作成責任者：軽井沢数学 IC 数学教育研究所 所長 碓氷長 (94 歳)

0.1　$z = y\sin(2x+3y)$ について

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

を求めなさい.

(北海道大 2024)　　(m20240101)

0.2　D を xy 平面の第一象限で $y=x^2$ と $y=x$ に囲まれた領域とし，次に示す重積分を求めなさい.

$$I = \iint_D (2x-y)\,dxdy$$

(北海道大 2024)　　(m20240102)

0.3　以下の設問に答えなさい.

設問 1 ．次に示す微分方程式の一般解を求めなさい.

$$x^2y' + y^2 = 0$$

設問 2 ．次に示す微分方程式の一般解を求めなさい.

$$xy'' = 2y' + x^3$$

(北海道大 2024)　　(m20240103)

0.4　球 $x^2+y^2+z^2-6x+8y+4z-20=0$ について以下の設問に答えなさい.

設問 1 ．この球が xy 平面と交わってできる円の中心の座標と半径を求めなさい.

設問 2 ．この球の内部と x 軸との共通部分である線分の長さを求めなさい.

設問 3 ．この球面上の点 $\mathrm{A}(1,2,1)$ におけるこの球の接平面の方程式を求めなさい.

(北海道大 2024)　　(m20240104)

0.5　xy 平面において，原点 O，点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，点 $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ を考える.

点 B は実行列 $R = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ で表される線形変換による点 A の像とする.

このとき，以下の設問に答えなさい．ただし，$\mathrm{A} \neq \mathrm{O}$, $r>0$, $0 \leqq \theta < \pi$ とする.

設問 1 点 B の座標を $a_1,\ a_2,\ r,\ \theta$ を用いて表しなさい.

設問 2 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $a_1,\ a_2,\ r,\ \theta$ を用いて表しなさい.

設問 3 三角形 $\triangle\mathrm{AOB}$ の面積 S を $a_1,\ a_2,\ r,\ \theta$ を用いて表しなさい.

設問 4 三角形 $\triangle\mathrm{AOB}$ の面積 S と行列式 $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ との関係を表す式を求めなさい.

(北海道大 2024)　　(m20240105)

0.6　3 次方程式 $f(x) = x^3+x^2+ax+b=0$（$a,\ b$ は実数）は実数解 -3 をもつとする.

以下の設問に答えなさい.

設問 1 ．この方程式の解がすべて実数であるとき，係数 a と b のとり得る範囲を求めなさい.

設問 2 ．この方程式の解が虚数解の一つとして $1+i\sqrt{3}$ をもつとき，係数 a と b を求めなさい.

設問 3 ．上の設問 2 におけるすべての虚数解を極形式 $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ で表しなさい.

ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする.

(北海道大 2024)　　(m20240106)

0.7　空間に, $\mathrm{A}(4,0,0)$, $\mathrm{B}(0,2,0)$, $\mathrm{C}(1,1,-1)$, $\mathrm{P}(a,1,1)$, $\mathrm{Q}(-3,-2,1)$ がある．以下の問いに答えなさい．

(1)　3 点 A, B, C を通る平面 α の方程式を求めなさい．

(2)　点 P が平面 α 上にあるとき，a の値を求めなさい．

(3)　点 Q からの距離が最小となる平面 α 上の点 R の座標を求めなさい．

(4)　点 Q と点 R の中点を中心とし，平面 α に接する球面の方程式を求めなさい．

(岩手大 2024)　　(m20240301)

0.8　x, y, z を未知数とする連立一次方程式

$$\begin{cases} x - \quad y - \qquad\quad z = 1 \\ 3x - \ 2y + (a+1)z = 2 \\ 2x - \ ay + \qquad 3z = 1 \end{cases} \qquad (a \text{ は定数})$$

について，以下の問いに答えなさい．

(1)　係数行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & a+1 \\ 2 & -a & 3 \end{pmatrix}$ の階数 $\mathrm{rank}(A)$ が 2 となる a の値を全て求めなさい．

(2)　(1) で求めた a のうち，この連立一次方程式が解をもつ a の値を答えなさい．また，a がその値のときの連立一次方程式の解を，任意定数を t と置いて表しなさい．

(岩手大 2024)　　(m20240302)

0.9　微分方程式 $y'' - y = g(x)$ について，以下の問いに答えなさい．

(1)　$g(x) = 0$ のときの一般解を求めなさい．

(2)　$g(x) = x^2$ のときの特殊解を求めなさい．

(3)　$g(x) = x^2$ のときの一般解を求めなさい．

(岩手大 2024)　　(m20240303)

0.10　xy 平面上において，$\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = 1 - \cos\theta \end{cases} \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ で表される曲線 C について，以下の問いに答えなさい．

(1)　$0 < \theta < 2\pi$ のとき，$\dfrac{dx}{d\theta}$, $\dfrac{dy}{d\theta}$, $\dfrac{dy}{dx}$ を，それぞれ θ の関数として求めなさい．

(2)　$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ において，y が最大値，最小値をとるとき，それぞれの θ, x, y を求めなさい．

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{\theta \to +0} \frac{dy}{dx}$ が $+\infty$ になることを示しなさい．

(4)　xy 平面において，曲線 C のグラフの概形を描きなさい．

(5)　曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めなさい．

(岩手大 2024)　　(m20240304)

0.11　設問 (1), (2) の関数を x で微分しなさい．

(1)　$e^{-2x} \cos 2x$

(2)　$\log \dfrac{x-1}{x+1}$

(秋田大 2024)　　(m20240401)

0.12 方程式 $a^3+a^2b+ab^2+b^3=203$ を満たす整数 $a,\ b\ (0<a<b)$ について考える．$m=a+b,\ n=ab$ として，以下の設問 (1)〜(4) に答えなさい．

(1) 二次方程式 $x^2-mx+n=0$ が二つの異なる実数解を持つことを利用して，$m,\ n$ が満たす不等式を導出しなさい．

(2) m^2-2n と m の大小関係を示し，その理由を述べなさい．

(3) 方程式 $a^3+a^2b+ab^2+b^3=203$ の左辺を $m,\ n$ を用いて書き換え，右辺を素因数分解した方程式を示しなさい．

(4) 方程式 $a^3+a^2b+ab^2+b^3=203$ を満たす整数 $a,\ b\ (0<a<b)$ を求めなさい．

(秋田大 2024)　　(m20240402)

0.13 設問 (1)〜(3) の定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{1+x}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ dx$

(3) $\displaystyle\int_1^2 (4x+1)\log 2x\ dx$

(秋田大 2024)　　(m20240403)

0.14 行列 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ はある行列 P とその逆行列 P^{-1} を用いて $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のように対角化できるものとする．また，数列 $\{a_n\}$ を漸化式 $a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1},\ a_1=2,\ a_0=1\ (n=1,2,\cdots)$ を満たす数列とする．以下の設問 (1)〜(4) に答えなさい．

(1) 行列 P およびその逆行列 P^{-1} を求めなさい．

(2) n を自然数として，A^n を求めなさい.[;

(3) $\{a_n\}$ から作ったベクトルの列 $\left\{\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}\right\}$ と行列 A を用いて，$\{a_n\}$ の漸化式を表しなさい．

(4) 設問 (2) および (3) の結果を利用して，漸化式 $a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1},\ a_1=2,\ a_0=1\ (n=1,2,\cdots)$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を表す式を求めなさい．

(秋田大 2024)　　(m20240404)

0.15 行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} b & 1-b \\ 1-b & b \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ．ただし，$0<b<1$ は実数である．

問 1 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ を求めよ．ただし，$\lambda_1<\lambda_2$ とする．

問 2 問 1 で求めた各固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ に対応する固有ベクトルをそれぞれ求め，それらが直交することを示せ．

問 3 次の関係式を満たす直交行列 $\boldsymbol{P}$ を 1 つ求めよ．ただし，$\lambda_1,\ \lambda_2$ は問 1 で求めた固有値である．

$$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

問 4 $\boldsymbol{A}^n$ を求めよ．ただし，n は正の整数とする．

(東北大 2024)　　(m20240501)

0.16 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{2x}\,(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})$$

(東北大 2024)　　(m20240502)

0.17 次の微分方程式をそれぞれ解け．

(a) $y' + 2xy = 4xe^{-x^2}$

(b) $y'' - 2y' + y = 2e^x \log x$

(東北大 2024)　　(m20240503)

0.18 $(x^2+y^2+x)^2 = x^2+y^2$ で表される曲線について，以下の問に答えよ．

(a) この曲線を極座標で表せ．ただし，$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とする．

(b) $x,\ y$ のいずれかが最大または最小となる点の座標をすべて求め，この曲線を xy 平面上に図示せよ．

(c) この曲線が囲む領域の面積を求めよ．

(東北大 2024)　　(m20240504)

0.19 ベクトル $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k},$ を 3 辺にもつ平行六面体の体積を求めよ．ただし，xyz 空間の各軸方向の基本ベクトルを $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ とする．

(東北大 2024)　　(m20240505)

0.20 ベクトル場 $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ の円柱らせん $C : \boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j} + (bt)\boldsymbol{k}\quad (0 \leqq t \leqq \pi)$ に沿う線積分 $\displaystyle\int_c \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．ただし，xyz 空間の各軸方向の基本ベクトルを $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ とする．また，a と b は実数である．

(東北大 2024)　　(m20240506)

0.21 位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とし，その大きさを $r = |\boldsymbol{r}|$ とする．ただし，xyz 空間の各軸方向の基本ベクトルを $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ とする．

(a) $\nabla\cdot(r^2\boldsymbol{r})$ を求めよ．

(b) 閉曲面 S を境界に持つ領域 V について，次式が成り立つことを証明せよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の外向き単位法線ベクトルである．

$$\iint_S (r^2\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}dS = \iiint_V 5r^2 dV$$

(c) 閉曲面 S として原点を中心とする半径 a の球の表面を考える．(b) で証明した等式を用いて S 上の面積分 $\displaystyle\iint_S (r^2\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}dS$ を求めよ．

(東北大 2024)　　(m20240507)

0.22 実数 a に対して 4 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a & 2 \\ a & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1-a & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) A の行列式を求めよ．

(2) A を係数行列とする同次連立 1 次方程式

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が非自明解を持つような a の値を求めよ．

(東北大 2024)　　(m20240508)

0.23 実数 a に対して 3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2a & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値を複素数の範囲で求めよ．

(2) A が対角化可能となるような a の条件を求めよ ただし対角化は複素数を成分に持つ行列を含めた範囲で考えるものとする．

(東北大 2024)　　(m20240509)

0.24 n を正の整数とする．V と W を実ベクトル空間とし，$f : V \to W$ を線形写像とする．以下の問いに答えよ．

(1) f の単射性と $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ が同値であることを示せ．ただし $\mathrm{Ker}\, f$ は f の核を表す．

(2) n 個の V の元 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ に対して，$\{f(\boldsymbol{x}_1), \cdots, f(\boldsymbol{x}_n)\}$ が 1 次独立ならば，$\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ も 1 次独立であることを示せ．

(3) f が単射であるとき，n 個の V の元の組 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ が 1 次独立ならば，$\{f(\boldsymbol{x}_1), \cdots, f(\boldsymbol{x}_n)\}$ も 1 次独立であることを示せ．また f が単射でないとき，このことの真偽を理由と共に述べよ．

(東北大 2024)　　(m20240510)

0.25 正の実数 $a,\ b,\ c$ に対して，次の楕円面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

に内接し，各辺が x 軸，y 軸，z 軸のいずれかと平行になるような直方体のうち，体積が最大となるものを求めよ．またその体積が最大であることの理由も述べよ．

(東北大 2024)　　(m20240511)

0.26 以下の問いに答えよ．

(1) 実数からなる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 α に収束するとき

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$$

を示せ．

(2) 正の実数からなる数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ と正の実数 γ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \gamma$$

が成り立つとき

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{C_n} = \gamma$$

を示せ.

(東北大 2024)　　(m20240512)

0.27 (1) 3 次元の実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトルを考える. a を実数として,

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

(i) $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ が $\mathbb{R}^3$ の基底にならないような a の値をすべて求めよ.

(ii) a を (i) で求めた値以外の実数とする. 基底 $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ に関する成分表示が $\overrightarrow{v}$ 自身になるような $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ.

(2) V を実ベクトル空間とし, $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_k} \in V$ とする. また,

$$\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_k} \rangle = \{c_1\overrightarrow{v_1} + c_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + c_k\overrightarrow{v_k} \ : \ c_1, c_2, \cdots c_k \in \mathbb{R}\}$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

(i) $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_k} \rangle$ が V の部分空間であることを示せ.

(ii) $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_k}$ が一次独立であるとする. 任意の $\overrightarrow{v} \in V$ について,
$\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_k}, \overrightarrow{v}$ が一次従属であることと, $\overrightarrow{v}$ が $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_k} \rangle$ に含まれることは同値であることを証明せよ.

(お茶の水女子大 2024)　　(m20240601)

0.28 (1) 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

が収束するかどうか答えよ.

(2) 関数 $(1+x)^{1/3}$ にテイラーの定理を用いて

$$\left| (1.001)^{1/3} - \frac{3001}{3000} \right| \leq \left(\frac{1}{10} \right)^6$$

であることを示せ.

(3) s を正の実数とする. 広義積分

$$\int_0^{\infty} \frac{x^s}{x^2+1} dx$$

が収束する s の範囲を求めよ.

(お茶の水女子大 2024)　　(m20240602)

0.29 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ を 3 次元位置ベクトル, $\boldsymbol{A}$ および $\boldsymbol{B}$ 定数ベクトルとする. このとき, $\bigtriangledown \times \ \{(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{B}\}$ を計算せよ. ここで $\bigtriangledown$ はベクトル微分演算子 $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z} \right)$ である.

(お茶の水女子大 2024)　　(m20240603)

0.30 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(お茶の水女子大 2024)　　(m20240604)

0.31 2 次元直交座標 (x, y) を極座標 (r, θ) を用いて，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と表す．微分

$$\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y}$$

を r, θ を用いて表せ．

(お茶の水女子大 2024)　　(m20240605)

0.32 a を正の定数，$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする．積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C\exp\left(-\frac{r}{a}\right) dxdydz$$

が 1 となるように定数 C を定めよ．

(お茶の水女子大 2024)　　(m20240606)

0.33 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = A\sin 2x$$

について次の問いに答えよ．A は定数である．

(a) $A = 0$ の時の一般解を求めよ．

(b) $A \neq 0$ の時の解を一つ求めよ．

(c) $A \neq 0$ の時の一般解を求めよ．

(お茶の水女子大 2024)　　(m20240607)

0.34 (1) 関数 $\log(1 + x)$ の第 n 次導関数を推測し，数学的帰納法でその推測が正しいことを示せ．ただし，log は自然対数である．

(2) 関数 $\log(1 + x)$ のマクローリン級数における x^n の係数を求めよ．

(お茶の水女子大 2024)　　(m20240608)

0.35 R を正の定数とする．3 次元空間において直交する二つの円柱

$$x^2 + y^2 \leq R^2$$

$$y^2 + z^2 \leq R^2$$

の共通部分の体積を求めよ．

(お茶の水女子大 2024)　　(m20240609)

0.36 正方行列 $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & 1 & t \\ t^2 & t & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，$t \in \mathbb{R}$ とする．

(1) 行列 $A(t)$ の行列式を求めよ．

(2) 行列 $A(t)$ が正則行列であるため条件を挙げ，$A(t)$ の逆行列を求めよ．

0.37 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0 \right\}$ と $N = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x = 2y \\ z = 4y \end{array} \right\}$ を考える．$\mathbb{R}^3$ が M と N の直和 $(\mathbb{R}^3 = M \oplus N)$ であることを示すために，以下の各問に答えよ．

(1) M と N はそれぞれベクトル空間であることを示せ．

(2) $M \cap N = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ を示せ．

(3) $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$ に対し，$\exists \overrightarrow{m} \in M$，$\exists \overrightarrow{n} \in N$，$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}$ を示せ．

(お茶の水女子大 2024)　　(m20240611)

0.38 以下の問に答えよ．

(a) $f(x) = \sin x$ をマクローリン展開し，Σ 記号を用いて記せ．

(b) $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ をマクローリン展開し，Σ 記号を用いて記せ．

(c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ を求めよ．

(お茶の水女子大 2024)　　(m20240612)

0.39 以下の行列 A について，問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

$A = \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{bmatrix}$

(a) 行列 A の固有値，および対応する固有ベクトルを求めよ．

(b) A を対角化する行列 U を示し，行列 A を対角化せよ．

(お茶の水女子大 2024)　　(m20240613)

0.40 学生全員が食堂で A 定食，B 定食，C 定食のどれかを食べ，売り上げ個数は以下の表の通りであった．ドリンクは 2 種類あり，コーヒーだけを飲んだ人 10%．ウーロン茶だけを飲んだ人 40%．両方飲んだ人 20% であった．定食ごとにドリンクを選ぶ割合に違いはなかった．食後にこの中から 1 人の学生を選ぶとき，以下の確率を求めよ．

A定食	B定食	C定食
100食	200食	150食

(1) A 定食を食べた学生が選ばれる確率

(2) コーヒーを飲んだ学生が選ばれる確率

(3) C 定食を食べてコーヒーを飲んだ学生が選ばれる確率

(4) 選ばれた学生が「C 定食は食べていない」と話すのを聞いたとき，その学生がコーヒーを飲んでいない確率

(お茶の水女子大 2024)　　(m20240614)

0.41 以下の問いに答えよ．なお，e は自然対数の底とする．

(1) 次の微分方程式の一般解 $y(x)$ を求めよ．

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 10\,\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$$

(2) 次の微分方程式の一般解 $y(x)$ を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\,\frac{dy}{dx} + 6y = e^{-x}$$

(3) 次の微分方程式の一般解 $y(x)$ を求めよ．

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{e^{2x}}{3x}$$

(4) 次の連立微分方程式の一般解 $y_1(x), y_2(x)$ を求めよ．

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 4y_1 - y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -6y_1 + 3y_2 + e^{2x} \end{cases}$$

(5) xy 平面内に曲線 A がある．曲線 A 上の任意の点 $P(x, y)$ のおける法線はつねに点 $Q\left(\dfrac{y}{x} + x + 2\ ,\ y - 1 \right)$ を通る．なお，$x > 0$ とする．このときの曲線 A を求めよ．

(東京大 2024)　　(m20240701)

