0.1　(1)　次の微分方程式の一般解を求めなさい.

$$\frac{dy}{dx} + y\cos x = \sin x \cos x$$

(2)　次の微分方程式の一般解を求めなさい.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \sin 2x$$

(北海道大 2022)　　(m20220101)

0.2　次の 3 次元ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ について，以下の設問に答えなさい.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 2p \\ 3 \\ p \end{bmatrix}$$

(1)　ベクトル $\vec{b}$, $\vec{c}$ が直交するとき，p の値を求めなさい.

(2)　ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が 1 次従属になるとき，p の値を求めなさい．また $\vec{c}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ の一次結合で表しなさい.

(北海道大 2022)　　(m20220102)

0.3　次の行列 $\boldsymbol{A}$ について，以下の設問に答えなさい．ただし，a は任意の実数とする.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(1)　行列 $\boldsymbol{A}$ が正則となるための a の条件を求めなさい．また，このとき逆行列を a を使って表しなさい.

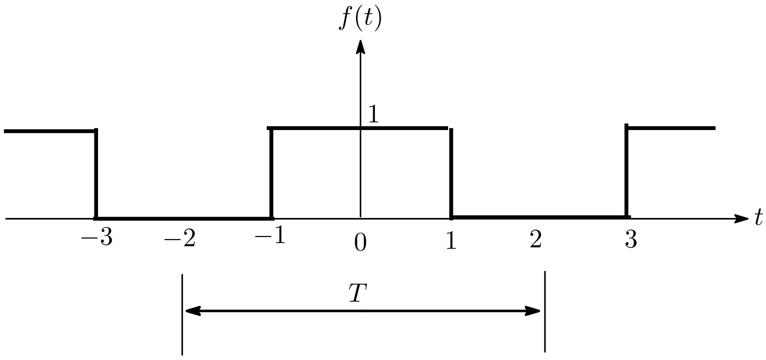
(2)　$a = 3$ のとき，固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(北海道大 2022)　　(m20220103)

0.4　次の図のような矩形パルス（周期 $T = 4$）をフーリエ級数展開するとき，

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) \right\}$$

で表すことができる．以下の設問に答えなさい.



(1)　a_0, a_n および b_n を T を用いた式で表しなさい.

(2) $T=4$ のときの $a_0,\ a_n$ および b_n を求めなさい.

(北海道大 2022) (m20220104)

0.5 関数 $f(x)=\sqrt{1+x}$ の $x=0$ を中心とする 2 次までのテイラー展開を求めよ.

(北見工業大 2022) (m20220201)

0.6 積分 $I=\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}dx$ を計算せよ.

(北見工業大 2022) (m20220202)

0.7 関数 $z=y\sin(x^2+xy)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.

(北見工業大 2022) (m20220203)

0.8 $-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$ での $x=\tan y$ の逆関数を $y=\arctan x$ とする.

$$f(x)=\arctan x-\frac{x}{2}$$

の $x \geqq 0$ での最大値を求めよ.

(北見工業大 2022) (m20220204)

0.9 平面の部分集合 D を次で定める:

$$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x \geqq 0,\ y \leqq 1,\ y \geqq x\right\}$$

(1) D を図示せよ.

(2) 積分 $J=\displaystyle\iint_D xy^2dxdy$ を計算せよ.

(北見工業大 2022) (m20220205)

0.10 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2022) (m20220206)

0.11 行列 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det B$ を求めよ.

(北見工業大 2022) (m20220207)

0.12 原点 O の xyz 空間に点 $A(2,1,3)$, 点 $B(3,-2,1)$ が与えられている. このとき, 次の問いに答えなさい.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角 θ を求めなさい. ただし, $0 \leqq \theta < \pi$ とする.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に垂直な単位ベクトル $\overrightarrow{n}$ を求めなさい.

(3) 3 点 $O,\ A,\ B$ を通る平面 α の方程式を求めなさい.

(4) 点 $C(-1,-2,3)$, 点 $D(5,6,5)$ の両端を直径とする球 S の方程式を求めなさい.

(5) 平面 α が球 S を 2 つの半球に分割することを示しなさい.

(岩手大 2022) (m20220301)

0.13 3 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} -2 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \\ 10 & 2 & b \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えなさい.

(1) 行列 A が固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ をもつとき，a と b の値を求めなさい．

(2) 行列 A の固有値をすべて求めなさい．

(岩手大 2022)　　(m20220302)

0.14 e を自然対数の底とする．次の問いに答えなさい．

(1) 次の関数 $f(x)$ を考える．

$$f(x) = e^{-x^2}$$

関数 $f(x)$ の極値および変曲点を調べ，増減表を作成しなさい．

(2) 関数 $f(x)$ のグラフの概形を描きなさい．

(岩手大 2022)　　(m20220303)

0.15 e を自然対数の底とする．次の問いに答えなさい．

(1) 次の関数 $g(x)$ を考える．ただし，a, b を定数とし，$a > 0$, $b < 0$ とする．

$$g(x) = ae^{bx}$$

広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty g(x)dx = 1$ が成り立つとき，$a = -b$ を示しなさい．

(2) $a = 2$, $b = -2$ のとき，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty xg(x)dx$ の値を求めなさい．

(岩手大 2022)　　(m20220304)

0.16 微分方程式 $y'' - y' - 2y = g(x)$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) $g(x) = 0$ のときの一般解を求めなさい．

(2) $g(x) = e^{3x}$ のときの特殊解を求めなさい．

(3) (2) のときの一般解を求めなさい．

(岩手大 2022)　　(m20220305)

0.17 次の積分 (1), (2) を求めなさい．ここで，$|y|$ は y の絶対値を表す．

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\cos(x)\ \mathrm{dx}$　　(2) $\displaystyle\int_0^2 \left|\ 1 - x^2\ \right| dx$

(秋田大 2022)　　(m20220401)

0.18 xyz 座標空間に 3 点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 2)$ があるとする．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 2 つのベクトル $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ と直交するベクトルを求めなさい．

(2) 3 点 A, B, C を通る平面の方程式を求めなさい．

(3) (2) の平面に関して，点 $D(0, 0, 1)$ と対称な点を E とする．点 E の座標を求めなさい．

(秋田大 2022)　　(m20220402)

0.19 (1) 区間 $0 \leqq y \leqq \pi$ において，$\cos(4y) = 0$ を満たす y をすべて求めなさい．

(2) $x = \cos(y)$ として，$\cos(4y)$ を x の多項式で表したものを $p(x)$ とする．$p(x)$ を求めなさい．

(3) (2) で求めた $p(x)$ に対して，$p(x) = 0$ を満たす x をすべて求めなさい．

(4) (1) および (3) の結果より，$\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ の値を求めなさい．

(秋田大 2022)　　(m20220403)

0.20 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ のすべての固有値を求め，各固有値に対する固有ベクトルを求めなさい．

(2) 2 次正方行列 B が，1 と 2 を固有値として持つとする．さらに，

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

は，それぞれ，固有値 1 に対する固有ベクトル，固有値 2 に対する固有ベクトルであるとする．行列 B を求めなさい．

(秋田大 2022)　　(m20220404)

0.21 次の連立 1 次方程式について，以下の問に答えよ．ただし，k は定数とする．

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 5y + 9z = 6 \\ 3x + 5y + 7z = k \end{cases}$$

(1) この連立 1 次方程式の係数行列 $\boldsymbol{A}$ と拡大係数行列 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ をそれぞれ示せ．

(2) 拡大係数行列 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ を階段行列に変形し，連立 1 次方程式が解を持つような k を定めよ．

(3) k の値が (2) で定めた値であるとき，この連立 1 次方程式を解け．

(東北大 2022)　　(m20220501)

0.22 次の行列 $\boldsymbol{X}$ と数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ について，以下の問に答えよ．ただし，x は実数とする．

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 1 & x & x \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{X}^3$ を求めよ．

(2) n が 1 以上の整数であるとき，$\boldsymbol{X}^n$ が次の形式で表されることを，数学帰納法を用いて証明せよ;

$$\boldsymbol{X}^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n & c_n \\ 0 & 1 & a_n & b_n \\ 0 & 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) n が 2 以上の整数であるとき, (2) の a_n，b_n，c_n で構成される数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(東北大 2022)　　(m20220502)

0.23 次の極限値をそれぞれ求めよ

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2 + x - 2} - x + 1\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3}$

(東北大 2022)　　(m20220503)

0.24 次の微分方程式をそれぞれ解け．

(1) $y^2+1-2x\sqrt{x-1}\,y'=0$ (2) $y''-\sqrt{1+y'}=0$

(東北大 2022) (m20220504)

0.25 極座標変換を用いて次に示す重積分を計算する．以下の問に答えよ．

$$I=\iint_D \frac{x-y}{(x^2+y^2)^2}dxdy, \qquad D=\left\{(x,y) \;\middle|\; 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x\right\}$$

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) 次に示す極座標変換のヤコビ行列とその行列式（ヤコビアン）を求めよ．

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

(3) (2) の極座標変換によって，xy 平面内の領域 D は $r\theta$ 平面内の領域 $\overline{D}$ に対応づけられる．下図に示す点 $O(0,0)$ を原点とする r と θ の直交座標を用いて，領域 $\overline{D}$ を図示せよ．

(4) 重積分 I を計算せよ．

(東北大 2022) (m20220505)

0.26 点 $O(0,0,0)$ を原点とする xyz 空間において，中心を点 $C(0,0,1)$，半径を $1/2$ とする球面 S_1 がある．点 $A(0,0,2)$ を通る直線を z 軸まわりに回転して得られる円錐面 S_2 が，球面 S_1 に接している．ただし，$z \leqq 2$ とする．

(1) 円錐面 S_2 と球面 S_1 の接点のひとつを B とするとき，$\cos\angle CAB$ を求めよ．

(2) 円錐面 S_2 上の任意の点を $P(x,y,z)$ とするとき，円錐面 S_2 の方程式を求めよ．

(3) 円錐面 S_2 と xy 平面で囲まれた閉曲面を S とする．以下のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ の面積分 I を求めよ．

$$\boldsymbol{F}=(x^3z)\,\mathbf{i}+(x^2yz)\,\mathbf{j}+\{(x^2+y^2)z^2\}\,\mathbf{k}$$

$$I=\int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

ただし，$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は x,y,z 軸方向の基本ベクトルであり，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は S 内部から外向きに取るものとする．

(東北大 2022) (m20220506)

0.27 I を 3 次単位行列とし，A を 3 次実正方行列で固有値 $2,1,-1$ を持つものとする．以下の問に答えよ．

(1) A^4 を A^2，A，I の線形結合で表せ．

(2) A は正則であることを示し，A^{-1} を A^2，A，I の線形結合で表せ．

(3) A^{-1} の行列式を求めよ．

(東北大 2022) (m20220507)

0.28 n を 2 以上の整数とする．n 次元実列ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ は，

それらの内積 $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle={}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ について $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \neq 0$ を満たすとする．n 次正方行列 A を $A=\boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{b}$ と定める．ここで，${}^t\boldsymbol{a}$，${}^t\boldsymbol{b}$ はそれぞれ $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ の転置を表す．以下の問に答えよ．

(1) A の階数と行列式をそれぞれ求めよ．また，A の固有値をすべて求めよ．

(2) k を正の整数とする．${}^t\boldsymbol{b}A^k\boldsymbol{a}$ を $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ と k を用いてできるだけ簡潔に表せ．

(東北大 2022)　　(m20220508)

0.29　3 次以下の実数係数多項式全体のなす集合

$$V = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \;\middle|\; a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

を考え，V の元を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数と考える．V の二つの元 f, g と実数 s に対して，和 $f+g \in V$ とスカラー倍 $sf \in V$ を

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (sf)(x) = s(f(x))$$

で定めると，V は $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間となる．V から 4 次元実列ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ への線形写像 $\phi : V \to \mathbb{R}^4$ を

$$\phi(f) = \begin{pmatrix} f(-1) \\ f'(-1) \\ f(1) \\ f'(1) \end{pmatrix}$$

で定める．ただし f' は f の導関数である．以下の問いに答えよ．

(1) V と $\mathbb{R}^4$ の基底に関する ϕ の表現行列を求めよ．ただし V の基底は $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$，$\mathbb{R}^4$ の基底は $\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4\}$ とし，

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする．

(2) 3 次以下の実数係数多項式 f で，

$$f(-1) = 3, \qquad f'(-1) = 2, \qquad f(1) = -1, \qquad f'(1) = 2$$

を満たすものが存在するかどうか答えよ．存在する場合はそのような多項式をすべて求め，存在しない場合はそれを証明せよ．

(東北大 2022)　　(m20220509)

0.30　$\mathbb{R}^2$ 上の関数 f を

$$f(x, y) = x^4 - 4x^3 y - 4xy^3 + y^4 \qquad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2 \right)$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 f の x, y に関する偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,\ b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,\ b) = 0$ となる $\mathbb{R}^2$ の点 (a, b) をすべて求めよ．

(3) 設問 (2) で求めたすべての点について，その点で f が極小値をとるか，極大値をとるか，または極値をとらないか判定せよ．

(東北大 2022)　　(m20220510)

0.31 n を非負整数 α を負の実数とし，広義積分

$$I(n,\ \alpha) = \int_0^1 x^{\alpha} (\log x)^n \, dx$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) $\alpha > -1$ ならばこの広義積分は収束し，$\alpha \leq -1$ ならば発散することを示せ.

(2) $\alpha > -1$ のとき，この広義積分の値を求めよ.

(東北大 2022)　　(m20220511)

0.32 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $ydx - x^4 dy = 0$　　(2) $x\dfrac{dy}{dx} + y = x^4 y^3$

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220601)

0.33 一次変換 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ によって $\dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{5} = 1$ はどのような図形に変換されるか, 図形の方程式を示せ.

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220602)

0.34 (1) (i) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$ は収束していることを示せ.

(ii) 0 より大きい実数 x に対し，$f(x) = \displaystyle\int_x^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$ とおく.
$0 < x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$ が成り立つことを示せ.

(iii) (ii) での $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ と記すと，その微分に関して
$g'(x)^2 = g(x)^3 + 1$ が成り立つことを示せ.

(2) 関数 $h(x)$ はすべての実数 x で $h(x) > 0$ をみたす連続関数とし,
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} h(x)$ もみたすと仮定する.

(i) $a > 0$ に対し，X_a は $h(x) \geq a$ をみたす実数 x の集合とする.
このとき，X_a は有界集合であることを示せ.

(ii) $h(x)$ は実数上の関数として最大値をもつことを示せ.
（閉区間上の連続関数に対する最大値の定理を用いてよい.）

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220603)

0.35 以下の問いに答えよ．ただし，行列はすべて複素行列とする.

(1) X をベクトル空間，U, V, W を X の部分ベクトル空間とする．W が U, V の和集合 $U \cup V$ に含まれるとき，W は U に含まれるか，V に含まれるかのどちらかであることを示せ.

(2) A を 3 次正方行列で，$A^3 = O$, $A^2 \neq O$ となるものとする．ただし, O は零行列とする．A の階数を求めよ.

(3) 次の行列 A を考える．ただし，a は複素数とする.

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & -1 & a-2 \\ 2a & 2 & 2-2a \\ -a & -1 & a-1 \end{pmatrix}$$

(a) $a = 0$ のとき，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ.

(b) $a \neq 0$ のとき，A は対角化可能でないことを示せ.

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220604)

0.36　実変数 x, y の関数 $f(x,y) = \dfrac{1}{2}(x^4 + y^4) - xy$ の最小値と最小値を与える点 (x_0, y_0) を求めよ．

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220605)

0.37　不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx$ を計算せよ．

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220606)

0.38　実 3 次元空間の任意の点を (x, y, z) と表すとき，ベクトル $\vec{V} = (yz, zx, xy)$ の発散 $(\mathrm{div}\vec{V})$ と回転 $(\mathrm{rot}\vec{V})$，及び $|\vec{V}|$ の勾配 $(\mathrm{grad}|\vec{V}|)$ を求めよ．

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220607)

0.39　任意の行列 A に対してそのエルミート共役を $A^\dagger$ と表す．

(1)　行列の積 $A^\dagger A$ が負の固有値を持たないことを示せ．

(2)　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，行列 $A^\dagger A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3)　(2) の行列 A に対して行列 $(A^\dagger A)^n$ と $e^{A^\dagger A}$ を求めよ．ただし，n は正の整数である．

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220608)

0.40　区間 $-a \leq x \leq a$ で定義される微分方程式 $d^2 f(x)/dx^2 + k^2 f(x) = 0 \quad (k > 0)$ を考える．ただし，$a > 0$ である．

(1)　微分方程式の一般解 $f(x)$ を求めよ．

(2)　解 $f(x)$ が境界条件 $f(-a) = f(a) = 0$ を満足するとき，k の最小値を求めよ

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220609)

0.41　以下の問いに答えよ．ただし，x は実変数，y は x に関する実関数であり，$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．また，e は自然対数の底とする．

(1)　次の微分方程式について考える．ただし，y は，任意の x に対し $y > 0$ を満たすものとする．

$$y' - 2y\sin^2(x) = \frac{e^{2x}\cos(2x)}{y}$$

(a) 関数 $f(x)$ を次式により定義する．定積分を計算し，$f(x)$ を求めよ．

$$f(x) = \int_0^x \left[-2\sin^2(t)\right] dt$$

(b) $z = ye^{f(x)}$ とするとき，$\dfrac{dz}{dx}$ を x と z の関数として表せ．

(c) y の一般解を求めよ．

(2)　次の微分方程式について考える．ただし，α および n は実定数であり，α は $-1 \leq \alpha \leq 1$ を満たすものとする．

$$y'' - 2\alpha y' + y = 2e^x$$

(a) y の特解を求めよ．

(b) y の一般解を求めよ．

(c) $\alpha = 1$ とする．$y(0) = 1$ および $y'(0) = 2$ を満たす y に関して，次の極限の収束・発散を調べよ．収束する場合にはその極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to +0} y^{x^{-n}}$$

(東京大 2022)　　(m20220701)

0.42 誰に投与しても独立かつ同じ確率 p で副作用が起きる薬がある．この薬を投与したとき副作用が起きているかどうかを，キットを使って検査する．検査キットの判定結果は，「副作用が起きている」あるいは「副作用が起きていない」のどちらかであるが，確率 q で誤った判定結果を返す．患者 1 人に対して薬を 1 回投与したときに，検査キットが「副作用が起きている」と判定する確率を r とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 患者 1 人に対して薬を 1 回投与する．

