[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　α

0.1　以下の設問に答えよ．途中の計算手順を詳しく記述すること．

(1)　$w = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0,\ z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$
$\alpha_k = a_k + ib_k\ (k = 0, 1, \cdots, n)$　とするとき，w の実部 $Re(w)$ および $Im(w)$ を求めよ．

(2)　$f(z) = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}\ \ (z = x + iy)$　が正則か否かを調べよ．

(3)　次の式を証明せよ．

$$\frac{d}{dz}\sin^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

(北海道大 2011)　　(m20110103)

0.2　xyz 空間に 2 つの平面

$\alpha\ :\ x + 3y - 2z + 1 = 0$

$\beta\ :\ 2x - y + 3z - 2 = 0$

があるとき，次の問いに答えなさい．

(1)　2 つの平面の単位法線ベクトルを求めなさい．

(2)　(1) で求めた 2 つの平面の単位法線ベクトルの外積を求めなさい．

(3)　点 $(1, 2, -1)$ を通り，平面 α および β に垂直な平面の方程式を求めなさい．

(岩手大 2008)　　(m20080301)

0.3　xyz 空間の点 $P(0, 0, t)$ を通り, ベクトル $\vec{a} = (2, 2, 1)$ に垂直な平面 α と方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 2z = 11$$

で表される球 S について, 次の問いに答えなさい. ただし, $t > 0$ とする.

(1)　平面 α の方程式を t を用いて表しなさい.

(2)　球 S の中心の座標と半径を求めなさい.

(3)　球 S の中心から平面 α までの距離を, t を用いて表しなさい.

(4)　球 S と平面 α が交わってできる図形は円になる. この円の面積を 9π とするとき, t の値を求めなさい.

(岩手大 2010)　　(m20100301)

0.4　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ で表される xyz 空間内の線形変換を f とする．次の問いに答えなさい．

(1)　線形変換 f によって直線 $\ell\ :\ x - 1 = \dfrac{y + 2}{-2} = \dfrac{z + 1}{3}$ がどのような図形に移されるか答えなさい．

(2)　線形変換 f によって平面 $\alpha\ :\ x + y + z = 1$ がどのような図形に移されるか答えなさい．

(3)　逆変換 f^{-1} を表す行列を求めなさい．

(4)　線形変換 f によって平面 $\beta\ :\ x + y = 1$ に移されるもとの図形を求めなさい

(岩手大 2011)　　(m20110302)

0.5　xyz 空間内に 4 点 $A(-3, -3, 1)$, $B(2, -8, 1)$, $C(-2, -3, -2)$, $D(2, 1, 4)$ があるとき, 次の問いに答えなさい.

(1)　4 点 $A,\ B,\ C,\ D$ を通る球 S の方程式を求めなさい．

(2)　球 S の中心を P とするとき，ベクトル $\overrightarrow{PA},\ \overrightarrow{PB},\ \overrightarrow{PC}$ は線形独立であることを証明しなさい．

(3)　点 C を通り，ベクトル $\overrightarrow{AD}$ に垂直な平面 α の方程式を求めなさい．また，平面 α と直線

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y}{2} = z-2$$

との交点の座標を求めなさい．

(4)　点 D から平面 α に直線を引き，α との交点を E とするとき，線分 DE の長さが最小となるように点 E の座標を定めなさい．このとき，線分 DE の長さを求めなさい．

(岩手大 2012)　　(m20120301)

0.6　xyz 空間内に 3 点 $A(1,0,0),\ B(0,2,1),\ C(1,2,2)$ があるとき，次の問いに答えなさい．

(1)　ベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{AC}$ の外積 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ を求めなさい．その結果を用いて，3 点 A,B,C を含む平面 α の単位法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ を求めなさい．

(2)　平面 α の方程式を求めなさい．

(3)　原点 O を中心として平面 α に接する球 S の半径とその接点 P の座標を求めなさい．

(4)　接点 P が三角形 ABC 内にあるか否かを答えなさい．また，その理由を示しなさい．

(岩手大 2015)　　(m20150301)

0.7　原点 O の xyz 空間に点 $A(2,1,3)$，点 $B(3,-2,1)$ が与えられている．このとき，次の問いに答えなさい．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角 θ を求めなさい．ただし，$0 \leqq \theta < \pi$ とする．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に垂直な単位ベクトル $\overrightarrow{n}$ を求めなさい．

(3)　3 点 $O,\ A,\ B$ を通る平面 α の方程式を求めなさい．

(4)　点 $C(-1,-2,3)$，点 $D(5,6,5)$ の両端を直径とする球 S の方程式を求めなさい．

(5)　平面 α が球 S を 2 つの半球に分割することを示しなさい．

(岩手大 2022)　　(m20220301)

0.8　ベクトル $\boldsymbol{a} = (1,-1,1),\ \boldsymbol{b} = (2,1,-1)$ について，次の問いに答えなさい．

(1)　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交することを示しなさい．

(2)　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を含み原点を通る平面上にある点 (x,y,z) を，媒介変数 s と t を用いた式で表しなさい．

(3)　ベクトル $\boldsymbol{p} = (3,1,2)$ が (2) の平面に投ずる正射影を $\boldsymbol{q} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ と書くとき，係数 α と β を求めなさい．

(秋田大 2012)　　(m20120402)

0.9　以下の問いに答えよ．

(1)　以下の四角内に当てはまる値を計算し，解答欄の指定した箇所に記入せよ．

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対し，A の 2 つの固有値をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ とする（ただし，$\alpha < \beta$ とする）．また，α と β に対応する固有ベクトルをそれぞれ $v_\alpha,\ v_\beta$ とする．このとき

$$\alpha = \boxed{\text{（カ）}},\ \beta = \boxed{\text{（キ）}},\ v_\alpha = \begin{pmatrix} \boxed{\text{（ク）}} \\ 1 \end{pmatrix},\ v_\beta = \begin{pmatrix} \boxed{\text{（ケ）}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる，

注意 $\boxed{\text{（ク）}}$ と $\boxed{\text{（ケ）}}$ は，それぞれ v_α と v_β のベクトルの第一成分である．

(2) 2 つのベクトル v_α と v_β が直交するかどうか答え，その理由を述べよ．

(秋田大 2013)　　(m20130404)

0.10 2 次方程式 $4x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 = 0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 和 $\alpha + \beta$，積 $\alpha\beta$ を求め，$\alpha^2 + \beta^2$ の値を答えよ．

(2) $|\,\alpha - \beta\,|$ および $|\,\alpha^4 - \beta^4\,|$ の値を求めよ．

(3) 行列 $A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta^2 \\ \beta^2 & \alpha^2 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換によって，双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を移したときの関数を求めよ．

(秋田大 2021)　　(m20210402)

0.11 点 $X(x, y)$ を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる点を $X'(x', y')$ とする．

(1) OX の長さは r であり，OX の方向は x 軸の正のむきを原点 O のまわりに α だけ回転した方向にあるとする．このとき，x, y, x', y' を r, α, θ により表わせ．ただし，角 θ と角 α の回転の方向は同一であるとする．

(2) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表わすとき，2×2 行列 T は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となることを示せ．

(3) 点 $A(x_1, y_1)$，点 $B(x_2, y_2)$ と原点 O からなる三角形 OAB を考える．三角形 OAB を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる三角形を $OA'B'$ とする．三角形 OAB の面積 S と三角形 $OA'B'$ の面積 S' を与える公式

$$S = \frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|, \quad S' = \frac{1}{2}|x_1' y_2' - x_2' y_1'|$$

を用いて，$S = S'$ であることを示せ．

(4) 上記 (3) で定義した三角形 $OA'B'$ の辺 $A'B'$ が直線 $y' = 1$ 上に位置し，$S' = \dfrac{1}{2}$ であるとする．この場合に，x_1, y_1, x_2, y_2 が満たすべき条件を示せ．

(5) 上記 (4) において，さらに，$x_1' = 0,\ x_2' > 0,\ \theta = \dfrac{\pi}{4}$ とする．三角形 OAB を図示せよ．

(東北大 2001)　　(m20010503)

0.12 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ で定義する．

(1) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 行列 A によって表される xy 平面上の線形変換を f とする．直線 $y = ax$ 上の任意の点の f による像が同じ直線 $y = ax$ 上にあるような a の値を求めよ．

(3) 行列 U を $U = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ で定義する．このとき，$U^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$ が成り立つことを証明せよ．ただし，n は自然数，α は 0 でない実数とする．

(4) 行列 P を $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ で定義する．このとき，$P^{-1}AP$ を求めよ．また，その結果と問 (3) で証明した式を用いて A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(東北大 2003)　　(m20030503)

0.13 実数 y の関数:

$$f(y) = \frac{1}{1 + e^{-\beta y}}\ , \qquad (-\infty < y < \infty)$$

を定義する. ここで, β は非負の実数値のみをとる定数である. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) β の値が以下の 3 つの場合:

a) $\beta \longrightarrow +\infty$, b) $\beta = 0$, c) その他の場合.

の各々について, $x = f(y)$ のグラフを描け.

(2) 関数 $x = f(y)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求めよ.

(3) 以下の不定積分を求めよ.

$$\int \log(1-x)dx$$

ただし, log は自然対数を表す.

(4) 以下の定積分を求めよ.

$$g(x) \equiv \int_0^x f^{-1}(z)dz$$

ただし, x の定義域は $0 \leq x \leq 1$ であり, $\lim_{x\to 0} x\log x = 0$ の意味で $0\log 0 = 0$ とする.

(5) 関数 $g(x) - \alpha x$ を最小化する x を求めよ. ただし x の定義域は $0 \leq x \leq 1$, α は正の実数値のみをとる定数とする.

（東北大 2004） (m20040501)

0.14 (1) a, b, c, p, q, r を実数とし,

$$D = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく．任意の自然数 k に対し,

$$(D+N)^k = D^k + M\,, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表されることを示せ．ただし, α, β, γ は適当な実数である．

(2) ３次正方行列 A がある自然数 n に対して $A^n = O$ を満たすとき, $A^3 = O$ であることを示せ．ただし, O は零行列である．

(東北大 2006) (m20060504)

0.15 t を実数とし, 2 つの関数 $x = x(t)$, $y = y(t)$ により与えられる xy 平面上の点 $P\,(x(t), y(t))$ を考える. $x(t)$ および $y(t)$ が以下の連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \alpha y \end{cases}$$

および初期条件

$$(x(0), y(0)) = (1, 1)$$

を満足するとする. ただし, α は実数の定数である. 以下の問いに答えよ.

(1) $\alpha = 0$ のとき, 与えられた連立微分方程式の解 $x(t)$ および $y(t)$ を求めよ.

(2) $\alpha \neq 0$ のとき, 与えられた連立微分方程式の解 $x(t)$ および $y(t)$ を求めよ.

(3) t ($t \geqq 0$) が変化するとき, 点 P が描く曲線の概形を $\alpha > 0$, $\alpha = 0$, $\alpha < 0$ の場合について描け.

(東北大 2008) (m20080502)

0.16 行列 $\boldsymbol{A}$ および直交座標系の位置ベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ の逆行列を求めよ．

(2) $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．その際，固有ベクトルの大きさは 1 となるように求めよ．

(3) (2) で求めた固有値を α, β, γ ($\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$) とする．2 次形式 $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 10z^2$ を標準形 $\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2$ に変換する線形変換 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{p}$ を与える直交行列 $\boldsymbol{U}$ を求めよ．

(4) 線形変換 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{p}$ により，平面 $x + y + z = 1$ はどのような図形に変換されるか．変換前後の図形の概形を描け．

(東北大 2008)　　(m20080503)

0.17 数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ とする．このとき．$b_n = a_{n+1} - \alpha a_n$ によって定められる数列 $\{b_n\}$ が公比 β の等比数列となるような α と β をすべて求めよ．

(2) $(n+2)a_{n+2} - 2(n+1)a_{n+1}\cos\theta + na_n = 0$ であるとき，a_1 と a_2 を用いて a_n $(n \geqq 3)$ を表せ，ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(3) $a_1 = 1$, $a_2 = i$ (ただし $i = \sqrt{-1}$) とし，複素平面上で原点を O，複素数 a_n を表す点を A_n とする．a_n が (2) の式で表されるとき，三角形 OA_nA_{n+1} $(n \geqq 3)$ の面積を求めよ．

(東北大 2012)　　(m20120501)

0.18 $\boldsymbol{R}$ は実数全体のなす集合を表す．$\boldsymbol{R}^N$ は N 次元実ベクトル全体のなす集合を表す．

$\boldsymbol{R}^4$ の 3 つのベクトルを $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ で定め，これらを列にもつ行列

$$A = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一次独立であることを示せ．

(2) A によって定まる線形写像の像を $\mathrm{Im}(A)$ とする．つまり

$\mathrm{Im}(A) = \left\{ A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{R} \right\}$ である．$\boldsymbol{R}^4$ のベクトル $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im}(A)$ の元であるとき，p を q, r, s で表せ．

(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4$ の内積を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = xx' + yy' + zz' + ww'$$

とする．

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4$ が $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) = 0$ をみたし，4 次行列 $\tilde{A} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x})$ の行列式が 1 であるとき $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(東北大 2012)　　(m20120505)

0.19　オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いて，次の関係が成り立つことを示せ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ である．

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

(東北大 2018)　　(m20180501)

0.20　$\mathbb{R}^2$ 上の 2 変数関数 $f(x, y)$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y) = (0,0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ は $(x, y) = (0, 0)$ において連続であることを示せ．

(2) $f(x, y)$ は $(x, y) = (0, 0)$ において全微分可能であるか，理由とともに答えよ．
なお，$\mathbb{R}^2$ 内の点 (a, b) の近傍で定義された実数値関数 $g(x, y)$ が $(x, y) = (a, b)$ において全微分可能であるとは，ある定数 α，β が存在して

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{g(a+h,\ b+k) - g(a,b) - (\alpha h + \beta k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

が成り立つことをいう．

(東北大 2018)　　(m20180510)

0.21　$\mathbb{R}$ 内の閉区間 $[0, 1]$ 上の連続関数 $f(x)$ は $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 1$ をみたすとする．正の整数 n に対し

$$b_n = \int_0^1 f(x) \cos\frac{x}{\sqrt{n}} dx$$

とおくとき，

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} (b_n)^n = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)$$

が成り立つことを以下の設問に沿って証明せよ．

(1) 任意の $x \geq 0$ に対し

$$0 \leq \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^3}{6}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 任意の n に対し

$$\left| b_n - 1 + \frac{1}{2n}\int_0^1 x^2 f(x)dx \right| \leq \frac{1}{6n\sqrt{n}}\int_0^1 x^3 |f(x)|\, dx$$

が成り立つことを示せ.

(3) 任意の実数 $\alpha,\ \beta$ に対し

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n\sqrt{n}}\right)^n = e^{\alpha}$$

が成り立つことを示せ.

(4) (2) および (3) の結果を利用して $(*)$ を結論せよ.

(東北大 2018) (m20180511)

0.22 n を非負整数 α を負の実数とし，広義積分

$$I(n,\ \alpha) = \int_0^1 x^{\alpha}(\log x)^n\, dx$$

を考える．以下の問に答えよ.

(1) $\alpha > -1$ ならばこの広義積分は収束し，$\alpha \leq -1$ ならば発散することを示せ.

(2) $\alpha > -1$ のとき，この広義積分の値を求めよ.

(東北大 2022) (m20220511)

0.23 図の様に，x, y 平面上の座標が (x, y) で表される点 P を原点 O のまわりに角度 α だけ回転すると，座標が (x', y') の点 P' に移った．以下の問に答えよ.

(1) 点 P の原点 O からの距離を r，O から P に到るベクトルが x 軸の正の方向となす角度を θ とすると，x と y は

$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$

と表される．この時 x' と y' を r，θ，α で表わせ.

(2) x' と y' を x と y と α で表す関係式をもとめよ.

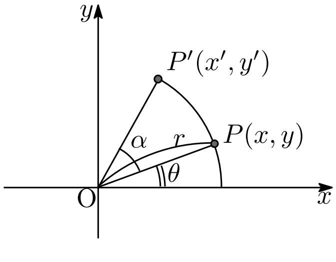
但し，必要があれば，以下の三角関数に関する公式を用いてもよい.

$\sin(\theta+\alpha) = \sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha, \quad \sin(\theta-\alpha) = \sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha$

$\cos(\theta-\alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha, \quad \cos(\theta+\alpha) = \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha$

(3) 複素数 z は，2 乗すると-1 となる i と称する虚数を導入して，実数 x と y を用いて $z = x + iy$ と定義される．この時，x と y は複素数 z の実部と虚部と呼ばれる．今，上記の点 P の座標 x と y とを実部と虚部に持つ複素数を z，点 P' の座標 x' と y' とを実部と虚部に持つ複素数を z' としよう．この時 z' を z で表すとどうなるか，議論せよ．但し，必要ならばオイラーの有名な公式：$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ を用いてもよい.

(4) 上記のオイラーの有名な公式を知っていると，上記の三角関数の公式は導出できるだろうか.「YES , NO , あるいは分からない」で答えよ.



(お茶の水女子大 1999) (m19990610)

0.24 変数変換 $t=\tan(\theta/2)$ を用いて三角関数の積分を計算してみよう．

(1) $\cos\theta$ と $\sin\theta$ は変数 t を用いて，以下のように表せることを示せ．

$$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$$

(2) 次の関数式を示せ． $\displaystyle\frac{dt}{d\theta}=\frac{1}{2}(1+t^2)$

(3) 次の不定積分を求めよ． $\displaystyle\int\frac{d\theta}{\sin\theta},\quad\int\frac{d\theta}{\cos\theta}$
ただし，もし必要であれば以下の公式を用いて良い．

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

（お茶の水女子大 2001） (m20010604)

0.25 実数関数 $x=x(t)$ は，次の微分方程式を満足する．

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+bx=0$$

ただし，係数 a と b は正の実数であり，$a^2>4b$ が成り立つものとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) この微分方程式の解を，$x_1(t)$ と $x_2(t)$ の 2 つ見つけたとしよう．このとき，実数 c_1,c_2 を用いて作られた $x_3(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$ も，この微分方程式の解であることを示せ．

(2) α を定数としたとき $x(t)=e^{\alpha t}$ がこの微分方程式を満足すると考えることにより，上記の微分方程式のもっとも一般的な解を求めよ．

(お茶の水女子大 2003) (m20030609)

0.26 $P(x)=x^2+ax+b$, $Q(x)=x^2+cx+d$ を実数係数の x の 2 次多項式とし，次の 4 次正方行列を考える．

$$A=\begin{bmatrix}1&a&b&0\\0&1&a&b\\1&c&d&0\\0&1&c&d\end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) 2 つの x の 2 次方程式 $P(x)=0$, $Q(x)=0$ が共通の実数解 α をもつとき

$$A\begin{bmatrix}\alpha^3\\\alpha^2\\\alpha\\1\end{bmatrix}=o$$

となることを示し，A の行列式 $|A|$ は 0 となることを示せ．ただしここで o は数ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の原点を表すものとする．

(3) $P(x)=(x-1)(x-2)$ とする．このとき $|A|=Q(1)Q(2)$ であることを示し，$\mathrm{rank}\,A\leqq 3$ ならば $P(x)=0$, $Q(x)=0$ は少なくとも一つの共通の実数解をもつことを示せ

(4) $P(x)=0$ が 2 つの実数解 $x=\alpha$, β $(\alpha\neq\beta)$ を持つとする．このとき $\mathrm{rank}\,A=2$ であれば，$P(x)=0$, $Q(x)=0$ は 2 つの共通の実数解をもつことを示せ．

(お茶の水女子大 2011) (m20110602)

0.27 任意の実 2 × 2 行列を無限回作用させることにより，平面上の点はどこに行き着くかについて考察せよ．以下の (1) から (5) の手順に従ってもよいし，または別の手順で解答してもよい．

(1) 上三角行列

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

の固有値を求める．

(2) 行列 T の n 乗を計算する．

(3) 行列 T のすべての固有値の絶対値が 1 より小さい場合，実平面上の点

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

は行列 T を無限回作用するとどのような点に近づくか考える．ただし，$\alpha, \beta, \gamma, x_1, x_2$ はすべて実数であるとする．

(4) 2 × 2 行列 M に対し

$$Me = \lambda e$$

を満たす単位固有ベクトルを

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

とし．この成分 a, b を用いて正則行列

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

を定義する．行列 $P^{-1}MP$ の (2,1) 成分（左下の要素）がゼロになることを確かめ，任意の 2 × 2 行列が上三角行列に変換されることを示す． さらに．$T_0 = P^{-1}MP$ とするとき n を自然数として

$$M^n = P(T_0)^n P^{-1}$$

が成立することを示す．

(5) 行列 B の要素がすべて実数で， 固有値の絶対値が 1 より小さいとする． このとき行列 B を無限回作用すると， 実平面上の点はどのような点に近づくか考えてみる．

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110604)

0.28 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ を次式で定義する．

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right), \quad \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

ここで e^x は指数関数を表す．

(1) 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ の微分を求めよ．

(2) 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ の無限級数展開の最初の 3 項目までを求めよ．

(3) 次の関係式（加法定理）を示せ．

$$\sinh(\alpha + \beta) = \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta$$

(4) 上の関係式（加法定理）から，正弦関数 $(\sin\theta)$ の加法定理を導け．ただし，次のオイラーの関係式は仮定して良い．

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

(お茶の水女子大 2012)　　(m20120603)

0.29 実数列 $\{x_n\}$, $n = 0, 1, \cdots$, を次の漸化式で定義する.

$$x_0 = 0\,, \quad x_{n+1} = \cos x_n\,, \quad n = 0, 1, \cdots$$

(1) 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$x_0 < x_2 < x_4 < \cdots < x_{2n} < x_{2n+2} < \cdots$$

(2) 数列 $\{x_n\}$ はある正数 $\alpha > 0$ に収束することを示せ. また極限値 α は

$$\cos\alpha = \alpha$$

を満たすことを示せ.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130602)

0.30 次の積分を計算せよ.

$$\int_0^1 \frac{2\pi j e^{2\pi jt}}{e^{2\pi jt} - \alpha} \cdot \left\{ \frac{2\pi j e^{2\pi jt}}{e^{2\pi jt} - \alpha} \right\}^* dt$$

ただし，α は $|\alpha| \neq 1$ なる任意の複素数， j は虚数単位，“ $*$ ” は複素共役を表すとする.

(東京大 1997)　　(m19970704)

0.31 3 次方程式 $z^3 = 1$ の三つの相異なる解を α, β, γ とする．n を自然数とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) α, β, γ を求めよ.

(2) $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ の値は，n が 3 の倍数のとき 3，それ以外のとき 0 になることを示せ.

(東京大 2000)　　(m20000701)

0.32 ある製品は一回の使用後, 確率 p でこわれるとしょう. このとき以下に問に答えよ.

(1) この製品を k 回使用したとき, まだこわれない確率を求めよ.

(2) N 個の製品をそれぞれ一回使用した後の確率を求めよ.

(a) すべてがこわれている確率はいくらか.

(b) すべてがこわれずに残っている確率はいくらか.

(c) M 個がこわれずに残っている確率はいくらか.

(3) N 個の製品をそれぞれ一回使用した後こわれずに残っている個数の期待値を求めよ.

次に, この製品は使用しなくても単位時間あたり α の確率でこわれるとしよう.
(つまり, 非常に短い時間 Δt 後に確率 $\alpha\Delta t$ でこわれる.) このとき, 以下の問に答えよ.

(4) ある製品をまったく使用しない場合, 時刻 t においてそれがこわれていない確率を $P(t)$ とするとき, $P(t)$ の従う微分方程式を記せ.

(5) $t = 0$ で $P(t) = 1$ として, $P(t)$ を求めよ.

(6) この製品を, 完成後時間 t の間に k 回使用したとき, まだこわれていない確率を求めよ. ただし, 使用に要する時間は t に比べて非常に短いとする.

(東京大 2001)　　(m20010705)

0.33 方程式

$$z^{17} = 1$$

を満たす複素数のうち, 1 でないものをひとつとり, ω とする. 以下の問に答えよ.

(1) この方程式を満たす 1 でない複素数は,

$$\omega^{\pm 1}\,,\ \omega^{\pm 2}\,,\ \omega^{\pm 3}\,,\cdots,\ \omega^{\pm 8}$$

で全てであることを示せ.

(2)

$$f_n = \omega^n + \omega^{-n}$$

と書くとき, 以下の各式が成り立つことを示せ.

$$f_i f_j = f_{i+j} + f_{i-j}\,,$$

$$f_{-i} = f_i\,,$$

$$f_{i+17} = f_i\,.$$

(3)

$$f_1 + f_2 + f_4 + f_8 = \alpha_0\,,$$

$$f_3 + f_5 + f_6 + f_7 = \alpha_1$$

とおくと, α_0 , α_1 は方程式

$$X^2 + X - 4 = 0$$

の 2 解であることを示せ.

(4)

$$f_1 + f_4 = \beta_0\,,$$

$$f_2 + f_8 = \beta_1\,,$$

$$f_3 + f_5 = \beta_2\,,$$

$$f_6 + f_7 = \beta_3\,,$$

とおくと, β_0 , β_1 は方程式

$$X^2 - \alpha_0 X - 1 = 0$$

の 2 解で, β_2 , β_3 は方程式

$$X^2 - \alpha_1 X - 1 = 0$$

の 2 解であることを示せ.

(5) f_1 , f_4 を 2 解とする 2 次方程式を一つ作れ. さらにこれを用いて, ω の満たす 2 次方程式を一つ作れ, 必要ならば係数に α_0〜α_3 , β_0〜β_3 などを用いてよい.

