[選択項目] 年度：1991〜2023 年　 文中：　cos

0.1　ベクトル場 $\mathbf{a} = (x\cos z, y\log x, -z^2)$ に対して

(1) 発散 div $\mathbf{a}$ を求めよ．

(2) 回転 rot $\mathbf{a}$ を求めよ．

(北海道大 1997)　　(m19970103)

0.2　z は複素数である．

(1) $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 \geq 1$ を証明せよ．

(2) 方程式 $\sin z = 2$ を解け．

(北海道大 1997)　　(m19970104)

0.3　円柱座標 (r, θ, z) が直交座標 (x, y, z) によって定義されるとき (1) から (3) の問いに答えよ．
円柱座標 (r, θ, z) と直交座標 (x, y, z) の関係は以下の通りである．

$x = r\cos\theta\,,\ \ y = r\sin\theta\,,\ \ z = z \qquad (r \geq 0\,,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$

(1) 円柱座標 (r, θ, z) が直交曲線座標であることを示せ．

(2) 円柱座標 (r, θ, z) の基本ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ を求めよ．

(3) 曲面 $z = x^2 + y^2$ と $z = 18 - (x^2 + y^2)$ で囲まれた領域を V とするとき，
積分 $\displaystyle\int_V \sqrt{x^2 + y^2}\, dV$ の値を求めよ．

(北海道大 2003)　　(m20030101)

0.4　以下の問いに答えよ．ただし，j は虚数単位とする．

(1) 次の複素数を極形式 $re^{j\theta}$ （r, θ は実数）で表せ．
(a) $1 + j$　　(b) j

(2) 次の複素数を $x + jy$ （x, y は実数）の形で表せ．また，複素平面上に図示せよ．
(a) j の平方根　　(b) $\frac{1+j}{1-j}$ の 3 乗根

(3) 複素数 $z_R = \cos\theta + j\sin\theta$ を 0 でない複素数 z_1 に乗ずると，答えは z_1 が複素平面上で θ だけ回転したものになることを示せ．

(北海道大 2004)　　(m20040104)

0.5　z, w は複素数であり，$i = \sqrt{-1}$ である．また， x, y, r, θ は実数である．

(1) 複素数 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ が与えられたとき，$w^n = z$（n は正の整数）の根は n 個であり，

$$w_k = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1)$$

と表せることを示せ．

(2) 方程式 $w^5 = 1$ を満たす 1 つの解が，$w = \cos 72^\circ + i\sin 72$と表せることを示せ　．また，$\cos 72^\circ$ の値を求めよ．

(3) 複素数 $z = x + iy$ が与えられたとき，関数 $w(z) = e^z$ が正則であることを証明せよ．

(北海道大 2009)　　(m20090101)

0.6 (1) 関数 $f(t)=\cos(\omega t)$ の（片側）ラプラス変換

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

を求めなさい．ただし，e は自然対数の底で，s はその実数部が正の複素数である．

(2) $s=c+i\phi$ とおく．ここで，i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ で，c,ϕ は実数とする．このとき，$G(\phi)=\lim_{c\to+0} cF(c+i\phi)$ を求めなさい．

(北海道大 2009)　　(m20090103)

0.7 以下の設問に答えよ．途中の計算手順を詳しく記述すること．

(1) $w=\alpha_n z^n+\alpha_{n-1}z^{n-1}+\cdots+\alpha_1 z+\alpha_0,\ z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$,
$\alpha_k=a_k+ib_k\ (k=0,1,\cdots,n)$　とするとき，w の実部 $Re(w)$ および $Im(w)$ を求めよ．

(2) $f(z)=\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}\ \ (z=x+iy)$　が正則か否かを調べよ．

(3) 次の式を証明せよ．

$$\frac{d}{dz}\sin^{-1}z=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

(北海道大 2011)　　(m20110103)

0.8 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ をそれぞれ x,y,z 方面の単位ベクトルとして, 以下の設問に答えよ．途中の計算手順を詳しく記述すること．

(1) 積分経路 $C:\boldsymbol{r}(t)=\cos t\ \boldsymbol{i}+\sin t\ \boldsymbol{j}+2t\ \boldsymbol{k}$（$t=0$ から $t=2\pi$）に沿った，ベクトル関数 $\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ の線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．