(a) p と q を用いて確率 r を表せ．

(b) 「副作用が起きている」と判定された患者に，本当に副作用が起きている確率を p と q を用いて表せ．

(c) 「副作用が起きていない」と判定された患者に，本当は副作用が起きている確率を p と q を用いて表せ．

(2) 1 人ずつ順番に薬の投与とキットによる検査を行う．開始から T 人目で初めて「副作用が起きていない」と判定されるとする．ここで，T は確率変数である．

(a) 確率 $P(T=t)$ を t と r を用いて表せ．ただし，t は自然数とする．

(b) T の期待値と分散を求めよ．

(c) $P(T \leq 4) = 0.99$ となるような r を求めよ．

(3) 患者 $n(>2)$ 人に対して同時に薬を 1 回投与する．

(a) 検査キットによって「副作用が起きている」と判定される患者が m 人となる事象の確率 S を求めよ．答えには r を用いてもよい．

(b) 確率 S が最大となるような p を q, m, n の関数として求めよ．ただし，$p < \dfrac{1}{2}$，$q < \dfrac{1}{2}$，$m < \dfrac{n}{2}$ とする．

(東京大 2022)　　(m20220702)

0.43 i を虚数単位とし，w と z は複素数とする．また，e を自然対数の底とする．以下の問いに答えよ．

(1) 次の式を満たす複素数 A を考える．

$$A^6 = i$$

(a) A を全て求めて $x+iy$ 　$(x, y$ は実数$)$ の形で求めよ．x, y の表式は三角関数を用いて書き下せ．

(b) A を全て求めて $x+iy$ 　$(x, y$ は実数$)$ の形で求めよ．ただし，x, y の表式は三角関数や指数関数を含んではならない．

(c) A を全ての点を複素平面上に図示せよ．

(2) a と t を実数として，以下の積分値を求めたい．

$$F(a) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{d}{dt} \log_e(1 + ae^{it}) \right] dt$$

(a) $z = e^{it}$ と変数変換を行う事により，複素積分に変形せよ．また，被積分関数に対して全ての極と対応する次数，および留数を求めよ．

(b) a で場合分けして，$F(a)$ を求めよ．ただし，極が積分路上にある場合は考えなくて良い．

(c) 複素平面上で $1 + ae^{it}$ を t の関数として考え，$F(a)$ が a に対して変化する事を文章で説明せよ．

(3) 以下の関数で定義される w に関して，$z = x + iy$ が上半面 $y > 0$ を満たす範囲を動くとき，w が動く範囲を複素平面上に図示せよ．

$$w = \frac{i - z}{i + z}$$

(東京大 2022)　　(m20220703)

0.44 n 次正方行列 A の第 i 行，第 j 列の成分 a_{ij} が以下のように与えられている．

$$a_{ij} = \begin{cases} a & (i = j) \\ 1 & (i \neq j) \end{cases}$$

(1) 以下の場合について，A の行列式の値を求めよ．

(a) $n = 3$　　(b) $n \geq 1$

(2) 以下の場合について，A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(a) $n = 2$　　(b) $n = 3$

対角成分より下の成分が 0 となる正方行列を上三角行列と呼ぶ．n 次上三角行列 B の成分 b_{ij} が以下のように与えられている．ただし，$b > 1$ である．

$$b_{ij} = \begin{cases} b & (i = j) \\ 1 & (i < j) \\ 0 & (i > j) \end{cases}$$

(3) $n \geq 1$ の時，B に関して，以下の問いに答えよ．

(a) 正則であることを示せ．　　(b) 逆行列を求めよ．

(東京大 2022)　　(m20220704)

0.45 a, b を実数とし，xy 平面上で定義された実数値関数

$$f(x, y) = x^4 - 2x^2y + ay^2 - by$$

を考える．(x_0, y_0) が関数 $f(x, y)$ の極小点であるとは，正の実数 δ が存在して，$|x - x_0| < \delta$，$|y - y_0| < \delta$ を満たす任意の点 (x, y) について

$$f(x, y) \geqq f(x_0, y_0)$$

が成り立つこととする．以下の問に答えよ．

(1) $b > 0$ のとき，$f(x, y)$ の極小点の個数を求めよ．(a の値によって場合分けして解答せよ)．

(2) $b = 0$ のとき，$f(x, y)$ の極小点の個数を求めよ．(a の値によって場合分けして解答せよ)．

(東京工業大 2022)　　(m20220801)

0.46 (1) xyz 空間内の xz 平面上の曲線 $x = e^z \cos z$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq z \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $x = 0$ で囲まれる領域を，z 軸のまわりに回転してできる回転体 A の体積を求めよ．

(2) 球 $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 3$ と円柱 $x^2 - 2x + y^2 \leqq 0$ の共通部分を B とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iiint_B |z|\, dxdydz$$

(東京工業大 2022)　　(m20220802)

0.47 n を自然数とする．次の n 次正方行列の行列式の値 D_n を求めよ．

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(東京工業大 2022)　　(m20220803)

0.48 n を自然数とし，実数を成分とする n 次正方行列 A が

$$A^2 = E, \qquad A \neq \pm E$$

を満たすとする．ただし，E は n 次の単位行列である．また，$\mathbb{R}^n$ で実数を成分とする n 次の縦ベクトル全体を表す．以下の問に答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) $V = \left\{(A+E)x \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^n\right\}$，$W = \left\{(A-E)x \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^n\right\}$ とするとき，$\mathbb{R}^n$ は V と W の直和に分解されることを示せ．

(3) A は対角化可能であることを示せ．

(東京工業大 2022) (m20220804)

0.49 2 変数関数 $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 9x^2 + y^2 - 2$ について以下の問いに答えなさい．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めなさい．

(2) $z = f(x,y)$ の極値を求めなさい．

(東京農工大 2022) (m20220901)

0.50 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}dx$ の値を求めなさい．

(東京農工大 2022) (m20220902)

0.51 重積分 $\displaystyle\iint_D (x-y)e^{x+y}dxdy, \quad D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \leqq x-y \leqq 2,\ 0 \leqq x+y \leqq 3\right\}$ の値を求めなさい．

(東京農工大 2022) (m20220903)

0.52 t は実数とする．3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & t & 0 \end{pmatrix}$ について $A\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$ が成り立つとき，以下の問いに答えなさい．

(1) t の値を求めなさい．

(2) A の逆行列を求めなさい．

(3) A の固有値のうち最小のものを p とする．p に属する固有ベクトルで $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ の形のものを求めなさい．

(東京農工大 2022) (m20220904)

0.53 次の微分方程式の解 $y = y(x)$ で，$y(0) = 0$，$\dfrac{dy}{dx}(0) = 0$ を満たすものを求めなさい．

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 3x + e^{-x}$$

(東京農工大 2022) (m20220905)

0.54 線形写像 $f\ :\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を以下で定義する．

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 3y + 6z + 4w \\ -3x + 3y - 8z - 4w \\ 2x + 3y - 3z - 4w \\ -5x + 6y - 15z - 8w \end{bmatrix}$$

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元と基底を求めよ．

次に，4 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & -4 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ を用いて，線形写像 $g\ :\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を

$g(x) = Ax \quad (x \in \mathbb{R}^4)$ で定義する．

(2) g の像 $\mathrm{Im}\, g$ の次元と基底を求めよ．

(3) 共通部分 $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, g$ の基底を求めよ．

(電気通信大 2022)　　(m20221001)

0.55　3 次正方行列 $M = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -10 & 8 & -4 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ を考える．

(1) M の固有値をすべて求め，さらに最小の固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

次に，$\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3)$ と線形写像 $f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を考える．
基底 $\mathcal{A}$ に関する f の表現行列が M であるとする．

(2) $f(\boldsymbol{a}_1)$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表せ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3)$ を考える．基底 $\mathcal{B}$ に関する f の表現行列が対角行列になっているとする．このような $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3)$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ を用いて一組求めよ．

(電気通信大 2022)　　(m20221002)

0.56　xy 平面上の曲線 $C\ :\ \begin{cases} x = \sin t \\ y = t\cos t \end{cases} \ \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ について考える．C 上で y は x の関数となるが，これを $y = f(x)\ \ (0 \leqq x \leqq 1)$ と表す．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)\ \ (0 < x < 1)$ を t の関数として表せ．

(2) $f(x)$ の $x = \dfrac{1}{2}$ におけるテイラー展開

$$f(x) = a_0 + a_1\left(x - \frac{1}{2}\right) + a_2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \cdots$$

の係数 $a_0,\ a_1,\ a_2$ を求めよ．

(3) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分を D とするとき，重積分 $\displaystyle\iint_D x\, dxdy$ の値を求めよ．

(電気通信大 2022)　　(m20221003)

0.57　次の重積分の値を求めよ．

(1) $I_1 = \displaystyle\iint_{D_1} e^y\, dxdy, \qquad D_1 = \left\{(x, y)\ :\ 0 \leqq x + y \leqq 1,\ 0 \leqq x - y \leqq 1\right\}$

(2) $I_2 = \displaystyle\iint_{D_2} x\sqrt{x}\, dxdy, \qquad D_2 = \left\{(x, y)\ :\ x^2 + y^2 \leqq x\right\}$

(3) $I_3 = \displaystyle\iiint_V y\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz, \quad V = \left\{(x, y, z)\ :\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1\right\}$

(電気通信大 2022)　　(m20221004)

0.58 複素関数 $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2(z-i)}$ に対して，以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位を表す．

(1) $\sin i$ の実部と虚部を求めよ．

(2) $f(z)$ のすべての極とそれぞれの極の位数を求めよ．

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_{|z|=2} f(z)\,dz$ （積分路は正の向きに 1 周）の値を求めよ．

(電気通信大 2022)　　(m20221005)

0.59 次の行列 A について以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を一つ求めよ．

(3) n を 1 以上の整数とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．

(横浜国立大 2022)　　(m20221101)

0.60 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $2\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2} = 0$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+\cos y}{\sin^2 x\ \cos^2 x}$

(横浜国立大 2022)　　(m20221102)

0.61 複素変数 z の三角関数 $f(z) = \cos z$ に対し，$z = x + iy$，$f(z) = re^{i\theta}$ （i は虚数単位）とおくとき，以下の空欄 (a) にあてはまる y の関数を求めよ．

$$r^2 = \cos^2 x + \boxed{\quad (a) \quad}$$

(筑波大 2022)　　(m20221301)

0.62 関係式 $F(x,y) = x^2 - 2xy + 9y^2 - 8 = 0$ をみたす関数 $y = f(x)$ について，以下の問いに答えよ．

(a) 停留点（$f'(x) = 0$ となる点）をすべて求めよ．

(b) (a) で求めた各点において $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．

(c) (a), (b) の結果を用いて極値をすべて求めよ．

(筑波大 2022)　　(m20221302)

0.63 定積分 $I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$　$(n = 1, 2, \cdots)$ について，以下の問いに答えよ．

(a) I_1 を求めよ．

(b) I_n　$(n \geqq 2)$ を求めよ．

(筑波大 2022)　　(m20221303)

0.64 xy 平面上における 2 次曲線 C

$$4x^2 - 2\sqrt{3}xy + 6y^2 = 21\ ,$$

について考える．以下の問いに答えよ．

(1) $4x^2 - 2\sqrt{3}xy + 6y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす対称行列 A を求めよ．

(2) A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leqq \lambda_2$ とする．

(3) (2) で求めた各固有値について，正規化された固有ベクトルを求めよ．

(4) A を $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ の形に対角化する直交行列 P，およびその逆行列 P^{-1} を求めよ．

(5) 座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 行うとき，2 次曲線 C を，x', y' を用いて表せ．

(6) x' 軸および y' 軸を，それぞれ x, y を用いた直線の式で表せ．

(7) 2 次曲線 C の概形を xy 平面上に描け．ただし，図中には x' 軸と y' 軸を明記すること．

(筑波大 2022)　　(m20221304)

0.65　次の 3 次正方行列を考える．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ．

(2) 行列 A のそれぞれの固有値に対応する，固有空間を張る（固有）ベクトルを求めよ．

(3) (2) で求めた固有ベクトルを用いて，3 次実数空間の正規直交基底を求めよ．

(4) (3) で求めた正規直交基底を並べた行列 P を用いて，行列 A を対角化せよ．

(筑波大 2022)　　(m20221305)

0.66　m 次実数空間 $\mathbb{R}^m$ 内の互いに直交する線形独立な n 個の列ベクトルを $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ $(\neq \mathbf{0})$ とする．また，これらのベクトルを並べた，$m \times n$ 行列を A と表す．このとき，以下の各問に答えよ．

なお，$\mathbf{0}$ はゼロベクトル，${}^tA$ は行列 A の転置，E は単位行列を表す．

(1) n 次正方行列 ${}^tAA$ が正則であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}^m$ 内のベクトル $\mathbf{b}$ の $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ で張られる空間への正射影を考える．ベクトル $\mathbf{b}$ を射影した点の座標（つまり, $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ で張られる空間内でベクトル $\mathbf{b}$ に最も近い点の座標 ）を $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_n)$ とする．$\hat{\mathbf{x}}$ を A と $\mathbf{b}$ により表現せよ．

(3) $A\hat{\mathbf{x}} = \Phi\mathbf{b}$ を満たす射影行列 Φ を A により表現せよ．

(4) $(E - \Phi)$ も射影行列を表している．$(E - \Phi)\mathbf{b}$ は ベクトル $\mathbf{b}$ のどの空間への正射影となるかを説明せよ．

(筑波大 2022)　　(m20221306)

0.67　(1) $x > 0$ に対して，次の関数を定義する．

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}du$$

任意の正の整数 n に対して，$\Gamma(n+1) = n!$ が成り立つことを示せ．

(2) 次の定積分を $u = -(n+1)\log x$ $(\Leftrightarrow x = e^{-\frac{u}{n+1}})$ とする置換積分により計算せよ．ただし，n は任意の正の整数を表す．

$$\int_0^1 x^n(\log x)^n dx$$

(3) 以下の恒等式を証明せよ．

$$\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} \quad \left\{= \lim_{n\to\infty}(1+2^{-2}+3^{-3}+\cdots+n^{-n})\right\}$$

ただし，(2) の結果，および，次のマクローリン展開の結果を用いること．

$$x^{-x} = e^{(-x\log x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x\log x)^n}{n!}$$

また，積分 $\int$ と和 $\sum$ の順序は交換してもよいとする．

(筑波大 2022) (m20221307)

0.68 2 つの 2 変数関数

$$F(x,y) = x^2+2xy-y^2$$
$$G(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2} - \arctan\frac{y}{x}$$

について，以下の各問に答えよ．ただし，$y = \arctan x$ は $y = \tan x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数である．また，$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$ である．

(1) $G(x,y)$ の x, y に関する偏導関数 $G_x(x,y)$, $G_y(x,y)$ をそれぞれ求めよ．

(2) ラグランジュの未定乗数法を用いて，$F(x,y)$ が条件 $G(x,y)=0$ のもとで極値をとる点の候補を求めよ．

(3) $G(x,y)=0$ の陰関数 $y=g(x)$ について，その 1 次導関数 $g'(x)$ を x および $g(x)$ で表せ，また，2 次導関数 $g''(x)$ を $x, g(x)$ および $g'(x)$ で表せ．

(4) (3) を用いて，条件 $G(x,y)=0$ のもとでの $F(x,y)$ の極小値を求めよ．

(筑波大 2022) (m20221308)

0.69 次は，あるクラスのテストの点数である．

77 74 75 85 90 67 62 60 58

このデータの標本平均は 72.0，標本不偏分散は 124.5 である．テストの点数は，正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従う母集団から無作為に抽出した標本とみなせるものとする．このとき，以下の各問に答えよ．なお，計算の過程で適宜，有効数字 3 桁に丸めてよい．

(1) 母分散 σ^2 の 95 % 信頼区間を求めよ．

(2) 母平均 μ の 95 % 信頼区間を求めよ．

(3) $\sigma^2 = 121$ と判明したとき，μ の 95 % 信頼区間を求めよ．

(筑波大 2022) (m20221309)

付表 1

$\sqrt{2}=1.414$	$\sqrt{3}=1.732$	$\sqrt{5}=2.236$	$\sqrt{7}=2.646$	$\sqrt{11}=3.317$

付表 2

$e^1=2.718$	$e^2=7.389$	$e^3=20.09$	$e^4=54.60$	$e^5=148.4$

付表 3 標準正規分布表 : $Q(z) = \int_0^z \phi(t)dt$，ただし，$\phi(\cdot)$ は標準正規分布の確率密度関数 （省略）

付表 4 χ^2 分布表：自由度 m の χ^2 分布の上側 $100\alpha\%$ 点 $\chi^2_\alpha(m)$

α \ m	6	7	8	9	10
0.975	1.237	1.690	2.180	2.700	3.247
0.950	1.635	2.167	2.733	3.325	3.940
0.050	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31
0.025	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48

付表５　t 分布表：自由度 m の両側 $100\alpha\%$ 点 $t_\alpha(m)$

α \ m	6	7	8	9	10
0.10	1.943	1.895	1.860	1.833	1.812
0.05	2.447	2.365	2.306	2.262	2.228

0.70　ある店の単位時間あたりの来客数 X は，平均 λ のポアソン分布に従う．すなわち，t 時間あたりの来客数 X_t は，

$$P(X_t = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

に従う．このとき，以下の各問に答えよ．

(1)　来客の発生間隔 T の確率密度関数 $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ $(t > 0)$ を導出せよ．

(2)　1 時間平均 1.5 人の来客があるとき，2 時間以上来客が無い確率を求めよ．

(3)　開店時間 t_0 から s 時間来客が無いとき，時刻 $t_0 + s$ から初めて客が来るまでの時間 H の確率密度関数を導出せよ．

(筑波大 2022)　　(m20221310)

付表２

$e^1 = 2.718$	$e^2 = 7.389$	$e^3 = 20.09$	$e^4 = 54.60$	$e^5 = 148.4$

0.71　次の 2 重積分について，以下の問いに答えなさい．

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{f(x,y)}dxdy$$

(1)　$f(x, y) = -x^2 - y^2$ とし，I を求めなさい．

(2)　$f(x, y) = -ax^2 - 2bxy - cy^2$ とし，I を求めなさい．ただし，$a > 0$, $b^2 - ac < 0$ とする．

(筑波大 2022)　　(m20221311)

0.72　次の方程式が開区間 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ で互いに異なる解をちょうど n 個持つことを証明しなさい．

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 2)^n = 0$$

(筑波大 2022)　　(m20221312)

0.73　以下に示す実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{\nu}_1$, $\boldsymbol{\nu}_2$, $\boldsymbol{\nu}_3$, $\boldsymbol{\nu}_4$, $\boldsymbol{\nu}_5$ について，線形独立となる組合せを一つ挙げなさい．このとき，残り全てのベクトルを線形独立なベクトルの一次結合として表しなさい．

$$\boldsymbol{\nu}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\nu}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\nu}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\nu}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\nu}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(筑波大 2022)　　(m20221313)

0.74　実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分集合 W について答えなさい.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x^2 - y^2 + 4z^2 + 4xz = 0 \right\}$$

(1) W は $\mathbb{R}^3$ の二つの部分空間の組合せで表すことができる． それぞれを $W_1,\ W_2$ とするとき, $W_1,\ W_2$ を求めるとともに , W を $W_1,\ W_2$ を使って表しなさい.

