0.1　次の微分方程式を解き，その一般解を求めなさい．ただし，途中の計算手順についても詳しく記述すること．

(1)　$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2y^2+3}{3x^2y}$

(2)　$\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 9e^{2x} = 4\sin x$

(北海道大 2019)　　(m20190101)

0.2　次の連立 1 次方程式について，以下の設問に答えなさい．

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ただし，a および b は任意の実数とする．また，途中の計算手順についても詳しく記述すること．

(1)　この連立方程式が解を持たないために実数 a および b が満たすべき条件を求めなさい．

(2)　この連立方程式が一意の解を持つために実数 a および b が満たすべき条件を求めなさい．　また，そのときの解を求めなさい．

(北海道大 2019)　　(m20190102)

0.3　次の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が 1 次従属となるとき，以下の設問に答えなさい．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ p \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ -p \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1)　p を求めなさい．

(2)　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の 1 次結合で $\boldsymbol{c}$ を表しなさい．

(3)　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ にともに直交し, 大きさが 1 のベクトルを求めなさい．

(4)　(3) で求めたベクトルと, $\boldsymbol{c}$ の内積を求めなさい．

(5)　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ のなす角を求めなさい．

(北海道大 2019)　　(m20190103)

0.4　f を周波数とするとき，時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

で与えられる．また，時間 t の関数 $p(t)$ と $q(t)$ の畳み込みは

$$p(t) * q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)q(t-\tau)d\tau$$

で与えられる．ここで $i = \sqrt{-1}$ である．このとき，以下の設問に答えなさい．

(1)　次の関数 $g(t)$ を横軸 t として図示しなさい．

$$g(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

(2) 次の関数 $h(t)$ を横軸 t として図示しなさい.

$$h(t) = g(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

(3) $g(t)$ のフーリエ変換を求めなさい.

(4) $h(t)$ のフーリエ変換を求めなさい.

(北海道大 2019) (m20190104)

0.5 次の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} (\log x)^2 dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+4} dx$

(北見工業大 2019) (m20190201)

0.6 関数 $f(x,y) = y\log\dfrac{x}{y}$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ. $(x, y > 0$ とする.)

(北見工業大 2019) (m20190202)

0.7 $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ での $x = \tan y$ の逆関数を $y = \arctan x$ とする.

(1) $\arctan x$ の導関数を書け. （証明は省略しても良い. ）

(2) 関数 $f(x) = \arctan x - \log\sqrt{1+x^2}$ の $0 \leqq x \leqq \sqrt{3}$ での最大値と最小値を求めよ.

(北見工業大 2019) (m20190203)

0.8 平面の部分集合 D を次で定める.

$D = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq x\right\}$

(1) D を図示せよ.

(2) 積分 $\displaystyle\iint_D x^2\,dxdy$ を計算せよ.

(北見工業大 2019) (m20190204)

0.9 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2019) (m20190205)

0.10 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする.

等式 $x\boldsymbol{v}_1 + y\boldsymbol{v}_2 + z\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{c}$ をみたす x, y, z を求めよ.

(北見工業大 2019) (m20190206)

0.11 関数 $f(x) = \cos x$ の $x = 0$ を中心とする 2 次までのテイラー展開を求めよ.

(北見工業大 2019) (m20190207)

0.12 積分 $I = \displaystyle\int_1^e x\log x\,dx$ を計算せよ.

(北見工業大 2019) (m20190208)

0.13 関数 $z = x^2y + y^4$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.

(北見工業大 2019) (m20190209)

0.14 関数 $y = e^{-x^2}$ について次の問 (1), (2) に答えよ.

(1) y' および y'' を計算せよ.

(2) y', y'' の符号を調べ，増減，凹凸がはっきりわかるようにグラフを描け.
（変曲点があれば変曲点における $y = e^{-x^2}$ の接線も同じ xy 平面上に描くこと.）

(北見工業大 2019)　　(m20190210)

0.15 平面の部分集合 D を次で定める:

$$D = \{(x, y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 2x + y \leqq 2\}$$

(1) D を図示せよ.

(2) 積分 $J = \iint_D xy\,dxdy$ を計算せよ.

(北見工業大 2019)　　(m20190211)

0.16 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det A$ と逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2019)　　(m20190212)

0.17 3 次元直交座標系 (x, y, z) において，中心が点 $(-1, 2, 4)$ で半径 5 の球面を S とする.
次の問いに答えなさい.

(1) 球面 S の方程式を求めなさい.

(2) 球面 S の中心の x 座標が毎秒 2 で増加するとき，その球面の方程式を求めなさい．ただし，時刻 $t = 0$[秒] のときの中心は点 $(-1, 2, 4)$ とする.

(3) 上の (2) で求めた球面 S と平面 $x = 4$ との交わりが半径 4 の円になるときの時刻 t[秒] を求めなさい.

(岩手大 2019)　　(m20190301)

0.18 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，ベクトル $\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 行列 A のランク（階数）rank (A) が 3 であることを示しなさい.

(2) $\boldsymbol{e}_x{}' = A\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y{}' = A\boldsymbol{e}_y$ であるとき，2 つのベクトル $\boldsymbol{e}_x{}'$, $\boldsymbol{e}_y{}'$ を二辺とする平行四辺形の面積を求めなさい.

(3) 行列 A の固有値，および，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めなさい.

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように行列 P を求め，A を対角化しなさい.

(岩手大 2019)　　(m20190302)

0.19 関数 $f(x) = x^2 e^x$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点を求めなさい.

(2) 関数 $f(x)$ の極限値 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ および $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ をそれぞれ求めなさい.

(3) 関数 $f(x)$ の増減表を作成し，概形を図示しなさい．また，(1) で求めた極値と変曲点の座標も示しなさい.

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ を求めなさい.

(岩手大 2019)　　(m20190303)

0.20 微分方程式 $y'' - 2y' + 4y = e^{2x}$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) 微分方程式の特性方程式を示し，その解を求めなさい.

(2) 微分方程式の特殊解を求めなさい.

(3) 微分方程式の一般解を求めなさい.

(岩手大 2019)　　(m20190304)

0.21 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos x dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$

(秋田大 2019)　　(m20190401)

0.22 平面上の原点 O と点 A, B, C の 4 点を考える．この 4 点は互いに異なり，どの 3 点も一直線上にないとする，$0 \leqq t \leqq 1$ なる t に対し，OA, OB, CB, CA をそれぞれ $t : 1-t$ に内分する点を P, Q, R, S とする．また，$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$ と表す．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{SR}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, t を用いて表せ.

(2) 四角形 $PQRS$ の対角線の交点を X とする．t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で変化するとき，X が描く図形はどのようなものか説明せよ.

(秋田大 2019)　　(m20190402)

0.23 $g(x, y) = \dfrac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$ の条件で，$f(x, y) = xy$ の関係が成り立っている.
このとき，以下の問いに答えよ.

(1) y を x の関数とするとき，$g(x, y) = 0$ の両辺を x で微分して，$\dfrac{dy}{dx}$ を x と y の式で求めよ.

(2) y を x の関数であることに注意し，設問 (1) の結果を用いて，$\dfrac{df}{dx}$ を x と y の式で求めよ.

(3) $f(x, y)$ が極値を取るときの x と y の関係式を，設問 (2) の結果を用いて求めよ.

(4) $f(x, y)$ が極値を取るときの $g(x, y)$ 上の点を全て求めよ.

(秋田大 2019)　　(m20190403)

0.24 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{a}$ を法線ベクトルに持つ原点を通る $\mathbb{R}^3$ 内の平面を π とする．$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，平面 π に関して対称なベクトルを対応させる写像を f とすると，f は線形写像になっている．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，$f(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{a}$ を用いて表せ（内積を用いよ）.

(2) $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる 3×3 行列を A とするとき，行列 A を求めよ.

(3) A の固有値と，それぞれの固有値に対応する固有空間を求めよ.

(秋田大 2019)　　(m20190404)

0.25　xy 平面上の点 P の座標 (x, y) が，実数 t を媒介変数として次の式で与えられる．

$$\begin{cases} x(t) = (1 + \cos t)\cos t \\ y(t) = (1 + \cos t)\sin t \end{cases}$$

ここで，$0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1)　$x(t)$ および $y(t)$ の増減表を作成し，曲線 C の概形を図示せよ．

(2)　曲線 C の長さを求めよ．

(3)　曲線 C と直線 $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$ によって囲まれる領域の面積 A を求めよ．

(東北大 2019)　　(m20190501)

0.26　xyz 空間に原点 O を中心とする半径 1 の球面 S_1，点 $P(2, 0, a)$ を中心とする半径 r の球面 S_2 がある．以下の問に答えよ．ただし，a，r はそれぞれ実数であり，$r > 0$ とする．

(1)　S_1 と S_2 が交線をもつ r の範囲を a を用いて表せ．

(2)　S_1 と S_2 が交線をもつとき，交線を含む平面の方程式を求めよ．

(3)　$a = 0$，$r = \sqrt{3}$ のとき，S_1 と S_2 の交線を C とする．交線 C の方程式を求めよ．

(4)　点 $Q(0, 0, \sqrt{2})$ と (3) で求めた交線 C 上の点 R を通る直線が xy 平面と交差する点を T とする．点 R が交線 C 上を動くとき，点 T の軌跡の方程式を求めよ;

(東北大 2019)　　(m20190502)

0.27　次の行列 $\boldsymbol{A}$ について，以下の問に答えよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

(1)　行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値をすべて求めよ．

(2)　$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ が対角行列となるような正則行列 $\boldsymbol{P}$ を求め，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ を計算せよ．ただし，$\boldsymbol{P}^{-1}$ は $\boldsymbol{P}$ の逆行列を表す．

(3)　n が 1 以上の整数であるとき，n を用いて $\boldsymbol{A}^n$ を表せ．

(東北大 2019)　　(m20190503)

0.28　次の行列 $\boldsymbol{B}$ について，以下の問に答えよ．

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(1)　$\boldsymbol{B}^2$ と $\boldsymbol{B}^3$ を求めよ．

(2)　n が 1 以上の整数であるとき，n を用いて $\boldsymbol{B}^n$ を表せ．

(東北大 2019)　　(m20190504)

0.29　t を実数とする．3 × 4 行列 A を次で定義する．　$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 & t \\ -2 & 5 & 6 & -5 \\ 2 & -3 & -10 & 3 \end{pmatrix}$

(1)　A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ．

(2) 4 次元実縦ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c,d \text{ は実数で } A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

の次元を求めよ．また，W の基底を一組求めよ．

(東北大 2019)　　(m20190505)

0.30 実数列 $\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体のなす集合 V は，任意の二つの実数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\} \in V$ と任意の実数 s に対して，和 $\{a_n\} + \{b_n\} \in V$ とスカラー倍 $s\{a_n\} \in V$ を

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}, \quad s\{a_n\} = \{sa_n\}$$

と定義することにより，実ベクトル空間となる．V の元 $\{a_n\}$ で，漸化式

$$a_{n+4} = 4a_{n+3} + 3a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすもの全体のなす，V の部分集合を W とする．以下の問いに答えよ．

(1) W は V の部分空間であることを示せ．

(2) $\{a_n\}$ を W の元とするとき a_5，a_6 を a_1，a_2，a_3，a_4 を用いて書き表せ．

(3) $i = 1, 2, 3, 4$ に対して，実数列 $\{e_n^{(i)}\} = \{e_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$ は，

$$e_n^{(i)} = \begin{cases} 1 & (n = i \text{ のとき}), \\ 0 & (n = 1, 2, 3, 4,\ n \neq i \text{ のとき}) \end{cases}$$

を満たす唯一つの W の元とする．このとき，$\{e_n^{(1)}\}$，$\{e_n^{(2)}\}$，$\{e_n^{(3)}\}$，$\{e_n^{(4)}\}$ は W の基底であることを示せ．

(4) 線形写像 $T : W \to W$ を，

$$T(\{a_n\}) = \{b_n\} \quad \text{ただし} \quad b_n = a_{n+1} \ (n = 1, 2, \cdots)$$

で定める．このとき，設問 (3) の基底に関する T の表現行列を求めよ．また，その行列式を求めよ．

(東北大 2019)　　(m20190506)

0.31 次の正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の固有値それぞれに対して，その固有空間の基底を求めよ．

(3) 実 3 変数 x, y, z の関数 $f(x, y, z)$ を次で定義する．

$$f(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 2xy - 4yz - 4zx$$

このとき $f(x, y, z)$ の，条件

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = x + y + z = 0$$

のもとでの最大値と最小値を求めよ．

(東北大 2019)　　(m20190507)

0.32 (1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は収束しないことを示せ.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ は収束することを示せ.

(東北大 2019)　　(m20190508)

0.33 不定積分 $\displaystyle\int\frac{x^3-3x+1}{(x-1)^2(x+2)}dx$ を求めよ.

(東北大 2019)　　(m20190509)

0.34 重積分

$$\iint_D(3x^2+y^2)dxdy \qquad \left(D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leq 1,\ 0\leq y\leq x\right\}\right)$$

の値を求めよ.

(東北大 2019)　　(m20190510)

0.35 以下の (1)〜(3) に答えよ.

(1) 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

$$x^2\frac{dy}{dx}-xy-y^2=0$$

(2) 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=2x+3$$

(3) 以下の微分方程式を ( ) 内の初期条件のもとで解け.

(*a*) $\cos x\cos^2 y+\dfrac{dy}{dx}\sin^2 x\sin y=0 \qquad \left(x=\dfrac{\pi}{2},\ y=0\right)$

(*b*) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=0 \qquad \left(x=0,\ y=1\ \ and\ \ x=\dfrac{\pi}{4},\ y=0\right)$

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190601)

0.36 行列 $\begin{pmatrix}2&5\\6&3\end{pmatrix}$ について,

(1) 固有値を求めよ.

(2) 固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190602)

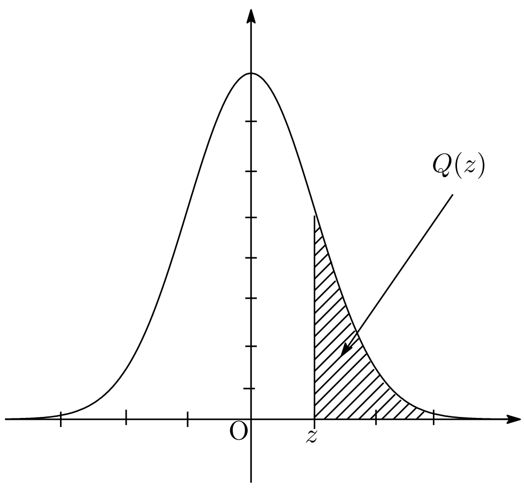
0.37 ある会社のペットボトル飲料水の容量表示が $500mL$ と印字されている. しかしながら, 工場での注入の際に製品ごとに変動が生じる. 含量は, 平均 $\mu=505.0mL$, 標準偏差 $\sigma=2.0mL$ の正規分布に従うことが分かっている. 以下の問いに答えよ. ただし, 必要に応じて付表 1 を利用せよ.