(2) $f(\boldsymbol{r})=\dfrac{1}{\sqrt{r^2+1}}$　($\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $r=||\boldsymbol{r}||=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$) とし, 原点を中心とする半径が 2 の球の表面を S と表す．このとき，S 上の点 $\boldsymbol{p}=x_p\boldsymbol{i}+y_p\boldsymbol{j}+z_p\boldsymbol{k}$ における $\nabla f\cdot\boldsymbol{n}$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{p}$ における S の外向き単位法線ベクトルであり，$\nabla f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$ とする．

(北海道大 2012)　　(m20120102)

0.9 以下の設問に答えよ．途中の計算手順を詳しく記述すること．

(1) $f(x)=x$ を区間 $[-\pi,\pi]$ 上でフーリエ級数に展開した結果が
$$2\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n-1}\frac{\sin(nx)}{n}$$
となることを示せ．

(2) $-\pi\le a\le\pi$ を満たす任意の定数 a に対して，x の区間 $[-\pi,\pi]$ において
$$x^2=a^2+4\sum_{n=1}^\infty(-1)^n\frac{\cos(nx)-\cos(na)}{n^2}$$
が成立することを示せ．

(3) (2) の結果を用いて，x の区間 $[-\pi,\pi]$ において
$$x^3-\pi^2x=12\sum_{n=1}^\infty(-1)^n\frac{\sin(nx)}{n^3}$$
を導け．

(北海道大 2012)　　(m20120104)

0.10 微分方程式と周期関数について，以下の設問に答えよ．途中の計算手順も，詳しく記述すること．

(1) 次の微分方程式を解き，一般解 $y(x)$ を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2}+10y=0$$

(2) 次の微分方程式を解き，一般解 $y(x)$ を求めよ．なお，n は 1 以上の整数である．

$$\frac{d^2y}{dx^2}+10y=\cos nx$$

(3) 関数 $g(x)$ は，周期 2π の周期関数であり，原点を含む 1 周期は次式で表される．
この関数をフーリエ級数に展開せよ．

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi^2}{8}\left(1+\dfrac{2x}{\pi}\right) & (-\pi\le x<0)\\ \dfrac{\pi^2}{8}\left(1-\dfrac{2x}{\pi}\right) & (0\le x<\pi)\end{cases}$$

(4) 次の微分方程式を解き，一般解 $y(x)$ を求めよ．なお，右辺は (3) の周期関数 $g(x)$ である．

$$\frac{d^2y}{dx^2}+10y=g(x)$$

(北海道大 2013)　　(m20130102)

0.11 f を周波数とするとき，時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[g(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

で与えられる．ここで，$i=\sqrt{-1}$ である．ある関数 $m(t)$ のフーリエ変換を $M(f)$ とするとき，
オイラーの公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ を利用して，$m(t)\cos(2\pi f_0t)$ のフーリエ変換が $M(f-f_0)$
および $M(f+f_0)$ を用いて表せることを示せ．

(北海道大 2014)　　(m20140103)

0.12 デカルト座標系 (x,y) と極座標 (r,θ) の関係が次のように与えられている．このとき，以下の設問に答えよ．

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ r\ge 0,\ ,\ 0\le\theta\le 2\pi$$

(1) 次の行列 J のすべての成分を r, θ の式で表せ．

$$J=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{bmatrix}$$

(2) 次の積分 A を求めよ．ただし $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$ とする．

$$A=\int_D x^2\,dxdy$$

(3) 次の行列 G のすべての成分を r, θ の式で表せ．ただし $r>0$ とする．

$$G=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\theta}{\partial x} & \dfrac{\partial\theta}{\partial y}\end{bmatrix}$$

(北海道大 2015)　　(m20150101)

0.13 $e^x \cos x$ と $\tan x$ のマクローリン展開を x^4 の項まで求めよ.

(北海道大 2017)　　(m20170101)

0.14 以下の微分方程式を解きなさい.