(東京大 2002)　　(m20020704)

0.34 2 つの媒介変数 s, θ によって表される曲面 S

$$S\ :\ x(s,\theta) = (s\cos\theta,\ s\sin\theta,\ \alpha\theta)\,,\ (0 \leq s \leq 1)\,,\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

について，以下の設問に答えよ．α は 0 以上の定数とする．

(1) $x(s,\theta)$ の媒介変数 s を 1 と固定する事により，曲線 C

$$C\ :\ y(\theta) = x(1,\theta) = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ \alpha\theta)\,,\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

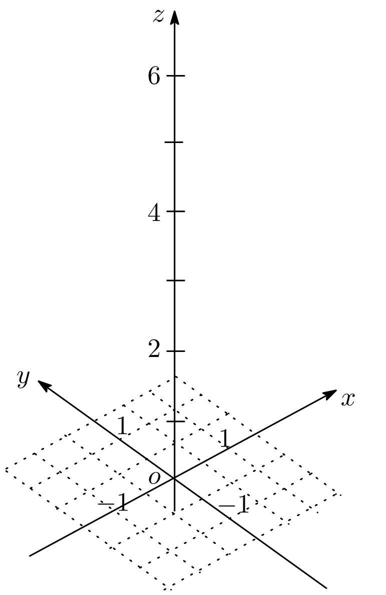
を得る．$\alpha = 1$ の場合について，下図の座標軸を参考にして曲線の概略を解答用紙に手描きせよ．

(2) C 上の点を $P(= y(\theta))$ とする．P における接線の方程式を導出せよ．

(3) (2) で求めた接線と xy 平面の交点を Q とする．θ が 0 から 2π まで連続的に変化するとき，Q が描く曲線の長さ ℓ を求めよ．

(4) $\alpha = 0$ のとき，曲面 S は xy 平面上の単位円盤に一致する．$\alpha = 1$ としたとき，曲面 S の面積は，単位円盤の面積の何倍になるかを求めよ．ただし，次の不定積分の公式を使ってよい．

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2} + \log_e\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right\} + c \qquad (c\text{ は積分定数})$$



(東京大 2009)　　(m20090703)

0.35 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1 , λ_2 とそれらに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ をそれぞれ求めよ．ただし，絶対値が大きい方の固有値を λ_1 とする．

(2) xy 平面上の 3 点 $P(p_1,\, p_2)$, $Q(q_1,\, q_2)$, $R(r_1,\, r_2)$ を頂点とする三角形 PQR の面積 S の導出過程を示し，各頂点の座標 p_1 , p_2 , q_1 , q_2 , r_1 , r_2 により表せ．また，各頂点の位置ベクトルが $\boldsymbol{A}$ により一次変換された際，その三角形の面積は何倍になるかを求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ をとり，$\boldsymbol{a}$ に $\boldsymbol{A}$ を n 回かけたベクトルを $\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ とする．その成分 α_n , β_n および $\boldsymbol{A}^n$ を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(4) 極限値 $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n}$ が一定の値に収束することを示し，その値を求めよ．

(東京大 2009)　　(m20090704)

0.36 (1) 微分方程式

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

について，左辺がある関数 $u(x,y)$ の全微分 $du(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy$ に等しいならば，微分方程式 (1) の一般解は $u(x,y) = C$ (C は任意定数) で与えられる．このような方程式 (1) は完全微分形であるという．以下の設問に答えよ．

(a) 微分方程式

$$-ydx + xdy = 0$$

は，完全微分形ではないが，両辺に $\dfrac{1}{xy^\alpha}$ をかけることによって完全微分形の方程式を得ることができる (αは定数)．α の値を求め，完全微分形の微分方程式を導出せよ．

(b) (a) で得られた完全微分形の微分方程式を，$x = 1$ のとき $y = e$ の条件の下で解け．ただし，e は自然対数の底である．

(2) (a) 微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad (2)$$

について，$x = e^t$ と変数変換することにより定係数の微分方程式を導出せよ（その過程も示せ）．ただし，e は自然対数の底である．

(b) (a) で導出した微分方程式を解くことにより微分方程式 (2) の一般解を求めよ．

(c) 微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = x\log_e x$$

について，$x = 1$ において $y = 1$，$\dfrac{dy}{dx} = 0$ となる解を求めよ．

(東京大 2009) (m20090705)

0.37 以下の問いに答えよ．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$，$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

(1) 微分方程式

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2 \qquad (*)$$

は，特殊解 $y_1(x)$ 持つことがわかっているとする．

(a) 式 $(*)$ の一般解を $y = y_1(x)+1/u(x)$ とおき，$u(x)$ に関する微分方程式を $p(x)$，$q(x)$，$r(x)$，$y_1(x)$ を用いて表せ．

(b) $y' = (x^2 + x + 1) - (2x + 1)y + y^2$ は，特殊解 $y_1(x) = x$ を持つことがわかっている．一般解を求めよ．(a) で求めた結果を用いてもよい．

(2) 微分方程式

$$\alpha y'' + y' + y = 0 \qquad y(x = 0) = 1,\ \ y'(x = 0) = 2 \qquad (**)$$

を考える．

(a) $y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$ を一般解とする．λ_1，λ_2，C_1，C_2 をそれぞれ α で表せ．ただし，e は自然対数の底とする．

(b) $x \geqq 0$ において，式 $(**)$ の解を

$$y' + y = 0 \qquad y(x = 0) = \beta$$

の解で近似することを考える．α が十分小さい場合，β をどのように選べば近似できるか，(a) で求めた λ_1，λ_2，C_1，C_2 を用いて説明せよ．

(東京大 2011) (m20110701)

0.38 (1) xyz 空間において，3 点 $A(1, 3, 1)$，$B(2, 4, 3)$，$C(3, -3, -1)$ を通る平面を α とする．

(a) 平面 α の方程式を求めよ．

(b) 点 $P(1, 1, 1)$ からの距離が 5 であり，平面 α に平行な平面の方程式を求めよ．

(c) (b) で求めた平面に接し，点 P を中心とする球面を S とする，平面 α と球面 S が交わってできる円の中心座標と半径を求めよ．

(2) 四面体 $OABC$ において，線分 AB の中点を P，線分 CP を $1:2$ の比に内分する点を Q，線分 OQ を $1:2$ の比に内分する点を R とする，また，3 点 O, B, C を通る平面と直線 AR の交点を S，直線 OS と直線 BC の交点を T とする．

(a) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

(b) 四面体 $OABC$ の体積 V_1 と，四面体 $PQST$ の体積 V_2 の比 $V_1 : V_2$ を求めよ．

注）(1),(2) のそれぞれの問題文中で使われている記号は，無関係である．

(東京大 2011)　　(m20110703)

0.39 (1) 実数 α と β に対して，下記の等式を満たす複素数 z が複素平面上でどのような図形になるか示し，図示せよ．ただし，i を虚数単位とする．

$$\left|\frac{z+\alpha-\alpha i}{2z-\beta+\beta i}\right| = 2$$

(2) 複素関数

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

を考える．複素平面上において (p, q) を中心とする半径 $r(>0)$ の円を C とするとき，C が f により変換された像がどのような図形になるかを示せ．

(3) (1) の等式を満たす複素数 z に対して，複素平面上での z の図形と $f(z)$ の図形が一致するときの α と β を求めよ．

(東京大 2011)　　(m20110704)

0.40 3 次の正方行列 A の固有値を λ とし，λ は固有方程式 $\lambda^3-(\alpha+\beta)\lambda^2+\alpha\beta\lambda = 0$ を満たすとする．このとき，$A^3-(\alpha+\beta)A^2+\alpha\beta A = 0$ が成り立つ．ここで，α, β は互いに異なる 0 でない実数とし，行列 A は対角化可能であるとする，また，O を零行列，E を単位行列とする．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A^n $(n \geqq 3)$ は次のような行列 A の 2 次式で表せることを示せ．

$$A^n = a_nA^2+b_nA+c_nE$$

ここで，a_n, b_n, c_n は実数である．

(2) 行列 A が対角行列 D に対角化されるとき，(1) の a_n, b_n, c_n を含む次の式

$$D^n = a_nD^2+b_nD+c_nE \quad (n \geqq 3)$$

が成り立つことを示せ．

(3) (1) の a_n, b_n, c_n を求めよ．

(4) α, β の絶対値が 1 より小さければ，無限級数

$$\sum_{i=0}^{\infty} A^i = E+A+A^2+\cdots$$

は $a'A^2+b'A+c'E$ と表されることを示し，実数 a', b', c' を求めよ．

(5) (4) の a', b', c' に対し，$(E-A)(a'A^2+b'A+c'E)$ を求めよ．

(東京大 2013)　　(m20130705)

0.41 ある定係数 2 階線形常微分方程式が，次のように与えられている．

$$f^{(2)}(x)-2\alpha f^{(1)}(x)+\alpha^2 f(x) = 0 \qquad (*)$$

$f^{(n)}(x)$ は関数 $f(x)$ の第 n 次導関数であり（n は自然数），α は 0 でない実数定数とする．
以下の問いに答えよ．

(1) x を変数，k を実数定数とする関数 e^{kx} をマクローリン展開し，x の 3 次の項まで書け．ここで，e は自然対数の底である．

(2) 関数 $f(x)$ は連続で無限回微分可能であり，式 $(*)$ を n 回微分したとき，次の方程式が成り立っているとする．

$$f^{(n+2)}(x) - 2\alpha f^{(n+1)}(x) + \alpha^2 f^{(n)}(x) = 0$$

$f^{(n)}(x)$ を，$f^{(1)}(x)$ と $f(x)$ を用いて表せ．

(3) 関数 $f(x)$ のマクローリン展開式 $f(x) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} f^{(m)}(0)\frac{x^m}{m!}$ に対し，(2) で得られた $f^{(n)}(x)$ を適用して計算することにより，$f(x) = f(0)e^{\alpha x} + \Big[f^{(1)}(0) - \alpha f(0)\Big]xe^{\alpha x}$ と表されることを示せ．ここで，m は 0 以上の整数であり，$f^{(0)}(x)$ は $f(x)$ と見なし，$0! = 1$ とする．

(4) 次の微分方程式を，条件 $f(0) = 1$，$f^{(1)}(0) = p - 2$ （p は実数定数）のもとで解け．

$$f^{(2)}(x) + 4f^{(1)}(x) + 4f(x) = e^{-2x}$$

(5) (4) で求めた $f(x)$ について，$f(x) = 0$ が有限の実数解をひとつしか持たないときの p の値を求め，それぞれの p に対する $f(x)$ の極大値を求めよ．

(東京大 2014)　　(m20140701)

0.42 カージオイドと呼ばれる極座標形式で表された曲線 $r = 1 + \cos\theta$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 曲線の概形を図示せよ．ただし，作図の根拠も示せ．

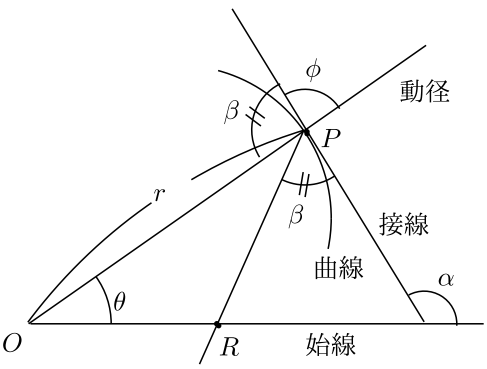
(2) この曲線の全周囲長を求めよ．ただし，$1 + \cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ という関係を用いても良い．

(3) 下図に示すように，曲線上の点 $P(r, \theta)$ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ における接線と原点 O から点 P を結んだ直線（動径）のなす角度を ϕ とする．また，接線と始線のなす角度を α とする．このとき，$\tan\phi = \tan(\alpha - \theta)$ であることを用い，

$$\tan\phi = \frac{r}{r'}$$

となることを示せ．ただし，$r' = dr/d\theta$ である．また，これを用いて ϕ を θ で表せ．

(4) 下図に示すように，動径と接線のなす角度を β とする．曲線上の点 $P(r, \theta)$ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ で接線と角度 β をなすもう一つの直線が始線と交わる点を R とする．このとき，三角形 OPR は二等辺三角形となることを示せ．



(東京大 2014)　　(m20140703)

0.43 複素積分を利用して実数積分を求めることを考える．以下の問いに答えよ．

(1) まず，ガウス積分と呼ばれる実数積分 $I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ を考える．α は正の定数であり; x は実数である．y を実数とするとき，$\{I(\alpha)\}^2$ は以下の式で表される．

$$\begin{aligned}\{I(\alpha)\}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dxdy\end{aligned}$$

この式を極座標 (r, θ) 表示に変換せよ．

(2) $I(\alpha) = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$ となることを導出過程とともに示せ．

(3) 図 4.1 に示すように x 軸を実軸，y 軸を虚軸とする複素平面上において半径 R の扇形で C_1，C_2，C_3 からなる経路 C を反時計回りに一周することを考える．i を虚数単位とし，z を複素数とするとき，以下の積分を求めよ．

$$\oint_C e^{iz^2} dz$$

(4) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} e^{iz^2} dz = 0$ となることを示せ．ただし，$0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$ において，$\sin\varphi \geq \dfrac{2\varphi}{\pi}$ を用いてよい．

(5) 上記のガウス積分と複素積分を用いて，実数積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$ の値を求めよ．

(6) 実数積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ の値を求めよ．

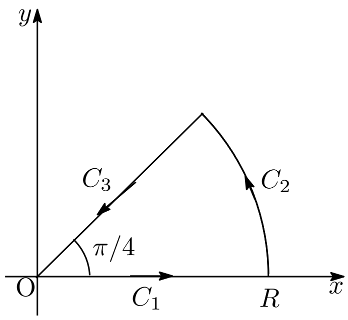


図 4.1

(東京大 2015)　　(m20150704)

0.44 微分方程式に関する以下の問いに答えよ．

(1) 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^x$$

を境界条件 $y(0) = 2$，$y'(0) = 0$ のもとで解け．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．

(2) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = (1-y)y$$

を解け．ただし，$y(0) = \dfrac{1}{2}$ とする．

(3) $x > 0$ の範囲で定義された関数 $u(x)$ に関する微分方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{A}{x}\frac{du}{dx} - u = 0 \cdots (*)$$

に関して，以下の問いに答えよ．ただし，A は定数で $A \leq 1$ とする．

(a) 以下の微分方程式

$$\frac{d^2 f_\alpha}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{d f_\alpha}{dx} - \left(1 + \frac{\alpha^2}{x^2}\right) f_\alpha = 0$$

を満たす関数 $f_\alpha(x) \neq 0$ があるとする．ただし，α は非負の定数とする．ここで，式 $(*)$ の解が，関数 $g(x)$ を用いて $u(x) = f_\alpha(x) g(x)$ と表せると仮定すると，

$$\Big[\quad (\text{ア}) \quad\Big] \frac{d f_\alpha}{dx} + \Big[\quad (\text{イ}) \quad\Big] f_\alpha = 0$$

が成り立つ．空欄 (ア), (イ) に入る数式を，$g(x)$, A, α を用いて表せ．

(b) (a) の空欄 (ア), (イ) に入る数式が常にゼロとなるよう，$g(x)$ および定数 α を A を用いて表せ．また，必要であれば，積分定数の記号としては C を用いよ．

(東京大 2018)　　(m20180701)

0.45 袋の中に 3 色の玉が 8 個入っており，赤玉が 4 個，緑玉が 2 個，青玉が 2 個である．A さんが袋の中から無作為に玉を 3 個取り出し，5 個の玉が残る袋の中から B さんが無作為に玉を 3 個取り出し，色を確認した後に玉をすべて袋に戻す．この過程を 1 回の試行とし，A さんが赤，緑，青の 3 色の玉を 1 個ずつ取り出せたときを $X = 1$, それ以外をX=0とし, Bさんが赤, 緑, 青の 3 色の玉を 1 個ずつ取り出せたときをY=1, それ以外を $Y = 0$ とする．この試行を繰り返し行うとき，以下の問いに答えよ．

(1) この試行を 1 回行ったときの，次の統計量を求めよ．

(a) 期待値 $E(X)$ および $E(Y)$.

(b) 相関係数 $\rho(X, Y)$.

(2) A さんは n 回目の試行で初めて $X = 1$ となったときに n 点もらえるとする．

(a) もらえる点数が 3 点である確率を求めよ．

(b) A さんのもらえる点数の期待値は，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \alpha \sum_{k=1}^{n} k\beta^{k-1}$ という形で表せる．ただし，α と β は実数とする．α および β の値を求めた後，期待値を求めよ．

(3) B さんは n 回目の試行で初めて $Y = 1$ となったときに r^n 点もらえるとする．ただし，r は正に実数とする．B さんがもらえる点数の期待値が有限な値をとるための，r の条件を求めよ．

(東京大 2018)　　(m20180702)

0.46 以下の問いに答えよ．ただし，x は実変数，y は x に関する実関数であり，

$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．また，e は自然対数の底とする．

(1) 次の微分方程式について考える．ただし，y は，任意の x に対し $y > 0$ を満たすものとする．

$$y' - 2y\sin^2(x) = \frac{e^{2x}\cos(2x)}{y}$$

(a) 関数 $f(x)$ を次式により定義する．定積分を計算し，$f(x)$ を求めよ．

$$f(x) = \int_0^x \left[-2\sin^2(t)\right] dt$$

(b) $z = ye^{f(x)}$ とするとき，$\dfrac{dz}{dx}$ を x と z の関数として表せ．

(c) y の一般解を求めよ．

(2) 次の微分方程式について考える．ただし，α および n は実定数であり，α は $-1 \leq \alpha \leq 1$ を満たすものとする．

$$y'' - 2\alpha y' + y = 2e^x$$

(a) y の特解を求めよ.

(b) y の一般解を求めよ.

(c) $\alpha = 1$ とする．$y(0) = 1$ および $y'(0) = 2$ を満たす y に関して，次の極限の収束・発散を調べよ．収束する場合にはその極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to +0} y^{x^{-n}}$$

(東京大 2022)　　(m20220701)

0.47 極座標系で表された半直線

$\theta = \alpha\ ,\quad \theta = \beta \quad (0 \leqq \alpha < \beta < 2\pi)$

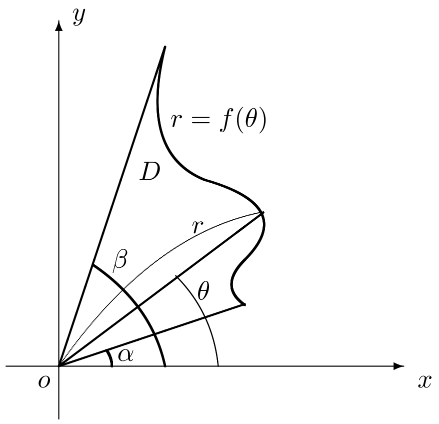
および，連続曲線

$r = f(\theta) \quad (\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$

で囲まれた閉領域 D の面積は

$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 d\theta$

で与えられることを示せ.



(東京工業大 2000)　　(m20000802)

0.48 $z = x + iy$（z は複素数，x, y は実数，i は虚数単位）に対して，指数関数 e^z と対数関数 $\log_e z$ を

$$e^z := e^x(\cos y + i \sin y),$$

$$\log_e z := \mathrm{Log}_e|z| + i \arg z,$$

と定義する．ただし，e は自然対数の底，Log_e は，実数に対して，既に定義されている対数関数，$\arg z$ は z の偏角を表すものとする.

(1) この指数関数を用いて，三角関数 $\sin z, \cos z$ を定義せよ．また，これらの指数関数と対数関数を用いて，一般の巾乗関数 α^β（α, β は，２つの複素数）を定義せよ.

(2) $\cos z = -2$ を満たす複素数 z を，すべて求めよ.

(3) $i^{(-i)}, (-i)^{\frac{1}{3}}$ の２つの値を計算せよ.（答えは，複素数 $a + ib$ の形になるまで計算すること）

(電気通信大 2001)　　(m20011010)

0.49 物質 R_α は時間がたつにしたがって自然に減少していく. その減少する割合はその時点 t で残っている質量 x に比例する. その比例定数を $k(> 0)$ とする.

(1) 質量 x と時点 t との関係を微分方程式で書け.

(2) 最初の質量を A とし, 上の微分方程式を解いて質量 x を表す式を求めよ.

(3) 一定の時間 T を経過するごとに質量は等比数列をなして減少することを示せ.

(4) 物質 R_α は, 質量が半減するのに 1600 年かかる．800 年では初めの量のおよそ何%になるか.

(電気通信大 2005)　　(m20051008)

0.50 $f(z) = \dfrac{z^4}{z^6 + 1}$ について次の問いに答えよ.

(1) $f(z)$ の極を極形式 $(re^{i\theta})$ の形で表せ.

(2) $z = \alpha$ を $f(z)$ の極とするとき，$f(z)$ の $z = \alpha$ における留数が $\dfrac{1}{6\alpha}$ であることを示せ.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ を求めよ.

(電気通信大 2008)　　(m20081005)

0.51 α を 0 でない複素数とし,

$$f(z) = \frac{1}{z(z-\alpha)}$$

を考える．以下の問いに答えよ.

(1) 複素数 a, b を使って

$$f(z) = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-\alpha}$$

と書くとき，a, b を α の式で表せ.

(2) $f(z)$ を $z=0$ を中心として，領域 $0 < |z| < |\alpha|$ においてローラン展開せよ.

(3) $\alpha = 1+i$ とする．$z=0$ を中心とする半径 1 の円周上を正の向きに一周する経路に沿って $f(z)$ を積分したときの値を計算せよ.

(電気通信大 2010)　　(m20101005)

0.52 複素関数 $f(z) = \dfrac{z^2}{z^4+1}$ について以下の問いに答えよ.

(1) $f(z)$ のすべての極を極形式 $\left(re^{i\theta}\text{の形}\right)$ で表せ.

(2) α を $f(z)$ の極とするとき，$f(z)$ の α における留数が $\dfrac{1}{4\alpha}$ であることを示せ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ を求めよ.

(電気通信大 2012)　　(m20121005)

0.53 複素関数 $f(z)$ $\dfrac{z^2}{z^4+z^2+1}$ について以下の問いに答えよ.

(1) $z^6 = 1$ を満たす複素数 z をすべて求めよ.

(2) 上半平面 $\mathbb{H} = \{x+iy\ :\ x, y \in \mathbb{R},\ y > 0\}$ 上にある $f(z)$ の各特異点 α に対して，その留数 $\mathrm{Res}(\alpha)$ を求めよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする.

(3) 定積分 $I = \displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ の値を求めよ.

(電気通信大 2013)　　(m20131005)

0.54 複素関数 $f(z) = \dfrac{8}{2z^4+1-\sqrt{3}i}$ に対して，　以下の問いに答えよ.

(1) $f(z)$ の特異点をすべて求めよ.

(2) $f(z)$ の各特異点 α に対して，その留数 $\mathrm{Res}(\alpha)$ を求めよ.

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_{|z-1|=\frac{2}{3}} f(z)dz$ を求めよ．ただし，積分路は正の向きに一周するものとする.

(電気通信大 2014)　　(m20141005)

0.55 複素関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$ に対して，以下の問いに答えよ.

(1) $f(z)$ のすべての極を求めよ.

(2) $f(z)$ の極 $z=\alpha$ における留数 $\mathrm{Res}(\alpha)$ を α を用いた簡単な式で表せ.

(3) 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ の値を求めよ.

(電気通信大 2018)　　(m20181005)

0.56 C^1 級関数 $f(r)$ に対して，次の合成関数

$$u(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2}) \qquad (r = \sqrt{x^2+y^2})$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) xyz 空間内の曲面 $S : z = u(x,y)$ を考える．このとき，S 上の点 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ f(1))$ における S の接平面と z 軸との交点の z 座標 z_0 を $f(1),\ f'(1)$ を用いて表せ．ただし，α は定数とする．

(2) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ が r の関数として表されることを示せ.

(3) $f(r) = r^2 e^{-r^2}$ のとき，次の重積分 I の値を求めよ．

$$I = \iint_D u(x,y)\,dxdy\ , \qquad D = \left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 1\right\}$$

(電気通信大 2019)　　(m20191003)

0.57 a , b は正の定数で，$3a > b$ を満たすとき，空間内に頂点を $(0,0,a)$ ，底面を $x^2+y^2 \leq 1$, $z=0$ とする円錐 K を考える．また，点 $(0,2,b)$ を通る x 軸に平行な直線および点 $(0,-1,0)$ を含む平面を α とする．次の問に答えよ．

(1) 平面 α の方程式を求めよ．

(2) 平面 α と円錐 K の交わりのうちで，x 座標が最大となる点を求めよ．

(横浜国立大 1992)　　(m19921102)

0.58 ３次元空間において，点 $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,1)$ を含む平面を α とする．次の問に答えよ．

(1) 平面 α と xy 平面のなす角を θ ($0 < \theta < \pi/2$) とするとき，$\cos\theta$ を求めよ．

(2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ．

(3) 平面 α と原点を中心とする半径 1 の球との交わりを xy 平面に正射影して出来る図形の面積を求めよ．

(横浜国立大 1993)　　(m19931102)

0.59 複素数 α に対する複素関数 $f(\alpha)$ を次のように定義する．

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{z-\alpha}dz$$

ただし，C は複素平面上の単位円：$|z| = 1$ である．このとき，$f(2)$ と $f(0.5+0.5i)$ を求めよ．

(千葉大 1997)　　(m19971204)

0.60 ある運動している点の時刻 t における座標 $(x(t)\,,\ y(t))$ が微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha y(t) + b \\ \alpha x(t) + a \end{pmatrix}$$

を満たす. ここで, a , b 及び $\alpha(>0)$ は定数である.

この微分方程式の解は

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}(t)\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} - (\boldsymbol{A}(t) - I)\,\boldsymbol{v}$$

と書ける. ただし, $\boldsymbol{A}(t)$ は時刻 t に依存する $2\times\ 2$ の正方行列, I は $2\times\ 2$ の単位行列, $\boldsymbol{v}$ は初期位置 $(x(0)\,,\ y(0))$ に依らない定ベクトルである. 次の設問に答えなさい.

(1) $\dfrac{dy(t)}{dx(t)}$ を t を陽に含まない形で表しなさい.

(2) (1) の微分方程式を解きなさい.

(3) 行列 $\boldsymbol{A}(t)$ を決定しなさい.

(4) 点 $(x(t)\,,\ y(t))$ はどのような運動をするか簡潔に説明しなさい.

(千葉大 2005)　　(m20051204)

0.61 実数の定数 $\alpha,\ \beta$ に対し，行列 $A,\ P$ を

$$A=\begin{bmatrix}\alpha & \beta & 0\\ 0 & \alpha & \beta\\ 0 & 0 & \alpha\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) $P^n\ (n \geqq\ 2)$ を求めよ．

(2) $A,\ A^2$ を $\alpha,\ \beta,\ I,\ P,\ P^2$ を用いて表せ．ただし，I は 3 次の単位行列を表す．

(3) $A^n\ (n \geqq\ 2)$ を $n,\ \alpha,\ \beta,\ I,\ P,\ P^2$ を用いて表せ．A^n はどのような行列になるか．

(4) $\exp A$ を $\alpha,\ \beta$ を用いてできるだけ簡単な行列の形に直せ．ただし，$\exp A$ は，

$$\exp A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots$$

で定められる行列を表す．

(5) $\exp(-A)$ を $\alpha,\ \beta,\ I,\ P,\ P^2$ を用いて表し，$(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$ であることを証明せよ．

(筑波大 2001)　　(m20011308)

0.62 定積分　$I(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_0^\infty \exp(-\alpha x)\frac{\sin\beta x}{x}dx\quad(\alpha \geq 0\,,\ \beta \neq 0)$

をパラメータ β について微分することにより　$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\beta x}{x}dx = \mathrm{sign}(\beta)\frac{\pi}{2}$　を導け．

ここで，$\mathrm{sign}(\beta)$ は β の符号 $(\pm)$(β が正値の場合は $+$，負値の場合は $-$) を意味する．

(筑波大 2003)　　(m20031303)

0.63 (x,y) 直交座標系において $x^{2/3}+y^{2/3}=\alpha^{2/3}\quad(\alpha>0)$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

(筑波大 2003)　　(m20031304)

0.64 xy 平面上において原点を中心とする半径 b の円周上を等速度で運動する点の時刻 t における位置は $x=b\cos(\omega t+\phi)\,,\ y=b\sin(\omega t+\phi)$ で表すことができる．ここに，ω,ϕ は定数で，それぞれ，角速度，位相と呼ばれる．

(1) 位置を時間に対して微分すると速度ベクトル $\vec{v}$ が得られる．$\vec{v}$ を求め成分表示しなさい．

(2) 速度ベクトルをさらに時間に対して微分すると加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ が得られる．$\vec{\alpha}$ を求め成分表示しなさい．また，$\vec{\alpha}$ と $\vec{v}$ は互いに直交することを示しなさい．

(3) ベクトル $\vec{\alpha}$, $\vec{v}$ の絶対値 $|\vec{\alpha}|,\ |\vec{v}|$ を計算しなさい．

(筑波大 2003)　　(m20031312)

0.65 xy 平面上に 2 本の曲線 $y=x^2-1$ と $y=-(x-k)^2+(k+1)$ が与えられているとする．

(1) これらが 2 点で交わるような k の値の範囲を求めよ．

(2) k が上で求めた範囲の値のとき, 2 曲線で囲まれた図形の面積が最大となるような k の値, および面積の最大値を求めよ. ただし, $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を公式として用いてよい.

