積分

$$\iint_D (x - y)\cos(x^2 - y^2)\,dxdy$$

の値を求めよ.

(島根大 2018)　　(m20185808)

**0.380** $xyz$ 座標系において，$A(-1,\ 3,\ 2)$, $B(2,\ 5,\ 1)$, $C(1,\ 1,\ 0)$ の 3 点がある．以下の問いに答えなさい.

(1) ベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ をそれぞれ求めなさい.

(2) 2 点 $A$, $B$ を通る直線の方程式を求めなさい.

(3) 3 点 $A$, $B$, $C$ を含む平面の方程式を求めなさい.

(首都大 2018)　　(m20185901)

**0.381** 実数 $x$, $y$, $z$ に関する連立 1 次方程式について，以下の問いに答えなさい.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -2x + 3y - z = 0 \\ -x + ky + z = 0 \end{cases}$$

(1) 連立 1 次方程式が $x = y = z = 0$ 以外の解をもつための定数 $k$ の値を求めなさい.

(2) $k$ が (1) の値を取るときの解を求めなさい．ただし，$z = t$（任意の実数）とおいてよい.

(首都大 2018)　　(m20185902)

**0.382** 平面上の点を原点の周りに 45 度回転する線形変換を $f$ とする．以下の問いに答えなさい.

(1) 線形変換 $f$ の表現行列 $A$ を求めなさい.

(2) $x^2 - y^2 = 1$ を線形変換 $f$ により移した曲線の方程式を求めなさい.

(3) (2) で求めた曲線の概形を描きなさい.

(首都大 2018)　　(m20185903)

**0.383** 次の関数を微分しなさい．ただし，$a$ は正の実数とする.

(1) $x^x$　　$(x > 0)$　　　(2) $x\sqrt{x^2 + a} + a\log(\sqrt{x^2 + a} + x)$

(首都大 2018)　　(m20185904)

**0.384** 次の微分方程式が完全系であることを示し，一般解を求めなさい．

$$(2e^{2x}y - 4x)dx + e^{2x}dy = 0$$

(首都大 2018) (m20185905)

**0.385** 関数 $\sqrt{1+x} + \log(1+x)$ のマクローリン級数を $x^3$ の項まで求めなさい．

(首都大 2018) (m20185906)

**0.386** 極限値 $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ を求めなさい．

(首都大 2018) (m20185907)

**0.387** 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int x^2 e^{2x} dx$ (2) $\displaystyle\int \sin^5 x \, dx$

(首都大 2018) (m20185908)

**0.388** 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $A$ の固有値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ．

(3) 行列 $A$ が対角化可能かどうか調べよ．さらに，対角化可能であれば行列 $A$ を対角化せよ．

(はこだて未来大 2018) (m20186301)

**0.389** (1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx$ を求めよ． (2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ を求めよ．

(はこだて未来大 2018) (m20186302)

**0.390** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left( \frac{3^x + 5^x}{2} \right)^{\frac{2}{x}}$ を求めよ．

(はこだて未来大 2018) (m20186303)

**0.391** 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の (1)〜(3) に答えなさい．

(1) 固有値を求めなさい．

(2) 固有ベクトルを求めなさい．

(3) 固有値 $\alpha$, $\beta$ に対して，次式が成り立つように，正則行列 $P$ を求めなさい．ただし，$\alpha > \beta$ とする．

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

(和歌山大 2018) (m20186501)

**0.392** 次の関数の $x = \pi$ のまわりのテイラー展開を 3 次の項まで求めなさい．

$$f(x) = \sin x$$

(和歌山大 2018) (m20186502)

**0.393** (1) 次の重積分を，極座標 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ によって，$r$ と $\theta$ の積分に変数変換しなさい．

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy, \qquad D = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 1\right\}$$

(2) (1) の積分の値を求めなさい．

(和歌山大 2018) (m20186503)

**0.394** 微分方程式 $y''(t)+2y'(t)+2y(t)=0$ に対して，次の (1)〜(3) に答えなさい．

(1) 一般解を求めなさい．

(2) 初期条件 $y(0)=1,\ y'(0)=0$ を満たす解を求めなさい．

(3) (2) で求めた解 $y(t)$ に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} y(t)$ を求めなさい．

(和歌山大 2018) (m20186504)

**0.395** 次の (1)〜(3) に答えなさい．ただし，$i$ は虚数単位とする．

(1) 次の関数の組 (A) と (B) のうち，コーシー・リーマンの方程式を満たすものを選びなさい．

(A) $u = e^x\cos y,\ v = e^x\sin y$

(B) $u = e^x\sin y,\ v = e^x\cos y$

(2) (1) で選んだ $u,\ v$ に対して，$f(z) = u(x,y)+iv(x,y),\ z = x+iy$ とおくとき，$f'(z)$ を求めなさい．

(3) (2) の関数 $f(z)$ に対して，次の積分の値を求めなさい．ただし, 積分路 $C$ は $|z|=1$ とし，向きは反時計回りとする．

$$\oint_C \frac{f(z)}{z}dz$$

(和歌山大 2018) (m20186505)

**0.396** 関数 $f(x)\ (-\pi \leqq x \leqq \pi)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leqq x < 0) \\ x & (0 \leqq x \leqq \pi) \end{cases}$$

のフーリエ級数展開を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

とするとき，次の (1)〜(3) に答えなさい．

(1) $a_0$ を求めなさい．

(2) $a_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$ を求めなさい．

(3) $b_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$ を求めなさい．

(和歌山大 2018) (m20186506)

**0.397** 公平な硬貨投げ（表裏の出る確率がそれぞれ 1/2）に対して，次の (1)〜(3) に答えなさい．

(1) $n$ 回目まで，すべて表が出る確率を求めなさい．

(2) $n$ 回目までに，少なくとも 1 回は裏が出る確率を求めなさい．

(3) $2m$ 回硬貨を投げて，表と裏が出る回数が等しい確率を求めなさい．

(和歌山大 2018) (m20186507)