(1) 含量が表示である $500mL$ を下回る製品の割合を求めよ.

(2) $500mL$ を下回る製品の割合を 0.3% 以下にするためには注入機械の精度である標準偏差 σ をどれくらいにする必要があるか答えよ.

付表 1　正規分布 $N(0,1)$ の上側確率 $(z\to Q(z))$

z	$Q(z)$
0.50	0.3875
0.75	0.2266
1.00	0.1587
1.25	0.1057
1.50	0.0668
1.75	0.0401
2.00	0.0228
2.25	0.0122
2.50	0.0062
2.75	0.0030
3.00	0.0013



(お茶の水女子大 2019)　　(m20190603)

0.38 逆正接関数（$\tan x$ の逆関数）Arctan x の Taylor 展開をもとに，以下のようにして $\dfrac{\pi}{4}$ の近似を与えよ．ただし，$\mathrm{Arctan}\, 0 = 0$ とする．

(1) $|x| < 1$ のとき
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$
となることをもとに，$x = 0$ における Arctan x の Taylor 展開を求めよ．

(2) 上で求めた Taylor 展開の部分和に $x = 1$ を代入することで $\mathrm{Arctan}\, 1 = \dfrac{\pi}{4}$ を近似することを考える．近似の誤差を 0.1 や 0.01 以下にするためには第何項までの和を考える必要があるかを論じよ．また，誤差を 0.1 以下とする場合にはどのような近似値が得られるかを実際に述べよ．

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190604)

0.39 n 次行列式
$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 \\ 0 & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$
を計算し，x の整式の形で表せ,

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190605)

0.40 次の行列 A を考える．
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$T(x) = Ax$ で与えられる $\mathbb{R}^4$ の線形変換 T の像と核それぞれについて，一組の基底と次元を求めよ．

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190606)

0.41 n 次正方行列 A, B, C について，A と B が正則ならば，ABC, BCA, および，CAB の固有多項式が一致することを示せ．

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190607)

0.42 3 次元の位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と定数ベクトル $\boldsymbol{B}$ を用いて，ベクトル $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}/2$ で定義する．このとき，$\nabla \times \boldsymbol{A}$ を計算せよ．

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190608)

0.43 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

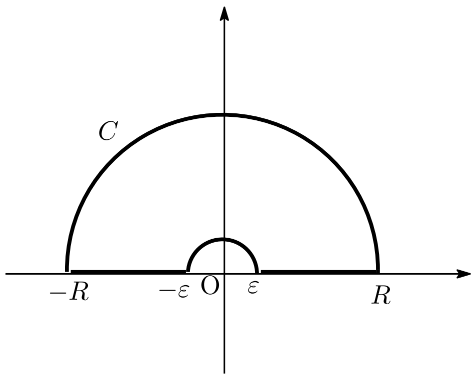
を計算することにより，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ を求めよ．

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190609)

0.44

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z}dz$$

を下図のような複素平面上の経路 C で計算することにより，$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ の値を求めよ．



(お茶の水女子大 2019)　　(m20190610)

0.45 関数 $f(x)$ は区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ で $f(x) = |x|$ の周期 2π の周期関数とする．$f(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190611)

0.46 行列

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．i は虚数単位である．

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190612)

0.47 x_1, x_2, x_3, x_4 に関する次の連立方程式が解をもつための条件を a, b, c, d を用いて表せ．また，その条件のもとで解をすべて求めよ．

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & a \\ x_1 & -x_2 & -3x_3 & -2x_4 & = & b \\ 5x_1 & -3x_2 & +x_3 & & = & c \\ 3x_1 & -2x_2 & -x_3 & -x_4 & = & d \end{array}\right.$$

(東京工業大 2019)　　(m20190801)

0.48 行列

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ -4 & 0 & 1 & 4 \\ 10 & 2 & 1 & -10 \end{pmatrix}$$

に対して，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．

(東京工業大 2019)　　(m20190802)

0.49 関数 $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 6x^2 - 6y^2 + 9x$ の極値を求めよ．

(東京工業大 2019)　　(m20190803)

0.50 $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0\right\}$ とするとき，次の重積分を求めよ．

$$\iint_D (2x^2 + y^2)^2 y^2 dxdy$$

(東京工業大 2019)　　(m20190804)

0.51 2 変数関数 $f(x,y) = 2x^3 - 2xy - y^2 - 3x + y$ の極値を求めなさい．ただし，極値が極大値であるか極小値であるかを明記すること．

(東京農工大 2019)　　(m20190901)

0.52 領域 $D = \left\{(x,y) \mid x^2 + 2xy + 5y^2 \leqq 1\right\}$ における，次の 2 重積分 I の値を求めなさい．

$$I = \iint_D (x+y)^2 dxdy$$

(東京農工大 2019)　　(m20190902)

0.53 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -5 & -4 & 2 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい．

(1) A の固有値をすべて求めなさい．

(2) A の最小の固有値に属する固有ベクトルで $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ の形のものを求めなさい．

(東京農工大 2019)　　(m20190903)

0.54 x の関数 $y = y(x)$ についての微分方程式

$$y'' - y' - 2y = 18xe^{2x}$$

の解のうち，$y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ を満たすものを求めなさい．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx},\ y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ である．

(東京農工大 2019)　　(m20190904)

0.55 次の 3 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 3 \\ -6 & -7 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の最大の固有値に対応する固有ベクトルをひとつ求めよ．

(3) $\boldsymbol{a}_n = A^n \boldsymbol{a}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ と定義するとき，$\boldsymbol{a}_n$ を求めよ．

(電気通信大 2019)　　(m20191001)

0.56 a, p, q を実数の定数として，行列 A, B を次で定義する，

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & a & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ p & q & 2 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

さらに，線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,　$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ をそれぞれ

$$f(x) = Ax \quad (x \in \mathbb{R}^4) , \qquad g(v) = Bv \quad (v \in \mathbb{R}^3)$$

で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元が最大となる a の値 a_0 を求めよ．さらに，そのときの $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を 1 組求めよ．

(2) $a = a_0$ のとき，f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の基底を 1 組求めよ．

(3) $a = a_0$ のとき，$g(\mathrm{Im}\, f) \subset \mathrm{Ker}\, f$ が成り立つような定数 p, q の値を求めよ．
ただし，$g(\mathrm{Im}\, f) = \{g(v) \mid v \in \mathrm{Im}\, f\}$ である．

(電気通信大 2019)　　(m20191002)

0.57 C^1 級関数 $f(r)$ に対して，次の合成関数

$$u(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2})$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) xyz 空間内の曲面 $S : z = u(x, y)$ を考える．このとき，S 上の点 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ f(1))$ における S の接平面と z 軸との交点の z 座標 z_0 を $f(1),\ f'(1)$ を用いて表せ．ただし，α は定数とする．

(2) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ が r の関数として表されることを示せ．

(3) $f(r) = r^2 e^{-r^2}$ のとき，次の重積分 I の値を求めよ．

$$I = \iint_D u(x, y)\, dxdy , \qquad D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 1\right\}$$

(電気通信大 2019)　　(m20191003)

0.58 以下の各問いに答えよ．

(1) 微分方程式 $y' = y^2 - 1$ の解 $y = y(x)$ で，初期条件 $y(0) = 0$ を満たすものを求めよ．

(2) 次の各微分方程式の一般解をそれぞれ求めよ．

(i) $y' + 2y\cos x = \cos x$　　　(ii) $y'' + 2y' + 2y = \cos 3x$

(電気通信大 2019)　　(m20191004)

0.59 $0 < a < 1$ を満たす実数 a に対して，以下の問いに答えよ．

(1) 次の複素関数 $f(z)$ の特異点をすべて求め，$f(z)$ の各特異点における留数を求めよ．
ただし，i は虚数単位とする．　　$f(z) = \dfrac{1}{az^2 - i(a^2 + 1)z - a}$

(2) 次の定積分 $I(a)$ を求めよ. $$I(a)=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a^2-2a\sin\theta+1}$$

(電気通信大 2019) (m20191005)

0.60 次の行列 A が，1 と 4 を固有値としてもつとき，以下の問いに答えよ.

$$A=\begin{bmatrix} 7 & a \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

ただし，a は実数の定数である.

(1) a を求めよ.

(2) 行列 A の固有ベクトルを求めよ.

(3) 行列 A を対角化せよ.

(4) A^n を計算せよ.

(横浜国立大 2019) (m20191101)

0.61 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ (2) $\dfrac{dy}{dx}=\cos(x+y)-\cos(x-y)$

(横浜国立大 2019) (m20191102)

0.62 $x^2+y^2=4$ の条件の下で，$f(x,y)=4x+2xy$ の最小値，最大値を求めなさい．また，最小，最大となるときの x と y の値も示しなさい.

(筑波大 2019) (m20191301)

0.63 次の二重積分について，以下の問いに答えなさい.

$$V=\iint_D (x^2+xy)dxdy \quad \cdots\cdots(*)$$

ただし，$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq 1\right\}$ とする.

(1) x と y を極座標変換し，式 $(*)$ の右辺を書き換えなさい.

(2) V の値を求めなさい.

(筑波大 2019) (m20191302)

0.64 零ベクトルでない m 次元の実列ベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ について，$\boldsymbol{b}$ から $\boldsymbol{a}$ への射影を考える．$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ の内積 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}$（ただし添字 T は転置を表す）および，$\boldsymbol{a}$ を正規化したベクトル $\dfrac{1}{||\boldsymbol{a}||}\boldsymbol{a}$（ただし $||\boldsymbol{a}||$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ のノルムを表す）を用いると，$\boldsymbol{b}$ から $\boldsymbol{a}$ への射影 $\boldsymbol{p}$ は

$$\boldsymbol{p}=\frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{||\boldsymbol{a}||^2}\boldsymbol{a}$$

と書ける.

(1) $\boldsymbol{p}=P\boldsymbol{b}$ となるような射影行列 P を求めなさい.

(2) $P^2=P$ となることを示しなさい.

(3) I を単位行列としたとき，$I-P$ もまた射影行列となる．このとき，$\boldsymbol{b}$ を $I-P$ で射影して得られるベクトル $\boldsymbol{c}$ と，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ の関係を図示しなさい，

(筑波大 2019) (m20191303)

0.65 線形独立な n 個の m 次元実列ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_n$（ただし $n < m$）によって張られる m 次元実数空間の部分空間を考え，この部分空間で，零ベクトルでない m 次元の実列ベクトル $\boldsymbol{b}$ に最も近いベクトル，すなわち射影 $\boldsymbol{q}$ を求めたい．実係数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ を用いて

$$\boldsymbol{q} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$$

とおく．さらに，

$$A = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n),$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^T$$

となるような $m\times\ n$ 行列 A および n 次元の実列ベクトル $\boldsymbol{x}$ を用いると，$\boldsymbol{q} = A\boldsymbol{x}$ と書ける．

(1) $\boldsymbol{q}$ から $\boldsymbol{b}$ に向かうベクトルと，$\boldsymbol{a}_i$ (ただし $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$) によって張られる部分空間は直交する．この関係を表す式を，行列 A およびベクトル $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$ のみを用いて表しなさい．

(2) ベクトル $\boldsymbol{x}$ を，行列 A およびベクトル $\boldsymbol{b}$ のみを用いて表しなさい．

(筑波大 2019)　　(m20191304)

0.66 $f(x, y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ とする．

(1) $f(x, y)$ の停留点をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた停留点のうち，x 座標および y 座標がともに正の点を (a, b) とする． $f(x, y)$ が $(x, y) = (a, b)$ で極値をとるかどうか判定せよ．極値をとる場合は極大と極小のどちらであるか，根拠とともに述べよ．

(3) x, y が $xy = 4$ かつ $x > 0$ を満たすとき，$f(x, y)$ の最大値を求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191305)

0.67 $f(x, y) = x^2 + y^2$ とし，xyz 直交座標系において曲面 $S : z = x^2 + y^2$ を考える．この座標系上の点を (x, y, z) と表し，座標系の原点を $O(0, 0, 0)$ とする．

(1) 点 $A(1, 1, 2)$ における曲面 S の接平面を π とする．π の方程式を求めよ．

(2) (1) の接平面 π と平行で原点 O を通る平面を π_0 とし，平面 π_0 と曲面 S の交線の xy 平面への正射影を曲面 C とする．C はどのような図形になるか．

(3) (2) の平面 π_0 と曲面 S で囲まれた領域を D とする．このとき，3 重積分

$$I = \iiint_D (x^2 + y^2)dxdydz$$

の値を求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191306)

0.68 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) A のすべての固有値と，それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．なお，固有ベクトルはその第 1 成分を 1 とせよ．

(2) $P^{-1}AP = D$ が対角行列になるように，3 次正則行列 P とその逆行列 P^{-1} の組を求めよ．なお，D の対角要素は大きい順に並べ，P の第 1 行の要素はすべて 1 とせよ．

(3) 自然数 n に対して，ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = (A+2E)^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の各成分を n の関数として求めよ．ここで E は単位行列である．

(4) 3 次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，その転置ベクトルを ${}^t\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とするとき，${}^t\boldsymbol{r}(A+E)\boldsymbol{r} = 1$ で表される曲面 M は，直交変換 $(x, y, z) \to (X, Y, Z)$ によって標準形

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = 1$$

にすることができる．$\alpha > \beta > \gamma$ となるように定数 α, β, γ を定めよ．

(5) (4) における曲面 M に対して

$$\boldsymbol{r} \to R\boldsymbol{r}$$

で表される回転を施したら，xy 平面，yz 平面，zx 平面いずれに関しても対称な図形となった．このような回転を表す行列 R をひとつ求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191307)

0.69 (1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次独立であるとき，ベクトル $3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$ は一次独立であるか否かを示せ．

(2) 次の $\boldsymbol{a}_1$ から $\boldsymbol{a}_5$ のベクトルの中で，一次独立であるベクトルの数が最大となる一次独立ベクトルの組を 1 つ示せ．また，その他のベクトルを一次独立ベクトルの線形結合により表せ．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

(筑波大 2019)　　(m20191308)

0.70 次の行列 A について，以下の問に答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値を全て求めよ．

(2) (1) で求めた全ての固有値に対して固有ベクトルを求めよ．

(3) A は対角化可能か述べよ．また，対角化可能ならば，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P を求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191309)

0.71 ラグランジュの未定乗数法を用いて，楕円体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > 0,\ b > 0,\ c > 0$$

に内接する直方体の体積の最大値とそのときの頂点の座標を求めたい．ただし，直方体の各辺は，いずれも x 軸，y 軸，z 軸のどれかに平行であるものとする．

(1) 楕円体に内接する直方体の 8 つの頂点の 1 つを (x, y, z)（ただし，$x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ ）としたとき，3 方向の辺の長さ $l_x,\ l_y,\ l_z$ と，楕円体に内接する直方体の体積 $V(x, y, z)$ を変数 x, y, z を用いてそれぞれの数式として表せ.