（筑波大 2004）　(m20041311)

0.66 $f(x)$ を $x \geq 0$ で定義された連続な単調増加関数とする. 以下の設問に答えよ.

(1) 任意の正整数 n に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\int_0^n f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n} f(i) \leq \int_0^n f(x+1)dx$$

(2) 実数 s に対して, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{1}{n^s}\sum_{i=1}^{n} f(i)\,, \quad n = 1, 2, \cdots$$

と定義する. $f(x) = x^{\alpha}$（$\alpha > 0$ は定数）のとき, 数列 $\{a_n\}$ が収束する s の範囲を定めよ.

(筑波大 2005)　(m20051309)

0.67 すべての実数 x に対し $\sqrt{3}\sin x - \cos x = A\sin(x-\alpha)$ が成り立つとき，A, α を求めよ．ただし $A > 0$，$0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$とする　．

(筑波大 2007)　(m20071326)

0.68 4 次関数 $y = f(x) = x^4 - 8x^2 + ax + b$ のグラフは 2 点 $x = \alpha,\ \beta$　$(\alpha < \beta)$ で x 軸と接する.

(1) a, b, α, β を求めよ.　(2) $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ.

(筑波大 2007)　(m20071334)

0.69 連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = b\,,\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

を考える（α, β は定数）.

(1) 行列 A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ.　(2) この方程式に複数の解が存在するための条件を示せ.

(3) そのときの一般解を示せ.

(筑波大 2007)　(m20071337)

0.70 方程式 $x^3 - 1 = 0$ の 3 つの根を 1, α, β とし，$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha+\beta}{2} & \dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \dfrac{\alpha-\beta}{2} & \dfrac{\alpha+\beta}{2} \end{bmatrix}$ とする.

(1) A^3 を α, β を用いずに表せ.　(2) A^2 の逆行列を，A を用いて表せ.

(3) A^7 を α, β を用いて表せ.　(4) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(5) A を対角化せよ.

(筑波大 2008)　(m20081312)

0.71 積分 $\displaystyle\iiint_D dxdydz\ \ln\left(\alpha\sqrt{x^2+4y^2+9z^2}\right)$ を求めよ.

ただし，α は正の定数であり，$\ln x$ は x の自然対数を表している.

さらに積分領域 D は，$D = \{(x, y, z) \mid 1 < x^2 + 4y^2 + 9z^2 < 4\}$ とする.

(筑波大 2008)　(m20081321)

0.72 (1) 次の微分方程式を $y = \dfrac{1}{N}$ と置いて変数変換せよ. ただし, α, β は正の定数, $N = N(t)$ とする.

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N^2$$

(2) 定数変化法により (1) で得られた式を解き, $N(t)$ を求めよ. ただし, $N(0) = N_0$ とする.

(筑波大 2010) (m20101311)

0.73 実数 R を係数とする変数 x に関する高々2 次の多項式の全体を V と表わす.

即ち, $V = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \,|\, a_0,\, a_1,\, a_2 \in R\}$. 但し, $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 0$ は, $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ のとき, そして, そのときに限り成立すると仮定する. 以下の問いに答えなさい.

(1) $\beta = \{1, x, x^2\}$ は V の一つの基底なることを示しなさい.

(2) $f(x) \in V$ に対して, f の x に関する微分 $\dfrac{df(x)}{dx}$ を対応させる写像を D と表わす. D は V から V への線形写像であることを示しなさい.

(3) D に対して, 基底 β に関する行列表現を求めなさい. また, D の rank はいくつであるか答えなさい.

(4) V から R への線形写像全体を V^* と表す. V^* は V と同じ次元を持つ線形空間になることが知られているが, このとき, 以下の条件を満たす $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in V^*$ は V^* の一つの基底になることを示しなさい.

$\alpha_0(1) = 1\,;\quad \alpha_0(x) = 0\,;\quad \alpha_0(x^2) = 0\,;$
$\alpha_1(1) = 0\,;\quad \alpha_1(x) = 1\,;\quad \alpha_1(x^2) = 0\,;$
$\alpha_2(1) = 0\,;\quad \alpha_2(x) = 0\,;\quad \alpha_2(x^2) = 1\,;$

(5) $f(x) \in V$ に対して, $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\, dx$ を対応させる写像を I と表わす. I は線形写像であることを示しなさい.

(6) I を α_0, α_1, α_2 の線形結合で表わしなさい.

(筑波大 2010) (m20101316)

0.74 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$$

が収束するような実数 α の値の範囲を求めよ.

(筑波大 2012) (m20121326)

0.75 N 人のグループで意見が集約される過程を考える. グループ内の各構成員は意見 A か意見 B を持つとする. 各時刻 t から $t+1$ にかけて $(t = 1, 2, \cdots)$, 構成員 1 人の意見が変化する可能性があるとする. この時, 意見 A を持つ人の人数 i は, $i = 1, 2, \cdots, N-1$ の時, 確率 $\alpha\ (>0)$ で $i+1$ 人に増え, 確率 $\beta\ (>0)$ で $i-1$ 人に減り, 確率 $1-\alpha-\beta\ (\geq 0)$ で i 人のままだとする. また, 全員の意見が A か B のどちらかに集約されたら ($i = N$ か $i = 0$), それ以降は意見変更は起こらないとする. 以下の問いに答えよ.

(1) $N = 3$, $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/2$ のケースを考える. 「時刻 $t = 1$ で $i = 2$ のとき, 時刻 $t = 6$ までに全員の意見が A に集約されている確率」を求めよ.

(2) 「時刻 t で意見 A の数が i 人のとき, 時刻 $t \to \infty$ で全員の意見が A に集約されている確率」を $x(i,t)$ と書くこととする. $N = 3$, $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/2$ のとき, $x(2,1)$ を求めよ.

(3) 任意の N, i, α, β に関して $x(i,1)$ は $x(i,2)$ と等しくなる. 理由を述べよ.

(4) 上記の問題文の下線部に注意し，$x(i,1)$ を，$x(i,2)$, $x(i+1,2)$, $x(i-1,2)$, α, β のすべてを用いた式で表せ.

(5) $x(i,1)=x(i,2)=x_i$ $(i=0,1,2,\cdots,N)$ とおき，x_i についての漸化式により x_1 を求めよ.

(筑波大 2013)　　(m20131318)

0.76 $f : V \to V$ を実ベクトル空間 V の間の線形写像，α を f の実固有値，V_α を α に関する f の固有空間とする．V の部分空間 W_1, W_2 が次の 2 条件を満たすとする:

(a) $V = W_1 \oplus W_2$

(b) $f(W_1) \subseteq W_1$, $\quad f(W_2) \subseteq W_2$

このとき以下の問いに答えよ.

(1) $V_\alpha = (V_\alpha \cap W_1) \oplus (V_\alpha \cap W_2)$ が成り立つことを示せ.

(2) $\dim V_\alpha = 1$ ならば，V_α は W_1 または W_2 の部分空間であることを示せ.

(筑波大 2014)　　(m20141313)

0.77 実数列 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots\}$ と $\{b_1,\ b_2,\ \cdots\}$ に対して実数列 $\{a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ \cdots\}$ をその和と定義し，実数 α に対して $\{\alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \cdots\}$ を実数列 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots\}$ の α 倍と定義すると実数列の全体は実ベクトル空間を成す．このとき (1)〜(4) がこのベクトル空間の部分空間であるかどうかを，理由を示して答えなさい.

(1) ゼロに収束する実数列の全体

(2) 1 に収束する実数列の全体

(3) 有界な実数列の全体

(4) 非有界な実数列の全体

(筑波大 2015)　　(m20151312)

0.78 確率変数 Z が x 以上になる確率を $P(Z \geq x)$ と書くとき，$0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす α に対して Z の $100(1-\alpha)$ パーセント点 z_α は

$$P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$$

で定義される．特に Z が標準正規分布に従うとき，z_α の具体的な値は次表で与えられる.

α	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
z_α	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

また，期待値 μ，分散 σ^2 が正規分布を $N(\mu,\sigma)$ で表すとする．このとき，以下の問に答えよ.

(1) 期待値 μ，分散 σ^2 が未知の $N(\mu,\sigma)$ に従う母集団からとった n 個の標本に対して，標本平均と標本分散をそれぞれ $\overline{x}$ と s^2 とする．このとき，$\sqrt{n}\dfrac{(\overline{x}-\mu)}{s}$ は t 分布に従う．t 分布の $100(1-\alpha)$ パーセント点を $t_{n-1;\alpha}$ とするとき，μ の $100(1-\alpha)$ パーセント信頼区間を示せ.

(2) $N(\mu,\sigma)$ に従う母集団から大きさ 4 の標本を選んだところ，観測値は 12.7, 13.0, 13.3, 13.0 であったとする．以下の (a),(b) の場合に μ の 95% 信頼区間を求めよ.

(a) $\sigma^2 = 0.16$ であることがわかっている場合

(b) σ^2 が未知である場合（ただし，$t_{n-1;\alpha}$ は z_α に等しいと仮定する）

(筑波大 2016)　　(m20161314)

0.79 3 次元実数ベクトル空間 V_α に $x_1x_2x_3$ 直交座標軸を固定し．2 次曲面

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3+4x_1+2x_2-2x_3=0 \qquad \cdots\cdots①$$

を考える．以下の設問に答えよ．

(1) 式 ① を以下の 2 次曲面の標準形の式

$$^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}+2\,{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}+c=0 \qquad \cdots\cdots②$$

で表すとき，A, $\boldsymbol{b}$, c を求めよ．ただし，A は実対称行列，${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置ベクトル，${}^tA$ は A の転置行列を示し，$\boldsymbol{x}={}^t(x_1,\ x_2,\ x_3)$ とする．

(2) 上記 (1) の A は適当な直交行列 P を用いて対角行列 $T={}^tPAP$ にすることができる．T と P を求めよ，導出過程も示せ．ただし，対角行列 T の対角成分 t_{ii} $(t=1,2,3)$ は $t_{11}\geq t_{22}\geq t_{33}$ とし，直交行列 P の第 2 列は ${}^t(1,2,1)$ に平行にとること．

(3) 3 次元実数ベクトル空間 V_β において $y_1\ y_2\ y_3$ 直交座標軸を固定する．いま，V_α の元 $\boldsymbol{x}$ と V_β の元 $\boldsymbol{y}={}^t(y_1,\ y_2,\ y_3)$ との間で

$$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y} \qquad \cdots\cdots③$$

が成立するものとする．ここで P は (2) で得られた直交行列である．式 ② の 2 次曲面を，$T, b, \boldsymbol{y}$ を用いた式で表せ．

(4) 上記 (3) で得られた式を，y_1, y_2, y_3 を用いて書き直せ．

(5) 上記 (4) で表される 2 次曲面を y_1 軸周りに回転させたところ．平面 $y_3=0$ について対称となった．回転後の 2 次曲面を表す式を求めよ．導出過程も示すこと．また，この 2 次曲面の概形を $y_1y_2y_3$ 座標系で描け．

(筑波大 2017)　　(m20171305)

0.80 (1) 関数 $f(x)=e^x$ をマクローリン展開（$x=0$ のまわりでテイラー展開）せよ．

(2) 以下の性質 (A) を用いて，次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{1!}+\frac{n-1}{2!}+\cdots+\frac{2}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right)$$

(A) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=\alpha$$

が成り立つ．

(3) 上の性質 (A) を証明せよ．

(筑波大 2017)　　(m20171312)

0.81 (1) 数列

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n \quad (n=1,2,\cdots)$$

が単調減少であることを示せ．

(2) 上の数列が，$C\geq\dfrac{1}{2}$ を満たすある定数 C に収束することを示せ．

(3) 広義積分

$$\int_0^1\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)dx$$

の値を上の定数 C を用いて表せ．ただし，$[\alpha]$ は α を超えない最大の整数を表す．

(筑波大 2017)　　(m20171317)

0.82 (1) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するならば有界であることを証明せよ.

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta \in \mathbb{R}$ が成り立つとする. このとき等式 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ を証明せよ.

(3) 区間 $I \subset \mathbb{R}$ 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ は $n \longrightarrow \infty$ のとき点 $\alpha \in I$ に収束し, 関数 f は点 $\alpha \in I$ で連続であるとする. このとき等式 $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\alpha)$ を証明せよ.

(4) 写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ の合成 $g \circ f : X \to Z$ は単射であるとする. このとき f も単射であることを示せ.

(筑波大 2017) (m20171318)

0.83 $E_1, \cdots, E_n$ を互いに排反で網羅的な事象とし, 各事象 E_k が生起する確率を θ_k とする. 今, 実験を m 回独立に試みたとき, 事象 E_k が観測される度数を x_k とすると, $(x_1, \cdots, x_n)$ が実現する確率 $P(x_1, \cdots, x_n)$ は多項分布により求められる. ここで, $m = x_1 + \cdots + x_n$ である. $\theta_1, \cdots, \theta_n$ が既知であるとき, サンプル $(x_1, \cdots, x_n)$ が多項分布に従う母集団からとられたという帰無仮説は次の統計量

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - m\theta_k)^2}{m\theta_k}$$

で検定できる. m が十分大きいときは, 統計量 S は自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布に従う. 自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布の $100\alpha\%$ 有意水準点を $X^2(n-1,\ \alpha)$ により表すとする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) 上記の問題において, 5% 有意水準で帰無仮説が棄却される条件を式で示せ.

(2) サイコロを 120 回投げ, 出た目の度数を数えたとき, 下記のようになったとする.

出た目	1	2	3	4	5	6	計
度　数	15	19	23	20	21	22	120

このとき, サイコロが偏っていないという帰無仮説が 5% 有意水準で棄却されないという条件を式で示せ.

(3) ランダムに選ばれた 800 個の材料のうち 400 個に処理 1（事象 A）を, 残りの 400 個に処理 2（事象 $\overline{A}$）を行った. さらに, これらの材料の強度試験を行ったところ, もろい（事象 B）ともろくない（事象 $\overline{B}$）という 2 種類に下表のように分離された;

	もろい	もろくない
処理 1	77	323
処理 2	177	223

この問題では, $n = 4$, $m = 800$ となるが, 各事象が生起する確率 $P(A)$, $P(B)$ は未知である. そこで, 観測された度数の割合で求められる値を $P(A)$, $P(B)$ の推定量として置き換えて計算する. このとき, 統計量 S は m が十分に大きいならば, 自由度 1 のカイ 2 乗分布に従う. 材料の処理と強度とは独立であるという帰無仮説が 5% 有意水準で棄却されるという条件を式で示せ.

(筑波大 2018) (m20181313)

0.84 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) A のすべての固有値と, それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ. なお, 固有ベクトルはその第 1 成分を 1 とせよ.

(2) $P^{-1}AP = D$ が対角行列になるように，3 次正則行列 P とその逆行列 P^{-1} の組を求めよ．なお，D の対角要素は大きい順に並べ，P の第 1 行の要素はすべて 1 とせよ．

(3) 自然数 n に対して，ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = (A+2E)^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の各成分を n の関数として求めよ．ここで E は単位行列である．

(4) 3 次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，その転置ベクトルを ${}^t\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とするとき，${}^t\boldsymbol{r}(A+E)\boldsymbol{r} = 1$ で表される曲面 M は，直交変換 $(x,y,z) \to (X,Y,Z)$ によって標準形

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = 1$$

にすることができる．$\alpha > \beta > \gamma$ となるように定数 α, β, γ を定めよ．

(5) (4) における曲面 M に対して

$$\boldsymbol{r} \to R\boldsymbol{r}$$

で表される回転を施したら，xy 平面，yz 平面，zx 平面いずれに関しても対称な図形となった．このような回転を表す行列 R をひとつ求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191307)

0.85 α を実数の定数とし，n を 2 以上の整数とする．

$$f(x,y) = (y-x)^n + x^2 + \alpha y^2$$

に関する以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の 1 次および 2 次の偏導関数をすべて求めよ．

(2) $f(x,y)$ が $(x,y) = (0,0)$ において極値を取るかどうか判定せよ．

(筑波大 2019)　　(m20191316)

0.86 次の説明を読んで，各設問に答えよ．ただし，計算や解答の際には，小数第 4 位を四捨五入した値を用いよ．

ある地方自治体の首長選挙では，現職と新人 1 人の 2 人だけが立候補した．地方報道機関が出口調査（投票を済ませた人に直接投票先をたずねる調査）を行ったところ，以下の結果を得た．なお，各標本は無作為に抽出され，全てが有効投票であり，出口調査の無回答者もいなかったものとする．

投票先	現職	新人
人数	441	400

また，$0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす α に対して標準正規分布に従う確率変数 Z の $100(1-\alpha)\%$ 点 z_α は

$$Pr(Z \geq z_\alpha) = \alpha$$

で定義され，その具体的な値は次表で与えられる．ここで，$Pr(Z \geq z_\alpha)$ は Z が z_α 以上になる確率である．

α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
z_α	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

(1) 現職の投票率 p の 95% 信頼区間を求めよ．得票率とは，有効投票数に占めるその候補者が獲得した票数の割合である．

(2) 現職が当選するといえるか，適当な帰無仮説と対立仮説を立て，有意水準 0.05 で検定せよ．

(筑波大 2020)　　(m20201308)

0.87 $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqq x \text{ かつ } 0 \leqq y \leqq x^2\right\}$ とし，α は $0 < \alpha < 1$ を満たす定数とする．

(1) 変数変換 $x = s,\ y = s^2 t$ を用いて，広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^\alpha}{x^4 + y^2} dxdy$ を計算せよ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^4 + y^2} \log(1 + x^\alpha) dxdy$ が収束することを示せ．

(筑波大 2020)　　(m20201316)

0.88 (1) 以下の命題を証明せよ．

(a) $V,\ W$ を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，f は V から W への線形写像であるとする．V の有限個の元 $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k$ について，$f(\boldsymbol{v}_1),\ f(\boldsymbol{v}_2),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{v}_k)$ が線形独立ならば，$\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k$ も線形独立である．

(b) α は 1 より大きい定数とする．このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ は収束する．

(2) 以下の命題に対する反例を与え，それが反例であることを示せ．

(a) $\mathbb{R}$ 上の数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $U_1,\ U_2,\ U_3$ が $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{0\}$ を満たせば，部分空間の和 $U_1 + U_2 + U_3$ は直和である．

(b) $\mathbb{Z}$ の任意の部分集合 $A,\ B$ に対して，$P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ が成り立つ．ただし，集合 X に対して，$P(X)$ は X のべき集合（X の部分集合全体の集合）を表す．

(c) 写像 $f\ :\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ に対して，写像 $g\ :\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ であって合成写像 $g \circ f$ が $\mathbb{Z}$ 上の恒等写像に等しいものが存在すれば，f は全単射である．

(筑波大 2020)　　(m20201317)

0.89 3 次行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

を考える．なお，以下で I は 3 次の単位行列とする．

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．なお，各固有ベクトルは，その成分が簡単な整数となるようにすること．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように，正則行列 P とその逆行列 P^{-1} を定めよ．なお，P はその要素が簡単な整数となるようにすること．

(3) 行列 A^3 を

$$A^3 = xA^2 + yA + zI$$

のように $A^2,\ A,\ I$ の線形結合で表したときの線形結合係数 x, y, z を定めよ．

（設問 (2) で求めた行列 P, P^{-1} を用いると $P^{-1}A^3P$ や $P^{-1}A^2P$ も対角行列となること，および，A の固有値はどれも A の固有方程式を満たすことを利用するとよい．）

(4) 係数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を任意に選んで

$$C = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I$$

で与えられる 3 次行列 C を考えるとき，$C' = AC$ で定義される行列 C' も，ある係数 α', β', γ' を用いて

$$C' = \alpha' A^2 + \beta' A + \gamma' I$$

と表され，それらの係数の間には必ず

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

の関係がある．3 次行列 M を定め，その固有値を求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211318)

0.90 次は，あるクラスのテストの点数である．

77 74 75 85 90 67 62 60 58

このデータの標本平均は 72.0，標本不偏分散は 124.5 である．テストの点数は，正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う母集団から無作為に抽出した標本とみなせるものとする．このとき，以下の各問に答えよ．なお，計算の過程で適宜，有効数字 3 桁に丸めてよい．

(1) 母分散 σ^2 の 95 % 信頼区間を求めよ．

(2) 母平均 μ の 95 % 信頼区間を求めよ．

(3) $\sigma^2 = 121$ と判明したとき，μ の 95 % 信頼区間を求めよ．

(筑波大 2022)　　(m20221309)

付表 1

$\sqrt{2} = 1.414$	$\sqrt{3} = 1.732$	$\sqrt{5} = 2.236$	$\sqrt{7} = 2.646$	$\sqrt{11} = 3.317$

付表 2

$e^1 = 2.718$	$e^2 = 7.389$	$e^3 = 20.09$	$e^4 = 54.60$	$e^5 = 148.4$

付表 3　標準正規分布表 : $Q(z) = \displaystyle\int_0^z \phi(t)dt$，ただし，$\phi(\cdot)$ は標準正規分布の確率密度関数　（省略）

付表 4　χ^2 分布表 : 自由度 m の χ^2 分布の上側 100α% 点 $\chi^2_\alpha(m)$

α \ m	6	7	8	9	10
0.975	1.237	1.690	2.180	2.700	3.247
0.950	1.635	2.167	2.733	3.325	3.940
0.050	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31
0.025	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48

付表 5　t 分布表 : 自由度 m の両側 100α% 点 $t_\alpha(m)$

α \ m	6	7	8	9	10
0.10	1.943	1.895	1.860	1.833	1.812
0.05	2.447	2.365	2.306	2.262	2.228

0.91 実数 α に対し，$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x^\alpha \sin \dfrac{1}{x} & (x > 0) \end{cases}$ とおく．

(1) $\alpha > 1$ のとき，$f(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で微分可能であることを示せ．

(2) $\alpha \leq 1$ のとき，$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能でないことを示せ．

(3) $\alpha > 1$ のとき，$f'(x)$ が $-\infty < x < \infty$ で連続となる α の範囲を求めよ．

(埼玉大 2003)　(m20031402)

0.92 (1) 関数 $f(x) = (1+x)^\alpha$ をマクローリン展開することにより，次式を導き出せ．

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} {}_\alpha\mathrm{C}_i x^i \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

ただし，${}_\alpha\mathrm{C}_i$ は次式で表される．　${}_\alpha\mathrm{C}_i = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!} \qquad (i \geqq 1)$

(2) 式 ① を用いて次の関数 $g(x)$ のマクローリン展開式を x^3 の項まで求めよ．　$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$

(埼玉大 2007)　(m20071401)

0.93 (1) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とする．ただし，θ は $0 < \theta < 2\pi$, $\theta \neq \pi$ を満たす実数とする．
次の条件 (a),(b),(c) をすべて満たすような α_1, α_2, $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ の組を 1 つ求めよ．

(a) α_1, α_2 は相異なる複素数である．

(b) $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ は複素数を成分とする 2 次元ベクトルで，どちらも零ベクトルではなく，さらに $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)$ と $\dfrac{i}{2}(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)$ はともに実数を成分とするベクトルになる．

(c) $A\boldsymbol{p}_1 = \alpha_1\boldsymbol{p}_1$ かつ $A\boldsymbol{p}_2 = \alpha_2\boldsymbol{p}_2$ を満たす．

(2) B を 2 次の実正方行列とし，B のどの固有値も実数でないと仮定する．

(i) 次の (d),(e),(f) をすべて満たすような β_1, β_2, $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ の組が存在することを示せ．

(d) 正の実数 r と，$0 < \theta < 2\pi$, $\theta \neq \pi$ を満たす実数 θ を用いて，$\beta_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\beta_2 = r(\cos\theta - i\sin\theta)$ と表される．

(e) $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ は複素数を成分とする 2 次元ベクトルで，どちらも零ベクトルでなく，さらに $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2)$ と $\dfrac{i}{2}(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2)$ はともに実数を成分とするベクトルになる．

(f) $B\boldsymbol{q}_1 = \beta_1\boldsymbol{q}_1$ かつ $B\boldsymbol{q}_2 = \beta_2\boldsymbol{q}_2$ を満たす．

(ii) 2 次の実正則行列 M が存在して，

$$M^{-1}BM = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

となることを示せ．

(埼玉大 2009)　(m20091405)

0.94 n を自然数とし，$D_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \dfrac{1}{n} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x - \dfrac{1}{n}\right\}$ とおく．α を $0 < \alpha < 1$ を満たす定数とする．次を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_{D_n} \frac{dxdy}{(x-y)^\alpha}$ を求めよ．

(2) (1) の積分値を I_n とおいたとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

(埼玉大 2009)　(m20091407)

0.95 $\alpha > 0$ とする．$x \geqq 1$ で定義された関数 $f_\alpha(x)$ は,

$$x \in [n, n+1) \text{ において} \quad f_\alpha(x) = \frac{1}{n^\alpha}$$

となるものとする．ただし，n は自然数とする．このとき

$$\int_1^{N+1} f_\alpha(x)dx = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$$

となることを利用して次の問いに答えよ．

(1) $\alpha > 1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ が収束することを示せ．

(2) $\alpha \leqq 1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ が発散することを示せ．

(埼玉大 2011)　　(m20111410)

0.96 (1) 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

の固有値をすべて求め，さらに，それぞれの固有値に対する固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) 次の主張は正しいか，それとも誤りか，正しければ証明し，誤りならば反例を挙げよ．

(主張)「 2 次実正方行列 B が相異なる実数の固有値 α, β を持つならば，ある実正則行列 P が存在し，$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ となる．」

(埼玉大 2014)　　(m20141406)

0.97 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 4a_n + 6 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で与えられる数列について, 以下の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n - \alpha\}$ が等比数列になるように, α を定めよ.

