0.1　以下の微分方程式の一般解を求めなさい．

(1)　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$　　　　(2)　$\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = e^{3x}$

(北海道大 2020)　　(m20200101)

0.2　次の 3 次元ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ について，以下の設問に答えよ

$$\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ p \\ 2p \end{bmatrix}$$

(1)　ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ に垂直な単位ベクトルを求めなさい．

(2)　ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ が 1 次従属になるとき，p の値を求めなさい．また，$\overrightarrow{c}$ を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ の線形結合で表しなさい．

(北海道大 2020)　　(m20200102)

0.3　次の行列 A について，以下の設問に答えなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1)　A の固有値を求めなさい．

(2)　各固有値に属する固有ベクトル（ただし大きさが 1）を求めなさい．

(北海道大 2020)　　(m20200103)

0.4　次式をマクローリン展開したとき，x の 0，1，2，n 次の項を求めなさい．

$\sqrt{e^{3x}}$

(北海道大 2020)　　(m20200104)

0.5　周期 2π の関数

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi \leqq x < \pi)$$
$$f(x+2\pi) = f(x)$$

について，次式のようにフーリェ級数展開したとき，各係数 a_0，a_n，b_n を求めなさい．

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

(北海道大 2020)　　(m20200105)

0.6　複素数 z について，以下の設問に答えなさい．ただし，$i = \sqrt{-1}$ である．

(1)　方程式 $z^3 = 27$ を解きなさい．

(2)　z が複素平面上の原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，次の 1 次変換により得られる w の軌跡を描きなさい．　$w = \dfrac{1+iz}{1+z}$

(北海道大 2020)　　(m20200106)

0.7 3 次元直交座標系 (x,y,z) において $x^2+y^2+z^2-4x-6y-2kz+14=0$ が球を表すとき，次の問いに答えなさい．ただし，k は実数とする．

(1) k の範囲を求めなさい．

(2) この球は，xy 平面と交わらないことを示しなさい．

(3) この球が，yz 平面，zx 平面 と交わり，かつ，yz 平面との切口の面積が，zx 平面との切口の面積の 2 倍となるときの k の値を求めなさい．

(岩手大 2020)　　(m20200301)

0.8 2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について 次の問に答えなさい．

(1) 次の等式を満たすことを示しなさい．

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

ただし，E は単位行列，O は零行列である．

(2) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ のとき，$A^4-5A^3+10A^2+7A+3E$ を求めなさい．

(岩手大 2020)　　(m20200302)

0.9 関数 $f(x)=e^{-x}\sin x$ について，次の問に答えなさい．

(1) $f(x)$ の第 1 次導関数と第 2 次導関数を求めなさい．

(2) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における $f(x)$ の増減表を作成し，この範囲における $f(x)$ のグラフの概形をかきなさい．また，極値と変曲点の座標も示しなさい．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めなさい．

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ を求めなさい．

(岩手大 2020)　　(m20200303)

0.10 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}-y=-2y^2$ について，次の問に答えなさい．

(1) $u=y^{-1}$ とおき，与えられた微分方程式を線形微分方程式になおしなさい．

(2) 与えられた微分方程式の一般解を求めなさい．

(3) 初期条件「 $x=0$ のとき $y=\dfrac{1}{4}$ 」を満たす特殊解を求めなさい．

(岩手大 2020)　　(m20200304)

0.11 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\cos x dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2+x}}dx$　　ただし，$t=\sqrt{x^2+x}-x$ と置換して求めよ．

(秋田大 2020)　　(m20200401)

0.12 平面上の 3 点 $P(2t^2-t+3,\ t^2+2t)$, $Q(2t^2+3,\ t^2)$, $R(3t^2+t+7,\ -t^2-2t-8)$ があり，t は 0 でない実数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) P, Q, R は 1 直線上にあることを示せ．

(2) $\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{PR}$ とおくとき，k の範囲を求めよ．

(3) P, Q, R, A の 4 点が，ある順序に等間隔で並んでいるとする．ただし，A は P と R 間にあり，Q と異なる点である．このとき，t の値を求めよ．

(秋田大 2020)　　(m20200402)

0.13 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x-1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^2\log x$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left\{1-\frac{1+e^{-x}}{2(x^2+x+1)}\right\}$

(秋田大 2020)　　(m20200403)

0.14 2 つの行列 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a&b\\1&c\end{pmatrix}$ (a, b, c は定数）について，以下の問いに答えよ．

(1) 等式 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ が成立するとき，a, b, c の間の関係を求めよ．

(2) (1) が成立するとき，B による 1 次変換は，直線 $2x-y=3$ を直線 $x-y=-3$ にうつすという．このとき，a, b, c の値を求めよ．

(3) 行列 A, B の固有値をそれぞれ求めよ．

(秋田大 2020)　　(m20200404)

0.15 点 O を原点とする xyz 空間に 3 点 $A(2,1,k)$, $B(0,2,0)$, $C(2,0,0)$ がある．ただし，k は正の実数である．線分 BC, OC の中点をそれぞれ D, E とする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いてそれぞれ表せ．

(2) $\angle DAE=30^\circ$となるときの　k を求めよ．

(3) $k=1$ のとき，原点から点 A, B, C を通る平面におろした垂線を ℓ_1 とし，平面との交点を H とする．

(a) $\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}$ と表すとき，実数 s, t を求めよ．

(b) 点 A, D を通る直線を ℓ_2 とするとき，直線 ℓ_1 と直線 ℓ_2 の最短距離を求めよ．

(東北大 2020)　　(m20200501)

0.16 任意の自然数 n に対する数列を以下の定積分により定義する．

$$I_n=\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^{2n-1}x}$$

(1) I_1 を求めよ．

(2) I_2 を求めよ．必要であれば次の関係式を用いよ．

$$\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{1}{\cos^3 x}$$

(3) I_n に成立する漸化式を求めよ．

(4) 以下に示す極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nI_n}{2^n}$$

(東北大 2020)　　(m20200502)

0.17 (1) 次の行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

$$A=\begin{pmatrix}2&1&2\\4&2&3\\3&1&3\end{pmatrix}$$

(2) 次の行列 B について，以下の問に答えよ．

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) 行列 B の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさを 1 とする．

(b) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ とする．n が 1 以上の整数であるとき，ベクトル $B^n\boldsymbol{u}$ を求めよ．

(3) 次の行列 C について，以下の問に答えよ．

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) $P^{-1}CP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．ただし，P^{-1} は P の逆行列を表す．

(b) n が 1 以上の整数であるとき，行列 C^n を求めよ．

(東北大 2020)　　(m20200503)

0.18 $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ が有理数}) \\ 0 & (\text{上記以外の数}) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (x = \dfrac{1}{2^m}, m = 1, 2, 3, \cdots) \\ 0 & (\text{上記以外の点}) \end{cases}$$

とする．

(1) f が区間 $[0,1]$ 上リーマン積分可能かどうか、理由とともに答えよ．

(2)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \sup_{\frac{k-1}{2^n} \leq x \leq \frac{k}{2^n}} g(x)$$
を求めよ．

(3) g が区間 $[0,1]$ 上リーマン積分可能かどうか、理由とともに答えよ．

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200601)

0.19 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする．A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200602)

0.20 次の行列の行列式を計算し，それが 0 となる x の値をすべて求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega & 1 & x \\ \omega & 1 & 2 & x^2 \\ \omega^2 & \omega^2 & 4 & x^3 \\ 1 & \omega & 8 & x^4 \end{pmatrix}$$

ただし，$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ である．

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200603)

0.21 t を実数として，4 つの $\mathbb{R}^4$ のベクトル

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をとる．V を v_1, v_2 で生成される $\mathbb{R}^4$ の線形部分空間，V' を v_1', v_2' で生成される $\mathbb{R}^4$ の線形部分空間とする．さらに V と V' の和空間 $V+V'$ が $\mathbb{R}^4$ と異なるとする．

(i) t の値を求めよ．

(ii) $V+V'$ の基底を一組求めよ．

(iii) $V \cap V'$ の基底を一組求めよ．

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200604)

0.22 次の式で定義される実対称行列 A を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを全て求めよ．

(2) 任意の 3 次元ベクトルが行列 A の固有ベクトルの線形結合で表されることを示せ．

(3) 行列 $\sin\left(\dfrac{1}{2}\pi A\right)$ とその固有値を求めよ．

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200605)

0.23 次の積分を計算せよ．(ただし，n は正の整数)

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\cos x dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-x^2}dx$

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200606)

0.24 関数 $y(x) = e^{-a^2x^2}$ が微分方程式 $d^2y(x)/dx^2 - x^2y(x) = by(x)$ の解になるように定数 a と b を定めよ。

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200607)

0.25 連立微分方程式 $dy(x)/dx = cz(x)$, $dz(x)/dx = cy(x)$ の解を初期条件 $y(0)=1$, $z(0)=0$ の下で求めよ．(ただし，c は定数)

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200608)

0.26 関数 $\delta_y(x)$ と $g(y)$ を次の式で定義する．

$$\delta_y(x) = \begin{cases} y^{-1} & (|x| < \frac{1}{2}y) \\ 0 & (|x| \geq \frac{1}{2}y) \end{cases} \qquad g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_y(x)dx$$

ここで，$f(x)$ は何回でも微分可能であるとする．このとき，$g(y)$ を y の 2 次の項まで求めよ．

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200609)

0.27 以下の各問いに答えよ．ただし，log はすべて自然対数とする．

(1) $f(x) = \log(1-x)$ $(|x|<1)$ のマクローリン展開を求めよ．ただし，剰余項の評価はしなくてもよい．

(2) $0 < x < 1$ において $\dfrac{x}{x-1} < \log(1-x)$ であることを示せ.

(3) $\log 2019$ の値の 10 進小数第 2 位を四捨五入することにより小数第 1 位まで求めよ. ただし, 必要ならば $\log 2 = 0.693147$ の近似値を用いてよい.

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200610)

0.28 a を正の定数とするとき, 極形式 $r = a(1+\cos\theta)$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ で囲まれる領域について, 以下の各問いに答えよ.

(1) 囲まれる領域の周の長さを求めよ.

(2) 囲まれる領域の面積を求めよ.

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200611)

0.29 (1) $t = x + \sqrt{x^2-1}$ のとき, $\dfrac{dt}{dx}$ を求めよ.

(2) 積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$ を, 上記 (1) のように $t = x + \sqrt{x^2-1}$ とおいて, t の関数の積分に置換せよ.

(3) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$ を求めよ.

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200612)

0.30 以下の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x}$

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200613)

0.31 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{2x}$$

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200614)

0.32 次の各問いに答えよ.

(1) V をベクトル和 $+$ とスカラー倍・を持つ係数体 F 上のベクトル空間とする. これを $(V, +, \cdot)$ と表す. $W \subset V$ である W に対して $(W, +, \cdot)$ が係数体 F 上の部分ベクトル空間となるための条件を述べよ.

(2) 以下の各集合が数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の標準的な和とスカラー倍に関して部分ベクトル空間となるか否かについて, 部分ベクトル空間になる場合にはなることを示し, またならない場合にはその理由を述べよ.

(a) $w_1 = \left\{(x_1, x_2, 0) \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{R}\right\}$

(b) $w_2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \;\middle|\; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R},\ x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\right\}$

(c) $w_3 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \;\middle|\; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R},\ x_1 + x_2 = x_3\right\}$

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200615)

0.33 行列 $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について, 以下の各問いに答えよ.

(1) 行列式 $\det(M)$ を求めよ.

(2) 行列 M は可逆か否かを述べ, 可逆ならばその逆行列 M^{-1} を求めよ.

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200616)

0.34 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200617)

0.35 ある健康改善プログラムの参加者の最高血圧 (mmHg) は, 実施前の測定において平均値 $\mu = 125.0$, 標準偏差 $\sigma = 10.0$ の正規分布に従うことがわかっている. このプログラムでは, 最高血圧の目標値を 130.0 (mmHg) と設定している. 以下の (a) と (b) に答えよ. 必要であれば付表 1 を利用せよ.（※付表 1 は標準正規分布表）

(a) 参加者のうち, 実施前に目標値を超過している人の割合を求めよ.

(b) プログラム実施後に最高血圧を測定したところ, 目標値を超過する人の割合が 5% 以下になった. このとき, 最高血圧の平均値はいくら未満であるか求めよ. ただし, プログラム実施後の最高血圧も正規分布に従い, 標準偏差は変わらず $\sigma = 10.0$ とする.

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200618)

0.36 微分方程式に関する以下の問いに答えよ.

(1) 微分方程式

$$\frac{dv}{dt} = -a(v^2 - b^2)$$

を $t \geq 0$ の範囲で考える. ただし, a, b は定数で $a > 0$, $b > 0$ とする.

(a) v の一般解を求めよ.

(b) $v(0) = 0$ のとき, v を求めよ.

(c) (b) で求めた解のグラフの概形を描け.

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ. ただし, $x > 0$ とする.

$$6x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 5x\frac{dy}{dx} + 5y = x$$

(3) 次の連立微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(東京大 2020)　　(m20200701)

0.37 赤, 青, 白の 3 色の球が入っている箱から, 球を次のルールで取り出すゲームを考える.
プレイヤーは, 1 回の挑戦で 1 個の球を無作為に取り出し, 引いた球の色に応じて以下を行う.

赤： ゲームを終了する.

青： 引いた青球を箱の中に戻し, ゲームを続行する.

白： 引いた白球を捨て, ゲームを続行する.

この挑戦をゲームが終了するまで繰り返す. 最初, 箱の中には, 赤球が L 個, 青球が M 個, 白球が N 個あるものとする. 以下の問いに答えよ. 計算過程も示すこと. また, 有理関数はは約分すること.

(1) $L = 2$, $M = 2$, $N = 2$ のとき, 1 回目の挑戦でゲームを終了する確率, 2 回目の挑戦でゲームを終了する確率, 3 回目の挑戦でゲームを終了する確率を, それぞれ求めよ.