(1) $y' = xy - x - y + 1$　　　(2) $y'' - 6y' + 5y = 13\cos x$

(北海道大 2017)　　(m20170107)

0.15 次式の関数について，次の各設問に答えなさい．ただし，$0 < D < 1$ とする.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leqq x < -D\pi) \\ 1 & (-D\pi \leqq x < D\pi) \\ 0 & (D\pi \leqq x < \pi) \end{cases}$$

設問 1. 次式で示されるフーリエ級数の各係数を求めなさい.

$$f(x) = \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

設問 2. 上式において，n が偶数の項の係数がすべて 0 となる D の条件を求めなさい.

(北海道大 2018)　　(m20180105)

0.16 周期 2π の関数

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi \leqq x < \pi)$$

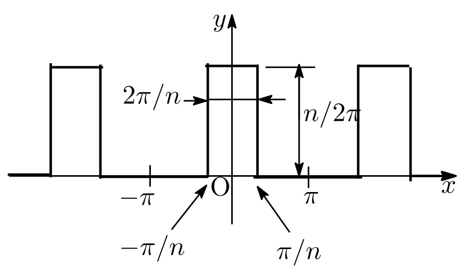
$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

について，次式のようにフーリェ級数展開したとき，各係数 a_0，a_n，b_n を求めなさい.

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

(北海道大 2020)　　(m20200105)

0.17 右図のような周期 2π の周期的パルス列 $f(x)$ を考える．パルスの幅は $2\pi/n$，高さは $n/2\pi$ で与えられ， 面積は常に 1 である（ただし n は 2 以上の整数）．この波形は y 軸に関して軸対称なので，次式のようなフーリエ級数に展開することができる．以下の設問に答えなさい.



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

(1) $n = 2$ のとき，a_k $(k \geqq 1)$ を求めなさい.

(2) 2 以上の整数 n について，a_k $(k \geqq 1)$ を n の関数として表しなさい.

(3) (2) の結果において，n を ∞ に漸近させると，与えられたパレス列はデルタ関数列になる．この条件における a_k を求めなさい.

(北海道大 2021)　　(m20210103)

0.18 (1) 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

$$\frac{dy}{dx} + y\cos x = \sin x \cos x$$

(2) 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

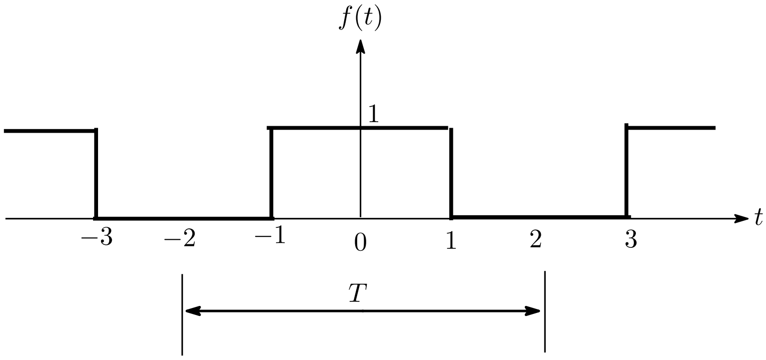
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \sin 2x$$

(北海道大 2022) (m20220101)

0.19 次の図のような矩形パルス（周期 $T = 4$）をフーリエ級数展開するとき,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) \right\}$$

で表すことができる. 以下の設問に答えなさい.



(1) a_0, a_n および b_n を T を用いた式で表しなさい.

(2) $T = 4$ のときの a_0, a_n および b_n を求めなさい.

(北海道大 2022) (m20220104)

0.20 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 4} dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$

(北見工業大 2005) (m20050204)

0.21 次の関数の偏導関数 z_x, z_y を求めよ.

(1) $z = x^3 y + y^2$ (2) $z = \cos(x - 2y)$

(北見工業大 2006) (m20060202)

0.22 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 (1 + x) dx$ (2) $\displaystyle\int \cos^3 x dx$ （ヒント：$t = \sin x$ という置換積分）

(北見工業大 2006) (m20060204)

0.23 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^3 (x - 1)^2 dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

(北見工業大 2007) (m20070203)

0.24 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \tan x \, dx$ を計算せよ. ヒント : $t = \cos x$ とおくとよい.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 \log x \, dx$ の値を求めよ.

(北見工業大 2009) (m20090202)

0.25 平面の直交座標 (x, y) と極座標 (r, θ) の間には $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ の関係がある．ただし，$r > 0$ とする．$z = f(x, y)$ を平面上で定義された 1 回連続微分可能関数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ および $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 等を用いて表せ.