(2) W は部分空間かどうかを理由とともに答えなさい.

(筑波大 2022)　　(m20221314)

0.75　複素数列 $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots)$ を (a_n) と表す．$V = \left\{ (a_n) \ \middle|\ a_n \in \mathbb{C}\ \ (n = 0, 1, 2, \cdots) \right\}$ とする．数列の和とスカラー倍を

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$$
$$\lambda(a_n) = (\lambda a_n) \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

で定めることにより V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなす．$\beta \in \mathbb{C}$ とし,

$$W = \left\{ (a_n) \in V \ \middle|\ a_{n+3} = a_n + \beta a_{n+1} - \beta a_{n+2} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \right\}$$

とする．また W の元 $(x_n),\ (y_n),\ (z_n)$ をそれぞれ

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$
$$y_0 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 0$$
$$z_0 = 0, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 1$$

を満たすように選ぶ．以下の問いに答えよ.

(1) W が V の部分空間になることを示せ.

(2) $(x_n),\ (y_n),\ (z_n)$ が W の基底になることを示せ.

(3) $F\ :\ W \to W$ を

$$F((a_n)) = (b_n), \qquad b_n = a_{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

で定める．F が線形写像であることを示せ.

(4) W の基底 $(x_n),\ (y_n),\ (z_n)$ に関する F の表現行列 A を求めよ.

(5) A が対角化可能でないような $\beta \in \mathbb{C}$ をすべて求めよ.

(6) $\beta = -1$ のとき $P^{-1}AP = B$ となる正則行列 P と対角行列 B を 1 組求めよ.

(筑波大 2022)　　(m20221315)

0.76　$F(x, y) = xy \tan y + \pi \tan y - x$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) $\tan x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)\ \ (x \to 0)$ を満たす実数 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$ を求めよ. ただし, $o(\cdot)$ はランダウの記号（スモール・オー）を表す.

(2) 1 以上の整数 n に対し，開区間 $\left(\left(n - \dfrac{1}{2} \right) \pi,\ \left(n + \dfrac{1}{2} \right) \pi \right)$ を I_n とおく．各 I_n における方程式

$$\tan x = \frac{1}{x} \qquad (x \in I_n)$$

の解を x_n とする．$d_n = x_n - n\pi$ とおくとき $F\left(\dfrac{1}{n},\ d_n \right) = 0$ を示せ.

(3) $x=0$ を含む開区間 I と，I において定義された微分可能な関数 $\varphi(x)$ であって

$$F(x,\ \varphi(x))=0 \quad (x\in I), \quad \varphi(0)=0$$

を満たすものが存在することを示せ．

(4) (2) の x_n を

$$x_n=n\pi+b_1\frac{1}{n}+b_2\frac{1}{n^2}+b_3\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (n\to\infty)$$

と表示したときの実数 $b_1,\ b_2,\ b_3$ を求めよ．

(筑波大 2022) (m20221316)

0.77 X を集合とし，$f,\ g,\ h$ を X から X への写像とする．以下の問いに答えよ．

(1) f と g が全単射ならば，合成写像 $g\circ f$ は全単射であることを示せ．

(2) $g\circ f$ が全単射ならば，f は単射かつ g は全射であることを示せ．さらに，この命題の逆が成り立たないことを示す反例を 1 つ与え，それが反例であることを示せ．

(3) $f\circ g\circ h$ と $h\circ g\circ f$ が全単射ならば，$f,\ g,\ h$ はすべて全単射であることを示せ．

(筑波大 2022) (m20221317)

0.78 $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ および，$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ に対して，

$$[\mathbf{x},\mathbf{y}]=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{V}(\mathbf{y})=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \ :\ [\mathbf{x},\mathbf{y}]=0\}$$

とする．以下の各問に答えよ．

(1) $\mathrm{V}(\mathbf{y})$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であることを示せ．

(2) $\mathbf{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき，$\mathrm{V}(\mathbf{a})$ の基底を一組求めよ．

(3) A の固有値および各固有値に対応する固有空間の基底を一組求めよ．

(4) $[\mathbf{x},\mathbf{x}]\geqq 0$ であることを示せ．

(茨城大 2022) (m20221701)

0.79 $-\infty<x<\infty$ である x に対して，$\tan y=x$ 満たす y で $-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす唯一のものを $y=\mathrm{Arctan}\,x$ と表わす．以下の各問に答えよ．

(1) $\cos(\mathrm{Arctan}\,x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ を示せ．

(2) 曲面 $z=\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 上の点 $P=\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$ での接平面を求めよ．

(3) 関数 $y=x\sqrt{x^2+1}+\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ の微分を求めよ．

(4) 曲面 $z=\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ の，xy 平面上の有界閉領域 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqq 1\right\}$ の真上にある部分の曲面積を求めよ．

(茨城大 2022)　　(m20221702)

0.80 関数 $f(x,y)$ は

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

で定義されているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f_x(0,0)$ と $f_y(0,0)$ を求めよ．

(2) $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で全微分可能であることを示せ．

(3) $f_x(x,y)$ を求めよ．また，$f_x(x,y)$ は点 $(0,0)$ で不連続であることを示せ．

(信州大 2022)　　(m20221901)

0.81 $\sqrt{x^2+a}=t-x$ とおいて，置換積分法により不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ を求めよ．ただし $a\neq 0$ とする．

(信州大 2022)　　(m20221902)

0.82 $D_n=\left\{(x,y)\;\middle|\;0\leqq x\leqq y\;,\;\dfrac{1}{n}\leqq y\leqq 1\right\}$ $(n=2,3,\cdots)$ とおき，領域 D_n 上の 2 重積分

$$I_n=\iint_{D_n}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

を考える．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n$ を求めよ．

(信州大 2022)　　(m20221903)

0.83 t は実数とする．行列 $A=\begin{pmatrix} 2&0&2&0\\ 0&6&0&5\\ 2&2&3&1\\ 1&3&2&2 \end{pmatrix}$ ， $B=\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&t&3&2\\ 0&1&2&8\\ 1&0&2&4 \end{pmatrix}$ について，

$A^2B^3A^{-1}$ の行列式の値が 128 であるとき，t の値を求めよ．

(信州大 2022)　　(m20221904)

0.84 a は定数とする．このとき，行列 $A=\begin{pmatrix} 5&6&0\\ -1&0&0\\ 1&2&a \end{pmatrix}$ が対角化可能か判定せよ．

(信州大 2022)　　(m20221905)

0.85 n を自然数とする．$x^2\cos x$ の n 次導関数を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222001)

0.86 (1) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{x+3}{(x+1)^2(x-2)}dx$ を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{2+\cos x}dx$ を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222002)

0.87 4×4 行列

$$A=\begin{pmatrix} -5&0&3&4\\ 0&1&0&0\\ -4&0&2&4\\ -3&0&3&2 \end{pmatrix}$$

について，次の各問いに答えよ．

(1) A の行列式の値を求めよ.

(2) A の固有値をすべて求めよ.

(3) A の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求め, A を対角化せよ.

(5) 自然数 n に対して, A^n を求めよ.

(新潟大 2022) (m20222003)

0.88 3 点 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ を頂点とする三角形 ABC の内部を D とする. D 内の点 $P(x,y)$ と三角形 ABC の 3 つの辺 AB, BC, CA の距離をそれぞれ d_1, d_2, d_3 とし, 関数 $f(x,y)$ を $f(x,y)=d_1^2+d_2^2+d_3^2$ として定義する. このとき, 次の各問いに答えよ.

(1) 2 変数関数 $f(x,y)$ を求めよ.

(2) 点 $P\left(x,\dfrac{1}{2}\right)$ が D 内を動くとき, 関数 $f\left(x,\dfrac{1}{2}\right)$ の最小値を求めよ.

(3) 点 $p(x,y)$ が D 内を動くとき, 関数 $f(x,y)$ の最小値を求めよ.

(新潟大 2022) (m20222004)

0.89 $\mathbb{R}^m$ を m 次元数ベクトル空間, $\mathbb{R}^n$ を n 次元数ベクトル空間とする. f, g を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする. $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への写像 h を

$$h(x)=f(x)+g(x) \qquad (x\in\mathbb{R}^m)$$

により定める. このとき, 次の各問い答えよ.

(1) h は $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像となることを証明せよ.

(2) $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Im}(g)$, $\mathrm{Im}(h)$ をそれぞれ, f,g,h の像空間とする. このとき,

$$\dim(\mathrm{Im}(h)) \leqq \dim(\mathrm{Im}(f))+\dim(\mathrm{Im}(g))$$

が成り立つことを証明せよ.

(3) A, B を実数を成分とする $n\times m$ 行列とする. このとき,

$$\mathrm{rank}(A+B)\leqq \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$$

が成り立つことを証明せよ.

(新潟大 2022) (m20222005)

0.90 虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ を含む指数関数 $e^{i\theta}$ を三角関数で表す公式はオイラーの公式と呼ばれる. 物理の問題を扱うには, よく似た行列の関係式を用いると便利なことが多い. このことに関連した以下の問いに答えよ.

(1) オイラーの公式を書け. つまり, 実数 θ に対して $e^{i\theta}$ を三角関数を用いて表せ.

(2) 二次正方行列 I および J を

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \qquad J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

で定義する. J^2 を計算し, J^2 と I の間に成り立つ関係式を求めよ.

(3)　一般に二次正方行列 X に対し，そのゼロ乗 X^0 および指数関数 e^X は次式で定義される：

$$X^0 = I, \qquad e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n = I + X + \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{3!} X^3 + \cdots$$

(2) の関係式に着目すると，行列 $e^{\theta J}$ は I に比例する部分と J に比例する部分の和

$$e^{\theta J} = f(\theta) I + g(\theta) J$$

で表すことができる．このとき，関数 $f(\theta)$ および $g(\theta)$ を求めよ．

なお，必要ならば，三角関数のベキ展開（テイラー・マクローリン展開）が次式で与えられることを用いてもよい．

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} \qquad = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \cdots$$

$$\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots$$

(4)　(3) で求めた行列 $e^{\theta J}$ に対して，その行列式の値を答えよ．

次に，これまでの結果の応用として，調和振動子の運動を表す微分方程式

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

の解 $x(t)$ を求めたい．ここで ω は正の定数である．以下の問いに答えよ．

(5)　変数 $p(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ および $q(t) = \omega x(t)$ を用いると，この微分方程式は,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$$

の形に表すことができる．ここで K は t に依らない二次正方行列である．行列 K を答えよ．

(6)　(5) の微分方程式の解は次式で与えられる：

$$\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = e^{Kt} \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$$

以上のことから，初期条件 $p(0) = p_0$, $q(0) = q_0$ に対応する解 $x(t)$ を求めよ．

(新潟大 2022)　　　(m20222006)

0.91　$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ とする．以下の問いに答えよ．計算過程を示すこと．

(1)　$\dfrac{df(x)}{dx}$ を求めよ．　　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ を求めよ．

(新潟大 2022)　　　(m20222007)

0.92　$0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲において x 軸に垂直な平面による切口が半径 $1 + \sin x$ の円で与えられる回転体の体積 V を求めよ．回転体は x 軸を中心に回転しているとする．

(新潟大 2022)　　　(m20222008)

0.93　行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　$\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ．

(2) $\boldsymbol{A}$ を対角化する行列 $\boldsymbol{P}$ のうち，$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となるものを求めよ．
ただし，$0 \leq \theta \leq \pi/2$ とする．また，θ を求めよ．さらに，$\boldsymbol{P}$ を用いて $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ．

(3) 前問 (2) の条件において，$\mathbf{P}^6$ を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222009)

0.94 次の重積分を，積分の順序を変えて，2 通り に計算せよ．

$$\iint_D 2x^2y\ dxdy, \qquad D = \{(x, y)\ ;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\ \}$$

(新潟大 2022)　　(m20222010)

0.95 次の連立方程式を解け（a は定数）．不定の場合，任意の定数（パラメータ）を用いて答えよ．

$$\begin{cases} x + \ y + az = a + 2 \\ x + ay + \ z = a + 2 \\ ax + \ y + \ z = a + 2 \end{cases}$$

(新潟大 2022)　　(m20222011)

0.96 平面上の直線 $y = 2x$ を ℓ とする．任意の点 P に対して，P を通る傾き 1 の直線と ℓ との交点を P' とする．下の問いに答えなさい．

(1) $P(3,\ 2)$ に対する P' の座標を求めなさい．

(2) $P(X,\ Y)$ に対する P' の座標を X と Y を用いて表しなさい．

(3) P を P' に移す一次変換を表す行列 A を求めなさい．

(4) 前問 (3) の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(長岡技科大 2022)　　(m20222101)

0.97 (1) 極限 $L = \displaystyle\lim_{x \to +0} x \log x$ を求めなさい．

(2) 広義積分 $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \log x dx$ を求めなさい．

(3) 広義積分 $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{x}{1 - xy} dy \right\} dx$ を求めなさい．

(長岡技科大 2022)　　(m20222102)

0.98 $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．また，実数 t の実数値関数を成分とする

2 次元ベクトル値関数 $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}(t)$ が，微分方程式

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{x} = A\overrightarrow{x} \cdots\cdots (*)$$

を満たしているとする．ただし，ベクトル値関数の微分は，成分ごとの微分である．

下の問いに答えなさい．

(1) A^2 を求めなさい．

(2) $(E - tA)^{-1} = E + tA$ であることを示しなさい．

(3) $\dfrac{d}{dt}\Big(tA\overrightarrow{x}\Big) = A\overrightarrow{x}$ が成り立つことを示しなさい．

(4) $\dfrac{d}{dt}\Big((E-tA)\overrightarrow{x}\Big)=\overrightarrow{0}$ が成り立つことを示しなさい.

(5) $(*)$ の解で, $\overrightarrow{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ を満たすものを求めなさい.

(長岡技科大 2022)　　(m20222103)

0.99 n を自然数, p を $0<p<1$ を満たす実数とする. また, 点 X が地点 A か地点 B のどちらかにあるとする. X に対し, 次の規則に従って操作を行う.

規則

- X が A にあるときは, 確率 p で X を A にとどめ, 確率 $1-p$ で X を B に移動させる.
- X が B にあるときは, 必ず X を A に移動させる.

最初 X が A にあるとする. n 回の操作の後に X が A にある確率を a_n で表す. 例えば $a_1=p$ である. 下の問いに答えなさい.

(1) a_2 を求めなさい.

(2) a_{n+1} を p と a_n を用いて表しなさい.

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めなさい.

(長岡技科大 2022)　　(m20222104)

0.100 (1) $\alpha>1$ のとき, 関数 $f(x)=(x+|x|)^\alpha$ は $\boldsymbol{R}$ 上の C^1 級関数であることを証明せよ.

(2) 集合 $\left\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; \dfrac{1}{4}(x+|x|)^2+y^2\leq 1,\ x\geq -2\right\}$ の面積を求めよ.

(3) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)-1+\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(x^2\right)}$$

(金沢大 2022)　　(m20222201)

0.101 $\boldsymbol{R}^2$ の領域を次で定義する.

$$D=\left\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; |x|<\frac{\pi}{2},\ |y|<\cos^2 x\right\}$$

以下の問いに答えよ.

(1) D の概形を図示せよ.

(2) 関数 $g(x,y)=\dfrac{1}{(y-2)\cos x}$ は, D 上の連続関数であることを示せ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^2y^2}{\cos^6 x}dxdy$ の値を求めよ.

(金沢大 2022)　　(m20222202)

0.102 次の命題の真偽を判定し, 命題が真の場合は証明を与え, 命題が偽の場合は反例あるいはその判断理由を述べよ.

(1) V を $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間とし, m 個の元 $e_1,\ \cdots,\ e_m\in V$ は $\boldsymbol{R}$ 上 1 次独立とする. ベクトル $v\in V$ が $e_1,\ \cdots,\ e_m$ の $\boldsymbol{R}$ 上の 1 次結合であるとき, $v=c_1e_1+\cdots+c_me_m$ を満たす実数の組 $(c_1,\ \cdots,\ c_m)$ はただ一通りに定まる.

(2) 2×2 行列 A,B について, $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$ が成立する.

(3) $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間 $\boldsymbol{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \boldsymbol{R} \right\}$ に対し，写像 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y \\ x - 2y + 1 \end{pmatrix}$$

で定めると，f は線形写像である．

(4) n を任意の自然数とする．正則な $n \times n$ 行列は，固有値 0 を持たない．

(金沢大 2022)　　(m20222203)

0.103 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 固有値を全て求めよ．

(2) A を直交行列によって対角化せよ．

(金沢大 2022)　　(m20222204)

0.104 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A のすべての固有値を求めよ．

(2) A の各固有値に対する固有空間を求めよ．

(3) A が対角化可能の場合は $P^{-1}AP$ が対角行列になるような P を 1 つ求めよ．対角化可能ではない場合はその理由を述べよ．

(金沢大 2022)　　(m20222205)

0.105 (1) 線形写像 $f : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ を $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4$ に対して

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

で定める．このとき，f の像 $\mathrm{Im}(f)$ の次元と 1 組の基底，および f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の次元と 1 組の基底を求めよ．

(2) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ によって生成される $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間を W とする． 線形写像 $g : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^2$ であって，$\mathrm{Ker}(g) = W$ となるものを 1 つ求めよ．

(金沢大 2022)　　(m20222206)

0.106 関数 $f \quad \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を C^2 級とし，導関数 f' は $\boldsymbol{R}$ 上で単調増加であるとする．次の問いに答えよ．

(1) $a, b \in \boldsymbol{R}$ $(a < b)$ に対して

$$f'(a)(b-a) \leqq f(b) - f(a) \leqq f'(b)(b-a)$$

を示せ.

(2) $a, b \in \boldsymbol{R}$ $(a < b)$ を固定する．関数 $F_{a,b} : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を

$$F_{a,b}(t) = (1-t)f(a) + tf(b) - f((1-t)a + tb)$$

と定めるとき

$$F_{a,b}(t) \geqq 0 \quad (t \in [0,1])$$

を示せ.

(金沢大 2022) (m20222207)

0.107 C^1 級関数 $z = f(x, y)$ に対して，$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とするとき

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \qquad (r \neq 0)$$

が成り立つことを示せ.

(金沢大 2022) (m20222208)

0.108 閉領域 $D = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0\right\}$ に対して，重積分

$$\iint_D y^2 e^{-x^2-y^2}\,dxdy$$

の値を求めよ.