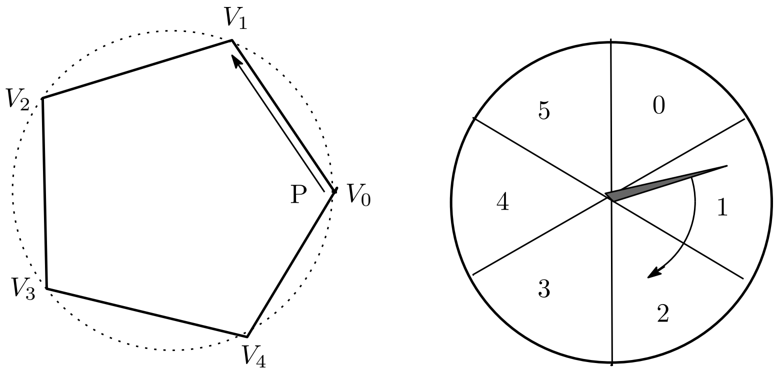
0.42 正 N 角形（N は 3 以上の整数）がある．この図形の頂点を反時計回りに $V_0,\ V_1,\ \cdots,\ V_{N-1}$ とする．点 P は，0, 1, $\cdots$, $K-1$ の出目を持つルーレット（K は 2 以上の整数）を回して出た目 k に基づいて，V_0 から反時計回りに頂点を移動する．出目の確率は全て等しく，ルーレットを回す各試行は独立である．ルーレットを 2 回まわして移動する際，2 回目の試行による移動開始位置は，1 回目の試行により止まった頂点とする．

(1) 図のように $N = 5,\ K = 6$ とする．点 P は出た目 k に基づいて k ステップ移動する．例えば $k = 2$ なら V_0 から V_2 に移動する．

(a) ルーレットを 1 回まわした後に点 P が V_0 に止まる確率を求めよ．

(b) ルーレットを 2 回まわした後に点 P が $V_0,\ V_1,\ V_2,\ V_3,\ V_4$ に止まる確率をそれぞれ求めよ．

正 5 角形　　$K = 6$ のルーレット



図

(2) $N = 3,\ K = 99$ とする．点 P は出た目 k に基づいて k^2 ステップ移動する．例えば、$k = 2$ なら V_0 から V_1 に移動する．

(a) ルーレットを 1 回まわした後に点 P が $V_0,\ V_1,\ V_2$ に止まる確率をそれぞれ求めよ．

(b) ルーレットを 2 回まわしたとき，1 回目に止まった頂点を V_n，2 回目に止まった頂点を V_m とする．$n + m$ の期待値を求めよ．

(3) $N = K$ とする．点 P は出た目 k に基づいて k ステップ移動する．0, 1, $\cdots$, $N-1$ のいずれかをとる離散確率変数 n を考える。n の確率分布に対して ϕ_p（p は 0, 1, $\cdots$, $N-1$ の整数）を以下の式で定義する．$\Pr(n = j)$ は $n = j$ の確率，$E[\cdot]$ は期待値，i は虚数単位，π は円周率，e は自然対数の底である．

$$\phi_p = E\left[\ e^{i\frac{2\pi p}{N}n}\ \right] = \sum_{j=0}^{N-1} \Pr(n = j) e^{i\frac{2\pi p}{N}j}$$

(a) ルーレットを 1 回まわして止まる頂点を V_n とする．n の確率分布の ϕ_p を求めよ．

(b) ルーレットを 2 回まわしたとき，2 回目に止まった頂点を V_m とする，離散確率変数 m に関して $\Pr(m=0)=\Pr(m=1)=\cdots=\Pr(m=N-1)$ であることを証明せよ．ただし，2 つの確率分布の間で全ての p について ϕ_p が一致するとき，これらの確率分布は一致することを利用せよ．

(東京大 2024)　　(m20240702)

0.43 i を虚数単位とし，z, w は複素数 x, y は実数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $z^4=-2+2\sqrt{3}i$ を満たす z を全て求め，$z=x+iy$ の形で表せ．ただし，解答に指数関数や三角関数を含んではならない．

(2) $\cos z=10$ を満たす z を全て求め，$z=x+iy$ の形で表せ．ただし，解答に指数関数や三角関数を含んではならない．

(3) $z=x+iy$, $u=x^2-y^2-x$ とする．u を実数部分として持つ正則関数 $w(z)$ とその微分 $\dfrac{dw}{dz}$ を z の関数として求めよ．ただし，解答は x, y を用いてはならない．

(4) 変数 z から変数 w への写像を

$$w(z)=\frac{1-z}{1+z}$$

とする．z 平面上の領域 $|z-1|\leq 1$ の写像 $w(z)$ による像を図示せよ．

(5) 次の複素関数積分 I を考える．

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{1}{4z^5-4iz^4+3z^3}dz$$

ただし，積分路は複素平面上の単位円周上を反時計回りに一周するものとする．

(a) 被積分関数の全ての極と対応する留数を求めよ．

(b) 積分 I を求めよ．

(東京大 2024)　　(m20240703)

0.44 任意の正方行列 X に対し，$\exp(X)$ を

$$\exp(X)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}X^k=I+\frac{1}{1!}X+\frac{1}{2!}X^2+\frac{1}{3!}X^3+\cdots$$

と定義する．ただし，I は単位行列である．また，X^T は X の転置行列を表すものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A が

$$A=\begin{bmatrix}3 & \sqrt{3} & 0\\ \sqrt{3} & 5 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$$

と与えられているとする．

(a) A の固有値を全て求めよ．

(b) $\exp(A)$ はある行列 B を用いて

$$\exp(A)=B\begin{bmatrix}a_1 & 0 & 0\\ 0 & a_2 & 0\\ 0 & 0 & a_3\end{bmatrix}B^T$$

と表せる．ただし，$a_1<a_2<a_3$ とする．a_1, a_2, a_3 および B を求めよ．

(2) 行列 $C,\ D$ が

$$C=\begin{bmatrix} -8s & 0 & 0 \\ 0 & 9s & 0 \\ 0 & 0 & -6s \end{bmatrix}, \qquad D=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

と与えられているとする．ただし，s は実数とする．また，次式で表される xyz 空間上の領域を $P(s)$ とする．

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} D\ \exp(C)\ D^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \leq 1$$

(a) $P(0), P(1)$ の体積をそれぞれ求めよ．

(b) $P(s)$ の xz 平面による断面を $Q(s)$ とする．s が 0 から 1 に変化するとき，$Q(s)$ の境界線が通る領域を xz 平面上に図示せよ．

(東京大 2024)　　(m20240704)

0.45 $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$A=\left\{(x,y,z)\ \middle|\ \left(\frac{x}{a}\right)^{1/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{1/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{1/3} \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0\right\}$$

の体積を求めよ．ただし a, b, c は正の定数である．

(東京工業大 2024)　　(m20240801)

0.46 C^2 級数の 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して

$$Df=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

と定める．$t=1$ を含む開区間上で定義された C^2 級の 1 変数関数 $F(t)$ で，次のすべてを満たすものを求めよ．

- $Df=0$，ただし $f(x,y)=F(x^2-xy+y^2)$.
- $F(1)=0$.
- $F'(1)=1$.

(東京工業大 2024)　　(m20240802)

0.47 実数を成分とする行列

$$A=\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -a & p \\ a & b & q \\ \frac{1}{5} & a & r \end{pmatrix}$$

は行列式が 1 の直交行列である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $a,\ b,\ p,\ q,\ r$ を求めよ．ただし $a>0$ である．

(2) $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ を満たす単位ベクトル $\boldsymbol{x}$ をひとつ求めよ．

(3) (2) の $\boldsymbol{x}$ に対して $\{\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}\}$ が $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底をなすような列ベクトルて $\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}$ をひと組求めよ．

(4) (2)，(3) の $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}$ を並べて得られる 3 次正方行列 $P=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})$ に対して ${}^tPAP$ を求めよ．ただし ${}^tP$ は行列 P の転置行列を表す．

(東京工業大 2024)　　(m20240803)

0.48 複素数を成分とする n 次正方行列 A の余因子行列を $\widetilde{A}$ とおく．すなわち $\widetilde{A}$ の $(i,\ j)$-成分は A の $(j,\ i)$-余因子である．次の (1)〜(4) のそれぞれについて，正しければ証明を与え，そうでなければ反例を挙げよ．

(1) $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \widetilde{A}$

(2) $\det \widetilde{A} = (\det A)^{n-1}$

(3) $\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \text{ となる} \\ \text{複素数 } \lambda \text{ が存在する} \end{array} \right\} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \widetilde{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \text{ となる} \\ \text{複素数 } \lambda \text{ が存在する} \end{array} \right\}$

(4) $\det A \neq 0$ のとき (3) が成り立つ．

(東京工業大 2024)　　(m20240804)

0.49 2 変数関数 $f(x,y) = 8x^3 + 12xy - y^3$ について，次の問いに答えなさい．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めなさい．

(2) $z = f(x,y)$ の極値を求めなさい．

(東京農工大 2024)　　(m20240901)

0.50 重積分

$$\iint_D \left\{ \left(\sqrt{3}x - y\right)^2 + \left(x + \sqrt{3}y\right)^2 \right\} dxdy, \quad D = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \left|\sqrt{3}x - y\right| \leqq 2,\ \left|x + \sqrt{3}y\right| \leqq 2 \right\}$$

の値を求めなさい．

(東京農工大 2024)　　(m20240902)

0.51 t は実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 1-t & 2 & -t \\ 0 & 4 & t \\ 0 & t & 4 \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ について，A が固有値 4 をもち，行列 A の固有値 4 に属する固有ベクトルが $\boldsymbol{v}$ であるとする．次の問いに答えなさい．

(1) t の値を求めなさい．

(2) 行列 A の固有値のうち，最大のものを p とする．行列 A の固有値 p に属する固有ベクトルで $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ の形のものを求めなさい．

(東京農工大 2024)　　(m20240903)

0.52 次の微分方程式の解 $y = y(x)$ で，$y(0) = 0,\ \dfrac{dy}{dx}(0) = 0$ を満たすものを求めなさい．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 5y = 1 - e^{-2x}$$

(東京農工大 2024)　　(m20240904)

0.53 行列 A と B を以下のように定める．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) B が正則行列か否かを判定し，正則行列ならば B の逆行列 B^{-1} を求めよ．

(2) A と B の積 AB を求め，$AB = BC$ となる 3 次正方行列 C を求めよ．

(3) 正の整数 n に対し，A の n 乗 A^n を求めよ．

(電気通信大 2024)　　(m20241001)

0.54 p, q を実数とし，行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & p & 1 \end{bmatrix}$，　$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ q \\ -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$ とする．

実数 x, y, z, w に関する連立 1 次方程式

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \qquad \cdots (*)$$

を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 連立 1 次方程式 $(*)$ がただ 1 つの解を持つとき，y を p, q を用いて表せ．

(2) 連立 1 次方程式 $(*)$ が無限個の解を持つための p, q の条件を求めよ．

(3) p, q は (2) の条件を満たすとする．線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を $f(v) = Av \ (v \in \mathbb{R}^4)$ で定義する．このとき，f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元と基底を求めよ．さらに f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求めよ．

(電気通信大 2024)　　(m20241002)

0.55 2 変数関数 $f(x, y) = x^4 - 4xy + y^2 - 1$ および xy 平面上において $f(x, y) = 0$ が定める曲線 C を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ の極値をすべて求めよ．

(2) 曲線 C 上の点 $(2, 3)$ における接線の方程式を求めよ．

(3) $f(x, y) = 0$ が点 $(2, 3)$ の近くで定める陰関数 $y = \varphi(x)$ について，$\varphi''(2)$ を求めよ．

(電気通信大 2024)　　(m20241003)

0.56 次の重積分の値を求めよ．

(1) $I_1 = \displaystyle\iint_{D_1} x^2 dxdy$，　　$D_1 = \{(x, y) \ : \ x^2 + 2y^2 \leqq 1\}$

(2) $I_2 = \displaystyle\iint_{D_2} ye^{y - x^2} dxdy$，　　$D_2 = \{(x, y) \ : \ x^2 \leqq y \leqq \sqrt{2}x\}$

(電気通信大 2024)　　(m20241004)

0.57 複素関数 $f(z) = \dfrac{z^4}{z^6 + 1}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位を表す．

(1) 点 $z = e^{\frac{\pi i}{6}}$ における $f(z)$ の留数を求めよ．

(2) $R > 1$ として，複素平面における円 $|z| = R$ 上の点 R から正の向きに点 $Re^{\frac{\pi i}{3}}$ に至る円弧を C_1 とし，点 $Re^{\frac{\pi i}{3}}$ から原点 O に至る線分を C_2 とする．このとき，次の不等式と等式が成り立つことをそれぞれ示せ．ただし，$\omega = e^{\frac{\pi i}{6}}$ とする．

$$\left| \int_{C_1} f(z)dz \right| \leqq \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^5}{R^6 - 1}, \qquad \int_{C_2} f(z)dz = \omega^4 \int_0^R f(x)\, dx$$

(3) 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ の値を求めよ.

(電気通信大 2024)　　(m20241005)

0.58 次の広義積分の値を求めよ.

$$J = \int_0^\infty \frac{dx}{e^x + 5e^{-x} + 2}$$

(電気通信大 2024)　　(m20241006)

0.59 以下で与えられる行列 $\boldsymbol{A}$ について，各問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と，その固有ベクトルを求めよ.

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ.

(3) n が 1 以上の整数のとき，$\boldsymbol{A}^n$ を求めよ,

(横浜国立大 2024)　　(m20241101)

0.60 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin^2 y}{\tan x}$

(2) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = e^{2x}$

(横浜国立大 2024)　　(m20241102)

0.61 $ax^2 - bxy^3 + y^6 = 1$ で与えられる xy 平面上の曲線 C が点 $(1,\ 1)$ を通るとする (a, b は定数). このとき，以下の問いに答えよ.

(1) a, b が満たすべき条件を求めよ.

(2) a が $3 \leq a \leq 4$ の範囲を動くとき，点 $(1,\ 1)$ において曲線 C の接線の傾き $\dfrac{dy}{dx}$ がとりうる値の範囲を求めよ.

(筑波大 2024)　　(m20241301)

0.62 (1) 2 変数関数 $f(x,\ y) = e^{x+y}$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ.

(2) 2 変数関数 $f(x,\ y) = e^{x+y}\sin x$ のマクローリン展開を 3 次の項まで求めよ.

(筑波大 2024)　　(m20241302)

0.63 半径 2 の球があり，球の中心から距離 r の位置の密度 (単位体積あたりの質量) は $9 - 4r$ で与えられる $(0 \leq r \leq 2)$. この球を水平な机の上にに置き，机面から高さ 3 の水平な面で切断して上部を切り出した. 切り出した部分の質量を M とする. このとき，以下の問いに答えよ.

(1) M は球の中心を原点とする 3 次元極座標で

$$M = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{[\ a\ ]} \sin\theta\, d\theta \int_{[\ b\ ]}^{2} [\ c\ ]dr$$

と表される. $[\ a\ ]$, $[\ b\ ]$, $[\ c\ ]$ に入る数または数式を求めよ.

(2) M の値を求めよ.

(筑波大 2024)　　(m20241303)

0.64 対称行列 $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -5 & 1 \\ 3 & -5 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ は 2 つの固有値 λ_1, λ_2 を持ち，$\lambda_1 < \lambda_2$ とすれば $\lambda_1 = -8$ である．この A について以下の問いに答えよ．

(1) $\lambda_1 = -8$ に対する方程式 $A\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}$ の一般解を，一次独立なベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ とパラメータ s, t を用いて $\boldsymbol{x} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ の形で表せ．

(2) (1) で求めた一般解を，正規直交系をなすベクトル $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ とパラメータ u, v を用いて $\boldsymbol{x} = u\boldsymbol{c} + v\boldsymbol{d}$ の形で表せ．

(3) $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0' + \boldsymbol{x}_0''$ の形に分解せよ． ただし $\boldsymbol{x}_0'$ は (2) で求めた $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ を用いて $\boldsymbol{x}_0' = u\boldsymbol{c} + v\boldsymbol{d}$ の形に表せるベクトル，$\boldsymbol{x}_0''$ は $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ に直交するベクトルである．

(4) (3) で求めた $\boldsymbol{x}_0''$ が A の固有ベクトルとなることを示せ．

(5) 自然数 n に対して $A^n \boldsymbol{x}_0$ を求めよ．

(筑波大 2024)　　(m20241304)

0.65 m 次正方行列 A について，次の行列 S_n を考える．

$$S_n = E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$$

ただし．E は単位行列を表し，$\det(E - A) \neq 0$ とする．このとき，以下の各問に答えよ．

(1) 行列 A は対角化可能であるとする． つまり，適当な正則行列 P により $P^{-1}AP = D$（対角行列）が成り立つ．$(E - A)S_n$ を E, P, D を用いて表せ．

(2) $\lim_{n \to \infty} A^n$ が零行列 O となるとき，行列の無限等比級数 $\lim_{n \to \infty} S_n$ は収束する（ある行列に限りなく近づく）．収束のための条件を行列 A の固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ を用いて示せ．また，そのときの $\lim_{n \to \infty} S_n$ を求めよ．

(3) 行列 A を用いて表される線形システム $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}$ を考える．ここで，m 次元ベクトル $\boldsymbol{d}$ はパラメータであり，m 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ は A, $\boldsymbol{d}$ の条件から定まる解である．任意の非負の要素を持つ $\boldsymbol{d} \geq \boldsymbol{0}$ に対して，非負の解 $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ を持つための行列 A の条件を 1 つ示せ．ただし，(2) の条件は満たされるものとする．

(筑波大 2024)　　(m20241305)

0.66 2 次以下の実係数多項式 $f(x)$ 全体の集合を $\mathbb{R}[x]_2$ とする．$\mathbb{R}[x]_2$ の基底を $\{x^2, x, 1\}$ とし，$\mathbb{R}[x]_2$ から $\mathbb{R}[x]_2$ 自身への線形写像 F を「 $f(x)$ を微分して x をかける」もの，つまり，$x\dfrac{df(x)}{dx}$ と定める．このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) 写像 F を基底を用いて表現せよ．

(2) 写像 F の表現行列 A を求めよ．

(3) 写像 F の像空間 $\mathrm{Im}\, F$ および核空間 $\mathrm{Ker}\, F$ の次元を求めよ．

(筑波大 2024)　　(m20241306)