(2) ゲームの途中で白球の残りの数が n 個のとき，ゲームの終了までに追加で必要な挑戦回数の期待値を $G(n)$ で表す．

(a) $n \geq 1$ のとき，以下の漸化式が成り立つことを示せ．

$$(L+n)G(n) = L + M + n + nG(n-1)$$

(b) $G(0)$ を L と M を用いて表せ．また，$L = M$ のときの $G(0)$ を求めよ．

(c) $L = 1,\ M = 1$ のとき，$G(N)$ を求めよ．

(d) $L = 2,\ M = 2$ のとき，$G(N)$ を求めよ．

(e) $L = 3,\ M = 3$ のとき，$G(N)$ を求めよ．

(3) このゲームの終了時点で，それまでに青球を引いた回数が a，白球を引いた回数が b のとき，プレーヤーには $(b-a)$ の点数が与えられるものとする．$L = 1,\ M = 1$ のとき，点数の期待値が正になる最小の自然数 N を求めよ．

(東京大 2020)　　(m20200702)

0.38 i を虚数単位とし，z は複素数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 次の複素数を $x + iy$（x, y は実数）の形ですべて求めよ．ただし，x, y の表式に三角関数を含んではならない．

(a) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^3$　　(b) $i^{1/2}$　　(c) $\dfrac{(1-i)^6}{(1+i)^8}$

(2) 関数 $z = \tan\omega = \dfrac{\sin\omega}{\cos\omega}$ の逆関数を $\omega = \tan^{-1} z$ で表す．

(a) 次の式が成り立つことを示せ．　$\tan^{-1} z = \dfrac{i}{2}\log\left(\dfrac{i+z}{i-z}\right)$

ただし，log は複素対数関数である．

(b) $\tan^{-1} z$ の z に関する微分を求めよ．

(3) 複素平面において，曲線 C を $z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とする．

(a) 次の積分 $I(k)$ を求めよ．ここで，k は $0 < k < 1$ の定数とする．　$I(k) = \displaystyle\int_C \frac{1}{k^2z^2+1}dz$

(b) $k = 2-\sqrt{3}$ のとき，I の値を求めよ．

(4) 実積分 J の値を留数定理により求めることを考える．　$J = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx$

(a) J の積分範囲を $[-\infty, \infty]$ と変形して，被積分関数に e^{ix} を用いて J を表せ．

(b) 関数 $f(z) = 1/(z^2+1)^2$ とする．複素平面において，図 1 の半径 Γ（円弧 ADB）の半径 R が十分に大きい時，次のことが成り立つことを示せ．　$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz = 0$

(c) 図 1 の C に関する周回積分を考えることにより，J の値を求めよ．
このとき，複素平面の上半平面において，

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)e^{iz}dz = 0$$

であることを用いてよい．

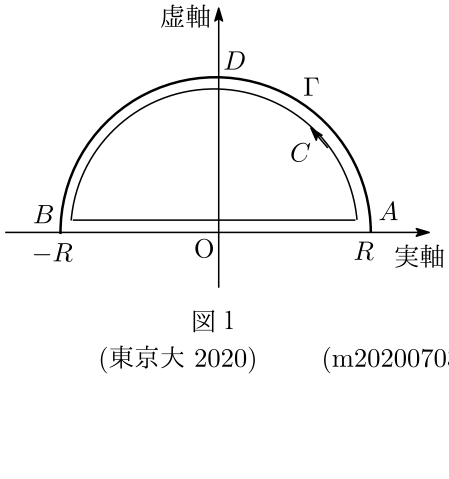


図 1

(東京大 2020)　　(m20200703)

0.39 数列 $x_n,\ y_n,\ z_n\ \ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を，次の漸化式で定義する．

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \qquad (n \geq 0)$$

ただし，

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，初期値 $x_0,\ y_0,\ z_0$ は実数で与えられているものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の全ての固有値と，それに対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) A^n を求めよ．

(3) $x_0>0,\ y_0>0,\ z_0>0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{{x_n}^2+{y_n}^2+{z_n}^2}<C$ となる定数 $C\ (C>0)$ が存在するための，初期値 $x_0,\ y_0,\ z_0$ に関する必要十分条件を示せ．

(東京大 2020)　　(m20200704)

0.40 $a,\ b$ を実数とする．x, y, z に関する連立一次方程式

$$\begin{cases} x \ \ + y + az = b \\ x + ay \ \ + z = b \\ ax \ \ + y \ \ + z = b \end{cases}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) この連立一次方程式が任意の実数 b に対して解をもつための必要十分条件を，a を用いて表せ．

(2) a が (1) の条件をみたすとき，解をすべて求めよ．

(東京工業大 2020)　　(m20200801)

0.41 $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 9 & 16 & -2 \\ -3 & -5 & 1 \\ -3 & -8 & 4 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 3 次正則行列 P で，$P^{-1}AP$ が対角行列になるものを求めよ．

(2) 3 次正則行列 Q で，$Q^{-1}AQ$ と $Q^{-1}BQ$ が対角行列になるものを求めよ．

(東京工業大 2020)　　(m20200802)

0.42 $a>0$ を定数とする．このとき 2 変数関数 $f(x,y)=x^3+y^3-3x^2-3y^2$ の $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ -a \leqq x \leqq a,\quad -a \leqq y \leqq a\right\}$ における最大値を求めよ．

(東京工業大 2020)　　(m20200803)

0.43 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ |x|+|y| \leqq \pi\right\}$ とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{e^{x+y}\cos(x+y)}{(x-y)^2+\pi^2}dxdy$$

(東京工業大 2020)　　(m20200804)

0.44 2 変数関数 $f(x,y) = -x^3 + 6xy - 8y^3$ について次の問いに答えなさい.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めなさい.

(2) $z = f(x,y)$ の極値を求めなさい.

(東京農工大 2020)　　(m20200901)

0.45 累次積分 $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3}\,dx\right) dy$ の値を求めなさい.

(東京農工大 2020)　　(m20200902)

0.46 等式

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

が成り立つような実数 $a,\ b,\ c,\ d$ の値を求めなさい.

(東京農工大 2020)　　(m20200903)

0.47 x の関数 $y = y(x)$ についての微分方程式　$y'' + 6y' + 9y = 3e^{-3x}$　の解で,

初期条件 $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$ を満たすものを求めなさい. ただし, $y' = \dfrac{dy}{dx},\ y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ である.

(東京農工大 2020)　　(m20200904)

0.48 a を実数とし, 行列 $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -1 & 8 & -3 \\ 3 & 3 & -3 & 1 & -8 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 & -1 & a \end{bmatrix}$ とする.

線形写像 $f\ :\ \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ を $f(x) = Ax\ (x \in \mathbb{R}^5)$ で定義する. 以下の問いに答えよ.

(1) f の像 $\mathrm{Im} f$ ついて, $\mathrm{Im} f \neq \mathbb{R}^4$ となるための a の値を求めよ.

(2) a が (1) で求めた値のとき, f の核 $\mathrm{Ker} f$ の次元 $\dim \mathrm{Ker} f$ を求め, その基底を 1 組求めよ.

(3) a が (1) で求めた値のとき, $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 16 \\ 7 \\ b \end{bmatrix} \in \mathrm{Im} f$ となる b の条件を求めよ.

(電気通信大 2020)　　(m20201001)

0.49 3 次正方行列 A と $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{v}$ を次の通りとする. 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の実数の固有値と, それに対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) $\boldsymbol{v},\ A\boldsymbol{v},\ A^2\boldsymbol{v}$ が 1 次独立でないことを示せ.

(3) $A^3\boldsymbol{v},\ A^4\boldsymbol{v}$ をそれぞれ $\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{v}$ の 1 次結合で表せ

(電気通信大 2020)　　(m20201002)

0.50 関数

$$f(x,y) = \frac{\pi}{4} - \mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{x^2+y^2}$$

に対して，xyz 空間内の曲面 $S\ :\ z = f(x,y)$ を考える．以下の問いに答えよ．
ただし，$y = \mathrm{Tan}^{-1}x$ は $x = \tan y\ \left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を表す

(1) $(x,y) \neq (0,0)$ に対して，偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 曲面 S 上の点 $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ f\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)\right)$ における S の接平面の方程式を求めよ．

(3) 曲面 S と平面 $z=0$ で囲まれる立体の体積 V を求めよ．

(電気通信大 2020)　　(m20201003)

0.51 次の重積分の値をそれぞれ計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy\ ,\quad D = \left\{(x,y) : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ \sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \sin(x^2)\,dxdy\ ,\quad D = \left\{(x,y) : 0 \leqq y \leqq x \leqq \sqrt{\pi}\right\}$

(電気通信大 2020)　　(m20201004)

0.52 (1) $z^4+1=0$ となる複素数 z を求めよ．

(2) $x = \sqrt{\tan\theta}\ \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して，導関数 $\dfrac{dx}{d\theta}$ を x の式で表せ．

(3) 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta}\,d\theta$ を求めよ．

(電気通信大 2020)　　(m20201005)

0.53 行列 A が以下で与えられている．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値とその固有ベクトルを求めよ．

(2) 行列 A を対角化せよ．

(3) A^n を計算せよ．ただし，n は正の整数とする．

(横浜国立大 2020)　　(m20201101)

0.54 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2-1}{\tan x}$　　　(2) $\dfrac{dy}{dx} = x^n - \dfrac{y}{x}$　　ただし，n は正の整数である．

(横浜国立大 2020)　　(m20201102)

0.55 $z = \dfrac{1}{xy}$，$x>0$，$y>0$ を満たす 3 次元空間内の曲面 S について以下の問いに答えよ．

(1) $(x,y)=(1,2)$ における曲面 S の接平面の方程式と法線の方程式を求めよ．

(2) 曲面 S 上で，平面 $x+3y+9z+18=0$ との距離が最も近い点の座標を求めよ．

(3) 6 つの平面 $x=0$，$x=2$，$y=0$，$y=2$，$z=0$，$z=2$ で囲まれる立方体を曲面 S で分割して得られる 2 つの領域のうち，原点を含まない方の領域の体積を求めよ．

(筑波大 2020)　　(m20201301)

0.56 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2, λ_3 を求めよ．ただし，$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ とする．

(2) 行列 A の正規化した固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ を求めよ． ただし，$A\boldsymbol{u}_j = \lambda_j \boldsymbol{u}_j$ $(j = 1,\ 2,\ 3)$ とする．

(3) 行列 A を $P^{-1}AP = D$ として， 対角成分が $D_{11} \geq D_{22} \geq D_{33}$ となるように対角化したとき，P, P^{-1} および D を求めよ． ただし，P は直交行列，D は対角行列， D_{ij} は D の第 i 行 j 列の成分とする．

(4) ベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ が， $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = A\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たすとき，$\boldsymbol{x}(t)$ を求めよ．

(5) ベクトル $\boldsymbol{y}(t)$ が， $\dfrac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{y}(t) = -e^A \boldsymbol{y}(t)$, $\boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{\boldsymbol{y}}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たすとき，$\boldsymbol{y}(t)$ を求めよ．ただし，$\dot{y}(t) = \dfrac{d}{dt}y(t)$ とする．

(筑波大 2020)　　(m20201302)

0.57 ある企業で従業員の喫煙状況を調査したところ， 毎年，非喫煙者（喫煙経験がない者）の $\dfrac{1}{9}$ が喫煙を始め， 喫煙者のうち $\dfrac{1}{3}$ が禁煙する． また，禁煙者（かつて喫煙していて，かつ喫煙を止めた者）のうち $\dfrac{1}{6}$ は，再び喫煙を始めることが分かった．ただし，ある年の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数をそれぞれ x_0, y_0, z_0，その n 年後の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数をそれぞれ x_n, y_n, z_n とし，対象期間中に従業員は変わらないものとする．

(1) 1 年後の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数 x_1, y_1, z_1 を x_0, y_0, z_0 で表せ．

(2) ある年の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数とその n 年後の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数をそれぞれ

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

と書く．1 年後の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数を表す式を

$$\boldsymbol{x}_1 = A\boldsymbol{x}_0$$

としたとき，行列 A を求めよ．

(3) 行列 A の固有値と対応する固有ベクトルを全て求めよ．

(4) $\boldsymbol{x}_n$ を A と $\boldsymbol{x}_{n-1}$ で表せ．

(5) n 年後非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数を表す式を

$$\boldsymbol{x}_n = B\boldsymbol{x}_0$$

とする．このとき，行列 B を A を用いて表せ．さらに，行列 B を求めよ．

(6) ある年の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数はそれぞれ 1458 人，456 人，408 人だった．その 3 年後の禁煙者の人数を求めよ．

(筑波大 2020)　　(m20201303)

0.58 (1) 関数 $f(x,y)$ を次のように定義する．

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

この関数 $f(x,y)$ について，以下の問に答えよ．

① $(x,y)=(0,0)$ での x についての偏微分係数 $f_x(0,0)$ を求めよ．

② $k \neq 0$ に対して $(x,y)=(0,k)$ での x についての偏微分係数 $f_x(0,k)$ を求めよ．

③ 偏導関数 $f_x(x,y)$ の $(x,y)=(0,0)$ での y に関する偏微分係数 $f_{xy}(0,0)$ の定義を f_x を用いて書け．

④ $f_{xy}(0,0)$ を求めよ．

(2) 関数 $g(x,y)$ を次のように定義する．

$$g(x,y) = \frac{\log(1+x)}{1+y}$$

この関数 $g(x,y)$ について，以下の問に答えよ．

① 導関数 $g_x(x,y)$，$g_y(x,y)$，$g_{xx}(x,y)$，$g_{xy}(x,y)$，$g_{yy}(x,y)$ と $(x,y)=(0,0)$ におけるそれぞれの値を求めよ．

② $(x,y)=(0,0)$ 周りのテイラー展開を 2 次の項まで計算せよ．なお，3 次以降は剰余項 R_3 と表記すれば良い．

(筑波大 2020)　　(m20201304)

0.59 $y=\tan x$ の逆関数を $y=\arctan x$ と書く．ある y の値に対して $y=\tan x$ を満たす x は多数存在するが，定義域を $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ に限る場合，$y=\tan x$ は単射となり一意に逆関数を定義することができる．この定義域における $y=\tan x$ の逆関数を $y=\mathrm{Arctan}\, x$ と書くこととする．

上記の定義域において，次の問に答えよ

① $y=\mathrm{Arctan}\, x$ について，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2}$ を証明せよ．

② 次の無限級数 S の値を求めよ．ただし，その導出過程を示すこと．

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

(筑波大 2020)　　(m20201305)

0.60 次の 2 重積分を計算せよ．

$$I = \iint_D xe^{y^2}\,dxdy, \quad D=\left\{(x,y)\;\middle|\; 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 1\right\}$$

(筑波大 2020)　　(m20201306)

0.61 当りが 2 本，外れが 2 本からなるくじがあり，A,B の 2 人が非復元抽出で 1 本ずつくじを引く．A の引いたくじが当たりのときを $X=1$，外れのときを $X=0$ とし，B が引いたくじが当たりのときを $Y=1$，外れのときを $Y=0$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の同時確率分布表の (ア)〜(ク) に入る適当な値を答えよ．

$X \backslash Y$	1	0	合計
1	(ア)	(イ)	(ウ)
0	(エ)	(オ)	(カ)
合計	(キ)	(ク)	1

(2) 期待値 $E[X]$, $E[Y]$, 分散 $V[X]$, $V[Y]$, 共分散 $Cov[X,Y]$ を求めよ.