(2) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$ を示せ.

(北見工業大 2009)　　(m20090203)

0.26 次の関数を微分せよ.

(1) $y = (2x-3)^5$　　(2) $y = \sin x^2$

(3) $y = (x^2+1)\log(x^2+1)$　　(4) $y = e^{-2x}\cos x$

(北見工業大 2010)　　(m20100201)

0.27 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x\cos 2x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 (x+1)^3\,dx$

(北見工業大 2011)　　(m20110203)

0.28 $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, $D : 1 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 4$ を求めよ.

$\left(\quad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \text{とおくとよい.} \quad \right)$

(北見工業大 2011)　　(m20110205)

0.29 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,dx$

(2) $\displaystyle\int x\log x\,dx$

(北見工業大 2013)　　(m20130204)

0.30 $z = x\cos(xy)$ とする．偏導関数 z_x, z_y を求めよ.

(北見工業大 2014)　　(m20140203)

0.31 $z = \cos(xy+y^2)$ とする．偏導関数 z_x, z_y を求めよ.

(北見工業大 2015)　　(m20150203)

0.32 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \tan x dx$ $\left(\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}\text{である.}\right)$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx$

(北見工業大 2015)　　(m20150204)

0.33 関数 $f(x) = \cos x$ の $x = 0$ を中心とする 2 次までのテイラー展開を求めよ.

(北見工業大 2019)　　(m20190207)

0.34 $\sin\theta + \cos\theta = 1/3$ のとき，次の値を求めよ.

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\tan\theta + 1/\tan\theta$

(岩手大 1994)　　(m19940302)

0.35 次の関数を微分せよ.

(1) $y = x\cos^2 x$ (2) $y = (x^2-1)\,e^{2x}$ (3) $y = \log(2-x)$

(岩手大 1994) (m19940304)

0.36 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos x dx$ (2) $\displaystyle\int (x+1)\log x\ dx$ (3) $\displaystyle\int e^{-3x} dx$

(岩手大 1994) (m19940306)

0.37 ３つのベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ の大きさを，それぞれ $|\boldsymbol{u}|, |\boldsymbol{v}|, |\boldsymbol{w}|$ で表す．ベクトルの内積を

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\phi \qquad (a)$$

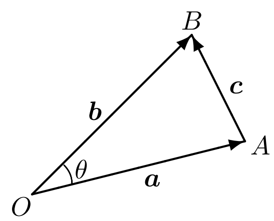
で定義する．ただし，ϕ はベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角である．この定義より，次の内積の基本性質が得られる．

$$|\boldsymbol{u}|^2 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} \qquad (b)$$

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} \qquad (c)$$

$$\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} \qquad (d)$$

$$(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u} \qquad (e)$$



さらに，右の図のような三角形 OAB を考え，

３つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA},\quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB},\quad \boldsymbol{c} = \overrightarrow{AB}$$

で定義する．ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とする．次の式を証明せよ．

$$|\boldsymbol{c}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

なお，内積の定義 (a) および基本的性質 (b)〜(e) を利用した場所を明示せよ．

(岩手大 1996) (m19960303)

0.38 ３次元空間内の３点 A, B, C の各々の座標を $(a,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,1)$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$ を２辺とする平行四辺形を $ACBD$ とするとき，点 D の座標を求めよ．

(2) $\angle ACB$ を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ．

(3) $\triangle ABC$ の面積を求めよ．

(4) $\triangle ABC$ に垂直な単位ベクトルを求めよ．

(岩手大 1997) (m19970304)

0.39 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - x\right), \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\sin x}{x^3}$$

(岩手大 1998) (m19980305)

0.40 範囲 $-\infty < x < \infty$ で連続な関数 $f(x)$ が次の関係式を満たすとする．

$$f(x) = \sin x + x\int_0^{\infty} f(t)e^{-t}dt + \int_0^{\pi} f(t)\cos t\,dt$$

次の問いに答えよ．

(1) 次の定積分 I_1 , I_2 , I_3 , J_1 , J_2 , J_3 の値を求めよ．

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-t} dt \,, \qquad I_2 = \int_0^{\infty} te^{-t} dt \,, \qquad I_3 = \int_0^{\infty} e^{-t} \sin t \, dt$$

$$J_1 = \int_0^{\pi} \cos t \, dt \,, \qquad J_2 = \int_0^{\pi} \sin t \cos t \, dt \,, \qquad J_3 = \int_0^{\pi} t \cos t \, dt$$