(2) 直方体が楕円体に内接するという条件を満たす特異点がないことを示せ.

(3) 体積 $V(x, y, z)$ を最大化する頂点の座標 (x, y, z) とその体積を求めるための，具体的なラグランジュ関数 $F(x, y, z)$ を示せ．ただし，未定乗数を λ とせよ.

(4) (3) で定数化した数式を用いて，楕円体に内接する直方体の体積を最大化する頂点の座標 (x, y, z) とその体積を求めよ．ただし，$x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ とする.

(筑波大 2019)　　(m20191310)

0.72 下記の 2 重積分を変数変換によって求めることを考える.

$$I = \iint_D (4x^2 - y^2) e^{8xy} dxdy, \qquad D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 0 \leq 2x + y \leq 1\ ,\ 0 \leq x - \frac{1}{2} y \leq 1 \right\}$$

(1) $u = 2x + y,\ v = x - \dfrac{1}{2} y$ と変数変換したとき， 変数の組 (u, v) の積分領域 E を示せ.

(2) E から D への写像関数のヤコビアンを求めよ

(3) I を求めよ.

(筑波大 2019)　　(m20191311)

0.73 確率変数 $X_1,\ \cdots,\ X_n$ は互いに独立で，平均 μ，分散 σ^2 のある同一の確率分布に従うとする．ここで，2 つの μ の推定量

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} v_i X_i, \qquad \tilde{\mu} = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i$$

を考える．ただし，

$$-\infty < \mu < \infty,\ 0 < \sigma^2 < \infty$$

,

$$v_i = \frac{2(n+1-i)}{n(n+1)}, \qquad w_i = \frac{2(n-i)}{n(n-1)}$$

で，n は 2 以上の整数である．なお，解答の際には,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

を利用して良い.

(1) $\hat{\mu}$ が μ の不偏推定量であることを示せ.

(2) $\tilde{\mu}$ が μ の不偏推定量であることを示せ.

(3) $\hat{\mu}$ の分散を求めよ.

(4) $\tilde{\mu}$ の分散を求めよ.

(5) (1)〜(4) から，$\hat{\mu}$ と $\tilde{\mu}$ どちらの推定量がより μ の推定にに適していると言えるか．その理由とともに答えよ.

(筑波大 2019)　　(m20191312)

0.74 テレビ番組 A の第 1 週の世帯視聴率 p および第 2 週の世帯視聴率 q を考える．第 1 週および第 2 週において，各世帯は独立にテレビ番組 A をそれぞれ確率 p, q で視聴すると仮定する．また，各世帯

は十分に大きな母集団から無作為に抽出されるものとする．なお，$0 \le a \le 1$ を満たす a に対して標準正規分布に従う確率変数 Z の $100(1-a)\%$ 点 z_a は

$$P_r(Z \ge z_a) = a$$

で定義され，その具体的な値は次表で与えられる．ここで，$P_r(Z \ge z_a)$ は Z が z_a 以上になる確率である．

a	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
z_a	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

(1) 900 世帯の視聴データから，第 1 週の世帯視聴率 p の推定値 $\hat{p} = 0.1$ を得た．このとき，p の 95% 信頼区間を求めよ．

(2) 900 世帯の視聴データから，第 2 週の世帯視聴率 q の推定値 $\hat{q} = 0.08$ を得た．第 2 週の世帯視聴は第 1 週より低いと言えるか．有意水準 0.05 で検定せよ．

(筑波大 2019)　　(m20191313)

0.75　2 つの実数 a, θ に対して, 3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

で定める．

(1) A^2 の行列式を求めよ．

(2) A^2 の階数を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の部分集合 V を

$$V = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; A^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \right\}$$

で定める．このとき，V の次元を求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191314)

0.76　実数を成分とする 2 次正方行列全体のなす $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間を $M_2(\mathbb{R})$ で表す．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ とし，$a \neq d$ と仮定する．$M_2(\mathbb{R})$ 上の線形変換 f_A を

$$f_A(X) = AX - XA \qquad (X \in M_2(\mathbb{R}))$$

により定める．

(1) $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく．$f_A(X_1)$, $f_A(X_2)$ は線形独立であることを示せ．

(2) f_A の核の次元が 2 であることを示せ．

(筑波大 2019)　　(m20191315)

0.77　α を実数の定数とし，n を 2 以上の整数とする．

$$f(x, y) = (y - x)^n + x^2 + \alpha y^2$$

に関する以下の問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ の 1 次および 2 次の偏導関数をすべて求めよ．

(2)　$f(x,y)$ が $(x,y)=(0,0)$ において極値を取るかどうか判定せよ．

(筑波大 2019)　　(m20191316)

0.78　(1)　$f(x)$ は $x \geqq 0$ において定義された実数値連続関数であって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して広義積分 $\displaystyle\int_\varepsilon^\infty \frac{f(x)}{x}dx$ が収束すると仮定する．このとき，任意の正の実数 a,b $(a<b)$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x}dx$$

(2)　$f(x)$ は (1) の仮定を満たすとする．(1) の等式を用いて，任意の正の実数 a,b $(a<b)$ に対して，

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(0)\log\frac{b}{a}$$

が成り立つことを示せ．

(3)　次の広義積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2}dx$

(筑波大 2019)　　(m20191317)

0.79　2 つの実数 a,b に対して，実数 $a \vee b$ を

$$a \vee b = \max\{a,b\}$$

で定める．

(1)　実数 a,b に対して，

$$a \vee b = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$$

が成り立つことを示せ．

(2)　$\mathbb{R}$ の部分集合 A,B に対して，$\mathbb{R}$ の部分集合 $A \vee B$ を

$$A \vee B = \{a \vee b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

で定める．A,B がともに上に有界であれば，$A \vee B$ も上に有界であることを示し，さらに

$$\sup(A \vee B) = (\sup A) \vee (\sup B)$$

が成り立つことを示せ．

(筑波大 2019)　　(m20191318)

0.80　次の関数について以下の問いに答えよ．　$f(x) = \dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$

(1)　$f'(x)g(x)=1$ を満たす $g(x)$ を求めよ．

(2)　$f'(x)g(x)=1$ に積の微分に関するライプニッツの公式を適用して，次の漸化式が成り立つことを示せ．

$$(x^2-1)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0 \qquad (n \geqq 1)$$

(埼玉大 2019)　　(m20191401)

0.81　次の関数の x に関する偏導関数 z_x を求めよ．

$z = \log\sqrt{x^2+y^2}$

(埼玉大 2019)　　(m20191402)

0.82 次の不定積分を求めよ． $I = \displaystyle\int \frac{1}{\sin x} dx$

(埼玉大 2019) (m20191403)

0.83 半径 a の円の面積を二重積分を用いて求めよ．

ただし，$D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq a^2\right\}$ とする．

(埼玉大 2019) (m20191404)

0.84 次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ について考える．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} x \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ とするとき $\cos\theta$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一次従属となるように x を求めよ．

(埼玉大 2019) (m20191405)

0.85 2 つの数列 x_n, y_n の間に

$$x_n = x_{n-1} + 4y_{n-1}$$
$$y_n = 2x_{n-1} + 3y_{n-1}$$

なる関係がある．ただし，n は自然数とし，$x_0 = -2$, $y_0 = 2$ とする．

(1) x_1, y_1 を求めよ．

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき，$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ となることを示せ．

(3) x_n, y_n を n を使って表せ．

(埼玉大 2019) (m20191406)

0.86 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = (2y+1)^2 x e^{-x}$

(2) $\dfrac{x}{y}\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} - 1 = 0$

(3) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 2\sin x \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{2}\cos 2x = 0$

(埼玉大 2019) (m20191407)

0.87 次の連立方程式の一般解を求めよ．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y \end{cases}$$

(埼玉大 2019) (m20191408)

0.88 R^4 の線形部分空間 V_1 と V_2 を次のように定める．

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in R^4 \ \ : \ \ \begin{array}{c} 2x + z + 8w = 0 \\ x + y + z + w = 0 \end{array} \right\}$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in R^4 \quad : \quad x = -2y - w = -3z + w \right\}$$

以下の各問に答えよ．

(1) 線形空間 V_1 と V_2 の基底をそれぞれ一組求めよ．

(2) 線形空間 $V_1 \cap V_2$ の基底を一組求めよ．

(3) $V_1 \cup V_2$ が R^4 の線形部分空間ではないことを示せ．

(4) $V_1 \cup V_2$ を含む，R^4 の最小の線形部分空間の基底を一組求めよ．

(茨城大 2019)　　(m20191701)

0.89 A は $A^2 = A$ をみたす n 次実正方行列で，零行列でも単位行列でもないとする．0 と 1 は A の固有値であり，A の固有値は 0 と 1 に限ることを示せ．

(茨城大 2019)　　(m20191702)

0.90 実 2 変数関数 $f(x,y) = x^3 + 3y^2 - 3x - 6y + 2$ を考える．以下の各問に答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) $z = f(x,y)$ で表される曲面の点 $(1, 2, f(1,2))$ における接平面の方程式を求めよ．

(茨城大 2019)　　(m20191703)

0.91 実 2 変数関数 $g(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 1$ を考える．また，$\boldsymbol{R}^2$ の点 (a,b) について，

$$D(a,b) = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 \leqq 1 \right\}$$

とする．以下の各問に答えよ．

(1) $D(0,0)$ 上の $g(x,y)$ の 2 重積分を求めよ．

(2) $D(a,b)$ 上の $g(x,y)$ の 2 重積分は $g(a,b)\pi$ となることを示せ．

(茨城大 2019)　　(m20191704)

0.92 整数 n，正数 b に対して，$I_n = \displaystyle\int_{-b}^{b} e^x \sin nx\, dx$，$R_n = \displaystyle\int_{-b}^{b} e^x \cos nx\, dx$ とおく．次の小問に答えよ．

(1) $I_n + nR_n$ を求めよ．

(2) $R_n - nI_n$ を求めよ．

(3) I_n と R_n を求めよ．

(4) $b = \pi$ のとき，I_n と R_n を求めよ．

(山梨大 2019)　　(m20191801)

0.93 a, b, c, d を互いに異なる実数として，次の小問に答えよ．

(1) 次に示す行列式の値を求めよ．

$$(a) \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}, \qquad (b) \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

(2) 4 つのベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$ を

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} a^3 \\ b^3 \\ c^3 \end{bmatrix}$$

と定義する．また，x_1, x_2, x_3, x_4 を方程式

$$x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + x_3\boldsymbol{u}_3 + x_4\boldsymbol{u}_4 = \boldsymbol{0}$$

を満たす未知数とする． このとき，自明でない未知数 x_1, x_2, x_3, x_4 を求めよ． また，$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$ の中で 1 次独立なベクトルの組をひとつ示せ． ただし，$\boldsymbol{0}$ は 3 次元のゼロベクトルである．

(山梨大 2019)　　(m20191802)

0.94 (1) 複素数 z に対する二項方程式 $z^5 = 1$ の解を全て求めよ．また，$z \neq 1$ の解の一つを ω として，1 以外の全ての解を ω を用いて表し，1 を含む全ての解を複素平面上に図示せよ．

(2) 複素数 z に対する二項方程式 $z^5 = 5$ の全ての解を，前問 (1) の ω を用いて表せ．

(3) 複素数 α をそれ自身に変換する写像を ε，α を $\omega\alpha$ に変換する写像を σ とするとき，合成写像 σ^2, σ^3, σ^4 によって，α はどのように変換されるか答えよ．

(4) 前問 (3) の写像 σ の合成写像 σ^{n+4} $(n = 1, 2, 3, 4, 5)$ により α を変換せよ．

(山梨大 2019)　　(m20191803)

0.95 40 名のクラスについて，選択科目 A, B, C の履修状況は以下のとおりである．

· 科目 A, B, C のそれぞれの履修者は 18 名である．

· 少なくとも科目 A と B を履修している学生は 9 名である．

· 少なくとも科目 A と C を履修している学生は 8 名である．

· 少なくとも科目 B と C を履修している学生は 5 名である．

·1 科目以上を履修している学生は 35 名である．

右のベン図における領域のうち，以下の (a)〜(e) に該当する人数を求めなさい．

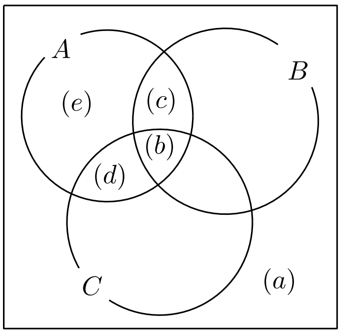
(a) 1 科目も履修していない学生

(b) 3 科目履修している学生

(c) 2 科目 A と B のみを履修している学生

(d) 2 科目 A と C のみを履修している学生

(e) 1 科目 A のみを履修している学生



(山梨大 2019)　　(m20191804)

0.96 (1) 正四面体のサイコロとは，正四面体の 4 頂点に 1〜4 の数値が割り当てられており，上の頂点の数値を出目とするサイコロである．出目を確率変数 X とすると，その確率分布表は以下のとおりである．

X	1	2	3	4
$p(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

さて，2 個の正四面体サイコロを振り，2 つの出目の和を Y とする．まず，確率変数 Y について確率分布表を求めなさい．そして，Y の期待値を求めなさい．

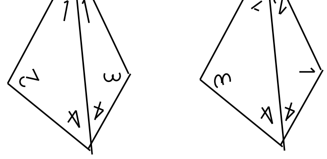


図 正四面体のサイコロ
（左のサイコロの出目は 1 で，
右の出目は 2 である）

(2) n 人がいるとき，少なくとも 2 人の誕生日が同じ月日である確率を求めなさい．
ただし，$1 < n < 365$ とし，うるう年は考えないこととする．

(山梨大 2019)　　(m20191805)