(3) 相関係数 $\rho(X,Y)$ を求めよ.

(筑波大 2020) (m20201307)

0.62 次の説明を読んで，各設問に答えよ．ただし，計算や解答の際には，小数第 4 位を四捨五入した値を用いよ.

ある地方自治体の首長選挙では，現職と新人 1 人の 2 人だけが立候補した．地方報道機関が出口調査（投票を済ませた人に直接投票先をたずねる調査）を行ったところ，以下の結果を得た．なお，各標本は無作為に抽出され，全てが有効投票であり，出口調査の無回答者もいなかったものとする.

投票先	現職	新人
人数	441	400

また，$0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす α に対して標準正規分布に従う確率変数 Z の $100(1-\alpha)\%$ 点 z_α は

$$Pr(Z \geq z_\alpha) = \alpha$$

で定義され，その具体的な値は次表で与えられる．ここで，$Pr(Z \geq z_\alpha)$ は Z が z_α 以上になる確率である.

α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
z_α	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

(1) 現職の投票率 p の 95% 信頼区間を求めよ．得票率とは，有効投票数に占めるその候補者が獲得した票数の割合である.

(2) 現職が当選するといえるか，適当な帰無仮説と対立仮説を立て，有意水準 0.05 で検定せよ.

(筑波大 2020) (m20201308)

0.63 次の式で与えられる陰関数 $z = f(x,y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めなさい.

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 1$$

(筑波大 2020) (m20201309)

0.64 次の定積分の値を求めなさい.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)}$$

(筑波大 2020) (m20201310)

0.65 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \dfrac{1}{2} & c \end{pmatrix}$ が直交行列となるような $a,\ b,\ c$ の組を全て求めなさい.

(筑波大 2020)　　(m20201311)

0.66 行列 $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ につて，以下の問いに答えなさい.

(1) B の固有多項式を求めなさい.

(2) B が多角化可能となるような d の値を全て求めなさい.

(筑波大 2020)　　(m20201312)

0.67 4 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

で定める．以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A が対角化可能であるかどうかを判定し，その理由を述べよ.

(筑波大 2020)　　(m20201313)

0.68 V は $\mathbb{R}$ 上の 3 次元ベクトル空間であるとし，V のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ は V の基底であるとする．線形写像 $f : V \to V$ について

$$f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = 2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$$
$$f(\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3$$
$$f(\boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$$

が成り立つとする．以下の問いに答えよ.

(1) 基底 $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ に関する f の表現行列を求めよ.

(2) f の像の次元を求めよ.

(筑波大 2020)　　(m20201314)

0.69 $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -\pi < x < \pi \text{ かつ } 0 < y < \pi \right\}$ とする.

関数 $f(x, y) = \sin x - \sin y + \sin(x + y)$ の D における極値をすべて求めよ.

(筑波大 2020)　　(m20201315)

0.70 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqq x \text{ かつ } 0 \leqq y \leqq x^2\}$ とし，α は $0 < \alpha < 1$ を満たす定数とする.

(1) 変数変換 $x = s,\ y = s^2 t$ を用いて，広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^\alpha}{x^4 + y^2} dxdy$ を計算せよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^4 + y^2} \log(1 + x^\alpha) dxdy$ が収束することを示せ.

(筑波大 2020)　　(m20201316)

0.71 (1) 以下の命題を証明せよ.

(a) V, W を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，f は V から W への線形写像であるとする．V の有限個の元 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{v}_k$ について，$f(\boldsymbol{v}_1)$, $f(\boldsymbol{v}_2)$, $\cdots$, $f(\boldsymbol{v}_k)$ が線形独立ならば，$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{v}_k$ も線形独立である．

(b) α は 1 より大きい定数とする．このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}$ は収束する．

(2) 以下の命題に対する反例を与え，それが反例であることを示せ．

(a) $\mathbb{R}$ 上の数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 U_1, U_2, U_3 が $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{0\}$ を満たせば，部分空間の和 $U_1 + U_2 + U_3$ は直和である．

(b) $\mathbb{Z}$ の任意の部分集合 A, B に対して，$P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ が成り立つ．ただし，集合 X に対して，$P(X)$ は X のべき集合（X の部分集合全体の集合）を表す．

(c) 写像 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ に対して，写像 $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ であって合成写像 $g \circ f$ が $\mathbb{Z}$ 上の恒等写像に等しいものが存在すれば，f は全単射である．

(筑波大 2020)　　(m20201317)

0.72 実 2 変数関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

を考える．以下の各問に答えよ．

(1) 原点 $(0,0)$ における $f(x,y)$ の連続性を調べよ．

(2) 原点 $(0,0)$ における $f(x,y)$ の偏微分可能性を調べよ．

(3) 原点 $(0,0)$ における $f(x,y)$ の全微分可能性を調べよ．

(4) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1\right\}$ とする．
$\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ を計算せよ．

(茨城大 2020)　　(m20201701)

0.73 $G(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ で定義される陰関数 $y = g(x)$ の極値を調べよ．

(茨城大 2020)　　(m20201702)

0.74 a を正の定数とする．関数 $f(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+a}\right)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．
ただし，対数は自然対数とする．

(茨城大 2020)　　(m20201703)

0.75 xy 平面内の領域 $D : 0 \leqq x \leqq 1$, $\sqrt{x^2+3} \leqq y \leqq \sqrt{x^2+8}$ における 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{y^2}dxdy$ を計算せよ．

(茨城大 2020)　　(m20201704)

0.76 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ について，以下の各問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) 行列 A の各固有値の固有空間を求めよ．ここで，固有値 λ の固有空間とは，λ の固有ベクトル全体と零ベクトルからなるベクトル空間のことである．

(茨城大 2020)　　(m20201705)

0.77 $x = x(t)$ に関する 2 つの微分方程式

(i) $x'' - 4tx' + (4t^2 - 3)x = 0$

(ii) $x'' - 4tx' + (4t^2 - 3)x = 4t^4 - 11t^2 + 2$

について，以下の各問に答えよ．ただし，(1),(2) は答のみを書けばよい．

(1) $x_1(t) = e^{t^2+t}$, $x_2(t) = e^{t^2-t}$ はそれぞれ (i) の解である．(i) の一般解を求めよ．

(2) $x_0(t) = t^2$ は (ii) の解の 1 つである．(ii) の一般解を求めよ．

(3) 初期条件 $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$ のもとで (ii) の解を求めよ．

(茨城大 2020)　　(m20201706)

0.78 i を虚数単位とするとき，以下の各問に答えよ．

(1) $x = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，複素数 $1 - e^{i2x}$ を $a + ib$ (a, b は実数) の形で答え，その絶対値を求めよ．

(2) 前問 (1) で得られた複素数 $a + ib$ を $re^{i\theta}$ の形で表せ．ただし，$r > 0$, $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(3) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，$1 - e^{i2x}$ の絶対値が $\sqrt{2}$ になるときの x を求めよ．

(茨城大 2020)　　(m20201707)

0.79 実対称行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

について，以下の各問に答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A を直交行列を用いて対角化せよ．

(茨城大 2020)　　(m20201708)

0.80 λ を 0 でない実数とする．4 次実正方行列 A の固有値はすべて重複し λ であるとする．また，

$$W_1 = \left\{ (A - \lambda E)u \;\middle|\; u \in \mathbb{R}^4 \right\}$$
$$W_2 = \left\{ u \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; (A - \lambda E)u = 0 \right\}$$

とおく．ただし，E は 4 次の単位行列，0 は零ベクトルを表す．以下の各問に答えよ．

(1) W_1 および W_2 は $\mathbb{R}^4$ の線形部分空間であることを示せ．

(2) $\dim W_2 = 3$ のとき，$W_1 \subset W_2$ であることを示せ．

(茨城大 2020)　　(m20201709)

0.81 次の行列 A を考えます．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式を求めなさい．

(2) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．ただし，導出過程も示すこと．

(山梨大 2020)　　(m20201801)

0.82 以下の式を考える.

$$AX = B$$

ここで, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}$, $X = [x_1,\ x_2,\ x_3]^T$, $B = [1,3,5]^T$ である.

(1) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2) $x_1,\ x_2,\ x_3$ を求めよ;

(山梨大 2020)　　(m20201802)

0.83 連続的な確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が次の式で与えられたとする.

$$f(x) = \begin{cases} ax(6-x) & (0 \leq x \leq 6) \\ 0 & (x < 0,\ x > 6) \end{cases}$$

(1) 定数 a の値を求めよ.

(2) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散値 $V(X)$ をそれぞれ求めよ.

(山梨大 2020)　　(m20201803)

0.84 ${}_nC_r$ $(0 \leq r \leq n)$ は式 (1)-(3) で与えられる.

$$ {}_nC_0 = 1 \tag{1}$$

$$ {}_nC_n = 1 \tag{2}$$

$$ {}_{n+1}C_r = {}_nC_r + {}_nC_{r-1} \qquad (1 \leq r \leq n) \tag{3}$$

数学的帰納法を用いて式 (4) が成り立つことを証明せよ.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^k b^{n-k} \tag{4}$$

(山梨大 2020)　　(m20201804)

0.85 次の極限を調べ, それが存在する場合は極限値を求め, 存在しない場合はその理由を述べよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 1}{2^x - 1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$　　(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2-y^2}$

(信州大 2020)　　(m20201901)

0.86 実数 p は $0 < p \leqq 1$ を満たすとする. $D_n = \left\{(x,y) \;\middle|\; \dfrac{1}{n} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x - \dfrac{1}{n}\right\}$ $(n = 2,3,\cdots)$ とおき, 領域 D_n 上の 2 重積分

$$I_n(p) = \iint_{D_n} \frac{dxdy}{(x-y)^p}$$

を考える. このとき, 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n(p)$ を調べ. それが存在する場合は極限値を求めよ.

(信州大 2020)　　(m20201902)

0.87 3 以上の自然数 n に対して, n 次正方行列

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 5 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \ldots & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

を A_n とする. すなわち, A_n の (i,j) 成分は, $i=j$ のとき 5, $|i-j|=1$ のとき 2, それ以外のとき 0 である. A_n の行列式の値を a_n とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $a_3,\ a_4$ を求めよ.

(2) a_{n+2} を a_{n+1} と a_n を用いて表せ.

(3) a_n を求めよ.

(信州大 2020)　　(m20201903)

0.88 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -4 & 3 & 2 \\ -8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A が対角化可能か判定せよ.

(2) 行列 B が対角化可能か判定せよ.

(信州大 2020)　　(m20201904)

0.89 (1) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$$

(2) 次の極限が存在しないことを示せ.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

(3) 2 変数関数 $z = f(x,y)$ と $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ の合成関数 $f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ に対し，関係式

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

が成り立つことを示せ.

(信州大 2020)　　(m20201905)

0.90 (1) 次の不定積分を求めよ.

$$\int \tan^{-1}\sqrt{x}\,dx$$

(2) $\mathbb{R}^2$ 内の領域 D を $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 \le x+y \le 1,\ 0 \le x-2y \le 1\right\}$ で定めるとき，2 重積分

$$\iint_D (3x+2y)dxdy$$

の値を求めよ.

(3) f は $[0,1]$ 上の実数値連続関数で, $\displaystyle\int_0^1 |xf(x)|dx < \infty$ であるとする．このとき，次の関数が $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを示せ.

$$g(x) := \int_0^1 \cos(xy)f(y)dy$$

(信州大 2020)　　(m20201906)

0.91 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, が 1 次独立であることを示せ．また, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ の 1 次結合で表せ.

(信州大 2020)　　(m20201907)

0.92 行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値を求めよ.

(信州大 2020)　　(m20201908)

0.93 V を $\mathbb{C}$ 上の n 次元線形空間とし，$F : V \to V$ を線形写像とする.

(1) $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し，$V(\lambda) = \{x \in V \mid F(x) = \lambda x\}$ は V の部分空間であることを示せ.

(2) $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_k$ は相異なる複素数とし，各 i に対し，$V(\lambda_i)$ が 0 でない元 x_i を含むとする．このとき，$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k$ は 1 次独立であることを示せ.

(3) $F^2 = F$ であるとき，F は適当な基底を選べば対角行列で表現できることを示せ．また，F の固有値をすべて求めよ.

(信州大 2020)　　(m20201909)

0.94 $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲における，関数 $f(x) = e^{-x}\sin x$ の最小値を求めよ.

(新潟大 2020)　　(m20202001)

0.95 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ と座標軸に囲まれた部分の面積を求めよ．ただし，$a > 0$ とする.

(新潟大 2020)　　(m20202002)

0.96 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x}{x^2-1}y$ を解け．ただし，$-1 < x < 1,\ y > 0$ かつ $x = 0$ のとき，$y = 1$ とする.

(新潟大 2020)　　(m20202003)

0.97 (1) $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n$ を求めよ．ただし，$a \neq 0$ とし，n は正の整数とする.