0.67 $E=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1-x\right\}$ とする．2 次元実数空間 $\mathbb{R}^2$ で定義された連続関数 $f(x,y)$ の E 上でのリーマン和は，それぞれ正整数 m に対して，

$$R_m(f)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-1}f\left(\frac{i}{m},\ \frac{j}{m}\right)\frac{1}{m^2}$$

で与えられている．$f(x,y)=e^{x+y}$ であるとき，以下の各問に答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の E 上でのリーマン和である $R_m(f)$ を求めよ．ただし，$Z=e^{1/m}$ とおくこと．

(2) (1) で得られたリーマン和を用いて，関数 $f(x,y)$ の E 上での 2 重積分を求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)$ の E 上での累次積分を求めよ．

(筑波大 2024) (m20241307)

0.68 領域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ (x-2)^2+(y+2)^2\leq 18\right\}$ 上で与えられた関数

$$f(x,y)=xy(x-4)(y+4)$$

について，以下の各問に答えよ，

(1) D の内部において $f(x,y)$ が極値をとる点の候補をすべて探し，それらの点における $f(x,y)$ の値を求めよ．

(2) D の境界 $\left\{(x,y)\ \middle|\ (x-2)^2+(y+2)^2=18\right\}$ 上における $f(x,y)$ の条件付極値をとる点の候補を，ラグランジュの未定乗数法によりすべて探し，それらの点における $f(x,y)$ の値を求めよ．

(3) $f(x,y)$ の最大値・最小値を求めよ．

(筑波大 2024) (m20241308)

0.69 次のデータは，A 県と B 県のバス路線をそれぞれ 1 つ選び，始点から終点までの運行にかかった時間を記録したものである（単位 : 分）．

A 県のデータ : 75, 93, 95, 80, 75, 77, 83, 92, 80, 85

B 県のデータ : 82, 87, 82, 84, 82, 90, 79, 82

上記のデータはそれぞれ正規分布 $N(\mu_A,\ \sigma_A^2)$, $N(\mu_B,\ \sigma_B^2)$ に従うと仮定する．必要に応じて付表を参照しつつ，以下の各問に答えよ．

(1) 各県のデータを用いて標本分散 s_A^2, s_B^2 をそれぞれ求めよ．

(2) A 県の母分散 σ_A^2 の 95 % 信頼区間を求めよ．計算結果は小数第 2 位で四捨五入して答えること．

(3) 両県のデータを用いて，有意水準 5 % で等分散検定をせよ．

付表 1 : 自由度 m の χ^2 分布において，右側裾野の確率が α となる臨界値

付表 2 : 自由度 $(m,\ n)$ の F 分布において，右側裾野の確率が 0.05 となる臨界値

付表 3 : 自由度 $(m,\ n)$ の F 分布において，右側裾野の確率が 0.025 となる臨界値

がついている．

(筑波大 2024) (m20241309)

0.70 2 つのプロジェクト P_1, P_2 の投資収益率はそれぞれ確率変数 X_1, X_2 で表され，プロジェクト

P_i $(i=1,\ 2)$ の投資収益率の期待値は $E(X_i)=m_i$，分散は $V(X_i)=\sigma_i^2$ $(\sigma_i>0)$，2 つのプロジェクトの投資収益率の共分散は $Cov(X_1,\ X_2)=\sigma_{12}$ であるとする．2 つのプロジェクトへの投資金額割合が $a_1,\ a_2\geq 0$ $(a_1+a_2=1)$ のとき，その投資の組み合わせ（以下，ポートフォリオ）の収益率は $R=a_1X_1+a_2X_2$ である．以下の各問に答えよ．

(1) 共分散 $Cov(X_1,\ X_2)$ の定義式を示せ.

(2) ポートフォリオの収益率 R の期待値と分散を $a_i,\ m_i,\ \sigma_i\ (i=1,\ 2),\ \sigma_{12}$ を用いて表せ.

以降では，ポートフォリオのリスクを収益率 R の分散で表すことにする.

(3) 相関関係 $\dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_1\ \sigma_2}=-1$ のとき，ポートフォリオのリスクをゼロとするための a_1 と a_2 の比を求めよ.

(4) 相関関係 $\dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_1\ \sigma_2}=1$，かつ，$\sigma_1>\sigma_2$ のとき，ポートフォリオのリスクが，プロジェクト P_2 に単独で投資する場合よりも小さくできないことを示せ.

付表 1：自由度 m の χ^2 分布において，右側裾野の確率が α となる臨界値

付表 2：自由度 $(m,\ n)$ の F 分布において，右側裾野の確率が 0.05 となる臨界値

付表 3：自由度 $(m,\ n)$ の F 分布において，右側裾野の確率が 0.025 となる臨界値

がついている.

(筑波大 2024)　　(m20241310)

0.71

$$V=\{f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C},\ \text{複素線形写像}\ \}$$

とする．V の元 f,g の和 $f+g$，および複素数 α に関するスカラー倍 αf を

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad (x\in\mathbb{C}^n)$$

$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x) \qquad (x\in\mathbb{C}^n)$$

で定めることにより V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなす．$e_1,\ \cdots,\ e_n$ を $\mathbb{C}^n$ の基底とする.

$i=1,\ \cdots,\ n$ に対し，$\hat{e}_i\ :\ \mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ を

$$\hat{e}_i\left(\sum_{j=1}^{n}x_je_j\right)=x_i \qquad (x_1\ \cdots\ x_n\in\mathbb{C})$$

で定める.

A を対角化可能な n 次複素正方行列とし，写像 $T\ :\ V\to V$ を

$$(T(f))(x)=f(Ax) \qquad (f\in V,\ x\in\mathbb{C}^n)$$

で定める.

(1) $\hat{e}_1,\ \cdots,\ \hat{e}_n$ は V の基底であることを示せ.

(2) T は複素線形写像 であることを示せ.

(3) 次を満たす V の基底 $f_1,\ \cdots\ ,f_n$ が存在するこを示せ.

T の $f_1,\ \cdots\ ,f_n$ に関する表現行列 B が対角行列である

(4) B を (3) の対角行列とする．$B=P^{-1}AP$ を満たす n 次複素正則行列 P が存在することを示せ.

(筑波大 2024)　　(m20241311)

0.72　$a>0$ とする．自然数 n に対し，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{1}{t^2+x^2+a^2}\,dt$$

と定める.

(1) $f_n(x)$ を求めよ．

(2) 関数列 $\{f_n(x)\}$ は $\mathbb{R}$ 上 $\dfrac{\pi}{2\sqrt{x^2+a^2}}$ に一様収束することを示せ．

(3) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\leq x\leq 1,\ y>x\right\}$ とする．このとき広義積分

$$\iint_D \frac{y}{y^2+a^2}\,\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\,dxdy$$

は収束することを示し，その値を求めよ．

(筑波大 2024)　　　(m20241312)

0.73　集合 X に対し，X のベキ集合を $P(X)$ と表す．写像 $f\ :\ X\to Y$ に対し，写像 $\hat{f}\ :\ P(X)\to P(Y)$ を

$$\hat{f}(A)=\left\{y\in Y \;\middle|\; f^{-1}(\{y\})\subset A\right\}\qquad (A\in P(X))$$

で定める．

(1) f が単射であることと $\hat{f}$ が単射であることは同値であることを示せ，

(2) f が全射であることと $\hat{f}$ が全射であることは同値であることを示せ，

(3) f が全射であるとする．このとき，$B\in P(Y)$ に対し，

$$f^{-1}(B)=\bigcap\left\{A\subset X \;\middle|\; \hat{f}(A)=B\right\}$$

を示せ．

(4) f は全射であるとする．X 上に同値関数 $\sim$ を

$$x\sim y\Longleftrightarrow f(x)=f(y)\qquad (x,\ y\in X)$$

と定め，$x\in X$ の同値類を $[x]$ とかく．$p:X\to X/\!\sim$ を自然な射影とし，$\varphi:X/\!\sim\ \to Y$ を $\varphi([x])=f(x)\quad ([x]\in X/\!\sim)$ と定めるとき，$\hat{\varphi}\circ\hat{p}=\hat{f}$ を示せ．

(筑波大 2024)　　　(m20241313)

0.74　逆三角関数 $\tan^{-1}x$ について次の問いに答えなさい．

(1) 第 3 次導関数を求めなさい．

(2) $\tan^{-1}\dfrac{1}{2}$ の近似値として $\dfrac{11}{24}$ を用いた場合，その誤差は $\dfrac{1}{32}$ を超えないことを示しなさい．

(筑波大 2024)　　　(m20241314)

0.75　$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}4\\2\\3\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}5t\\t+4\\2t+3\\-t+6\end{pmatrix}$ とする．ここで t は実数である．

(1) $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が線形独立となるための条件を求めなさい．

(2) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\perp\boldsymbol{c}$ となる $\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{d}$ とする．$\boldsymbol{d}$ を求めなさい．

(3) 次の連立一次方程式の解 $\boldsymbol{x}$ を求めなさい．

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{d}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

(筑波大 2024)　　(m20241315)

0.76　次のベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は1次独立かどうかを調べよ.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(茨城大 2024)　　(m20241701)

0.77　$\boldsymbol{R}^4$ の線形部分空間 V_1 と V_2 を次のように定める :

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x + 3z + 8w = 0, \\ x + y + 2z + w = 0 \end{array} \right\}$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x + 2y + w = 0, \\ -y + 3z - w = 0 \end{array} \right\}$$

このとき, 以下の各小問に答えよ.

(1)　V_1, V_2 の基底をそれぞれ一組求めよ.

(2)　$V_1 \cup V_2$ が $\boldsymbol{R}^4$ の線形部分空間でないことを示せ.

(茨城大 2024)　　(m20241702)

0.78　一般に線形空間 K の部分空間 K_1, K_2 に対して, その和集合 $K_1 \cup K_2$ が K の部分空間であるならば, $K_1 \subset K_2$ または $K_2 \subset K_1$ が成り立つことを示せ.

(茨城大 2024)　　(m20241703)

0.79　xy 平面内に定義域 D をもつ実数値関数

$$f(x, y) = \log \frac{y^2 - 3y + 2}{x^2 + x - 2}$$

を考える. ただし, 対数は自然対数とする. このとき, 以下の各小問に答えよ.

(1)　関数 $f(x, y)$ の定義域 D を調べ, xy 平面上に図示せよ.

(2)　$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ となる点 (x, y) が, 小問 (1) で求めた D 上に何個存在するか調べよ.

(茨城大 2024)　　(m20241704)

0.80　次の関数を考える.

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2 + y^2}{2}$$

また, 実数 t (ただし $t \neq \frac{1}{2}$) に対して $D(t) = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; f(x, y) \geqq t \right\}$ とする. このとき, 以下の各小問に答えよ.

(1)　集合 $D(t)$ が空集合とならないための t の条件を求めよ.

(2)　t が小問 (1) の条件を満たすとき, $D(t)$ が表す閉領域の面積 $S(t)$ を求めよ.

(3)　t が小問 (1) の条件を満たすとき, 重積分

$$F(t) = \iint_{D(t)} f(x, y) dxdy$$

を求めよ.

(茨城大 2024)　　(m20241705)

0.81　2 変数関数 $f(x,y)=x^2+xy+y^2+1$ について，以下の各問に答えよ．

(1) $f(x,y)$ の極大，極小を調べよ．

(2) 領域 $D : x^2+y^2 \leqq 1$ における $f(x,y)$ の最大値と最小値を求めよ．

(茨城大 2024)　　(m20241706)

0.82　行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の各問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) A の各固有値に対し，固有空間の 1 組の基底を求めよ．ここで，固有値 λ の固有空間とは，λ の固有ベクトル全体と零ベクトルからなるベクトル空間のことである．

(茨城大 2024)　　(m20241707)

0.83　i は虚数単位とし，ω を実数の定数とする．$t \geqq 0$ で定義された複素数値関数 $e^{i\omega t}$ のラプラス変換は $\dfrac{1}{s-i\omega}$ $(s>0)$ である．以下の各問に答えよ．

(1) $t \geqq 0$ で定義された関数 $\cos\omega t$ のラプラス変換を求めよ．

(2) $t \geqq 0$ で定義された関数 $\sin\omega t$ のラプラス変換を求めよ．

(3) $x=x(t)$, $y=y(t)$ のとき，ラプラス変換を用いて，次の連立微分方程式の初期値問題を解け．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+3y=-\sin t \\ x-\dfrac{dy}{dt}=2\cos t \\ x(0)=\sqrt{3},\ \ y(0)=-1 \end{cases}$$

(茨城大 2024)　　(m20241708)

0.84　複素平面上の円 $|z|=1$ を反時計回りに一周する閉曲線を C とする．以下の各問に答えよ．

(1) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z}dz$ を求めよ．

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z-2}dz$ を求めよ．

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z(z-2)}dz$ を求めよ．

(茨城大 2024)　　(m20241709)

0.85　$\boldsymbol{R}^2$ において，ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ に，$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ にそれぞれ写す線形変換を表す 2 次の正方行列を求めよ．

(茨城大 2024)　　(m20241710)

0.86　$A=\{-2,-1,0,1,2\}$ の要素を次の確率 P に従ってとる確率変数 X を考える．

$$P(-2)=\frac{1}{8}\,,\qquad P(-1)=\frac{1}{8}\,,\qquad P(0)=\frac{1}{3}\,,\qquad P(1)=\frac{1}{4}\,,\qquad P(2)=\frac{1}{6}$$

(a) X の平均 $E[X]$ と分散 $V[X]$ をそれぞれ分数の形で示せ．

(b) A 上の実関数 f を下の式のように定義する．

$$f(x) = |x|, \qquad x \in A$$

このとき，平均 $E[f(X)]$ と分散 $V[f(X)]$ をそれぞれ分数の形で示せ．

(山梨大 2024)　　(m20241801)

0.87 以下の行列 A を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(b) A を対角化せよ．

(c) A^5 を求めよ．

(山梨大 2024)　　(m20241802)

0.88 1 万人に 1 人の割合で感染する新型のウイルスがある．このウイルスに対する感染検査では，ウイルスに感染していることも感染していないこともどちらも確率 0.99 で正しく判定でき，誤った判定が出る確率は 0.01 である．このとき，以下の設問に答えなさい．解答には計算過程がわかるように式も示すこと．

(a) ある人物が，このウイルスに感染していて，かつこの感染検査を受けたときに陽性（ウイルスに感染している）と判定される確率を求めなさい．答えは四捨五入せずに表しなさい．

(b) このウイルスに感染しているかどうか不明である人物がこの感染検査を受けたとき，陽性と判定される確率を求めなさい．答えは四捨五入せずに表しなさい．

(c) このウイルスに感染しているかどうか不明である人物がこの感染検査で陽性と判定されたとき, 実際にウイルスに感染している確率を求めなさい．ただし，答えは小数点以下第 5 位を四捨五入して表しなさい．

(山梨大 2024)　　(m20241803)

0.89 $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ として，数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を次の連立漸化式で定義する．このとき，下の設問に答えなさい．

$$\begin{cases} x_n = 5x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ y_n = -x_{n-1} + 2y_{n-1} \end{cases}$$

(a) 上の漸化式を次式のように表すとき，行列 A を求めなさい．

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

(b) A を対角化する行列 P と P によって得られる対角行列 B を求めなさい．

(c) A^n を求めなさい．

(d) 一般項 x_n, y_n を求めなさい．

(山梨大 2024)　　(m20241804)

0.90 実数 p, q は $p > 1$, $q > 1$ かつ $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たすとする．関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q} - x \qquad (x > 0)$$

とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(1)$ と $f'(x)$ を求めよ．

(2) すべての実数 $x>0$ に対して，$x \leqq \dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q}$ が成り立つことを示せ．

(3) すべての実数 $\alpha>0$, $\beta>0$ に対して，$\alpha\beta \leqq \dfrac{1}{p}\alpha^p + \dfrac{1}{q}\beta^q$ が成り立つことを示せ．

(信州大 2024)　　　(m20241901)

0.91　実数 p は $p>2$ を満たすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^3}{(1+x^2)^p}\,dx$ を求めよ．

(2) $D_n = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2+y^2 \leqq n^2,\ x \leqq y\right\}$ $(n=1,2,\cdots)$ とおき，領域 D_n 上の 2 重積分

$$I_n(p) = \iint_{D_n} \frac{|xy|}{(1+x^2+y^2)^p}\,dxdy$$

を考える．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n(p)$ を求めよ．

(信州大 2024)　　　(m20241902)

0.92　a, b を実定数とするとき，x, y, z を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x+(b+2)y+(a-4)z=b+4 \\ -x+(b-4)y+8z=0 \\ x+2y-3z=2 \end{cases}$$

を解け．

(信州大 2024)　　　(m20241903)

0.93　行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について．次の問いに答えよ．

(1) 行列 A が対角化可能かどうか判定せよ．また，対角化可能であれば，対角化せよ．

(2) 行列 B が対角化可能かどうか判定せよ．また，対角化可能であれば，対角化せよ．

(信州大 2024)　　　(m20241904)

0.94　$\mathbb{R}^4$ の部分空間 V を

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; 4x_1+3x_2-x_3+4x_4=0,\ 2x_1+x_2+x_4=0 \right\}$$

とする．また，W を

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) V の次元および一組の基底を求めよ．

(2) (1) で求めた V の基底を含む $\mathbb{R}^4$ の基底を一組求めよ．

(3) 和空間 $V+W$ の次元および一組の基底を求めよ.

(4) 共通部分 $V\cap W$ の次元および一組の基底を求めよ.

(信州大 2024)　　(m20241905)

0.95 n 次複素正方行列 A が, ある自然数 $m\geq 2$ に対して, $A^{m-1}\neq O$ かつ $A^m=O$ を満たすとする. ただし, O は n 次零行列とする. 次の問いに答えよ.

(1) A は正則行列でないことを示せ.

(2) A の固有値はすべて 0 であることを示せ.

(3) A は対角化できないことを示せ.

(4) 任意の複素数 $s\in\mathbb{C}$ に対して, $I-sA$ は正則行列であることを示せ. ただし, I は n 次単位行列とする.

(5) $A^{m-1}\boldsymbol{v}$ が零ベクトルにならないような $\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n$ をとる. このとき

$$\boldsymbol{v},\ A\boldsymbol{v},\ A^2\boldsymbol{v},\ \cdots,\ A^{m-1}\boldsymbol{v}$$

は 1 次独立であることを示せ.