(2) (1) を利用して, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(群馬大 2010)　　(m20101502)

0.98 3 次方程式 $2x^3 - 9x^2 - 6x + 5 = 0$ の 3 つの解を α, β, γ とするとき, 以下の各式の値を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}$　　　(2) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

(群馬大 2011)　　(m20111501)

0.99 a, b, c を定数として，3 次関数

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

を考える．このとき以下の問に答えよ．

(1) 関数 $y = f(x)$ のグラフにおいて，点 $(\alpha, f(\alpha))$ における接線と法線の方程式を求めよ．

(2) どのような場合に，関数 $y = f(x)$ が $x = \alpha$ で極値をとるといわれるのかを説明せよ．

(3) 関数 $y = f(x)$ が x のいかなる値でも極値をとらない条件を a, b, c を用いて示せ．

(茨城大 2002)　　(m20021701)

0.100 (1) 関数 $f(x) = \sin x$ に対して，$f^{(n)}(0)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ．

(2) $\sin x$ のマクローリン展開（0 のまわりでのテイラー展開）をかけ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{1}{x^\alpha}\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right) = 0$ となる正の定数 α の条件を求めよ．

(茨城大 2002)　　(m20021703)

0.101 実数 $\alpha,\ \beta$ に対して, 2 次実正方行列 A で

$$A^2-(\alpha+\beta)A+\alpha\beta I=O$$

(I は 2 次単位行列, O は 2 次零行列) を満たすものを考える. 但し, A は I の定数倍ではないとする. 以下に各問に答えよ.

(1) $A-\alpha I$ と $A-\beta I$ は, どちらも正則でないことを示せ.

(2) 実数を成分とする 2 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ に対して, $\boldsymbol{y}=(A-\beta I)\boldsymbol{x}$ とおく. このとき任意の $\boldsymbol{x}$ に対して,

$$(A-\alpha I)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$$

となることを示せ. また, α は A の固有値であることも示せ. さらに, $\boldsymbol{p}_1$ を α に対する固有ベクトルとするとき,

$$(A-\beta I)\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_1$$

を満たす列ベクトル $\boldsymbol{p}_2$ で, $\{\boldsymbol{p}_1\,,\ \boldsymbol{p}_2\}$ が一次独立となるものが存在することを示せ.

(3) (2) の $\boldsymbol{p}_1\,,\ \boldsymbol{p}_2$ を用いて, 2 次正方行列 P を

$$P\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{p}_1\,,\quad P\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{p}_2$$

であるように定める. $P^{-1}AP$ および $p^{-1}A^nP$ $(n=2,3,4,\cdots)$ を求めよ.

(茨城大 2010)　　(m20101706)

0.102 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)=x^2+2xy-y^2$ について．以下の各問に答えよ.

(1) すべての $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対し，等式

$$f(x,y)=(\alpha x-y)(\beta x+y)$$

が成り立つように正定数 $\alpha,\ \beta$ を定めよ.

また $f(x,y)=0,\ f(x,y)=1$ の軌跡の概形を xy直交座標平面にそれぞれ図示せよ .

(2) 点 (x,y) が原点を中心とする単位円周上を動くとき，関数 $f(x,y)$ の最大値と最小値を求めよ.

(3) 点 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ を中心とする単位閉円盤を D とするとき，次の等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{\pi}\iint_D f(x,y)dxdy=f(a,b)$$

(茨城大 2011)　　(m20111702)

0.103 複素数 z の絶対値を $|z|$，z の共役複素数を $\overline{z}$ で表す．$w=e^{\frac{2\pi}{3}i}$ とおくとき，以下の各問に答えよ.

(1) 次の値をそれぞれ求めよ.

(i) w^3　　(ii) $|w|$　　(iii) $w\overline{w}$　　(iv) $1+w+w^2$

(2) 複素数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ に対して,

$$c_n=\alpha+\beta\,\overline{w^n}+\gamma\,\overline{w^{2n}}\qquad(n=0,1,2)$$

とおく．このとき,

$$d_n=c_0+c_1w^n+c_2w^{2n}\qquad(n=0,1,2)$$

とおく．$d_0\,,\ d_1\,,\ d_2$ をすべて計算して，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を使って表せ.

(茨城大 2013)　　(m20131705)

0.104 a を実数の定数とする．xy 平面において，関数 $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ のグラフが 3 点 $(2, 1)$, $(3, -1)$, $(a, 0)$ を通るとする．このような実数 α, β, γ がただ 1 組定まるための必要十分条件は，$a \neq 2$ かつ $a \neq 3$ であることを示せ．また，この条件のもとで，α, β, γ の値を求めよ．

(茨城大 2014)　　(m20141704)

0.105 定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta \sin(\lambda x + \mu)dx$ を求め，定数 α, β, λ, μ の式で表しなさい．ただし，$\lambda \neq 0$ とする．

(山梨大 2007)　　(m20071805)

0.106 座標平面上に曲線 $y = \cos x$ の $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分と x 軸とで囲まれた領域を D とし，関数 $f(x) = e^{\sin x}$ を考える．ここに，e は自然対数の底とする．

(1) $\dfrac{df(x)}{dx}$ を求めなさい．

(2) α が定数のとき，定積分 $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\cos x\,dx$ を α の式で表しなさい．

(3) D における二重積分 $\displaystyle\iint_D f(x)\,dxdy$ の値を求めなさい．

(山梨大 2008)　　(m20081804)

0.107 α を正の定数として，座標平面上の領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq y \leqq \alpha\}$ を考える．このとき，D における二重積分 $\displaystyle\iint_D \cos x \sin y\,dxdy$ を求め，α の式で表しなさい．

(山梨大 2009)　　(m20091804)

0.108 (1) 複素数 z に対する二項方程式 $z^5 = 1$ の解を全て求めよ．また，$z \neq 1$ の解の一つを ω として，1 以外の全ての解を ω を用いて表し，1 を含む全ての解を複素平面上に図示せよ．

(2) 複素数 z に対する二項方程式 $z^5 = 5$ の全ての解を，前問 (1) の ω を用いて表せ．

(3) 複素数 α をそれ自身に変換する写像を ε，α を $\omega\alpha$ に変換する写像を σ とするとき，合成写像 σ^2, σ^3, σ^4 によって，α はどのように変換されるか答えよ．

(4) 前問 (3) の写像 σ の合成写像 σ^{n+4} $(n = 1, 2, 3, 4, 5)$ により α を変換せよ．

(山梨大 2019)　　(m20191803)

0.109 関数 $f(x) = e^x \sin(x + \alpha)$ の第 n 階導関数は

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin(x + \alpha + \frac{n\pi}{4})$$

であることを証明せよ.

(信州大 1998)　　(m19981901)

0.110 (1) 次の行列式を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} {a_1}^2 & a_1 & 1 \\ {a_2}^2 & a_2 & 1 \\ {a_3}^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix}$$

(2) 1 直線上にない平面上の 3 点 (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) の x 座標が相異なるとき，この 3 点を通る放物線 $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ は存在し，ただ 1 つであることを証明せよ.

(信州大 1998)　　(m19981904)

0.111 α, β, γ を互いに異なる数とし, ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ を次で定める.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ \gamma^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \\ \delta^2 \end{pmatrix}$$

このとき, ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は 1 次独立であることを示し, ベクトル $\boldsymbol{d}$ を, ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の 1 次結合で表せ.

(信州大 2004)　　(m20041903)

0.112 数列 $\{a_n\}$ に対して，$a_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$ の定義は,「任意の $\varepsilon > 0$ に対してある番号 n_0 があって，$n \geq n_0$ である任意の n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ」である．

$a_n \to \alpha \ \ (n \to \infty)$, $a_n \to \beta \ \ (n \to \infty)$ であるとき，$a_n + b_n \to \alpha + \beta \ \ (n \to \infty)$ が成り立つことを上の定義に従って証明せよ．ただし，α, β は実数とする．

(新潟大 2002)　　(m20022003)

0.113 次の問いに答えよ．

(1) 定積分を用いて，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$ を求めよ．

(2) $\beta > 2$ に対して，定積分 $\displaystyle\int_2^\beta \frac{dx}{x(\log x)^\alpha}$ を求めよ．ただし，$\alpha > 0$ とする．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^\alpha}$ は存在するかどうかを調べ，存在する場合はその値を求めよ．ただし，$\alpha > 0$ とする．

（新潟大 2004）　　(m20042002)

0.114 座標空間において, 3 点 $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,2)$ を通る平面を α とし, 原点 $O(0,0,0)$ から平面 α に下ろした垂線の足を H とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 2 つのベクトル $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ の両方に垂直な単位ベクトルを 1 つ求めよ.

(2) α の方程式を求めよ.

(3) H の座標を求めよ.

(4) H は $\triangle ABC$ の垂心であることを示せ.

(新潟大 2005)　　(m20052004)

0.115 物理によく用いられるオイラーの公式（ $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 　ここで，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位 ）は, 指数関数と三角関数を結びつける重要な公式である．この公式を使って，次の関係式を証明せよ.

(1) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ 　　(2) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

(新潟大 2007)　　(m20072003)

0.116 (1) $y = x^n$ を n 回微分せよ. なお, n は正の整数である.

(2) $y = \sin x$ を n 回微分せよ.

(3) α は任意の実数で $x > 0$ とする. $y = x^\alpha$ のとき, $y' = \alpha\, x^{\alpha - 1}$ であることを与式の両辺の対数を取って示せ.

(4) (3) と同様の方法を用いて $y = x^2\sqrt{\dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}}$ を微分せよ.

(新潟大 2010)　　(m20102001)

0.117 行列 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ の固有値を α_1, α_2 とし，それぞれの固有値に対する固有ベクトルを ν_1, ν_2 とする． また，行列 $T = [\nu_1 \quad \nu_2]$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$ となることを示せ． ただし，ベクトル T^{-1} はベクトル T の逆行列である．

(2) ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ について，$\boldsymbol{c} = A\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} = T\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{c} = T\boldsymbol{q}$ とするとき，$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{p}$ となることを示せ.

(3) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ のとき，$\alpha_1 < \alpha_2$ の値を求めよ． また，$\nu_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\nu_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ となることを示せ.

(4) $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ のとき，ベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ の値を求め，$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{p}$ となっていることを確かめよ.

(新潟大 2014) (m20142005)

0.118 以下のように行列 A, B, C を定義する．

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{i\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

また，I を 3×3 の単位行列とする． ここで，i は虚数単位で $i = \sqrt{-1}$ である．

(1) $A^2 + B^2 + C^2 = kI$ となることを示し，定数 k を求めよ．

(2) A の固有値を求めよ．

(3) 一般に，正方行列 M の指数関数 e^M は，無限級数 $e^M \equiv \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}M^n$ で定義される． α を実定数としたとき，

$$e^{i\alpha C} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$$

(問題ではこうなっていましたが, $(2,2)$ 成分は 1 になるものと思われます)

となることを示せ.

(4) ベクトル $\overrightarrow{v}(\phi)$ を $\overrightarrow{v}(\phi) = \dfrac{\sin\phi}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{i\cos\phi}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と定義する．

このとき，$e^{i\alpha C}\overrightarrow{v}(\phi) = \overrightarrow{v}(\phi')$ と書けることを示し，ϕ' を求めよ． ただし，ϕ と ϕ' は実定数である．

(新潟大 2017) (m20172017)

0.119 定数係数の 2 階線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 3y = e^{5t} \tag{1}$$

の一般解を求める．

(a) 斉次微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0$$

の基本解を求めよ.

(b) 式 (1) の特解を $y(t) = Ce^{\alpha t}$ とおいて，定数 C と α を求めよ.

(c) 式 (1) の一般解を求めよ.

次に，変数係数の 2 階微分方程式

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 3y = x^5 \tag{2}$$

の一般解を求める.

(d) $x = e^t$ とおくことで，式 (2) が式 (1) に書き換えられることを示せ.

(e) 式 (2) の一般解を求めよ.

(新潟大 2017)　　(m20172018)

0.120 下の問いに答えなさい.

(1) α を定数，x を未知数とする方程式

$$\alpha x + 3x = 0$$

が $x = 0$ 以外の解を持つような α の値を求めなさい.

(2) α を定数，x, y を未知数とする連立方程式

$$\begin{cases} \alpha x + y = 0 \\ 2x + (\alpha - 1)y = 0 \end{cases}$$

が $x = y = 0$ 以外の解を持つような全ての α の値を求め，それぞれの α に対する $x = y = 0$ 以外の解 (x, y) を 1 つずつ求めなさい.

(長岡技科大 2014)　　(m20142102)

0.121 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$，$\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$ となる直交行列 P と α, β, γ を求めよ.

(金沢大 2000)　　(m20002203)

0.122 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ.

(1) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ が成立するような行列 P と α, β, γ $(\alpha < \beta < \gamma)$ を求めよ.

(2) (1) で求めた行列 P とある対角行列 B に対し $X = PBP^{-1}$ とおく．$X^2 = A$ が成立するように行列 B を定めよ.

(金沢大 2001)　　(m20012203)

0.123 行列 $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$, $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$ となる正則行列 P を 1 つ求めよ．さらに α, β, γ の値を求めよ．

(金沢大 2003)　　(m20032203)

0.124 (1) 変数変換 $x = u,\ y = uv$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy,\ D = \{(x,y) \mid 1 \leqq\ x \leqq\ 2,\ 0 \leqq\ y \leqq\ x\}$ を求めよ.

(3) $R > 1$ とし，$D_R = \{(x,y) \mid 1 \leqq\ x \leqq\ R,\ 0 \leqq\ y \leqq\ x\}$ とおく．実数 α について，極限値 $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \iint_{D_R} \frac{x^\alpha}{x^2+y^2}dxdy$ が存在するかどうか調べよ．存在する場合はその値を求めよ.

(金沢大 2008)　　(m20082203)

0.125 $D = \{(x,y)\ ;\ 0 \leq y < x \leq 1\}$ とする．$0 < \alpha < 1$ のとき，広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{(x^2-y^2)^\alpha}dxdy$ の値を求めよ.

(金沢大 2008)　　(m20082207)

0.126 $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$, $\dfrac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$ を示せ.

(2) $\cosh(\alpha+\beta) = \cosh\alpha\,\cosh\beta + \sinh\alpha\,\sinh\beta$ を示せ.

(3) $f(x) = e^{x\cosh\alpha}\cosh(x\sinh\alpha)$ とする．ただし，α は定数とする.

$$\frac{d^n f}{dx^n} = e^{x\cosh\alpha}\cosh(n\alpha + x\sinh\alpha)\,,\quad n = 1,2,3,\cdots$$

を示せ.

(金沢大 2009)　　(m20092202)

0.127 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ついて，次の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の各固有値に対する固有空間を求めよ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を一つ求めよ.

(4) $B = (\alpha E - A)(\beta E - A)^{-1}$ とおく．ただし E は 3 次の単位行列，α と β は A の固有値とは異なる実数とする．B を対角化せよ.

(金沢大 2015)　　(m20152205)

0.128 次の問いに答えよ.

(1) 実数 α に対し，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ が存在するような α の値の範囲を求めよ.

(2) $L>1$ に対し，集合 D_L を

$$D_L=\left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; 1\leqq x^2+y^2\leqq L^2\right\}$$

と定める．実数 β に対し，極限値

$$\lim_{L\to\infty}\iint_{D_L}\frac{dxdy}{1+(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}$$

が存在するような β の値の範囲を求めよ．

(金沢大 2019)　　(m20192208)

0.129 p と q を実数とする．行列

$$A=\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

が異なる実数の固有値 α と β をもつとき，次の問いに答えよ．

(1) p と q が満たす条件を求めよ．

(2) 次を満たす正則行列 P の一つを，α と β を用いて与えよ．

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

(3) 漸化式

$$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を，a_1，a_2，α，β を用いて表せ．

(金沢大 2020)　　(m20202201)

0.130 α を実数とする．2 以上の自然数 n に対して，n 次の正方行列 A_n を

$$A_n=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \alpha & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

により定める．ここで，$A_2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$，$A_3=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ である．

また，$a_n=\det(A_n)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) a_2，a_3 を求めよ．

(2) a_n を求めよ．

(3) $\alpha\geq 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

(金沢大 2021)　　(m20212204)

0.131 (1) $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$，$\mathbf{a}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{a}_3=\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{R}$ 上 1 次従属となるような実数 α の値を求めよ．

(2) β を実数とする．$\boldsymbol{R}^3$ の部分空間

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} \beta & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

の次元が 2 となるときの β の値を求めよ．また，そのときの W の 1 組の基底を求めよ．

(3) 写像

$$f : \boldsymbol{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 3x^2 - y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$$

が線形写像ではないことを示せ．

(金沢大 2021)　　(m20212207)

0.132 次の問いに答えよ．

(1) 正の数 A, B および実数 α に対して，$\boldsymbol{R}^2$ 内の集合

$$\left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; A(x-\alpha)^2 + By^2 \leqq 1 \right\}$$

で表される図形の面積を求めよ．

(2) $\boldsymbol{R}^3$ 内の集合

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{4} + 4y^2 + z^2 \leqq 1 \right\}$$

と平面 $H = \left\{ (x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x + z = 1 \right\}$ の共通部分 $H \cap E$ で表される図形の面積 S を求めよ．

(金沢大 2021)　　(m20212210)

0.133 (1) $\alpha > 1$ のとき，関数 $f(x) = (x + |x|)^\alpha$ は $\boldsymbol{R}$ 上の C^1 級関数であることを証明せよ．

(2) 集合 $\left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{4}(x+|x|)^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq -2 \right\}$ の面積を求めよ．

(3) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right) - 1 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(x^2\right)}$$

(金沢大 2022)　　(m20222201)

0.134 二つの箱 1 と 2 がある．はじめに，箱 1 には大量の粒子が入っており，その粒子の数を N_0 とする．また，箱 2 には粒子が入っていないものとする．いま，箱 1 の中の粒子は単位時間あたり α の確率で箱 2 に移るものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 箱 1 の粒子数を N_1 とすると，単位時間あたり箱 1 から箱 2 に $N_1\alpha$ 個の粒子が移ると考えられる．ことことをふまえ，箱 1 の粒子数の時間的変化を求めるための微分方程式を立てよ．ただし，時刻は t で表し，$t = 0$ から粒子の移動が始まるものとする．

(2) 上の微分方程式を解いて，箱 1 の粒子数 N_1 を時刻 t の関数として求めよ．

(3) いまあらたに，箱 2 に移った粒子は単位時間あたり β の確率で箱 1 に移るものとする．箱 1 の粒子数 N_1 と箱 2 の粒子数 N_2 の間には $N_1 + N_2 = N_0$ の関係があることに注意して，箱 1 の粒子数 N_1 の時間的変化を求めるための微分方程式を立てよ．

(4) 上の微分方程式を解いて，時刻 t における箱 1 の粒子数 N_1 を求めよ．ただし，時刻 $t = 0$ における箱 1 の粒子数は前の問題と同様 N_0，箱 2 の粒子数は 0 とする．

(5) 十分時間が経過した後の箱 1 の粒子数はいくらか．

(富山大 2003)　　(m20032304)

0.135 行列 $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ および 2 次の正方行列 P について，P が逆行列 P^{-1} をもち，$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ が成り立つとき，α，β は行列 C の固有値であることを証明せよ．また，自然数 n に対して C^n を求めよ．

(富山大 2004)　　(m20042308)

0.136 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ において, 部分列 $\{a_{2n}\}$，$\{a_{2n-1}\}$ がともに α に収束するならば $\{a_n\}$ も α に収束することを示せ.

(富山大 2004)　　(m20042315)

0.137 行列 $H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ (α，β は実定数，$\beta \neq 0$) について，以下の問に答えよ.

(1) H の固有値を α，β を用いて表せ.

(2) (1) で求めたそれぞれの固有値に対応する固有空間の正規直交基底を求めよ.

(3) H を直交行列を用いて対角化せよ.

(富山大 2013)　　(m20132304)

0.138 $\mathbb{N}$ を自然数全体の集合とする．$a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ とし，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が実数 α に収束するとする.

このとき，全単射 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対し $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = \alpha$ となることを示せ.

(富山大 2016)　　(m20162304)

0.139 次の各問いに答えよ．ただし，計算の概略も示すこと.

(1) 次の微分方程式が，一般解 $y = A\sin(nx + \alpha)$ をもつとき，$p(x)$ と $q(x)$ を求めよ．ただし，A, α は任意定数，$n \neq 0$ とする.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

(2) xy 平面上の点 (a, b) を中心とする直径 $R(>0)$ の円が満たす微分方程式を求めよ．ただし，微分方程式に a, b および R を含んではならない.

(3) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$x^{-1}\frac{dy}{dx} + 2y = 2$$

(富山大 2017)　　(m20172306)

0.140 半径 $a(a > 0)$ の円が x 軸に接して滑らずに転がるとき，円周上の定点が描く曲線をサイクロイドといい，パラメータを t として

$$x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

で与えられる．このとき次の各問いに答えよ.

(1) 導関数 $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ を計算せよ.

(2) $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$ を求めよ.

(3) 一般に，パラメータ t が α から β まで変化したとき，点 $(x(t), y(t))$ が描く曲線の長さ l は次式で表される．

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

サイクロイドにおいて，$t = t_0\ (0 < t_0 < 2\pi)$ を初期値として
円が一回転したとき $(t = t_0 + 2\pi)$ の曲線の長さを求めよ．

(富山大 2018)　　(m20182307)

0.141 以下の微分方程式の一般解を求めよ．また，特異解がある場合は特異解も求めよ．

(1) $\alpha \dfrac{dy}{dx} = \beta - \gamma y$　　（ $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は全て正の定数とする．）

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = 3\sin 3x$　　(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{2x^2 + y^2}$

(富山大 2020)　　(m20202305)

0.142 (1) 次の微分方程式の一般解を求めよ．
$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} + 5x = t + e^t$

(2) 次の常微分方程式を解き，初期条件 $t = 0$ で $x = x_0$ を満たす特殊解を求めよ.;
$\dfrac{dx}{dt} - x = -2x^2$

(3) 次の方程式で表される曲線族が満たす微分方程式を導け．また，この曲線族の直交曲線を求めよ．(α は曲線族のパラメータ)
$y^2 + \alpha x = 0$

(富山大 2021)　　(m20212305)

0.143 k を正の整数，α を複素数とするとき，微分方程式

$$x\frac{d}{dx}f(x) - \alpha\frac{d}{dx}f(x) + kf(x) = 0$$

について，以下の問いに答えよ.

(1) この微分方程式を解け.

(2) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$ の値が有限となるような解 $f(x)$ をもつための，α の条件を求めよ.

(福井大 2000)　　(m20002407)

0.144 $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ であって，$\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\cos\beta = -\dfrac{8}{17}$ のとき, 次の値を求めよ．

(1) $\sin(\alpha + \beta)$　　(2) $\cos(\alpha - \beta)$

(福井大 2005)　　(m20052415)

0.145 (1) 次の行列の逆行列を求めよ．　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

(2) α を実数とする. このとき, 行列　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　について，以下の問いに答えよ．

(a) A の行列式を計算せよ．　(b) A の階数を求めよ．

(3) 三つのベクトル $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ x \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ が線形従属（一次従属）となるような x の値を求めよ．

(福井大 2008)　　(m20082409)

0.146 以下に示されるような関数 $y(x)$ に関する常微分方程式が与えられている．

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha\frac{dy}{dx} + 2y = 4$$

ここで，α は実数であるとし，以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha = 5,\ y(0) = 0,\ \dfrac{dy(0)}{dx} = -2$ とするとき，微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ．

(2) $x \to \infty$ とするとき，$\alpha > 0$ という条件下では $y(x)$ がある有限の定数 y_p に収束することが知られている（すなわち $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = y_p$）．そのときの y_p の値を求めよ．

(3) (2) の条件の下で $y(x)$ が収束するとき，$y(x)$ が振動しながら収束するための α の条件を求めよ．

(福井大 2008)　　(m20082410)

0.147 (1) 次の関数を微分せよ．

(a) $y = \sin^3 4x$

(b) $y = a^x$

(2) 極座標系 (r, θ) についての方程式 $r = 2a\cos\theta$ の $\theta = \alpha$ における接線の方程式を求める．以下の各問に従って解答せよ．

なお，必要に応じて右下の公式を利用せよ．

$$\left\{\begin{array}{l} \sin 2A = 2\sin A\cos A \\ \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A \\ \cos(A \pm B) = \cos A\cos A \mp \sin A\sin B \end{array}\right\}$$

(a) 極座標系 (r, θ) と直交座標系 (x, y) との関係を求めよ．

$x =$

$y =$

(b) $\theta = \alpha$ における接線の傾き dy/dx を求めよ．

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\theta=\alpha)} =$$

(c) $\theta = \alpha$ における接線の方程式を求めよ．ただし，解答は途中の計算を示すとともに，$\square$ 内に記号または数字を入れて方程式を完成せよ．

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos\left(\square\square - \square\right)}{\square\, a\cos^2 \square}$$

(福井大 2009)　　(m20092401)

0.148 座標変換によって，曲線 $x^2 + xy + y^2 = 1$ を $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$ の形（標準系）に書き換えたい．ここでは，この変換を次の手順によって行う．以下の問いに答えよ，途中経過がわかるように記述しないと減点する．

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) 2つの固有ベクトルを正規化した列ベクトル（単位長さとした列ベクトル）を $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ とする．$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ を書け．（どちらが $\boldsymbol{p}$ でもよい）

(3) これらの列ベクトル $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ を使って，行列 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \end{pmatrix}$ を表せ．

(例：列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ のとき $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ という行列を表せる．)

(4) 行列 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ によって対角化せよ．ここで，$\boldsymbol{P}^{-1}$ は行列 $\boldsymbol{P}$ の逆行列である．

(5) $\boldsymbol{x}$ を$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{PX}$ で座標変換する．ここで，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ である．さて，このとき，$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{X}^T\left(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{AP}\right)\boldsymbol{X}$ となることを示せ．ここで，$\boldsymbol{x}^T$ は列ベクトル $\boldsymbol{x}$ の転置で，$\boldsymbol{P}^T$ は $\boldsymbol{P}$ の転置行列である．

(6) 問題 (4) と (5) の答を使って，$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax} = x^2 + xy + y^2 = 1$ を $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$ の形に変換せよ．ここで，α と β は上記の座標変換の結果から決まる数値（スカラー）である．

(福井大 2011)　　(m20112407)

0.149 次に示す微分方程式について以下の問いに答えよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2a\frac{dy}{dx} + 5y = f(x)$$

(1) $f(x) = 5$ として，以下の問いに答えよ．

(a) この微分方程式の特解 y_s を求めよ．

(b) この微分方程式の余関数（斉次方程式の一般解）が $C_1e^{\alpha x} + C_2e^{\beta x}$（ただし　α, β は異なる実数）の形となり，$x \to \infty$ で 0 に収束するための a の条件を求めよ．

(2) $a = 1$, $f(x) = 10\sin x$, $y(0) = -1$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0$ として，この微分方程式を解け．

(福井大 2011)　　(m20112410)

0.150 2 次方程式 $2x^2 - 5x - 6 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき，次の値を求めよ．

(1) $\alpha^2 + \beta^2$

(2) $\dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{\beta}$

(福井大 2012)　　(m20122401)

0.151 次の式を計算せよ．なお，$\alpha > 1$ とする．

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^\alpha}$$

(福井大 2013)　　(m20132402)