(2) 上記の関係式に含まれる 2 つの定積分を，次のように A，B とおく．

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-t} dt = A \,, \qquad \int_0^{\pi} f(t) \cos t \, dt = B$$

A，B の値を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ を求めよ．

(岩手大 1998)　　(m19980306)

0.41 x-y 平面上の半楕円

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \qquad (x \geqq 0) \cdots\cdots\cdots \text{(i)}$$

と x，y の関数

$$z = 2 + xy + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \qquad \cdots\cdots\cdots \text{(ii)}$$

を考える．ただし，半楕円上の点 (x, y) に対し，原点と点 $\left(\dfrac{x}{2}\,,\ y\right)$ を結ぶ線分が x 軸となす角を θ とする．次の問に答えよ．

(1) θ を媒介変数とする半楕円 (i) の媒介変数方程式を求めよ．θ のとる範囲も明示せよ．

(2) 条件 (i) のもとでの関数 (ii) の極値を求めるために，関数 (ii) を θ のみの関数として表せ．

(3) 前問で得られた θ の関数 $z = f(\theta)$ が極値をとる $\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ．

(4) $z = f(\theta)$ の極値を求めよ．

(5) $f(0)$, $f\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\pm\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．

(6) $z = f(\theta)$ のおよそのグラフを描け．

(7) 媒介変数 θ を用いずに，条件 (i) のもとでの関数 (ii) の極値を，ラグランジュの乗数法で求めたい．極値をとる (x, y) の値を求めるための条件式を書け．

(8) 極値をとる (x, y) の値を求めよ．

(岩手大 1998)　　(m19980308)

0.42 次の問いに答えよ.

(1) $f(\theta) = \sin\theta$ を, 以下のマクローリンの定理を用いて無限級数へ展開せよ.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

（ただし $0 < \theta < 1$）

(2) $f(i\theta) = e^{i\theta}$ を無限級数へ展開せよ. ただし, i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ とする.

(3) $f(\theta) = \cos\theta$ を無限級数へ展開し, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を証明せよ.

(4) $f(t) = 5 + 0.4\sin\omega t + 0.4\sin 2\omega t + 0.3\cos 2\omega t + 0.3\sin 3\omega t$ を, 以下の形式に書き直した場合の係数 C_2 と C_{-2} を求めよ.

$$f(t) = \sum_{n=-3}^{3} C_n e^{in\omega t}$$

(5)　$f(t) = 0.4\sin 2\omega t + 0.3\cos 2\omega t$ を, 以下の形式に書き直した場合の係数 A を求めよ.

$$f(t) = A\sin(2\omega t + \phi)$$

（岩手大 2004）　　(m20040303)

0.43　球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ の内部と円柱 $x^2 + y^2 = ax$ の内部の共通部分を考える．ただし，a は正の定数とする．次の問いに答えなさい.

(1)　球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ と円柱 $x^2 + y^2 = ax$ を図示しなさい.

(2)　極座標 (r, θ) を用い $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ とおいて，球および円柱の方程式を表しなさい.

(3)　共通部分の体積を求めなさい.

(岩手大 2008)　　(m20080304)

0.44　区間 $[a, b]$ 上の関数 $f(x)$, $g(x)$ は,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

が成り立つとき互いに直交しているという．以下の問いに答えよ.

(1)　次の (a)〜(e) に示した関数が区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上で互いに直交していることをそれぞれ示せ．ただし，k, l はともに自然数である.

(a) $\dfrac{1}{2}$ と $\cos kx$

(b) $\dfrac{1}{2}$ と $\sin kx$

(c) $\cos kx$ と $\sin lx$

(d) $\cos kx$ と $\cos lx$　$(k \neq l)$

(e) $\sin kx$ と $\sin lx$　$(k \neq l)$

(2)　区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上の任意の関数 $f(x)$ は，$\dfrac{1}{2}$, $\cos kx$, $\sin kx$　の線形和によって

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + a_3\cos 3x + b_3\sin 3x + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \end{aligned}$$

と表すことができる（これをフーリエ級数展開という）．係数 a_0, a_k, b_k をそれぞれ $f(x)$ を用いて表せ.