(信州大 2024)　　(m20241906)

0.96 以下の問いに答えよ.

(1) 次の重積分を求めよ.

$$\iiint_D 4(x^2+y^2-z^2)dxdydz, \qquad D=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leq z,\ z\leq 1\}$$

(2) 曲面 $z=3-\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ の円柱面 $x^2+y^2=4$ の内部にある部分の面積を求めよ.

(信州大 2024)　　(m20241907)

0.97 以下の問いに答えよ.

(1) $p>1$ とし, 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束するとする. このとき, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p$ は収束することを示せ.

(2) 関数 $f(x,y)=\cos(xy)+(x+1)^2+y-2$ とする. このとき, $x=0$ の近くで, $f(x,y(x))=0$ を満たす陰関数 $y=y(x)$ がただ一つ存在することを示せ. また, 曲線 $f(x,y)=0$ の点 $(0,0)$ での接線を求めよ.

(3) 次の関数 $g(x,y)$ の点 $(0,0)$ における方向微分係数 $g_\theta(0,0),\ \theta\in[0,\ 2\pi)$ を求めよ. また, $g(x,y)$ は点 $(0,0)$ で全微分可能であるかどうかを調べよ.

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(y^2+1)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ただし,

$$g_\theta(x,y)=\lim_{r\to+0}\frac{g(x+r\cos\theta,\ y+r\sin\theta)-g(x,y)}{r}$$

である.

(信州大 2024)　　(m20241908)

0.98 $x,\ y$ を実数とする. $x,\ y$ の関数 $z=x^3-6xy+y^3$ について下の問いに答えなさい.

(1) 偏導関数 z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy} をそれぞれ求めなさい．

(2) $z_x = z_y = 0$ を満たす $(x,\ y)$ をすべて求めなさい．

(3) z の極値を求めなさい．ただし，求めた極値が極大値か極小値かも述べなさい．

(長岡技科大 2024)　　(m20242101)

0.99 a を実数とする．行列 A とベクトル $\overrightarrow{b}$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ -a & -a & a \\ a+1 & a & -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix}$$

とし，実数 x, y, z についての連立方程式を

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{b} \qquad \cdots (*)$$

とする．下の問いに答えなさい．

(1) $a = 0$ として，$(*)$ を解きなさい．

(2) $a = 1$ として，$(*)$ を解きなさい．

(3) $a = -1$ として，$(*)$ を解きなさい．

(長岡技科大 2024)　　(m20242102)

0.100 赤，青，緑，黄の各色で 1 から 5 までの数字が一つずつ書かれた計 20 枚のカードがあり，ここから 3 枚のカードを同時に引く．下の問いに答えなさい．

(1) 引いた 3 枚がすべて同じ数字である確率を求めなさい．

(2) 引いた 3 枚がすべて同じ色である確率を求めなさい．

(3) 引いた 3 枚がすべて互いに異なる数字である確率を求めなさい．

(長岡技科大 2024)　　(m20242103)

0.101 xy 平面上で $x^2 + y^2 \leqq 1$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ で表される領域を D とする．下の問いに答えなさい．

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_D y\,dxdy$ の値を求めなさい．

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D y^2 dxdy$ の値を求めなさい．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D |y - x|\,dxdy$ の値を求めなさい．

(長岡技科大 2024)　　(m20242104)

0.102 以下の問いに答えよ．ただし，計算の概略も示すこと．

関数 $f(x) = \log(1+x)$ をマクローリン展開し，整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の形で示せ．また，求めた整級数の収束半径を求めよ．

(富山大 2024)　　(m20242301)

0.103 以下の問いに答えよ．ただし，計算の概略も示すこと．

関数 $z = x\ f(x+y)\ + y\ g(x+y)$ に対し，次式が成り立つことを示せ．

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

(富山大 2024)　　(m20242302)

0.104 以下の問いに答えよ．ただし，計算の概略も示すこと．

領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x - y \leq 1,\ \ 1 \leq 2x + y \leq 2\}$ とするとき，次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D e^{3x}\, dxdy$$

(富山大 2024)　　(m20242303)

0.105 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -4 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，計算の概略も示すこと．

(1) 固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\ (\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ を求めよ．

(2) (1) の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$に 対応する固有ベクトル

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, \qquad \overrightarrow{x_2} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}, \qquad \overrightarrow{x_3} = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

を求めよ．

(3) 行列 $P = \begin{bmatrix} \overrightarrow{x_1} & \overrightarrow{x_2} & \overrightarrow{x_3} \end{bmatrix}$ としたとき，P の逆行列 P^{-1} を求めよ．

(4) 行列 $D = P^{-1}AP$ を求めよ．

(富山大 2024)　　(m20242304)

0.106 以下の微分方程式について，$t = 0$ のとき $y = 0,\ y' = 1$ を満たす解を求めよ．

ただし，$a,\ b$ は正の定数である．計算の概略も示すこと．

(1) $a\dfrac{d^2y}{dt^2} + b\dfrac{dy}{dt} = 0$

(2) $a\dfrac{d^2y}{dt^2} + by = 0$

(富山大 2024)　　(m20242305)

0.107 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \dfrac{\log x}{x}$　　　　(2) $y = x^{x^2}$

(福井大 2024)　　(m20242401)

0.108 次の定積分を計算せよ．ただし，$\alpha,\ \beta$ は正の実数である．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3 - \cos 2x} dx$　　　　(2) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta)^2 dx$

(福井大 2024)　　(m20242402)

0.109 z は x と t の関数 f と g の和で $z = f(x + at) + g(x - at)$ と表せる．このとき，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

が成り立つことを示せ．

(福井大 2024)　　(m20242403)

0.110 内径が a，外径が b である球殻の体積を，極座標系における 3 重積分を用いて求めよ．ただし，極座標は $(r,\ \theta,\ \phi)$ は直角座標 (x, y, z) を用いて，

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \qquad (0 \leq r \leq \infty,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi) \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

で定義される．

(福井大 2024)　　(m20242404)

0.111　次の実数 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$ に関する連立方程式の解を求めよ.

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_2 + 2x_3 \ + x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \ + x_4 + 9x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 \ - x_3 + 4x_4 \ + x_5 = 0 \\ 2x_1 \ + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 \ + x_3 + 8x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases}$$

(福井大 2024)　　　(m20242405)

0.112　以下に示す行列の行列式を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(福井大 2024)　　　(m20242406)

0.113　以下に示す行列の固有値を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

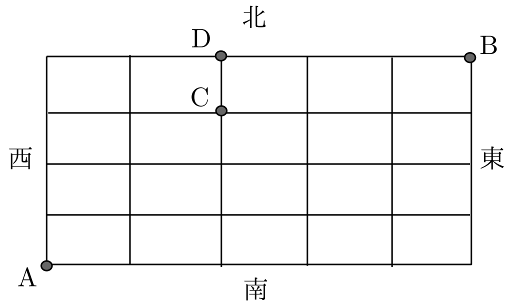
(福井大 2024)　　　(m20242407)

0.114　n を自然数とする．以下に示す行列 A の n 乗を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(福井大 2024)　　　(m20242408)

0.115　右図のように，東西に走る 5 本の道路および南北に走る 6 本の道路がある． 地点 A から出発し，最短の道順を通って地点 B に移動する．つまり地点 A から東に 5 マス，北に 4 マス，道路に沿って移動して，地点 B に至る．西もしくは南への移動はしないものとする.



(1)　地点 A から地点 B までの最短の道順は何通りあるか答えよ.

(2)　地点 A から地点 B までのいずれの最短の道順も等しい確率で通るものとする．このとき，途中で地点 D を通る確率を求めよ.

(3)　各交差点で，東に行くか，北に行くかは等確率とし，一方しか行けないときは確率 1 でその方向に行くものとする．このとき，途中で地点 C および D の両方を通る確率を求めよ.

(福井大 2024)　　　(m20242409)

0.116 n 組のデータ $(x_i,\ y_i)$（ただし，$i=1,2,\cdots,n,\ \ n\geq 2.\ \ x_i$ は全て異なるとする）があるとき，x に対する y の線形回帰を求める．次の y_i の偏差の 2 乗和 $S(a,b)$ を最小にするように $a,\ b$ を決定し，これを求める．

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}[\ y_i-(ax_i+b)\ ]^2$$

(1) $\partial S(a,b)/\partial a$ および $\partial S(a,b)/\partial b$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial S(a,b)}{\partial a}=0$ および $\dfrac{\partial S(a,b)}{\partial b}=0$ として，$S(a,b)$ を最小にする $a,\ b$ を求めよ．

(福井大 2024)　　(m20242410)

0.117 次の非斉次微分方程式について，以下の問に答えなさい．

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}-2\frac{dx(t)}{dt}-8x(t)=12e^{-2t}$$

(1) 斉次微分方程式の一般解を求めなさい．

(2) 斉次微分方程式について，$t=0$ における初期条件 $x(0)=0,\ \left.\dfrac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0}=6$ のもとで解を求めよ．

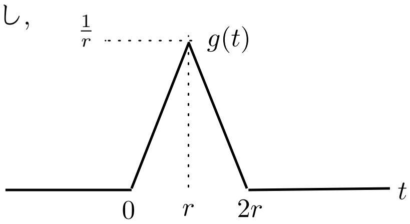
(3) 非斉次微分方程式の一般解を求めよ．

(福井大 2024)　　(m20242411)

0.118 右図に示す関数 $g(t)$ について，以下の問に答えなさい．ただし，ラプラス変換は

$$\pounds[f(t)]=F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

とする．



(1) ランプ関数のラプラス変換を求めなさい．ただし，ランプ関数は

$$r(t)=\begin{cases} t & (t\geq 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

とする．

(2) 関数 $g(t)$ をランプ関数を用いて表しなさい．

(3) 関数 $g(t)$ をランプ変換を求めなさい．

(4) 関数 $g(t)$ をランプ変換において，$r\to 0$ としたときの極限を求めよ．

(福井大 2024)　　(m20242412)

0.119 次の (a) と (b) に示した行列式の値を，それぞれ求めよ．

(a) $\begin{vmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{vmatrix}$　　(b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 & -5\\ 8 & 11 & 3 & -7 & 6\\ 4 & 0 & 4 & 5 & -3\\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$

(福井大 2024)　　(m20242413)

0.120 未知数 $x,\ y,\ z$ に関する以下の連立方程式を考える．

$$\begin{cases} x \qquad\quad -3z = -3\\ 2x+ky-z=-2\\ x+2y+kz=1\end{cases}$$

(a) k がどのような値のときに一意的な解をもつかを答えよ．

(b) k がどのような値のときに解が無しとなるかを答えよ．

(c) k がどのような値のときに二つ以上の解をもつかを答えよ．

(福井大 2024)　　(m20242414)

0.121 $\boldsymbol{W}$ を $(1,-2,5)$, $(2,3,1)$, $(3,8,-3)$ の 3 つのベクトルによって生成される $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間とする．$\boldsymbol{W}$ の次元を求めよ．

(福井大 2024)　　(m20242415)

0.122 関数 $x(t)$ に関する微分方程式

$$\frac{d^3x}{dt^3}+7\frac{d^2x}{dt^2}+(a+6)\frac{dx}{dt}+ax=3a$$

について，以下の問いに答えよ．ただし，a は実数の定数である．

(1) $a>0$ のとき $t\to+\infty$ において x がある一定の値に収束することを示せ．また，そのときの $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} x$ の値を求めよ．

(2) $a=10$ のとき，この微分方程式の一般解を求めよ．

(3) $a=8$ のとき，初期条件 $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$ 下でこの微分方程式の解を求めよ．

(福井大 2024)　　(m20242416)

0.123 $\theta\ (0<\theta<\pi)$ を媒介変数とする x の関数 y_n を

$$\begin{cases} y_n &= \cos n\theta \\ x &= \cos\theta \end{cases} \qquad (0<\theta<\pi) \tag{1}$$

と定義する．ただし，n は非負の整数とする．以下の問いに答えよ．

(1) x の変化に対する y_3（$n=3$ に対する y_n）の極値を求めたい．これには $\dfrac{dy_3}{dx}$ を求めて，その符号の変化を調べればよいが，ここでは媒介変数表示の微分公式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} \tag{2}$$

を利用して極値を求めよう．

(a) 式 (2) を用いて $\dfrac{dy_3}{dx}$ を θ で表せ．

(b) (a) で得られた $\dfrac{dy_3}{dx}$ において，$x=\cos\theta$ の関係を用いて θ を消去し，$\dfrac{dy_3}{dx}$ を x で表せ．必要に応じて「 3 倍角の公式 $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ 」を用いてよい．

(c) x に対する y_3 の増減表を書き，y_3 の極値（極大値，極小値と対応する x の値）を求めよ．

(2) $n>1$ に対する y_n の不定積分 $\displaystyle\int y_n\,dx$ は, .

$$\int y_n\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{y_{n+1}}{n+1}-\frac{y_{n-1}}{n-1}\right)+C \qquad (C\text{ は積分定数}) \tag{3}$$

と書ける（以下では x を $-1<x<1$ に限定する）．これを次のように証明したい．

$\boxed{\quad\text{(A)}\quad}$ の部分に入る数式を答え，さらに証明の続きを完成せよ．

証明）変数変換（置換積分）によって式 (3) の左辺を

$$\int y_n\,dx=\int y_n\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \tag{4}$$

と表し，さらに式 (4) の右辺の被積分関数を θ で表すと，

$$\int y_n\,dx = \int \boxed{\quad (\mathrm{A}) \quad}\,d\theta \tag{5}$$

と書ける．ここで，三角関数の公式

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\} \tag{6}$$

を用いて $\boxed{\quad (\mathrm{A}) \quad}$ の部分を変形すると $\cdots$ （この先を完成せよ．）

(福井大 2024)　　(m20242417)

0.124　以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(2) 数列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ に以下の関係がある．(1) の結果を用いて数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ の一般項を求めよ．

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \quad (n \geqq 1)$$

(福井大 2024)　　(m20242418)

0.125　xyz 直交座標系において，下記のベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ に関して以下の問いに答えよ．なお，p は実数とする．

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ p \end{bmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{v}_3$ が以下のように $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の一次結合で表されるとき，実数 a, b, および p を求めよ．

$$\boldsymbol{v}_3 = a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2$$

(2) (1) で求めた p の値を用いて，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_3$ の内積 $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_3$，および $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_3$ のなす角 θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ を求めよ．

(3) $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ で張られる線形部分空間は平面である．この平面の方程式を x, y, z を用いて表せ．

(4) 点 $\mathrm{Q}(-3, 1, q)$ から (3) で求めた平面に下した垂線の足（垂線と平面の交点）R の座標を q を用いて表せ．ただし，q は実数とする．

(福井大 2024)　　(m20242419)

0.126　次の関数を微分せよ．

(1) $y = \dfrac{2x+5}{\sqrt{3x-4}}$　　(2) $y = \sin 7x\ \sin^7 x$　　(3) $y = \log\left|x + \sqrt{x^2-4}\right|$　　(4) $y = x^x$

(福井大 2024)　　(m20242420)

0.127　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}dx$　　(2) $\displaystyle\int x^2 \cos 3x\,dx$

(福井大 2024)　　(m20242421)

0.128　次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 e^x(1+x)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{2x-x^2}}$

(福井大 2024)　　(m20242422)

0.129　曲線 $y = x\log(2-x)$ と x 軸によって囲まれた図形の面積 A を求めよ．

(福井大 2024)　　(m20242423)

0.130 次のベクトルと行列の計算をしなさい.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2) $2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}^3$ (4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

(福井大 2024) (m20242424)

0.131 次のベクトルの組が一次従属か一次独立か判定しなさい」.

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$

(福井大 2024) (m20242425)

0.132 (1) 逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

(2) 行列式の値を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

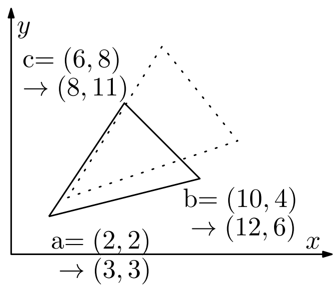
(福井大 2024) (m20242426)

0.133 次の行列の固有値と最大の固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

(福井大 2024) (m20242427)

0.134 右図の x, y 平面上の実線で示す三角形 abc が，点線で示すように変形・移動すると考える.



(1) ３つの頂点 a,b,c の座標が矢印で示すように変化したとき，各点の x および y 方向の変位を求めよ.

(2) 境界を含む三角形内部の任意の点の変位が変形前の x, y 座標の一次関数で与えられるとする．点 (x, y) の x 方向の変位 u を表す式を示せ．なお，一次関数の係数の文字は自由に指定すればよい.

(3) 3 つの頂点の x 方向の変位を表す式を行列とベクトルの形式で表し，(2) で指定した係数の値を求めよ.

(4) 三角形内部の点 $(6, 4)$ の位置の，x 方向の変位を求めよ.

(5) x 方向の変位の，x 方向および y 方向の勾配を求めよ.

(福井大 2024) (m20242428)

0.135 n を自然数とする．次のように数列 $\{a_n\}$ とベクトル $\boldsymbol{v}_n$ を定める.

$$a_{n+3} = -2a_{n+2} + 5a_{n+1} + 6a_n\ , \quad a_1 = 1,\ \ a_2 = 1,\ \ a_3 = 2,$$

$$\boldsymbol{v}_n = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

次の問いに答えなさい.

(1) $\boldsymbol{v}_{n+1} = A\boldsymbol{v}_n \ \ (n \geq 1)$ を満たす 3 次行列 A を求めなさい.

(2) A の固有値を求めなさい.

(3) $a_4,\ a_5,\ a_6$ を求めなさい.

(4) $\boldsymbol{v}_n = A^{n-1}\boldsymbol{v}_1$ が成り立つことより, A の固有値を $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha \leq \beta \leq \gamma)$ とするとき,

$$a_n = s\,\alpha^{n-3} + t\,\beta^{n-3} + u\,\gamma^{n-3} \ \ (n \geq 4)$$

を満たす実数 $s,\ t,\ u$ が存在することを示し, $s,\ t,\ u$ と a_n の値を求めなさい.

(岐阜大 2024)　　(m20242601)

0.136 2 変数関数 $f(x,y) = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めなさい.
ただし, $\tan^{-1}$ は逆正接関数を表す.