0.152 以下の設問に答えよ．ただし以下で i は虚数単位である．

(1) $\dfrac{5-i}{5+i}$ を $a + bi$ の形で表せ．

(2) $\left|\dfrac{1+i}{2+i}\right|$ の値を求めよ．

(3) 次の複素数を極形式で表せ．

1) $2 + 2\sqrt{3}i$　　　　2) $\dfrac{2}{1-i}$

(4) $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $y = \cos\beta + i\sin\beta$ とするとき，$xy = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$ であることを確かめよ．

(5) 上記 (4) の x について，$x^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$ が成り立つことを示せ．ただし n は自然数とする．

(福井大 2013)　　(m20132417)

0.153　3 次方程式 $2x^3-3x^2+3x-1=0$ の実数でない 2 つの根を α, β とするとき，次の値を求めよ．

(1) α および β　　(2) $(\alpha-1)(\beta-1)$　　(3) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$　　(4) $\alpha^3+\beta^3$

(福井大 2015)　　(m20152414)

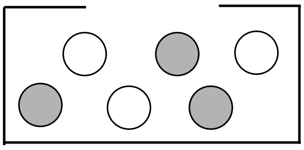
0.154　ある細菌の量を x，時間を t とする．細菌の増殖率 $\dfrac{dx}{dt}$ は x に比例し，その比例定数を α とする．

(1) $t=0$ における細菌の量を x_0 として，x を時間の関数で表せ．

(2) 細菌が T 時間で 2 倍になったとするとき α を T で表せ．また，最初の 1024 倍となる時間を求めよ．

(福井大 2015)　　(m20152419)

0.155　下図のように，箱の中に赤玉と白玉が 3 個ずつ入っている．二人で交互に箱の中から玉を取り出すとき，次の問いに答えなさい．ただし，箱の中は見えないものとする．なお，先に玉を取り出すものを先攻，後で玉を取り出すものを後攻と呼ぶことにする．また，勝敗は点数の高いほうを勝ちとする．



(1) 赤玉を 1 点，白玉を -2 点として，それぞれ交互に 3 回，玉を取り出して合計得点を競う．ただし，取り出した玉は，箱には戻さないものとする．先攻と後攻では，どちらが有利かを議論しなさい．

(2) 赤玉を 1 点，白玉を -2 点として，それぞれ交互に 3 回，玉を取り出して合計得点を競う．今回は，取り出した玉を箱に戻すか，戻さないかを取り出した後に決められるものとする．先攻と後攻では，どちらが有利かを議論しなさい．

(3) 赤玉を 1 点，白玉を α 点として，それぞれ交互に玉を取り出し，合計得点が先に 5 点を超えたものを勝ちとする．ただし，取り出した玉は，箱に戻すものとする．先攻と後攻のどちらが有利かを α の値を考慮して，議論しなさい．

(福井大 2016)　　(m20162425)

0.156　関数 $f(t)$ のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

について，以下の問に答えなさい．ただし，$\theta(t-\alpha)$ は単位階段関数で

$$\theta(t-\alpha)=\begin{cases} 1 & (t\geq\alpha) \\ 0 & (t<\alpha) \end{cases}$$

によって定義される．

(1) 単位階段関数 $\theta(t)$ および $\theta(t-1)$ のラプラス変換を求めなさい．

(2) $\mathcal{L}[e^{-(t-1)}\theta(t-1)]$ について，変数 s を用いて表しなさい．必要であれば以下の関係を用いてもよい．

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha)\theta(t-\alpha)]=e^{-s\alpha}F(s)$$

(福井大 2018)　　(m20182410)

0.157 ベクトル $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ は一次独立であるとする．これら $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ の一次結合である以下のような 3 つのベクトル $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{Q}$, $\overrightarrow{R}$ を考える．

$$\overrightarrow{P}=\alpha\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C},\quad \overrightarrow{Q}=\overrightarrow{A}+\beta\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C},\quad \overrightarrow{R}=\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\gamma\overrightarrow{C}$$

ただし，α, β, γ は定数とする．

上記の 3 つのベクトル $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{Q}$, $\overrightarrow{R}$ が一次独立であるためには，定数 α, β, γ に関して，$\alpha\beta\gamma-\alpha-\beta-\gamma+2\neq 0$ が成り立たなければならないことを証明せよ．

(福井大 2018)　　(m20182414)

0.158 行列 $\boldsymbol{A}$, ベクトル $\boldsymbol{b}$ に関して以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&2&0\\2&1&2\\0&2&-1\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値 α_1, α_2, α_3 及び対応する固有ベクトル $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ を求めよ．固有値は $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$ とし，固有ベクトルは大きさを 1 にせよ．

(2) $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルの線形結合で表せ．

(3) $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{b}$ $(n=1,2,\cdots)$ を求めよ．

(福井大 2020)　　(m20202408)

0.159 (1) 以下のベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ の一次独立，1 次従属を判定せよ．ただし，x は実数とする．

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1+x\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}3\\3+x\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}5+x\\5\\5\end{pmatrix}$$

(2) n を 2 以上の整数，α を 0 でない実数とする．次式で定義される n 次正方行列 $A=(a_{i,j})$ について，以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&\dots&0&0&\alpha\\0&0&0&\dots&0&\alpha&0\\0&0&0&\dots&\alpha&0&0\\\vdots&\vdots&&\iddots&&\vdots&\vdots\\0&0&\alpha&\dots&0&0&0\\0&\alpha&0&\dots&0&0&0\\\alpha&0&0&\dots&0&0&\alpha\end{pmatrix}\quad \text{すなわち}\quad a_{i,j}=\begin{cases}\alpha & i+j=n+1\text{ のとき}\\\alpha & i=j=n\quad\text{のとき}\\0 & \text{上記以外のとき}\end{cases}$$

(a) A の逆行列を求めよ．

(b) A の行列式を計算せよ．

(3) 次の行列の階数を求めよ．ただし，z は実数とする．

$$\begin{pmatrix}z&1&1&1\\1&z&1&1\\1&1&z&1\\1&1&1&z\end{pmatrix}$$

(福井大 2020)　　(m20202415)

0.160 非負の整数 n, および $-1\leqq x\leqq 1$ を満たす任意の実数 x に対して，

$$T_n(x)=\cos nz,\quad \text{ただし，}\cos z=x \qquad (1)$$

と定義する．式 (1) において，$n=0$ とおくと

$$T_0(x) = \cos 0 = 1 \tag{2}$$

となり，$n = 1$ とおくと

$$T_1(x) = \cos z = x \tag{3}$$

となる．以下の問いに答えよ．

(a) 加法定理

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{4}$$

を利用し，$T_2(x)$ を x の多項式として表せ．

(b) $T_n(x)$ は，$T_{n+1}(x)$ と $T_{n-1}(x)$ によって

$$T_n(x) = \frac{T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)}{2x} \tag{5}$$

と表される．これを次のようにして証明したい．以下の下線部 (A)〜(C) を適当に埋めよ．

【証明】式 (1) の定義と式 (4) の加法定理を用いると

$$T_{n+1}(x) = \cos(nz + z) = \cos nz \cos z - \underline{\qquad\qquad\qquad}\text{(A)} \tag{6}$$

$$T_{n-1}(x) = \cos(nz - z) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}\text{(B)} \tag{7}$$

と書ける．式 (6) と式 (7) の各辺を加えると

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = \underline{\qquad\qquad\qquad}\text{(C)} \tag{8}$$

が得られる．式 (8) の右辺を変形すると

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \tag{9}$$

となり，これより式 (5) が導きられる．

(c) 式 (5) に基づいて，$T_3(x)$ を x の多項式として表せ．

(d) $T_3(x)$ を用いて，$\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ の多項式として表せ．

(e) (d) の結果を利用して，次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta \tag{10}$$

ちなみに，$T_n(x)$ は第一種チェビシェフ多項式と呼ばれ，cos の n 倍角の公式の導出やチェビシェフ展開に基づく関数の近似表現等に利用される有名な多項式である．

(福井大 2020)　　(m20202422)

0.161　$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ．

(1) 行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めよ．

(2) $\Phi_A(A) = 0$（ケーリー・ハミルトンの定理）が成り立つことを示せ．

(3) 上の結果を利用して，A^n を求めよ．

(福井大 2020)　　(m20202430)

0.162　4 点 $A(1,2,3)$, $B(-2,1,3)$, $C(-1,-2,1)$, $D(2,1,-3)$ に対して以下の問いに答えよ．

(1) 3 点 A, B, C を含む平面 α の式を求めよ．

(2) 点 D を通り，平面 α に垂直な直線の式を求めよ．

(3) $AB,\ AC,\ AD$ を 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ.

(静岡大 2009)　　(m20092501)

0.163 3 つの複素数を $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$, $\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$, $\gamma = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とする. ここで, i は虚数単位をあらわす. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を複素平面上に図示せよ.

(2) α^{2011} を $x + yi$ $(x, y$ は実数$)$ という形にあらわせ.

(3) $\alpha^m = \beta,\ \alpha^n = \gamma$ をみたす整数 m, n があれば求めよ.

(4) 複素平面上で $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を結んでできる三角形の内角をそれぞれ a, b, c とするとき,

$$(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)(\cos c + i \sin c)$$

を求めよ.

(静岡大 2012)　　(m20122507)

0.164 $\alpha,\ \beta,\ z_1,\ z_2,\ z_3$ は複素数で $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_1 + z_2 + z_3 = \alpha$, $z_1 z_2 z_3 = \beta$ を満たすとする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3} = \overline{\alpha}$ であることを示せ. ただし, $\overline{\alpha}$ は α の共役複素数を表す.

(2) $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = \overline{\alpha}\beta$ であることを示せ.

(静岡大 2013)　　(m20132507)

0.165 x の 2 次以下の多項式 $f(x)$ の作る線型空間を P_2 とする. P_2 の基底を $\{1, x, x^2\}$ とする時, 線型変換

$$T : f(x) \to f(\alpha x + \beta)$$

を表現する行列を求めよ.

(岐阜大 2001)　　(m20012612)

0.166 2 つのベクトル $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (2, 1, 2)$ とのなす角 α を求めよ.
（ただし，$0^\circ \leqq\ \alpha < 180^\circ$とする）

(岐阜大 2006)　　(m20062618)

0.167 ある島の熊の頭数の増加率は, 各時点の頭数 x に比例し, その飽和頭数を α とすると $\alpha - x$ にも比例する. 頭数の変化を時間 t の関数 $f(t)$ で表せ. 但し, $f(0) = \beta$ とする.

(岐阜大 2009)　　(m20092613)

0.168 次の式の値を求めよ.

(1) $\tan\theta = 1/3$ のとき. $(\sin\theta + \cos\theta)^2$ の値を求めよ.

(2) $(1 + \tan\alpha)/(1 - \tan\alpha) = 2 + \sqrt{3}$ のとき, $\cos\alpha$ の値を求めよ.

(岐阜大 2009)　　(m20092614)

0.169 R^3 の 3 つのベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

に対し, 以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ を列ベクトルとする行列を係数行列に持つ連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

が解を持つように定数 α の値を定めよ．また，そのときの一般解を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が線形従属か線形独立かを調べよ．線形従属の時には $\boldsymbol{a}_3$ を $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の線形結合で表せ.

(3) $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の線形結合 $\boldsymbol{b} = x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2$ が $\boldsymbol{a}_1$ に直交する単位ベクトルとなるとき，実数 x と y の値を求めよ.

(岐阜大 2011)　　(m20112603)

0.170　α を実数とする．正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & \alpha \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して以下の問に答えよ.

(1) A の行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(2) 行列 A が固有値 1 をもつような α の値を求めよ.

(3) A が正則にならないような α の値を求めよ．また，そのときの A の階数（ランク）を求めよ.

(岐阜大 2015)　　(m20152602)

0.171　$a = \log 2$ とし，関数 f と g を

$$f(x) = ax - a - \log x$$
$$g(x) = x^2 - ae^x$$

で定義する．ただし，log は e を底とする自然対数である．以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ と $g(x)$ の導関数を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の閉区間 [1, 2] における最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ.

(3) 次の累次積分 I の積分順序を変更せよ:

$$I = \int_1^2 \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \sin(g(y))dy \right) dx \ ,$$

ただし,

$$\alpha(x) = ax$$
$$\beta(x) = a + \log x$$

とする.

(4) I の値を求めよ.

(岐阜大 2018)　　(m20182602)

0.172　$f(x, y)$ を 2 変数の C^2 級関数，α, β を定数として $z(t) = f(e^{\alpha t}, e^{\beta t})$ とおく．　$z''(0)$ の値を α, β, $f_x(1,1)$, $f_y(1,1)$, $f_{xx}(1,1)$, $f_{xy}(1,1)$, $f_{yy}(1,1)$ を用いて表せ.

(岐阜大 2020)　　(m20202601)

0.173 A を対角化可能な n 次行列，$\alpha \neq 0$ を実数とする．このとき $(n+1)$ 次行列

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

も対角化可能であることを示せ．なお，上式の右辺において右上の 0 と左下の 0 はそれぞれ行零ベクトル，列零ベクトルを表す．

(岐阜大 2020) (m20202604)

0.174 $y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 微分方程式

$$(E_1) \quad y' - yx = 0$$

の一般解を求めよ．

(2) 微分方程式

$$(E_2) \quad y' - yx\cos(x^2) = 0$$

の一般解を求めよ．

(3) e を自然対数の底として，α, β を実数とする．微分方程式

$$(E_3) \quad y' - \alpha y = e^{\beta x}$$

の一般解を求めよ．

(4) γ を実数とする．微分方程式

$$(E_4) \quad y' - yx(\gamma + \cos(x^2)) = 0$$

の解 $y(x)$ で初期条件 $y(0) = 1$ を満たすものを求めよ．$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x}$ の収束・発散を判定せよ．

(岐阜大 2022) (m20222602)

0.175 $\sin 2\alpha$ を $\sin\alpha$ と $\cos\alpha$ を用いて表せ.

(豊橋技科大 1997) (m19972701)

0.176 α, β が共に鋭角であり，$\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\sin\beta = \dfrac{2}{3}$ のとき，$\tan(\alpha+\beta)$ を求めよ.

(豊橋技科大 2001) (m20012705)

0.177 2 次曲線 $y = x^2 + (m+2)x + (m^2+4)$ の接線のうち, 原点を通る傾き k_1, k_2 の 2 本の直線のなす角を θ とする. θ が最大となるときの m の値を求めたい. ただし, m は実数, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ とする.

(1) $\tan(\alpha - \beta)$ を $\tan\alpha$, $\tan\beta$ を用いて表せ.

(2) k_1 , k_2 を m を用いて表せ.

(3) $\tan\theta$ を m を用いて表せ.

(4) θ が最大となるときの m の値と $\tan\theta$ の値を求めよ.

(豊橋技科大 2004) (m20042705)

0.178 空間の直交座標軸上に 3 点 $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,2)$ がある. 以下の各問いに答えよ.

(1) ベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{AC}$ を成分で表し, それぞれの大きさを求めよ.

(2) 三角形 ABC の面積を求めよ.

(3) 3 点を通る平面を α とするとき, 原点 O から α に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ.

（豊橋技科大 2004）　(m20042706)

0.179 (1) $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は次の式で計算される．

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

この関係を用いて，以下に示す関数のラプラス変換を求めよ．
ただし，以下の計算では，($\mathrm{Re}[s]>0$) とする．

(a) $f(t)=\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$　ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$

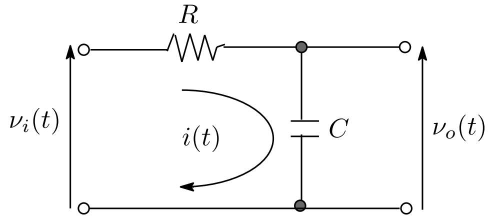
(b) $f(t)=u(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$

(c) $f(t)=t\,u(t)=\begin{cases}t & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$

(d) $f(t)=e^{-\alpha t}u(t)=\begin{cases}e^{-\alpha t} & t\geq 0 \quad (\alpha>0)\\ 0 & t<0\end{cases}$

(2) 右図に示すように直列 RC 回路について以下の問いに答えよ．

(a) 図に示すように，入力電圧を $\nu_i(t)$，出力電圧を $\nu_o(t)$，ならびに，電流を $i(t)$ とするとき，これらの関係を示す回路方程式を記述せよ．
ただし，$t=0$ のとき，$\nu_o(t)=0$ である．



(b) $\nu_i(t)$, $\nu_o(t)$ ならびに $i(t)$ のラプラス変換を，それぞれ $V_i(s)$, $V_o(s)$ そして $I(s)$ と表すものとする．このとき，(a) で求めた回路方程式をラプラス変換して，次の伝達関数 $G(s)$ を求めよ．

$$G(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

(c) $\nu_i(t)$ が次のように与えられるとき

$$\nu_i(t)=u(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

出力電圧 $\nu_o(t)$ のラプラス変換 $V_o(s)$ を求めよ．

(d) $V_o(s)$ をラプラス逆変換して出力電圧 $\nu_o(t)$ を求めよ．

(e) $G(s)$ をラプラス逆変換して，インパルス応答 $g(t)$ を求めよ．

(f) インパルス応答 $g(t)$ を用いて，(c) で定義した入力電圧があるときの出力電圧 $\nu_o(t)$ を求めよ．

(豊橋技科大 2006)　(m20062708)

0.180 (1) 球面 S : $x^2+y^2+z^2+2x-6y-4z+5=0$ の中心 P の座標と半径を求めよ．

(2) 直線 : $x=2y-2=-z+1$ と直交し，点 $(a,0,0)$ を通る平面 α の方程式を求めよ．

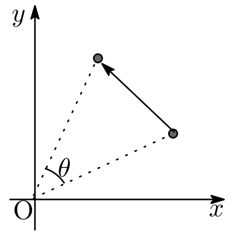
(3) 球面 S の中心 P から平面 α に垂線を下ろす．この垂線が平面 α と交わる点の座標および垂線の長さを，a を用いて表せ．

(4) 平面 α が球面 S と交わる円を底面とし，球面 S の中心 P を頂点とする円錐を考える．この円錐の体積を最大とする a の値を求めよ（ただし，点 P と円錐の底面の距離を h とせよ）．

(豊橋技科大 2007)　(m20072704)

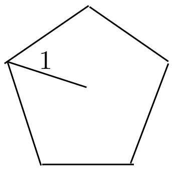
0.181 xy 平面上において，原点 O を中心に反時計回りに θ の回転を行う一次変換は下図の行列 A_θ で表される．この行列を利用して三角関数の計算を行うとともに，図形の面積の値を求めたい．以下の問いに答えよ．

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



(1) ${A_\theta}^2$, ${A_\theta}^3$ を計算し，$\cos\theta$, $\sin\theta$ で表せ．また，$A_{n\theta} = (A_\theta)^n$ であることを利用して $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$, $\cos 3\theta$, $\sin 3\theta$ を $\cos\theta$, $\sin\theta$ で表せ．

(2) $\sin\dfrac{2\pi}{5}$ の値を α とおく．半径 1 の円に内接する正五角形の面積を α を用いて表せ．



(3) (1) の結果を用いて $\sin\dfrac{\pi}{10}$, $\cos\dfrac{\pi}{10}$ の値をそれぞれ求めよ．

(4) 半径 1 の円に内接する正五角形の面積の値を求めよ．

(豊橋技科大 2019)　　(m20192703)

0.182 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{v}$ は行列 A の固有ベクトルであるであることを示せ．また，$\boldsymbol{v}$ に対応する A の固有値を求めよ．

(2) 3 次元空間内のある平面 α を考え，その上の任意の点 P を (x, y, z) とする．この α がベクトル $\boldsymbol{v}$ に垂直で，かつ 3 次元空間の原点を通るとき，この平面 α を表す式を，x, y, z を用いて求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して，線形変換 f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で与える．このとき，(2) で求めた平面 α 上の任意の点 Q を f によって移動した点 Q' も平面 α 上の点となることを示せ．

(豊橋技科大 2022)　　(m20222701)

0.183 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ とする．

(1) A の 2 つの固有値 α, β $(\alpha > \beta)$ を求めよ．
また，対応する固有ベクトルを $\begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}$ の形で求めよ（z の値のみで良い）．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる行列 P を求めよ．また，$P^{-1}AP$ も求めよ．

(3) $\gamma_n = \alpha^n - \beta^n$ とする．A^n を γ_{n-1}, γ_n, γ_{n+1} で表せ．

(名古屋大 2006)　　(m20062801)

0.184 次の 2×2 の行列 A について以下の問に答えよ．本問題において，ベクトルは 2 次元の縦ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を意味する．

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値とそれぞれの固有値に対する一つの固有ベクトルを求めよ．

(2) (1) で求めた固有値と固有ベクトルを用いて行列 E と B を適当に定め，行列 A を

$$A = EBE^{-1}$$

の形で表せ．ここで，E^{-1} は E の逆行列で B は $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ のような形である．

(3) (2) で定めた E と B を用いて，A^n はどのように表すことができるか．ここで，A^n は n 個の A を掛け合わせたものである．
（ヒント）まず，$A = EBE^{-1}$ の表現を用いて A^2 がどのようになるかを調べよ．

(4) ベクトル全体の集合を V と書く．V の任意の二つの要素 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, に対して，

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

とする．ベクトルの列 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \cdots$ が一つのベクトル $\mathbf{x}$ に対して，

$$\lim_{n \to \infty} d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) = 0$$

を満たすとき，この列は $\mathbf{x}$ に収束すると言う．
$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ を一つのベクトルとし，行列 A を用いて，
$\mathbf{a}, A\mathbf{a}, A^2\mathbf{a}, A^3\mathbf{a}, \cdots$ なる列をつっくたとき，この列が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に収束ことを示せ．(3) で求めた A^n の表現を用いよ．

(名古屋工業大 1997)　　(m19972904)

0.185 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{9}{8} & 1 \end{pmatrix}$$

について以下の問に答えよ．

(1) A の二つの固有値 λ_1 , λ_2 と，それぞれの固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトル $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ を求めよ．

(2) 一つのベクトル $\mathbf{x}$ は，$\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ を用いて

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{p}_1 + \beta\mathbf{p}_2$$

と書ける．このことを用いると，$A^n\mathbf{x}$ は，λ_1 , λ_2 $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ を用いてどのように表すことができるか．α , β は，実数である．

(3) 一つのベクトル $\mathbf{x}$ に対して，

$$A\mathbf{x} \,,\ A^2\mathbf{x} \,,\ \cdots \,,\ A^n\mathbf{x} \,,\ \cdots$$

なるベクトルの列は，二次元平面上の点列を表すが，この点列の挙動は，$\mathbf{x}$ の取り方によって異なるものになる．このことを，(1) と (2) で求めたことを用いて論じよ．

(名古屋工業大 1999)　　(m19992907)

0.186 $\alpha > 1$ とする．a_1 を $\sqrt{\alpha}$ より大きい数とし， $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + \dfrac{\alpha}{a_n}) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$
によって，数列 $\{a_n\}$ を定義する．次の問いに答えよ．

(1) $a_n \geq \sqrt{\alpha}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ を示せ．

(2) この数列 $\{a_n\}$ は収束することを示し，その極限値を求めよ．

(名古屋工業大 2001) (m20012901)

0.187 定数係数の 2 階線形微分方程式

$$y'' + \alpha y' + \beta y = \gamma e^x \ , \quad (\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,\ \gamma \neq 0\ \text{定数})$$

が一つの特殊解 $y = e^{2x} + (1 + x)e^x$ を持つとする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 係数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を決めよ.

(2) 微分方程式の一般解を求めよ.

(名古屋工業大 2011) (m20112909)

0.188 R^3 の 2 組の基底 $A : (\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$ と $B : (\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)$ は

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

によって定義されている．このとき，次の問に答えよ.

(1) 基底 $A \to B$ の基底変換の行列 P を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ の基底 $B : (\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)$ に関する座標は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるとき,
$\boldsymbol{\xi}$ の基底 $A : (\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$ に関する座標を求めよ.

(3) 2 組の基底 $A : (\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$ と $B : (\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)$ に関して,
同じ座標をもつ非零ベクトル $\boldsymbol{\eta}$ を求めよ.

(名古屋工業大 2012) (m20122907)

0.189 確率分布が以下の (1),(2) の場合について，確率変数 X の定める分布関数 $F(x)$ と $\alpha > 0$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{F(x) - F(x - \alpha)\}\, dx = \alpha$$

が成り立つことを示せ.

(1) $P(X = 0) = p > 0,\ P(X = 1) = q > 0,\ p + q = 1$ の場合.

(2) 確率変数 X が連続型で，密度関数 $f(x)$ をもつ場合.

（愛知県立大 2000） (m20003004)

0.190 ある 3× 3 の行列 A とベクトル $\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ がある．これらの間に，$A\mathbf{a_1} = 2\mathbf{a_1}$, $A\mathbf{a_2} = \mathbf{a_2}$, $A\mathbf{a_3} = 3\mathbf{a_3}$ の関係が成り立つとして，以下の問に答えよ.

(1) $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ は互いに直交するベクトルであることを証明せよ.

(2) ベクトル $\mathbf{r}=\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ を，$\mathbf{r}=\alpha_1\mathbf{a_1}+\alpha_2\mathbf{a_2}+\alpha_3\mathbf{a_3}$ で分解した．定数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,$ を求めよ．

(3) $A\mathbf{r}$ および $A^2\mathbf{r}$ を求めよ．

(4) $A^n\mathbf{r}$ の一般形を求めよ．

(三重大 2003)　　(m20033114)

0.191 x, y, z に関する次の連立方程式

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 4x+\alpha y+6z=0 \\ 7x+8y+9z=0 \end{cases}$$

が, 自明な解 ($x=0$, $y=0$, $z=0$) の他に解をもつための α の条件を求めなさい.

(三重大 2004)　　(m20043111)

0.192 次の 2 つの行列 A, P について, P が逆行列をもち, $B=P^{-1}AP$ が対角行列 B となるように, 実数 x, y, α, β の値を求めなさい．ただし, $\alpha>\beta$ とする.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

（三重大 2004）　　(m20043113)

0.193 (1) 複素行列 $\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1 , λ_2 を求めよ.
ここで, a , b , c , d は実数であり (ただし, $c\neq 0$), $i^2=-1$ である.

(2) λ_1 , λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を求め, エルミート内積 $(\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2)=\sum_{j=1}^{2} x_{1j}{}^{*}x_{2j}$ を計算せよ．ただし, x_{ij} は $\boldsymbol{x}_i$ の j 成分であり $(i, j=1, 2)$, α^* は α の複素共役を表す.

(三重大 2005)　　(m20053110)

0.194 (1) $I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$ であることを導け. ただし, $\alpha>0$ とする.

(2) 積分 $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}dx$ を求めよ.