(3)　次の関数 $f(x)$ を区間 $[-\pi\,,\ \pi]$ 上でフーリエ級数に展開せよ.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

(岩手大 2009)　　(m20090301)

0.45　関数 $z = \log\left(x^2 + 2y^2\right)$ について，次の問いに答えなさい．ただし，対数は自然対数である.

(1)　$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めなさい.

(2)　変数 x, y が変数 r, θ の関数

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta$$

で与えられるとき，$\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めなさい.

(3) (1) および (2) の結果を用いて，次の式が成り立つことを示しなさい．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(岩手大 2009)　　(m20090304)

0.46 $a^2+b^2=5\,,\,a>0\,,\,b<0$ であるとき，　次の微分方程式について以下の問いに答えなさい．

$$(axy-e^x\cos y)\,dy=\left(e^x\sin y+by^2\right)\,dx$$

(1) この微分方程式が完全微分方程式であるときの a および b の値を求めなさい．

(2) (1) の結果を用いて，この微分方程式を解きなさい．

(岩手大 2011)　　(m20110304)

0.47 2 階微分方程式 $y''+9y=0$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 関数 $y=A\sin 3x-B\cos 3x$（$A,\,B$ は任意定数）は一般解であることを証明しなさい．

(2) 初期条件「$x=0$ のとき $y=1,\,y'=3$」を満たす特殊解を求めなさい．

(3) 境界条件「$x=\dfrac{\pi}{3}$のとき $y=1,\,x=\dfrac{\pi}{9}$のとき $y=1$」を満たす特殊解を求めなさい．

(岩手大 2012)　　(m20120304)

0.48 2 階微分方程式 $y''+2y'+2y=-85\sin 3x$ について，次の問いに答えなさい．

(1) $y=6\cos 3x+7\sin 3x$ が上の微分方程式の 1 つの解であることを示しなさい．

(2) (1) の結果を利用して上の微分方程式の一般解を求めなさい．

(3) $x=0$ のとき $y=0,\ y'=0$ を満たす上の微分方程式の解を求めなさい．

(岩手大 2013)　　(m20130304)

0.49 次の連立微分方程式について，以下の問いに答えなさい．

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+\sin t\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-x+2y\end{cases}$$

(1) $x(t)$ を消去し，$y(t)$ に関する微分方程式を求めなさい．

(2) $y=A\sin t+B\cos t$ が (1) で求めた微分方程式の解になるような，適当な定数 A,B を求めなさい．

(3) (2) の結果を利用して，(1) で求めた微分方程式の一般解を求めなさい．

(岩手大 2014)　　(m20140304)

0.50 2 つの曲線 $y=\cos 2x$ $(0\leqq\ x\leqq\pi)$,　$y=\sin x$ $(0\leqq\ x\leqq\pi)$ とその曲線によって囲まれた図形 S について，次の問いに答えなさい．

(1) 2 つの曲線を図示し，また図形 S を斜線で図示しなさい．

(2) 2 つの曲線の交点の x 座標を求めなさい．

(3) 図形 S を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めなさい．

(岩手大 2016)　　(m20160304)

0.51 微分方程式 $y''+2y'+2y=10\cos 2x$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 微分方程式の特性方程式を示し，その解を求めなさい．

(2) 微分方程式の一般解を求めなさい．

(3) 微分方程式について，初期条件 $y(0)=0,\ y'(0)=2$ をみたす特殊解を求めなさい．

(岩手大 2018)　　(m20180304)

0.52 次の $\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ．注意：log は自然対数で，π は円周率である．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}=\boxed{\text{(p)}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log|\cos x|}{x^2}=\frac{1}{\boxed{\text{(q)}}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log|1-x^2|}{\log|\cos x|}=\boxed{\text{(r)}}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2^{\sin x}-2}{\log|\sin x|}=\log\boxed{\text{(s)}}$

(秋田大 2002)　　(m20020402)