(2) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$ のとき，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ となる $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} x & y \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ の $x,\ y$ 及び a の値を求めよ.

(3) (1)，(2) を用いて $\boldsymbol{A}^n$ を求めよ.

(新潟大 2020)　　(m20202004)

0.98 $D = \left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 1\right\}$ のとき，次の重積分の値を求めよ．積分順序を変更してもよい.

$$\iint_D \sin(\pi y^2)\,dxdy$$

(新潟大 2020)　　(m20202005)

0.99 次の連立方程式を解け．不定の場合，任意定数を用いて答えよ.

$$\begin{cases} 2x - 3x + 2z = 4 \\ 4x - 5y + 2z = 10 \\ -6x + 8y - 4z = -14 \end{cases}$$

(新潟大 2020)　　(m20202006)

0.100 2 つの行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ.

(1) A の行列式 $\det A$ と逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 2 つの行列の積 AB を求めよ．

(3) 4 つの行列 $A,\ B,\ A^{-1}$ および AB は，いずれも二次元 XY 座標平面上における任意の点 $P(x,y)$ をそれぞれ異なる $P'(x',y')$ に移動させる．$A,\ B,\ A^{-1}$ および AB が，それぞれどのように点 P を点 P' に移動させるか，幾何学的意味を述べよ．

(新潟大 2020)　　(m20202007)

0.101 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくとき，下の問いに答えなさい．

(1) A の固有多項式 $|\,tE-A|$ を求めなさい．ただし，E を 3 次単位行列とする．

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(長岡技科大 2020)　　(m20202101)

0.102 x の関数 $y=y(x)$ に関する微分方程式

$(*)\quad y''+y=\sin x$

を考える．

$u=u(x)=-y\cos x+y'\sin x,\ \ v=v(x)=y\sin x+y'\cos x$

とおくとき，下の問いに答えなさい．

(1) $-u\cos x+v\sin x=y$ が成り立つことを示しなさい．

(2) $u',\ v'$ を x の関数として表しなさい．

(3) $u,\ v$ を x の関数として表しなさい．

(4) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めなさい．

(長岡技科大 2020)　　(m20202102)

0.103 xy 平面において，領域 $S,\ T$ を

$S\ :\ x^2+y^2 \leqq 1$

$T\ :\ 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ 0 \leqq y \leqq x$

と定義する．下の問いに答えなさい．

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_S (x^2+y^2)dxdy$ を求めなさい．

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_T \tan^{-1}\frac{y}{x}dxdy$ を求めなさい．

(長岡技科大 2020)　　(m20202103)

0.104 n を自然数とする．箱 A には赤玉 1 個と白玉 2 個が入っている．箱 B には赤玉 2 個と白玉 1 個が入っている．まず箱 A と箱 B をでたらめに選ぶ．次に，選んだ箱から復元抽出で n 回繰り返し玉を取り出す．　下の問いに答えなさい．

(1) $n=1$ のとき，赤玉が取り出される確率を求めなさい．

(2) n 回全てで赤玉が取り出される確率 p_n を求めなさい．

(3) n 回全てで赤玉が取り出される条件の下で $n+1$ 回目も赤玉が取り出される条件付き確率 q_n を求めなさい．

(長岡技科大 2020)　　(m20202104)

0.105　p と q を実数とする．行列

$$A = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

が異なる実数の固有値 α と β をもつとき，次の問いに答えよ．

(1) p と q が満たす条件を求めよ．

(2) 次を満たす正則行列 P の一つを，α と β を用いて与えよ．

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

(3) 漸化式

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \qquad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を，a_1，a_2，α，β を用いて表せ．

(金沢大 2020)　　(m20202201)

0.106　行列

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

と，B による $\boldsymbol{R}^4$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像

$$f \ :\ \boldsymbol{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longleftrightarrow B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

について，次の問いに答えよ．

(1) f の核 (Ker f) を求めよ．

(2) f が全射であることを示せ．

(3) E_3 を 3 次の単位行列とする．このとき，

$$BC = E_3$$

を満たす行列 C が存在する場合にはそのような C を一つ与え，存在しない場合にはその理由を述べよ．

(金沢大 2020)　　(m20202202)

0.107　$\boldsymbol{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6xy^2}{2x^2+3y^2}\ , & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で連続であることを示せ．

(2) $f(x,y)$ の点 $(0,0)$ における偏微分係数 $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$ を求めよ．

(3) $f(x,y)$ が点 $(0,0)$ で全微分可能であるかどうか調べよ．

(金沢大 2020)　　(m20202203)

0.108 $\boldsymbol{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y)=(x^2-y^2)e^{2x}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ のすべての極値を求めよ．

(2) $\boldsymbol{R}^2$ の 4 点 $(2,0)$, $(0,2)$, $(-2,0)$, $(0,-2)$ を頂点とする正方形の周および内部を D とする．このとき，重積分

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

の値を求めよ．

(金沢大 2020)　　(m20202204)

0.109 $\boldsymbol{R}$ 上の 3 回微分可能な関数 $f(x)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $x>a$ に対して，

$$\frac{|f''(a)|}{2}(x-a)^2 \leqq |f(x)|+|f(a)|+|f'(a)|(x-a)+\frac{|f'''(c)|}{6}(x-a)^3$$

を満たす $c\ (a<c<x)$ が存在することを，テイラーの定理を用いて示せ．

(2) $f(x)$ および $a\in\boldsymbol{R}$ は，次の条件 (i),(ii),(iii) を満たすとする．

(i) $|f(x)|\leqq 1 \quad (x\in\boldsymbol{R})$

(ii) $|f'''(x)|\leqq 3 \quad (x\in\boldsymbol{R})$

(iii) $f'(a)=0$

このとき，$|f''(a)|\leqq 3$ を示せ．

(金沢大 2020)　　(m20202205)

0.110 (1) 集合 $D=\left\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, |x|+|y|\le 1\right\}$ の概形を描け．

(2) (1) で定義した D に対して積分 $\displaystyle\iint_D (x-y+1)\,e^{x+y}\,dx\,dy$ を求めよ．

(3) $\max\{u,v\}=\begin{cases} u & (u\ge v)\\ v & (u<v)\end{cases}$ とする．積分 $\displaystyle\int_0^3\left(\int_0^1 e^{\max\{x^2,9y^2\}}dy\right)dx$ を求めよ．

(金沢大 2020)　　(m20202206)

0.111 $x\in\boldsymbol{R}$ に対して，

$$f(x)=x\left(\log\left(x^2+\frac{1}{2}\right)-2\right)+\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x\right)$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x\log(x)}$ を求めよ．

(2) f の導関数を求めよ．

(3) f の極値を求めよ．

(金沢大 2020)　　(m20202207)

0.112 (1) n を自然数とする．$\begin{pmatrix} 2 & -1\\ -3 & 4\end{pmatrix}^n$ を求めよ．

(2) 次の行列の固有値を求め，それぞれの固有値に対応する固有空間の基底を 1 組求めよ．

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(金沢大 2020)　　(m20202208)

0.113 自然数 k に対して V_k を x の k 次以下の実係数多項式全体からなる $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする．
n を 2 以上の自然数とし，線形写像 $\varphi : V_n \to V_{n-1}$ と $\psi : V_{n-1} \to V_n$ を，それぞれ，

$$\varphi(v(x)) = v'(x) \quad (v(x) \in V_n), \qquad \psi(w(x)) = \int_0^x w(y)dy \quad (w(x) \in V_{n-1})$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Ker}(\varphi)$ および $\mathrm{Im}(\varphi)$ の次元を求め，次元が 1 以上の場合はその基底を求めよ．

(2) $\mathrm{Ker}(\psi)$ および $\mathrm{Im}(\psi)$ の次元を求め，次元が 1 以上の場合はその基底を求めよ．

(3) 合成写像 $\psi \circ \varphi : V_n \to V_n$ と $\varphi \circ \psi : V_{n-1} \to V_{n-1}$ は同型写像かどうか答えよ．同型写像の場合には証明を与え，そうでない場合には理由を述べよ．

(金沢大 2020)　　(m20202209)

0.114 次の式の値を求めよ．

$$\lim_{x \to +0} x^{2x}$$

(富山大 2020)　　(m20202301)

0.115 次の式で定義される 2 変数関数の 2 階偏導関数を求めよ．

$$f(x, y) = \log_y x \qquad (x > 0,\ y > 1)$$

(富山大 2020)　　(m20202302)

0.116 θ の範囲が $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，次の式で定義される xy 平面上の曲線に囲まれる領域の面積を求めよ．

$$\begin{cases} x = 2\sin\theta \\ y = 2\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

(富山大 2020)　　(m20202303)

0.117 ベクトル場 $\vec{A}(x, y, z) = xye^z\vec{i} + x\log_e(z)\vec{j} + yz^4\sin(2x)\vec{k}$，スカラー場 $\phi(x, y, z) = xyz$ について，次の問いに答えよ．ただし，$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ はそれぞれ直角座標系の x, y, z 軸方向の単位ベクトルとする．

(1) 回転 $\mathrm{rot}\vec{A}$ を求めよ．

(2) 勾配 $\mathrm{grad}\phi$ を求めよ．

(3) 点 $P(1, 1, 2)$ における，単位ベクトル $\vec{u} = \dfrac{2}{3}\vec{i} - \dfrac{2}{3}\vec{j} + \dfrac{1}{3}\vec{k}$ の方向への ϕ の方向微分係数 $\dfrac{d\phi}{du}$ を求めよ．

(富山大 2020)　　(m20202304)

0.118 以下の微分方程式の一般解を求めよ．また，特異解がある場合は特異解も求めよ．

(1) $\alpha\dfrac{dy}{dx} = \beta - \gamma y$ 　　（ α, β, γ は全て正の定数とする．）

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+9y=3\sin 3x$ 　　　　(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{2x^2+y^2}$

(富山大 2020)　　(m20202305)

0.119 次の関数 $f(x)$ について $x=0$ における微分可能性を調べよ．

ただし，必要であれば $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ の関係を用いてもよいこととする．

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & (x<0)\\ x & (x\geq 0)\end{cases}$$

(福井大 2020)　　(m20202401)

0.120 次の関数を x で微分せよ．

(1) $y=\sin^3 e^x$ 　　(2) $y=\sqrt[3]{x\sqrt{x-1}}$ 　（ただし，$x>1$）

(福井大 2020)　　(m20202402)

0.121 次の定積分を求めよ．

(1) $I=\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$ 　　(2) $I=\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x}\sin x\,dx$

(福井大 2020)　　(m20202403)

0.122 関数 $u=f(x,y)$ が以下の式で表せるとき，導関数 $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ を求めよ．

$$u=x\cos y-y\cos x,\quad x=\cos 2t,\quad y=\sin 2t$$

(福井大 2020)　　(m20202404)

0.123 次の重積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

(福井大 2020)　　(m20202405)

0.124 以下の行列の行列式を計算せよ．

(1) $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&3&0\\2&0&1&0\\1&1&2&1\end{pmatrix}$ 　　(2) $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&3&0\\2&0&1&0\\1&1&2&1\end{pmatrix}^3$

(福井大 2020)　　(m20202406)

0.125 以下のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次従属となるような実数 x のうち，$x>0$ を満たすものを求めよ．

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\x\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}x\\2\\1\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}x\\0\\x\end{pmatrix}$$

(福井大 2020)　　(m20202407)

0.126 行列 $\boldsymbol{A}$，ベクトル $\boldsymbol{b}$ に関して以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&2&0\\2&1&2\\0&2&-1\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値 α_1，α_2，α_3 及び対応する固有ベクトル $\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$ を求めよ．固有値は $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$ とし，固有ベクトルは大きさを 1 にせよ．

(2) $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルの線形結合で表せ.

(3) $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{b}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を求めよ.

(福井大 2020) (m20202408)

0.127 6 面のサイコロについて考える．普通のサイコロと違って，各面における目の数は，1, 1, 2, 3, 5, 8 である．このサイコロを 1 回振るときに出る目の数の期待値を求めよ.

(福井大 2020) (m20202409)

0.128 ある容器に赤玉 30 個，白玉 20 個，青玉 5 個が入っている．無作為に容器から玉を 5 個，一つずつ順に取り出す．赤，赤，青，青，白の順番で取り出す確率を求めよ．ただし，取り出した玉は容器に戻さない.

(福井大 2020) (m20202410)

0.129 次の微分方程式の解を求めよ. $\quad x^2 + y^2 - 2xy\dfrac{dy}{dx} = 0$

(福井大 2020) (m20202411)

0.130 次の微分方程式の一般解を求めよ. $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^{3x}$

(福井大 2020) (m20202412)

0.131 関数 $f(x)$ が以下のように与えられている.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1 \\ 1 & |x| < 1 \end{cases}$$

この関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $\quad F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \quad$ を求めよ.

(福井大 2020) (m20202413)

0.132 関数 $f(t)$ $(t \geq 0)$ のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \ (s > 0)$$

について考える．以下の問いに答えよ.