(三重大 2005)　　(m20053111)

0.195 (1) 複素行列 $\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1 , λ_2 を求めよ．ここで，a, b, c, d は実数であり（ただし，$c\neq 0$），$i^2=-1$ である．

(2) λ_1 , λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を求め，エルミート内積 $(\boldsymbol{x}_1\ \ \boldsymbol{x}_2)=\sum_{j=1}^{2} x_{1j}^{*}\, x_{2j}$ を計算せよ．ただし，x_{ij} は $\boldsymbol{x}_i$ の j 成分であり $(i, j=1, 2)$，α^* は α の複素共役を表す．

(三重大 2006)　　(m20063118)

0.196 (1) $I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$ であることを導け．ただし，$\alpha>0$ とする．

(2) 積分 $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}dx$ を求めよ．

(三重大 2006)　　(m20063119)

0.197 3次元空間における正規直交系 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ を用いて，3点 P, Q, R の位置ベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ が，それぞれ，以下のように表されている．

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\,, \quad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{u}_2 + 2\boldsymbol{u}_3\,, \quad \boldsymbol{r} = -\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3$$

(1) $\boldsymbol{q}$ の $\boldsymbol{p}$ への正射影（点 Q から原点と P を通る直線に下ろした垂線の足を表す位置ベクトル）を，$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ の線形結合で表しなさい．

(2) ベクトル $\alpha\boldsymbol{p} + \beta\boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}$ が，$\boldsymbol{p}$ および $\boldsymbol{q}$ と垂直になるように，α, β を決めなさい．

(三重大 2007)　　(m20073113)

0.198 対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ （ a, b, c は実数 ）は適当な直交行列 T（直交行列とは ${}^tT\,T = T\ {}^tT = I$ [単位行列] を満たす行列，${}^tT$ は T の転置行列）を使って，${}^tTAT = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ のような対角形に変形できる．

(1) 自然数 n に対して $A^n = T \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} {}^tT$ となることを示せ．

(2) $a + b = \alpha + \beta$, $ab - c^2 = \alpha\beta$ の関係があることを示せ．

(3) $a = b = 2$, $c = -1$ のとき，α, β の値を求めよ．また，直交行列 T も求めよ．

(三重大 2007)　　(m20073117)

0.199 近似式について，以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha << 1$ が成り立つ場合，$(1+\alpha)^3 \approx 1 + 3\alpha$ と近似できる理由を述べよ．

(2) $\cos(\theta + \triangle\theta)$ を θ の周りで，$\triangle\theta^5$ までテーラー展開せよ．

(3) 上記の展開式の1次 $(\triangle\theta)$ までを利用して，$\cos(61^\circ)$ の近似値を求めよ．ただし，テーラー展開内の θ はラジアン表記であることに留意せよ．

(三重大 2009)　　(m20093109)

0.200 地上から角度 α の方向に初速度 v_0 で投げ上げた物体の t 秒後の位置は，投げ上げた地点を原点にとり，物体の運動する曲線を含む平面上で，地面上に x 軸，鉛直方向に y 軸をとると，

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha$$
$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

で与えられる．この時の以下の設問に答えよ．ただし，g は重力の加速度である．

(1) この物体は，どのような曲線を描いて運動するか，軌跡の式を示して説明せよ．

(2) この物体が最高点に達した時点と地面に着いた時点について，両者の速度と方向を求め，両者の関係を説明せよ．

(三重大 2012)　　(m20123115)

0.201 i を虚数単位とし，複素数 α を $\alpha = (x - i)^2$, $\overline{\alpha}$ を α の共役複素数とするとき，次の (1) と (2) に答えよ．

(1) $\alpha + \overline{\alpha} = 2$ を満たす実数 x の値を求めよ．

(2) $\alpha \times \overline{\alpha} = 4$ を満たす実数 x の値を求めよ．

(三重大 2012)　　(m20123118)

0.202 x_1, x_2, x_3 に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ \alpha x_1 + x_2 = \beta \quad (\alpha,\ \beta\text{は実定数}) \end{cases}$$

について，以下の問に答えなさい．

(1) 連立方程式を行列 A, $\boldsymbol{b}$ を用いて $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と書くとき，行列 A, $\boldsymbol{b}$ を求めなさい，

ただし，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ である．

(2) $\alpha = 1$, $\beta = 3$ のとき，A^{-1} を求め，それを利用して連立方程式の解 $\boldsymbol{x}$ を求めなさい．

(3) 任意の α, β について $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解が存在するかどうかを調べ，存在する場合にはその解を求めなさい．

(三重大 2015)　　(m20153102)

0.203 xyz 直交座標系であらわされる空間の xy 平面上に楕円 E,

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$$

がある．楕円 E を底面とし，z 軸上の点 $(0, 0, 2)$ を頂点とする錐体（楕円錐）P について以下の問いに答えなさい．ただし，$0 \leqq z \leqq 2$ とする．

(1) 錐体 P の方程式を x, y, z を用いてあらわしなさい．

(2) 楕円 E 上の点 $(0, 2, 0)$ をとおり，$\overrightarrow{n} = (0, 1, 3)$ を法線とする平面 α の方程式を示しなさい．

(3) 平面 α による錐体 P の切断面の外周上の任意の点を X とする．平面 α 上の点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ と X との距離 R（$\overrightarrow{\mathrm{XA}}$ の大きさ）は定数になる．R を求めなさい．

(4) 平面 α による錐体 P の切断面の面積 S を求めなさい．

(三重大 2020)　　(m20203108)

0.204 $x > 0$ において，$h(x) = \log \alpha^x - \log x^\alpha$ と定義する．ここで，α は正の実数とする．任意の正の実数 x に対して，$x^\alpha \leqq \alpha^x$ となる正の実数 α を求めなさい．

(三重大 2020)　　(m20203112)

0.205 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax}dx \quad (a > 0)$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \log x\, dx \quad (\alpha > -1)$

(奈良女子大 2011)　　(m20113205)

0.206 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + {\omega_0}^2 x = A\cos(\omega t) \qquad \cdots (\text{ア})$$

の一般解 $x(t)$ は，$A = 0$ の場合の一般解 $x_0(t)$ と $A \neq 0$ の特解 $x_1(t)$ の和 $x_0(t) + x_1(t)$ で表される．以下の問いに答えよ．ただし，A, ω, ω_0 は実定数である．

(1) $x_0(t)$ を求めよ．

(2) $x_1(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$ とおいて式 (ア) に代入し，未知定数 α と β を決定することにより $x_1(t)$ を求めよ．ただし，$\omega \neq \omega_0$ とする．

(3) 初期条件が $x(0) = x_0$, $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$ の場合，式 (ア) の解を求めよ．また，$\omega \to \omega_0$ とした時，その解はどうなるか．

(奈良女子大 2012)　　(m20123203)

0.207 $a < b$ となる正の実数 a, b に対して，数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次で定義する．

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, \quad b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$$

以下の問いに答えよ．

(1) $n \geqq 2$ に対し，$a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1}$ が成り立つことを示せ．

(2) $n \geqq 2$ に対し，$b_n - a_n < \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ となる実数 α が存在することを示せ．

(奈良女子大 2018)　　(m20183202)

0.208 ２次元ユークリッド空間の直交座標系を一つ定め，その x 軸および y 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ とする．また，x 軸および y 軸をそれぞれ反時計方向に θ だけ回転して得られる座標軸を x' 軸，y' 軸とし，x' 軸と y' 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e'}_x$ および $\boldsymbol{e'}_y$ とする．このとき，以下の (1)〜(5) に答えよ．

(1) 条件 $(\boldsymbol{e'}_x \ \ \boldsymbol{e'}_y) = (\boldsymbol{e}_x \ \ \boldsymbol{e}_y)P$ を満足する２次の正方行列 P を θ を用いて表せ．

(2) 行列 P に対して $P^T P = P P^T = I$ が成り立つことを示し，この等式の幾何的な意味を，４つのベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e'}_x$, $\boldsymbol{e'}_y$ を用いて説明せよ．なお，P^T は P の転置行列を，また，I は２次の単位行列をそれぞれ表す．

(3) このユークリッド空間における任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y = x'\boldsymbol{e'}_x + y'\boldsymbol{e'}_y$ のように，２通りの座標を用いて表すことができる．これら２通りの座標間の関係を行列 P を用いて表せ．さらに，$x^2 + y^2 = \left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2$ が成り立つことを示せ．

(4) このユークリッド空間におけるベクトル全体をそれ自身に写す変換 f が

$$f(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{u}) + \beta f(\boldsymbol{v})$$

なる関係を満たすとき，f を一次変換という．ここに α と β は任意の実数，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は任意のベクトルである．一次変換 f と $\boldsymbol{e}_x \ \ \boldsymbol{e}_y$ に対して，

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e}_x) = a_{xx}\boldsymbol{e}_x + a_{yx}\boldsymbol{e}_y \\ f(\boldsymbol{e}_y) = a_{xy}\boldsymbol{e}_x + a_{yy}\boldsymbol{e}_y \end{cases} \qquad ④$$

が成り立つとし，ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $f(\boldsymbol{u})$ をそれぞれ $\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y$, $f(\boldsymbol{u}) = X\boldsymbol{e}_x + Y\boldsymbol{e}_y$ と表すとき，これら２組の座標間の関係を

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の形で表現する行列 A を求めよ．

(5) 一次変換 f に対して，(4) の条件④に加えて．

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e'}_x) = a'_{xx}\boldsymbol{e'}_x + a'_{yx}\boldsymbol{e'}_y \\ f(\boldsymbol{e'}_y) = a'_{xy}\boldsymbol{e'}_x + a'_{yy}\boldsymbol{e'}_y \end{cases}$$

が成り立つとする．ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $f(\boldsymbol{u})$ をそれぞれ $\boldsymbol{u} = x'\boldsymbol{e'}_x + y'\boldsymbol{e'}_y$, $f(\boldsymbol{u}) = X'\boldsymbol{e'}_x + Y'\boldsymbol{e'}_y$ と表せば，２組の座標間の関係は (4) と同様に

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

と表現される．このとき，行列 A と A' の関係を P を用いて表せ．

(京都大 2009)　　(m20093303)

0.209 e_1, e_2 を，n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の単位ベクトルとし，両者がなす角 θ は $0 < \theta < \pi/2$ をみたすものとする．e_1 によって張られる $\mathbb{R}^n$ の 1 次元部分空間を L_1，e_2 によって張られる $\mathbb{R}^n$ の 1 次元部分空間を L_2 とし，$\mathbb{R}^n$ から L_1, L_2 への正射影をあらわす線形変換をそれぞれ P_1, P_2 とする．問 1 〜問 4 に答えよ．

問 1 P_1 の固有値を，重複度を含めてすべて答えよ．また，0 でない固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

問 2 $P_1 + P_2$ の固有値を，重複度を含めてすべて答えよ．また，0 でない固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

問 3 $P_1 - P_2$ は，$\pm\sin\theta$ を固有値としてもつことを示せ．

問 4 $P_1 - P_2$ の固有値 $\sin\theta$ に対応する固有ベクトルを，e_1 とのなす角 α が $\pi/2$ より小さくなるようにとったとき，$\alpha = \pi/4 - \theta/2$ であることを示せ．

(京都大 2018)　　(m20183303)

0.210 2 変数 x, y の関数 z が

$$z = x^\alpha f\left(\frac{y}{x}\right)$$

で与えられている. ただし, α は定数で, f は微分可能な 1 変数関数である.

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を f および f の導関数 f' を用いて表せ.

(2) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \alpha z$ が成り立つことを示せ.

（京都工芸繊維大 2004）　　(m20043402)

0.211 (1) α を正の定数とするとき，$\displaystyle\lim_{x\to+0} x^\alpha \log x = 0$ を示せ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2008)　　(m20083402)

0.212 (1) a を実数とする．行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ a & 3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ

(2) 整数を成分とする 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ がある.

(a) A の固有多項式の 1 次の項の係数を求めよ.

(b) A が複素数の範囲でただ一つの固有値 α をもつとき，$3\alpha^2$ は整数であることを示せ.

(京都工芸繊維大 2014)　　(m20143401)

0.213 $F = 3x^2 + 2xy + 3y^2$ について以下の各問いに答えよ.

(1) 2 次形式 F の表現行列 $\mathbf{A}$ を求めよ.

(2) $\mathbf{A}$ の固有値 α, β およびそれに対応する単位固有ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ を求めよ.

(3) $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ が直交することを示せ.

(4) 一般に相異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交することを示せ.

(5)　$\mathbf{P} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ とした時，$\mathbf{P}$ は直交行列であることを示せ．

(6)　$\mathbf{A}$ を対角化せよ．

(7)　F の標準形を求めよ．

(大阪大 1995)　　(m19953506)

0.214　実数値未知パラメタ α を含む次の連立一次方程式を考える．未知パラメタ α の値によって，この連立一次方程式の解の性質がどのようになるかを示せ．

$$\begin{cases} \alpha x + y - z = 2 \\ 2x + y + \alpha z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

(大阪大 1998)　　(m19983502)

0.215　２次曲線 $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 3$ を標準化して，そのグラフを書くことを考える．
以下の問に順次答えよ．

(1)　２次形式 $F = 2x^2 - 4xy + 5y^2$ の行列 A を求めよ．

(2)　対称行列 A の固有値 α , β を求めると共に，それぞれに対応した大きさ 1 の固有ベクトル $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ を計算せよ．

(3)　直交行列の定義を述べよ．また，(2) で求めた列ベクトル $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ より２次の正方行列 $P = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ を作成した場合，P が直交行列となっていることを示せ．

(4)　P を用いて，行列 A を対角化せよ．

(5)　(3) で求めた P を用いて，次式のようにもとの (x, y) 座標系から (x', y') 座標系に変換した場合，新しい座標系ともとの座標系の関係はどのようになっているか示せ．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

(6)　２次曲線 $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 3$ に対して，(5) の座標変換を行い，新しい座標系 (x', y') で表現したときの式を求めよ．

(7)　与えられた２次曲線 $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 3$ の図形を描け．

(大阪大 1999)　　(m19993503)

0.216　(1)　関数 $f(x)$ は，任意の実数 x に対して２次導関数 $f''(x)$ が存在して $f''(x) \geqq 0$ を満たすとする．$x_1 < x_2$ として次の問いに答えよ．

(a) $x_1 < x_3 < x_2$ を満たす任意の x_3 に対して，次の不等式が成立することを示せ．

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqq \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}$$

(b) $0 \leqq \alpha \leqq 1$ を満たす任意の α に対して，次の不等式が成立することを示せ．

$$f\big(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2\big) \leqq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2)$$

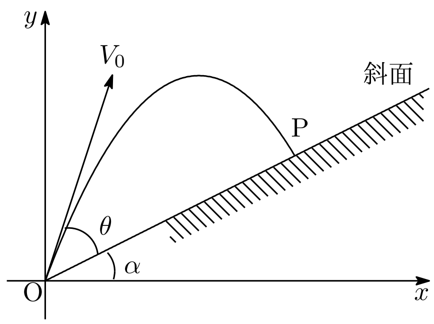
(2)　$f(x) = \log(1 + \exp x)$ は任意の実数 x に対して，$f''(x) \geqq 0$ を満たすことを示せ．

(3)　(1) と (2) の結果を用いて，$0 \leqq \alpha \leqq 1$ を満たす任意の α と任意の正数 y_1, y_2, z_1, z_2 に対して次の不等式が成り立つことを示せ．(ヒント：$x_i = \log y_i - \log z_i$, $i = 1, 2$ とせよ．)

$${y_1}^{\alpha} {y_2}^{1-\alpha} + {z_1}^{\alpha} {z_2}^{1-\alpha} \leqq (y_1 + z_1)^{\alpha} (y_2 + z_2)^{1-\alpha}$$

(大阪大 2002)　　(m20023502)

0.217 右図のように水平面と α $(0 < \alpha < \pi/2)$ の角をなす斜面において，初速度 V_0 で斜面に対して θ $(\theta > 0,\ 0 < \alpha + \theta < \pi/2)$ の方向に物体を投げる．以下の問いに答えよ．



(1) 物体の軌跡の x および y 座標は時間 t を媒介変数とするとき，

$$x = V_0 t \cos(\alpha + \theta)$$
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t \sin(\alpha + \theta)$$

で与えられる．ただし，g は重力加速度である．斜面上の到達距離 OP を求めよ．

(2) 到達距離が最大となる投射角度 θ およびその時の到達距離 OP を求めよ．

(大阪大 2004) (m20043503)

0.218 α および β を実数とするとき, 常微分方程式

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) = 0 \qquad (*)$$

を考える. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $(*)$ 式の一般解を求めよ.

(2) $\phi(x)$ をある実数 x_0 に対して $\phi(x_0) = \phi'(x_0) = 0$ を満たす $(*)$ 式の解とする. このとき, $\phi(x) = 0$ であることを示せ.

(3) (2) の結果を用いて, ある実数 $x_0,\ C_1,\ C_2$ に対して $\phi(x_0) = C_1$ および $\phi'(x_0) = C_2$ を満たす $(*)$ 式の解は唯一であることを示せ.

(大阪大 2005) (m20053508)

0.219 (1) 空間上の直交座標 (x, y, z) を極座標 (r, θ, φ) ：

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad (r > 0,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi)$$

に変換するとき，そのヤコビアン（関数行列式）を計算しなさい．

(2) 広義積分 $\displaystyle I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} dx\,dy\,dz$

について，$\alpha = \dfrac{1}{2}$ のときの値 $I\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めなさい．

(3) $I(\alpha)$ が収束する α の範囲を求めなさい．

(4) 広義積分 $\displaystyle J(\alpha,\ \beta) = \iiint_B \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha \mid \log(x^2+y^2+z^2) \mid^\beta} dx\,dy\,dz$

が収束するような $\alpha,\ \beta$ の満たすべき条件を求めなさい．

ただし，$B = \left\{(x, y, z)\ :\ x^2 + y^2 + z^2 < \dfrac{1}{4}\right\}$.

(大阪大 2007) (m20073506)

0.220 微分方程式

$$x''(t) + ax(t) = \sin t \qquad (*)$$

に関する次の問いに答えよ．ただし，定数 a は実数である．

(1) 微分方程式 $x''(t) + ax(t) = 0$ の一般解を求めよ．

(2) $(*)$ の一般解を求めよ．

(3) $a>0$ とする．$(*)$ の解 $x(t)$ で条件 $x(0)=\alpha,\ x(1)=\beta$ をみたすものをすべて求めよ．ただし，$\alpha,\ \beta$ は実数である．

(大阪大 2007)　　(m20073509)

0.221 n が整数全体を動くとして, 級数が絶対収束する数列 $\{\alpha_n\}$ と $\{\beta_n\}$ を考える.

すなわち $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\alpha_n|$ と $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\beta_n|$ が収束するとする. これらの数列を用いて関数 $f,\ g$ を

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n e^{2\pi inx}$$

$$g(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\beta_n e^{2\pi inx}$$

とフーリエ展開する.

(1) $p(x)=f(x)g(x)$ を $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{2\pi inx}$ の形にフーリエ展開したときのフーリエ係数 c_n を求めよ.

(2) $q(x)=\displaystyle\int_0^1 f(x-s)g(s)\,ds$ を $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_n e^{2\pi inx}$ の形にフーリエ展開したときのフーリエ係数 d_n を求めよ.

(大阪大 2010)　　(m20103510)

0.222 正の実数 R に対して，複素平面上の原点を中心とする半径 R の円周上を反時計まわりに 1 周する閉曲線を C_R とする．以下の問いに答えよ．

(1) R を正の実数とし，α を $|\alpha|<R$ を満たす複素数とするとき，複素積分

$$\int_{C_R}\frac{z^2}{z-\alpha}dz$$

を求めよ．

(2) n を 2 以上の自然数とする．複素平面における領域 D 上で定義された n 個の複素関数 $h_j(z)\ \ (j=1,2,\cdots,n)$ を考え，各 $h_j(z)$ は D 上で正則とする．D 上の複素関数 $g(z)$ を $g(z)=h_1(z)h_2(z)\cdots h_n(z)$ と定義するとき，$g(z)$ の D における導関数 $g'(z)$ について

$$\begin{aligned}g'(z)&=h_1'(z)h_2(z)\cdots h_n(z)+h_1(z)h_2'(z)\cdots h_n(z)\\&\quad+\cdots+h_1(z)\cdots h_{j-1}(z)h_j'(z)h_{j+1}(z)\cdots h_n(z)\\&\quad+\cdots+h_1(z)h_2(z)\cdots h_n'(z)\end{aligned}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ.

(3) n を 2 以上の自然数とする．複素数 $b_0,b_1,\cdots,b_{n-1}$ に対して複素関数 $f(z)=z^n+b_{n-1}z^{n-1}+b_{n-2}z^{n-2}+\cdots+b_1z+b_0$ を考える．n 次方程式 $f(z)=0$ の n 個の複素数解を $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$ とし，R は $|\alpha_j|<R\ \ (j=1,2,\cdots,n)$ を満たす正の実数とする．このとき複素積分

$$\int_{C_R}\frac{z^2f'(z)}{f(z)}dz$$

を $b_{n-2},\ b_{n-1}$ を用いて表せ.

(大阪大 2014)　　(m20143505)

0.223 (1) 複素変数 z の関数 $f(z)=\overline{z}$ は正則であるか否かを判定せよ．ただし，$\overline{z}$ は z の複素共役とする.

(2) $a > b > 0$ となる実定数 a, b において，積分 $\quad I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\cos t} \quad$ の値を求めよ．

(3) 複素平面 C から 1 点 α だけを除いた領域 $D(\alpha) = C - \{\alpha\}$ において，複素変数 z の関数 $g(z) = 1/(z - \alpha)$ の原始関数を求めよ．もし存在しないならばその理由を述べよ．

(大阪大 2016) (m20163505)

0.224 (1) α は整数でない実数とする．$\cos(\alpha x)$ $(-\pi < x < \pi)$ をフーリエ級数展開せよ．すなわち

$$\cos(\alpha x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\Big\}, \qquad -\pi < x < \pi$$

を満たす

$$a_n\,, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$
$$b_n\,, \quad n = 1, 2, \cdots$$

を求めよ．

(2) y は $\sin y \neq 0$ を満たす実数とする．(1) の結果を利用して

$$\frac{1}{\sin y} = \frac{1}{y} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{1}{y + n\pi} + \frac{1}{y - n\pi}\right\}$$

が成立することを示せ．

(大阪大 2016) (m20163506)

0.225 α を 1 以上の実数とする．1 回微分可能な関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_2^{2x}\left\{f\left(\frac{t}{2}\right)\right\}^{\alpha} dt + 1 \qquad ①$$

を満たすという．以下の設問に答えよ．

(1) $f(1) = A$ を満たす実数 A を求めよ．

(2) $y = f(x)$ とおく．式 ① の両辺を x で微分することにより，微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y^{\alpha} \qquad ②$$

が成り立つことを示せ．

(3) 初期条件「$x = 1$ のとき $y = A$ （ただし A は (1) で求めた値)」のもとで微分方程式 ② の特殊解を Y とする．「1 以上の任意の実数 x に対して，Y の x における値が実数になる」ための，α に対する条件を求めよ．

(大阪大 2018) (m20183505)

0.226 以下 α を与えられた実数とする．1 階微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2x(t) + e^{-t}$$

の，初期条件 $x(0) = \alpha$ を満たす解を $x_{\alpha}(t)$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 1 階微分方程式

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2y(t)$$

の，初期条件 $y(0) = 1$ を満たす解 $y(t)$ を求めよ．

(2) $y(t)$ を (1) で求めた関数とする．関数 $C(t)$ を $C(t) = \dfrac{x_\alpha(t)}{y(t)}$ によって定めると，

$$\frac{dC(t)}{dt} = e^{-3t}\ , \qquad C(0) = \alpha$$

が成り立つことを示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} x_\alpha(t) = \infty$ となるための α に対する必要十分条件を求めよ.

(大阪大 2019) (m20193508)

0.227 以下 n を与えられた自然数とする.

(1) 変量 z のデータ $z_1, \cdots, z_n$ の平均が 1，分散が 1 であるとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {z_i}^2$ の値を求めよ.

(2) 2 つの変量 x, y のデータ $x_1, \cdots, x_n$ および $y_1, \cdots, y_n$ がある．これらのデータの平均はともに 0，分散はともに 1 であり，$\gamma = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ に対して $\gamma > 0$ が成り立つとする.

与えられた実数 $\alpha,\ \beta$ に対し， $d_i = \dfrac{|\alpha x_i + \beta - y_i|}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ $(i = 1,\ \cdots,\ n)$ とおく.

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$ を $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ n$ で表せ.

(b) α を固定し β を変化させるときの $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$ の最小値を $m(\alpha)$ とする．$m(\alpha)$ を与える β を求めよ.

(c) $\alpha,\ \beta$ を変化させるときの $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$ の最小値を m とする．m を求めよ.

(大阪大 2019) (m20193511)

0.228 (1) 次の表に示すデータ $x,\ y$ について，以下の問いに答えよ.

	No.1	No.2	No.3	No.4	No.5
x	1.0	3.0	2.5	2.0	4.0
y	11.0	17.0	15.0	13.0	19.0

(1-1) データ $x,\ y$ の分散 $S_{xx},\ S_{yy}$ および共分散 S_{xy} をそれぞれ求めよ.

(1-2) データ x と y の相関係数を r とするとき．r^2 の値を求めよ.

(1-3) x を説明変数，y を目的変数とするとき，データ $x,\ y$ の回帰直線の式を求めよ.

(2) テレビの視聴率について，以下の問いに答えよ.
ただし，$0 < \alpha < 1$ である値 α と標準正規分布に従う確率変数 Z について
$P(Z \geqq z_\alpha) = \alpha$ となる z_α を考える．このとき，
$z_{0.050} = 1.645,\ z_{0.025} = 1.960,\ z_{0.010} = 2.326,\ z_{0.005} = 2.576$ とする.

(2-1) 無作為に抽出された 900 世帯について調査したところ，180 世帯がある番組を視聴していた.
この番組の視聴率 p を信頼係数 95% で推定せよ.
ただし，信頼限界は小数第三位まで求めよ.

(2-2) 95% の信頼区間の幅を 0.05 以下にするためには，何世帯以上調査すればよいか答えよ.

(大阪大 2020) (m20203504)

0.229 $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ x_0 > 0$ として，次の微分方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - \beta x^2,\ t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

(1) $x(t)$ を求めよ.

(2) $\lim_{t \to \infty} x(t)$ を求めよ.

(3) $\dfrac{\alpha}{\beta} \neq x_0$ のとき, $x(t)$ が区間 $t \geqq 0$ において単調関数であることを示せ.

(大阪大 2022)　　(m20223505)

0.230 $x = u\cos\alpha - v\sin\alpha$, $y = u\sin\alpha + v\cos\alpha$（$\alpha$ は定数）のとき, x, y に関して 2 階偏微分可能な $z = z(x, y)$ について

(1) $z_u^2 + z_v^2$ を z の x, y に関する偏導関数を用いて表せ.

(2) $z_{uu} + z_{vv}$ を z の x, y に関する第 2 次偏導関数を用いて表せ.

ただし, z_u, z_{uu} は z の u に関する第 1 次および第 2 次偏導関数を表す.