0.97 推移律の成立とは，集合の任意の要素，A, B, C に対し関係 (A, B) と関係 (B, C) がともに真ならば，関係 (A, C) が真になることである．

例えば，「集合:整数，関係 (A, B):A は B より小さい」において，推移律は成立する．

次の集合，関係について推移律が成立するかどうか，具体例をあげて述べよ．

(1) 「集合:整数，関係 (A, B):A は B より 10 以上大きい」

(2) 「集合:整数，関係 (A, B):A と B の差の絶対値は 1 である」

(3) 「集合:3 次元空間，関係 (A, B):A は B と原点を結ぶ直線上にある」

(4) 「集合:3 次元空間，関係 (A, B):A と B との距離が 1 未満である」

(山梨大 2019)　　(m20191806)

0.98 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ -4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ について次の問いに答えよ．

(1) 行列 A が逆行列を持たないことを示せ．

(2) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(山梨大 2019)　　(m20191807)

0.99 互いに独立な確率変数 X と確率変数 Y が区間 (0, 1) で一様連続分布に従う．確率変数 Z がこれらの和 $Z = X + Y$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1) Z の値 z が 1 より小さいとき，確率密度関数は $p(z) = z$ であることを示せ．

(2) Z の値 z が 1 より大きいとき，確率密度関数は $p(z) = 2 - z$ であることを示せ．

(3) Z の平均値，分散を求めよ．

(山梨大 2019)　　(m20191808)

0.100 閉区間 $[0, 1]$ で定義された連続関数 $f(x)$ が開区間 $(0, 1)$ で 2 回微分可能で，次の 2 つの条件

(i) $f(0) = f(1) = 0$

(ii) すべての $0 < x < 1$ に対して

$$(1 - x)f'(x) = 1 - x - 2x \int_1^x \frac{f(t)}{t^3} dt - \frac{f(x)}{x}$$

を満たしているとする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $f''(x)$ を x の有理式で表せ．

(2) $f(x)$ を求めよ．

(信州大 2019)　　(m20191901)

0.101 不定積分 $\displaystyle\int x^3 e^{x^2} dx$ を求めよ．

(信州大 2019) (m20191902)

0.102 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)^2 e^{(x-2y)^2} dxdy$ の値を求めよ．ただし，$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x+y \leqq x-2y \leqq 1\}$ とする．

(信州大 2019) (m20191903)

0.103 k を実定数とするとき，x, y, z を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x - y + k^2 z = k \end{cases}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 解をもたないような k の値を求めよ．

(2) 解を無数にもつような k の値と，そのときの一般解を求めよ．

(3) 解をただ一つもつための k の条件と，そのときの解を求めよ．

(信州大 2019) (m20191904)

0.104 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & p+2 & p \\ 0 & p & p+2 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，p は実数とする．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A が対角化できないような p の値を求めよ．

(信州大 2019) (m20191905)

0.105 $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数とする．$f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは，次の主張が成り立つ事として定義される．

P ： 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して，$|x - a| < \delta$ となる任意の x に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ である．

以下の問いに答えよ．

(1) 命題 P の否定を書け．

(2) $f(x)$ を次で定義する．

$$f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x}\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

(1) の答えにもとづいて，$f(x)$ は $x = 0$ で連続ではないことを証明せよ．

(信州大 2019) (m20191906)

0.106 $f(x) = x^x$ $(x > 0)$ の微分 $f'(x)$ を求めよ．

(信州大 2019) (m20191907)

0.107 積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2 + 2xy - 4y^2) dxdy$$

を求めよ．

(信州大 2019) (m20191908)

0.108 $g(x) = x^2 \sin x$ の $x = 0$ の周りのテイラー展開を求めよ．

(信州大 2019)　　(m20191909)

0.109 自然数 n に対し n 次正方行列 $A_n = (a_{ij})$ および $B_n = (b_{ij})$ を次のように定める．

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & (i = j > 1) \\ 1 & (\text{その他}) \end{cases} \qquad b_{ij} = \begin{cases} 0 & (i = j) \\ 1 & (\text{その他}) \end{cases}$$

(1) A_4, B_4 の行列式 $|A_4|$, $|B_4|$ を求めよ．

(2) A_n の行列式 $|A_n|$ を求めよ．

(3) B_n の行列式 $|B_n|$ を求めよ．

(信州大 2019)　　(m20191910)

0.110 n を自然数とする．すべての成分が 1 であるような n 次元列ベクトルを $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ とする．A, B, C を実数成分の n 次正方行列とする．

(1) 行列 A が逆行列を持つとする．このとき，$A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ が存在することを証明せよ．

(2) $B\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ がただ一つだけ存在するとする．このとき B は逆行列を持つことを証明せよ．

(3) $C\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ および ${}^t C\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ が存在するとする．ここで，${}^t C$ は C の転置行列である．このとき $\boldsymbol{v}$ および $\boldsymbol{w}$ の成分の和が一致すること，すなわち $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} w_i$ であること，を証明せよ．

(信州大 2019)　　(m20191911)

0.111 $f(x) = \sin x$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を $x = 0$ の周りでテイラー展開せよ．解答は x の 5 次の項まで示せ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - f(x)}{x^3}$ を求めよ．

(新潟大 2019)　　(m20192001)

0.112 不定積分 $\displaystyle\int \sin^2 x \cos x dx$ を求めよ（積分定数は C とせよ）．

(新潟大 2019)　　(m20192002)

0.113 微分方程式 $x^2 \dfrac{dy}{dx} + y = 0$ を解け．ただし，$x = 2$ のとき，$y = 1$ とする．

(新潟大 2019)　　(m20192003)

0.114 行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値を全て求めよ．

(2) (1) で求めた各固有値に対応する，長さが 1 の固有ベクトルを求めよ．

(3) 行列 A を対角化せよ．

(新潟大 2019)　　(m20192004)

0.115 $D = \left\{(x, y)\ :\ x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq x \leq y\right\}$ のとき，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D 2y\, dxdy$$

(新潟大 2019)　　(m20192005)

0.116 次の連立方程式を解け．ただし，a, b は定数とする．

$$\begin{cases} 2x + y + az = b \\ x \qquad + 2z = 1 \\ x - y + 3z = 1 \end{cases}$$

(新潟大 2019)　　(m20192006)

0.117 $\dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ の整数部分を a，小数部分を b とする．a と b の値を求めよ．

(新潟大 2019)　　(m20192007)

0.118 次の方程式を解け．　$(\log_3 x)^4 - (\log_3 x)\left(\log_3 x^3\right) + \log_3 x^2 = 0$

(新潟大 2019)　　(m20192008)

0.119 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け．　$\sqrt{2}\sin 2x - \sqrt{2}\sin x - 2\cos x + 1 < 0$

(新潟大 2019)　　(m20192009)

0.120 4 種類の数字 0，1，2，3 を用いて表される自然数を，次のようにカードに書いて用意する．

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$ $\cdots\cdots$ $\boxed{1210}$

つまり，小さい数から順番に 1 つずつ 1 枚のカードに書いて，$\boxed{1}$ から $\boxed{1210}$ まで用意する．これらの中から 1 枚のカードを取り出すとき，そのカードに書かれた数が 3 の倍数である確率を求めよ．

(新潟大 2019)　　(m20192010)

0.121 三角形 ABC と点 P が $3\overrightarrow{PA} + 4\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{c}$ とおく．このとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ を用いて表せ．

(2) 点 P が三角形 ABC の内部にあることを示せ．

(3) 面積の比 $\triangle PAB\ :\ \triangle PBC\ :\ \triangle PCA$ を求めよ．

(新潟大 2019)　　(m20192011)

0.122 次の条件によって定められる数列 $\{x_n\}$ がある．

$$x_1 = 1,\ x_2 = 4,\ x_{n+2} = (p+3)x_{n+1} - 3px_n$$

次の問いに答えよ．ただし p は実数である．

(1) 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = x_{n+1} - px_n$ により定める．数列 $\{a_n\}$ の一般項を p を用いて表せ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = x_{n+1} - 3x_n$ により定める．数列 $\{b_n\}$ の一般項を p を用いて表せ．

(3) $p \neq 3$ のとき，数列 $\{x_n\}$ の一般項を p を用いて表せ．

(4) $p = 3$ のとき，数列 $\{c_n\}$ を $c_n = \dfrac{x_n}{3^n}$ により定める．このとき数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(新潟大 2019)　　(m20192012)

0.123 関数 $f(x) = (x+3)\sqrt{-x^2-2x+3}$ $(-3 \leqq x \leqq 1)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の最大値を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to-3+0} f'(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to1-0} f'(x)$ を求めよ．

(新潟大 2019)　　(m20192013)

0.124 整数 $n \geqq 0$ に対して，$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ とする．次の各問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して $I_{2n-1} = \dfrac{(2^n \cdot n!)^2}{2n \cdot (2n)!}$，$I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2} \cdot \dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{\sqrt{n} \cdot (2n)!}$ を求めよ．

(新潟大 2019)　　(m20192014)

0.125 4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

について，次の各問いに答えよ．

(1) A の行列式の値を求めよ．

(2) A の固有値をすべて求めよ．

(3) A の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ．

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P と P^{-1} を求め，A を対角化せよ．

(新潟大 2019)　　(m20192015)

0.126 $0 \leqq x \leqq 2\pi$, $0 \leqq y \leqq 2\pi$ における実数値関数 $f(x,y) = \sin^2 x - 3\sin(x+y)$ の最大値と最小値を求めよ．また，その時の (x,y) のすべての組を求めよ．

(新潟大 2019)　　(m20192016)

0.127 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の平面 L を次のように定める．

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - y = 0 \right\}$$

線形変換 $f; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^3$ から平面 L への射影とする．すなわち，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ について，$f(\boldsymbol{x})$ は平面 L 上にあり，$\boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x})$ は平面 L に垂直なベクトルとなる．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して，$f(\boldsymbol{e}_1)$，$f(\boldsymbol{e}_2)$，$f(\boldsymbol{e}_3)$ を求めよ．

(2) $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ を満たす行列 A を求めよ．

(3) f の像空間 $\mathrm{Im}(f) = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\}$ の基底を一組求めよ.

(4) f の核空間 $\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = 0\}$ の基底を一組求めよ.

(新潟大 2019)　　(m20192017)

0.128 a, b を実数とし，3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & b \\ 3 & 3a & 3 \end{pmatrix}$ を考える.

rank A は A の階数を表す．下の問いに答えなさい.

(1) 行列式 $|A|$ の値を a, b を用いて表しなさい.

(2) 行列 A が正則になる条件を a, b を用いて表しなさい.

(3) $\mathrm{rank}\, A = 1$ となるとき，a, b を求めなさい.

(長岡技科大 2019)　　(m20192101)

0.129 実数 t の実数値関数 $x = x(t),\ y = y(t)$ に関する連立微分方程式

$$(*) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= \ 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} &= \ x + 3y \end{cases}$$

を考える．下の問いに答えなさい.

(1) $z = x + y,\ w = x - y$ とおいて，$(*)$ を z, w についての連立微分方程式に書き換えなさい.

(2) 前問 (1) で得られた連立微分方程式の一般解を求めなさい.

(3) $(*)$ の一般解を求めなさい.

(長岡技科大 2019)　　(m20192102)

0.130 x, y を実数とし，2 変数関数 $f(x, y)$ を累次積分

$$f(x, y) = \int_y^{y+1} \int_x^{x+1} (3u^2 + 3v^2)\, du dv$$

で定義する．下に問いに答えなさい.

(1) $f(x, y)$ を求め，x, y で表しなさい.

(2) $f(x, y)$ の x, y についての偏導関数 $f_x,\ f_y$ および第 2 次偏導関数 $f_{xx},\ f_{xy},\ f_{yy}$ を求めなさい.

(3) $f(x, y)$ の極値を求めなさい.

(長岡技科大 2019)　　(m20192103)

0.131 n 人がじゃんけんをする．各人ともそれぞれ独立に，グー，チョキ，パーを等しい確率で出すものとする．あいこ（勝敗がつかない場合）になる確率を p_n とする．　下の問いに答えなさい.

(1) p_2 を求めなさい.　　(2) p_3 を求めなさい.　　(3) p_n を求めなさい.

(長岡技科大 2019)　　(m20192104)

0.132 行列 A は

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を満たしている．次の問いに答えよ.