(岐阜大 2024)　　(m20242602)

0.137 (1) 次の恒等式を満たす実数 $A,\ B,\ C,\ D$ を求めなさい.

$$\frac{1}{x^4+4} = \frac{Ax+B}{x^2-2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

(2) 次の不定積分を求めなさい. ただし, $E,\ F$ は実数とする.

$$\int \frac{Ex+F}{x^2-2x+2}\,dx$$

(3) 次の定積分を求めなさい.

$$\int_0^{1+\sqrt{3}} \frac{1}{x^4+4}\,dx$$

(岐阜大 2024)　　(m20242603)

0.138 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$ $(a,\ b$ 実数$)$ とする.

行列 A の固有方程式が重根をもつ場合を考える. 以下の問に答えよ.

(1) A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) A が対角化可能となる $a,\ b$ の関係式を求めよ.

(3) n を自然数とする. A が対角化可能となるとき, A^n を求めよ.

(岐阜大 2024)　　(m20242604)

0.139 関数 $f(u,v)$ はすべての実数 $u,\ v$ に対して,

$$u\,\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + v\,\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = 2\,f(u,v)$$

を満たす. また, 実数 $x,\ y$ と $t > 0$ に対して, $g(x,y,t) = \dfrac{f(xt,\ yt)}{t^2}$ とする.
以下の問に答えよ.

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial g}{\partial t}$ を求めよ.

(2) $f(xt,\ yt) = t^2 f(x,y)$ を示せ.

(3) $x > 0$ とする．微分方程式

$$x^2 \frac{dy}{dx} = f(x, y) \ \cdots \ (*)$$

の一般解を $y = y(x)$ とするとき，$z = \dfrac{y}{x}$ は次の微分方程式を満たすことを示せ．

$$\frac{dz}{dx} = \frac{f(1, z) - z}{x}$$

(4) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ のとき，$e < x < e^{\frac{\pi}{2}+1}$ の範囲にて微分方程式 $(*)$ を条件 $y(e) = 0$ の下で解け．ここで，e は自然対数の底とする．

(岐阜大 2024)　　(m20242605)

0.140 互いに直交する三つの単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ による三次元直交座標系において，回転放物面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $z = 1$ で囲まれた閉領域を V とし，V の全表面を S とする．また，ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{F} = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$ で与える．以下の問いに答えよ．

(1) S 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ と点 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1\right)$ における外向きの単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}_{\mathrm{P}}$, $\boldsymbol{n}_{\mathrm{Q}}$ をそれぞれ求めよ．

(2) 体積分 $\displaystyle\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{F} dV$ の値を求めよ．ただし，dV は体積素とする．

(3) S は，上面の円板部 S_1 と側面の回転放物面部 S_2 からなる．面積分 $\displaystyle\int_{S_1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dS$ と $\displaystyle\int_{S_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dS$ の値をそれぞれ求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S 上における外向きの単位法線ベクトル，dS は面積素とする．

(名古屋大 2024)　　(m20242801)

0.141 実数の定数 a を含む行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ を考える．以下の問に答えよ．

(1) $a = 0$ のとき，行列 A の逆行列を求めよ．

(2) 行列 A の固有値のうち，定数 a を含まない固有値を求めよ．また，その固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(3) 行列 A の固有値が二つの実数となるとき，定数 a とそのときのすべての固有値を求めよ．

(名古屋大 2024)　　(m20242802)

0.142 次の方程式を満たす四つの x の値を求めよ．

$x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 6x + 1 = 0$

(名古屋大 2024)　　(m20242803)

0.143 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x - 2y}{2x - y}$

(名古屋大 2024)　　(m20242804)

0.144 次の 2 重積分の値を求めよ．ただし，D は，$y = 0$, $y = \dfrac{x}{2}$, $y = 3 - x$ で囲まれた領域とする．

$\displaystyle\iint_D \frac{2x}{y + 1}\, dxdy$

(名古屋大 2024)　　(m20242805)

0.145 A, B の二人がバトミントンをする．1 回目は A がサーブをし，2 回目以降は点を取った方がサーブする．A がサーブしたとき，A が点を取り次も A がサーブする確率は $2/3$, A が点を取られ次は B がサーブする確率は $1/3$ とする．また，B がサーブしたとき，B が点を取り次も B がサーブする確率は $3/4$, B が点を取られ次は A がサーブする確率は $1/4$ とする．n 回目に A がサーブする確率を P_n とする．以下の問に答えよ.

(1) 確率 P_1, P_2, P_3 を求めよ.

(2) 確率 P_n を求めよ.

(3) n 回目までに A がサーブした回数の期待値を求めよ.

(名古屋大 2024)　　(m20242806)

0.146 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+6x+8}$ の第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ.

(名古屋工業大 2024)　　(m20242901)

0.147 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin x\,(1+\cos x)}dx$ を求めよ.

(名古屋工業大 2024)　　(m20242902)

0.148 関数 $f(x, y) = 8x^3 + y^3 - 3xy$ の極値を求めよ.

(名古屋工業大 2024)　　(m20242903)

0.149 領域 $D = \{x^2 + y^2 \leqq 1\}$ において，重積分

$$\iint_D \frac{|y|}{x^2+1}\,dxdy$$

の値を求めよ.

(名古屋工業大 2024)　　(m20242904)

0.150 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a^2 & a^3 \\ a & a^3 & a^5 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．ただし a は定数とする.

(1) 行列式 $|A|$ を因数分解せよ.

(2) 行列 A の階数を求めよ.

(名古屋工業大 2024)　　(m20242905)

0.151 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) A^n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ.

(名古屋工業大 2024)　　(m20242906)

0.152 複素数 z に関する以下の問に答えなさい．ただし，虚数単位を i とする.

(1) 複素平面の写像について考える.

☒ z の実部が $\mathrm{Re}(z) = 1/2$ を満たすとき，z が描く複素平面上の図形を図示しなさい.

☒ z の関数

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

$(z \neq 0)$ について, $w = f(z)$ による z 平面から w 平面への図形の変換を考える．z の実部が $\mathrm{Re}(z) = 1/2$ を満たすとき，$w = X + iY$ の実部 X と虚部 Y が満足する方程式を，i を含まない形で求めなさい.

☒ w が問☒で求めた方程式を満たすとき，w が描く複素平面上の図形を図示しなさい.

(2) 関数 $g(z) = e^z$ について考える．ただし，z の実部と虚部をそれぞれ x と y とする.

☒ 関数 $g(z)$ の実部 $u(x, y)$ と虚部 $v(x, y)$ を求めなさい.

☒ 以下の偏導関数を計算しなさい．さらに，コーシー・リーマンの関係式が成り立つことを示しなさい.

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

(三重大 2024)　　(m20243101)

0.153 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき，以下の問に答えなさい．ここで，E は単位行列を，$|\cdot|$ は行列式を，O は零行列を表す.

☒ 固有多項式 $f(x) = |A - xE|$ を求めなさい.

☒ 固有多項式 $f(x)$ の x を A で置き換え，定数に E を乗じた $f(A)$ について $f(A) = O$ が成り立つ（ケイリー・ハミルトンの定理）．これを用いて A^3 を A と E で表し，それを用いて A^3 を求めなさい.

☒ ケイリー・ハミルトンの定理を用いて A^{-1} を A と E で表し，それを用いて A^{-1} を求めなさい.

(三重大 2024)　　(m20243102)

0.154 $y = y(x)$ に関する次の微分方程式の一般解を求めなさい.

$$(3x - 2y + 1)\frac{dy}{dx} = 4x - 3y$$

(三重大 2024)　　(m20243103)

0.155 3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} x-1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 \\ x & 0 & x+1 \end{pmatrix}$ は固有値 λ の一つに $\lambda = 3$ をもつものとする．x は実数とする．次の問に答えなさい.

(1) x を求めなさい.

(2) A の $\lambda = 3$ 以外の固有値を求めなさい.

(3) A の固有ベクトルをすべて求めなさい．ただし，固有ベクトルの大きさは 1 となるようにしなさい.

(三重大 2024)　　(m20243104)

0.156 次の問に答えなさい,

(1) 自然対数の底（e : Napier の数）は,

$e = \lim_{t \to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$

で与えられる．関数 $f(x) = \log_a x$ について,

$\dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{1}{x \ln a}$

であることを導関数の定義を用いて証明しなさい.

$\ln a = \log_e a$ とし，$a > 0$, $x > 0$ である.

(2) 関数 $g(x) = a^x$ を x で微分しなさい．$a > 0$ とする.

(3) e^x がべき級数展開によって,

$e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

で与えられることを証明しなさい．ただし $n!$ は n の階乗を示す.

(三重大 2024)　　(m20243105)

0.157 関数 $y = f(x)$ について，次の問に答えなさい.

(1) 関数 $y = f(x)$ は次の微分方程式を満たす.

$y^2 - 2y - y' = 0$

$f(0) = 1$ となる微分方程式の解を求めなさい．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ である.

(2) (1) で求めた関数 $y = f(x)$ について,

$S = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$

を求めなさい.

(三重大 2024)　　(m20243106)

0.158 次の関数を微分しなさい．ただし，e は自然対数の底をあらわす.

(1) $y = xe^{-2x}$　　(2) $y = x^{\sin x}$　　(3) $y = \dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$

(三重大 2024)　　(m20243107)

0.159 次の不定積分を求めなさい．ただし，積分定数を C とする.

(1) $\displaystyle\int \sqrt[3]{1+x}\, dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1 + \sin x}\, dx$

(三重大 2024)　　(m20243108)

0.160 次の微分方程式の一般解を求めなさい．ただし，積分定数を C とする.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$　　(2) $x\dfrac{dy}{dx} + y = \sin x$

(三重大 2024)　　(m20243109)

0.161 i を虚数単位として，次の (1)・(2) の問いに答えなさい.

(1) $e^{\frac{\pi}{6}i}$ および $(1 - \sqrt{3}i)^6$ を示す点を下の複素平面に図示しなさい．点の座標を示すこと.

(2) $x^4 - 2x^3 - x + 2 \leqq 0$ を満たす実数 x の範囲を求め,

この結果を使って $|z|^4 - 2|z|^3 - |z| + 2 \leqq 0$ を満たす複素数 z を表す点が分布する範囲を下の複素平面に図示しなさい.

(三重大 2024)　　(m20243110)

0.162 原点 O と点 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{A_3}$ がある．三角形 $\mathrm{A_1A_2A_3}$ において辺 $\mathrm{A_1A_2}$ を $t:1-t$ に内分する点を $\mathrm{B_1}$, 辺 $\mathrm{A_2A_3}$ を $t:1-t$ に内分する点を $\mathrm{B_2}$ とする．さらに線分 $\mathrm{B_1B_2}$ を $t:1-t$ に内分する点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}=\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}=\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}=\overrightarrow{a_3}$ とし，t が 0 から 1 まで変化するときの点 P の動きについて次の (1)〜(3) の問いに答えなさい．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ を用いて表しなさい．

(2) 点 P の座標を (x,y) として，$\overrightarrow{a_1}=(1,1)$, $\overrightarrow{a_2}=(4,7)$, $\overrightarrow{a_3}=(7,1)$ のとき，点 P の軌跡の方程式（x と y の関係式）を示しなさい．

(3) 点 P の y 座標が最大となるときの座標 (x,y) を求めなさい．

(三重大 2024)　　(m20243111)

0.163 曲線 $y=\log_e x$, $e^{-2}\leq x\leq e^2$ について，問 1 〜 問 3 に答えよ．

問 1 曲線上の任意の点を点 $\mathrm{P}(p,\ \log_e p)$，点 P における接線と x 軸の交点を点 Q，点 P から x 軸に下した垂線と x 軸との交点を点 R とするとき，△PQR の面積が最大となるときの p の値と三角形の面積を求めよ．

問 2 曲線を x 軸まわりに 360 度回転させてできる立体の体積を求めよ．

問 3 曲線の長さを求めよ．

(京都大 2024)　　(m20243301)

0.164 問 1〜問 3 に答えよ．

問 1 次の行列が正則であるか調べ，正則であるなら逆行列を求めよ．

(イ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(ロ) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$

問 2 次の行列の最大の固有値とそれに対応する固有ベクトルを 1 つ求めよ．

(イ) $\begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$

(ロ) $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$

問 3 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ について以下を求めよ．

(イ) A^2

(ロ) B^3

(ハ) $A^{100}B^{100}$

(京都大 2024)　　(m20243302)

0.165 問 1, 問 2 に答えよ.

問 1 次の微分方程式を解け.

(イ) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2-4}{2x}$

(ロ) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3\dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$

(ハ) $(x^2-xy)\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 0$

問 2 次の微分方程式が完全微分方程式であることを示し, これを解け.

$$(\cos y + y\cos x)dx + (\sin x - x\sin y)dy = 0$$

(京都大 2024)　　(m20243303)

0.166 当たりくじが 2 枚, はずれくじが 4 枚入った箱がある. この箱から, 1 回のくじ引きに参加するたびにＡさん, Ｂさんが順にそれぞれ無作為に 1 枚ずつくじを引くというくじ引きを考える. 1 回のくじ引きで 2 人ともがくじを引き終えたら, 引いたくじはすべて箱の中に戻すことにする.

問 1〜問 3 に答えよ.

問 1 くじ引きに 1 回参加してＢさんのくじが当たりであったときに, Ａさんが当たりを引いていた確率を求めよ.

問 2 Ｂさんがはずれくじを引くまで何度でもくじ引きに参加するときに, Ａさんが引く当たりくじの枚数の期待値を求めよ.

問 3 くじ引きに n 回参加したときに 2 回以上Ｂさんが当たりを引く確率を求めよ.

(京都大 2024)　　(m20243304)

0.167 実行列 A について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix} \qquad (0 < p < 1,\ 0 < q < 1)$$

(1) A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ を求めよ. ただし, $\lambda_1 > \lambda_2$ である.

(2) $\lambda_1,\ \lambda_2$ に対応する固有ベクトルをそれぞれ一つ示せ.

(3) 正則行列 P により, A は D のように対角化された. $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ を示せ. また, 逆行列 P^{-1} を求めよ.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{\text{ア}} \\ \boxed{\text{イ}} & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ.

(大阪大 2024)　　(m20243501)

0.168 a を正の定数とし, $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t\ \ (0 \leq t \leq 2\pi)$ の表す xy 平面上の閉曲線を C とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 閉曲線 C の長さを求めよ.

(2) 閉曲線 C が囲む閉領域を D とする. $u = sx,\ v = sy\ (0 \leq s \leq 1)$ として, 以下の式が成り立つことを示せ.

$$\iint_D dudv = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left| x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} \right| dt$$

(3) (2) の結果を用いて，閉曲線 C が囲む閉領域 D の面積を求めよ．

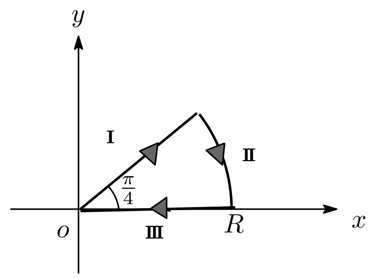
(4) 閉曲線 C 上の点における接線の傾き $\dfrac{dy}{dx}$ を x と y のみで表せ．

(5) 正の値の a を変化させたとき，異なる値の a に対する曲線 C の集合を曲線族 $\{C_a\}$ とする．曲線 C_R が曲線族 $\{C_a\}$ のすべての曲線との交点において直交するとき，これを曲線族 $\{C_a\}$ の直交曲線と呼ぶ．

(4) の結果に基づいて，この直交曲線 C_R を解とする 1 階微分方程式を x, y, $\dfrac{dy}{dx}$ を用いて示し，その一般解を陰関数として求めよ．なお，2 曲線の直交とは，2 曲線の交点において各々の接線が直交することを意味する．

(大阪大 2024)　　(m20243502)

0.169 複素数 $z = x + iy$ （i は虚数単位とする）を変数とする複素関数 e^{-z^2} を右図に示す複素平面上の扇形の領域を囲う閉じた経路 **I**, **II**, **III** に沿って積分すると，以下の式 (a) が成立する．



$$\int_{\mathbf{I}} e^{-z^2}dz + \int_{\mathbf{II}} e^{-z^2}dz + \int_{\mathbf{III}} e^{-z^2}dz = 0 \cdots\cdots (a)$$

(1) 式 (a) が成立するのはコーシーの積分定理による．コーシーの積分定理について以下に答えよ．複素平面上の領域 D で正則な複素関数 $f(z)$ の実部および虚部がそれぞれ連続微分可能な実関数 $u(x, y)$ および $v(x, y)$ によって与えられるものとする．C を領域 D 内の単一閉曲線とし，その内部が D に含まれるとき，以下が成り立つことを示せ．

$$\int_C f(z)dz = 0$$

なお，xy 平面において閉曲線 A で囲まれた領域 B では連続微分可能な実関数 $P(x, y)$ および $Q(x, y)$ について次式が成り立つことを用いてもよい．ただし，閉曲線 A に関する積分経路は領域 B が進行方向の左手にくるようにとるものとする．

$$\int_A (Pdx + Qdy) = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

(2) 式 (a) の経路 **I** に沿った積分を $r = |z|$ の積分として表せ．

(3) 式 (a) の経路 **II** に沿った積分について，$R \to \infty$ とした場合の $\left|\int_{\mathbf{II}} e^{-z^2}dz\right|$ の極限値を求めよ．なお，$\cos(2\theta) \geq 1 - \dfrac{4}{\pi}\theta \left(0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}\right)$ の関係を用いてもよい．

(4) (2), (3) の結果および実関数の定積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$ を用いて実関数の定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \cos(x^2)dx$ を求めよ．

(大阪大 2024)　　(m20243503)

0.170 数値を求める問題は小数第 2 位まで，または有理数で解答すること．

(1) ある制御装置は 3 個の電子部品の故障が原因で 3 種類の誤動作を生じる．制御装置に実装されている 3 個の電子部品が故障する事象をそれぞれ A_1, A_2, A_3 とする．制御装置に発生する 3 種類の誤作動の事象をそれぞれ B_1, B_2, B_3 とする．また，電子部品の故障が原因で制御装置に誤作動が発生する確率は**表 1** のとおりである．事象 A_1, A_2, A_3 が起こる確率がそれぞれ p, q および $3p$ であるとき，以下の問いに答えよ．ただし，事象 A_1, A_2, A_3 は互いに排反な事象であり，他に制御装置の誤作動の原因はないとする．

(1-1) 制御装置の誤作動 B_1 の原因が電子部品の故障 A_1 である確率を p と q を用いて表せ.