(神戸大 2003)　　(m20033804)

0.231 $r : [a, b] \longrightarrow \boldsymbol{R}^+$ を連続微分可能な関数とし, $(x, y)-$ 平面上の曲線 $x = r(\theta)\cos\theta$, $y = r(\theta)\sin\theta$, $a \leq \theta \leq b$ を α とする. ここで $0 \leq a \leq b \leq \pi/2$. 曲線 α 上の各点と原点を結ぶ線分から出来る扇形領域の面積を $\mathcal{A}$, α の長さを $\mathcal{L}$ とするとき

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(r)d\theta\ , \qquad \mathcal{L} = \int_a^b g(r, r')d\theta$$

となる $f(r)$ と $g(r, r')$ を与えよ. さらに $r(\theta) = 1/\cos\theta$ の場合の $\mathcal{A}$ または $\mathcal{L}$ の上記公式を用いて

$$\int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \sqrt{3}$$

を説明せよ.

(神戸大 2006)　　(m20063804)

0.232 $f(x)$ は x の 2 次以上の多項式である. $f(x)$ を $(x-2)^2$ で割った余りを $\alpha x + \beta$, 商を $g(x)$ とする（すなわち $f(x) = (x-2)^2 g(x) + \alpha x + \beta$）. $f(2) = 3$, $f'(2) = 4$ の場合, α, β の値を求めよ.

(鳥取大 2005)　　(m20053904)

0.233 $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ とおくとき, 次の式が成り立つことを示せ.

(1) $R(\alpha)R(\beta) = R(\beta)R(\alpha) = R(\alpha + \beta)$　　(2) $R(-\alpha) = R(\alpha)^{-1}$

(鳥取大 2007)　　(m20073914)

0.234 2 次式 $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ を考える. 任意の a_2, a_1, a_0 に対し, 以下の式が成立するように実数 α, β $(\alpha < \beta)$ の値を定めよ.

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = f(\alpha) + f(\beta)$$

(鳥取大 2009)　　(m20093910)

0.235 区間 I 上の関数 $f(x)$ が, $x < y < z$ なる I の任意の 3 点 x, y, z に対して不等式

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

を満たすとき, $f(x)$ は上に凸であるという.

(1) $f(x)$ が I 上で 2 回微分可能であり, $f''(x) \leq 0$ が任意の x で成り立つならば, $f(x)$ は上に凸であることを示せ.

(2) $f(x)$ が上に凸であれば，$x < y$ なる I の任意の 2 点 x, y と $0 < a < 1$ なる任意の実数 a に対して次の不等式が成り立つことを示せ.

$$f(ax + (1-a)y) \geq af(x) + (1-a)f(y)$$

(3) $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$ であれば，任意の $x, y > 0$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ.

$$x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y$$

(岡山大 2001)　(m20014001)

0.236 (1) 平面 $\boldsymbol{R}^2$ において原点を中心に角度 α だけ回転させる線形変換の行列表現を求めよ.

(2) 実数を成分とする $3 \times\ 3$ 行列 X で，$X^3 = I\ \ (X \neq I)$ を満たすものをひとつ求めよ．ただし，I は単位行列を表す.

(岡山大 2008)　(m20084003)

0.237 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有方程式 $x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0$ が相異なる 2 つの実数解 α, β をもつとする．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $(A - \alpha E)(A - \beta E) = O$，$A \neq \alpha E$，$A \neq \beta E$ が成り立つことを示せ．ただし，E は単位行列，O は零行列とする.

(2) $A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$ と $A\boldsymbol{y} = \beta\boldsymbol{y}$ をそれぞれ満たす零でない列ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が存在することを示せ．また，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は一次独立であることを示せ.

(3) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ を満たす 2 次正則行列 P が存在することを示せ.

(岡山大 2009)　(m20094003)

0.238 正の実数 b, c が $bc = 1$ を満たすとして，空間の 4 点 $O(0,0,0)$，$A(0,1,1)$，$B(b,0,b)$，$C(c,c,0)$ を考える．三角形 ABC を含む平面 α 上に点 H を，線分 OH が α と垂直になるようにとるとき，以下の問いに答えよ.

(1) 点 H の座標を b で表せ.

(2) 線分 OH の長さの最大値を求めよ．また，そのときの b の値を求めよ.

(3) 点 H が三角形 ABC の内部に存在するための b の条件を求めよ.

(岡山大 2014)　(m20144004)

0.239 三角形 OAB において，ベクトルを $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$ と定義し，$\angle OAB = \alpha$ とする．ベクトルの内積を用いて，三角形の 2 辺の長さの和は他の 1 辺より長くなることを示せ.

(広島大 2001)　(m20014107)

0.240 次の問に答えよ. ただし, 被積分関数が連続になる範囲のみを考えればよい.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$（$C$ は積分定数）を示せ.

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \tan^{-1} x + C$（$C$ は積分定数）を示せ.
ただし, $y = \tan^{-1} x\ \left(|y| < \dfrac{\pi}{2}\right)$ は $x = \tan y$ の逆関数を表す.

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2}$ を求めよ.

(4) $\alpha < \beta$ のとき $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ を求めよ.

(5) $a > 0$，$D = b^2 - 4ac < 0$ のとき $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ を求めよ.

(広島大 2005)　　(m20054101)

0.241　次の積分を以下の手順に従って求めよ．

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} dx$$

ここで $\alpha > -1$ は定数，ln は自然対数である．

(1)　求める積分を $I(\alpha)$ とおき，

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}$$

を求めよ．

(2)　上の答えを利用して $I(\alpha)$ を求めよ．

(広島大 2005)　　(m20054109)

0.242　(1)　実数 t に対して，　$t = \tan\theta$　かつ　$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

を満たす θ として，関数 $\theta = \arctan t$ を定める．このとき，$\frac{d}{dt}(\arctan t)$ を求めよ．

(2)　不定積分　$\int \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^n dx$　を $x = \sinh t$ と変数変換することにより求めよ．

ただし，n は 2 以上の自然数とし，$\sinh t$ は　$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$　とする．

(3)　α と R を実数とし，$R \geqq 1$ と仮定する．　領域 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq R^2\}$ における重積分　$\iint_D x^2(x^2+y^2)^\alpha dxdy$　の値を求めよ．

(広島大 2008)　　(m20084101)

0.243　2 次の実正方行列全体のなすベクトル空間を V とし，その任意の元 A, B に対して

$$(A, B) = \mathrm{tr}\,({}^tAB)\,,$$

とおく．ただし，${}^tA$ は A の転置行列とし，$\mathrm{tr}\,C$ は行列 C のトレースとする．このとき以下の問いに答えよ．

(1)　(A, B) は内積であることを示せ．

(2)　A と B が

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

で与えられているとき，(A, B) を求め，さらに A と B のなす角 θ を求めよ．

ただし，$0 \leqq \alpha - \beta \leqq \pi$ とする．

(3)　(2) で定義した A に対して，線形写像 $f : V \to \mathbb{R}$ を $f(X) = (A, X)$　$(X \in V)$ で定義する．このとき $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求め，$\mathrm{Ker}\, f$ の正規直交基底を 1 組求めよ．

(広島大 2009)　　(m20094104)

0.244　以下の問いに答えよ．

(1)　「 $x > 0$ ならば $\log(1 + x) < x$ 」が成り立つことを示せ．

(2)　「 $x > 0$ ならば $\log(1 + x) > x - \alpha x^2$ 」を満たす実数 α の範囲を求めよ．

(広島大 2013)　　(m20134108)

0.245 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots$ を零ベクトルでない k 次元実列ベクトルとし，k 次実対称行列 M_n $(n = 1, 2, \cdots)$ を

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i {}^t\boldsymbol{a}_i$$

で定義する．ここで，^{t} は転置を表す記号である．以下の問いに答えよ．ただし，任意の実対称行列は直交行列により対角化可能であることは用いてよい．

(1) α_n を行列 M_n の $(1, 1)$ 成分とする．数列 $\{\alpha_n\}$ が広義の単調増加列，すなわち，$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n \leq \cdots$ となることを示せ.

(2) M_n の固有値はすべて非負の実数であることを示せ.

(3) λ_n を M_n の最小固有値とする．$S = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k \mid {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} = 1\right\}$ に対し,

$$\min_{x \in S} {}^t\boldsymbol{x} M_n \boldsymbol{x} = \lambda_n$$

を示せ.

(4) (3) で定義した λ_n に対して，数列 $\{\lambda_n\}$ が広義の単調増加列となることを示せ.

(5) (1) で定義した α_n と (3) で定義した λ_n に対して，$\{\alpha_n\}$ が上に有界であれば，$\{\lambda_n\}$ は収束することを示せ.

(広島大 2017)　　(m20174105)

0.246 (1) 次の定積分が収束するかどうかを判定し, 収束する場合はその値を求めよ.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \qquad (\ \alpha\text{は正の定数とする})$$

(2) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\,,\ x + y \geq 2\}$ とするとき, 重積分 $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ の値を求めよ.

(広島市立大 2005)　　(m20054201)

0.247 $\sqrt{3}\sin x + \cos x$ を $r\sin(x + \alpha),\ r > 0$ の形に表せ.

(山口大 2001)　　(m20014302)

0.248 次の式を $r\sin(x + \alpha),\ -\pi < \alpha \leqq \pi$ の形に表せ.　　$\sin x - \sqrt{3}\cos x$

(山口大 2001)　　(m20014306)

0.249 粘性流体中の粒子の運動は, 微分方程式

$$\frac{d\nu}{dt} + \alpha\nu = -\beta\nu^2 \qquad \text{初期条件 } \nu(0) = \nu_0$$

で記述される. 変数変換 $u = 1/\nu$ を実行して, この解 $\nu(t)$ を求めなさい.

(山口大 2005)　　(m20054310)

0.250 $f(x) = \cos x + \alpha\, x$ が極値をもたないための α の条件を求めなさい.

(山口大 2009)　　(m20094310)

0.251 $\alpha > 1$ とする．広義積分 $I_\alpha = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^{\alpha}}\, dx$ に対して，次の問いに答えよ.

(1) $x^{1-\alpha}\log x$ を微分せよ.

(2) $R > 1$ とする．$\displaystyle\int_1^{R} \frac{\log x}{x^{\alpha}}\, dx$ を求めよ.

(3) I_α を求めよ.

(徳島大 2011)　　(m20114402)

0.252 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) A と B の積 AB を求めよ．

(2) $AB\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}$ を満たす定数 α を求めよ．

(3) $B^{-1}A^{-1}\boldsymbol{x}=\beta\boldsymbol{x}$ を満たす定数 β を求めよ．

(徳島大 2014)　　(m20144401)

0.253 $f(x)=x\log\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$ $(x>0)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\alpha=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ とする．α を求めよ．

(2) (1) で求めた α に対して，$\beta=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\Big(f(x)-\alpha x\Big)$ とする．

$t=\dfrac{1}{x}$ とおくと，$x\to\infty$ のとき $t\to+0$ であることを利用して，β を求めよ．

(3) (1),(2) で求めた α, β に対して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(\alpha x+\beta)}{\frac{1}{x}}$ を求めよ．

(徳島大 2015)　　(m20154402)

0.254 xy 平面上の領域を $D=\left\{(x,\ y)\ ;\ x^2+y^2\leqq 2x,\ y\geqq\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right\}$ とする．

(1) D の概形を図示せよ．

(2) 変数変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ $(r\geqq 0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ により，D に対応する $r\theta$ 平面上の領域を E とする．E は，定数 α, β および関数 $f(\theta)$ を用いて $\{(r,\ \theta)\ ;\ \alpha\leqq\theta\leqq\beta,\ 0\leqq r\leqq f(\theta)\}$ と表される．α, β, $f(\theta)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を求めよ．

(徳島大 2018)　　(m20184403)

0.255 $\alpha>0$ のとき，広義積分 $f(t)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}x^{t-1}dx$ は $t>0$ に対して定義される．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(1)$ を求めよ．

(2) $t>0$ に対して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}e^{-\alpha x}x^t=0$ を示せ．

(3) $t>0$ に対して，$\alpha f(t+1)=tf(t)$ が成り立つことを示せ．

(4) 正の整数 n に対して，$f(n+1)$ を求めよ．

(高知大 2007)　　(m20074503)

0.256 $\boldsymbol{V}$ を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をもつ有限次元の実ベクトル空間とし，$\boldsymbol{W}$ を $\boldsymbol{V}$ の部分空間とする．任意の $x\in\boldsymbol{V}$ は $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{W}\oplus\boldsymbol{W}^\perp$ ($\boldsymbol{W}^\perp$ は $\boldsymbol{W}$ の直交補空間) を用いて $x=w+w'$ $(w\in\boldsymbol{W},\ w'\in\boldsymbol{W}^\perp)$ と一意に表すことができる．x に対してこの w を対応させる $\boldsymbol{V}$ から $\boldsymbol{V}$ への写像を f と定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 任意の $x_1, x_2 \in \boldsymbol{V}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}$ に対して,

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $f \circ f = f$ が成り立つことを示せ. ただし, $f \circ f$ は f と f の合成写像である.

(3) 任意の $x, y \in \boldsymbol{V}$ に対して, $\langle\, f(x), y \,\rangle = \langle\, x, f(y) \,\rangle$ が成り立つことを示せ.

(高知大 2008) (m20084504)

0.257 3× 3 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) 次の関数式を満たす直交行列 T をひとつ求めよ.

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) α と β を定数とし, 3× 3 行列 B を次で定義する.

$$B = T \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}$$

このとき, B と B^2 を計算せよ.

(4) $C^2 = A$ を満たす行列 C をひとつ求めよ.

(高知大 2010) (m20104504)

0.258 n は正の整数とする. A は n 次実正方行列で, $A^2 = O_n$ をみたすとする. また, $\alpha = \det(A + I_n)$, $\beta = \det(A - I_n)$ とおく. ただし, O_n と I_n はそれぞれ n 次の零行列と単位行列を表すものとし, $\det(M)$ は行列 M の行列式とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\left(\det\left(\frac{1}{2}A + I_n\right)\right)^2$ を α または β を用いて表せ.

(2) $\left(\det\left(I_n - \frac{1}{2}A\right)\right)^2$ を α または β を用いて表せ.

(3) n が奇数のとき, $\alpha \geqq \beta$ を示せ.

(高知大 2019) (m20194503)

0.259 α と β について連立方程式

$$\begin{cases} \sin\beta = 2\sin\alpha + 2 \\ \sin\beta = -\sin\alpha + h \end{cases}$$

について（但し, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$ とする. ）, 以下の問いに答えよ.

(1) 連立方程式が解を持つ為の h の範囲を求めよ.

(2) (1) の範囲の各 h について，解の個数を求めよ.

(3) h が (1) の範囲にある時，$h^3 - h$ が最小となる h の値と最小値を求めよ.

(高知大 2020)　　(m20204501)

0.260 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ が定数で，$f(x)$ が微分可能のとき，$g(s,t) = \gamma + (t-\alpha) f\left(\dfrac{s-\beta}{t-\alpha}\right)$ によって定義される関数 $g(s,t)$ は次の関係式を満たすことを示せ.

$$g(s,t) = \gamma + (t-\alpha)\frac{\partial g}{\partial t}(s,t) + (s-\beta)\frac{\partial g}{\partial s}(s,t)$$

(愛媛大 2004)　　(m20044605)

0.261 (1) 次の関数を微分せよ.

(a) $\log(1+x^4)$　　(b) $\sin^{-1} x^2$

(2) α, β を定数とし，

$$f(x) = \begin{cases} \tan^{-1} x & (x > 1) \\ \beta & (x = 1) \\ \alpha x - \alpha + \beta & (x < 1) \end{cases}$$

とおく. ただし $\tan^{-1} x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする. 次の問いに答えよ.

(a) $f(x)$ が $x = 1$ で連続になるように β を定めよ.

(b) $\displaystyle\lim_{x \to +0} f'(x) = \lim_{x \to 1-0} f'(x)$ となるように α を定めよ.

(愛媛大 2005)　　(m20054601)

0.262 3 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ において，3 つのベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

で生成される部分空間

$$V = \{c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 \mid c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathbb{R}\}$$

を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ が 1 次従属であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ が V の基底となることを示せ.

(3) $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \right\}$ を満たす実数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を 1 組求めよ.

(4) $\begin{bmatrix} a \\ a+1 \\ a+2 \end{bmatrix} \in V$ となるような実数 a を求めよ.

(愛媛大 2017)　　(m20174606)

0.263 a を実数とする. 4 次実列ベクトル $\boldsymbol{x}$ を未知ベクトル，4 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 5 & a^2+3 & a^2-1 & 1 \\ a+1 & a & 1 & 2a-2 \\ -a+1 & a^2-a & a^2-1 & -2a+2 \\ 0 & a^2-1 & a^2-1 & 0 \end{bmatrix}$$

を係数行列とする連立 1 次方程式

$$(\#) \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

を考える．ただし，$\boldsymbol{o}$ は 4 次零ベクトルとする．

(1) $a = 1$ とする．このとき，方程式 (#) の解をすべて求めよ．

(2) (i) 任意の a に対し，方程式 (#) は少なくとも 1 つの解をもつことを示せ．

(ii) 実列ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ がともに 方程式 (#) の解であるとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の 1 次結合 $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$（ α, β は実数 ）も (#) の解であることを示せ．

(3) 方程式 (#) が以下の条件 (♭1), (♭2) の両方をみたすような a の値をすべて求めよ．

(♭1) 少なくとも 2 つの異なる解をもつ．

(♭2) 実列ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ がともに (#) の解であるとき，$\boldsymbol{a} = c\boldsymbol{b}$ または $\boldsymbol{b} = c\boldsymbol{a}$ をみたす実数 c が存在する．

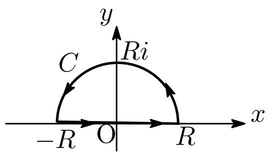
(愛媛大 2022)　　(m20224602)

0.264 次の各問に答えよ．

(1) 次の問に答えよ．

(a) $z^4 + \alpha^2 = 0$ を満たす複素数 z を求めよ．ただし，$\alpha > 0$ とする．

(b) 積分 $\displaystyle\int_C \frac{z^4}{1+z^4}dz$ の値を求めよ．ただし，C は図のような線分と半円をつないだ曲線であり，$R > 1$ とする．



(2) $u(x,y) = x^2 + \alpha xy + \beta y^2$ とする．複素平面全体で正則関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ が存在する条件を示し，そのときの $v(x,y)$ を求めよ．ただし，i は虚数単位であり，$z = x + yi$，また，α, β は定数とする．

(九州大 1998)　　(m19984710)

0.265 曲線 $f(x) = (e^x + e^{-x})/2$ に関して以下の問に答えよ．

(1) $y = f(x)$ の増減を調べグラフを描け．

(2) 区間 $[\alpha, \alpha+1]$ の曲線の長さ $h(\alpha)$ を求めよ．

(3) $h(\alpha)$ の最小値を求めよ．

(九州大 1999)　　(m19994702)

0.266 つぶれていない四面体には 4 個の頂点がある．各頂点の座標を (x_i, y_i, z_i) $(1 \leqq i \leqq 4)$ とする．四面体内（表面を含む）の任意の点 P の座標を (x, y, z) で表すとき，

$$u(x,y,z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \qquad (*)$$

で表せる関数 $u(x,y,z)$ を考える．ただし，α_i $(1 \leqq i \leqq 4)$ は定数である．このとき次の各問いに答えよ．

(1) 4 個に頂点における関数値 u_i $(1 \leqq i \leqq 4)$ を既知とするとき，α_i $(1 \leqq i \leqq 4)$ を決定する連立 1 次方程式を求めよ．

(2) 直前に求めた連立 1 次方程式で α_i $(1 \leqq i \leqq 4)$ を求め，それを $(*)$ 式に代入した結果を

$$u(x,y,z) = \sum L_i(x,y,z)u_i \qquad (**)$$

と表す．ただし，$\sum$ は $i=1$ から 4 までの総和を表し，$L_i(x,y,z)$ は次式で与えられる．

$$L_i(x,y,z) = a_i + b_i x + c_i y + d_i z \qquad (***)$$

(a) $L_i(x,y,z)$ $(1 \leqq i \leqq 4)$ の各頂点における関数値を求めよ．

(b) $L_i(x,y,z)$ $(1 \leqq i \leqq 4)$ の四面体の 6 個の辺の各中点における関数値を求めよ．

(c) $(***)$ 式の a_i, b_i, c_i, d_i を以下の 5 個の行列式 (A,B,C,D,E) を用いて表現せよ．その際，i が 1 から 4 まで動いたときの j,k,l のとる値を明示せよ．

$$A = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix}, \quad E = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

(九州大 1999)　　(m19994705)

0.267 $x(t)$ に関する微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 20\dfrac{dx}{dt} + \alpha x = 0$ について考える．ただし，$\alpha > 0$ であるとする．

(1) $\alpha = 64$ とし，初期条件を $t=0$ で $x=1$，$\dfrac{dx}{dt} = 8$ としたときの微分方程式の解を求めよ．

(2) $t=0$ で，$x=1$，$\dfrac{dx}{dt} = -15$ であるとする．このとき，常に $x(t) > 0$ が成り立つような α の範囲を求めよ．

(九州大 2001)　　(m20014703)

0.268 複素変数の関数 $f(z) = \dfrac{1}{2z^2 - 5z + 2}$ について次の問いに答えよ. ただし, 積分路 C は, 単位円周 $|z| = 1$ を反時計回りに一周する閉曲線とする.

(1) $f(z)$ の各極における留数を求めよ.

(2) 積分 $I = \displaystyle\int_C f(z)dz$ の値を求めよ.

(3) $z = e^{i\theta}$ (θ : 実数, i : 虚数単位) のとき， $\cos\theta = \alpha z + \beta z^{-1}$ を満たす実数 α, β を求めよ.

(4) 積分路 C のパラメータ表示 $C\ :\ z = e^{i\theta}$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ を用いることにより, (2) の積分 I は, 次のように変換できる.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{a}{b\cos\theta + c} d\theta \quad (a,b,c\ :\ \text{定数})$$

a,b,c を求めよ.

(九州大 2005)　　(m20054703)

0.269 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列， $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を関数とし、$\alpha, \beta, x_0 \in \mathbb{R}$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば，正数 M が存在し，すべての n に対して $|a_n| \leqq M$ となることを示しなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ となることを示しなさい．

(3) $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq \alpha$ とする．このとき，正数 $\varepsilon > 0$ と $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ となる実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在し，$|f(x_n) - \alpha| \geq \varepsilon$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示しなさい．

(4) 次の二つの条件が同値であることを示しなさい．

(a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$.

(b) 実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ を満たせば，$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$.

(九州大 2006)　　(m20064709)

0.270 空間の 4 点 $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 2, -1)$, $B = (1, 2, 1)$, $C = (1, 1, 1)$ を考える．2 点 O, A を通る直線を ℓ, 3 点 O, A, B を通る平面を π とするとき，以下の問に答えよ．

(1) 点 B から直線 ℓ へ下ろした垂線の足を P とする．

$e_1 = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$ および，$e_2 = \dfrac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}$ をそれぞれ求めよ．

ただし，$|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{PB}|$ はおのおのベクトル $\overrightarrow{OA}$ とベクトル $\overrightarrow{PB}$ の長さ（大きさ）を表すものとする．

(2) 点 C から平面 π へ下ろした垂線の足を Q とする．

$$\overrightarrow{OQ} = \alpha e_1 + \beta e_2$$

が成り立つ実数 α と β を求めよ．また，点 Q の座標を求めよ．

(九州大 2006)　　(m20064711)

0.271 A は n 次正方行列で，その対角成分はすべて 2，それ以外の成分はすべて 1 であるとする．α は実数で，次の条件 (C) をみたす n 次の列ベクトル（縦ベクトル）$\boldsymbol{x}$ が存在するとする．

$$\text{条件 } (c)\ :\ \boldsymbol{x} \text{ の成分はすべて正で，} A\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{x}$$

(1) $n = 2$ の場合に，α を求めよ．　(2) n が 3 以上の自然数の場合に，α を求めよ．

(九州大 2007)　　(m20074713)

0.272 (1) 実数からなる行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(a) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^2$ および $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^3$ を求めよ．

(b) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n$ を求めよ．ただし，n は自然数である．

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(a) ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ について $B\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{v}_1$ が成り立つ．

$\boldsymbol{v}_1$ と一次独立な大きさ 1 のベクトル $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$ を用いて，$B\boldsymbol{v}_2$ を $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の一次結合

$$B\boldsymbol{v}_2 = \alpha \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2$$

と表したい．$\boldsymbol{v}_2$ と α の組み合わせを 1 つ，具体的な数値で求めよ．

(b) $P = \begin{pmatrix} 1 & v_{21} \\ -1 & v_{22} \end{pmatrix}$ とすると，$BP = PC$ と表すことができる．行列 C を記せ．

(c) B^n を求めよ.

(九州大 2008)　　(m20084709)

0.273 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ を実数とするとき，次の n 次正方行列 A を考える：

$$A = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_0 \end{pmatrix}$$

ζ を $\zeta^n = 1$ を満たす複素数とするとき，ベクトル $\boldsymbol{u}_\zeta = \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^{n-1} \end{pmatrix}$ を考える.

(1) $A\boldsymbol{u}_\zeta$ を求めよ.

(2) $A\boldsymbol{u}_\zeta = \alpha \boldsymbol{u}_\zeta$ となる複素数 α が存在することを示せ.

(3) A の固有値を全て求めよ.

(4) A の行列式を因数分解された形で求めよ.

(九州大 2009)　　(m20094711)

0.274 点 $P(x_0, y_0, z_0)$ を含む平面 α が, 座標の原点 $O(0,0,0)$ を中心とする半径 r の球面 β と接している.

(1) 点 P が球面 β 上にあるとき, 平面 α を表す方程式を求めよ.

(2) 点 P が球面 β 上にないとき, 平面 α に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ が満たすべき条件を求めよ.

(九州大 2010)　　(m20104703)

0.275 (1) 周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を次のように定める．以下の問いに答えよ．

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 0, 1, \cdots), \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

(a) 任意の実数 α に対して $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\cos nx dx = a_n$ が成立することを示せ.

(b) 整数 n と実数 x に対して $\cos n(x+\pi) = \begin{cases} \cos nx & (n \text{ が偶数}) \\ -\cos nx & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$ が成立する.

このことを踏まえ，関数 $g(x) = f(x+\pi)$ のフーリエ係数 $a'_n = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx dx$，$b'_n = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx dx$ を a_n，b_n を用いて表せ.

(2) 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$ とおく．以下の問いに答えよ．

(a) $f(x) = e^{-|x|}$ のフーリエ変換を求めよ.