(1) 行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対して，行列式 $\det P$ および逆行列 P^{-1} を求めよ．

(2) 行列 A を求めよ．

(3) E を 4 次の単位行列とするとき，

$$(A^2 - E)^2(A^2 - 4E) + A^2 + A = aA^2 + bA + cE$$

を満たす実数の組 (a, b, c) を 1 つ求めよ．

(金沢大 2019)　　(m20192201)

0.133　被積分関数に自然対数を含んでいる定積分

$$I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx$$

の値が $0.18 < I < 0.28$ となることを確かめる．次の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，不等式

$$\frac{\log(1+x)}{1+x^2} \geqq \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)(1-x^2)$$

が成り立つことを示し，これを用いて $I \geqq \dfrac{11}{60}$ であることを導け．

(2) 2 つの等式

$$1 + \tan\theta = \frac{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \theta)}{\cos\theta} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

および

$$\int_0^{\pi/4} \log\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right\} d\theta = \int_0^{\pi/4} \log(\cos\theta) d\theta$$

がそれぞれ成り立つことを示し，これらを用いて定積分 I を計算せよ．

(3) $\pi < 3.2$ および $\log 2 < 0.7$ であることと問題 (1)(2) の結果を合わせて，$0.18 < I < 0.28$ であることを確かめよ．

(金沢大 2019)　　(m20192202)

0.134　正接関数 $\tan x$ の逆関数を $\tan^{-1} x$ とし，$x \neq 0$ となる (x, y) に対して関数 $f(x,y) = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ を定める．次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数を計算して，$f_y(x,y) - f_x(x,y)$ と $f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)$ を求めよ．

(2) $0 < a < 1$ に対し

$$D_a = \left\{(x,y) \;\middle|\; a^2 \leqq x^2 + y^2,\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x\right\}$$

とするとき，重積分

$$I_a = \iint_{D_a} \{f_y(x,y) - f_x(x,y)\}\, dxdy$$

を計算し，極限値 $\displaystyle\lim_{a \to +0} I_a$ を求めよ．

(金沢大 2019)　　(m20192203)

0.135 行列

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -13 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) A のすべての固有値，および各固有値に対する固有空間を求めよ．

(2) 3 次の正則行列 P で，$P^{-1}AP$ が対角行列となるものは存在しないことを示せ．

(金沢大 2019)　　(m20192204)

0.136 k を実数とする．行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k-7 \\ 0 & -1 & 1 & 3k \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) B の階数 (rank$B$) を求めよ．

(2) 次の連立一次方程式が解をもつような k の値と，その k に対する連立一次方程式の解をすべて求めよ．

$$\begin{cases} x+y+\ z &= \ k-7 \\ \ \ -y+\ z &= \ 3k \\ 2x+y+3z &= \ 1 \end{cases}$$

(3) B による $\boldsymbol{R}^4$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像

$$f\ :\ \boldsymbol{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

を考える．f の核 (Ker f) の次元と 1 組の基底，f の像 (Im f) の次元と 1 組の基底をそれぞれ求めよ．

(金沢大 2019)　　(m20192205)

0.137 関数 $f\ :\ \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を次式で定義する．

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{x^2}{4}\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ は $x=0$ で微分可能であることを示せ．

(2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求め，$f'(x)$ が $x=0$ で連続でないことを示せ．

(3) $f(x)$ は $x=0$ のとき最小値をとり，かつ $f(x)$ が最小値をとるのは $x=0$ のときに限ることを示せ．

(金沢大 2019)　　(m20192206)

0.138 (1) $A(0,\sqrt{3})$，$B(-1,0)$，$C(1,0)$ を座標平面上の 3 点とする．線分 AB，BC，CA 上にそれぞれ点 P，Q，R を，三角形 PQR における $\angle Q$ が直角になるようにとる．ただし，P，Q，R は A，B，C のいずれとも異なるとする．$Q(t,0)$，$\angle CQR = \theta$ とおくとき，直角三角形 PQR の面積 S を t と θ を用いて表せ．

(2) (1) で求めた S を，集合

$$D = \left\{ (t,\ \theta) \in \boldsymbol{R}^2 \ \middle|\ -1 < t < 1,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}$$

を定義域とする関数と考える．このとき，$\dfrac{\partial S}{\partial t} = \dfrac{\partial S}{\partial \theta} = 0$ を満たす $(t,\ \theta)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた $(t,\ \theta)$ において，関数 S が極値をとるかどうか調べよ．

(金沢大 2019)　　(m20192207)

0.139 次の問いに答えよ．

(1) 実数 α に対し，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ が存在するような α の値の範囲を求めよ．

(2) $L > 1$ に対し，集合 D_L を

$$D_L = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \ \middle|\ 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq L^2 \right\}$$

と定める．実数 β に対し，極限値

$$\lim_{L \to \infty} \iint_{D_L} \frac{dxdy}{1 + (x^2 + y^2)^{\frac{\beta}{2}}}$$

が存在するような β の値の範囲を求めよ．

(金沢大 2019)　　(m20192208)

0.140 次の計算をせよ．ただし，計算の概略も示すこと．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(xe^{\sin x}\right)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\left(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x\right)$

(富山大 2019)　　(m20192301)

0.141 次の計算をせよ．ただし，計算の概略も示すこと．

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 1}$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 1}}$

(富山大 2019)　　(m20192302)

0.142 次の各問いに答えよ．ただし，$\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ はそれぞれ x, y, z の各軸方向の単位ベクトルとする．

(1) ベクトル場 $\overrightarrow{A}(x, y, z) = (xyz)\overrightarrow{i} + (-y^2z^3)\overrightarrow{j} + (2x^2y)\overrightarrow{k}$ に対して $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\overrightarrow{A})$ を求めよ．

(2) スカラー場 $\phi(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$　　(ただし，$x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$) に対して，

(a) $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ を計算せよ．

(b) $\mathrm{grad}\ \phi$ を求めよ．

(c) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\ \phi) = 0$ を示せ．

(富山大 2019)　　(m20192303)

0.143 (1) 正方行列 A, P, D の間に $AP = PD$ の関係があるとき，A^n を P, P^{-1}, D および n を用いて表せ．ただし n は自然数である．また，P は正則行列であるとする．

(2) 次の行列 B は相異なる 3 つの実数の固有値を持つ．これらの固有値および対応する固有ベクトルを求めよ．

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(3) (2) の行列 B において，固有値 λ_1, λ_2, λ_3 の各々に対応する任意の固有ベクトルを

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} q_{1,1} \\ q_{2,1} \\ q_{3,1} \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} q_{1,2} \\ q_{2,2} \\ q_{3,2} \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{x_3} = \begin{pmatrix} q_{1,3} \\ q_{2,3} \\ q_{3,3} \end{pmatrix}$$

とし，行列 Q を

$$Q = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix}$$

としたとき

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

となる．この性質を利用し，(1)，(2) の結果をもとに B^n を求めよ．

(富山大 2019)　　(m20192304)

0.144 2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ が次の様に定義され，

$$f(x) = \int_0^x e^t(\sin t + \cos t)dt$$

$$g(x) = \int_0^x e^t(\cos t - \sin t)dt$$

また，$f^{(n)}(x)$，$g^{(n)}(x)$ を，それぞれ，$f(x)$，$g(x)$ の n 次導関数とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ．

(2) $f^{(1)}(x)$ と $g^{(1)}(x)$ を求めよ．

(3) $f^{(2)}(x)$ と $g^{(2)}(x)$，および，$f^{(3)}(x)$ と $g^{(3)}(x)$ を求めよ．

(4) $n \geqq 2$ として，$f^{(n)}(x)$ と $g^{(n)}(x)$ それぞれを $f^{(n-1)}(x)$ および $g^{(n-1)}(x)$ を用いた漸化式で表せ．

(富山大 2019)　　(m20192305)

0.145 以下の連立微分方程式に関する次の各問いに答えよ．ただし，$x > 0$ とする．

$$\frac{du_1(x)}{dx} = \frac{1}{x}u_2(x)$$

$$\frac{du_2(x)}{dx} = \frac{1}{x}u_1(x)$$

(1) $\{u_1(x)\}^2 - \{u_2(x)\}^2 = c_1$(定数) であることを示せ．

(2) $\dfrac{u_1(x) + u_2(x)}{x} = c_2$(定数) であることを示せ．

(3) $u_1(x)$，$u_2(x)$ の一般解を (1) と (2) における c_1 と c_2 を用いて表せ．ただし，$c_2 \neq 0$ とする．

(富山大 2019)　　(m20192306)

0.146 関数 $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) 曲面 $z = f(x, y)$ 上の点 $(1, 2, 9)$ における接平面の方程式を求めよ．

(3) $x(t)$, $y(t)$ はともに t について微分可能な関数で $\left(\dfrac{df}{dt}\right)_{t=0} = 0$ をみたしており，

さらに $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{t=0} > 0$ とする．$t = 0$ のとき，

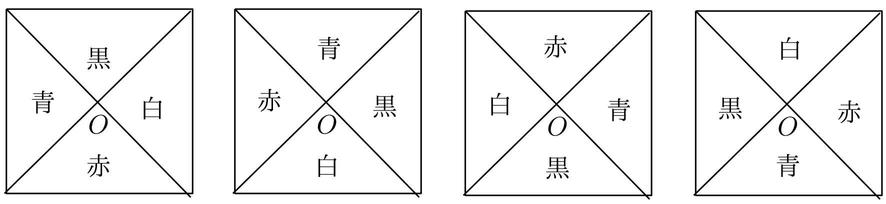
単位ベクトル $\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}} \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}$ を求めよ．

(豊橋技科大 2019)　　(m20192701)

0.147 (1) ある平面上に正方形があり，その対角線の交点を O とする．対角線によりこの正方形を 4 等分してできる 4 つの直角二等辺三角形を塗装する．辺を共有する隣り合う三角形が異なる色となるように塗装することを考える．ただし，この平面上で点 O を中心に，この正方形を回転させると一致する塗装の仕方は同じものと考える．たとえば，下図で示されている 4 つの塗装は同一の塗装の仕方である．

ア．黒，白，赤，青，黄の 5 色から 2 色を選択し，塗装する方法は何通りかを求めよ．

イ．黒，白，赤，青，黄の 5 色から 3 色を選択し，その 3 色全てを使用して塗装する方法は何通りかを求めよ．



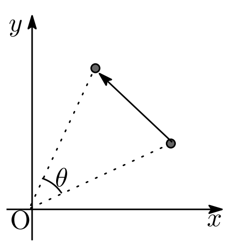
(2) 2 つのサイコロを同時に投げ，出た目の和が奇数とんる事象を事象 A，1 の目が少なくとも 1 つ出る事象を事象 B とするとき，確率 $P(A \cap B)$ を求めよ．

(3) 白玉 3 個，赤玉 4 個が入った袋の中から玉を 1 つずつ取り出し，取り出した順に左から右へ一列に並べる．　ただし，一度取り出した玉は袋に戻さないものとする．7 個全ての玉を順に取り出し並べるとき，白玉が隣り合わない様な並び方となる確率を求めよ．

(豊橋技科大 2019)　　(m20192702)

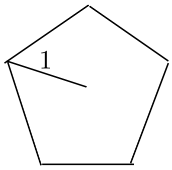
0.148 xy 平面上において，原点 O を中心に反時計回りに θ の回転を行う一次変換は下図の行列 A_θ で表される．この行列を利用して三角関数の計算を行うとともに，図形の面積の値を求めたい．以下の問いに答えよ．

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



(1) ${A_\theta}^2$, ${A_\theta}^3$ を計算し，$\cos\theta$, $\sin\theta$ で表せ．また，$A_{n\theta} = (A_\theta)^n$ であることを利用して $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$, $\cos 3\theta$, $\sin 3\theta$ を $\cos\theta$, $\sin\theta$ で表せ．

(2) $\sin\dfrac{2\pi}{5}$ の値を α とおく．半径 1 の円に内接する正五角形の面積を α を用いて表せ．



(3) (1) の結果を用いて $\sin \dfrac{\pi}{10}$, $\cos \dfrac{\pi}{10}$ の値をそれぞれ求めよ.

(4) 半径 1 の円に内接する正五角形の面積の値を求めよ.

(豊橋技科大 2019) (m20192703)

0.149 関数 $y = \sin x \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と $y = \cos x \ (0 \leqq x \leqq \pi)$ に対して，その逆関数をそれぞれ $\mathrm{Sin}^{-1}x$, $\mathrm{Cos}^{-1}x$ と書く．そのとき次の方程式を解け.

$$\mathrm{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{15}}{4} + \mathrm{Cos}^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3} = \mathrm{Cos}^{-1}x$$

(名古屋工業大 2019) (m20192901)

0.150 次の関数の不定積分を求めよ. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2}{2x^3 - x^2 + 2x - 1}$

(名古屋工業大 2019) (m20192902)

0.151 次の関数の極値を求めよ.

$$f(x, y) = x^3 - 3xy - y^2 - y + 1$$

(名古屋工業大 2019) (m20192903)

0.152 次の行列 A の列を左から $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_5$ とする.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 4 & -4 & -15 \\ -1 & -2 & -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_5$ から一次独立なものを取り出すとき，その最大個数 r を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_5$ から r 個の一次独立なものを, 前の方から順に取り出せ.

(3) (2) で選ばなかったものを，(2) で選んだものの一次結合で表せ.

(名古屋工業大 2019) (m20192904)

0.153 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) A を対角化せよ.

(2) 自然数 n に対して，A^n を求めよ.

(名古屋工業大 2019) (m20192905)

0.154 a, b, c を定数とし，3 次正方行列 A を次で定める.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ．さらに A の固有値の異なる値の個数が 2 個になるための a, b, c の条件を求めよ．

(2) A の一次独立な 3 つの固有ベクトルを求めよ．

(奈良女子大 2019)　　(m20193201)

0.155 r を $|r| < \dfrac{1}{2}$ をみたす実数とする．実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ が，任意の自然数 n に対し以下の関係式をみたすとする．

$$a_{n+1} = r(b_n + c_n), \quad b_{n+1} = r(c_n + a_n), \quad c_{n+1} = r(a_n + b_n)$$

以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n + c_n) = 0$ となることを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) = 0$ となることを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となることを示せ．

(奈良女子大 2019)　　(m20193202)

0.156 n を自然数，a を実数とし　$I_n = \displaystyle\int_0^a \frac{dx}{(x^2+1)^n}$　とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 次の等式を示せ．　$I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^a x\frac{2x}{(x^2+1)^{n+1}}dx$

(2) 次の等式を示せ．　$I_{n+1} = \dfrac{1}{2n}\left\{\dfrac{a}{(a^2+1)^n} + (2n-1)I_n\right\}$

(3) 次の積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

(奈良女子大 2019)　　(m20193203)

0.157 関数 $f(x) = \cos^{-1}(x^3)$ を微分せよ．

(奈良女子大 2019)　　(m20193204)

0.158 関数 $f(x) = \log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$　$(-1 < x < 1)$ を $x = 0$ の近傍でテイラー展開し，x の 3 乗の項まで求めよ．

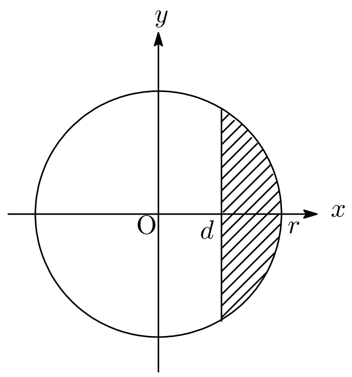
(奈良女子大 2019)　　(m20193205)

0.159 関数 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ について，一次偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$，および二次偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ を求めよ．

(奈良女子大 2019)　　(m20193206)

0.160 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\{ax+b(1-x)\}^2}$ を求めよ．ただし，$a \neq b$ とする．

(2) 下図のように，半径 r の球を中心から d 離れた平面で切り取るとき，斜線の凸レンズ状部分の体積を求めよ．



(奈良女子大 2019)　　(m20193207)

0.161　t の関数 $I(t)$ に関する以下の微分方程式を考える．

$$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = V(t)$$

ただし，L, R は正の定数である．以下の問いに答えよ．

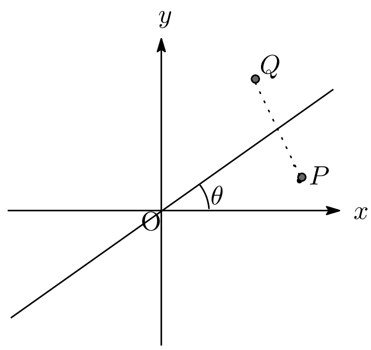
(1) $V(t) = 0$ のとき，一般解 $I(t)$ を求めよ．

(2) $V(t) = V_0$（定数）のとき，$I(t) = C(t)e^{-\frac{R}{L}t}$ とおいて微分方程式を解き，一般解 $I(t)$ を求めよ．