(金沢大 2022) (m20222209)

0.109 (,) を $\boldsymbol{R}^3$ 上の標準内積とする．2 つのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \boldsymbol{R}^3$ の間の距離 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})^{1/2}$$

により定める．任意のベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \boldsymbol{R}^3$ に対し，$d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を満たすような写像 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を $\boldsymbol{R}^3$ 上の等長変換とよぶ．次の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{R}^3$ 上の 2 つの等長変換 f, g に対して，合成写像 $f \circ g$ も $\boldsymbol{R}^3$ 上の等長変換となることを示せ.

(2) ベクトル $\mathbf{a_1} \in \boldsymbol{R}^3$ および行列 A_2, A_3 を

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とし, $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 f_1, f_2, f_3 を

$$f_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}_1, \quad f_2(\mathbf{x}) = A_2\mathbf{x}, \quad f_3(\mathbf{x}) = A_3\mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^3)$$

と定める．このとき f_1, f_2, f_3 は $\boldsymbol{R}^3$ 上の等長変換であることを示せ.

(3) ベクトル $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をベクトル $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ にうつすような等長変換を，(2) の f_1, f_2, f_3 の合成を繰り返すことにより 1 つ与えよ.

(金沢大 2022)　　　(m20222210)

0.110　次の関数 $f(x)$ の導関数を求めなさい．

(1)　$f(x) = \tan^{-1} x$

(2)　$f(x) = \log(\log x)$

(金沢大 2022)　　　(m20222211)

0.111　微分方程式 $y'' - 4y' + 5y = x$ の一般解を求めなさい．

(金沢大 2022)　　　(m20222212)

0.112　ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x, y, z) = (x^2, y^2, 1)$ について，以下の各問いに答えなさい．

(1)　$\boldsymbol{A}$ の発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ を求めなさい．

(2)　図 3 に示した一辺の長さが 1 の立方体の表面を S とする．閉曲面 S における面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ を求めなさい．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S 上の単位法線ベクトルである．

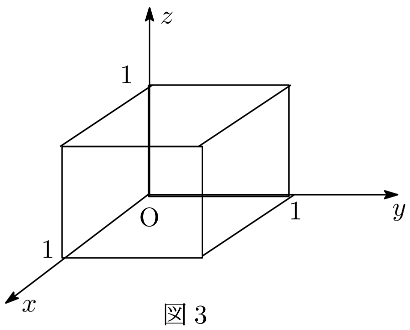


図 3

(金沢大 2022)　　　(m20222213)

0.113　行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ について，以下の各問いに答えなさい．

(1)　A の固有値を求めなさい．

(2)　ある直交行列 P を用いて，$P^{-1}AP$ を対角行列にすることができる．P を求めなさい．

(金沢大 2022)　　　(m20222214)

0.114　変数 x, y が次の式を満たすとき，導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．ただし，計算の概略も示すこと．

$$x^4 y + 4y = 2y^3 + 8$$

(富山大 2022)　　　(m20222301)

0.115　マクローリン展開を用いて 次の式の値を求めよ．ただし，計算の概略も示すこと．

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 6(x - \sin x)}{x^5}$$

(富山大 2022)　　　(m20222302)

0.116　次の式の値を求めよ．ただし，計算の概略も示すこと．

$$\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy \qquad (D\ :\ x^2 + y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq y)$$

(富山大 2022)　　　(m20222303)

0.117 スカラー場 $\phi(x,y,z) = x^2y + y^2z - xy\,e^{(z^2)}$, ベクトル場 $\overrightarrow{F}(x,y,z) = -y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} + xyz\overrightarrow{k}$ について，次の各問いに答えよ．ただし，$\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ は直交座標系 x, y, z の各軸方向の単位ベクトルとする．また，点 P の座標を (2, 1, 0) とする．

(1) 点 P における，ϕ の等位面の単位法線ベクトルを求めよ．

(2) 点 P における，$\overrightarrow{F}$ 方向に対する ϕ の方向微分係数を求めよ．

(3) $\mathrm{rot}\overrightarrow{F}$ を求めよ．

(4) 原点 O から点 P に至る線分 OP における，$\overrightarrow{F}$ の線積分 $\displaystyle\int_{OP} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$ を求めよ．ここで，$\overrightarrow{r}$ は位置ベクトルである．

(富山大 2022)　　(m20222304)

0.118 以下の各問いに答えよ．ただし，a, k, L は定数とする．

(1) $g'(t) = -ak^2g(t)$ の一般解を求めよ．

(2) $f''(x) = -k^2f(x)$ の一般解を求めよ．

(3) (1), (2) の解を合成した $y(x,t) = f(x)g(t)$ が $(*)$ を満たすことを示せ．

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \cdots(*)$$

(4) $(*)$ 式において，$y(0,t) = y(L,t) = 0 \quad (t > 0)$ を満たす，y の一般解を求めよ．

(富山大 2022)　　(m20222305)

0.119 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \log\left(5\sqrt{x^2+1} + 5x\right)$　　(2) $y = \dfrac{-e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(3) $y = \cos\dfrac{5\pi}{x^2+5}$　　(4) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(福井大 2022)　　(m20222401)

0.120 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{4e^x}{(4e^x+2)^2}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x\log 3x}$

(福井大 2022)　　(m20222402)

0.121 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^2 e^{2x}\sqrt{e^x}\ dx$　　(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\ dx$

(福井大 2022)　　(m20222403)

0.122 $f(x) = 4\sin x\cdot\cos 2x + \cos x\cdot\sin 2x \ \ (0 \leq x \leq \pi)$ の最大値を求めよ．

(福井大 2022)　　(m20222404)

0.123 次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $2\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 3 \\ -5 & 7 & -4 & 8 \\ 1 & -2 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & -7 & 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -8 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ -3 & -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

(2) $a\begin{pmatrix} a-b & -b \\ b & b-a \end{pmatrix} - b\begin{pmatrix} a-b & -a \\ a & b-a \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

(福井大 2022) (m20222405)

0.124 以下に示す行列の演算を行いなさい．ただし，三角関数は数値に置き換えて算出すること．また，式中の t は転置を意味する．

$$4\begin{pmatrix} \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \\ \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \\ \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \end{pmatrix}^t$$

(福井大 2022) (m20222406)

0.125 次の連立一次方程式をガウスの消去法（掃き出し法）を用いて解きなさい．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(福井大 2022) (m20222407)

0.126 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ について，次の問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) (1) で求めた固有値の中で，最小の値を持つ固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(福井大 2022) (m20222408)

0.127 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ について 以下の問に答えよ．

(1) 行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めよ．

(2) $\Phi_A(A) = 0$ （ケーリー・ハミルトンの定理）が成り立つことを示せ．

(福井大 2022) (m20222409)

0.128 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(福井大 2022) (m20222410)

0.129 次式は，単振動の運動方程式である．なお，m : 質量，k : バネ定数，x : 変位，t : 時間である．

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

(1) 角速度 ω(rad/s) を m および k を用いて表しなさい．
なお，上に示した運動方程式の解は $x = A\cos(\omega \cdot t) + B\sin(\omega \cdot t)$ になる．
ここに，A, B は初期値によって決まる定数である．

(2) $m = 1$ (kg), $k = 1$ (N/m) の場合について，$t = 0$ 秒における初期値を $x = 1$ (m), $\dfrac{dx}{dt} = 0$ (m/s) として 単振動の運動方程式を解きなさい．

(福井大 2022)　　(m20222411)

0.130　次の関数 $f(x)$ について $x=0$ における微分可能性を調べよ．

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x<0) \\ x & (x\geq 0)\end{cases}$$

(福井大 2022)　　(m20222412)

0.131　次の関数を x について微分せよ．

(1)　$y=\log(x-x\log x)$　　(2)　$y=x^{e^x}$

(福井大 2022)　　(m20222413)

0.132　次の定積分を求めよ，

(1)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{3-\cos 2x}\,dx$　　(2)　$\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x}\sin x\,dx$

(福井大 2022)　　(m20222414)

0.133　$z=f(u)+g(v),\ \ u=x+ct,\ \ v=x-ct$ のとき

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

が成り立つことを示せ．ただし，c は正の実定数である．

(福井大 2022)　　(m20222415)

0.134　次の積分の値を計算せよ．

$$\iint_D \sin(x+y)\cos(x-y)dxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ 0\leq x+y\leq\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\leq x-y\leq\frac{\pi}{2}\right\}$$

(福井大 2022)　　(m20222416)

0.135　3 次元ベクトル $\mathbf{x}_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ に関する数列を以下のように定義する．

$$\mathbf{x}_{n+1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\mathbf{x}_n\ ,\qquad \mathbf{x}_0=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

(1)　行列 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ の固有値をすべて求めよ．

(2)　$\mathbf{x}_n=\mathbf{A}^n\mathbf{x}_0$ を用いて，$\mathbf{x}_n$ を求めよ．

(福井大 2022)　　(m20222417)

0.136　以下の行列 $\mathbf{S}$ に関する問いに答えよ．ただし，θ は実数である．

$$\mathbf{S}=\begin{pmatrix}0&\theta\\\theta&0\end{pmatrix}$$

(1)　行列 $\mathbf{S}$ を対角化せよ．

(2)　n を自然数とし，$\mathbf{S}^n$ を求めよ．

(3)　行列 $\mathbf{S}$ 及び実数 x を用いた指数関数はそれぞれ以下の式で定義される．
$\exp(\mathbf{S})$ を計算せよ．

$$\exp(\mathbf{S})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{S}^n}{n!}\qquad\qquad e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

(福井大 2022)　　(m20222418)

0.137 以下の行列式を計算せよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(福井大 2022)　　(m20222419)

0.138 各面の目が 1, 2, 3, 4, 5, 6 である普通のサイコロが 2 つある．このサイコロ 2 つを同時に振ったとき，目の数の合計の平均値，標本分散をそれぞれ求めよ．ただし，標本分散の有効数字は 2 桁として解答すること．

(福井大 2022)　　(m20222420)

0.139 確率変数 $\mathbf{a}$ の期待値は 240 で標準偏差は 4，確率変数 $\mathbf{b}$ の期待値は 40 で標準偏差は 12，確率変数 $\mathbf{c}$ の期待値は 30 で標準偏差は 3 である．ここで，確率変数 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ は互いに独立である．このとき，以下の 2 つの問いに答えよ．

(1) $\mathbf{f} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$ について，$\mathbf{f}$ の期待値と標準偏差を求めよ．

(2) $\mathbf{f} = \mathbf{ab}/\mathbf{c}$ について，$\mathbf{f}$ の期待値と標準偏差を求めよ．

(福井大 2022)　　(m20222421)

0.140 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} + 5x = 0$　　(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} + 5x = -20\sin t$

(福井大 2022)　　(m20222422)

0.141 基本周期が 2π である関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開を考える．以下の問いに答えよ．

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \left(0 < x \leq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{\pi}{2} < x \leq \dfrac{3\pi}{2}\right) \\ 1 & \left(\dfrac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi\right) \end{cases}$$

(1) 以下の積分を計算せよ．

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\ dx \quad (n \neq 0)$$

(2) 以下の積分を計算せよ．

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\ dx \quad (n \neq 0)$$

(3) 基本周期が 2π である関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開を求めよ．

(福井大 2022)　　(m20222423)

0.142 $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ を含む定積分，あるいは不定積分に関し，以下の問いに答えよ．ただし，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \sqrt{2\pi} \tag{1}$$

であることを用いてよい．答えを導く思考過程あるいは計算過程を丁寧に記述すること．

(1) 式 (1) を利用して，定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{2}x)dx$ の値を求めよ．

(2) 不定積分　$\displaystyle\int x f(\sqrt{2}x)dx$　を求めよ．

(3) 定積分　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(\sqrt{2}x)dx$　の値を求めよ．

(福井大 2022)　(m20222424)

0.143　以下の問いに答えよ．ただし，$\mathbf{0}$ は n 次元ゼロベクトルを表し，$\boldsymbol{v}^\top$ はベクトル $\boldsymbol{v}$ の転置を表す．

(1) 次の行列 A_1，A_2 の行列式をそれぞれ求めよ．

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 問 (1) の A_1 を係数行列とする以下の連立一次方程式の解 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ を求めよ．ただし，x_1，x_2，x_3 は実数とする．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

(3) $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ を満たす n 次元実ベクトル $\boldsymbol{u}$，および n 次の実対称行列 A_3 を用いて

$$f(\boldsymbol{u}) = \frac{\boldsymbol{u}^\top A_3\, \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{u}}$$

とおく．このとき，$f(\boldsymbol{u})$ の最大値は A_3 の最大固有値に一致し，そのときの $\boldsymbol{u}$ は A_3 の最大固有値に対応する固有ベクトルであることが知られている．A_3 が次の行列であるとき，この事実を使って $f(\boldsymbol{u})$ の最大値，および対応する $\boldsymbol{u}$ をひとつ求めよ．

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

(4) $\boldsymbol{c} \neq \mathbf{0}$ を満たす n 次元実ベクトル $\boldsymbol{c}$ に対し，行列 A_4 を次のように定める．

$$A_4 = \boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^\top$$

このとき，$\boldsymbol{c}$ は A_4 の固有ベクトルであることを示せ．また，$\boldsymbol{c}$ に対応する固有値を求めよ．

(福井大 2022)　(m20222425)

0.144　(1) 点 $P(x, y)$ を点 $A(a, b)$ を中心として反時計回りに角 θ だけ回転したとき，移動後の点 $Q(x', y')$ を行列で表せ．また，点 P が $(2, 1)$，点 A が $(3, 2)$ であったときに 30° 回転したときの点　Q を求めよ．

(2) 3 次元直交座標系（原点を O）において，任意の点 (x, y, z) を x 軸周りに角 θ だけ回転させる行列 $\boldsymbol{R}$ を表せ．また，固有値を求めよ．

(福井大 2022)　(m20222426)

0.145　半径 a の球面の xyz 座標を媒介変数 $(\theta,\ \phi)$ で

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (a\sin\theta\cos\phi,\ a\sin\theta\sin\phi,\ a\cos\theta)$$

と表す．ただし，$0 \leq \theta \leq \pi$，$0 \leq \phi \leq 2\pi$ である．以下の問いに答えよ．

(1) 以下のベクトル積

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}$$

を求めよ．また，これは何を表すか答えよ．

(2) 次の積分を求め，何を表すか答えよ．

$$\iint_D \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} \right\| d\theta d\phi$$

ただし，$\|\cdot\|$ はベクトルの長さを表し，領域 D は $\theta,\ \phi$ の動く範囲，すなわち $D = \{(\theta,\ \phi \mid 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi)\}$ である．

(3) 球面の x 座標 $x = a\sin\theta\cos\phi$ に対して，次の積分を求めよ．

$$\iint_D x \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} \right\| d\theta d\phi$$

(福井大 2022)　　(m20222427)

0.146

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & a & 0 \\ -a+b & 1+a-b & b \\ b & -b & 1+b \end{pmatrix}$$

とする．ただし，$a,\ b$ は実数とする．

(1) $\det A$ を求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は．A の固有ベクトルであることを示せ．

(3) A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(4) A が対角化可能となる $a,\ b$ の値をすべて求めよ．

(岐阜大 2022)　　(m20222601)

0.147 $y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 微分方程式

$$(E_1) \quad y' - yx = 0$$

の一般解を求めよ．

(2) 微分方程式

$$(E_2) \quad y' - yx\cos(x^2) = 0$$

の一般解を求めよ．

(3) e を自然対数の底として，$\alpha,\ \beta$ を実数とする．微分方程式

$$(E_3) \quad y' - \alpha y = e^{\beta x}$$

の一般解を求めよ．

(4) γ を実数とする．微分方程式

$$(E_4) \quad y' - yx(\gamma + \cos(x^2)) = 0$$

の解 $y(x)$ で初期条件 $y(0) = 1$ を満たすものを求めよ．$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x}$ の収束・発散を判定せよ．

(岐阜大 2022)　　(m20222602)

0.148 次の行列式 D の値を求めよ．

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(岐阜大 2022)　　(m20222603)

0.149 k を定数として $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ k \\ -3 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$，が一次従属となるような k の値を求めよ．

(岐阜大 2022)　　(m20222604)

0.150 関数 $z = (1+x^2y)^y$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(岐阜大 2022)　　(m20222605)

0.151 e を自然対数の底とする．

(1) 次の不定積分 I を求めよ．　$I = \displaystyle\int \frac{dx}{9e^x + 4e^{-x} + 6}$

(2) 次の広義積分 J の値を求めよ．　$J = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{9e^x + 4e^{-x} + 6}$

(岐阜大 2022)　　(m20222606)

0.152 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{v}$ は行列 A の固有ベクトルであるであることを示せ．また，$\boldsymbol{v}$ に対応する A の固有値を求めよ．

(2) 3 次元空間内のある平面 α を考え，その上の任意の点 P を (x, y, z) とする．この α がベクトル $\boldsymbol{v}$ に垂直で，かつ 3 次元空間の原点を通るとき，この平面 α を表す式を，x, y, z を用いて求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して，線形変換 f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で与える．このとき，(2) で求めた平面 α 上の任意の点 Q を f によって移動した点 Q' も平面 α 上の点となることを示せ．

(豊橋技科大 2022)　　(m20222701)

0.153 関数 $f(x, y) = e^{ax}\cos by$ について，次の問いに答えよ．　ただし，a, b は実数の定数とする．

ア．2 次偏導関数 f_{xx}，f_{xy}，f_{yy} を求めよ．

イ．$f(x, y)$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ．

(豊橋技科大 2022)　　(m20222702)

0.154 次の重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2 y\,dxdy$,　　$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq y \leqq x,\ 0 \leqq x \leqq 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$,　　$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0\ \right\}$

(豊橋技科大 2022)　　(m20222703)

0.155 $1, 2, 3, 4$ のうち 1 つの数字が書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつ，合計 4 枚のカードが箱の中に入っている．次の問いに答えよ．ただし，答えが分数になる場合は既約分数で答えよ．

(1) 箱からカードを 1 枚取り出して箱に戻すことを 4 回続けて行うとき，4 回とも同じ数字のカードを取り出す確率を求めよ．

(2) 箱からカードを 1 枚取り出して箱に戻すことを 4 回続けて行うとき，同じ数字のカードを 2 回以上取り出す確率を求めよ．

(3) 箱からカードを 1 枚ずつ順に 4 枚すべてを取り出すとき，最初に偶数，最後に奇数が書かれたカードを取り出す確率を求めよ．

(豊橋技科大 2022)　　(m20222704)

0.156 (1) $x = 0$ のとき $y = 4$ を満たす微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3}{16}y^2$ の解を求めよ．