(b) フーリエの積分定理（逆フーリエ変換）を利用して，次の定積分を求めよ.

$$\int_0^\infty \frac{\cos u}{1+u^2} du$$

(九州大 2013)　　(m20134703)

0.276 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) A のすべての固有値を求めよ．

(2) A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(3) $AC = A^2 + \alpha E$ を満たす行列 C の行列式 $|C|$ が，$|C| = 0$ を満たす定数 α の値をすべて求めよ．ただし，E は単位行列である．

(九州大 2018)　　(m20184702)

0.277 α が行列 A の固有値であるとき，以下が成り立つことを証明せよ．

(1) α は ${}^tA$ の固有値である．ただし，${}^tA$ は A の転置行列である．

(2) k が自然数のとき，α^k は $A^k = \overbrace{A \cdots A}^{k}$ の固有値である．

(3) A が正則であるとき，α^{-1} は A^{-1} の固有値である．

（九州芸術工科大 2000）　　(m20004807)

0.278 以下が成り立つことを示せ．

(1) A が正則のとき，$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$．

(2) 正方行列 A が正則行列 P によって対角化され，$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ となるとき，自然数 n に対して，$P^{-1}A^nP = D^n$．

(3) 正方行列 A, B に対し $AB = A, BA = B$ のとき自然数 n に対して，$A^n = A$．

（九州芸術工科大 2001）　　(m20014806)

0.279 実数体 R 上の線形空間 V の空でない部分集合 S が V の部分空間であるとは, 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ と任意のスカラー $\alpha \in R$ に対して,

$$(\text{イ})\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in S, \qquad (\text{ロ})\ \alpha\boldsymbol{x} \in S$$

を満たすことである．次の $V = R^3$ の部分集合が部分空間になるかどうかを調べ，部分空間になるものについては，その次元と基底 1 組を求めよ．

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 \ ; \ x + y - z = 0 \right\},$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 \ ; \ x + y - z \text{ は整数} \right\},$$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 \ ; \ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \right\}.$$

(佐賀大 2004)　　(m20044934)

0.280 次の問に答えよ．

(1) 三角関数の加法定理より

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}$$

を導出せよ.

(2) 導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

を利用して $(\sin x)' = \cos x$ であることを示せ.

(佐賀大 2005)　　(m20054924)

0.281 次の連立一次方程式が解を持つように α の値を決定し，その連立一次方程式を解け.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 10x_4 = \alpha \end{cases}$$

(佐賀大 2007)　　(m20074921)

0.282 $\boldsymbol{A}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ のとき，次の等式が成り立つことを示しなさい.

(1) $\boldsymbol{A}(\theta)^{-1} = \boldsymbol{A}(-\theta)$　　(2) $\boldsymbol{A}(\alpha+\beta) = \boldsymbol{A}(\alpha)\boldsymbol{A}(\beta)$

(佐賀大 2012)　　(m20124915)

0.283 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ \alpha & 2 \end{bmatrix}$ について，固有値の 1 つが $\lambda = 1$ であるとき，次の問いに答えよ.

(1) α の値を求めよ.

(2) 残りの固有値を求めよ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるように，行列 P とその逆行列 P^{-1} をそれぞれ求めよ.

(佐賀大 2016)　　(m20164913)

0.284 以下の問に答えよ.

(1) xy 平面内の円の方程式は一般に

$$A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad ①$$

で表されることを示せ. ただし, A, B, C, D は実数である.

(2) 複素平面内の円の方程式は一般に

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0 \quad ②$$

で表されることを示せ. ただし, $z = x + iy$, α, γ は実数, β は複素数である.

(長崎大 2005)　　(m20055006)

0.285 行列 $A = \begin{pmatrix} \alpha & 4 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ の固有値が 1 と 6 であるとき，実数 α 及び β の値を求めよ．なお，$\alpha \geq \beta$ とする．求める過程も記述すること.

(長崎大 2008)　　(m20085010)

0.286 次の (a),(b) の行列式の値をそれぞれ求めよ．

(a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}$　　(b) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{vmatrix}$　ただし，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$

(長崎大 2008)　(m20085017)

0.287 行列 $A=\dfrac{1}{\alpha\beta+3}\begin{pmatrix} \alpha & -2 \\ 1.5 & \beta \end{pmatrix}$ の逆行列の固有値が 2 と 2.5 であるとき，実数 α 及び β の値を求めよ．なお，$\alpha \geq \beta$, $\alpha\beta \neq -3$ とする．求める過程も記述すること．

(長崎大 2011)　(m20115017)

0.288 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して，

$$V_i=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \,|\, (\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_i)=0\}\ (i=1,2), \qquad V=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \,|\, \boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\alpha_2\boldsymbol{a}_2,\ (\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R})\}$$

とするとき，次のことを示せ．ここに，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ の内積を表す．

(1) V_1, V_2 は $\mathbb{R}^3$ のベクトル部分空間である．

(2) $V=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \,|\, (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0\ ({}^\forall\boldsymbol{y}\in V_1\cap V_2)\}$

（熊本大 2001）　(m20015206)

0.289 次の行列は対角化可能かどうか判定しなさい．ただし，α, β, γ はいずれも 0 でない実数であり，かつ，$\alpha\neq\beta$ とする．

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

(熊本大 2009)　(m20095202)

0.290 ２つの放物線 $\alpha y^2=\beta^2 x$ および $\beta x^2=\alpha^2 y$ に関して次の問いに答えなさい．ただし，α と β はともに正の定数である．

(1) 共有点を求め，グラフを描きなさい．

(2) ２つの放物線で囲まれる部分の面積を求めなさい．

(熊本大 2009)　(m20095203)

0.291 xy 平面上の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を同じ平面上の点 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ に移す写像

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad ①$$

について，以下の問いに答えなさい．

(1) この写像を表す行列の固有値と固有ベクトルの組は，次に示す ② と ③ の二つであることを示しなさい．なお，固有ベクトルの大きさは，$\sqrt{2}$ に選んである．

$$固有値\ \lambda_1=\frac{3}{2}\ ,\quad 固有ベクトル\ \boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad ②$$

$$固有値\ \lambda_2=\frac{1}{2}\ ,\quad 固有ベクトル\ \boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad ③$$

(2) 二つの固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立なので, xy 平面上の点を表すベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の 1 次結合によって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \boldsymbol{x}_1 + \beta \boldsymbol{x}_2$$

のように表現できる. α および β を, x および y を用いて表しなさい.

(3) この写像によって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が移る点 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ を, α, β, $\boldsymbol{x}_1$ および $\boldsymbol{x}_2$ を用いて表しなさい.

(熊本大 2013) (m20135202)

0.292 xy 平面上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を同じ平面上の点 $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ に移す写像

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) この写像の表す固有値 λ_1, λ_2 と固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ の組を求めなさい. なお, 固有ベクトルの大きさは $\sqrt{2}$ とすること.

(2) xy 平面上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ により以下のように表せる.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha \boldsymbol{x}_1 + \beta \boldsymbol{x}_2$$

α, β を x, y を用いて表しなさい.

(3) $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ を α, β, $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を用いて表しなさい.

(熊本大 2019) (m20195203)

0.293 2 変数関数 $f(x,y) = x^2 + 2\alpha xy + y^2$ について, 次の各問に答えよ. ただし, α は $\alpha^2 \neq 1$ を満たす定数とする.

(1) $f(x,y)$ の 2 階までの偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ を全て求めよ.

(2) $f(x,y)$ に極値があれば, 全て求めよ.

(宮崎大 2005) (m20055302)

0.294 x と y の 2 変数関数

$$f(x,y) = \alpha x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + 4y$$

について, 次の問に答えよ. ただし, α は定数で $\alpha \neq \dfrac{1}{2}$ とする.

(1) 関数 $f(x,y)$ の 2 階までの偏導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

をすべて求めよ.

(2) 関数 $f(x,y)$ が極値を持つための α の条件を示し, その場合の極値と, その極値が極大値あるいは極小値のどちらであるか答えよ.

(宮崎大 2010) (m20105303)

0.295 x と y について何回でも偏微分可能な 2 変数関数 $f(x, y)$ に対し,

$$x = x(u, v) = u\cos\alpha - y\sin\alpha\ , \quad y = y(u, v) = u\sin\alpha + v\cos\alpha$$

を代入して，合成関数 $g(u, v) = f\big(x(u, v), y(u, v)\big)$ を作る．ここで，α は実数の定数とする．これについて，次の各問に答えよ．ただし，以下では関数の引数を省略しており，例えば $\dfrac{\partial g}{\partial u}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ は，それぞれ $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u, v)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x(u, v), y(u, v)\big)$ の意味である．

(1) 等式 $\dfrac{\partial g}{\partial u} = a_1\dfrac{\partial f}{\partial x} + a_2\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を満たす定数 a_1, a_2 を求めよ．

(2) 等式 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} = b_1\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b_2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + b_3\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を満たす定数 b_1, b_2, b_3 を求めよ．

(3) 等式 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = c_1\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + c_2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + c_3\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を満たす定数 c_1, c_2, c_3 を求めよ．

(宮崎大 2014) (m20145305)

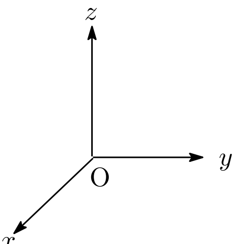
0.296 空間において，方程式 $2x + y + 2z - 2 = 0$ で表される平面を α とする．これについて，次の各問に答えよ．

(1) 平面 α を，右図のような座標空間の中に図示せよ．

(2) 平面 α, および，次の 3 つの平面

$x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

で囲まれた部分の体積を，重積分を用いて求めよ．



(宮崎大 2019) (m20195304)

0.297 次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 2 つの虚数 $\alpha = 1 + 2i$, $\beta = 4 - 2i$ に対して，$\gamma = \dfrac{2\alpha\overline{\beta}}{2\alpha - 3\beta}$ とする．γ を $x + yi$（x, y は実数）の形で表し，複素平面上に図示せよ．ただし，$\overline{\beta}$ は β の共役複素数を表す．

(2) 複素数 z についての方程式 $z^{-4} = 16$ の解をすべて求め，それらを複素数平面上に図示せよ．

(宮崎大 2021) (m20215304)

0.298 任意の命題 α に対して，命題論理式

$\alpha \to (\beta \to \alpha)$

は，トートロジー (恒真式) であることを証明しなさい．

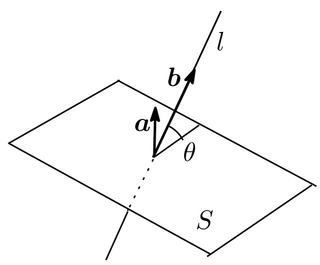
(宮崎大 2022) (m20225309)

0.299 次のベクトルに関する問いに答えよ．

(1) 右図のように，$\boldsymbol{a}$ は平面 S と直交する法線ベクトルであり，$\boldsymbol{b}$ は平面 S と角 θ ($\leq 90^\circ$) で交わる直線 l の上に存在するベクトルである．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を用いて $\sin\theta$ を表せ．

(2) 次の式で表される二つの平面 S_1 と S_2 の交角 α を求めよ．

S_1 : $x + 2y + 2z = 3$ $\qquad$ S_2 : $3x + 3y = 1$



(鹿児島大 2008) (m20085403)

0.300 次のベクトルと行列式に関する問いに答えよ．

(1) 次のベクトル $\boldsymbol{a}$ がベクトル $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ の一次結合で表すことができるための α, β の条件を求めよ.

$$\boldsymbol{a} = (0 \quad \alpha \quad \beta)\,, \qquad \boldsymbol{b}_1 = (2 \quad -1 \quad 1)\,, \qquad \boldsymbol{b}_2 = (2 \quad 1 \quad 3)$$

(2) 次の関係式を証明せよ.

$$\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix} = 2(b+c)(c+a)(a+b)$$

(鹿児島大 2008)　　(m20085404)

0.301 以下の問題に答えなさい.

(1) 加法定理 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ を用いて　$\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$ が成立することを示しなさい.

(2) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ を, $x = a\sin t$ とおくことにより計算しなさい. ただし, $a>0$ とする.

(鹿児島大 2012)　　(m20125426)

0.302 以下の問いに答えなさい.

(1) 平面 P の方程式を $x+y+\alpha z+1=0$, 平面 Q の方程式を $x+\alpha y+z-1=0$ とする. 平面 P と Q のなす角が直角となるような α の値を求めなさい.

(2) ベクトル $\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ が線形従属となるような実数 β の値をすべて求めなさい.

(鹿児島大 2021)　　(m20215408)

0.303 以下の不定積分を求めなさい.

(1) $I = \displaystyle\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$　　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx$

(室蘭工業大 2005)　　(m20055509)

0.304 $x>0$ で α が実数のとき, 公式 $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ を証明せよ.

(室蘭工業大 2005)　　(m20055513)

0.305 ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (\alpha xy - z^3)\boldsymbol{i} + (\alpha-2)x^2\boldsymbol{j} + (1-\alpha)xz^2\boldsymbol{k}$ について, 以下の問いに答えなさい. なお, α は実数であり, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は直交座標系の x 軸, y 軸, z 軸上で正の向きを持つ単位ベクトルである.

(1) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が, $x=1$, $y=1$, $z=1$ においてベクトル $\boldsymbol{B} = 2\beta\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$ と直交するとき, 実数 β を α を用いて表しなさい.

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の回転 $(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})$ の値が任意の場所で $\overrightarrow{0}$ となるときの, α の値を求めなさい.

(室蘭工業大 2008)　　(m20085507)

0.306 2 つの関数

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \tag{2}$$

$$g(x) = e^{-\alpha x} \quad (\alpha > 0) \tag{3}$$

とする.

(1) 合成関数 $h(x) = f(g(x))$ を求めよ.

(2) 関数 $h(x)$ の 1 階の導関数 $h'(x)$ と，2 階の導関数 $h''(x)$ を求めよ.

(3) $\alpha = 1$ の場合の $h(x)$ のグラフを図示せよ.

(4) $h'(x)$ を α の関数とみなした場合の，α に関する偏導関数 $\dfrac{\partial h'}{\partial \alpha}$ を求めよ.

(5) $h'(0)$ を α の関数として，そのグラフを図示せよ.

(室蘭工業大 2009)　　(m20095504)

0.307 3 つのベクトル $\boldsymbol{u} = (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{v} = (1, 2, 1)$, $\boldsymbol{r} = (0, -3, 2)$ がある．$\boldsymbol{p} = (1, 1, 1)$ としたとき，関係式 $\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} + \gamma\boldsymbol{r}$ を満たす係数 α, β, γ を求めなさい.

(室蘭工業大 2016)　　(m20165503)

0.308 下記の関数 $f(x, y)$ について，次の問いに答えよ．ただし，α と β はそれぞれ正の定数であるとする.

$$f(x, y) = \cos \alpha x \, e^{-\beta y}$$

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ と $\dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y)$ をそれぞれ導出せよ.

(2) 求めた偏導関数に関して，$x = \dfrac{\pi}{2\alpha}$, $y = \dfrac{1}{\beta}$ における偏微分係数をそれぞれ求めよ.

(香川大 2014)　　(m20145701)

0.309 関数 $f(x) = (ax + b)e^{cx}$　$(c \neq 0)$ を考える. 以下の問に答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int f(x) dx$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$, 2 階導関数 $f''(x)$，さらに n 階導関数 $f^{(n)}(x)$　$(n = 1, 2, \cdots)$ を求めよ.

(3) $0 < c < 1$ のとき，　$\displaystyle\lim_{n \to \infty} nc^n = 0$　を証明せよ.

$\left(\right.$ヒント ： $c = \dfrac{1}{1 + \alpha}$　$(\alpha > 0)$　とおいて　$(1 + \alpha)^n$　の 2 項展開を考えよ.$\left.\right)$

(4) $0 < c < 1$ のとき

$$\lim_{n \to \infty} \left(f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(n)}(x) \right)$$

を求めよ.

(島根大 2005)　　(m20055811)

0.310 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ を収束数列とする．いま，$n > N$ なるすべての自然数に対して $\alpha_n \leq \beta_n$ が成り立つような十分大きな自然数 N が存在する時，　$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \alpha_n \leq \lim_{n \to \infty} \beta_n$　であることを証明せよ。

(島根大 2006)　　(m20065807)

0.311 次の問いに答えよ.

(1) $0 < r_1 < r_2$ とし，$D_1 = \left\{(x, y) : {r_1}^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq {r_2}^2\right\}$ と定める．このとき，積分 $\displaystyle\iint_{D_1} \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} dxdy$ の値を求めよ.

(2) $0 < r$ とし，$D_2 = \left\{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 \leqq r^2\right\}$ と定める．このとき，広義積分 $\displaystyle\iint_{D_2} \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} dxdy$ が収束する α の範囲を求めよ.

(島根大 2014)　　(m20145805)

0.312 (1) $R > 0$ とする．$\Omega(R) = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2,\ 0 \leq y \leq x\right\}$ とするとき，重積分 $\displaystyle\iint_{\Omega(R)} \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^2} dxdy$ を計算せよ.

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^R\left(\int_0^x \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}dy\right)dx$ を求めよ.

(3) α を定数とし，$(x,y)\neq(0,0)$ に対して $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\alpha/2}$ と定める．$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ.

(島根大 2016)　　(m20165804)

0.313 $g(x)$ は $0<\alpha\leqq x\leqq\beta$ で連続であり,

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqq x,\ 0\leqq y,\ \alpha\leqq x+y\leqq\beta\}$$

とする．このとき,

$$\iint_D g(x+y)dxdy=\int_\alpha^\beta xg(x)dx$$

となることを証明せよ.

(島根大 2019)　　(m20195808)

0.314 次式を示せ．ただし，e^x のテイラー展開を利用せよ。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=\infty \qquad (\alpha:\text{定数})$$

(首都大 2003)　　(m20035904)

0.315 次の関数を積分せよ.

(1) $x\big(x^2+1\big)^\alpha$

(2) $\big(\cos x\big)^\alpha\sin x$

(首都大 2003)　　(m20035905)

0.316 点 $A(5,3,1)$ と平面 $\alpha\ :\ x+2y+2z=4$ を考える.

(1) 点 A から平面 α に下ろした垂線の足 H の座標と垂線の長さを求めなさい.

(2) 平面 α 上に点 $(0,-1,3)$ を中心とした半径 1 の円 C を描く．点 P は円 C 上の点で，線分 AP の長さが最大となるものとする．このとき点 P の座標と，線分 AP の長さを求めなさい;

(3) 3 点 A, P, H を通る平面を求めなさい.

(首都大 2019)　　(m20195901)

0.317 直交座標系 (x,y,z) において，直線 $\ell: x-1=-y+3=-z-5$ および点 $A(4,5,2)$ に対し，以下の問いに答えなさい.

(1) ℓ および A を含む平面を α とする．α の方程式を求めなさい.

(2) A から ℓ に垂線 AH を引くとき，H の座標を求めなさい.

(3) 原点 O から α に垂線 OH' を引くとき，H' の座標を求めなさい.

(4) 四面体 $OAHH'$ の体積を求めなさい.

(東京都立大 2020)　　(m20205901)

0.318 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x,\,y)$ と点 $(x+dx,\,y+dy)$ の間の無限小長さ ds は

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$$

によって与えられる. さらに, 曲線に沿って $a\leq x\leq b$ の長さ L_1 は, 次の式で与えられる.

$$L_1=\int_a^b\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,dx$$

(1) 曲線がパラメータ t によって

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

のように表されるとき、パラメータ $\alpha \leq t \leq \beta$ に対応する曲線の長さ L_2 が

$$L_2 = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

で与えられることを示せ.

(2) 次のパラメータ t によって表される曲線 $C : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \dfrac{1}{3}t^3 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2)$ の長さを求めよ.

(滋賀県立大 2010)　　(m20106001)

0.319 (1) 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．A の階数（ランク）を求めよ．

(2) 行列 B を $B = \begin{pmatrix} \alpha & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ とする．

(a) $\det B = 0$ となるように α を求めよ．

(b) この α に対する B の固有値および対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルの第 1 成分が 1 となるようにせよ．

(宇都宮大 2005)　　(m20056101)

0.320 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \left(\sqrt{3},\ 1,\ 0\right)$, $\boldsymbol{b} = (0,\ 2,\ 0)$, $\boldsymbol{c} = \left(1,\ \sqrt{3},\ 2\sqrt{3}\right)$ が，いずれも原点 $(0,\ 0,\ 0)$ を始点として存在しているとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の成す角の大きさを求めよ.

(3) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を共に含む平面を α と呼ぶとき，平面 α と $\boldsymbol{c}$ の成す角の大きさを求めよ.

(宇都宮大 2014)　　(m20146102)

0.321 a, b を正の実定数とするとき，微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + a^2y^2 = b^2 \tag{2-1}$$

について，下の問いに答えよ.

(1) $\alpha(\alpha \neq 0)$, β を実定数，C を積分定数とするとき，つぎの不定積分が成り立つことを示せ.

$$\int \frac{1}{\alpha x + \beta} dx = \frac{1}{\alpha} \log_e |\alpha x + \beta| + C \tag{2-2}$$

(2) 微分方程式 (2-1) の一般解を y について解け．なお，計算過程も記入せよ.

(3) 微分方程式 (2-1) を条件 $x = 0,\ y = 0$ のもとで y について解いた特殊解を求めよ．なお，計算過程も記入せよ.

(4) (3) で求めた特殊解は，x が十分に大きいとき一定の値に近づく．この一定の値を求めよ．なお，計算過程も記入せよ.

(宇都宮大 2019)　　(m20196102)

0.322 図 1 のように，点 A, B, C, D が xy 軸平面上にある．原点 O とし，

各座標を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と示すとき，$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

また，$\overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OA}$ を原点を中心として，反時計方向に角度 θ 回転させたものである．$\overrightarrow{OD}$ は $\overrightarrow{OC}$ を同様に角度 θ 回転させた点である．

以下の問に答えよ．

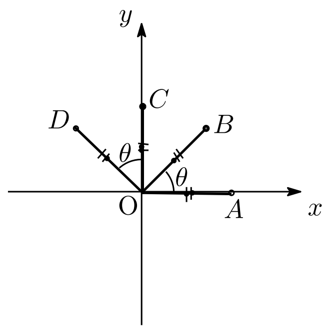


図 1:xy 軸平面

(1) 点 B, D の座標を求めよ．

(2) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$ を計算せよ．

(3) 原点を中心とした長さ 1 である任意のベクトル $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ は，$\overrightarrow{OA}$ を角度 α 回転させることによって得られる．角度 α 回転させる一次変換を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

と表すとき，a, b, c, d を求めよ．

(4) $\cos(\alpha + \beta)$ を $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta$ を用いて表せ．

(工学院大 2003)　　(m20036206)

0.323 $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対する正接関数 $\tan y$ の逆関数を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ とする．すなわち，

$$y = \mathrm{Tan}^{-1}x \iff x = \tan y \qquad \left(x \in (-\infty,\ \infty)\,,\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Tan}^{-1}1$ の値を求めよ．

(2) $\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{3\sqrt{3}}{7}$ の値を求めよ．
ただし，必要であれば，次の正接関数に対する加法定理は既知として用いてよい．

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

(はこだて未来大 2009)　　(m20096303)

0.324 $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対する正接関数 $\tan y$ の逆関数を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ とする．すなわち，

$$y = \mathrm{Tan}^{-1}x \iff x = \tan y \qquad \left(x \in (-\infty, \infty),\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) $y = \mathrm{Tan}^{-1}x$ のグラフの概形を描け．

(2) $\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{2}{3} + \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{5}$ の値を求めよ．ただし，必要であれば，次の正接関数に対する加法定理は既知として用いてよい．

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

(はこだて未来大 2013)　　(m20136305)

0.325 ある工場で製造される製品の重さ（単位 kg）が正規分布 $N(2,\ 0.0016)$ に従っているとする．ある日，100 個の製品を抜き取り，重さを測定したところ平均が 2.011kg であった．この日の製品が，平常と比べて重くなっているといえるか．危険率（有意水準）1% で検定しなさい．なお，解答にあたっては，次の定理および正規分布表を用いてよい．

定理 $X_1,\ X_2,\ \cdots X_n$ が，正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ に従う独立な確率変数であるとき，

$\overline{X} = \dfrac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ は正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$ に従う．

よって，$\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ は正規分布 $N(0,1)$ に従う．

(和歌山大 2008)　　(m20086503)

0.326 周期 X の周期関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (\ |x| \leqq\ d/2\ ) \\ 0 & (\ d/2 < |x| \leqq\ X/2) \end{cases}$$

について次の問いに答えなさい. ただし, $0 < d < X$ である.

(1) $f(x)$ をフーリエ級数に展開しなさい.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\alpha}{n}$ の値を求めなさい. ただし, $0 < \alpha < 1$ とする.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi\alpha}{2n-1}$ の値を求めなさい. ただし, $0 < \alpha < 1$ とする.

(和歌山大 2010)　　(m20106504)

0.327 関数 $f(x)$ に対する次式の積分をフーリエ変換と定義する．ただし，i は虚数単位，e は自然対数の基底である．

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx$$

また，２つの関数 $g(x),\ h(x)$ に対する次式の積分をたたみこみと定義する．

$$g(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-\alpha)h(\alpha)d\alpha$$

フーリエ変換およびたたみこみに関する次の (1)〜(3) に答えなさい．

(1) 次式で与えられる関数 $f_1(x)$ のフーリエ変換 $F_1(u)$ を求めなさい．

$$f_1(x) = \begin{cases} 1\ , & \left(x \leq \left|\dfrac{1}{2}\right| \text{の場合}\right) \\ 0\ , & \left(x > \left|\dfrac{1}{2}\right| \text{の場合}\right) \end{cases}$$

(2) 関数 $f_1(x)$ 同士のたたみこみによって得られる関数を $f_2(x)$ とする．関数 $f_2(x)$ を求め，その概略図を描きなさい．

(3) 関数 $f_2(x)$ のフーリエ変換 $F_2(u)$ を求めなさい．

(和歌山大 2017)　　(m20176509)

0.328 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の (1)〜(3) に答えなさい．

(1) 固有値を求めなさい．

(2) 固有ベクトルを求めなさい．

(3) 固有値 α, β に対して，次式が成り立つように，正則行列 P を求めなさい．ただし，$\alpha > \beta$ とする．

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

(和歌山大 2018)　　(m20186501)

0.329 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ の固有値を α, β とし，α と β に対する固有ベクトルをそれぞれ

$\boldsymbol{x} = k \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$ $(k \neq 0)$,　$\boldsymbol{y} = h \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}$ $(h \neq 0)$ とするとき，次の問 1〜問 4 に答えよ．

ただし，$\alpha > \beta$ とする．

問 1 α, β を求めよ．

問 2 a, b を求めよ．

問 3 $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P をひとつ求めよ．

問 4 次式が成り立つように a_n を求めよ．

$$A^n = \begin{bmatrix} 2a_n - 1 & -a_n + 1 \\ 2a_n - 2 & -a_n + 2 \end{bmatrix}$$

(和歌山大 2022)　　(m20226501)

0.330 (1) 級数の和 $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k!(k+2)}{(k+3)!}$ を求めよ．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

(2) $f(x) = e^{2x^2}$ のマクローリン級数を x^3 の項まで求めよ．また，$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x^2}$ を求めよ．

(3) 初期値問題 (a) と微分方程式 (b) の解が一致するよう α を定め，(b) の一般解を求めよ．

(a) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}$,　$y(0) = e^{-1}$　　(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + \alpha y = 8e^{-x}$

(京都府立大 2008)　　(m20086701)