(3) $V(t) = V_0$（定数）のとき，初期条件 $I(0) = 0$ を満たす特解 $I(t)$ を求めよ．また，$I(t)$ の概形を図示せよ．

(奈良女子大 2019)　　(m20193208)

0.162　下図のように，点 P を直線 $y = (\tan\theta)x$ に関して対称な点 Q に移す変換行列を求めよ．



(奈良女子大 2019)　　(m20193209)

0.163　行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(奈良女子大 2019)　　(m20193210)

0.164　次の行列の逆行列を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(京都大 2019)　　(m20193301)

0.165 x_1〜x_3 を変数とする次の連立方程式を解け．

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(京都大 2019)　　(m20193302)

0.166 次の行列の行列式を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 & 3 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -8 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ （n 次の正方行列，ただし n は 2 以上の自然数）

(京都大 2019)　　(m20193303)

0.167 次の (1)〜(6) に答えよ．ただし，log は自然対数を表す．

(1) k を自然数とし，$f(x)$ を $k \leq x \leq k+1$ で連続な狭義単調減少関数とする．このとき，不等式

$$\int_k^{k+1} f(x)dx < f(k)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n = 1, 2, \cdots$ に対して，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ とおく．$S_n > \log(n+1)$ が成り立つことを示せ．

(3) (2) で定義した S_n に対し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

(4) $x > 1$ において関数 $g(x) = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は狭義単調減少であることを示せ．

(5) k を 3 以上の自然数とする．(4) で定義した関数 $g(x)$ に対し，不等式

$$g(k) < \frac{1}{\log(k-1)} - \frac{1}{\log k}$$

が成り立つことを示せ．

(6) $n = 2, 3, \cdots$ に対して，$T_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\log k)^2}$ とおく．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n$ が存在することを示せ．

(京都大 2019)　　(m20193304)

0.168 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ によって定まる $\boldsymbol{R}^4$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像を T とおく．すなわち，$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ である．ただし，$\boldsymbol{R}^n$ は n 次元実ベクトル空間を表す．(1)〜(4) に答えよ．

(1) 像 $T(\boldsymbol{R}^4)$ の次元を求めよ．

(2) 像 $T(\boldsymbol{R}^4)$ の基底を 1 組作れ．

(3) $\mathrm{Ker}(T)$ の次元を求めよ．ただし，$\mathrm{Ker}(T)$ は $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間であり，次のように定められる．

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4 \;\middle|\; T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \right\}$$

(4) $\mathrm{Ker}(T)$ の基底を 1 組作れ．

(京都大 2019)　　(m20193305)

0.169 (1) 赤玉 2 個，白玉 2 個を入れた袋から，無作為に玉を 2 個取り出したとき，取り出した玉が同じ色である確率を求めよ．

(2) n, k を自然数とする．1 から n までの番号が書かれた玉をそれぞれ k 個ずつ，合計 nk 個の玉を入れた袋から，無作為に玉を k 個取り出したとき，取り出した k 個の玉に書かれた番号がすべて同じである確率を求めよ．

(3) (2) と同じ袋から，無作為に玉を n 個取り出したとき，取り出した n 個の玉に書かれた番号がすべて相異なる確率を求めよ．

(京都大 2019)　　(m20193306)

0.170 a, b を実数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & -1 & b \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ は固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を持つとする．

(1) a, b を求めよ．

(2) A の固有値をすべて求めよ．

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & b & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2019)　　(m20193401)

0.171 (1) 積分 $\displaystyle\int_0^T \frac{\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}}dx \quad \left(0 \leqq T < \frac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．

(2) a を正の実数とする．広義積分 $\displaystyle\int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\sin x}}{(1-\sin x)^a}dx$ が収束するような a の範囲．および a がその範囲にあるときの，この広義積分を求めよ．

(京都工芸繊維大 2019)　　(m20193402)

0.172 関数 $z = f(x, y)$ は C^2 級であるとする．x, y が別の 2 変数 s, t の関数であり，

$$x = 2\cos s + 3\sin t\,, \qquad y = 4\sin s + 5\cos t$$

と表されているとする．$(s, t) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ のときの x, y の値をそれぞれ p, q とする．ただし，関数 $f(x, y)$ が C^2 級であるとは，$f(x, y)$ の 2 階までのすべての偏導関数が存在して, それらが連続であることである．

(1) x, y の s, t に関する 1 階偏導関数をすべて求めよ．

(2) z を s, t の関数と見なしたとき，$\dfrac{\partial z}{\partial s}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ を $f_x(p, q)$ および $f_y(p, q)$ を用いて表せ．

(3) z を s, t の関数と見なしたとき，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial t \partial s}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ を $f_{xx}(p, q)$，$f_{xy}(p, q)$ および $f_{yy}(p, q)$ を用いて表せ．

(京都工芸繊維大 2019)　　(m20193403)

0.173　$x > 0$ の範囲において，関数 $y = y(x)$ に関する微分方程式

$$(*) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = \frac{8}{x^3} + \frac{13}{x^2} + 9\log x$$

を考える．

(1) $(*)$ の解のうち，定数 a, b を用いて $y = \dfrac{a}{x} + b\log x$ と書けるものを 1 つ求めよ．

(2) $(*)$ の解のうち，条件

$$y(1) = 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{dy}{dx}(1) = 0$$

を満たすものを求めよ．

(京都工芸繊維大 2019)　　(m20193404)

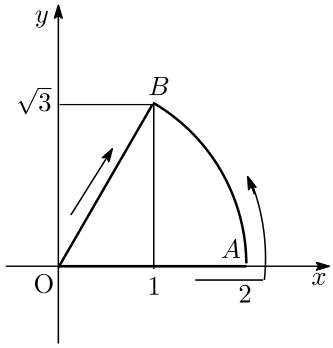
0.174　複素数 $z = x + iy$ に対して，$f(z) = \overline{z}$ で表される関数を考える．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位であり，$\overline{z}$ は z の共役複素数を表す．以下の問に答えよ．

(1) $f(z)$ は複素平面の全域で正則であるか，調べよ．

(2) 右下の複素平面図を参考にして，以下の二種類の経路で，$f(z)$ を原点 O から点 B まで積分せよ．ただし，図中において，AB は原点を中心とする半径 2 の円弧である．

(a) 原点 O から線分 OA，円弧 AB に沿って点 B に至る経路

(b) 原点 O から線分 OB に沿って点 B に至る経路



(大阪大 2019)　　(m20193501)

0.175　以下の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $(x^3 + y^3)dx + (3xy^2)dy = 0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = 8e^{3x}$

(大阪大 2019)　　(m20193502)

0.176　次式で表される xyz 座標系の 2 次曲面について以下の問いに答えよ．

$$8x^2 + 2\sqrt{3}yz + 7y^2 + 5z^2 = 8$$

(1) 与式の左辺の対称行列 A を用いて $(x\ y\ z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の形式で表せ．

(2) A のすべての固有値を重複する場合も含めて求め，それぞれに対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは互いに直交するものを示すこと．

(3) A を対角化する直交行列を一つ示し，その直交行列で対角化せよ．

(4) xyz 座標系の原点から小問 (2) で求めた各固有ベクトルの方向に X 軸，Y 軸，Z 軸をとるとき，与えられた 2 次曲面の $X-Y$, $Y-Z$, $Z-X$ の各平面による切断面をそれぞれ図示せよ．その際，切断面の輪郭線と各軸との交点の座標を記入すること．

(大阪大 2019)　　(m20193503)

0.177 (1) ある病気の検査をすると，この病気の罹患者が陽性（その病気である）と判定される確率は 2/3 である．一方，非罹患者が誤って陽性と判定される確率は 1/3 である．また，母集団に対してこの病気に罹患している割合は 1/10 とする．

(a) この母集団から無作為に選ばれた A さんが，検査により陽性と判定された．このとき，A さんがこの病気に罹患している確率を求めよ．

(b) A さんが同じ検査を何度も受ける．このとき，最低何回連続して陽性と判定されると，A さんの罹患確率が 9/10 以上となるか求めよ．ただし，この検査により陽性と判定されるかどうかは，検査ごとに互いに独立であるとする．

(2) 農作物 A, B の収穫量は，その年の夏の暑さのみに依存して変動する．A の単位面積あたりの収穫量は，猛暑の場合 20 トン，平年並みの場合は 8 トン，冷夏の場合 0 トンとなる．B の単位面積あたりの収穫量は，猛暑の場合 0 トン，平年並みの場合は 10 トン，冷夏の場合 38 トンとなる．来年の夏が猛暑，平年並み，冷夏となる確率がそれぞれ 1/2, 1/4, 1/4 と予想されている．

(a) 来年の A と B の単位面積あたりの収穫量の期待値と分散をそれぞれ求めよ．

(b) 暑さに左右されず，安定した収穫量が得られるように A と B の作付面積の比を決定したい．いま，総作付面積のうち，A を作付ける割合を x，B を作付ける割合を $1-x$ とするとき，単位面積あたりの A と B をあわせた収穫量の期待値と分散を求めよ．また，分散が最も小さくなる割合 x を求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193504)

0.178 関数 $f(x)$ は区間 $(-\infty,\ \infty)$ で 2 回微分可能であるとする．関数 $g(x)$ を

$$g(x) = f(x)^2 - 2f(x) - f'(x)$$

と定める．ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である．2 変数関数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ をそれぞれ

$$u(x,y) = f(x-y)\ , \quad v(x,y) = g(x-y)$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) $f(x) = e^{-2x}$ であるとき，偏導関数

$$\frac{\partial u}{\partial x}\ , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \quad \frac{\partial u}{\partial y}$$

をそれぞれ求めよ．

(2) 2 変数関数

$$w = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{\partial u}{\partial x}$$

を v の偏導関数を用いて表せ．

(3) a を正の実数とする．$|f(0)-1| < a$ であり，すべての x について $g(x) = a^2 - 1$ であるとする．このとき

$$\lim_{y\to\infty} u(x,y)$$

を求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193505)

0.179 $\boldsymbol{x} = {}^t(x,y,z)$ に対する線形変換

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x & + & 3y & - & z \\ 2x & + & y & + & 3z \\ 3x & + & 2y & + & 4z \end{pmatrix}$$

について，以下の問に答えよ．ただし，^{t} は行列の転置を表すとする．

(1) ある行列 A を用いて，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表すことができる．この行列 A を求めよ．

(2) k を実数とし，$\boldsymbol{b} = {}^t(5, 0, k)$ とする．$\boldsymbol{x}$ についての方程式 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ が解を持つための，k についての必要十分条件を求めよ．またその条件が満たされるときの解を求めよ．

(3) $\mathbf{0} = {}^t(0, 0, 0)$ とする．$\boldsymbol{x}$ についての方程式 $f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ の解を求めよ．

(4) E を 3 次の単位行列とし，行列 B を $B = A - E$ で定める．行列 B の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193506)

0.180 外見や重さなどでは区別できない 2 枚のコイン A, B がある．コインを投げると必ず表か裏がでるものとし，コイン A を投げたときに表が出る確率は a $(0 < a < 1)$ であり，コイン B を投げたときに表が出る確率は $1 - a$ であるとする．以下の問に答えよ．

(1) 2 枚のコインを同時に投げたとき，2 枚とも表である確率を求めよ．

(2) 無作為に 1 枚のコインを選び，試しに 1 回投げてみたところ表が出た．このコインがコイン A である確率を求めよ．

(3) 無作為に 1 枚のコインを選び，試しに 1 回投げてみたところ表が出た．このコインをもう 1 回投げたとき表が出る確率を求めよ．

(4) 無作為に 1 枚のコインを選び，試しに N 回投げてみたところ表が n 回出た．このコインがコイン A である確率を求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193507)

0.181 以下 α を与えられた実数とする．1 階微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2x(t) + e^{-t}$$

の，初期条件 $x(0) = \alpha$ を満たす解を $x_\alpha(t)$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 1 階微分方程式

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2y(t)$$

の，初期条件 $y(0) = 1$ を満たす解 $y(t)$ を求めよ．

(2) $y(t)$ を (1) で求めた関数とする．関数 $C(t)$ を $C(t) = \dfrac{x_\alpha(t)}{y(t)}$ によって定めると，

$$\frac{dC(t)}{dt} = e^{-3t}\ , \qquad C(0) = \alpha$$

が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} x_\alpha(t) = \infty$ となるための α に対する必要十分条件を求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193508)

0.182 (1) 実 2 変数の実数値関数 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ に対して，複素変数 z の関数 f を

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \qquad (z = x + iy)$$

で定める．$f(0) = 0$ かつ

$$v(x, y) = ye^x \cos y + (x + 1)e^x \sin y$$

であるとき，f が複素平面上で正則となる $u(x, y)$ を求めよ．

(2) $0 < a < 1$ とする．積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1 - a\cos\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} d\theta$ の値を求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193509)

0.183 (1) 次の (1-1),(1-2) で与えられる，周期 2π の関数のフーリエ級数をそれぞれ求めよ． すなわち，$f(x)$ が連続な点で

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\}$$

が成り立つような

$$a_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$
$$b_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

をそれぞれ求めよ．

(1-1) $f(x) = \cos^2 x + \cos x$

(1-2) $f(x) = x \quad (-\pi < x \leqq \pi)\,, \quad f(x + 2\pi) = f(x)$

(2) (1) の結果を利用して，等式

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

を示せ．

(大阪大 2019) (m20193510)

0.184 以下 n を与えられた自然数とする．

(1) 変量 z のデータ $z_1, \cdots, z_n$ の平均が 1，分散が 1 であるとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {z_i}^2$ の値を求めよ．

(2) 2 つの変量 x, y のデータ $x_1, \cdots, x_n$ および $y_1, \cdots, y_n$ がある． これらのデータの平均はともに 0，分散はともに 1 であり，$\gamma = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ に対して $\gamma > 0$ が成り立つとする．

与えられた実数 α, β に対し， $d_i = \dfrac{|\alpha x_i + \beta - y_i|}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \quad (i = 1,\ \cdots,\ n)$ とおく．

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$ を α, β, γ, n で表せ．

(b) α を固定し β を変化させるときの $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$ の最小値を $m(\alpha)$ とする． $m(\alpha)$ を与える β を求めよ．

(c) α, β を変化させるときの $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$ の最小値を m とする． m を求めよ．

(大阪大 2019) (m20193511)

0.185 2 次正方行列 A を $A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$ により定める． また，E を 2 次の単位行列とする．

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ．

(2) 行列 A を対角化せよ．

(3) 一般に，B を 2 次正方行列とし，P を 2 次の正則行列とする． さらに，$C = P^{-1}BP$ とおく． このとき，$k = 1, 2, \cdots$ に対し，

$$(B + uE)^k = P(C + uE)^k P^{-1}$$

が成り立つことを示せ． ただし，u は実数とする．

(4) $k = 1, 2, \cdots$ に対し，$(A + 7E)^k (A + 2E)^3$ を計算せよ．

(大阪府立大 2019) (m20193601)

0.186 次の微分方程式を解け.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x+y+1}{2x+2y-1}$ (2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = \cos x$

(大阪府立大 2019) (m20193602)

0.187 留数を用いて，次の定積分の値を求めよ. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-3\sin\theta}d\theta$

(大阪府立大 2019) (m20193603)

0.188 周期 2π の関数 $f(x) = x \quad (-\pi < x \leq \pi)$ のフーリエ級数を求めよ.