(2) xy 平面上で，アで得られた解が表す曲線と，$x = 0$, $x = 4$, $y = 0$ の 3 つの直線で囲まれる領域に含まれる点 (x, y) のうち，x, y が共に自然数となる点の数を求めよ．ただし，境界上の点は含まないものとする．

(豊橋技科大 2022)　　(m20222705)

0.157 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ に関して，以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値のうち，実数となる固有値およびその固有ベクトルを求めよ．

(2) $A^3 - 8E$ を求めよ．ただし，E は 3 次の単位行列である．

(3) A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(名古屋大 2022)　　(m20222801)

0.158 互いに直交する三つの単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ による正規直交座標系において，

曲線 C を $\boldsymbol{r}(t) = \cos t\,\boldsymbol{i} + \sin t\,\boldsymbol{j} + 2t\,\boldsymbol{k}\quad(0 \leqq t \leqq \pi)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{r}(t)$ および $\boldsymbol{k}$ に直交する単位ベクトル $\boldsymbol{u}(t)$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{k}$ および設問 (1) で求めた $\boldsymbol{u}(t)$ の三つのベクトルに囲まれる 4 面体の体積を求めよ．

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\cos z\,\boldsymbol{k}$ を考える．ベクトル場 $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ の曲線 C 上の線積分を求めよ．

(名古屋大 2022)　　(m20222802)

0.159 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ の値を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ の値を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ の値を求めよ．

(4) $I_n = \displaystyle\int (\log x)^n\,dx$ の漸化式を導き，I_3 を求めよ．なお，n は 0 以上の整数とする．

(名古屋大 2022)　　(m20222803)

0.160 袋の中に，白玉が 5 個，赤玉が n 個入っているとする．ただし，n は 2 以上の整数とする．この袋から 2 個の玉を同時に取り出すとき，取り出した玉が白玉と赤玉 1 個ずつである確率を p_n とし，また，取り出した白玉の数を X とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) p_n を求めよ．

(2) p_n が最大になる n の値と，このときの p_n の値を求めよ．

(3) X の期待値が 0.625 になるとき，n の値を求めよ．

(名古屋大 2022)　　(m20222804)

0.161 関数 $f(x) = \sin\left(\mathrm{Cos}^{-1}x\right)$ の増減を調べ，極値を求めよ．ただし，$y = \mathrm{Cos}^{-1}x$ の値域は $0 \leqq y \leqq \pi$ である．

(名古屋工業大 2022)　　(m20222901)

0.162 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$ を求めよ．

(名古屋工業大 2022)　　(m20222902)

0.163 関数 $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 - y^2 + 2xy$ の極値を調べよ．

(名古屋工業大 2022)　　(m20222903)

0.164 xy 平面上で，$y = \dfrac{1}{x}$ のグラフと y 軸，直線 $y = 1$，直線 $y = 2$ で囲まれる領域を D とする．このとき，次の重積分を計算せよ．

$$\iint_D (\log y)^2 dxdy$$

(名古屋工業大 2022)　　(m20222904)

0.165 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．ただし，a は定数とする．

(1) 行列 A が逆行列を持たないような a の値をすべて求めよ．

(2) 行列式 $|AB|$ を計算せよ．

(名古屋工業大 2022)　　(m20222905)

0.166 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ を対角化せよ．

(名古屋工業大 2022)　　(m20222906)

0.167 p の関数

$$f(p) = p\log\frac{p}{q} + (1-p)\log\frac{1-p}{1-q}$$

について，以下の問に答えなさい．ただし，定義域は $0 < p < 1$ とし，q は $0 < q < 1$ を満たす定数とする．また，log は自然対数を表す．

① p の関数 $f(p)$ の最小値を求めなさい．

② 右側極限値 $\displaystyle\lim_{p \to +0} f(p)$，および，左側極限値 $\displaystyle\lim_{p \to 1-0} f(p)$ を求めなさい．

③ p の関数 $f(p)$ の変曲点の有無を，理由を説明して答えなさい．

④ 問 ①, ②, ③ の結果を用いて，$q = 1/2$ に固定したとき，$f(p)$ のグラフの概形を描きなさい．ただし，必要であれば $\log 2$ の近似値として 0.7 を使ってもよい．

(三重大 2022)　　(m20223101)

0.168 関数 $g(\varepsilon) = \cos^2(\theta + \varepsilon)$ を ε についてマクローリン展開

$$g(\varepsilon) = a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 + \cdots$$

を行い，係数 $a,\ b,\ c$ を求めなさい．ただし，θ は定数とする．

(三重大 2022)　　(m20223102)

0.169 2 次曲線 C： $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$ について，以下の問に答えなさい．

(1) ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とすると，与えられた 2 次曲線 C は 2 次の対称行列 $\boldsymbol{A}$ を用いて ${}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 4$ と表現可能である．行列 $\boldsymbol{A}$ を求めなさい．ただし，${}^t\boldsymbol{x}$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ の転置を表すこととする．

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ は 2 つの固有値を持つ．この固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ とそれぞれの固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2$ を求めなさい．ただし，$\lambda_1 < \lambda_2$，$\boldsymbol{u}_1$ の第 1 成分は正，$\boldsymbol{u}_2$ の第 1 成分は負であるとする．

(3) 行列 $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2]$ およびベクトル $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ であるとき，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{X}$ で与えられる変換を考える．このとき，xy 平面上の 2 次曲線 C は，XY 平面上で 2 次曲線 C' に変換される．2 次曲線 C' の式を $X,\ Y$ を用いて表しなさい．

(三重大 2022)　　(m20223103)

0.170 二次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ における $A\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ を満たす定数 k とベクトル $\overrightarrow{u}$ について，以下の各問に答えなさい．

(1) この定数 k の値を求めなさい．

(2) このベクトル $\overrightarrow{u}$ を求めなさい．

(3) A^n を求めなさい．

(4) x-y 二次元平面上に存在しているある直線は，この行列 A を用いた一次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって x 軸に一致した．返還前の直線の式を求めなさい．

(三重大 2022)　　(m20223104)

0.171 $-x + 2\sqrt{2}y - 4z = 1$ で表される平面 A と，$2x + 2z = 1$ で表される平面 B がある．この 2 つの平面に関する以下の各問に答えなさい．

(1) この 2 つの平面のなす角は何度になるか求めなさい．

(2) この 2 つの平面の交線の方程式を求めなさい．

(3) この 2 つの平面の交線を含み，かつ原点を通る平面の方程式を求めなさい．

(三重大 2022)　　(m20223105)

0.172 曲線 $y = 3x^2$ を y 軸周りに回転してできる回転体を容器として考える．y 軸を鉛直上向きにとり，この容器に毎秒 c の割合で水を入れるものとする．この際，t 秒後の容器内の水面の高さを答えなさい．ただし，c は定数である．また，水面の高さは x 軸と水面との距離とする．

(三重大 2022)　　(m20223106)

0.173 以下の関数の y の値が最小値となる x の値を求めなさい.

$$y = \sqrt{x^2+2} + \sqrt{(x-5)^2+1}$$

(三重大 2022)　　(m20223107)

0.174 以下の極限値を求めなさい.

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m^5} \sum_{n=1}^{m} n^4$$

(三重大 2022)　　(m20223108)

0.175 次の関数を微分せよ.

(1) $y = x^{2x} \quad (x > 0)$

(2) $y = e^{-2x} \sin 3x$

(3) $y = \left(\tan x + \dfrac{1}{\tan x} \right)^2$

(4) $y = (3x-1)\sqrt{x^3+1}$

(三重大 2022)　　(m20223109)

0.176 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^2 5^{2x} dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^3 \sin x \, dx$

(三重大 2022)　　(m20223110)

0.177 次の行列の積を求め，その行列式の値を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(三重大 2022)　　(m20223111)

0.178 次の連立 1 次方程式を，行列を用いて解け.

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 1 \\ 2x + 4y - 3z = 6 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

(三重大 2022)　　(m20223112)

0.179 次の行列の逆行列を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(三重大 2022)　　(m20223113)

0.180 任意の x に対して (1)，(2) を満たす関数 $f(x)$ をそれぞれ求めよ.

(1) $f(x) = x^2 + \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$　　ただし，$f(x)$ は連続関数とする.

(2) $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = x + \int_0^x tf(x-t)\,dt$　,　$f(x) > 0$　　ただし，$f(x)$ は微分可能な関数とする.

(三重大 2022)　　(m20223114)

0.181 A 国において，ある病気 X に罹患している人は 8 %である．病気 X を診断するための Y 検査で，罹患している人が正しく陽性と判定される確率は 80 %であり，罹患していない人が誤って陽性と判定される確率は 7 %である.

(1) A 国のある人が検査 Y を受けたところ，陽性と判定された．この人が病気 X に罹患している確率を求めよ．

(2) A 国のある人が検査 Y を受けたところ，陰性と判定された．この人が病気 X に罹患している確率を求めよ．

(三重大 2022)　　(m20223115)

0.182　a を実数とする．ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_4$ を

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3\}$ が一次独立であることを示せ．

(2) ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_4\}$ が一次独立とならないような a の値をすべて求めよ．

(奈良女子大 2022)　　(m20223201)

0.183　p を $0 < p < 1$ をみたす実数とする．行列 A および数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\ \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix},\ a_1 = 1,\ b_1 = 0,\ \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geqq 2)$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) $k \geqq 1$ に対し，A^k を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$ であることを示せ．

(奈良女子大 2022)　　(m20223202)

0.184　$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) a を実数とする．$y = f(x)$ の接線で点 $A(a, 0)$ を通るものがちょうど 2 本存在するための a の条件を求めよ．

(奈良女子大 2022)　　(m20223203)

0.185　$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ を求めよ．　　(2) $\displaystyle\lim_{M\to\infty}\int_0^M f(x)dx$ を求めよ．

(奈良女子大 2022)　　(m20223204)

0.186　関数 $f(x) = x - (x-a)^{2/3}$ の極値を求めよ．ただし，a は正の実数で，x は a より大きい実数とする．

(奈良女子大 2022)　　(m20223205)

0.187　3 次元の xyz 空間において，楕円体 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ の面上の点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ における接平面の方程式を求めよ．ただし，$a,\ b,\ c$ はいずれも正の実数とする．

(奈良女子大 2022)　　(m20223206)

0.188 2 次元の xy 平面内の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ に関する以下の問いに答えよ.

ただし，$a > b > 0$ であり，また楕円の離心率を

$$\tilde{e} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

とする.

(1) 楕円の周囲の長さ L は

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \tilde{e}^2 \cos^2 \theta}\ d\theta$$

で与えられることを示せ.

(2) 離心率 $\tilde{e}$ が 1 より十分小さいとき，長さ L は近似的に

$$L = 2\pi a \left(1 - \frac{1}{4}\tilde{e}^2\right)$$

となることを示せ.

(奈良女子大 2022) (m20223207)

0.189 時間 t $(t \geq 0)$ で関数 $x(t)$ についての次の微分方程式を考える.

$$\frac{dx(t)}{dt} = a\left(f(t) - x(t)\right)$$

ここで a は正の実数で，$f(t)$ は与えられた実関数とする．以下の問いに答えよ.

(1) $a = \log_e 2$ で，$t \geq 0$ で $f(t) = 0$ である場合に，$x(0) = 1$ をみたす解 $x(t)$ を求めよ.

(2) 一般に時間が十分に経った後の解は，$x(0)$ の値に関係なく

$$x(t) = a\int_0^t f(u)e^{a(u-t)}du$$

に近づくことを示せ.

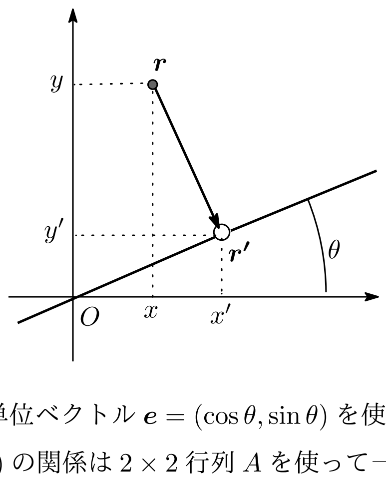
(3) 次に，$a = \log_e 2$ で，関数 $f(t)$ が 0 以上の任意の整数 n について

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (2n \leq t < 2n+1) \\ 0 & (2n+1 \leq t < 2n+2) \end{cases}$$

であ場合を考える．整数 N が十分大きくなったときに $x(2N)$ が近づく値を求めよ.

(奈良女子大 2022) (m20223208)

0.190 下図のように xy 平面上の任意の点 $\boldsymbol{r} = (x, y)$ を，x 軸から角度 θ 傾いた直線に垂直に射影した点 $\boldsymbol{r}' = (x', y')$ を求める変換を考える．以下の問いに答えよ.



(1) ベクトル $\boldsymbol{r}$ と単位ベクトル $\boldsymbol{e} = (\cos\theta, \sin\theta)$ を使って，ベクトル $\boldsymbol{r}'$ を表せ.

(2) (x, y) と (x', y') の関係は 2×2 行列 A を使って一次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

として表すことができる．行列 A を求めよ.

(3) 行列 A の 2 つの固有値を計算し，それぞれの固有値に属する固有ベクトルの方向を求めよ．

(奈良女子大 2022) (m20223209)

0.191 (1) 次の微分方程式の一般解を，定数 C を用いて求めよ．

（イ） $\dfrac{dy}{dx} = y^2 + y - 6$

（ロ） $\dfrac{dy}{dx} = 2 + \dfrac{y}{x} + e^{-\frac{y}{x}}$

（ハ） $\left(\dfrac{3}{x} + \dfrac{y}{x^2}\right) dx + \left(3y - \dfrac{1}{x}\right) dy = 0$

(2) 次の微分方程式の一般解を，定数 C を用いて求めよ．

なお，積分因子は $\sin x$ である．

$$(2\sin y\cos x - 2)\,dx + \cos y \sin x\,dy = 0 \qquad (0 < x < \pi)$$

(京都大 2022) (m20223301)

0.192 (1) 次の行列が正則行列となるための a の条件を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 上記の行列において $a = 1$ の場合の行列式の値を求めよ．

(3) x_1〜x_4 を変数とする 次の連立方程式を解け．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(京都大 2022) (m20223302)

0.193 (1) 次の積分の値を求めよ．

（イ） $\displaystyle\int_e^3 x^2 \log_e x \; dx$ （ロ） $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x \; dx$ （ハ） $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2+x}{4x^2+1}dx$

(2) 次の広義積分の値を求めよ．

（イ） $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$ （ロ） $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\log_e(1+x^2)\; dx$

(京都大 2022) (m20223303)

0.194 a, b を実数とする．x, y, z に関する連立 1 次方程式

$$(*)\begin{cases} ax + ay + 2bz = 3 \\ 2x + 3y + 3z = 4 \\ 3x + 5y + 2z = 5 \end{cases}$$

を考える．$(x, y, z) = (-4, 3, 1)$ は $(*)$ の解であり，かつ $(*)$ はそれ以外の解ももつとする．このとき，a, b の値を求めよ．また，$(*)$ の解を求めよ．

(京都工芸繊維大 2022) (m20223401)

0.195 x の関数 $f(x) = 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\ \ (x \geqq 0)$ を考える．

(1) $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ．

(3) 関数 $y = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)\ \ (x \geqq 0)$ の値域を求めよ．

(京都工芸繊維大 2022)　　(m20223402)

0.196 xy 平面上の関数 $f(x,y) = x^3 + 6xy + 3xy^2$ について，次の問いに答えよ．

(1) 重積分

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

の値を求めよ．ただし，$D = \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq x,\ 0 \leqq x \leqq 1\}$ とする．

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2022)　　(m20223403)

0.197 (1) $x > 0$ における微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2}{x}y = 0$ の一般解を求めよ．

(2) $x > 0$ における微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2}{x}y = e^{2x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

の解を求めよ．

(京都工芸繊維大 2022)　　(m20223404)

0.198 以下の問いに答えよ．ただし，A_n は n 次の実正方行列を，${A_n}^T$ は A_n の転置行列を表す．

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & p & 0 \end{pmatrix}$ が正則ではないとき，実数 p の値を求めよ;

(2) ${A_3}^T = -A_3$ である A_3 を任意の実数 a, b, c を用いて表し，正則かどうかを判定せよ．

(3) ${A_n}^T = -A_n$ である A_n が正則かどうかを判定せよ．ただし，n は 5 以上の奇数であるとする．

(大阪大 2022)　　(m20223501)

0.199 以下に示す連立微分方程式の解 $x(t)$, $y(t)$ を求めよ．ただし，$t = 0$ のとき，$x = 1$, $y = 0$ とする．

$$\begin{cases} 2\dfrac{dx(t)}{dt} - \dfrac{dy(t)}{dt} = 3x(t) + e^{2t} \\ \dfrac{dx(t)}{dt} + 2\dfrac{dy(t)}{dt} = y(t) + e^{2t} \end{cases}$$

(大阪大 2022)　　(m20223502)

0.200 以下の問いに答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) 方程式 $e^{iz} = 1 - i$ を満たす複素数 z をすべて求め，$a + bi$（a, b は実数）の形で表せ．

(2) 以下の複素関数 $f(z)$ が $z \neq 1$ において正則であることを示せ．

$$f(z) = \frac{1}{z-1}$$

(3) 以下の複素関数 $g(z)$ の $z=0$ のまわりでのローラン展開を求めよ．ただし，$1<|z|<2$ とする．

$$g(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}$$

(大阪大 2022)　　(m20223503)

0.201 (1) 100 円玉 2 枚，10 円玉 4 枚，5 円玉 6 枚が入った財布から，同時に 3 枚の硬貨を取り出す．いずれの硬貨を取り出すのも同様に確からしいとする．

(1-1) 取り出した 3 枚の金額の合計が 115 円である確率を求めよ．

(1-2) 取り出した 3 枚の金額の合計が 200 円以上である確率を求めよ．

(1-3) 取り出した 3 枚の金額の合計が 200 円以上になる事象を A，取り出した 3 枚の中に 10 円玉が含まれる事象を B とした場合の条件付き確率 $P(B|A)$ を求めよ．

(2) 次の表は，ある試験の結果である．各教科の得点分布は，それぞれ正規分布に従うものとする．

教科	受験者数（人）	平均（点）	標準偏差（点）
数学	400	60.0	15.2
国語	500	119.7	30.1
英語	600	120.3	20.6
物理	200	50.8	8.0
歴史	100	65.8	11.5

(2-1) この試験を受験した S 君の得点は，数学 85 点，国語 151 点，英語 135 点，物理 67 点，歴史 81 点であった．数学，国語，英語，物理，歴史を S 君の偏差値が高い順に並べよ．

