0.1 以下の式を考える．

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AX} + \mathbf{BU}$$

ここで，$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$，$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$，

$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$，$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ とする．

(1) 行列 $\mathbf{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) 行列 $\mathbf{A}$ の逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ を求めよ．

(3) 上式を満たす $\mathbf{X}$ を求めよ．

(山梨大 2023)　　(m20231801)

0.2 目が「-1」,「0」,「1」,「2」にふられた 4 面体のサイコロを考える．

ただし，「-1」,「0」,「1」の出目は同じ確率で出現するが，「2」の出目は他の 2 倍の確率で出現するものとする．

(1) このサイコロを 1 回振ったときの出目の期待値と分散を求めよ．

(2) このサイコロを n 回振ったときの出目の合計値の期待値と分散を求めよ．

(3) このサイコロを 2 回振ったときの出目を掛け合わせた積の値の確率分布をグラフに示せ．ただし，範囲は -4 から 5 の間とする．

(山梨大 2023)　　(m20231802)

0.3 任意の点 $P(x, y)$ が以下の関数により点 $Q(u, v)$ に写像されるとき，以下の問いに答えよ．ただし，x, y は任意の実数とする．

$$u = \frac{2}{\pi}x$$
$$v = y \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

(1) 点 P および点 Q を任意の実数からなる点の集合の要素として考えるとき，この写像は単射でも全射でもないことを，例を挙げて示せ．

(2) 点 P が $(0,1) \to \left(\dfrac{3\pi}{2}, 1\right) \to \left(\dfrac{3\pi}{2}, 3\right) \to (0,3) \to (0,1)$ と移動したとき，点 Q の移動軌跡をグラフに示せ．

(3) 点 Q の移動軌跡で囲まれる領域の面積は，点 P の移動軌跡で囲まれる領域の面積の何倍になるか求めよ．

(山梨大 2023)　　(m20231803)

0.4 関数 $f(x)$ は開区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ において，

$$f(x) = \log\cos x$$

で定義されているとする．このとき，次に問いに答えよ．ただし，対数は自然対数である．

(1) $f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の 2 次までのマクローリン展開を求めよ．また，剰余項 $R_3(x)$ を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \cos^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ を求めよ．

(信州大 2023)　　(m20231901)

0.5 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ dx$ を求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\ dx$ を求めよ．ただし，n は正の偶数とする.

(信州大 2023)　　(m20231902)

0.6 2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2\ dxdy$ を求めよ．ただし，$D = \left\{(x, y)\ \middle|\ x^2 + y^2 \leqq 2x\right\}$ とする.

(信州大 2023)　　(m20231903)

0.7 3 つの行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,　$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,　$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ のうち，正則な行列の行列式の値と逆行列を求めよ.

(信州大 2023)　　(m20231904)

0.8 a, b は実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 2ab-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2ab-3 & a \\ 0 & -b & 3ab-2 \end{pmatrix}$ が対角化可能なとき，a と b が満たす条件を求めよ.

(信州大 2023)　　(m20231905)

0.9 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ $(\lambda_1 < \lambda_2)$ を求めよ.

(2) 任意の自然数 n に対して，$A^{n+1} = 3A^n - 2A^{n-1}$ が成り立つことを示せ．ただし，$A^0 = E$ とする.

(3) 実数列 $\{a_n\},\ \{b_n\},\ \{c_n\},\ \{d_n\}$ を

$$A^{n+1} - \lambda_1 A^n = a_n A + b_n E, \qquad A^{n+1} - \lambda_2 A^n = c_n A + d_n E \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める．ただし，$\lambda_1,\ \lambda_2$ を (1) で求めた A の固有値とする．このとき，$\{a_n\},\ \{b_n\},\ \{c_n\},\ \{d_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ.

(4) A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする.

(豊橋技科大 2023)　　(m20232701)

0.10 関数 $f(x, y) = (2y^2 + 3y - 2)\sin\big((2x + y)\pi\big)$ について答えよ.

(1) 偏導関数 $f_x,\ f_y$ をそれぞれ求めよ.

(2) $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ において，$f_x(x,\ y) = f_y(x,\ y) = 0$ をみたす点 $(x,\ y)$ をすべて求めよ.