(大阪府立大 2019) (m20193604)

0.189 ℓ, m, n を自然数として，次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{\ell\to\infty}\left(1-\frac{1}{\ell}\right)^{2\ell}$

(2) x が有理数であるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty}\{\cos(m!\pi x)\}^{2n}\right]$

(3) x が無理数であるとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}\{\cos(m!\pi x)\}^{2n}\right]$

(大阪府立大 2019) (m20193605)

0.190 次の関数の極大値，極小値が存在するならばその値を求め，存在しないなら，存在しないことを示せ.

(1) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$

(2) $g(x,y) = x^2 + xy + ay^2 - 4x - 2y$ （ただし，a は実数で $a \neq 1/4$ ）

(大阪府立大 2019) (m20193606)

0.191 3 次元空間内の単位球を B とおく．すなわち，

$$B = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 \leqq 1\right\}$$

とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ とおく．この変数変換のヤコビ行列式を計算せよ.

(2) 定積分

$$\iiint_B (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}dxdydz$$

の値を求めよ.

(大阪府立大 2019) (m20193607)

0.192 $A = (\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3)$ と $B = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3) = (\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,\ 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_3)$ は 3 次正方行列
（$\boldsymbol{a}_j,\ \boldsymbol{b}_j$ はそれぞれ行列 $A,\ B$ の第 j 列，$\boldsymbol{e}_j$ は 3 次単位行列の第 j 列 ）とし，
写像 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と定める.

(1) $\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3\}$ は 1 次独立であることを示せ.

(2) $f(\boldsymbol{b}_1),\ f(\boldsymbol{b}_2),\ f(\boldsymbol{b}_3)$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ の式として表せ.

(3) $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_2$ ならば $\{f(\boldsymbol{b}_1),\ f(\boldsymbol{b}_2),\ f(\boldsymbol{b}_3)\}$ は 1 次従属であることを示せ.

(大阪府立大 2019) (m20193608)

0.193 $\boldsymbol{R}^3$ 上の 1 次変換 f を

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 9x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 8x_3 \end{pmatrix}$$

と定め，$\boldsymbol{R}^3$ の部分空間 W_1 を $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \mid x_1 - x_3 = 0 \right\}$ とする．

(1) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ をみたす行列 A を求めよ．

(2) f の像 $\mathrm{Im}\ f = \left\{ f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \right\}$ の次元と 1 組の基底を求めよ．

(3) f の核 $\mathrm{Ker}\ f = \left\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \right\}$ の次元と 1 組の基底を求めよ．

(4) $W_2 = W_1 \cap (\mathrm{Im}\ f)$ の次元と 1 組の基底を求めよ．

(大阪府立大 2019)　　(m20193609)

0.194 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とし，内積は標準内積とする．

(1) A のすべての固有値を求めよ．

(2) 固有値 0 に対する A の固有空間の正規直交基底を求めよ．

(3) 行列 A を対角化する直交行列 P を 1 つ求め，対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ．

(大阪府立大 2019)　　(m20193610)

0.195 $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4 \in \mathbb{R}^3$ と $W_1,\ W_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ を次のように定める．

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

$$W_1 = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2 \rangle,\ \ W_2 = \langle \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4 \rangle$$

ただし，$\langle \boldsymbol{u}_i,\ \boldsymbol{u}_j \rangle$ は $\boldsymbol{u}_i,\ \boldsymbol{u}_j$ が生成する $\mathbb{R}^3$ の部分空間を表す．以下の各問に答えよ．

(1) 行列 $A = [\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2\ \ \boldsymbol{u}_3]$ の逆行列を求めよ．

(2) $W_1 \cap W_2$ の 1 組の基底と次元を求めよ．

(3) 3 次正方行列 B で，$B\boldsymbol{u}_3 = 0$，かつ，すべての $\boldsymbol{u} \in W_1$ に対して $B\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ となるものを求めよ．

(神戸大 2019)　　(m20193801)

0.196 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 5 \\ -5 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ とし，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x}),\ \ ||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

と定める．ただし，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積とする．また，$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ を A の固有値とする（ ただし $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ ）．以下の各問に答えよ．

(1) λ_1, λ_2, λ_3 と，各 $i = 1, 2, 3$ について固有値 λ_i に対する A の固有値ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ で $||\boldsymbol{u}_i|| = 1$ を満たすものを一つずつ求めよ．また，その $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ について $(\boldsymbol{u}_i,\ \boldsymbol{u}_j)$ （ただし $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$）を計算せよ．

(2) $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ を (1) で求めたベクトルとし，$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ とする．このとき，$f(c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3)$ を c_1, c_2, c_3 で表せ．

(3) $S = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; ||\boldsymbol{x}|| = 1 \right\}$ とする．S における $f(\boldsymbol{x})$ の最大値と最小値，および，それらを与える $\boldsymbol{x} \in S$ を求めよ．

(神戸大 2019)　　(m20193802)

0.197 xy 平面上の 4 点 $P = (1, 0)$, $Q = (3, 0)$, $R = (1, 2\pi)$, $S = (3, 2\pi)$ を頂点とする長方形で囲まれた（境界以上の点も含む）領域を D とする．関数 $f(x, y) = (4x - x^2)(\sin y + 2)$ を考える．以下の各問に答えよ．

(1) D の内部における $f(x, y)$ の極値を求めよ．ただし，D の内部とは D から D の境界上の点を除いた領域である．

(2) D における $f(x, y)$ の最大値と最小値を求めよ．

(神戸大 2019)　　(m20193803)

0.198 xy 平面の第 1 象限（$x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ を満たす領域）において，2 本の曲線 $xy = 1$, $xy = 9$ と 2 本の直線 $y = x$, $y = 4x$ で囲まれた領域を R とする．以下の各問に答えよ．

(1) R の概形を書け．

(2) 変数変換 $x = \dfrac{u}{v}$, $y = uv$ により R と 1 対 1 に対応する uv 平面の第 1 象限（$u \geq 0$ かつ $v \geq 0$ を満たす領域）に含まれる領域 S を求め，S の概形を書け．

(3) (2) の変数変換を用いて，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_R \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy} \right) dxdy$$

(神戸大 2019)　　(m20193804)

0.199 正の整数 n と実数 $x < 1$ に対して，$R_{n+1}(x) = \log(1 - x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$ とおく．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{R_{n+1}(x)}{x^{n+1}}$ の値を求めよ．

(2) $|x| < 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} R_{n+1}(x) = 0$ を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{R_4(x)}{\dfrac{1}{1 - x^2} - 1 - x^2}$ の値を求めよ．

(高知大 2019)　　(m20194501)

0.200 $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数 $f(x, y)$ が与えられているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 1 変数関数 $a(t)$ を用いて $f(x, y) = a(y - \sin x)$ と表されるとする．このとき，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ求め，

$$\frac{\partial f}{\partial x} + (\cos x)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

が成り立つことを確かめよ．

(2) $u = y - \sin x,\ v = x$ とおく．この変換のもとで，$u,\ v$ の関数 $g(u,v)$ を $g(u,v) = f(x,y)$ で定義する．このとき，$\dfrac{\partial g}{\partial u}$ および $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ を $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を用いて表せ.

(3) $f(x,y)$ が $\mathbb{R}^2$ 上 $(*)$ をみたすとする．このとき，$f(x,y)$ は $y - \sin x$ のみの関数であること，つまりある 1 変数関数 $a(t)$ を用いて $f(x,y) = a(y - \sin x)$ と表されることを示せ.

(4) $f(x,y)$ が $\mathbb{R}^2$ 上 $(*)$ をみたし，かつ $f(0,y) = y^2$ がすべての実数 y について成り立つとき，$f(x,y)$ を求めよ.

(高知大 2019)　　(m20194502)

0.201 n は正の整数とする．　A は n 次実正方行列で，$A^2 = O_n$ をみたすとする．また，$\alpha = \det(A + I_n)$，$\beta = \det(A - I_n)$ とおく．ただし，O_n と I_n はそれぞれ n 次の零行列と単位行列を表すものとし，$\det(M)$ は行列 M の行列式とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $\left(\det\left(\dfrac{1}{2}A + I_n\right)\right)^2$ を α または β を用いて表せ.

(2) $\left(\det\left(I_n - \dfrac{1}{2}A\right)\right)^2$ を α または β を用いて表せ.

(3) n が奇数のとき，$\alpha \geqq \beta$ を示せ.

(高知大 2019)　　(m20194503)

0.202 3 次の正方行列 A が

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

で与えられているとし，A を $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への一次写像とみなす．このとき，次の問いに答えよ.

(1) A の階数を求めよ.

(2) A の像 $\mathrm{Image}(A)$ を求めよ.

(3) A の転置行列 ${}^tA$ の核 $\mathrm{Ker}({}^tA)$ を求めよ.

(4) $\mathrm{Ker}({}^tA)$ の元は $\mathrm{Image}(A)$ の元と $\mathbb{R}^3$ の標準内積に関して直交することを示せ.

(高知大 2019)　　(m20194504)

0.203 xy 座標平面上の点 P の移動について考える.

時刻 $t = n$（n は正の整数）における点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{p}_n = (x_n,\ y_n)$ を次の漸化式で定める.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

点 P の始点は，正の実数 s を用いて，$\boldsymbol{p}_0 = (x_0, y_0) = (1, s)$ で与えられるとする.

以下の問いに答えよ.

(1) (x_n, y_n) を n と s を用いて表せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n}$ を求めよ.

(九州大 2019)　　(m20194701)

0.204 t の関数 y に対して，$y''' = \dfrac{d^3y}{dt^3}$，$y'' = \dfrac{d^2y}{dt^2}$，$y' = \dfrac{dy}{dt}$ とおく．以下の問いに答えよ.

(1) $A,\ B$ を実定数とする．$y = A\cos t + B\sin t$ が次の微分方程式

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = \cos t \qquad \cdots (\mathrm{Q1})$$

を満たすように $A,\ B$ を定めよ．

(2) 微分方程式 (Q1) の一般解を求めよ．

(3) 次の微分方程式に対して $z = \dfrac{1}{y}$ とおいて z に関する微分方程式を導出せよ．

$$y' - \frac{1}{2}y = -y^2 \qquad \cdots (\mathrm{Q2})$$

(4) 微分方程式 (Q2) の一般解を求めよ．

(九州大 2019)　　(m20194702)

0.205 確率 $p\ (0 < p < 1)$ で表の出るコインを用いて 1 人のプレイヤーが行うゲームを考える．プレイヤーは持ち点を k (k は正の整数) としてゲームを開始し，コイントスを行って表が出れば持ち点が 1 増え，裏が出れば持ち点が 1 減る試行（ラウンドと呼ぶ）を繰り返す．持ち点が n になればプレイヤーの勝利でゲームは終了し，持ち点が 0 になればプレイヤーの敗北でゲームは終了する．ただし n は k より大きい整数とする．持ち点 k から開始して勝利する確率を P_k で表す．以下の問いに答えよ．

(1) $n = 4$ の時，p を用いて P_2 を表せ．

(2) $p = \dfrac{1}{2}$ とし，$n \geq 4$ とする. この時，$k = 2, \cdots, n-2$ に対しては $P_k = pP_{k+1} + (1-p)P_{k-1}$ が成り立つことを用いて，P_k を求めよ．

(3) $p = \dfrac{1}{3}$ とする．また，$k \geq 3$ として，$n = k+2$ とする．この時，6 ラウンド以内にプレイヤーが勝利する確率を求めよ．

(九州大 2019)　　(m20194703)

0.206 直交座標系において，x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (y^3z/3)\boldsymbol{k}$ と，xy 平面，yz 平面，zx 平面で切り取られた平面 $2x + 2y + z = 2$ が作る三角形領域 S について，以下の各問いに答えよ．

(1) $\nabla \times \boldsymbol{A}$ を求めよ．

(2) $\nabla \times \boldsymbol{A}$ の S に対する面積分を求めよ．

(3) S を囲む閉曲線 C に対して，C を構成する三つの各線分の位置ベクトルをそれぞれ x と y で表せ．

(4) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の C に沿う線積分を，三つの各線分に沿う線積分を計算して求めよ．ただし，線積分の方向は原点から見て時計回りの方向とする．

(九州大 2019)　　(m20194704)

0.207 区間 $(0, \infty)$ 上の関数　$f(x) = e^{-(\log x)^2}$　について以下の問いに答えよ．

(1) 導関数 $f'(x),\ f''(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $y = f(x)$ の増減，凹凸を調べグラフの概形を描け．

(3) 広義積分　$\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$　を求めよ．

(九州大 2019)　　(m20194705)

0.208 2次元実平面上の閉区間 D, D_+ を

$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 - 4 \leqq y^2 \leqq x^2 - 1 \;\; かつ \;\; 4 \leqq x^2 + y^2 \leqq 9\right\}$

$D_+ = D \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqq 0 \;\; かつ \;\; y \geqq 0\right\}$

とするとき，次の重積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_{D_+} xydxdy$ (2) $\displaystyle\iint_{D} xydxdy$

(九州大 2019) (m20194706)

0.209 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

について，以下の問に答えよ.

(1) A の固有値，および，それぞれの固有値に属する固有空間の基底を一組ずつ求めよ.

(2) A を直交行列により対角化せよ，すなわち，$P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求め，$P^{-1}AP$ がどのような対角行列となるかを表示せよ.

(九州大 2019) (m20194707)

0.210 3次の実正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

について，以下の問に答えよ.