(2-2) S 君の数学の得点が 85 点である場合，数学における S 君の上からの順位に最も近いものを 10 位，20 位，50 位，100 位，150 位の中から 1 つ選択し，理由と共に示せ．必要ならば以下に示す標準正規分布表を用いよ．
（標準正規分布表 $P(0\leq Z\leq z)$ は省略）

(大阪大 2022)　　(m20223504)

0.202 $\alpha>0,\ \beta>0,\ x_0>0$ として，次の微分方程式の初期値問題を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\alpha x-\beta x^2,\ t>0 \\ x(0)=x_0 \end{cases}$$

(1) $x(t)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}x(t)$ を求めよ．

(3) $\dfrac{\alpha}{\beta}\neq x_0$ のとき，$x(t)$ が区間 $t\geqq 0$ において単調関数であることを示せ．

(大阪大 2022)　　(m20223505)

0.203 $0\leqq\theta<2\pi,\ 0\leqq\phi<2\pi$ とする．3 次の正方行列 $A,\ B$ を次式で定義し，$C=AB$ とする．

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}\cos\phi & 0 & \sin\phi\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi\end{pmatrix}$$

なお，虚数単位は $i\ (=\sqrt{-1})$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 行列 C の行列式の値を求めよ．

(2) 行列 C のすべての固有値およびそれらの絶対値を求めよ．

(大阪大 2022)　　(m20223506)

0.204 コインを投げたとき，表が出る確率が $p\left(0<p<1,\ p \neq \dfrac{1}{2}\right)$ であるコイン A と，表が出る確率が $1-p$ であるコイン B が 1 枚ずつある．ただし，p は常に一定である．また，コイン A とコイン B は見た目や重さでは判別できない．以下の設問に答えよ．

(1) コイン A とコイン B を同時に投げたとき，2 枚とも表が出る確率を求めよ．

(2) ある競技において，2 名の競技者がいずれも公平に権利を得られるような抽選の仕組みを考えたい．コイン A またはコイン B，またはその両方を用いて，実現可能な方法を理由とともに一つ述べよ．

(3) N を正の整数とする．コイン A とコイン B を中身の見えない袋に入れる．その袋からコインを 1 枚無作為に取り出し表裏を確認後，コインを袋に戻す試行を N 回繰り返したところ，N 回とも表が出た．このとき，投げたコインが全て A であった条件付き確率を求めよ．

(大阪大 2022)　　(m20223507)

0.205 定数 C は正の実数とし，確率変数 X は $f(x)=\dfrac{C}{1+x^2}\quad(-\infty<x<\infty)$ を確率密度関数にもつとする．以下の設問に答えよ．

(1) 定数 C を求めよ．

(2) 確率変数 Y を $Y=\cos X$ によって定める．このとき，Y の期待値と分散を留数定理を用いることによって求めよ．

(大阪大 2022)　　(m20223508)

0.206 (1) 関数 $y=y(x)$ が微分方程式

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}=2xy+(1+x^2)^2+y^2$$

を満たしているとする．このとき，関数 $z=z(x)$ を

$$z=\frac{y}{1+x^2}$$

によって定義する．z が満たす微分方程式を求めよ．

(2) (1) の微分方程式の，初期条件 $y(0)=0$ の下での解を求めよ．

(3) (2) で求めた解は，0 を含むある有界開区間 $(a,\ b)$ 上で連続であり

$$\lim_{x\to a+0}|y(x)|=\lim_{x\to b-0}|y(x)|=\infty$$

を満たしている．このような $a,\ b$ を求めよ．

(4) 関数 $u=u(x)$ が微分方程式

$$(1+x^2)\frac{du}{dx}=2xu+(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)^2+u^2}$$

を満たしているとする．この微分方程式の，初期条件 $u(0)=0$ の下での解を求めよ．

(大阪大 2022)　　(m20223509)

0.207 E を 3 次の単位行列，J をすべての成分が 1 であるような 3 次の正方行列とし，

$$A=\frac{1}{3}J\,,\qquad B=E-A$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A^2, B^2, AB をそれぞれ求めよ.

(2) $V=\left\{Ax \mid x\in\mathbb{R}^3\right\}$, $U=\left\{Bx \mid x\in\mathbb{R}^3\right\}$ とおくとき，$\mathbb{R}^3=V\oplus U$（直和）であることを示せ.

(神戸大 2022)　　(m20223801)

0.208 各成分が 1 か -1 のいずれかであるような 4 次正方行列

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&a&b\\1&c&1&d\\1&e&f&g\end{bmatrix}$$

について,

$$A^TA=4E$$

が成り立つとする．ただし A^T は A の転置行列を，E は 4 次の単位行列を表す．このとき，次の問いに答えよ.

(1) a,b,c,d,e,f,g を求めよ.

(2) 連立一次方程式

$$A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

を解け.

(神戸大 2022)　　(m20223802)

0.209 二次方程式 $ax^2+x+b=0$ が実数解を持たないような実数 a, b, および 二変数関数 $f(x,y)=ax^2+xy+by^2+x+y$ について，次の問いに答えよ.

(1) 二変数関数 $f(x,y)$ が極値をとる点 (x,y) を，a, b を用いて表せ.

(2) (1) で求めた x, y は a, b の値によって変化するため，$x=x(a,b)$, $y=y(a,b)$ とかける．特に $x>0$ かつ $y>0$ となるような a, b について，三辺の長さがそれぞれ $2x$, y, y であり，表面積が 24 である直方体の体積を $V(a,b)$ とする．このとき $V(a,b)$ は最大値を持つが，$V(a,b)$ が最大となるときの a, b の値を求めよ.

(神戸大 2022)　　(m20223803)

0.210 $D=\{(x,y)\mid 0\leq x+y\leq 1\ .\ 1\leq 3x-2y\leq 2\}$ とする．次の各問いに答えよ.

(1) 領域 D の概形を図示せよ.

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)\left\{\log(3x-2y)\right\}^2\,dx\,dy$ の値を求めよ.

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{13x-7y}}\,dx\,dy$ の値を求めよ.

(神戸大 2022)　　(m20223804)

0.211 (1) a を実数の定数とする．x, y の関数

$$f(x,y)=\frac{x^2}{2}+axy+\frac{y^4}{4}$$

の停留点 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\text{ かつ }\dfrac{\partial f}{\partial y}=0\text{ となる点}\right)$ を求め，それらが f の極大値を与える，極小値を与える，極値を与えないのどれであるか判定せよ.

(2) $x,\ y$ の関数 $u,\ v$ を

$$u = xy$$
$$v = e^{x^2+y^2}$$

で定める．$x,\ y$ の関数

$$g(x,y) = \sin(uv)$$

に対して，$\dfrac{\partial g}{\partial x},\ \dfrac{\partial g}{\partial y}$ を $x,\ y$ で表せ.

(神戸大 2022)　　(m20223805)

0.212 a を実数とし，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

とする.

(1) $B = P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P が存在するための必要十分条件を，a を用いて表せ.

(2) (1) の条件が成り立つとき，$B = P^{-1}AP$ となる直交行列 P と対角行列 B の組を一つ求めよ.

(神戸大 2022)　　(m20223806)

0.213 A を n 次実正方行列とする．単位行列，零行列をそれぞれ $E,\ O$ で表す

(1) $A^m = E$ となる正整数 m が存在すれば，A は正則行列であることを示せ.

(2) $A^m = O$ となる正整数 m が存在すれば，A は非正則行列であることを示せ.

(3) $A^m = O$ となる正整数 m が存在するとき，$E - A$ は正則であることを示せ．また このとき，$E - A$ の逆行列を A で表せ.

(神戸大 2022)　　(m20223807)

0.214 n を正整数とする．積分

$$\iint_A (x+y)^2(x-y)^n dxdy\ , \qquad A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\frac{1}{2} \leq y \leq x \leq \frac{1}{2} \right\}$$

を求めよ.

(神戸大 2022)　　(m20223808)

0.215 次の関数の第 n 次導関数を求めよ.

$$y = \log(1+x)$$

(広島大 2022)　　(m20224101)

0.216 次の関数の不定積分を求めよ．ただし，a は定数とする.

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

(広島大 2022)　　(m20224102)

0.217 面 $z = x^2 + y^2$ と面 $z = x$ で囲まれた部分の体積を求めよ.

(広島大 2022)　　(m20224103)

0.218 次の微分方程式を解け.

$$3\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 9 = 0$$

(広島大 2022)　　(m20224104)

0.219 行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & b \\ a & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{bmatrix}$ の固有ベクトルの一つは $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ である.

(1) 実数 a, b の値を求めよ.

(2) $\boldsymbol{A}$ の固有値をすべて求めよ.

(3) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^4 - 3\boldsymbol{A}^3 + 4\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ とする. $\boldsymbol{A}$ の対角化を利用して, $\boldsymbol{B}$ の行列式の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{E}$ は単位行列である.

(広島大 2022)　　(m20224105)

0.220 2 つの 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ に対し, $\boldsymbol{a}$ の転置により得られる 3 次実行ベクトル ${}^t\boldsymbol{a} = [a_1\ \ a_2\ \ a_3]$ と $\boldsymbol{b}$ の（行列としての）積 ${}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ により得られる実数を $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ とおく.

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

また, $\boldsymbol{o} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とおく.

(1) (a) 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対し, $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}) = 0$ であることは $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ であるための必要十分条件であることを示せ.

(b) $\boldsymbol{o}$ でない 2 つの 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ に対し, $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = 0$ ならば $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ は 1 次独立であることを示せ.

(c) $\boldsymbol{o}$ でない 3 つの 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ に対し, $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) = 0$ ならば $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ は 1 次独立であることを示せ.

(2) 3 つの 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ を用いて表される 3 次正方行列 $A = [\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}]$ に対し, ${}^tA = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{a} \\ {}^t\boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{c} \end{bmatrix}$ を 3 つの 3 次実行ベクルトル ${}^t\boldsymbol{a},\ {}^t\boldsymbol{b},\ {}^t\boldsymbol{c}$ を用いて表される A の転置行列とする. A が

$${}^tAA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

を満たすとき, $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ は 1 次独立であることを示せ.

(愛媛大 2022)　　(m20224601)

0.221 a を実数とする. 4 次実列ベクトル $\boldsymbol{x}$ を未知ベクトル, 4 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 5 & a^2+3 & a^2-1 & 1 \\ a+1 & a & 1 & 2a-2 \\ -a+1 & a^2-a & a^2-1 & -2a+2 \\ 0 & a^2-1 & a^2-1 & 0 \end{bmatrix}$$

を係数行列とする連立 1 次方程式

$$(\#) \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

を考える．ただし，$\boldsymbol{o}$ は 4 次零ベクトルとする．

(1) $a = 1$ とする．このとき，方程式 (#) の解をすべて求めよ．

(2) (i) 任意の a に対し，方程式 (#) は少なくとも 1 つの解をもつことを示せ．

(ii) 実列ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ がともに 方程式 (#) の解であるとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の 1 次結合 $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$（ α, β は実数 ）も (#) の解であることを示せ．

(3) 方程式 (#) が以下の条件 (♭1), (♭2) の両方をみたすような a の値をすべて求めよ．

(♭1) 少なくとも 2 つの異なる解をもつ．

(♭2) 実列ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ がともに (#) の解であるとき，$\boldsymbol{a} = c\boldsymbol{b}$ または $\boldsymbol{b} = c\boldsymbol{a}$ をみたす実数 c が存在する．

(愛媛大 2022) (m20224602)

0.222 多項式で表される関数 $f(x)$ について 次の (i) ∼ (iv) がわかった．

(i) $f(0) = 0$

(ii) $x = -4$ および $x = 2$ のみで $f'(x) = 0$

(iii) $-5 \leq x \leq 2$ について $f'(x) \geq 0$

(iv) $-4 < x < 0$ について $f''(x) > 0$

これらの情報からわかる範囲で，区間 $[-5,\ 2]$ における $f(x)$ のグラフの概形をかけ．ただし，(i) ∼ (iv) の各々がどのように反映するかを文章で記述すること．

(愛媛大 2022) (m20224603)

0.223 変数 a, b は各々$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ に値をとる．

$$\int_{a-b}^{a+b} (x-b)\bigl(x-(a+b)\bigr)dx = 2b^3$$

となる $(a,\ b)$ の組をすべて求めよ．

(愛媛大 2022) (m20224604)

0.224 関数

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x + 1$$

がある．

(1) 曲線 $y = f(x)$ の変曲点を求めよ．

(2) 直線 ℓ が以下の条件 (i), (ii) の両方をみたすとする．

(i) 直線 ℓ と曲線 $y = f(x)$ は 3 点で交わり，そのうち 1 点は (1) で求めた変曲点である．

(ii) 直線 ℓ と曲線 $y = f(x)$ の 3 つの交点の x 座標を小さい値から順に a, b, c としたとき，

$$\int_a^c f(x)dx = 20$$

である．

このとき，直線 ℓ を表す方程式を求めよ．

(3) 曲線 $y = f(x)$ と (2) の直線 ℓ で囲まれる 2 つの部分の面積の和を求めよ．

(愛媛大 2022)　　　(m20224605)

0.225 (1) 次の極限値を求めよ．ただし，$[x]$ は，実数 x を超えない最大の整数とする．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+3x^2)}{\log(5+7x)}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{x^2-[3x]x+2}{x-1}$　　(c) $\displaystyle\lim_{x\to0}\int_0^{x/2}\frac{dt}{(\sin x)\sqrt{1-t^2}}$

(2) 次の関数の導関数を求めよ．

(a) $\sqrt{1+\cos^2 x}$　　(b) $\sin^{-1}(\log x)$

(愛媛大 2022)　　　(m20224606)

0.226 (1) 次の不定積分と定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$　　(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}x\sin^2 x\,dx$

(2) 次の広義積分を求めよ．

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{2x^2+3}$$

(愛媛大 2022)　　　(m20224607)

0.227 $f(x,y)=\dfrac{1}{1+2x^2+3y^2}$ とする．

(1) $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ を求めよ．

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ の点 $\big(2,1,f(2,1)\big)$ における接平面の方程式を求めよ．

(愛媛大 2022)　　　(m20224608)

0.228 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x\geqq1,\ y\geqq2,\ xy\leqq4\right\}$ とする．

(1) D を図示せよ．

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D xe^{xy}dxdy$ を求めよ．

(愛媛大 2022)　　　(m20224609)

0.229 $A=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&3&3&0\\3&x&y&0\\2&1&x&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\x\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\y\\x\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ とする．

ただし，x，y は実数とする．

(1) ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ において，$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ が 1 次従属になるとき，x，y の値を求めよ．

(2) ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ において，$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$，$\boldsymbol{u}_4$ が 1 次従属になるとき，y を x で表せ．

(3) ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ において，$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$，$\boldsymbol{u}_4$ が 1 次独立なとき，$A\boldsymbol{u}_1$，$A\boldsymbol{u}_2$，$A\boldsymbol{u}_3$，$A\boldsymbol{u}_4$ も 1 次独立であることを示せ．

(愛媛大 2022)　　　(m20224610)

0.230 (1) 式 ① を x で微分せよ．

$$f(x)=2x+3+\int_0^x f(t)dt\quad\cdots①$$

(2) 式 ① を満たす $f(x)$ を求めよ．

(3) a, b を実定数として，式 ② の微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+ax\frac{dy}{dx}+by=0\quad\cdots②$$

は $x=e^t$ とおくことにより式 ③ になることを示せ．

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(a-1)\frac{dy}{dt}+by=0\quad\cdots③$$

(4) 式 ④ の微分方程式の一般解 y を x の関数として求めよ．

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+6x\frac{dy}{dx}+6y=0 \quad \cdots ④$$

(九州大 2022)　　(m20224701)

0.231 互いに異なる正の定数 $a,\ b,\ c$ を考える．空間内の点 $O(0,0,0),\ A(a,0,0),\ B(0,b,0)\ C(0,0,c)$ を頂点とする 4 面体を V とする．また V 内部にある点を $P(x,y,z)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 $A,\ B,\ C,\ P$ を頂点とする 4 面体を V_1，点 $O,\ B,\ C,\ P$ を頂点とする 4 面体を V_2，点 $O,\ C,\ A,\ P$ を頂点とする 4 面体を V_3, 点 $O,\ A,\ B,\ P$ を頂点とする 4 面体を V_4 とする．4 面体 $V_1,\ V_2,\ V_3,\ V_4$ の体積比 $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$ を $a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z$ を用いて表せ．ただし，$\lambda_j\ (j=1,2,3,4)$ は $0\leq\lambda_j\leq 1$ および $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1$ を満たす実数とする．

(2) 関数 $\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\phi}(x,y,z),\ \boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}(x,y,z)$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{\phi}=\lambda_1\nabla\lambda_2-\lambda_2\nabla\lambda_1 \qquad \boldsymbol{\psi}=\lambda_2\nabla\lambda_3-\lambda_3\nabla\lambda_2$$

で定める．関数 $\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\phi}(x,y,z),\ \boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}(x,y,z)$ を，$a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z$ を用いて表せ．

(3) 関数 $f=f(x,y,z)$ を $f(x,y,z)=e^{x+y+z}\sin(x-z)\boldsymbol{\phi}(x,y,z)+x^2\sin(-x+y)\psi(x,y,z)$ で定める．このとき，積分

$$\int_{\ell_{AB}} f\cdot d\boldsymbol{r}$$

を求めよ．ただし，ℓ_{AB} は点 A から B に進む方向を正とする線分，$\boldsymbol{r}$ は線分 ℓ_{AB} 上にある点の位置ベクトルである．

(4) 関数 f を前問で定めた関数とする．このとき，積分

$$\int_S(\nabla\times f)\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

を求めよ．ただし，S は点 O,B,A を頂点とする 3 角形，$\boldsymbol{n}$ は z 成分が負となる S の単位法線である．

(九州大 2022)　　(m20224702)

0.232 n は 2 以上の自然数とし，k は 1 以上 n 未満の自然数とする．n 個の相異なる自然数 $1,\cdots,n$ の順列すべての中から等確率で選んだものを $(X_1,\cdots,X_n)$ とする．いま，k 番目までの自然数 $X_1,\cdots,X_k$ の中の最小のものを Y で表す．次に，$k+1$ 番目以降の自然数 $X_{k+1},\cdots,X_n$ の中で Y より小さいもののうち添え字が最小のものを X_j として，$Z=X_j$ とする．そのような X_j が存在しない場合は $Z=X_n$ とする．このとき，$Z=1$ の確率 $P_n(k)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $i\in\{1,\cdots,n\}$ について，$X_i=1$ の確率を求めよ．

(2) $i\in\{k+1,\cdots,n\}$ について，$X_i=1$ の条件の下で，$X_1,\cdots,X_{i-1}$ の中の最小値の自然数が Y である条件つき確率を求めよ．