(1-2) 制御装置の誤作動 B_2 の原因が電子部品の故障 A_2 である確率が 0.40 のとき，p および q を求めよ.

(1-3) (1-2) のとき，制御装置の誤作動 B_3 を起こす確率を求めよ.

表 1

		制御装置の誤作動		
		B_1	B_2	B_3
電子部品の故障	A_1	0.3	0.6	0.1
	A_2	0.7	0.2	0.1
	A_3	0.5	0.3	0.2

(2) **表 2** は，ある正規母集団から無作為に抽出したデータの度数分布表である.

(2-1) 母平均未知のとき，母分散の 95% 信頼区間を求めよ.

(2-2) 母平均が 20.5 と判明したとき，母分散の 95% 信頼区間を求めよ.

(2-3) 母分散が 1.44 と判明したとき，母平均の 95% 信頼区間を求めよ.

自由度 n，上側確率 α に対応した χ^2 分布のパーセント点を $\chi^2_n(\alpha)$ と表すものとして，以下の値を用いてよい.

$\chi^2_{15}(0.975) = 6.262,\quad \chi^2_{15}(0.950) = 7.261,$

$\chi^2_{15}(0.050) = 24.996,\quad \chi^2_{15}(0.025) = 27,488,$

$\chi^2_{16}(0.975) = 6.908,\quad \chi^2_{16}(0.950) = 7.962,$

$\chi^2_{16}(0.050) = 26.296,\quad \chi^2_{16}(0.025) = 28.845,$

標準正規分布 $N(0,1)$ の上側確率 β 点を z_β と表すものとして，以下の値を用いてよい.

$z_{0.050} = 1.645,\quad z_{0.025} = 1.960$

表 2

階級	度数
17.0 以上 18.0 未満	1
18.0〜19.0	1
19.0〜20.0	6
20.0〜21.0	4
21.0〜22.0	3
22.0〜23.0	1

(大阪大 2024)　　(m20243504)

0.171　a を実数とする．実数の組 (x,y) を変数とする関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_x^y \frac{1}{1+2a^2z^2}dz$$

と定める．条件 $x^2+y^2=1$ のもとでの $f(x,y)$ の最大値を $g(a)$ とする．以下の設問に答えよ.

(1) $g(0)$ を求めよ.

(2) $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，すべての実数 y に対して $\tan\left(\sqrt{2}\,f(0,y)\right) = y$ であることを示せ.

(3) すべての実数 a に対して $|ag(a)| < \dfrac{\pi}{2}$ かつ $\tan(ag(a)) = a$ であることを示せ.

(4) 部分積分と部分分数分解を用いて，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{g(a)}{a}da$ を求めよ.

(大阪大 2024)　　(m20243505)

0.172　m 次の正方行列 X に対して，行列 e^X を

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{k!} = I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots$$

と定める．ただし，I は m 次の単位行列，$0! = 1$，$X^0 = I$ であり，行列の級数の収束は，成分ごとの収束を意味するものとする．また，

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．以下の設問に答えよ，

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) 適当な正則行列 P によって行列 A を対角化せよ．

(3) n を自然数とする．A^n を求めよ．

(4) e^A を求めよ，

(大阪大 2024)　　(m20243506)

0.173 赤球 5 個，白球 5 個が入った箱 A と，赤球 3 個，白球 7 個が入った箱 B がある．箱 A と箱 B は，外見では区別できないものとする．2 つの箱のうち，1 つを無作為に選び，その箱から球を n 回，無作為に復元抽出する．このとき白球が出た回数を X とする．以下の設問に答えよ．

(1) $n = 2$ とする，$X = 2$ となる確率を求めよ．

(2) $n = 1$ とする，$X = 0$ であったとき，選んだ箱が A である条件付き確率を求めよ．

(3) $0 \leqq k \leqq n$ とする，$X = k$ であったとき，選んだ箱が A である条件付き確率を求めよ．

(4) $n = 2$ とする．箱を区別できる確率を求めよ．ただし，X の値を条件とする，選んだ箱が A である条件付き確率，または B である条件付き確率が 0.6 以上となる場合に，箱を区別できるものとする．

(大阪大 2024)　　(m20243507)

0.174 r を正の実数とする．関数 $f(x)$ は周期 2π の区分的に滑らかな連続関数とする．

各 $i = 0, 1, 2\cdots$，　$j = 1, 2, \cdots$ に対して，関数 $a_i(y)$，$b_j(y)$ は区間 $[0,\ r]$ で連続で，区間 $(0,\ r)$ で 2 回微分可能であるとする．実数 x と，区間 $(0,\ r]$ の点 y に対して，級数

$$u(x,y) = a_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n(y)\cos nx + b_n(y)\sin nx \Big) \tag{$*$}$$

に収束して，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{1}{y^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (-\infty < x < \infty,\ 0 < y < r) \\ u(x,r) = f(x) & (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

を満たすとする．ただし級数 $(*)$ は，実数 x を固定したとき，区間 $(0,r)$ で y について 2 回項別微分可能であり，区間 $(0,r)$ の点 y を固定したとき，x について 2 回項別微分可能であるとする．

また，実数 λ に対して，関数 $v(t)$ は，微分方程式

$$t^2\frac{d^2v}{dt^2} + t\frac{dv}{dt} - \lambda^2 v = 0 \quad (t > 0) \tag{$**$}$$

を満たすとする．以下の設問に答えよ．ただし，以下の事実 $(***)$ を証明なしに用いてよい．

事実 $(***)$ ：$\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$，$\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とする．すべての実数 x に対して

$$\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx + \beta_n\sin nx) = 0$$

が成立するならば，$\alpha_i = 0$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$，$\beta_j = 0$ $(j = 1, 2, \cdots)$ である．

(1) 関数 $w(s)$ を $w(s) = v(e^s)$ $(-\infty < s < \infty)$ と定めるとき，$w(s)$ が満たす微分方程式を導け．

(2) $(**)$ の一般解を求めよ．

(3) 区間 $[0, r]$ の点 y に対して，$a_i(y)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$，$b_j(y)$ $(j = 1, 2, \cdots)$ を関数 $f(x)$ を用いて表せ．

(4) 関数 $f(x)$ が，

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leqq x < \pi) \\ 2\pi - x & (\pi \leqq x < 2\pi) \end{cases}$$

を満たすとき，区間 $[0, r]$ の点 y に対して，$a_i(y)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$，$b_j(y)$ $(j = 1, 2, \cdots)$ を求めよ．

(大阪大 2024)　　(m20243508)

0.175 C を正の定数とする．関数

$$f(x) = \frac{C}{e^x + e^{-x}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

は，ある確率変数 X の確率密度関数であるとする．以下の設問に答えよ．

(1) 定数 C の値を求めよ．

(2) $e^z + e^{-z} = 0$ を満たす複素数 z をすべて求めよ．

(3) R を正の実数とする．複素平面上において，4 点 R, $R + \pi i$, $-R + \pi i$, $-R$ を頂点とする長方形の周を，反時計回りに 1 周する閉曲線を Γ とする．Γ に沿う積分

$$\int_\Gamma \frac{z^2}{e^z + e^{-z}}\, dz$$

の値を求めよ．

(4) 確率変数 X の分散を求めよ．

(大阪大 2024)　　(m20243509)

0.176 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で定める．次の問に答えよ．

(1) A の固有多項式を求めよ．

(2) A の固有値 λ は $-2 < \lambda < 2$ をみたすことを示せ．

(3) A の固有値を $2\cos\theta$ $(0 < \theta < \pi)$ の形で表示せよ．ただし，3 倍角の公式

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

を証明せずに用いてもよい．

(神戸大 2024)　　(m20243801)

0.177 n を正の整数とする．$\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 D_n を

$$D_n = \left\{ (x_1, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n \;\middle|\; x_1 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0,\ x_1 + \cdots + x_n \leq 1 \right\}$$

で定める．次の問に答えよ．

(1) 定積分

$$\iint_{D_2} x_1 x_2 \, dx_1 dx_2$$

を求めよ.

(2) 定積分

$$\iiint_{D_3} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq 3} x_i x_j \right) dx_1 dx_2 dx_3$$

を求めよ.

(神戸大 2024)　　(m20243802)

0.178 次の問に答えよ.

(1) a, b を実数とする. 常微分方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{a}{x}\frac{du}{dx} + \frac{b}{x^2}u = 0 \, , \qquad x > 1$$

の解 u に対して

$$v(t) = u(e^t) \, , \qquad t > 0$$

と定める. このとき, v は

$$\frac{d^2v}{dt^2} + (a-1)\frac{dv}{dt} + bv = 0 \, , \qquad t > 0$$

をみたすことを示せ.

(2) $\rho > 2$ とする. 常微分方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\rho+1}{x}\frac{du}{dx} + \frac{\rho-1}{x^2}u = 0 \, , \qquad x > 1$$

の一般解を求めよ.

(3) $\rho > 2, \ c > 0$ とする. 条件 $u(1) = c$ かつ

$$\int_1^{\infty} |u(x)|^2 \, x \, dx < \infty$$

をみたす (2) の常微分方程式の解を求めよ.

(神戸大 2024)　　(m20243803)

0.179 整数 $b_1, \ b_2, \ b_3$ に対して行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

で定める 次の問に答えよ.

(1) A のランクが 2 となるために $b_1, \ b_2, \ b_3$ がみたすべき必要十分条件を求めよ.

(2) x, y, z についての連立一次方程式

$$x + y + z = 0 \, , \qquad b_1 x + b_2 y + b_3 z = 0$$

の実数解をすべて求めよ.

(3) (2) の連立一次方程式の解で各成分が整数となるものをすべて求めよ.

(神戸大 2024)　　(m20243804)

0.180 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $\boldsymbol{A}$ を対角化する行列 $\boldsymbol{P}$ を求めよ．

(3) $\boldsymbol{A}^7 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ を求めよ．また，$a_{11} \times a_{12}$ を計算せよ．

(広島大 2024) (m20244101)

0.181 次の関数の第 n 次導関数を求めよ．ただし $a \neq 0$ とする．

$$\frac{1}{ax+1}$$

(広島大 2024) (m20244102)

0.182 領域 $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ について以下の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_S (x+y)^2 dxdy$$

(広島大 2024) (m20244103)

0.183 次の微分方程式を解け．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 2e^x \sin x$$

(広島大 2024) (m20244104)

0.184 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めよ．

(広島大 2024) (m20244105)

0.185 $x = \tan\theta \ \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $\theta = \tan^{-1} x$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 実数 $x > 0$ に対し，不等式

$$x - \frac{x^3}{3} < \tan^{-1} x < x$$

を示せ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$ を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \tan^{-1} \left(\frac{n}{n^2 + k^2}\right)$ を求めよ．

(広島大 2024) (m20244106)

0.186 実数 $a \geq -3$ に対し，行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -2 \\ -5 & -a & 5 \end{pmatrix}$$

により定める．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A が三つの異なる固有値を持つための a に対する条件を求めよ.

(3) a が (2) の条件を満たすとき, A の各固有値に対する固有ベクトルをそれぞれ一つずつ与えよ.

(4) $a = -1$ とする. $\{A^n \mathbf{v}\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するような $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ.

(広島大 2024) (m20244107)

0.187 2 変数関数 f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 - y^2)\log(x^2 + y^2) & \big((x,y) \neq (0,0)\big) \\ 0 & \big((x,y) = (0,0)\big) \end{cases}$$

により定める. 以下の問いに答えよ.

(1) $(x,y) \neq (0,0)$ における f の偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ および 2 階偏導関数 $f_{xy}(x,y)$ を求めよ.

(2) 2 階偏導関数 $f_{xy}(x,y)$ が $\mathbb{R}^2$ 上で連続であるか否かを, 理由とともに述べよ.

(3) $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \big|\ x > 0\big\}$ とおく. $f_x(x,y) = 0$ かつ $f_y(x,y) = 0$ となる D 内の点 (x,y) をすべて求めよ.

(広島大 2024) (m20244108)

0.188 $I = \big\{x \in \mathbb{R} \ \big|\ 0 \leq x < 1\big\}$ とする. 正の整数 n に対し, 連続関数 $f_n : I \to \mathbb{R}$ を

$$f_n(x) = \frac{1 - x^2}{1 - x^n}$$

により定める. 以下の問いに答えよ.

(1) 左極限 $\displaystyle\lim_{x \to 1-0} f_n(x)$ を求めよ.

(2) 任意の $x \in I$ および任意の正の整数 n に対して

$$\frac{1 - x^n}{1 - x} \geq n x^{n-1}$$

が成り立つことを示せ.

(3) 関数 $f : I \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

により定める. 任意の $x \in I$ および 任意の正の整数 n に対して

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| < \frac{2}{n}$$

が成り立つことを示せ.

(広島大 2024) (m20244109)

0.189 $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ x + 2y + 2z = 0 \right\}$$

の, 標準内積に関する正規直交基底を一組与えよ.

(広島大 2024) (m20244110)

0.190 行列

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

に対し，$B\mathbf{x} = \lambda C\mathbf{x}$ をみたす $\lambda \in \mathbb{R}$ および $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ の組をすべて求めよ．

(広島大 2024) (m20244111)

0.191 次の初期値問題について解答しなさい．

(1) 次の微分方程式の一般解を求めなさい．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-y^2}{x}}$$

(2) さらに，次の式を満足する上記 (1) で求めた一般解の特殊解を求めなさい．

$$y(0) = \frac{1}{2}$$

(山口大 2024) (m20244301)

0.192 以下に示す行列 A および B それぞれについて，固有値および固有ベクトルを求めなさい．なお，固有値は全て求め，固有ベクトルは絶対値が最も小さい固有値に対して 1 つ求めればよい．固有ベクトルの長さは 1 とする．

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 \\ 3 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(山口大 2024) (m20244302)

0.193 3 次元空間 (x, y, z) 上に 3 点 $\mathrm{A}(0, 3, 0)$，$\mathrm{B}(0, 0, 2)$，$\mathrm{C}(1, 0, 0)$ がある．以下の問いに解答しなさい．

(1) $\angle\mathrm{BCA}$ の角度を θ として，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ を求めなさい．

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S を求めなさい．

(3) 原点 $(0, 0, 0)$ から平面 ABC 上に引いた垂線の長さを求めなさい．

(山口大 2024) (m20244303)

0.194 $t \geq 0$ で発生するある事象の確率密度関数 $f(t)$ が以下の式で与えられる．以下の問いに解答しなさい．

$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$
λ ： 定数
e ： ネイピア数

(1) $t \leq t_1$ で事象が起きない確率（余事象）である $G(t_1)$ を式で示しなさい．

(2) $t \leq 10$ で事象が起きる確率が 0.5 のときの λ を求めなさい．但し，自然対数を ln で表わすときに $ln(2) = 0.693$ とする．

(山口大 2024) (m20244304)

0.195 $\mathbb{R} - \{0\}$ 上で定義された 2 つの関数 f, g を $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$，$g(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ とする．
このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(0) = 0$ と定義するとき，f は 0 で連続であることを ε-δ 論法を用いて証明せよ．

(2) 実数 a $(-1 \leqq a \leqq 1)$ に対して，$g(a_n) = a$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たし，0 に収束するような数列 $\{a_n\}$ が存在することを示せ．ただし，$\{a_n\}$ が 0 に収束することは ε-N 論法を用いて証明せよ．

(3) g は $g(0)$ をどのように定義しても，0 で連続とならないことを証明せよ．

(高知大 2024)　　(m20244501)

0.196 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 < x \leqq 1,\ x \leqq y \leqq \sqrt{3}x\right\}$ とし，$f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + y^2}$ とする．
このとき，次の問いに答えよ．

(1) D を図示せよ．

(2) D の内部から近づけた場合の次の極限を求めよ．

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$$

(3) 次の広義積分を求めよ．

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy$$

(高知大 2024)　　(m20244502)

0.197 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = a_2 = 0,\ a_3 = 1,\ a_{n+3} = -2a_{n+2} + a_{n+1} + 2a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ により定義する．
このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{x}_n = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ とおく．すべての正の整数 n に対して $\boldsymbol{x}_{n+1} = A\boldsymbol{x}_n$ を満たす 3 次正方行列 A を求めよ．

(2) (1) で求めた行列 A の固有値をすべて求めよ．さらに，それらに対応する固有ベクトルも求めよ．

(3) (1) で求めた行列 A を対角化せよ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(高知大 2024)　　(m20244503)

0.198 n 次元実数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ について，次のそれぞれの条件を満たす部分集合は線形部分空間となるか．線形部分空間となるときは証明し，ならないときは例を挙げてその理由を述べよ．

(1) $\left\{(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n) \;\middle|\; a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0\right\}$

(2) $\left\{(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n) \;\middle|\; a_1 a_2 \cdots a_n = 0\right\}$

(3) $\left\{(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n) \;\middle|\; |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = 1\right\}$

(4) $\left\{(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n) \;\middle|\; a_k = ka_1\ ,\ 1 \leqq k \leqq n\right\}$

(高知大 2024)　　(m20244504)

0.199 (i) 次の極限値を求めよ．ただし，$\sin^{-1} x$ の値域は $\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$，$\tan^{-1} x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin^{-1}(2x)}{\tan^{-1}(3x)}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+3}{x+5}\right)^x$

(ii) $f(x) = 3x + \sqrt{9 - x^2}$ $(-3 \leqq x \leqq 3)$ とする．

(a) $f'(x) = 0$ となる x の値を求めよ．

(b) $f(x)$ の最大値，最小値を求めよ．

(愛媛大 2024)　　(m20244601)

0.200 (i) 次の定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{(\sin^{-1} x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$　　(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^{2x}+1}dx$

(ii) 次の広義積分を求めよ．

$$\int_1^{\infty} x^2 e^{-2x}dx$$

(愛媛大 2024)　　(m20244602)

0.201 (i) $f(x,y) = x^2 + 4xy + 8y^4$ の極値を求めよ．

(ii) $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{x}\ \}$ とする．

(a) D を図示せよ．

(b) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{y^2+1}\,dxdy$ を求めよ．

(愛媛大 2024)　　(m20244603)

0.202 $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ a & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．ただし，a は実数とする．

(i) u_1, u_2, u_3 が 1 次独立，Au_1, Au_2, Au_3 が 1 次従属となるとき，a の値を求めよ．

(ii) $a = 2$ とする．

(a) A の固有値をすべて求めよ．

(b) (a) で求めた値のうち，絶対値が最大となる固有値の固有ベクトルをすべて求めよ．

(愛媛大 2024)　　(m20244604)

0.203 $\boldsymbol{R}^3$ を 3 次実列ベクトル全体とし，$\boldsymbol{o} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ とおく．また，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ に対し，

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$$

とおく．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) (i) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ は 1 次従属であることを示せ．

(ii) 以下の不等式が成立するすることを示せ．

$$(☆) \qquad ||\boldsymbol{a}|| \leq \max\{||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||,\ ||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||\}$$

ただし，必要であれば三角不等式

$$||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}|| \geq ||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|| \qquad (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^3)$$

を用いてよい．

(iii) 不等式 (☆) おいて等号が成立するための必要十分条件は $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ であることを示せ．

(2) 実数を成分とする 3 次正方行列 A および実数 λ, μ に対し，以下が成立するとする．

$$A\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}, \qquad A\boldsymbol{b} = \mu\boldsymbol{b}$$

(i) $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$ かつ $\lambda \neq \mu$ であるとき，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は 1 次独立であることを示せ.