(1) $f(t) = \cos^2 t$ $(t \geq 0)$ のラプラス変換を求めよ. $\quad \mathcal{L}[\cos^2 t]$

(2) $f(t) = t\sin at$ $(t \geq 0,$ 定数 $a \neq 0)$ のラプラス変換を求めよ. $\quad \mathcal{L}[t\sin at]$

(福井大 2020) (m20202414)

0.133 (1) 以下のベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ の一次独立，1 次従属を判定せよ．ただし，x は実数とする.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3+x \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 5+x \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(2) n を 2 以上の整数，α を 0 でない実数とする．次式で定義される n 次正方行列 $A = (a_{i,j})$ について，以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \iddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & i+j = n+1 \text{ のとき} \\ \alpha & i = j = n \quad \text{のとき} \\ 0 & \text{上記以外のとき} \end{cases}$$

(a) A の逆行列を求めよ．

(b) A の行列式を計算せよ．

(3) 次の行列の階数を求めよ．ただし，z は実数とする．

$$\begin{pmatrix} z & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & z \end{pmatrix}$$

(福井大 2020)　　(m20202415)

0.134 (1) 次の連立微分方程式の解を求めたい．以下の問いに答えよ．

$$\begin{cases} \dfrac{dy(x)}{dx} = \ \ y(x) \ + \ z(x) + 1 \\ \dfrac{dz(x)}{dx} = -y(x) + 3z(x) + 3 \end{cases}$$

(a) $z(x)$ を消去して，$y(x)$ のみに対する微分方程式を導出せよ．

(b) $y(x)$ と $z(x)$ の一般解を (a) を利用して求めよ．

(2) 次の連立微分方程式の $y(x)$ と $z(x)$ の一般解を求めよ．

$$\begin{cases} \dfrac{dy(x)}{dx} = \ \ y(x) \ + \ z(x) + 1 \\ \dfrac{dz(x)}{dx} = -y(x) + 3z(x) + 3 + \dfrac{e^{2x}}{(1+x)^2} \end{cases}$$

(3) 次の連立微分方程式の解を求めたい．以下の問いに答えよ．

$$\begin{cases} \dfrac{dy(x)}{dx} = -y(x)z(x) \\ \dfrac{dz(x)}{dx} = \ \ y(x)z(x) \end{cases}$$

(a) $y(x) + z(x)$ が常に一定の値（定数）c_1 をとること，すなわち，

$$y(x) + z(x) = c_1$$

が成立することを証明せよ．

(b) 初期値として，

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

が与えられたとき，$y(x)$ と $z(x)$ の解を (a) を利用して求めよ．

(福井大 2020)　　(m20202416)

0.135 体積が一定で，各辺の長さが変化する直方体について，以下の問いに答えよ．

(1) 直方体の 3 つの辺の長さをそれぞれ x, y, z とし，直方体の体積を定数 $C > 0$ とおく．このとき，z を x, y, C を用いて表せ．ただし，$x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ とする．

(2) 直方体の表面積を $f(x, y)$ とする．$f(x, y)$ を x, y, C を用いて表せ．

(3) $f_x(x, y)$ と $f_y(x, y)$ を求めよ．ただし，

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \qquad f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

である．

(4) $f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ が同時に 0 となるような x と y の値を，C を用いて表せ．

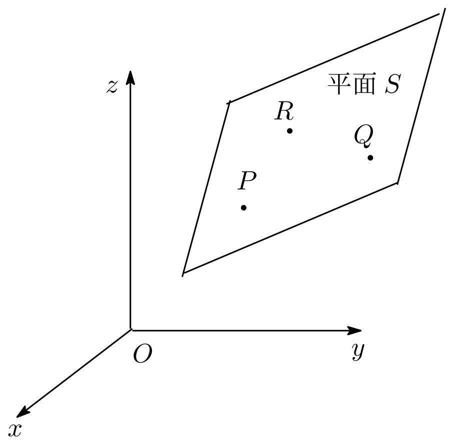
(5) 一般に，以下の定理が知られている

> 定理
> 二階偏微分可能な二変数関数 $g(x,y)$ について，
> $$g_x(a,b)=0, \quad g_y(a,b)=0$$
> のとき，
> $$D=\{g_{xy}(a,b)\}^2-g_{xx}(a,b)g_{yy}(a,b)$$
> とおくと，$g(x,y)$ は $x=a$，$y=b$ において，$D<0$ かつ $g_{xx}(a,b)>0$ のとき極小となる．

上記の定理を用いて，$f(x,y)$ は (4) で求めた x,y において極小となることを示せ．なお，定理の証明は不要である．

(福井大 2020)　　(m20202417)

0.136 xyz 空間に平面 S がある．平面 S 上には 3 点 P,Q,R がある．点 P の座標は $(1,1,1)$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(0,3,1)$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(-1,1,2)$ である．このとき，平面 S の方程式を求めよ．ただし，平面 S の方程式を表すために用いてよい変数は x,y,z のみとする（解答の過程でこれら以外の変数を用いた場合でも，最終的な答えは x,y,z のみを用いて表すこと）．考え方と計算過程を明記すること．



(福井大 2020)　　(m20202418)

0.137 以下の行列 A の逆行列を求めよ．計算過程も明記すること．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(福井大 2020)　　(m20202419)

0.138 以下の行列 B を考える．B の固有値の 1 つは 3 である．この固有値に対する固有ベクトルを 1 つ求めよ．ただし，固有ベクトルを規格化する必要はない．考え方と計算過程を明記すること．

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(福井大 2020)　　(m20202420)

0.139 C と D は同じサイズの正則行列であるとする．CD の逆行列 $(CD)^{-1}$ を C の逆行列と D 逆行列を用いて表すと，$(CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}$ となる．この理由を式を用いて説明せよ．

(福井大 2020) (m20202421)

0.140 非負の整数 n，および $-1 \leqq x \leqq 1$ を満たす任意の実数 x に対して，

$$T_n(x) = \cos nz, \quad \text{ただし，} \cos z = x \tag{1}$$

と定義する．式 (1) において，$n = 0$ とおくと

$$T_0(x) = \cos 0 = 1 \tag{2}$$

となり，$n = 1$ とおくと

$$T_1(x) = \cos z = x \tag{3}$$

となる．以下の問いに答えよ．

(a) 加法定理

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{4}$$

を利用し，$T_2(x)$ を x の多項式として表せ．

(b) $T_n(x)$ は，$T_{n+1}(x)$ と $T_{n-1}(x)$ によって

$$T_n(x) = \frac{T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)}{2x} \tag{5}$$

と表される．これを次のようにして証明したい．以下の下線部 (A)〜(C) を適当に埋めよ．

【証明】式 (1) の定義と式 (4) の加法定理を用いると

$$T_{n+1}(x) = \cos(nz + z) = \cos nz \cos z - \underline{\qquad\qquad\qquad}(\mathrm{A}) \tag{6}$$

$$T_{n-1}(x) = \cos(nz - z) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}(\mathrm{B}) \tag{7}$$

と書ける．式 (6) と式 (7) の各辺を加えると

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = \underline{\qquad\qquad\qquad\quad}(\mathrm{C}) \tag{8}$$

が得られる．式 (8) の右辺を変形すると

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \tag{9}$$

となり，これより式 (5) が導きられる．

(c) 式 (5) に基づいて，$T_3(x)$ を x の多項式として表せ．

(d) $T_3(x)$ を用いて，$\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ の多項式として表せ．

(e) (d) の結果を利用して，次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta \tag{10}$$

ちなみに，$T_n(x)$ は第一種チェビシェフ多項式と呼ばれ，cos の n 倍角の公式の導出やチェビシェフ展開に基づく関数の近似表現等に利用される有名な多項式である．

(福井大 2020) (m20202422)

0.141 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \left(\dfrac{4x+3}{x^2-3x+4}\right)$　　(2) $y = \sin^5 x \ \cos 5x$

(3) $y = \log(1 + x^2)$　　(4) $y = e^{\sqrt{x}}$

(福井大 2020) (m20202423)

0.142 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{2x^4 - 3x^2 + 4}{x^3} dx$　　(2) $\displaystyle\int x \sin(x^2+1) dx$

(福井大 2020)　　(m20202424)

0.143 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^e x^2 \log x dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 2x dx$

(福井大 2020)　　(m20202425)

0.144 次の微分方程式を解け.

(1) $\displaystyle\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = x^2 + 2x - 1$

(福井大 2020)　　(m20202426)

0.145 次のベクトルと行列の演算を行え.

(1) $2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$　　(2) $3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$　　(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

(福井大 2020)　　(m20202427)

0.146 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とし，t が転置を表すとき，${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ が成り立つことを示せ.

(福井大 2020)　　(m20202428)

0.147 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値に中で，最小の値を持つ固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2020)　　(m20202429)

0.148 $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めよ.

(2) $\Phi_A(A) = 0$（ケーリー・ハミルトンの定理）が成り立つことを示せ.

(3) 上の結果を利用して，A^n を求めよ.

(福井大 2020)　　(m20202430)

0.149 次の連立方程式について以下の問に答えなさい.

$x+y+z=3 \quad \cdots\cdots ①$
$x-y+z=0 \quad \cdots\cdots ②$

(1) 上式を行列とベクトルを使って表現しなさい.

(2) はきだし法などを用いて解きなさい.

(3) 求めた解の概形を，式 ① と ② が示す図形とともに示し，簡潔な補足説明を加えなさい.

(福井大 2020) (m20202431)

0.150 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ を求めよ.

(福井大 2020) (m20202432)

0.151 次式は，1 質点 1 自由度モデルの自由振動の運動方程式である．なお，m:質量，c:減衰係数，k:剛性であり，$x(t)$: 時間 t の関数である変位である.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0$$

(1) 両辺を m で除し，$\omega^2=\dfrac{k}{m}$，$2h=\dfrac{c}{m\omega}$ とおいて，上式を書き換えなさい.

(2) a をゼロでない定数とするとき，$x(t)=ae^{\lambda t}$ が運動方程式の解となるための条件を示せ.

(3) 上の結果を利用して $x(t)$ の一般解を示せ.

(4) $0<h<1$ の時，(3) で得られた解を，三角関数を用いて表せ.

(福井大 2020) (m20202433)

0.152 $f(x,y)$ を 2 変数の C^2 級関数，α，β を定数として $z(t)=f(e^{\alpha t},e^{\beta t})$ とおく． $z''(0)$ の値を α，β，$f_x(1,1)$，$f_y(1,1)$，$f_{xx}(1,1)$，$f_{xy}(1,1)$，$f_{yy}(1,1)$ を用いて表せ.

(岐阜大 2020) (m20202601)

0.153 恒等式

$$\frac{x^2+5x+14}{x(x^2+4x+7)}=\frac{a}{x}-\frac{bx+c}{x^2+4x+7}$$

が成立するような定数 a,b,c の値を求めよ．また，次の不定積分 I を求めよ.

$$I=\int\frac{x^2+5x+14}{x(x^2+4x+7)}dx$$

(岐阜大 2020) (m20202602)

0.154 a,b を定数とする．連立方程式

$$\begin{cases} x-3y+2z=0 \\ 2x-11y+6z=a \\ x+7y-2z=b \end{cases} \qquad \text{(E)}$$

が次の 2 条件を同時に満たすような定数 a,b の条件を求めよ.

(i) (E) の解は無限個ある.

(ii) $(x,y,z)=(1,1,1)$ は (E) の解ではない.

(岐阜大 2020) (m20202603)

0.155 A を対角化可能な n 次行列，$\alpha \neq 0$ を実数とする．このとき $(n+1)$ 次行列

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

も対角化可能であることを示せ．なお，上式の右辺において右上の 0 と左下の 0 はそれぞれ行零ベクトル，列零ベクトルを表す．

(岐阜大 2020)　　(m20202604)

0.156 成分が $0, 1, -1$ のどれかからなる 2 次行列を考える．以下の問に答えよ．

(1) $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とする．

[ア] N の行列式を求めよ．

[イ] N の固有値を求めよ．

[ウ] ある自然数 k に対して，$A^k = O$ となるような行列 A を冪零（べきれい）行列という．N が冪零行列であることを示せ．

(2) 成分が $0, 1, -1$ のどれかからなる 2 次行列で，以下の [い]〜[り] であるものを，それぞれ一つずつ挙げよ．ただし，同じものを二度挙げてはならない．

[い] 零行列　[ろ] 単位行列　[は] 直交行列　[に] 対称行列　[ほ] 対角行列　[へ] 上三角行列
[と] 下三角行列　[ち] 固有値がただ一つの行列　[り] 固有値が純虚数である行列

(3) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする．M が対角化できないことを示せ．

(4) $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．任意のベクトル $\vec{x} \neq \vec{0}$ に対して，

$${}^t\vec{x}A\vec{x} = (\vec{x},\ A\vec{x}) > 0$$

を満たすような行列 A を正定値行列という．L が正定値行列であることを示せ．

(岐阜大 2020)　　(m20202605)

0.157 微分方程式

$$(E) \quad y' + yx = 1 + x + x^2$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) 同次方程式　$y' + yx = 0$　の一般解を求めよ．

(2) (E) の一般解を求めよ．

(3) (E) の解で，条件 $y(0) = 0$ を満たすものを求めよ．

(4) (3) で求めた y について，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{2x + \sin x}$ を求めよ．

(岐阜大 2020)　　(m20202606)

0.158 次の行列 $A,\ B$ に関して，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ -\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

(1) A の行列式の値を求めよ.

(2) A の逆行列を求めよ.

(3) BA を求めよ.

(4) $ABABA^2$ を求めよ.

(豊橋技科大 2020) (m20202701)

0.159 5 個の白い玉と 3 個の赤い玉が入っている袋がある. この袋から無作為に玉を取り出すとき, 以下の問いに答えよ. ただし, 答が分数となる場合は既約分数で求めよ.

(1) 袋から同時に 2 個の玉を取り出すとき, 2 個の玉の色が異なる確率を求めよ.

(2) 袋から同時に 2 個の玉を取り出すとき, 2 個とも白い玉である確率を求めよ.

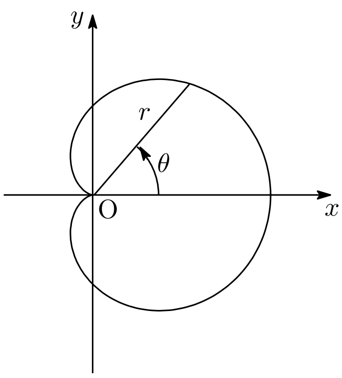
(3) 袋から同時に 3 個の玉を取り出すとき, 3 個とも同じ色の玉である確率を求めよ.

(4) 袋から 1 個ずつ全部の玉を取り出し, 取り出した順に円形に並べるとき, 赤い玉が隣り合わない並び方になる確率を求めよ.

(5) 袋から 1 個ずつ全部の玉を取り出し, 取り出した順に円形に並べるとき, 赤い玉が 3 個連続して並ぶ確率を求めよ.

(豊橋技科大 2020) (m20202702)

0.160 極方程式 $r = 1 + \cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ で表される曲線について, 以下の問いに答えよ.



(1) 曲線上の点の座標 (x, y) を, θ を用いて表せ.

(2) 曲線上の $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ における点を P とする. 点 P における曲線の接線の方程式を, x と y を用いて表せ.