(3) $P_n(k)$ を求めよ．解答には関数 $H(m)=\displaystyle\sum_{\ell=1}^{m}\frac{1}{\ell}$ を用いてよい．

(4) $P_{10}(k)$ を最大にする k と，その k に対する $P_{10}(k)$ の概数を求めよ．$H(9)=2.829$ を用いてよい．

(九州大 2022)　　(m20224703)

0.233 3 次正方行列 A を次のように定義する．

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -9 \\ -20 & -3 & 10 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の固有値のうちで最小のものを λ_0 とおく．λ_0 に対応する固有ベクトルで，「ベクトルの長さ（大きさ）は 1 」かつ「第 1 成分は負ではない」と言う条件を満たすものを求めよ．

(九州大 2022)　　(m20224704)

0.234 以下のように XY 平面上の点 $(x_1,\ y_1)$ を点 $(x_2,\ y_2)$ へうつす線形変換 $(*)$ を考える．

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},\quad M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdots (*)$$

(1) ア) 行列 M の行列式の値 $(\det M)$ を求めよ．

イ) x_2, y_2 を用いて，x_1, y_1 をそれぞれ書き表せ．

(2) 原点を中心とした単位円 C : $x^2+y^2=1$ を，線形変換 $(*)$ を用いて変形した閉曲線 D を考える．D を表す x, y の方程式を求めよ．

(3) 原点を中心とし，x 軸と y 軸に長短径をもつ楕円 E は以下の方程式で表される．

$$E\ :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

E を原点まわりに反時計方向に角度 θ だけ回転した楕円 E' を表す式を求め，以下の空白ア～ウを埋めよ．

$$E'\ :\ \left(\boxed{\quad ア \quad}\right)x^2+\left(\boxed{\quad イ \quad}\right)xy+\left(\boxed{\quad ウ \quad}\right)y^2=1$$

(4) (3) の結果を用いて閉曲線 D が楕円であることを示し，その面積を求めよ．

(九州大 2022)　　(m20224705)

0.235 n を正の整数として以下のように $f(x)$ と G_n を定義する．

$$f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$$

$$G_n=\begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^x}dx & for\ \ n=1 \\ \displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^{n-1}}{1+\exp(x^n)}dx & for\ \ n=2,3,4,\cdots \end{cases}$$

(1) $f(x)$ の不定積分 $F(x)$ を求めよ．ただし積分定数を C とせよ．

(2) 定積分 G_1 の値および定積分 G_2 の値を求めよ．

(3) 一般の正の整数 n について，定積分 G_n を求めよ．

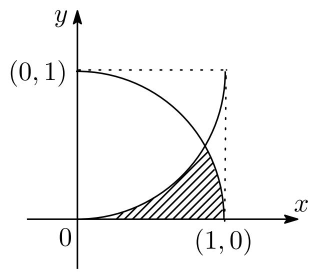
(九州大 2022)　　(m20224706)

0.236 第 1 象限において，円 $x^2+y^2=1$, $x^2+(y-1)^2=1$ および x 軸で囲まれる部分を A とする（図の斜線部）．

(1) 2 つの円の第 1 象限内の交点を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int x\cdot e^{2x}dx$ を求めよ．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_A x^3\cdot e^{x^2+y^2}dxdy$ を求めよ．



(九州大 2022)　　(m20224707)

0.237 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．$a,\ b$ は実数である．

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値が 2 つの異なる実数で得られることを示せ.

(2) 以下に示す行列 P を用いると $P^{-1}AP$ は対角行列となった．このとき，$a,\ b$ の満たすべき条件を示せ.

$$P = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{4} & -\sin\dfrac{\pi}{4} \\ \sin\dfrac{\pi}{4} & \cos\dfrac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

(九州大 2022) (m20224708)

0.238 (1) つぎの式で与えられる x の関数 y を x に関して微分せよ.

$$y = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

(2) x および y が，媒介変数 t を用いて，つぎの 2 つの式で与えられる．ただし，$t>0$ とする．この y を x に関して微分し，その結果を t の関数で示せ.

$$x = \frac{1}{t^3+t+1} \qquad y = \frac{2t}{t^3+t+1}$$

(佐賀大 2022) (m20224901)

0.239 つぎの積分をせよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \log(x^2+1)\,dx$

(佐賀大 2022) (m20224902)

0.240 (1) 平面上のベクトル $a = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ が作る平行四辺形の面積を求めよ.

(2) 行列 A を n 次正方行列，行列 I を n 次単位行列とするとき，つぎを求めよ.

$$\begin{bmatrix} I-A & A \\ -A & I+A \end{bmatrix}^3$$

(佐賀大 2022) (m20224903)

0.241 (1) つぎの関係式

$$y = Ce^{-x^2}$$

について，$C=0,\ C=1,\ C=-1$ が与えられた時の曲線をプロットせよ.

(2) さらに C がいかなる実数であっても，それらの曲線群が共通に満たす微分方程式を導け．なお x は実数である.

(佐賀大 2022) (m20224904)

0.242 次の関数を微分せよ.

(1) $e^{5x}\sin 2x$ (2) $\log_e(\log_e x)$

(佐賀大 2022) (m20224905)

0.243 次の関数の偏微分 $f_x,\ f_y$ を計算せよ.

$$f(x,\ y) = 2x^3 - x^2y + 5xy^2 + 3y^3$$

(佐賀大 2022) (m20224906)

0.244 次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(3x^3-4x^2+2x-5)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x}{(1+3x)^3}\,dx$

(佐賀大 2022)　(m20224907)

0.245 次の重積分を計算せよ.

$$\iint_D \left(x+\frac{2}{y}\right)dxdy \qquad (D: 1 \leq x \leq 4,\ 1 \leq y \leq e^2)$$

(佐賀大 2022)　(m20224908)

0.246 次の常微分方程式を解け.

$$\frac{d^2y}{dx^2}-8\frac{dy}{dx}+15y=0\ ,\quad y(0)=1\ ,\quad \frac{dy}{dx}(0)=7$$

(佐賀大 2022)　(m20224909)

0.247 次の連立一次方程式を解け.

$$\begin{cases} -x-3y+2z-2w=3 \\ -2x-6y+4z-5w=-1 \\ 3x+9y-6z+7w=-2 \end{cases}$$

ただし，答えは $t,\ s$ を任意の実数として，以下の $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2$ を求め

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \\ 0 \\ a_2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

の形に書くこと.

(佐賀大 2022)　(m20224910)

0.248 4 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -8 & 8 \\ 0 & 6 & -9 & 8 \\ -9 & -1 & -4 & -6 \\ 6 & 8 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

の行列式に関する以下の問いに答えよ.

(1) 行列式 $|A|$ の変形と余因子展開を行って,

$$|A| = c|B|$$

となる 3 次正方行列 B と実数 c を一組求めよ.

(2) 行列式 $|B|$ の値を求めて，行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(佐賀大 2022)　(m20224911)

0.249 次の 2 次正方行列に関する以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) ある直交行列 P に対して ${}^tPAP = B$ が対角行列になるとき，対角行列 B を求めよ.
ただし，${}^tP$ は P の転置行列である.

(3) $\boldsymbol{x}$ を 2 次元実ベクトルとして，

$$\max_{||x||=1} ||A\boldsymbol{x}|| = \max_{||x||=1} ||B\boldsymbol{x}||$$

を示し，その値を求めよ．

(佐賀大 2022) (m20224912)

0.250 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1} x + \tan^{-1}(2x)}{x}$ を求めよ．
ただし，$\sin^{-1} x$ および $\tan^{-1} x$ は，それぞれ $\sin x$ および $\tan x$ の逆関数である．

(佐賀大 2022) (m20224913)

0.251 関数 $f(x) = \log x$ の $x = 1$ におけるテイラー級数を $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-b)^k$ の形で求めよ．

(佐賀大 2022) (m20224914)

0.252 $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ を求めよ．

(佐賀大 2022) (m20224915)

0.253 $z = f(x, y),\ x = uv,\ y = \dfrac{u}{v}$ のとき，偏導関数 z_u と z_v を z_x，z_y を用いて表せ．

(佐賀大 2022) (m20224916)

0.254 (1) $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 1\}$ とするとき，$\displaystyle\iint_D \frac{2x}{1+y^4}\,dxdy$ を求めよ．

(2) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ とするとき，$\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2 + 1)\,dxdy$ を求めよ．

(佐賀大 2022) (m20224917)

0.255 (1) 次の行列 A と列ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ について，問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(a) 行列 A の行列式 $\det(A)$ を求めよ．

(b) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(c) 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(d) 行列 A は固有値 1 をもつ．1 以外の A の固有値をすべて求めよ．また，A の固有値を 1 つ選び，その固有値に対応する固有ベクトルを 1 つ求めよ．

(e) 行列 A が対角化可能か否かを示し，もし対角化可能であれば $P\Lambda = AP$ となる正則行列 P と対角行列 Λ の組を 1 つ求めよ．

(2) A を $n \times n$ 実対称行列，$\boldsymbol{x}$ を n 次実ベクトルとする．$\boldsymbol{x}^t$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表すとする．A が相異なる n 個の固有値を持ち，全ての固有値が非負であるとき，$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} \geq 0$ を示せ．

(佐賀大 2022) (m20224918)

0.256 次の関数 y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい．

(1) $y = (x+3)^8$　(2) $y = \sin(2x)$　(3) $y = e^{\cos x}$

(4) $y = \sqrt{x^3 + x^2 + 1}$　(5) $y = \log(x^3 + 1)$　(6) $y = \dfrac{\log(x)}{x^2 + 3}$

(佐賀大 2022) (m20224919)

0.257 次の関数 f の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めなさい.

(1) $f = 3xy + 2z$ (2) $f = \log x^y$

(佐賀大 2022) (m20224920)

0.258 次の不定積分を求めなさい. 積分定数を C とする. 必要な計算過程も記すこと.

(1) $\displaystyle\int (\cos x + 3x^3)dx$ (2) $\displaystyle\int \sin^2(x)dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-3)(x+2)}dx$ (4) $\displaystyle\int x^3\log(x)dx$

(佐賀大 2022) (m20224921)

0.259 次の微分方程式の一般解を求めなさい. 必要な計算過程も記すこと.

(1) $x\dfrac{dy}{dx} = y^2 - y$ (2) $2xy\dfrac{dy}{dx} = y^2 - x^2$

(佐賀大 2022) (m20224922)

0.260 水中の砂糖は, そのとき残っている量に比例する速度で溶解する. 50g の砂糖が 15g に減るのに 3 時間かかるとすれば, 砂糖の 20 % が溶解するのには何時間かかるか答えなさい. 必要ならば $\log(5)$, $\sqrt{3}$ 等の表記を用いて解答してよい. ただし, 必要な計算過程を記すこと.

(佐賀大 2022) (m20224923)

0.261 下記の極限値を求めなさい. 答えだけでなく途中経過 も記載すること.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 - x^2 - 4x + 3}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$

(佐賀大 2022) (m20224924)

0.262 $\sin 12^\circ$の近似値を小数 3 桁まで求めなさい. 答えだけでなく途中経過 も記載すること.

(佐賀大 2022) (m20224925)

0.263 連立一次方程式 $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y + 3z = 4 \\ -x + 2y - 4z = -2 \end{cases}$ を解きなさい. 答えだけでなく途中経過 も記載すること.

(佐賀大 2022) (m20224926)

0.264 関数 $f(x,y) = x^3 + x^2 + xy^2 - 8x - y^2$ の極値を求めよ. 答えだけでなく途中経過 も記載すること.

(佐賀大 2022) (m20224927)

0.265 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -1 & b \end{bmatrix}$ について 以下の問に答えなさい. 答えだけでなく途中経過 も記載すること.

(1) 固有値が, 2, 3 のとき, a, b を求めなさい.

(2) (1) のとき, 固有ベクトルを全て求めなさい.

(3) (1) のとき, A^n を求めなさい.

(佐賀大 2022) (m20224928)

0.266 重積分 $\displaystyle\iint_D \sin 2x\, dxdy \quad D = \left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leq x + y \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq x - y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ を求めなさい.

答えだけでなく途中経過 も記載すること.

(佐賀大 2022) (m20224929)

0.267 次の微分方程式の一般解を求めなさい．答えだけでなく途中経過も記載すること．

(1) $x\cos\dfrac{y}{x}\dfrac{dy}{dx}=y\cos\dfrac{y}{x}-x$　　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}+2y=e^x+\cos x$

(佐賀大 2022)　　(m20224930)

0.268 $\displaystyle\int\frac{1}{1-x^2}dx$ の一般解を求めよ．

(熊本大 2022)　　(m20225201)

0.269 $A=\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(熊本大 2022)　　(m20225202)

0.270 行列 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&-1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}$ および行列 $B=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$ に対して，以下の問いに答えなさい．

(1) A の固有値を全て求めなさい．

(2) B の逆行列を求めなさい．

(3) 行列 $(AB)^n$ を求めなさい．ただし，n は自然数である．

(4) 行列 $(BA)^n$ を求めなさい．ただし，n は自然数である．

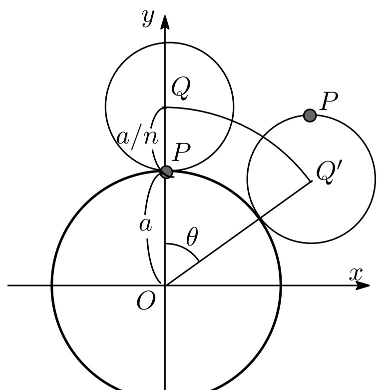
(5) (4) の結果を用いて，A の逆行列を A と B を使って表しなさい．

(熊本大 2022)　　(m20225203)

0.271 下図で示すように，固定された原点 O を中心とする半径 a の円の外側を半径 a/n の円が転がっていくとき，以下の問いに答えなさい．ただし n は自然数である．

(1) Q から Q' へ半径 a/n の円が転がった．$\angle QOQ'$ を θ とするとき，θ を用いて点 P の軌跡 $(x,\ y)$ を表しなさい．

(2) $0\leq\theta\leq 2\pi$ だけ回転したとき，点 P の軌跡の全長を求めなさい．



(熊本大 2022)　　(m20225204)

0.272 行列 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めたそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(3) 適当な直交行列 P により，$P^{-1}AP$ は対角行列となる．そのような直交行列 P を 1 つ求めよ．

(宮崎大 2022)　　(m20225301)

0.273 2 変数関数 $f(x,y)=\sin(x^2y)$ の 2 階までの偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$ をすべて求めよ．

(宮崎大 2022)　　(m20225302)

0.274 重積分 $I=\displaystyle\iint_D e^{x^2}dxdy,\quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ y\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\right\}$ の値を求めよ．

(宮崎大 2022)　　(m20225303)

0.275 次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 複素数 z についての方程式 $z^2=-i$ のすべての解を，$x+yi$（x,y は実数）の形で求めよ．

(2) 複素数 z は，等式 $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2}$ を満たすとする．このとき，$z^8+\dfrac{1}{z^3}$ がとりうるすべての値を，$x+yi$（x,y は実数）の形で求めよ．

(宮崎大 2022)　　(m20225304)

0.276 次の連立の微分方程式について，$y(0)=1,\ z(0)=0$ という条件の下での解 $y=y(x),\ z=z(x)$ を求めよ．

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{dy}{dx}=-y\\[2mm]\dfrac{dz}{dx}=y-2z\end{array}\right.$$

(宮崎大 2022)　　(m20225305)

0.277 (1) 10 進数の 147 を 2 進数，16 進数で表しなさい．

(2) 2 進数の 111100010100 を 16 進数で表しなさい．

(宮崎大 2022)　　(m20225306)

0.278 次のように定まるフィボナッチ数列 $f_0,\ f_1,\ f_2,\ \cdots$ について，設問に答えなさい．

$$f_n=\left\{\begin{array}{ll}0 & (n=0)\\ 1 & (n=1)\\ f_{n-1}+f_{n-2} & (n\geq 2)\end{array}\right.$$

(1) $f_2,\ f_3,\ f_4$ の値を答えなさい．

(2) $f_0,\ f_1,\ f_2,\ \cdots$ は

$$f_0+f_1+f_2+\cdots+f_n=f_{n+2}-1\qquad n\in N\equiv\{0,1,2,\cdots\}$$

を満たすことを証明しなさい．

(宮崎大 2022)　　(m20225307)

0.279 (1) $\{1,2,\cdots,100\}$ から異なる 2 つの数字を選ぶとき，その和が偶数となる組合せの総数は何通りあるか答えなさい．

(2) $\{1,2,\cdots,100\}$ から異なる 2 つの数字を選ぶとき，その和が偶数となる組合せと奇数になる組合せはどちらがどれだけ多いか答えなさい．

(宮崎大 2022)　　(m20225308)

0.280 任意の命題 α に対して，命題論理式

$$\alpha\to(\beta\to\alpha)$$

は，トートロジー (恒真式) であることを証明しなさい．

(宮崎大 2022)　　(m20225309)

0.281 以下の微分を計算せよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-x-1}\right)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sin x}{1-\cos x}\right)$

(鹿児島大 2022)　　(m20225401)

0.282 以下の不定積分，定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \sin x \sin 3x\, dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$

(鹿児島大 2022)　　(m20225402)

0.283 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $x\dfrac{dy}{dx}+\sqrt{1+y^2}=0$ （ただし，$x>0$）　　(2) $-x^2+y^2=2xy\dfrac{dy}{dx}$ （ただし，$x>0$）

(3) $\dfrac{4x-2y+1}{2x-y-1}=\dfrac{dy}{dx}$

(鹿児島大 2022)　　(m20225403)

0.284 直交座標系 $O-xyz$ において，点 $A(1,1,-1)$，点 $B(2,-2,1)$ および点 $C(-1,4,-3)$ がある．以下の問いに答えよ.

(1) 線分 AB と線分 AC を隣り合う 2 辺にもつ平行四辺形の面積 S を求めよ.

(2) 点 A，点 B，点 C を通る平面の方程式を求めよ.

(鹿児島大 2022)　　(m20225404)

0.285 下記の行列 A について，以下の問いに答えよ.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A を構成する 3 つの縦ベクトルは線形独立であるかどうかを調べよ.

(2) 直交座標系 $O-xyz$ において，行列 A の転置行列を行列 B として，$(x\ \ y\ \ z)B=(10\ \ 5\ \ 1)$ の解を求めよ.

(鹿児島大 2022)　　(m20225405)

0.286 $\dfrac{d}{dx}\left(\cos(\sin x^2)+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}\right)$ を求めなさい.

(鹿児島大 2022)　　(m20225406)

0.287 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x^2+3x+1}{x+2}\, dx$ を求めなさい.