(1) A のトレースが 0 のとき，A の行列式を求めよ.

(2) $BA = AB$ のとき，行列 A の固有値を求めよ.

(九州大 2019) (m20194708)

0.211 3次正方行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の固有値のうちで最小なものを λ_0 とおく.（固有値がただ一つの場合には，それを λ_0 とおく.）λ_0 に対応する固有ベクトルで，「ベクトルの長さ（大きさ）は 1」かつ「第 1 成分は負ではない」という条件をみたすものを求めよ.

(九州大 2019) (m20194709)

0.212 a を $a \neq 0$ なる実数として，4次正方行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

このとき，A の階数 (rank) を求めよ.

(九州大 2019) (m20194710)

0.213 (1) a を $a \neq 0$ なる実数とするとき，次の定積分を求めよ．ただし，逆正接関数 : $\mathrm{Arctan}\, x$ が $\dfrac{1}{x^2+1}$ の原始関数であることは既知として用いてよい． $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a}dx$

(2) 次の積分を求めよ． $\displaystyle\int_2^4 \frac{2x-1}{x^2-2x+4}$

(九州大 2019) (m20194711)

0.214 $x>0,\ y>0$ において，2 変数関数 $f(x,y)$ および $g(x,y)$ を次の式で定義する．

$$f(x,y) = \log\left(x^2+y^2\right)\ , \quad g(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{1/3}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の x に関する 2 次偏導関数 $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)$ を求めよ．

(2) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$\lim_{t \to +0} t \log t = 0$$

(3) 領域 $D = \left\{(x,y)\ \middle|\ 0 < x^2+y^2 < 1,\ 0 < y < x\right\}$ における次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D \frac{f(x,y)}{g(x,y)}dxdy$$

(九州大 2019) (m20194712)

0.215 $x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t,\ f(x,y) = x^2y + 2y$ のとき，$f(x(t), y(t))$ を t で微分せよ．

(熊本大 2019) (m20195201)

0.216 下記の行列 A の逆行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(熊本大 2019) (m20195202)

0.217 xy 平面上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を同じ平面上の点 $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ に移す写像

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) この写像の表す固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ と固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ の組を求めなさい．なお，固有ベクトルの大きさは $\sqrt{2}$ とすること．

(2) xy 平面上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ により以下のように表せる．

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$$

$\alpha,\ \beta$ を $x,\ y$ を用いて表しなさい．

(3) $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ を $\alpha,\ \beta,\ \boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ を用いて表しなさい．

(熊本大 2019)　　(m20195203)

0.218 次の各問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 複素数 $1-\sqrt{3}i$ を，複素数平面上に図示せよ．

(2) 複素数 z についての方程式 $z^2 = 1-\sqrt{3}i$ のすべての解を，$x+yi$ $(x, y$ は実数$)$ の形で求めよ．

(宮崎大 2019)　　(m20195301)

0.219 k を実数の定数とする．連立一次方程式

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -2x+3y-z=0 \\ -x+ky+z=0 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

について，次の各問いに答えよ．

(1) $(*)$ を，行列 A を用いて $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ と表したときの A を求めよ．ただし，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{0}$ はベクトルであり，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．

(2) (1) で求めた行列 A に対して，行列式 $|A|$ の値を求めよ．

(3) $(*)$ が自明解 $x=y=z=0$ 以外の解ももつような k の値を求めよ．

(4) (3) で求めた k の値に対する $(*)$ の解を，すべて求めよ．

(宮崎大 2019)　　(m20195302)

0.220 2 変数関数 $f(x,y)=x^4+y^4-4xy$ について，次の各問に答えよ．

(1) $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めよ．

(2) (1) で求めたすべての (x,y) について，極値を与える点であるか，答えよ．極値を与える点であるときは，極大値を与えるのか極小値をあたえるのかについても答えよ．

(宮崎大 2019)　　(m20195303)

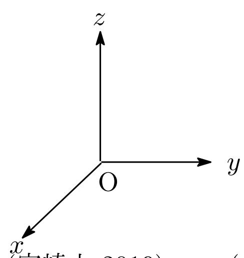
0.221 空間において，方程式 $2x+y+2z-2=0$ で表される平面を α とする．これについて，次の各問に答えよ．

(1) 平面 α を，右図のような座標空間の中に図示せよ．

(2) 平面 α，および，次の 3 つの平面

$$x=0,\ y=0,\ z=0$$

で囲まれた部分の体積を，<u>重積分を用いて</u>求めよ．



(宮崎大 2019)　　(m20195304)

0.222 (1) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+y\sin x=0$ の一般解 $y=y(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $y=a\cos x+b$ が微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+y\sin x=\sin 2x$ の特殊解となるように，定数 a，b の値を定めよ．

(3) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+y\sin x=\sin 2x$ を，$y(0)=5$ という条件の下で解け．

(宮崎大 2019)　　(m20195305)

0.223 (1) $\log(1+2x)$ をマクローリン展開せよ．ただし，剰余項および収束域は求めなくてよい．

(2) 次の極限を求めよ． $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\log(1+2x)}$

(香川大 2019) (m20195701)

0.224 $z=\sin\sqrt{x^2+y^2},\ x=\sqrt{2}\,t,\ y=1-t^2$ のとき $\dfrac{dz}{dt}$ を t を用いて表せ．

(香川大 2019) (m20195702)

0.225 $y=x^2,\ y=2x+8$ で囲まれる閉領域のうち，$x\geqq 2$ の領域の面積を求めよ．

(香川大 2019) (m20195703)

0.226 以下に示すベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ の両方と直交する単位ベクトルを求めよ．

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}2\\6\\5\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}3\\2\\4\end{bmatrix}$$

(香川大 2019) (m20195704)

0.227 以下に示す行列 $\boldsymbol{A}$ について各設問に答えよ．

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&-1\\6&-3\end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ．

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルを求めよ．

(3) 行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ．

(香川大 2019) (m20195705)

0.228 平面直交座標系 $(O-xy)$ において曲線 C を $Y=x^3-2x^2+\dfrac{3}{4}x$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 曲線 C と x 軸の交点は 3 つあるが，1 つは原点 $O(0,0)$ である．残りの 2 つの点を $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ とするとき，点 $A(x_1,y_1)$ および点 $B(x_2,y_2)$ の座標を求めよ．ただし．$x_1<x_2$ とする．

(2) 原点を通り曲線 C と接する接線は 2 本ある．この 2 本の接線を $\ell_1,\ \ell_2$ とし，接線 ℓ_1 と曲線 C の接点を $Q(x_3,y_3)$，接線 ℓ_2 と曲線 C の接点を $R(x_4,y_4)$ とする．ただし，$x_3<x_4$ とする．このとき，接線 $\ell_1,\ \ell_2$ の方程式および接点 $Q(x_3,y_3),\ R(x_4,y_4)$ の座標をそれぞれ求めよ．

(3) 接線 ℓ_1 と曲線 C の交点 $S(x_5,y_5)$ の座標を求めよ．ただし，S は接点 Q 以外の点とする．

(4) 接線 ℓ_1 上の線分 QS，接線 ℓ_2 上の線分 OR および曲線 C 上の曲線 RBS で囲まれる領域の面積を求めよ．

(島根大 2019) (m20195801)

0.229 次の 3 行 3 列の正方行列 A について，以下の設問に答えよ．

$$A=\begin{bmatrix}3&0&1\\0&-2&0\\1&0&3\end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の対角成分の和（トレース）を求めよ．

(2) $\vec{a}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ が行列 A の固有ベクトルであることを確認し，対応する固有値を求めよ．

(3) 行列 A の他の 2 つの固有ベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ ，およびそれらに対応する固有値を求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化（規格化）し，固有値の小さい方の固有ベクトルを $\vec{b}$ とすること．

(4) 行列 A の 3 つの固有値の和を求めよ．

(5) 行列 A の 3 つの固有ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ と $\vec{c}$ から 3 行 3 列の正方行列 $P = [\,\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}\,]$ を作り，その逆行列 P^{-1} を求めよ．

(6) 3 行 3 列の正方行列 $L = P^{-1}AP$ を求めよ．

(7) 行列 L のトレースを求めよ．

(8) 行列 P と行列 L を用いて，行列 A^4 を求めよ．

(9) 行列 A^5 のトレースを求めよ．

(島根大 2019)　　(m20195802)

0.230　V, U を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし，f を V から U への線形写像とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(V) = \{f(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in V\}$ は U の部分空間であることを示せ．

(2) f は単射であるとする．このとき，

(a) V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ が 1 次独立であるなら，$f(\boldsymbol{v}_1), \cdots, f(\boldsymbol{v}_k)$ も 1 次独立であることを示せ．

(b) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ が V の基底であっても $f(\boldsymbol{v}_1), \cdots, f(\boldsymbol{v}_k)$ は U の基底であるとは限らないことを示せ．

(島根大 2019)　　(m20195803)

0.231　$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) A の行列式の値を求めよ．

(2) A の階数を求めよ．

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(4) $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f を次のように定める．

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - z \\ -x - y + z \\ 3x + y - 2z \end{pmatrix}$$

(a) f は線形写像であることを示せ．

(b) $f(\mathbb{R}^3)$ の一組の基底を求めよ．

(島根大 2019)　　(m20195804)

0.232　曲線 $g(x) = e^x(2x^2 - 11x + 16)$ の増減と凹凸を調べ，グラフの概形を描け．

(島根大 2019)　　(m20195805)

0.233　(1) $f(x)$ は $(-\infty,\ +\infty)$ で定義された連続関数とする．$F(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)dt$ とおくとき，導関数 $F'(x)$ を $f(x)$ を用いて表せ．

(2) $f(x)$ は $(-\infty,\ +\infty)$ で定義された下に凸な連続関数とする．このとき，すべての $x > 0$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$2xf(0) \leqq \int_{-x}^{x} f(t)dt$$

(島根大 2019)　　(m20195806)

0.234 $f(x,y)=axy-x^3-y^3$ とする．ただし，$a>0$ である．　$f(x,y)$ の極値が 1 になるときの a の値を求めよ．

(島根大 2019)　　(m20195807)

0.235 $g(x)$ は $0<\alpha \leqq x \leqq \beta$ で連続であり，

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqq x,\ 0\leqq y,\ \alpha\leqq x+y\leqq\beta\}$$

とする．このとき，

$$\iint_D g(x+y)dxdy=\int_\alpha^\beta xg(x)dx$$

となることを証明せよ．

(島根大 2019)　　(m20195808)

0.236 点 $A(5,3,1)$ と平面 $\alpha\ :\ x+2y+2z=4$ を考える．

(1) 点 A から平面 α に下ろした垂線の足 H の座標と垂線の長さを求めなさい．

(2) 平面 α 上に点 $(0,-1,3)$ を中心とした半径 1 の円 C を描く．点 P は円 C 上の点で，線分 AP の長さが最大となるものとする．このとき点 P の座標と，線分 AP の長さを求めなさい;

(3) 3 点 A, P, H を通る平面を求めなさい．

(首都大 2019)　　(m20195901)

0.237 行列 $A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}$ につて，以下の問いに答えなさい．

(1) A のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めなさい．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P とその逆行列を求め，行列 A を対角化しなさい．

(3) A^n を求めなさい．ただし，n は任意の自然数とする．

(首都大 2019)　　(m20195902)

0.238 次の関数を微分しなさい．

(1) $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}$　　(2) $f(x)=\sin^{-1}\dfrac{x}{2}$　(ただし，$-2<x<2$)

(首都大 2019)　　(m20195903)

0.239 次の微分方程式の一般解を求めなさい．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2}$$

(首都大 2019)　　(m20195904)

0.240 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ のマクローリン展開を求めなさい．ただし，$-1<x<1$ とする．

(首都大 2019)　　(m20195905)

0.241 次の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log(\sin x)$

(首都大 2019)　　(m20195906)

0.242 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \log x dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}dx$

(首都大 2019)　　(m20195907)

0.243 次の行列 A について，下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と，その固有値に対する固有ベクトルを求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(2) 行列 A が対角化可能であるかを調べ，対角化可能であるときは行列 A を適当な正則行列で対角化せよ．なお，計算過程も記入せよ．

(3) A^n を求めよ．ここで，n は自然数とする．なお，計算過程も記入せよ．

(宇都宮大 2019)　　(m20196101)

0.244 a, b を正の実定数とするとき，微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + a^2y^2 = b^2 \tag{2-1}$$

について，下の問いに答えよ．

(1) $\alpha(\alpha \neq 0)$, β を実定数，C を積分定数とするとき，つぎの不定積分が成り立つことを示せ．

$$\int \frac{1}{\alpha x + \beta} dx = \frac{1}{\alpha} \log_e |\alpha x + \beta| + C \tag{2-2}$$

(2) 微分方程式 (2-1) の一般解を y について解け．なお，計算過程も記入せよ．

(3) 微分方程式 (2-1) を条件 $x = 0$, $y = 0$ のもとで y について解いた特殊解を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(4) (3) で求めた特殊解は，x が十分に大きいとき一定の値に近づく．この一定の値を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(宇都宮大 2019)　　(m20196102)

0.245 曲線 $y = x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ と直線 $y = x$, $x = 1$, $x = 4$ で囲まれた図形を A とする．
下の問いに答えよ

(1) 図形 A の面積を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(2) 図形 A を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(宇都宮大 2019)　　(m20196103)

0.246 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$ が成り立つことを示しなさい．ただし，$\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{O}$ はそれぞれ，2 次の単位行列および 2 次の零行列とする．

(2) $\boldsymbol{A}^6$ を求めなさい．

(3) $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めなさい．

(宇都宮大 2019)　　(m20196104)

0.247 3 次方程式 $x^3 - 2ax^2 + 3 = 0$ について，異なる実数解の個数が実数定数 a の値によってどのように変わるかを調べなさい．

(宇都宮大 2019)　　(m20196105)

0.248 x–y 平面上の曲線 $4x^2 + y^2 = 4$ に囲まれた図形を x 軸回りに回転させて得られる回転体の体積を求めなさい．

(宇都宮大 2019)　　(m20196106)

0.249 「正規分布」とはどのような分布か説明しなさい.

(宇都宮大 2019) (m20196107)

0.250 縦が $6cm$, 横が $8cm$ の長方形において, 各辺の長さを $0.1cm$ 伸ばしたときの対角線の長さの増加量の近似値を全微分を用いて求めなさい.

(宇都宮大 2019) (m20196108)

0.251 $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1+x^2}{tx(1+t^2)}$ の一般解を求めなさい.

(宇都宮大 2019) (m20196109)