(3) 曲線に囲まれた領域の面積を求めよ.

(4) 曲線の全長を求めよ.

(豊橋技科大 2020) (m20202703)

0.161 関数 $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2+1}$ に対し, $f(x)$ のマクローリン展開を x^4 の項までで打ち切って得られる高々4 次の多項式 $g(x)$ を求めよ.

(名古屋工業大 2020) (m20202901)

0.162 (1) 次の不定積分を求めよ. $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\cos x}$

(2) 次の広義積分が収束するかどうか判定せよ. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+1}}$

(名古屋工業大 2020) (m20202902)

0.163 次の関数 $f(x,y)$ および $g(x,y)$ が原点 $(0,0)$ において極値をとるかどうかを，それぞれ判定せよ．なお，極値をとる場合については極大・極小の区別を明示して判定すること．

$$f(x,y) = x^2y + 3x^2 - 5xy + 2y^2$$
$$g(x,y) = (1 + x^2 - y^2)\cos(3x - 2y)$$

(名古屋工業大 2020)　　(m20202903)

0.164 次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2 - 2y + 4)^3}} \qquad \text{ただし} \quad D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 2x^2 - 1 \leqq y \leqq x^2\right\}$$

(名古屋工業大 2020)　　(m20202904)

0.165 x, y, z についての次の連立 1 次方程式を解け．ただし a は定数である．

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z &=& 4 \\ 2x + 3y + az &=& 5 \\ x + ay - 2z &=& a \end{array}\right.$$

(名古屋工業大 2020)　　(m20202905)

0.166 次の実対称行列 A に対し，実直交行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列となるものと，そのときの対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2020)　　(m20202906)

0.167 次の関数を微分せよ．（e は自然対数の底である.）

(1) $y = x^2e^x$　　(2) $y = \sqrt{\cos 2x}$

(3) $y = \log_e(1 - e^{-x})$　　(4) $y = \sqrt{\dfrac{x}{(x+1)^5}}$

(三重大 2020)　　(m20203101)

0.168 次の不定積分，定積分を求めよ．（e は自然対数の底である.）

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+1}dx =$　　(2) $\displaystyle\int xe^{-x}dx =$

(3) $\displaystyle\int_1^2 (x-1)(x-2)dx =$　　(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx =$

(三重大 2020)　　(m20203102)

0.169 次の関数 $f(x)$ の増減を調べて極値と変曲点を示し，グラフの概形を描け.（e は自然対数の底である.）

$$f(x) = x(\log_e x - 1)^2 \qquad (x > 0)$$

(三重大 2020)　　(m20203103)

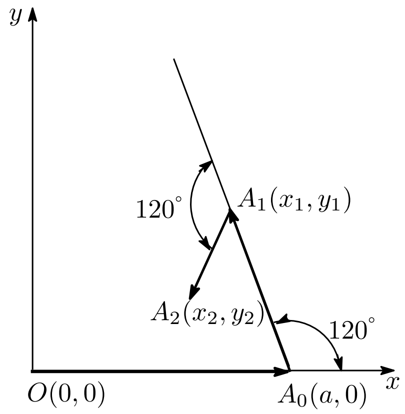
0.170 次の不等式が表す領域を xy 平面に図示せよ．

$$(-x + y^2 - 1)(4x^2 - 8x + y^2) < 0$$

(三重大 2020)　　(m20203104)

0.171 図に示すように原点 $O(0,0)$ から x 軸上を点 $A_0(a,0)$ に向かうベクトル $\overrightarrow{OA_0}$ がある．次にベクトル $\overrightarrow{A_0A_1}$ を，点 A_0 を始点とし，長さが $\overrightarrow{OA_0}$ の $1/2$，向きを $\overrightarrow{OA_0}$ から 120°(反時計回り）方向とするベクトルとして定義する．さらにベクトル $\overrightarrow{A_1A_2}$ を点 A_1 を始点とし，長さが $\overrightarrow{A_0A_1}$ の $1/2$，向きを $\overrightarrow{A_0A_1}$ から 120°(反時計回り）方向とするベクトルとして定義する ．以降同じ操作を行ってベクトルを定義していくものとして，以下の設問に答えよ．

(1) 点 A_1 の座標 (x_1, y_1) を求めよ．



(2) 点 A_n の座標 (x_n, y_n) を点 A_{n-1} の座標 (x_{n-1}, y_{n-1}) と a を使って表せ．

(3) この操作を繰り返したとき，点 A_n が漸近する座標 (x, y) を求めよ．

(三重大 2020)　　(m20203105)

0.172 ある選挙区において，国政選挙の有権者全員の中で A 党の支持率が 20% であるという．この選挙区の有権者の中から無作為に n 人を抽出するとき，k 番目の抽出された人が A 党支持なら 1，不支持なら 0 の値を対応させる確率変数を X_k とする．

(1) 標本平均 $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ について期待値 $E(\overline{X})$ を求めよ．

(2) 標本平均 $\overline{X}$ の標準偏差 $\sigma(\overline{X})$ を 0.02 以下にするためには，抽出される標本の大きさは，少なくとも何人以上必要であるか?

(三重大 2020)　　(m20203106)

0.173 3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えなさい．

(1) 行列 A の行列式を求めなさい．

(2) 行列 A の固有値を求めなさい．

(3) 行列 A について，1 次独立な固有ベクトルをすべて求めなさい．ただし，固有ベクトルの大きさを 1 としなさい．

(4) (3) で求めた固有ベクトルが互いになす角度をすべて求めなさい．

(三重大 2020)　　(m20203107)

0.174 xyz 直交座標系であらわされる空間の xy 平面上に楕円 E,

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$$

がある．楕円 E を底面とし，z 軸上の点 $(0,0,2)$ を頂点とする錐体（楕円錐）P について以下の問いに答えなさい．ただし，$0 \leqq z \leqq 2$ とする．

(1) 錐体 P の方程式を x, y, z を用いてあらわしなさい.

(2) 楕円 E 上の点 $(0, 2, 0)$ をとおり, $\overrightarrow{n} = (0, 1, 3)$ を法線とする平面 α の方程式を示しなさい.

(3) 平面 α による錐体 P の切断面の外周上の任意の点を X とする. 平面 α 上の点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ と X との距離 R（$\overrightarrow{\mathrm{XA}}$ の大きさ）は定数になる. R を求めなさい.

(4) 平面 α による錐体 P の切断面の面積 S を求めなさい.

(三重大 2020)　　(m20203108)

0.175 以下の問いに答えなさい. ただし, y は x の関数であり, $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする.

(1) 初期条件を $y(1) = 0,\ y'(1) = 1$ とするとき, 微分方程式　$xy'' + y' = 0$　を解きなさい.

(2) 区間 $\sqrt{3} \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$ において, (1) の解である関数が描く曲線の長さ L を求めなさい. ただし, 区間 $a \leqq x \leqq b$ の関数 $y = f(x)$ の曲線の長さ L は, $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ で与えられる.

(三重大 2020)　　(m20203109)

0.176 $f(x),\ g(x)$ を実数全体で微分可能な関数とする.

(1) $y = f(x),\ xy'' = 2y',\ f(-1) = -2,\ f(1) = 2$ とする. ただし, $x \neq 0$ のとき, $y' \neq 0$ とする. $f(x)$ を求めなさい.

(2) $y = g(x),\ y''' - 3y'' + 3y' - y = x^2 - 6x + 6,\ g(-1) = \dfrac{1}{e} - 1,\ g(0) = 0,\ g(1) = e - 1$ とする. $g(x)$ を求めなさい.

(三重大 2020)　　(m20203110)

0.177 3 次の実対称行列

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) 行列 P の固有値 $\lambda_i\ (i = 1, 2, 3)$ と対応する単位固有ベクトル $v_i\ (i = 1, 2, 3)$ を求めなさい. ただし, $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3$ を満たすものとする.

(2) VV^T を求めなさい. ただし,

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

である.

(3) 行列 P は固有値・固有ベクトルに対して, $PV = VA$ が成り立つ. ここで,

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

である. このとき, $P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$ を満たす行列 $P_1,\ P_2,\ P_3$ が存在することが知られている. 行列 $P_1,\ P_2,\ P_3$ を求めなさい.

(4) 0 以上の整数 n に対して P^n を求めなさい.

(三重大 2020)　　(m20203111)

0.178 $x > 0$ において，$h(x) = \log \alpha^x - \log x^\alpha$ と定義する．ここで，α は正の実数とする．任意の正の実数 x に対して，$x^\alpha \leqq \alpha^x$ となる正の実数 α を求めなさい．

(三重大 2020)　　(m20203112)

0.179 a を実数とする．3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を考える．E は 3 次の単位行列を表す．

(1) 行列 $aE + A$ の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) 行列 $aE + A$ の階数を求めよ．

(3) 3 次正則行列 P で

$$P^{-1}(aE + A)P = aE + A^2$$

を満たすものは存在しないことを示せ．

(京都工芸繊維大 2020)　　(m20203401)

0.180 極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{Tan}^{-1}(x^3 + x) - x}{x^3}$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2020)　　(m20203402)

0.181 広義積分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1}}$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2020)　　(m20203403)

0.182 xy 平面の領域 $D = \{(x, y) \mid 0 < x < \infty,\ -\infty < y < \infty\}$ で定義される関数

$$f(x, y) = \log x + \frac{2y^2 + 2y + 1}{2x^2}$$

を考える．

(1) 関数 $f(x, y)$ の 1 次および 2 次の偏導関数をすべて求めよ．

(2) 関数 $f(x, y)$ の極値をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2020)　　(m20203404)

0.183 (1) 関数 $z = z(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ に関する微分方程式

$$(*) \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} - 6z = 4e^t$$

を考える．

(a) 微分方程式 $\dfrac{d^2 z}{dt^2} + \dfrac{dz}{dt} - 6z = 0$ の一般解を求めよ．

(b) $(*)$ の一般解を求めよ．

(2) 関数 $y = y(x)$ $(x > 1)$ に関する微分方程式

$$(**) \qquad (x-1)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2(x-1)\frac{dy}{dx} - 6y = 4x - 4$$

を考える．変数変換 $x(t) = e^t + 1$ $(-\infty < t < \infty)$ により，$z(t) = y\,(x(t))$ とおく．

(a) $\dfrac{dz}{dt}$ および $\dfrac{d^2 z}{dt^2}$ を $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2 y}{dx^2}$ および x を用いて表せ．

(b) $(x-1)^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + 2(x-1)\dfrac{dy}{dx} - 6y = \dfrac{d^2 z}{dt^2} + \dfrac{dz}{dt} - 6z$ が成り立つことを示せ．

(c) $(**)$ の一般解を求めよ．

(京都工芸繊維大 2020)　　(m20203405)

0.184 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & a \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．ただし，a, b は実数とする．

(1) A の固有値と，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求め，すべての固有値と固有ベクトルが実数であるための条件を述べよ．

(2) A の逆行列が存在するための条件を述べ，逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) 問い (2) の結果を用い，逆行列 A^{-1} が存在するときの連立方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ の解を求めよ．

(4) A を対角化する行列 P を一つ示し，A を対角化せよ．

(5) A^n を求めよ．また，$n \to \infty$ のとき A^n のすべての要素が実数を持ち，かつ発散しないための a, b の範囲を示せ．

(大阪大 2020)　　(m20203501)

0.185 (1) 次の微分方程式を解け．ただし，$x = 0$ において $y(0) = 0$ とする．

$$\frac{dy(x)}{dx} - 2y(x) - 2e^x \sqrt{y(x)} = 0$$

(2) ラプラス変換を用いて，次の微分方程式を解け．ただし，$t = 0$ において $x(0) = -1$ とする．

$$\frac{x(t)}{dt} + 2x(t) - 3\int_0^t x(\tau) d\tau = t$$

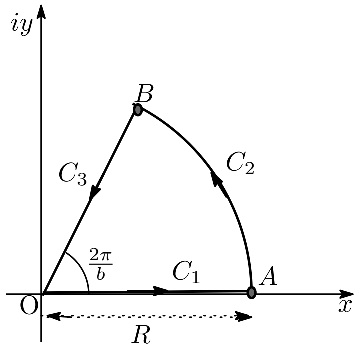
(大阪大 2020)　　(m20203502)

0.186 積分 $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^b + 1} dx$ を考える．ただし，b は正の整数とする．この積分を計算するため，右下図に示す複素平面上の扇形の周に沿う単位閉曲線 C を考え，以下の図のように経路 C_1, C_2, C_3 を定める． ただし，x, y は実数で，AB は原点を中心とする半径 R $(R > 1)$ で中心角が $\dfrac{2\pi}{b}$ の円弧である．

C_1 ：原点 O から線分 OA に沿って点 A に至る経路

C_2 ：点 A から円弧 AB に沿って点 B に至る経路

C_3 ：点 B から線分 BO に沿って原点 O に至る経路



このとき，複素数 $z = x + iy$ について以下の問に答えよ．
ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) $I_3 = \displaystyle\int_{C_3} \frac{1}{z^b + 1} dz$ を，$I_1 = \displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z^b + 1} dz$ を用いて表せ．

(2) 閉曲線 C で囲まれた領域内における $f(z) = \dfrac{1}{z^b + 1}$ の特異点を求め，そこでの留数を計算せよ．

(3) 留数定理および $\displaystyle\lim_{R \to \infty} \int_{C_2} \frac{1}{z^b + 1} dz = 0$ を用いて，I を計算せよ．ただし，i を用いずに表せ．

(大阪大 2020)　　(m20203503)

0.187 (1) 次の表に示すデータ $x,\ y$ について，以下の問いに答えよ．

	No.1	No.2	No.3	No.4	No.5
x	1.0	3.0	2.5	2.0	4.0
y	11.0	17.0	15.0	13.0	19.0

(1-1) データ $x,\ y$ の分散 $S_{xx},\ S_{yy}$ および共分散 S_{xy} をそれぞれ求めよ．

(1-2) データ x と y の相関係数を r とするとき．r^2 の値を求めよ．

(1-3) x を説明変数，y を目的変数とするとき，データ $x,\ y$ の回帰直線の式を求めよ．

(2) テレビの視聴率について，以下の問いに答えよ．
ただし，$0 < \alpha < 1$ である値 α と標準正規分布に従う確率変数 Z について
$P(Z \geqq z_\alpha) = \alpha$ となる z_α を考える．このとき，
$z_{0.050} = 1.645,\ z_{0.025} = 1.960,\ z_{0.010} = 2.326,\ z_{0.005} = 2.576$ とする．