(ii) $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$ かつ $\lambda = \mu$ であるとき，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は 1 次従属であるか. 1 次従属であればそのことを示し，そうでなければ反例をあげよ.

(愛媛大 2024)　　(m20244605)

0.204　a を実数とする．3 次実列ベクトル $\boldsymbol{x}$ を未知ベクトル，3 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a-1 \\ 0 & a-1 & -a^2+a \\ 1 & 1 & 2a^2-2 \end{bmatrix}$$

を係数行列とする二つの連立 1 次方程式

$$(\sharp) \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}, \qquad\qquad (\flat) \quad A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a+1 \\ 0 \\ 2a \end{bmatrix}$$

を考える．ただし，o は 3 次零ベクトルとする．以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{x}_0$ が $(\sharp)$ の解，$\boldsymbol{x}_1$ が $(\flat)$ の解であるとき，$\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1$ は $(\flat)$ の解であることを示せ.

(2) (i) 方程式 $(\sharp)$ は少なくともひとつの解をもつことを示せ.

(ii) A の行列式を求めよ.

(iii) $a = -1$ のとき，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ は $(\sharp)$ の解であることを示せ.

(iv) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ が $(\sharp)$ の解となるような a の値を求めよ.

(3) 方程式 $(\flat)$ を解け.

(愛媛大 2024)　　(m20244606)

0.205　a を $a > 1$ を満たす実数とし，曲線 $y = xe^{-x}$ を C，直線 $y = \dfrac{x}{a}$ を ℓ とおく．C と ℓ の交点のうち原点と異なる点の x 座標を t とし，ℓ と x 軸および直線 $x = t$ で囲まれた図形の面積を S とする．また C と ℓ で囲まれた図形の面積を T とする．以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $y = xe^{-x}$ の増減，極値を調べ，曲線 C の概形を描け.

(2) t および S を a を用いて表せ.

(3) 不定積分 $\displaystyle\int xe^{-x}dx$ を求めよ.

(4) T を a を用いて表せ.

(5) a を $a > 1$ の範囲で変化させたときの $S - T$ の最大値を求めよ.

(愛媛大 2024)　　(m20244607)

0.206　$f(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ とおく.

(i) 自然数 n に対し，$f(x)$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

(ii) $f(x)$ のマクローリン展開（$x = 0$ におけるテーラー展開）を求めよ．なお，収束性の議論を行う必要はない.

(愛媛大 2024)　　(m20244608)

0.207 定積分

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

の値を，$\sqrt{x^2 - x + 1} = t - x$ と置換することにより求めよう．

(i) x および $\sqrt{x^2 - x + 1}$ を t を用いて表せ．

(ii) x を t の関数と考え，導関数 $\dfrac{dx}{dt}$ を求めよ．

(iii) 定積分 I の値を求めよ．

(愛媛大 2024)　　(m20244609)

0.208 a を正の実定数とし，行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) $a = 4$ のとき，A を対角化せよ．すなわち，$P^{-1}AP = B$ なるような正則行列 P と対角行列 B を求めよ．

(3) A が対角化可能でないような a の値をすべて求めよ．

(九州大 2024)　　(m20244701)

0.209 以下の $y(x)$ の関する微分方程式の一般解を求めよ．ただし，解は左辺を y として記述せよ．
なお，y' は $y(x)$ の x に関する 1 階導関数を表す．

(1) $y' - 2xy - 4x = 0$

(2) $y' - 2y - 4x = 0$

(3) $xy' - 2y - 4x = 0$

(九州大 2024)　　(m20244702)

0.210 直交座標系において，x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が

$$\boldsymbol{A} = 4zx\boldsymbol{i} - yz\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$$

により与えられる．また，立体 V が

$$V\ :\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$$

により与えられ，S は V を取り囲む閉曲面，S_1 は S のうち $z = 0$ の部分とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ および $\nabla \times\ \boldsymbol{A}$ を求めよ．

(2) 面積分 $\displaystyle\int_{S_1} \boldsymbol{A} \cdot ndS$ を求めよ．ただし，n は z 成分を負とする S_1 の単位法線ベクトルである．

(3) 面積分 $\displaystyle\int_{S} \boldsymbol{A} \cdot ndS$ を求めよ．ただし，n は S の外向き単位法線ベクトルである．

(九州大 2024)　　(m20244703)

0.211 平均を μ, 標準偏差を σ とする正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ に従う確率変数 X がある．X を標準化した確率変数 $Z = (X-\mu)/\sigma$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．別紙の表 1 に示す標準正規分布表を参照しながら，以下の問いに答えよ．【注】「別紙の表 1 標準正規分布表」は省略しました．

(1) 確率 $P(0.55 \leqq Z \leqq 0.81)$ を求めよ．

(2) 確率 $P(X \leqq \mu + 1.65\sigma)$ および確率 $P(X \leqq \mu + 2.33\sigma)$ を求めよ．

糸島で釣れるアジの全長 (単位 cm) は正規分布 $N(20,\ 3^2)$ に従うことが知られている．今年，ある少年が糸島でアジを釣り，無作為に 9 尾を抽出し全長を測ったところ，それらの平均が 23 cm であった．この少年は「今年のアジの全長は例年よりも長くなっている」と主張している．

(3) 少年の主張に沿った帰無仮説 H_0 と対立仮設 H_1 を立てよ．

(4) 少年の主張を有意水準 5 % で検定せよ．

(九州大 2024)　　(m20244704)

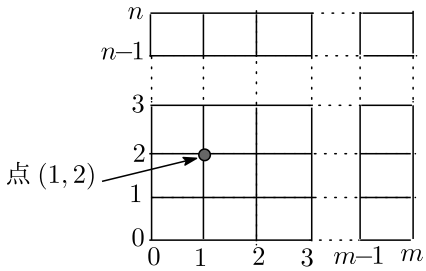
0.212 　非負整数 m, n に対し，図は $m+1$ 本の縦方向の道路と $n+1$ 本の横方向の道路から構成される地図を表わしている．これらの道路の交点はすべて交差点である．各交差点は，横方向と縦方向の座標を用いて表わされるとする．例えば，図の黒丸は点 $(1,2)$ である．また，横方向の道路は右方向だけ，縦方向の道路は上方向だけに通過可能である． このとき，点 $(0,0)$ から点 (m,n) への経路の総数を $A(m,n)$ で表す．ただし，$A(0,0)=1$ と定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $A(0,1)$ と $A(2,3)$ をそれぞれ求めよ．

(2) $A(m,n)$ を求めよ．

(3) 交差点 (a,b) と $(a+1,b+1)$ を直結し右上方向だけに通過可能である道路が 1 時的に追加されたとする． このとき，点 $(0,0)$ から点 (m,n) への経路の総数を A を用いて表せ． ただし，$0<a<m,\ 0<b<n$ とする．

(4) n を偶数とする．さらに，c を $0<c<m$ を満たすある整数とし，d_j を $d_j = 2j-1\ \ (j=1,\ \cdots,\ n/2)$ とする．このときのすべての点 $(c,\ d_j)$ が通過不能になったとする，このとき，点 $(0,0)$ から点 (m,n) への経路の総数を A を用いて表せ．



(九州大 2024)　　(m20244705)

0.213 n を自然数とし, n 次の実交代行列 A によって定まる関数 $\beta_A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{y} \quad (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n)$ と，β_A に関する次の性質 $(*)$ を考える．

$(*)$ 任意の $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\beta_A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

ここで T は行列の転置を表し，A が n 次の実交代行列であるとは，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ かつ $A^T = -A$ を満たすことである．以下の問いに答えよ．

(1) 実交代行列 $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対する関数 β_{A_1}，β_{A_2} がそれぞれ性質 $(*)$ を満たすか答えよ．

(2) 関数 β_A が性質 $(*)$ を満たすことと行列 A のすべての行ベクトルが一次独立であることが同値であることを示せ.

(3) 関数 β_A が性質 $(*)$ を満たすとき，行列 A の次数 n は偶数であることを示せ.

(九州大 2024)　　(m20244706)

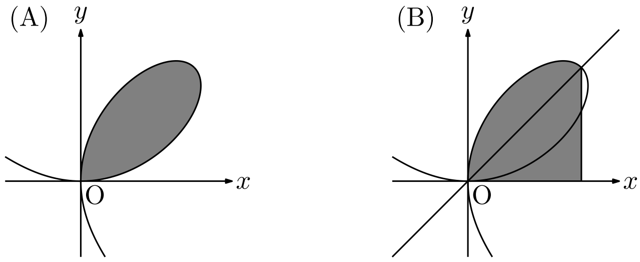
0.214 $a > 0$, $f(x,y) = x^3 - axy + y^3$ とする．xy 平面上の曲線 C : $f(x,y) = 0$ に囲まれた部分（図 A で塗りつぶされた領域）の面積を求めるため，以下の各問に答えよ.

(1) 関係式 $y = tx$ をみたす媒介変数 t（ただし $t \neq -1$ とする）を用いて，曲線 C 上の任意の点 $(x_C,\ y_C)$ を媒介変数表示せよ.

(2) 上記 (1) の $x_C(t)$ について，$t < -1$ の部分と $t > -1$ の部分に分けて増減表をかけ．増減表には $t \to \pm\ \infty$ および $t \to -1 \pm\ 0$ の情報も含めよ.

(3) 図 B には曲線 C と直線 $y = x$, およびそれらの交点 (2 点のうち原点でない方）から x 軸に下した垂線が描かれている．図 B で塗りつぶされた領域の面積を求めよ.

(4) 図 A で塗りつぶされた領域の面積を求めよ.



(九州大 2024)　　(m20244707)

0.215 直交座標 (x,y) 上の関数

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

が領域 $D = \{(x,y)\ :\ 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 2x\}$ で定義されている．以下の各問に答えよ.

(1) 領域 D を図示せよ.

(2) D 中の点 (x,y) を r を動径，θ を位相角とする平面極座標で表したとき，領域 D 内の点 (r,θ) が満たすべき条件を答えよ.

(3) $f(x,y)$ の領域 D での積分を求めよ.

(九州大 2024)　　(m20244708)

0.216 それぞれの設問において y を実数 x について微分せよ.

(1) $y = x(3x+4)(2x^3-5x+1)$

(2) $y = \dfrac{\log x}{x-1}$

(3) $y = e^{-2x}\sin x$

(佐賀大 2024)　　(m20244901)

0.217 $y = \sqrt{3}x^2$ と $y = \sqrt{3}x$ で囲まれた部分を $y = \sqrt{3}x$ の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ.

(佐賀大 2024)　　(m20244902)

0.218 3 次元の数ベクトル空間から，2 次元の数ベクトル空間への線形写像 f が次のように与えられる．

$$f\ :\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} x+y \\ 2y-x \end{bmatrix}$$

線形写像 f を行列をもちいて表現せよ．

(佐賀大 2024)　　(m20244903)

0.219 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}=6x$　の一般解を求めよ．

(佐賀大 2024)　　(m20244904)

0.220 $f(x,y)=\cos x+2\sin 2y$ で与えられるとき，$-\dfrac{\pi}{2}\leq x<\dfrac{\pi}{2}$，$0\leq y<\pi$ における $f(x,y)$ の極値を以下の手順で求めよ．

(1) $f(x,y)$ の 1 階偏微分 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$，および 2 階偏微分 $f_{xx}(x,y)$，$f_{yy}(x,y)$，$f_{xy}(x,y)$，$f_{yx}(x,y)$ を求めよ．

(2) $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ となる，a,b の値を求めよ．

(3) ヘッセの行列式

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix}$$

を計算せよ．

(4) 次の定理を用いて，$f(x,y)$ の極値を求めよ．.

定理（極値の十分条件）

$f(x,y)$ は点 (a,b) の近傍で C^2 級で，$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ とする．このとき，次が成り立つ．

① $H(a,b)>0$ かつ $f_{xx}(a,b)>0$ ならば，$f(x,y)$ は点 (a,b) で狭義の極小値 $f(a,b)$ をとる．

② $H(a,b)>0$ かつ $f_{xx}(a,b)<0$ ならば，$f(x,y)$ は点 (a,b) で狭義の極大値 $f(a,b)$ をとる．

③ $H(a,b)<0$ ならば $f(x,y)$ は点 (a,b) で極値をとらない．

(佐賀大 2024)　　(m20244905)

0.221 累次積分

$$\int_0^1\left(\int_y^{2-y}x^2dx\right)dy$$

に関する以下の問いに答えよ．

(1) 積分領域を図示せよ．

(2) 積分順序を交換せよ．

(3) (2) の結果を計算して，累次積分の値を求めよ．

(佐賀大 2024)　　(m20244906)

0.222 以下の微分方程式の解 $x(t)$ を求めよ．

(1) $x''(t)+3x'(t)+2x(t)=0,\ x(0)=0,\ x'(0)=1$

(2) $x''(t)+4x'(t)+5x(t)=0,\ x(0)=1,\ x'(0)=0$

(佐賀大 2024)　　(m20244907)

0.223 次の行列 $A,\ B$ について以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) AB を求めよ.

(2) BA を求めよ.

(3) ${}^tA + 2B$ を求めよ. ${}^tA$ は行列 A の転置行列を意味する.

(佐賀大 2024) (m20244908)

0.224 次の等式を満たす x を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

(佐賀大 2024) (m20244909)

0.225 次の同次連立 1 次方程式の解を求めよ.

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(佐賀大 2024) (m20244910)

0.226 次の行列が対角化可能であるかどうか調べ, 対角化可能であれば, 正則行列 P を求めて対角化せよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2024) (m20244911)

0.227 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+9n-9} - \sqrt{n^2+4n-4}\right\}$ を求めよ.

(佐賀大 2024) (m20244912)

0.228 関数 $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ の $x = 1$ におけるテイラー級数を求めよ.

(佐賀大 2024) (m20244913)

0.229 $f(x,y) = 6x^2y + 6xy^2 - 12xy$ とするとき, $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(佐賀大 2024) (m20244914)

0.230 次の積分を求めよ, ただし, $\tan^{-1}(x)$ は $\tan(x)$ の逆関数である.

(1) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{1-\cos^2(x)}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \tan^{-1}(x)dx$

(佐賀大 2024) (m20244915)

0.231 $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2+y^2 \leq 2,\ y \geq 0\right\}$ とするとき, $\displaystyle\iint_D y\,dxdy$ を求めよ.

(佐賀大 2024) (m20244916)

0.232 次の行列 $A,\ B$ の列ベクトル $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A は固有値 1 をもつ．1 以外の固有値をすべて求めよ．また，固有値 1 に対応する固有ベクトルをひとつ求めよ．

(2) 行列 A が対角化可能か否かを示し，もし対角化可能であれば $P\Lambda = AP$ となる正則行列 P と対角行列 Λ の組を 1 つ求めよ．

(3) 行列 A について，逆行列 A^{-1} と行列式 $\det(A)$ をそれぞれ求めよ．

(4) 行列 B について，行列式 $\det(B)$ を求めよ．

(5) 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(6) 外積 $\boldsymbol{b} \times \ \boldsymbol{c}$ を求めよ．そして，$\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} \times \ \boldsymbol{c}$ が線形独立（一次独立）であるか，または線形従属（一次従属）であるか，理由を含めて答えよ．

(佐賀大 2024)　　(m20244917)

0.233 次の関数 y の導関数 dy/dx を求めなさい．

(1) $y = x^2 + 5$　(2) $y = \cos 2x + \sin x$　(3) $y = e^{\sin x^2}$

(4) $y = \sqrt{2x+1}$　(5) $y = (\log x)^3$　(6) $y = \dfrac{x^3 + x}{x^2 + 2}$

(佐賀大 2024)　　(m20244918)

0.234 次の関数 f の偏導関数 $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ を求めなさい．

(1) $f = xy^2 + 2z$　(2) $f = \dfrac{\sin y}{\cos x}$

(佐賀大 2024)　　(m20244919)

0.235 次の不定積分を求めなさい．積分定数を C とする．

(1) $\displaystyle\int (3\cos x + x^4)dx$　(2) $\displaystyle\int \sin^2 x\, dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-5)(x-3)}dx$　(4) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$

(佐賀大 2024)　　(m20244920)

0.236 次の微分方程式の一般解を求めなさい．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = -2y$　(2) $xy\dfrac{dy}{dx} = y^2 + x^2$

(佐賀大 2024)　　(m20244921)

0.237 $y = x^2$ で表される曲線を y 軸のまわりに 1 回転して得られる容器に，水面の高さが H cm になるまで水を満たした．座標の単位を cm とする．

(1) 容器に入れた水の体積を求めなさい．

(2) 容器の底に穴をあけると，水は水面の高さ h cm に比例した速度 $ah\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{sec}$（$a$: 比例定数 $\mathrm{cm}^2/\mathrm{sec}$ ）で流れ落ちた 高さが $0.2H$ になるのにかかる時間 t を求めなさい．

(佐賀大 2024)　　(m20244922)

0.238 連立一次方程式 $\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 20 \\ 3x \ + y \ - z = 13 \\ x + 2y + 3z = -9 \end{cases}$ を掃き出し法で解きなさい．

(佐賀大 2024)　　(m20244923)

0.239 行列 $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ について以下の問に答えなさい．

(1) 行列 A の全ての固有値を求めなさい．

(2) (1) で求めた固有値のそれぞれの固有ベクトルを求めなさい.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P とその逆行列 P^{-1} を求めなさい.