(鹿児島大 2022)　　(m20225407)

0.288 座標平面上の点 $P(a,a)$，点 $Q(1,1)$，点 $R(3,2)$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ とベクトル $\overrightarrow{PR}$ が直交するときの a の値を求めなさい．ただし，$\overrightarrow{PQ}$ は零ベクトルではないものとする.

(2) $a=-1$ とするときの三角形 PQR の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2022)　　(m20225408)

0.289 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) 行列 A の行列式の値を求めなさい.

(2) 行列 A の逆行列を求めなさい.

(鹿児島大 2022) (m20225409)

0.290 c を正の実数とする. xy 平面上の 2 つの曲線 $y = \dfrac{1}{c}x^2$ と $y^2 = cx$ について, 以下の問いに答えなさい.

(1) 2 つの曲線を 1 つのグラフに描きなさい.

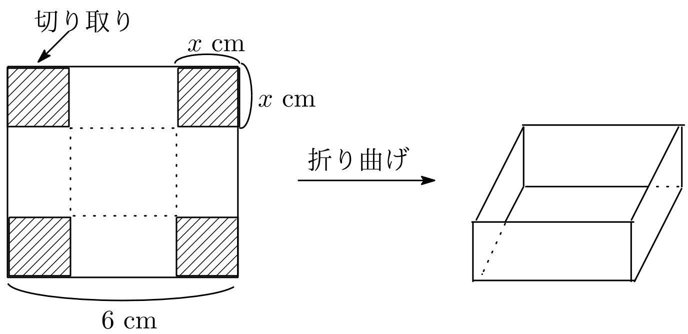
(2) 2 つの曲線で囲まれた部分の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2022) (m20225410)

0.291 $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき, $\sin\theta\cos\theta$ を求めたい. 解法の指針を最初に述べた後に解答せよ.

(鹿児島大 2022) (m20225411)

0.292 一辺が 6 cm の正方形の紙の四隅から, 一辺の長さ x cm の同じ大きさの 4 つの正方形を切り取り, 残りの紙を折り曲げてふたのない直方体の箱を作る. なお, 紙の厚みは無視できるものとする.



(1) この箱の容積を $V\text{cm}^3$ とすると, V は ① 式で示されることを説明せよ.

$$V = x(6-2x)^2 \qquad ①$$

(2) x の取りうる範囲を述べよ.

(3) ① 式を微分すると ② 式となる. この式を用いて V が最大となる x の値を求める手順を説明せよ. そして, その x の値を求めよ.

$$V' = 12(x-3)(x-1) \qquad ②$$

(鹿児島大 2022) (m20225412)

0.293 次の微分方程式の一般解を求めよ. なお, 任意の定数は C_1, C_2 を用いること.

$y'' + 2y' + y = x^2$

ただし, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ の意味である.

(室蘭工業大 2022) (m20225501)

0.294 次の不定積分を求めよ.

$$\int xe^x dx$$

(室蘭工業大 2022) (m20225502)

0.295 次の行列 A の固有値及び固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2022) (m20225503)

0.296 (1) 関数 $f(x) = \cos 2x + \sin(-3x)$ に対して，1 次から 3 次までの導関数を求めなさい.

(2) (1) で求めた導関数を用いて，関数 $f(x) = \cos 2x + \sin(-3x)$ について　x^3 までのマクローリン展開を求めなさい.

(室蘭工業大 2022)　　(m20225504)

0.297 不定積分 $\displaystyle\int x^2 e^{\frac{x}{2}}\,dx$ を計算しなさい．積分定数は省略してよい.

(室蘭工業大 2022)　　(m20225505)

0.298 2 つのベクトル $\boldsymbol{u} = (1,\ 2,\ 3)$, $\boldsymbol{v} = (3,\ 2,\ 1)$ と直交する単位ベクトルを求めなさい.

(室蘭工業大 2022)　　(m20225506)

0.299 以下の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2022)　　(m20225507)

0.300 つぎの微分を計算せよ． $\dfrac{d\,(5^{2x})}{dx}$

(室蘭工業大 2022)　　(m20225508)

0.301 つぎの積分を計算せよ．なお，不定積分では積分定数を省略してよい.

(1) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$

(室蘭工業大 2022)　　(m20225509)

0.302 つぎの微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} - 2y = 2$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 4e^{-2x}$

(室蘭工業大 2022)　　(m20225510)

0.303 行列 $A = \begin{pmatrix} a^5 & 0 & a^5 & a^5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ a^5 & 1 & a^5 & 2a^5 \\ a^5 & 1 & 2a^5 & a^5 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) A の行列式を求めよ.

(2) $a = -\dfrac{1}{2} - j\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，A の行列式の値を示せ．ただし，$j = \sqrt{-1}$ である.

(室蘭工業大 2022)　　(m20225511)

0.304 直角座標系 (x, y, z) において，スカラー関数 $f = x^2 + y^2 + 2z$ が与えられているとき，

以下の問いに答えよ．ただし，$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ である.

(1) $\nabla f\ \bigl(=\mathrm{grad}(f)\bigr)$ を求めよ.

(2) $\nabla\cdot(\nabla f)\ \bigl(=\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f))\bigr)$ を求めよ.

(3) $\nabla\times(\nabla f)\ \bigl(=\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f))\bigr)$ を求めよ.

(4) 点 $A(1,0,0)$ から点 $B(0,1,0)$ に向かう経路 C 上の線積分 $\displaystyle\int_C (\nabla f)\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ.

ただし, $d\boldsymbol{r}$ は線積分における線素ベクトルを表す. また, 経路 C は任意に設定してよい.

(室蘭工業大 2022)　　(m20225512)

0.305 次の極限を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}$$

(香川大 2022)　　(m20225701)

0.306 次の関数が $(x,y)=(0,0)$ において連続かどうか判定せよ. 理由も述べること.

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & (x,y)=(0,0)\ \text{のとき} \\ \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\ \text{のとき} \end{cases}$$

(香川大 2022)　　(m20225702)

0.307 $z=\log_{10}(x^2+y^2+1)$ の $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ を求めよ.

(香川大 2022)　　(m20225703)

0.308 円柱 : $x^2+y^2\leq 1$ のうち放物曲面 : $z=2-x^2-y^2$ と平面 : $z=0$ で囲まれる部分の体積を求めよ.

(香川大 2022)　　(m20225704)

0.309 以下のベクトル $\vec{v}$ の集合 V は, 線形空間 (ベクトル空間とも呼ぶ) である. V の次元と基底を求めよ.

$$V=\left\{\vec{v}=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ u\end{pmatrix}\ \middle|\ x,y,z,u\ \text{は}\ \begin{cases} x+2y+3z+u=0\\ 2x+3y+z+2u=0\\ 3x+5y+4z+3u=0\\ x+y-2z+u=0\end{cases}\ \text{の解}\right\}$$

(香川大 2022)　　(m20225705)

0.310 以下の行列 A は, 適当な正則行列 P を用いて $P^{-1}AP=B$ のように相似変換し, 行列 B を対角行列にすることができる. 対角行列となる B を求めよ. また, P の一例を示せ.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

(香川大 2022)　　(m20225706)

0.311 (1) 以下の行列 A に関して行列式 $\mathrm{det}A$ を求めよ.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

(2) 前問 (1) の行列 A に関して余因子行列 $\mathrm{adj}A$ および逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) 以下の行列 B に関して 余因子行列 $\mathrm{adj}B$ の行列式 $\det(\mathrm{adj}B)$ を求めよ.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & a & b \\ c & a & 0 & b & c \\ a & b & c & a & b \\ c & a & 0 & b & 0 \end{bmatrix}$$

(東京都立大 2022)　　(m20225901)

0.312 $10,000,000$ 人の集団があり，そのうち $100,000$ 人がウイルスに感染している．この集団に対して検査方法 X を用いて，ウイルスに感染しているどうかを判定する．検査方法 X では感度（感染者が正しく陽性と判定される率）が $\dfrac{7}{10}$ であり，偽陽性の確率（非感染者が間違って陽性と判定される率）が $p\ (0 < p < 1)$ である．この検査を受けて陽性と判定されたとき，その人が感染者である確率を $f(p)$ とする．

(1) 感染者であるかどうかを示す事象を $A = \{\text{infected, uninfected}\}$，検査の判定結果を示す事象を $B = \{\text{pos, neg}\}$ とするとき，以下の確率を求めよ．

1. $P(\text{infected})$
2. $P(\text{uninfected})$
3. $P(\text{pos} \mid \text{infected})$
4. $P(\text{pos} \mid \text{uninfected})$
5. $P(\text{pos})$
6. $P(\text{neg})$

(2) 前問 (1) で得られた確率とベイズの定理を用いて $f(p) = P(\text{infected} \mid \text{pos})$ を計算し，$f(p) \geq \dfrac{1}{2}$ となるような p の範囲を求めよ．

(東京都立大 2022)　　(m20225902)

0.313 $f(x) = \log \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ を x について微分せよ．

(東京都立大 2022)　　(m20225903)

0.314 (1) $(x,\ y)$ が $(0,0)$ に近づくとき，$f(x,\ y) = \dfrac{\sin(xy^2)}{xy}$ の極限を求めよ．

(2) $f(x,\ y) = xy^2 - x^2y - 2 = 0$ のとき，極値を求めよ．

(東京都立大 2022)　　(m20225904)

0.315 不定積分

$$I = \int \frac{1}{4\sin x + 3\cos x} dx$$

について 以下の問いに答えよ．

(1) $t = \tan \dfrac{x}{2}$ として置換し，上記の不定積分を $I = \displaystyle\int g(t)dt$ の形で表せ．

(2) 前問 (1) で得られた式を用いて不定積分 I を求めよ．なお，解は $\tan \dfrac{x}{2}$ を含む式でよい．

(東京都立大 2022)　　(m20225905)

0.316 $x^2 + (y-2)^2 = k^2$ を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ．ただし $0 < k < 2$ とする．

(東京都立大 2022)　　(m20225906)

0.317 (1) 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

(2) 前問 (1) で得られた解を用いて以下の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 3x$$

(東京都立大 2022) (m20225907)

0.318 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^{\tan x}$ を求めよ.

(滋賀県立大 2022) (m20226001)

0.319 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 2x\right\}$ とするとき，次の二重積分を求めよ.

$$\iint_D x^2 dxdy$$

(滋賀県立大 2022) (m20226002)

0.320 1 次変換 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ による直線 $y = 3x - 2$ の像の方程式を求めよ.

(滋賀県立大 2022) (m20226003)

0.321 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

(滋賀県立大 2022) (m20226004)

0.322 次の行列について，下の問いに答えよ．なお，計算過程も記入せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) $A^2 - 5A + 6E = O$ が成り立つことを示せ．ここで，E と O は，それぞれ，2 次の単位行列と 2 次の零行列である.

(2) A^6 を求めよ.

(3) A^n を求めよ．ただし，n は自然数である.

(宇都宮大 2022) (m20226101)

0.323 次のベクトルについて，下の問いに答えよ．なお，計算過程も記入せよ.

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ は 3 次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の基底になることを示せ.

(2) $\vec{x}_1$ を正規化したベクトル $\vec{y}_1$ を求めよ

(3) $\vec{y}_1$, $\vec{x}_2$ の一次結合で，$\vec{y}_2 \cdot \vec{y}_1 = 0$ となるベクトル $\vec{y}_2$ を求めよ．ただし，$\vec{y}_2 \cdot \vec{y}_1$ は $\vec{y}_2$ と $\vec{y}_1$ の内積を表し，$|\vec{y}_2| = 1$ とする.

(4) $\vec{y}_1$, $\vec{y}_2$, $\vec{x}_3$ の一次結合で，$\vec{y}_3 \cdot \vec{y}_1 = 0$ かつ $\vec{y}_3 \cdot \vec{y}_2 = 0$ となるベクトル $\vec{y}_3$ を求めよ．ただし，$|\vec{y}_3| = 1$ とする．

(宇都宮大 2022)　　(m20226102)

0.324 下の問いに答えよ．なお，計算過程も記入せよ．

(1) 半径 1 の円の内接正 12 角形の周長を求めよ．

(2) 半径 1 の円の外接正 12 角形の周長を求めよ．

(3) 上記の結果を用いて，円周率 π が 3.05 より大きく 3.25 より小さいことを証明せよ．

(宇都宮大 2022)　　(m20226103)

0.325 $\log x$ は自然対数を表すものとして，下の問いに答えよ．

問 1　C を積分定数とするとき，積分公式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C \quad (A \neq 0)$$

を証明せよ．

問 2　問 1 の公式を用いて関数 $y = y(x)$ に関する 1 階の微分方程式

$$y' = \sqrt{1 + y^2}$$

の一般解を求め，さらに $x = 0$ のとき $y = 0$ となるもの（特殊解）を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

問 3　問 2 の特殊解を積分して

$$f(x) = \int_0^x y dx$$

を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(宇都宮大 2022)　　(m20226104)

0.326 i は虚数単位とする．3 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i & 1+i \\ 1+i & 1-i & 1+i \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた各固有値に対し固有空間の基底を求めよ．

(3) 行列 A が対角化可能かどうか調べよ．さらに，対角化可能ならば $P^{-1}AP$ が対角行列になるような行列 P と P^{-1} を求めよ．

(はこだて未来大 2022)　　(m20226301)

0.327 (1) $\displaystyle\lim_{x \to \pi} \frac{(x-\pi)^2}{1 - \sin\frac{x}{2}}$ を求めよ．

(2) $x^2 e^x$ の n 次導関数を n を用いて表わせ．ただし，n は自然数とする．

(はこだて未来大 2022)　　(m20226302)

0.328 $\displaystyle\int_0^1 x \tanh(1 - x^2) dx$ を求めよ．

(はこだて未来大 2022)　　(m20226303)

0.329 $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & 0 \\ a & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ となる a を全て求めよ.

(東京海洋大 2022)　　　(m20226401)

0.330 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，$B = P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P と対角行列 B を求めよ.

(東京海洋大 2022)　　　(m20226402)

0.331 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2+3x+3}{x^3+x^2+2x+2}dx$ を計算せよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \cos\left(3\sqrt{x}\,\right)dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2022)　　　(m20226403)

0.332 $f(x,y) = 2x^4+8x^3+2x^2y+18x^2+8xy+y^2+16x+4y$ の極値を求めよ.

(東京海洋大 2022)　　　(m20226404)

0.333 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}dxdy, \qquad D = \left\{(x,y) \;\middle|\; \sqrt{y} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_E \log(x^2+y^2+9)dxdy, \qquad E = \left\{(x,y) \;\middle|\; 2 \leqq x^2+y^2 \leqq 5,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}$

(東京海洋大 2022)　　　(m20226405)

0.334 次の関数を x で微分しなさい.

1) $y = (x^2+x+3)(x^2-x+2)$　　2) $y = \left(1+x^2\right)^3$

3) $y = \dfrac{1}{(x+2)^2(x+5)^2(x+7)}$　　4) $y = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

(東京海洋大 2022)　　　(m20226406)

0.335 次の不定積分，または定積分を求めなさい.

1) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}dx$　　2) $\displaystyle\int 2\sin x\cos x dx$

3) $\displaystyle\int_1^4 \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx$　　4) $\displaystyle\int_1^2 x^2\log x\, dx$

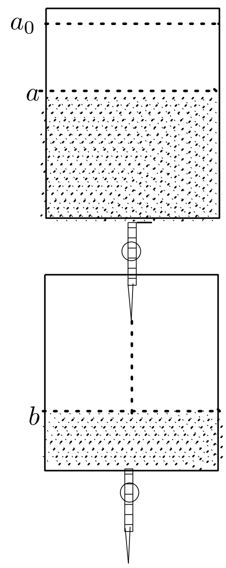
(東京海洋大 2022)　　　(m20226407)

0.336 直線 $y = e$ と $y = x+1$ および曲線 $y = e^{-x}$ で囲まれた部分の面積を求めなさい.

(東京海洋大 2022)　　　(m20226408)

0.337 同じ大きさと形をした円筒形の容器が上下に連結されている．上の容器には水位 a_0 まで水が入っており，下の容器は空である．いま，両方の容器の底の排水管を開いたところ，下図のように，上の容器の水は下の容器に流れ込み, 下の容器からは溜まった水が外に流れ出た.

水位はそれぞれ容器の底部からの高さであり，



上の容器の水位を a，下の容器の水位を b とする．

水位 a の変化速度は，$da/dt = -ka$ であった．

ただし，t は排水管を全開にしてからの経過時間，k は定数である．

次の各問に答えなさい．導出過程も解答用紙に書きなさい．

(1) 上の容器の水位 a の時間変化を a_0, k, t を用いて表しなさい．

(2) 下の容器の水位 b の変化速度は次式となった．

$$db/dt = ka - kb$$

ここで，t の関数 $f(t)$ を用いて $b = f(t)e^{-kt}$ とすると，
上式を解いて，$f(t)$ を求めることができる．
その結果を用いて，b の時間変化を a_0, k, t によって表しなさい．
さらに，b の最大値と，その時の t を求めなさい．

(東京海洋大 2022)　　(m20226409)

0.338 次の連立 1 次方程式が解をもつように a, b を定めて，これを解け．

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z + w = 1 \\ 2x - 8y - 6z + 4w = a \\ -x - 6y - 7z + 4w = b \end{cases}$$

(東京海洋大 2022)　　(m20226410)

0.339 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ の固有値を α, β とし，α と β に対する固有ベクトルをそれぞれ

$\boldsymbol{x} = k\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$ $(k \neq 0)$,　$\boldsymbol{y} = h\begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}$ $(h \neq 0)$ とするとき，次の問 1〜問 4 に答えよ．

ただし，$\alpha > \beta$ とする．

問 1 α, β を求めよ．

問 2 a, b を求めよ．

問 3 $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P をひとつ求めよ．

問 4 次式が成り立つように a_n を求めよ．

$$A^n = \begin{bmatrix} 2a_n - 1 & -a_n + 1 \\ 2a_n - 2 & -a_n + 2 \end{bmatrix}$$

(和歌山大 2022)　　(m20226501)

0.340 関数 $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ のマクローリン展開を $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とするとき，係数 a_n を求めよ．

(和歌山大 2022)　　(m20226502)

0.341 関数 $z = x + y^2$ のグラフ上の点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ における接平面の方程式を求めよ．

(和歌山大 2022)　　(m20226503)

0.342 平面の領域 D を $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$ で囲まれた部分とする．次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D (x + y)\,dxdy$$

(和歌山大 2022)　　(m20226504)

0.343 次の広義積分が収束するような実数 s の値の範囲を求めよ.

$$\iint_{x^2+y^2 \geqq 1} (x^2+y^2)^s \, dxdy$$

(和歌山大 2022) (m20226505)