(2-1) 無作為に抽出された 900 世帯について調査したところ，180 世帯がある番組を視聴していた．
この番組の視聴率 p を信頼係数 95% で推定せよ．
ただし，信頼限界は小数第三位まで求めよ．

(2-2) 95% の信頼区間の幅を 0.05 以下にするためには，何世帯以上調査すればよいか答えよ．

(大阪大 2020)　　(m20203504)

0.188 関数 $w(t)$ は初期条件「$t = 0$ のとき $w = 3$」をみたす微分方程式

$$\frac{dw}{dt} = \frac{t}{w}$$

の解とする．以下の問に答えよ．

(1) 関数 $w(t)$ を求めよ．

(2) 関数 $w(t)$ を用いて，2 変数関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \frac{3}{7}w(x + y) + \frac{1}{17}w(x - 2y)^2$$

と定める．次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D f(x, y)dxdy\ , \qquad D = \{(x, y)\ \mid\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \leqq 4\}$$

(大阪大 2020)　　(m20203505)

0.189 3 次の正方行列 $M = (m_{ij})$ に対して，対角成分の和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} m_{ii}$ を $\mathrm{tr}(M)$ で表すとする．

また，行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) (1) で求めた行列 A の 3 つの固有値を，それぞれ $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ とする．このとき，
$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ 　が成り立つことを示せ．

(3) 実数を成分とする 3 次の正方行列 $B,\ C$ に対して，　$\mathrm{tr}(BC) = \mathrm{tr}(CB)$　が成り立つことを示せ．

(4) 実数を成分とする 3 次の正方行列 D は，互いに異なる実数の固有値 $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3$ を持つとする．
このとき，　$\mathrm{tr}(D) = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$　が成り立つことを示せ．

(大阪大 2020)　　(m20203506)

0.190 N を 6 以上の自然数とする．1, 2, $\cdots$, N から異なる 6 個の数を無作為に選ぶ．選んだ数を大きい順に X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 とする．以下の問に答えよ．

(1) $N = 10$ のとき，$X_4 = 6$ となる確率を求めよ．

(2) $N \geqq 6$ に対して，$X_4 = 5$ となる確率 $p(N)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた確率 $p(N)$ を最大にする自然数 N を求めよ．また，そのときの $p(N)$ の値を求めよ．

(大阪大 2020)　　(m20203507)

0.191 c, w, x, y, z を実数とし, 4 次正方行列 A と 4 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -c+1 & -1 & -2c+1 \\ -1 & 2c+1 & 2 & 3c-1 \\ 2 & -c+4 & 0 & -3c+2 \\ 0 & 0 & 1 & c^2-c \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

により定める．

(1) A の行列式を求めよ．

(2) A が正則にならない c の値をすべて求めよ．

(3) c を，(2) で求めた値のうち最大のものとする．このとき，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{0}$ でない $\boldsymbol{x}$ を 1 つ求めよ．ただし，$\boldsymbol{0}$ は 4 次元零ベクトルとする．

(大阪府立大 2020)　　(m20203601)

0.192 次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(1+y^2)x}{(1+x^2)y}$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} = x^2$

(大阪府立大 2020)　　(m20203602)

0.193 (1) 次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．　$\dfrac{s}{(s^2+3)^2}$

(2) 次の複素積分の値を求めよ．ただし，積分路 C は $|z+i| = 3$ で表される円周上を反時計回りに回るものとする．　$\displaystyle\int_C \frac{z^2-4z}{(z+1)^2(z^2+9)}dz$

(大阪府立大 2020)　　(m20203603)

0.194 a を実数とする．x, y, z に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

を解け．

(神戸大 2020)　　(m20203801)

0.195 正方行列 X の固有値 λ に対する固有空間を $V_X(\lambda)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) X, Y を $XY = YX$ となる正方行列とする．$x \in V_X(\lambda)$ のとき，$Yx \in V_X(\lambda)$ を示せ．

(2) X を対称行列とし，λ, μ を X の異なる固有値とする．$V_X(\lambda)$ の要素と $V_X(\mu)$ の要素は直交することを示せ．

(3) 行列

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

に対し，X, Y の固有値と固有空間をすべて求めよ．

(4) (3) の行列 X, Y に対し，$P^{-1}XP$ と $P^{-1}YP$ がともに対角行列になるような正則行列 P を 1 つ求めよ．

(神戸大 2020)　　(m20203802)

0.196 $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + x + y$ とする．

(1) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) 条件 $x^2 + y^2 \leq 5$ の表す領域は有界閉集合なので，$x^2 + y^2 \leq 5$ という条件のもとで連続関数 $f(x,y)$ は最大値と最小値をもつ．この最大値と最小値を求めよ．

(神戸大 2020)　　(m20203803)

0.197 (1) xy 平面上の領域

$$D = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2 + (y-1)^2 \leq 1\right\}$$

が極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$ によって対応する θr 平面上の領域を E とする．D と E を図示せよ．

(2) xyz 空間内の領域 A, B を次のように定める．

$$A = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad 0 \leq z\right\}$$

$$B = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; x^2 + (y-1)^2 \leq 1\right\}$$

A と B の共通部分の体積を求めよ．

(神戸大 2020)　　(m20203804)

0.198 α と β について連立方程式

$$\begin{cases} \sin\beta = 2\sin\alpha + 2 \\ \sin\beta = -\sin\alpha + h \end{cases}$$

について（但し，$0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$ とする．），以下の問いに答えよ．

(1) 連立方程式が解を持つ為の h の範囲を求めよ．

(2) (1) の範囲の各 h について，解の個数を求めよ．

(3) h が (1) の範囲にある時，$h^3 - h$ が最小となる h の値と最小値を求めよ．

(高知大 2020)　　(m20204501)

0.199 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

について考える．このとき次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A の固有値のうちで最大なものを λ_0 とおく（固有値がただ一つの場合には，それを λ_0 とおく）．このとき λ_0 に対応する固有ベクトルで，「 ベクトルの長さ（大きさ）は 1 」かつ「 第 1 成分は負でない 」という条件を満たすものを求めよ．

(九州大 2020)　　(m20204701)

0.200 二直線

$$\ell_1 : \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 + u\mathbf{a}$$
$$\ell_2 : \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 + v\mathbf{b}$$

は，交わらず，また平行でもないとする．次の各問に答えよ．

(1) ℓ_1 上の点 F と ℓ_2 上の点 G の位置ベクトルを

$$\mathbf{f} = \mathbf{x}_1 + s\mathbf{a}$$
$$\mathbf{g} = \mathbf{x}_2 + t\mathbf{b}$$

とする．このとき，点 F と G を通過する直線が ℓ_1, ℓ_2 と直交するときに満たす関係式を求めよ．

(2) ℓ_1 と ℓ_2 に直交する直線がちょうど一本存在することを示せ．

(九州大 2020)　　(m20204702)

0.201 $f(x,y) = \arctan\dfrac{x}{y}$ 　について考える．

(1) $f(x,y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ．

(2) 以下の条件下のもとで $f(x,y)$ の曲面積を求めよ．

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq 1$$

(九州大 2020)　　(m20204703)

0.202 領域 $R = \left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \le y \le 2x\right\}$ に対する積分　$I = \displaystyle\iint_R (x^2 - y^2)e^{-x^2-y^2-3xy}\,dxdy$　を求めよ．

(九州大 2020)　　(m20204704)

0.203 (1) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ．

$$y'' - y' - 2y = e^{2x}$$

(2) 次の $y(x)$ および $z(x)$ に関する連立微分方程式の一般解を求めよ．

$$y' - 2y - z = e^x\ ,\quad y' - 6y + z' = 0$$

(3) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ．

$$\left(\frac{y'}{y^2}\right)' - \frac{1}{y} = 0$$

(九州大 2020)　　(m20204705)

0.204 次の線形変換を考える．以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{p}' = A\boldsymbol{p}\,,\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\,,\quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\,,\quad \boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

(1) 線形変換の像 $\boldsymbol{p}'$ はある平面上に限定される．この平面を表す式を求めよ．

(2) (1) で求めた平面に対する零でない法線方向ベクトル $\boldsymbol{u}$ を示せ．

また，$\boldsymbol{u}$ とベクトル $\boldsymbol{p}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ に直交するベクトルを求めよ．

(3) $\boldsymbol{p} \neq 0$ のとき $\dfrac{|\boldsymbol{p}'|}{|\boldsymbol{p}|}$ の最大値を求めよ． $\dfrac{|\boldsymbol{p}'|}{|\boldsymbol{p}|}$ が最大値をとるときの x, y, z の条件を示せ.

(九州大 2020)　　(m20204706)

0.205　直交座標系において，x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とする.

ベクトル場

$$A = \bigtriangledown(e^{xy} - yz^2) + \bigtriangledown \times (z^3\boldsymbol{i} + x^3\boldsymbol{j} + \sin(2x-y)\boldsymbol{k}\ )$$

について以下の問いに答えよ.

(1) $\bigtriangledown A$ を求めよ.　　(2) $\bigtriangledown \times A$ を求めよ.

(3) $\bigtriangledown A = 0$ かつ $\bigtriangledown \times A = 0$ を満たす点を求めよ.

(九州大 2020)　　(m20204707)

0.206　確率 $p(0 < p < 1)$ で表，確率 $1-p$ で裏がでるコインを n 回独立に投げる．以下の問いに答えよ.

(1) n 回のうち表が出た回数を表す確率変数を X とする．X の値が k $(k \in \{0, 1, \cdots, n\})$ となる確率 $P(X = k)$ を求めよ.

(2) X の期待値 $E[X]$ について，$E[X] = np$ が成り立つことを示せ.

(3) λ を正の定数として $p = \dfrac{\lambda}{n}$ とすると，以下が成り立つことを示せ.

$$\lim_{n\to\infty} P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

ただし，任意の実数 a について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$ を用いてよい.

(九州大 2020)　　(m20204708)

0.207　$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ の一般解を求めよ.

(熊本大 2020)　　(m20205201)

0.208　点 $(2,\ -1,\ 3)$ を通り，$(1,\ 5,\ -2)$ の方向ベクトルをもつ直線の方程式を求めよ.

(熊本大 2020)　　(m20205202)

0.209　次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ を考える.

$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$$

この漸化式は行列を用いて次のように表現できる.

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えなさい.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値および対応する固有ベクトルを求めなさい.

(2) $B = P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P を用いて，対角行列 B を求めなさい.

(3) 行列 A^n を求めなさい．ただし，A^n は次式で定義される.

$$A^n = \underbrace{AAA\cdots A}_{n}$$

(4) 上記 (3) の結果を利用して，$a_0 = 0,\ a_1 = 1$ を初期値としたときの数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めなさい．

(熊本大 2020)　　(m20205203)

0.210 (1) 次の微分方程式の解 $y(t)$ を求めなさい．ただし，$t=0$ での初期値を $y(0)=1$ とする．

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0$$

(2) 次の微分方程式について，特定方程式（補助方程式）を求めなさい．

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$$

(3) (2) の結果を利用して $y(t)$ の一般解を求めなさい．ただし，任意定数を $C_1,\ C_2$ とする．

(4) (3) の結果を利用して，次の微分方程式の解 $y(t)$ を求めなさい．
ただし，$t=0$ での初期値を $y(0)=1,\ \left.\dfrac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 3$ とする．

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2$$

(熊本大 2020)　　(m20205204)

0.211 次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 2 つの複素数 $\sqrt{3}-i$ と $(\sqrt{3}-i)^{-1}$ を，複素平面上に図示せよ．

(2) $(\sqrt{3}-i)^{-6}$ を計算し，$x+yi$（x,y は実数）の形で求めよ．

(宮崎大 2020)　　(m20205301)

0.212 2 変数関数 $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$ について，次の各問に答えよ．

(1) 2 階までの偏導関数 $f_x(x,y),\ f_y(x,y),\ f_{xx}(x,y),\ f_{xy}(x,y),\ f_{yx}(x,y),\ f_{yy}(x,y)$ をすべて求めよ．

(2) $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めよ．

(3) (2) で求めたすべての (x,y) について，極値を与える点であるか，答えよ．極値を与える点であるときは，極大値を与えるのか極小値を与えるのかについても答えよ．

(宮崎大 2020)　　(m20205302)

0.213 次の微分方程式の一般解 $y=y(x)$ を求めよ．

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 7\dfrac{dy}{dx} + 12y = 0$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 7\dfrac{dy}{dx} + 12y = e^{-2x}$

(宮崎大 2020)　　(m20205303)

0.214 重積分

$$I = \iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \qquad D = \left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 2\right\}$$

について，次の各問に答えよ．

(1) 領域 D を，xy 平面上に図示せよ．

(2) 重積分 I の値を求めよ．

(宮崎大 2020)　　(m20205304)

0.215 連立一次方程式 $\begin{cases} 2x & -y & -3z & = & 2 \\ x & -3y & -2z & = & 5 \\ -x & +y & +z & = & -3 \end{cases}$ について，次の各問に答えよ．

(1) この連立一次方程式を，行列 A を用いて $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表したときの A を求めよ．ただし，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{b}$ はベクトルであり，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ とする．

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) この連立一次方程式を解け．

(宮崎大 2020)　　(m20205305)

0.216 以下は数え上げの問題である．(1) から (5) の各問いに答えよ．ただし，同じ数字を繰り返し使用してはいけないものとする．

(1) 5 つの数字 $1, 2, 3, 4, 5$ から作ることができる 3 桁の数はいくつあるか．

(2) (1) のうち 500 よりも小さい数はいくつあるか．

(3) (1) のうち偶数はいくつあるか．

(4) (1) のうち奇数はいくつあるか．

(5) (1) のうち 5 の倍数はいくつあるか．

(宮崎大 2020)　　(m20205306)