(豊橋技科大 2023)　　(m20232702)

0.11 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D y\sin(x + y)dxdy, \quad D = \left\{(x,\ y)\ \middle|\ x + y \leqq \pi,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xydxdy, \quad D = \left\{(x,\ y)\ \middle|\ \left|x - \frac{1}{\sqrt{3}}y\right| \leqq 1,\ \left|x + \frac{1}{\sqrt{3}}y\right| \leqq 2\right\}$

(豊橋技科大 2023)　　(m20232703)

0.12 赤玉 3 個，青玉 3 個，白玉 4 個が入った袋がある．次の問いに答えよ．ただし，答えが分数になる場合は，既約分数で答えよ．

(1) 袋から 1 個ずつ順に 3 個の玉を取り出す．ただし，取り出した玉はもとに戻さない，このとき，取り出した 3 個の玉が赤，青，白の順で取り出される確率を求めよ．

(2) 袋から同時に 3 個の玉を取り出すとき，取り出された 3 個の玉がすべて同じ色である確率を求めよ．

(3) 赤玉を 1 点，青球を 2 点，白玉を 3 点として，袋から同時に 2 個の玉を取り出すとき，取り出された 2 個の玉の点数の合計が偶数である確率を求めよ．

(豊橋技科大 2023)　　(m20232704)

0.13 (1) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = e^x y^2$ を解け．

(2) (1) で得られた解の中で $x = 0$ のとき $y = 1$ をみたす関数の $-1 \leqq x \leqq 0$ における最小値を求めよ．

(豊橋技科大 2023)　　(m20232705)

0.14 関数 $\log x$ の $x = 1$ を中心とするテイラー展開（無限和による表示）を求めよ．収束に関しては調べなくてよい．

(名古屋工業大 2023)　　(m20232901)

0.15 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}\, dx$ を求めよ．

(名古屋工業大 2023)　　(m20232902)

0.16 領域 $D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$ とする．

$\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2} dxdy$ の値を求めよ．

(名古屋工業大 2023)　　(m20232903)

0.17 領域 $D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$ とする．

関数 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - x$ の D における最大値と最小値を求めよ，

(名古屋工業大 2023)　　(m20232904)

0.18 座標空間において 3 つの平面

$$x + 3z = a, \qquad x + (a+1)y - z = -1, \qquad x + 6y - 9z = a - 6$$

の共通部分が直線 l であるとき，定数 a の値および直線 l の方程式を求めよ．

(名古屋工業大 2023)　　(m20232905)

0.19 行列

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) P の逆行列を求めよ．

(2) P の列ベクトルを左から順に $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_3$ とおいたとき，

$$A\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_1, \qquad A\boldsymbol{p}_2 = 2\boldsymbol{p}_2, \qquad A\boldsymbol{p}_3 = 2\boldsymbol{p}_3$$

をみたす 3 次正方行列 A およびその固有値を求めよ．

(名古屋工業大 2023)　　　(m20232906)

0.20 行列 A とベクトル $\boldsymbol{u}$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

で定める．次の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{u}$ は A の固有ベクトルであることを示せ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正方行列 P を 1 つ求めよ．

(3) 上記の P に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} P^{-1}A^nP$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．

(神戸大 2023)　　　(m20233801)

0.21 (1) 微分方程式 $y'' + \sqrt{5}y' - y + 2 = 0$ の解 $y(x)$ を求めよ．

(2) 上記の解のうち，$x > 0$ で $y(x) > 0$ となるものをすべて求めよ．

(神戸大 2023)　　　(m20233802)

0.22 x, y の 2 変数関数 $f(x, y)$ に対し，

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

と定める．$f(x, y)$ が次の関数のときに $\triangle f$ を求めよ．ただし，以下において，i は虚数単位である．

(1) $f(x, y)$ は $(x^2 - iy^2)(1 + i) + e^{x+iy}$ の実部．

(2) $f(x, y)$ は $\dfrac{1}{x + iy}$ の虚部．

(3) $f(x, y) = 7x^6y - 35x^4y^3 + 21x^2y^5 - y^7$

(4) $f(x, y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{20} (-1)^k \begin{pmatrix} 40 \\ 2k \end{pmatrix} x^{40-2k}y^{2k}$

(神戸大 2023)　　　(m20233803)

0.23 (1) $D = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 2,\ \ y \geq x,\ \ y \geq 0\right\}$ とする．積分 $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2} dxdy$ を求めよ．

(2) $D = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; xy \geq 0\right\}$ とする．積分 $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2} \cos(ax^2 + ay^2) dxdy$ を求めよ．ただし，a は実数である．

(3) D は $\boldsymbol{R}^2$ 内の有界閉領域で直線 $y = x$ について線対称であるとする．積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^2 - y^2}{1 + x^4 + y^4} dxdy$ を求めよ．

(神戸大 2023)　　　(m20233804)

0.24 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

(広島大 2023)　　　(m20234101)

0.25 放物線 $y = (x + 2)^2$ の区間 $-3 \leq x \leq -2$ における曲線の長さ s を求めよ．

(広島大 2023)　　　(m20234102)

0.26 円柱面 $x^2+y^2=bx$ と球面 $x^2+y^2+z^2=b^2$ の両者によって囲まれる部分の体積 V を求めよ.

(広島大 2023)　　(m20234103)

0.27 行列 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A の固有ベクトルを求めよ.

(3) A を対角化する行列 P を求め，対角化を利用して A^3 を計算せよ.

(広島大 2023)　　(m20234104)