(4) (3) で求めた P と P^{-1} を用いて，対角行列 $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(佐賀大 2024)　　(m20244924)

0.240 全微分可能な関数 $z = f(x, y) = (4 - x^2 - y^2)^{1/2}$ について以下の問に答えなさい.

(1) z の全微分を求めなさい.

(2) 点 $A_0(1,\ 2^{1/2})$ における z の全微分を求めなさい.

(3) 曲面 $z = f(x, y)$ 上の点 $A_0(1,\ 2^{1/2})$ における接平面の方程式を求めなさい.

(4) z 上の点 (x, y) における ∇f とその方向を求めなさい．ただし，∇ は微分演算子である．なお，図を用いて説明しても良い.

(5) z 上の点 (x, y) における傾きの最大値を与える式を求めなさい.

(佐賀大 2024)　　(m20244925)

0.241 底に小さな穴の開いた容器に水が x cm^3 入っているとき，水の深さ h は $h = \sqrt[3]{x^2}$ cm で，そのとき穴から毎秒 $\dfrac{\sqrt{h}}{4}$ cm^3 の水が流出する．毎秒 2 cm^3 の水を容器内に注ぐと，水の深さが 16 cm のとき，水面は毎秒何 cm 変化するか．なお，上昇もしくは下降についても明示するとともに，解答の途中経過も十分に記載すること。

(佐賀大 2024)　　(m20244926)

0.242 次の関数を微分せよ.

(a) $\tan(x^2 + 1)$　　　(b) $a^x \quad (a > 0)$

(佐賀大 2024)　　(m20244927)

0.243 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} \qquad (n \text{ は自然数})$$

(佐賀大 2024)　　(m20244928)

0.244 x が小さいとき，次の式を x の 3 次まで展開せよ.

$$\log(1 + \sin x)$$

(佐賀大 2024)　　(m20244929)

0.245 次の積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int_1^2 x^2 \log x \, dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx$

(c) $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2) \, dxdy \qquad (D \ : \ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \leqq 1)$

(佐賀大 2024)　　(m20244930)

0.246 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2024)　　(m20244931)

0.247 次の連立 1 次方程式を掃き出し法（消去法）を用いて解け．

$$\begin{cases} 2x+y\ -z=4 \\ \ x+y\ +z=3 \\ 3x+y-3z=5 \end{cases}$$

(佐賀大 2024) (m20244932)

0.248 $A=\begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(熊本大 2024) (m20245201)

0.249 平面運動をする点 $\mathrm{P}(x,y)$ の速度ベクトル $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ が $(-y,\ x)$ に等しく，かつ点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$ を通過する．この点 P の軌跡を求めよ．

(熊本大 2024) (m20245202)

0.250 以下の問いに答えなさい．ただし，$x>0$ である．

(1) 曲線 $y=x(1-\ln x)$ の増減，凹凸を調べて増減表を書き，グラフの概形を図示しなさい．

(2) (1) の曲線と，x 軸と，$x=c$ によって囲まれる図形の面積 $S(c)$ を求めなさい．ただし，$0<c<e$ とする．

(3) $\displaystyle\lim_{c\to+0} S(c)$ を求めなさい．

(熊本大 2024) (m20245203)

0.251 k を実数の定数とする．連立一次方程式

$$\begin{cases} x & +y & -2z & = & 0 \\ 2x & -y & +z & = & 0 \\ 5x & -4y & +kz & = & 0 \end{cases} \qquad \cdots\ (*)$$

について，次の各問に答えよ．

(1) $(*)$ を，行列 A を用いて $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ と表したときの A を求めよ．ただし，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{0}$ はベクトルであり，

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ とする．

(2) (1) で求めた行列 A に対して，行列式 $|A|$ の値を求めよ．

(3) $(*)$ が自明解 $x=y=z=0$ の他にも解をもつような k の値を求めよ．

(4) (3) で求めた k の値に対する $(*)$ の解を，すべて求めよ．

(宮崎大 2024) (m20245301)

0.252 2 変数関数 $f(x,y)=e^{2x}\sin(2y)$ の 2 階までの偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$，$f_{xx}(x,y)$，$f_{xy}(x,y)$，$f_{yy}(x,y)$ をすべて求めよ．

(宮崎大 2024) (m20245302)

0.253 重積分 $I=\displaystyle\iint_D (x+y)\,dxdy$，$D=\{(x,y)\mid y\leqq 2x,\ 2y\geqq x,\ x+y\leqq 3$ について考える．

(a) 領域 D を座標平面に図示せよ．

(b) 累次積分 $J=\displaystyle\int_0^1\left\{\int_{\frac{1}{2}x}^{2x}(x+y)\,dy\right\}dx$ の値を求めよ．

(c) 重積分 I の値を求めよ．

(宮崎大 2024)　　(m20245303)

0.254 次の各問に答えよ．

(1) 微分方程式 $2\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}-y=0\ \cdots\ (*)$ の一般解 $y=y(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $y=(ax+b)e^{2x}$ が微分方程式 $2\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}-y=25xe^{2x}\ \cdots\ (**)$ の特殊解となるように，定数 $a,\ b$ の値を定めよ．

(3) 微分方程式 $(**)$ の一般解 $y=y(x)$ を求めよ．

(宮崎大 2024)　　(m20245304)

0.255 次の各問に答えよ．

(1) 確率変数 X とその確率 $P(X)$ が，次の表で与えられるものであるとする．

X	1	2	3	4
$P(X)$	0.1	0.2	0.3	0.4

このとき，確率変数 X について，平均 $E(X)$，二乗の平均 $E(X^2)$ および分散 $V(X)$ を求めよ．

(2) K を定数とし，ある連続的な確率変数の確率密度関数 $f(x)$ が，

$$f(x)=\begin{cases} Kx & (0\leqq x\leqq 1) \\ K(2-x) & (1<x\leqq 2) \\ 0 & (x<0\ \text{または}\ 2<x) \end{cases}$$

であるとする．このとき，K の値を求めよ．

(宮崎大 2024)　　(m20245305)

0.256 以下の微分を計算せよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^{ax}\sin bx}{x}\right)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\dfrac{x}{a}\right)\quad (a\neq 0)$

(鹿児島大 2024)　　(m20245401)

0.257 次の不定積分，定積分を 計算せよ．

(3) $\displaystyle\int x\sin x\cos x\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$

(鹿児島大 2024)　　(m20245402)

0.258 以下の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $(x^2-1)\,dy=2y\,dx$　　(2) $x\dfrac{dy}{dx}=y+x\cos^2\dfrac{y}{x}$　　(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+10y=\sin 2x$

(鹿児島大 2024)　　(m20245403)

0.259 3 次元の直交座標系 O-xyz において，点 A$(2,1,-3)$，点 B$(3,-2,-1)$ がある．ただし，点 O は xyz 座標系の原点 $(0,0,0)$ である．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角度 θ を求めよ．

(2) $\triangle$OAB の面積 S を求めよ．

(鹿児島大 2024)　　(m20245404)

0.260 次の行列 A がある．以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2) 以下の式を満足する x と y を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \end{pmatrix}$$

(3) 行列 A の固有値を求めよ.

(鹿児島大 2024)　　(m20245405)

0.261 $f(x) = e^{-ax}(\sin ax + \cos ax) + (\log_e x)^3$ とする. $\dfrac{df(x)}{dx}$ を求めなさい. ここで, a は定数である.

(鹿児島大 2024)　　(m20245406)

0.262 不定積分 $\displaystyle\int x \log_e x dx$ を求めなさい;

(鹿児島大 2024)　　(m20245407)

0.263 点 O を原点とする直交座標系の 2 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\mathrm{Q}(a, b)$ について, 以下の問いに答えなさい.

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が直交し, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| = 2$ のとき, a および b の値を求めなさい.

(2) 点 R が $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たすものとする. ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角が $\dfrac{\pi}{3}$ rad で $\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| = 3$ のとき, 三角形 OPR の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2024)　　(m20245408)

0.264 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & a \end{pmatrix}$ の行列式が a^2 となる a の値を求めなさい

(鹿児島大 2024)　　(m20245409)

0.265 行列 $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(鹿児島大 2024)　　(m20245410)

0.266 点 O を原点とする直交座標系の曲線 $x^3 - 4x - y = 0$ について, 以下の問いに答えなさい.

(1) 曲線上の $x = 1$ の点における接線の式を示して, 曲線と接線を解答用紙の図 1 に描きなさい.

(2) 曲線上の $x = 1$ の点における接線と曲線で囲まれる領域の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2024)　　(m20245411)

0.267 微分を用いて, 次の関数の増減, 凹凸および変曲点を求めて増減表に記入し, グラフの概形を描け.

$y = x^3 - 3x^2 + 5$

(香川大 2024)　　(m20245701)

0.268 次の ①, ② の関数の定積分をそれぞれ求めよ.

① $\displaystyle\int_0^1 (1+x)\sqrt{1-x}\, dx$　　② $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}\, dx$

(香川大 2024)　　(m20245702)

0.269 以下の関数 f の領域 D における重積分を求めよ.

$f(x, y) = \sin(x + y)$　　$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$

(香川大 2024)　　(m20245703)

0.270 逆行列を利用して次の連立方程式を解け．x, y の解の算出に至る行列計算と式展開および係数の作る行列の逆行列を必ず記述のこと．

$$\begin{cases} 9x - 8y = 6 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$$

(香川大 2024)　　(m20245704)

0.271 以下の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

(香川大 2024)　　(m20245705)

0.272 以下の問いに答えよ．

(1) 次の行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式を求めよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$$

(2) 次の行列 $\boldsymbol{B}$ が対角化可能か調べ，可能ならば対角化した行列を求めよ．

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

(3) 次の行列 $\boldsymbol{C}$ の逆行列を求めよ．

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(東京都立大 2024)　　(m20245901)

0.273 連続確率変数 X は以下の確率密度関数に従うとする．

$$f_X(x) = \begin{cases} A(1 + x^2) & (-1 < x < 1) \\ 0 & (\text{上記以外}) \end{cases}$$

ただし，A は正の定数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f_X(x)$ が確率密度関数になるように定数 A を定めよ．

(2) X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ．

(3) X の累積分布関数 $F_X(x)$ を求めよ．

(東京都立大 2024)　　(m20245902)

0.274 ストークスの定理においては，閉曲線 C を境界にもつ曲面 S 上のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ に対して次式が成り立つ．ただし，S 上の正の向きの法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とし，閉曲線 C 上の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする．また，右辺の線積分は C 上を反時計まわりの方向に積分する．

$$\iint_S \mathrm{rot}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

ストークスの定理の特別な場合として 2 次元平面においてはグリーンの定理が成り立つ．xy 平面上に単純閉曲線 C で囲まれた領域 D の 2 つのスカラー場 $f(x, y)$ と $g(x, y)$ に対して次式で表される．ただし，右辺の線積分の向きはストークスの定理と同様である．

$$\iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy = \int_C (fdx + gdy)$$

これらの定理を必要に応じて用い，以下の問いに答えよ．

(1) 次の線積分を求めよ.

$$\int_C \{(x^2-2xy)dx+(x^2y+3)dy\} \quad (D\ :\ 0 \leq x \leq 2,\ \ 0 \leq y,\ \ y^2 \leq 8x)$$

(2) 曲面 $z = 4 - x^2 - y^2$ の $z \geq 0$ の部分を S とし，法線ベクトルは z 軸に沿って上向きにとる. x, y, z 軸上で正の向きをもつ単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ で表す．次のベクトル場

$$\boldsymbol{F} = (x^2+y-4)\boldsymbol{i} + 3xy^2\boldsymbol{j} + (2xz+z^2)\boldsymbol{k}$$

に対して

$$\iint_S \mathrm{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

を求めよ.

(東京都立大 2024)　　(m20245903)

0.275 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\log_e(1+x^2)\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^3+18}{x^2-x-6}\,dx$

(東京都立大 2024)　　(m20245904)

0.276 微分方程式

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + 3\frac{dy(x)}{dx} + 2y(x) = 2x^2+1$$

について考える，以下の問いに答えよ.

(1) 上の微分方程式の解 $y(x)$ のうち x の多項式で表されるものを求めよ．また，x の多項式で表される解はただひとつ存在することを証明せよ.

(2) 解 $y(x)$ を任意の関数形として，上の微分方程式と次の条件を満たす解を求めよ.

$$y(0) = 2, \qquad \frac{dy(0)}{dx} = 3$$

(東京都立大 2024)　　(m20245905)

0.277 第 1 象限内の定点 A(a, b) を通る直線が，x 軸，y 軸の正の部分とそれぞれ点 P, Q で交わるとする.

(1) この直線と x 軸の成す角を $\theta\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ としたとき，線分 PQ の長さを θ，a，b を用いて表せ.

(2) PQ の長さの最小値とそれを与える θ を求めよ.

(東京都立大 2024)　　(m20245906)

0.278 次の等式を示せ．ただし，$\cos^{-1}x$ と $\sin^{-1}x$ の値域はそれぞれ $[0,\ \pi]$ と $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ とする.

$$\cos^{-1}x + \sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

(滋賀県立大 2024)　　(m20246001)

0.279 $D = \{(x,y) \mid y \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$ とするとき，次の二重積分を求めよ.

$$\iint_D e^{x^2}dxdy$$

(滋賀県立大 2024)　　(m20246002)

0.280 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 2 & a & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) A の階数 (rank A) を求めよ.

(滋賀県立大 2024) (m20246003)

0.281 行列 $\boldsymbol{A}$ を以下とする.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

また，実数 x および y による点 (x, y) の集合 P が次式をみたすものとする.

$$(x+1)^2 + y^2 = 4$$

このとき，次のように，x および y によるベクトルに対し，$\boldsymbol{A}$ の 7 乗としての行列 $\boldsymbol{A}^7$ を乗じて得られる点 (x', y') の集合 P' を表す式を求めなさい.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^7 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(宇都宮大 2024) (m20246101)

0.282 $f(x) = x^2 - 5$ のとき，Newton 法（Newton-Raphson 法）を用いて $f(x) = 0$ を満たす x の値を求めなさい．なお，x の初期値 x_0 は 2 として，真値 2.236 に対する絶対誤差が 0.001 以下となるまで計算しなさい．計算途中及び計算結果で用いる値は，小数点第 4 位を四捨五入して小数点第 3 位で表すこと.

(宇都宮大 2024) (m20246102)

0.283 ある実験では，摂取カロリーを制限した場合，体重 W の 1 日あたりの減量は体重に比例するという結果が得られた．次の問いに答えなさい.

(1) 時間を t，比例定数を $k(>0)$ として，W と t の関係を微分方程式で表しなさい.

(2) (1) で答えた微分方程式の一般解を求めなさい.

(3) 実験開始時に体重が 80 kg であった人が 30 日後に 70 kg になっていた．このまま実験を続けた場合，60 kg 以下になるのは実験開始から何日後と予想されるか.
ただし，$\log 2 = 0.69$，$\log 3 = 1.10$，$\log 5 = 1.61$，$\log 7 = 1.95$ として計算しなさい.

(宇都宮大 2024) (m20246103)

0.284 実数関数

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{r}) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 10x + 6y - 3$$

について，以下の問いに答えよ．ただし，${}^t\boldsymbol{r}$ は，$\boldsymbol{r}$ の転置を表す.

問 1 $f(\boldsymbol{r}) = {}^t\boldsymbol{r}A\boldsymbol{r} + {}^t\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{r} + c$ を満たす対称行列 A，定数を成分とするベクトル $\boldsymbol{b}$，および定数 c をそれぞれ求めよ.

問 2 行列 P は非対称で，${}^tPP = I$（I は 2 次の単位行列）を満たすとする．このとき行列 A を対角化する行列 P を求めよ．さらにこの行列 P を用いて $\boldsymbol{r}$ を

$$\boldsymbol{r} = P\boldsymbol{R}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

と変換する．このときの $f(P\boldsymbol{R})$ を X と Y で表せ．

問 3 $f(\boldsymbol{r}) = 0$ で表される曲線を C とする．曲線 C の概形を x, y 平面上に描け．

問 4 曲線 C で囲まれた領域の面積を求めよ．

(はこだて未来大 2024)　　(m20246301)

0.285 $0 \leq x \leq 1$ における曲線

$$y = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

について以下の問いに答えよ．

問 1 この曲線の概形を座標平面上に描け．

問 2 この曲線の長さを求めよ．

問 3 この曲線と x 軸，および y 軸で囲まれた領域の面積を求めよ．

(はこだて未来大 2024)　　(m20246302)

0.286 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix}$ を計算せよ．

(東京海洋大 2024)　　(m20246401)

0.287 定数 a, b について場合分けして，連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x \phantom{{}+y} + z = 1 \\ x + y = b \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

を解け．

(東京海洋大 2024)　　(m20246402)

0.288 $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，$B = P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P と対角行列 B を求めよ．

(東京海洋大 2024)　　(m20246403)

0.289 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)^2(x-3)}dx$ を計算せよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{x\sqrt{2\log x - (\log x)^2}}dx$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2024)　　(m20246404)

0.290 関数 $f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x + 12y$ の極値を求めよ．

(東京海洋大 2024)　　(m20246405)

0.291 (1) $D=\{(x,y) \mid\ x^2 \leqq y \leqq -2x\}$ に対し，重積分
$\displaystyle\iint_D (1+2x+y)^3 dxdy$ の値を求めよ．

(2) $E=\{(x,y) \mid\ 0 \leqq x+y \leqq 1,\ -\pi \leqq x-y \leqq \pi\}$ に対し，重積分
$\displaystyle\iint_E (x-y)\sin(x^2-y^2)dxdy$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2024)　　(m20246406)

0.292 行列 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ について，次の問 1～問 3 に答えよ．

問 1 固有値を求めよ．

問 2 固有ベクトルは

$$\lambda\begin{bmatrix} x \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (\lambda \neq 0)$$

である．x を求めよ．

問 3 行列

$$P=\begin{bmatrix} 1 & a \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

は正則で,

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

が成り立つ．a を求めよ．

(和歌山大 2024)　　(m20246501)

0.293 次の問 1～問 3 にの積分を求めよ．

問 1 $\displaystyle I_1=\int_0^\infty e^{-x^2}xdx$

問 2 $\displaystyle I_2=\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

問 3 $\displaystyle I_3=\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}xdx$

(和歌山大 2024)　　(m20246502)