0.217 全体集合 U を $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ とし，部分集合 A, B, C を $A = \{a, b, c, d\}$，$B = \{b, d, f, h\}$，$C = \{c, d, e, f\}$ とする．この時以下の (1) から (5) の各問いに答えよ．

(1) A の捕集合

(2) 積集合 $A \cap C$ の補集合

(3) 和集合 $A \cup B$ の補集合

(4) 差集合 $B - C$

(5) 集合 U, A, B, C の関係を各要素も書き入れてベン図で示せ．

(宮崎大 2020)　　(m20205307)

0.218 命題 p を“ バナナは安い ”，命題 q を“ バナナは美味しい ”とする，この時，以下の (1) から (5) の各命題を命題 p, q を用いて示せ．ただし，“ かつ ”は記号“ $\wedge$ ”を，“ または ”は記号“ $\vee$ ”を，命題“ p ”の否定は記号“ $\neg p$ ”を，命題“ q ”の否定は記号“ $\neg q$ ”を用いよ．

(1) バナナは安く，かつ美味しい．

(2) バナナは安いが，美味しくない．

(3) “ バナナは高いか，または美味しい ”ということはない．

(4) バナナは安くもなく美味しくもない．

(5) バナナは安いか，またはバナナは高くて美味しい．

(宮崎大 2020)　　(m20205308)

0.219 n 個の中から r 個を取り出す組合せを ${}_n\mathrm{C}_r$ とする時，以下を証明せよ．

$$ {}_{n+1}\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{r-1} + {}_n\mathrm{C}_r $$

(宮崎大 2020)　　(m20205309)

0.220 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4x^2+3x-6}-2x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2x^2-2x-1}{2x^3}$

(香川大 2020) (m20205701)

0.221 $z=\dfrac{\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ のとき偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ を求めよ．

(香川大 2020) (m20205702)

0.222 次の 2 重積分を求めよ． $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x}dxdy \quad D: x^2+y^2 \leqq 4x,\ y \geqq 0$

(香川大 2020) (m20205703)

0.223 ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ に垂直で $x=3,\ y=6$ を通る直線を求めよ．

(香川大 2020) (m20205704)

0.224 以下に示す行列 $\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{V}$ について各設問に答えよ．

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & -8 \\ -1 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{V}=\begin{bmatrix} 4 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{U}$ の階数（ランク）を求めよ．

(2) 直交行列を求め，行列 $\boldsymbol{V}$ を対角化せよ．

(香川大 2020) (m20205705)

0.225 次の微分方程式について，以下の設問に答えよ．

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}+2\frac{df(x)}{dx}-8f(x)+g(x)=0$$

(1) 関数 $g(x)=0$ の場合において，微分方程式を満たす関数 $f(x)$ の一般解を求めよ．

(2) 関数 $g(x)=-\dfrac{1}{2}e^{-x}$ の場合において，微分方程式を満たす関数 $f(x)$ の一般解を求めよ．

(3) 設問 (2) において，$x=0$ のときの関数 $f(x)$ およびその 1 階導関数 $f'(x)$ の値がそれぞれ次のように与えられたとき，関数 $f(x)$ を求めよ．

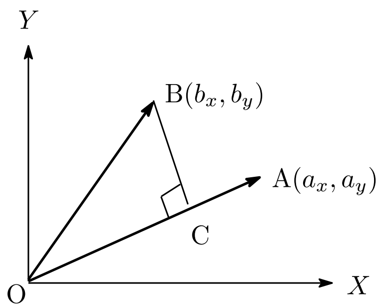
$$f(0)=-\frac{1}{18},\ f'(0)=\frac{13}{18}$$

(4) 設問 (3) において求めた関数 $f(x)$ を x の 2 次の項までマクローリン展開せよ．

(島根大 2020) (m20205801)

0.226 下図に示すように，XY 平面上の座標 (a_x,a_y) に点 A が， 座標 (b_x,b_y) に点 B がある． 点 B から線分 $\overline{\mathrm{OA}}$ に対して垂線を引き， 垂線と線分 $\overline{\mathrm{OA}}$ との交点を点 C とする． 原点 O から点 A までのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と， 原点 O から点 B までのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は， $X,\ Y$ 軸方向の単位ベクトル $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}$ を用いてそれぞれ次式のように表すことができる． 以下の設問に答えよ．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}\ ,\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}$$



(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積を求めよ.

(2) 線分 $\overline{\mathrm{OC}}$ の長さ l を求めよ.

(3) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を求めよ.

(4) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ を求めよ.

(5) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が直交していることを計算により示せ.

(6) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = A\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 P がある. ここで, 行列 A は以下で与えられるものとする. ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を用いて表せ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(7) 設問 (6) において, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を満たす定数 k が存在するとき, その k を求めよ. ただし, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \neq \mathbf{0}$ とする.

(島根大 2020)　　(m20205802)

0.227 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.　　(2) A^n を求めよ.

(島根大 2020)　　(m20205803)

0.228 $M(3,\ \mathbb{R})$ を 3 次実正方行列全体とする. また,

$$W = \left\{ X \in M(3,\ \mathbb{R}) \ \middle|\ \mathrm{tr}(X) = 0 \right\}$$

とする. ここで, $\mathrm{tr}(X)$ は X のトレースである. すなわち, $X = (x_{ij})$ とすると, $\mathrm{tr}(X) = x_{11} + x_{22} + x_{33}$ である. 次の問いに答えよ.

(1) W は $M(3,\ \mathbb{R})$ の部分空間であることを示せ.

(2) W の基底を 1 組求め, その理由を述べよ.

(島根大 2020)　　(m20205804)

0.229 a を実数, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする. 線形写像 $f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(X) = AX$$

と定める. f の核を $\mathrm{Ker}f$, 像を $\mathrm{Im}f$ で表す. 必要なら a による場合分けを行い, それぞれの場合に $\mathrm{Ker}f$, $\mathrm{Im}f$ の次元を求めよ. さらに $\mathrm{Ker}f$, $\mathrm{Im}f$ の基底をそれぞれ 1 組ずつ求めよ.

(島根大 2020)　　(m20205805)

0.230 $\mathrm{Sin}^{-1}x\ \ (-1 < x < 1)$ を $\sin x$ の逆関数とし, $f(x) = \sin(2\mathrm{Sin}^{-1}x)$ とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $y = f(x)$ は次の微分方程式をみたすことを示せ.

$$(1 - x^2)y'' - xy' + 4y = 0$$

(2) $y = f(x)$ に対して, $(1 - x^2)^2 y''' + p(x)y' + q(x)y = 0$ が成り立つような x の多項式 $p(x)$, $q(x)$ を 1 組求めよ.

(3) $f(x)$ の増減を調べ，$f(x)$ が最大値をとる x の値と最小値をとる x の値をそれぞれ求めよ．

(4) 次の定積分を計算せよ．

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{Sin}^{-1} x \, dx$$

(島根大 2020)　　(m20205806)

0.231 $f(x,y) = \dfrac{4}{(2+x^2+y)^2}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の偏導関数を求めよ．

(2) 点 $P(1,-1,1)$ における，曲面 $z = f(x,y)$ の接平面の方程式を求めよ．

(3) $a > 0$ に対して，$D(a) = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \le x \le a \,,\; 0 \le y \le x^2\right\}$ とおく．
2 重積分　$I(a) = \displaystyle\iint_{d(a)} f(x,y)\, dxdy$　を計算せよ．さらに $\displaystyle\lim_{a\to\infty} I(a)$ を求めよ．

(島根大 2020)　　(m20205807)

0.232 直交座標系 (x,y,z) において，直線 $\ell : x-1 = -y+3 = -z-5$ および点 $A(4,5,2)$ に対し，以下の問いに答えなさい．

(1) ℓ および A を含む平面を α とする．α の方程式を求めなさい．

(2) A から ℓ に垂線 AH を引くとき，H の座標を求めなさい．

(3) 原点 O から α に垂線 OH' を引くとき，H' の座標を求めなさい．

(4) 四面体 $OAHH'$ の体積を求めなさい．

(東京都立大 2020)　　(m20205901)

0.233 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) A のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めなさい．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P をひとつ示し，A を対角化しなさい．

(3) A^n を求めなさい．ただし，n は任意の自然数とする．

(東京都立大 2020)　　(m20205902)

0.234 次の関数を微分しなさい．

(1) $f(x) = \dfrac{x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{3}}}$　　　(2) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$

(東京都立大 2020)　　(m20205903)

0.235 次の微分方程式の一般解を求めなさい．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+2xy-y^2}{x^2-2xy-y^2}$$

(東京都立大 2020)　　(m20205904)

0.236 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ のマクローリン級数を x^3 の項まで求めなさい．

(東京都立大 2020)　　(m20205905)

0.237 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\log(1+x)}{x^2}\right\}$ を求めなさい．

(東京都立大 2020)　　(m20205906)

0.238 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}\,dx$　　　(2) $\displaystyle\int \sqrt{x}\log x\,dx$

(東京都立大 2020)　　(m20205907)

0.239 2 行 2 列の行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ が与えられているとする．

このとき，以下の問いに答えよ．ただし，^{T} は，行列の転置を表す．

(1) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) P^TAP が対角行列となる直交行列 P を求めよ．

(3) 行列 A の固有値を λ_1, λ_2 とするとき，以下のすべての条件を満たす 2 行 2 列の行列 B, C を求め，以下の条件を満足していることを示せ．

(a) $A = \lambda_1 B + \lambda_2 C$

(b) $B = B^T$, $C = C^T$

(c) $BC = CB = \boldsymbol{O}_{2\times2}$，なお，$\boldsymbol{O}_{2\times2}$ は，すべてのの要素が 0 の 2 行 2 列の行列を表す．

(d) $B^2 = B$, $C^2 = C$

(東京都立大 2020)　　(m20205908)

0.240 座標空間内に原点 $O(0,0,0)$，および 4 点 $A(1,-1,0)$, $B(-1,3,2)$, $C(2,1,3)$, $D(-1,0,3)$ がある．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OC}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の 1 次結合として表せ．

(2) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ．

(東京都立大 2020)　　(m20205909)

0.241 (1) 次の関数について $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．　$x = \dfrac{a}{\cos\theta}$,　$y = b\tan\theta$　（ a, b は定数，ただし，$a \neq 0$ ）

(2) 次の関数について $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．　$y = \dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x\right)$

(3) 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to+0} x^x$

(東京都立大 2020)　　(m20205910)

0.242 $-\infty < x < \infty$ に対して

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $-\infty < x < \infty$ に対して，$F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ を求めよ．

(2) $-\infty < x < \infty$ に対して，$g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)f(x-t)dt$ を求めよ．

(3) $-\infty < x < \infty$ に対して，(2) で求めた $g(x)$ を用いて $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)dt$ を求めよ．

(東京都立大 2020)　　(m20205911)

0.243 実数 $x \geq 0$ に対する実関数 $f_k(x)$ について，以下の微分方程式の初期値問題が与えられている．

$$\frac{df_k(x)}{dx} + 2f_k(x) = f_{k-1}(x), \quad f_k(0) = 1$$

ただし，k は自然数である．また，すべての実数 $x \geq 0$ に対して $f_0(x) = 0$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f_1(x)$ を求めよ.

(2) $f_2(x)$ を求めよ.

(3) $f_k(x)$ を k を用いて表し，以下を求めよ.

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)$$

(東京都立大 2020)　　(m20205912)

0.244 次の行列 A について，下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式の値が 1 となるときの a の値を求めよ．なお，計算過程も記入せよ.

(2) (1) で求めた a の値に対する，行列 A の逆行列を求めよ．なお，計算過程も記入せよ.

(宇都宮大 2020)　　(m20206101)

0.245 次の行列 B について，下の問いに答えよ.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 B の固有値と固有ベクトルを求めよ．なお，計算過程も記入せよ.

(2) 行列 B は対角化が可能であるか調べよ，対角化が可能であるならば適当な正則行列を求めて行列 B を対角化せよ．なお，計算過程も記入せよ.

(宇都宮大 2020)　　(m20206102)

0.246 実数 $a > 1$ として下の問いに答えよ.

(1) 曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ $(1 \leq x \leq a)$ を x 軸のまわりに 1 回転したときにできる回転体の体積 $V(a)$ を求めよ.

(2) 曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ $(1 \leq x \leq a)$ を x 軸のまわりに 1 回転したときにできる回転体の側面積 $S(a)$ の式を記述し，$2\pi \displaystyle\int_1^a \frac{dx}{x}$ より大きいことを示せ．なお，計算過程も記入せよ.

(3) (1) と (2) で求めた $V(a)$, $S(a)$ に対して a を無限大に近づけたとき，おのおのの極限を求めよ.

(宇都宮大 2020)　　(m20206103)

0.247 x の関数 u, v の第 n 次までの導関数が連続ならば，部分積分を繰り返し適用して

$$\begin{aligned}\int uv^{(n)}dx &= uv^{(n-1)} - \int u'v^{(n-1)}dx \\ &= uv^{(n-i)} - u'v^{(n-2)} + \int u''v^{(n-2)}dx \\ &= \cdots\cdots \\ &= uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)} - \cdots \\ &\qquad +(-1)^{(n-2)}u^{(n-2)}v' + (-1)^{(n-1)}u^{(n-1)}v + (-1)^n \int u^{(n)}vdx\end{aligned}$$

が成り立つ．このことを利用して下の問いに答えよ.

(1) $u = (b-x)^{n-1}$ としたとき，u', u'', $\cdots$, $u^{(n-2)}$, $u^{(n-1)}$, $u^{(n)}$ を求めよ.

(2) $u=(b-x)^{n-1}$, $v=f(x)$ としたとき，上記の左辺と右辺の最終行の式との関係を具体的に記述せよ．

(3) (2) の結果において積分範囲を $[a,b]$ として定積分を求め，$x=b$ のとき 0 になる項を整理して $f(b)$ についてのテイラー展開の式を求めよ．剰余項は積分形のままでよい．なお，計算過程も記入せよ．

(宇都宮大 2020)　　(m20206104)