0.53 次の関数について，導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい．

(1) $y=x^3e^{-2x}$　　(2) $y=\dfrac{2x+1}{\sin x}$

(2) $\begin{cases} x= & \cos t+t\sin t\\ y= & 2\sin t-2t\cos t\end{cases}$　　(4) $x^3y+3y^2+2x^4=0$

(秋田大 2003)　　(m20030401)

0.54 次の問いに答えなさい．

(1) 極座標変換 $x=r\cos\theta\,,\ y=r\sin\theta$ (ただし，$r\geqq\ 0\,,\ 0\leqq\theta<2\pi$) によって，$xy$ 平面上の領域 D が $r\theta$ 平面上の領域 D' に対応しているとする．このとき，関数 f の重積分について，次の式が成り立つことを示しなさい．

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f(r\cos\theta\,,\ r\sin\theta)rdrd\theta$$

(2) xy 平面上の領域 D が $1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 9$ で与えられるとき，次の重積分の値を求めなさい．

$$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy$$

(秋田大 2003)　　(m20030402)

0.55 (1) $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ のとき, 行列 $J=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}$ と, その行列式 (determinant) を計算せよ.

(2) 積分 $I=\displaystyle\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$ を計算せよ. ただし,R は正の定数で,D は領域 $x^2+y^2\leqq\ R^2$ を表す. 必要ならば問題 (1) の変数変換を用いよ.

(3) 半径 R の球の体積 V を, 上の問題 (2) の積分 I を用いて表せ. 理由も簡潔に述べること.

(秋田大 2005)　　(m20050406)

0.56 次の積分を計算せよ．　$\displaystyle\int(\cos x)^r\,\sin x\,dx,$　　r は実数

(秋田大 2006)　　(m20060405)

0.57 次の極限を求め，$\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{x}=\boxed{}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=\boxed{}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log x^2}{\log|\sin x|}=\boxed{}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2^{\cos x}-2}{\log|\cos x|}=\boxed{}$　　(5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log|1-x^2|}{\log|\cos x|}=\boxed{}$

(秋田大 2007)　　(m20070403)

0.58 次の定積分を求め，$\square$ 内に当てはまる整数を入れよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx = \frac{1}{\square}\left(\frac{\pi}{2}+\square\right)$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \cos x dx = \frac{\square}{12}$

(3) $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{\square}{3}$ (4) $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx = \frac{\square}{15}$

(5) $\displaystyle\int_1^e \sqrt{x}\log x dx = \frac{2}{\square}\left(e^{\frac{3}{2}}+\square\right)$ (6) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx = 1+\frac{\square}{e}$ (7) $\displaystyle\int_1^{\infty} x^2e^{-x}dx = \frac{\square}{e}$

(秋田大 2007) (m20070404)

0.59 関数 $z=f(x,y)$ について，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=x$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=y$ が成り立っているとする．r を定数とし，$x=r\cos t$，$y=r\sin t$ とおく．このとき，$\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ．

(秋田大 2008) (m20080406)

0.60 以下の四角内に当てはまる値を計算し，解答欄の指定した箇所に記入せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x+1\right) = \boxed{\text{（ア）}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \boxed{\text{（イ）}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \boxed{\text{（ウ）}}$

(秋田大 2013) (m20130401)

0.61 2 変数 x と y を持つ関数 $f(x,y)=e^x\cos y$ について，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(秋田大 2015) (m20150404)

0.62 次の極限を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{e^{2x}-1}$ （e は自然対数の底である.）

(秋田大 2017) (m20170402)

0.63 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\cos x dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$

(秋田大 2019) (m20190401)

0.64 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\cos x dx$ (2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2+x}}dx$ ただし，$t=\sqrt{x^2+x}-x$ と置換して求めよ．

(秋田大 2020) (m20200401)

0.65 次の積分 (1)，(2) を求めなさい．ここで，$|y|$ は y の絶対値を表す．

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\cos(x)\ \mathrm{dx}$ (2) $\displaystyle\int_0^2 \left|\,1-x^2\,\right| dx$

(秋田大 2022) (m20220401)

0.66 (1) 区間 $0\leqq y\leqq\pi$ において，$\cos(4y)=0$ を満たす y をすべて求めなさい．

(2) $x=\cos(y)$ として，$\cos(4y)$ を x の多項式で表したものを $p(x)$ とする．$p(x)$ を求めなさい．

(3) (2) で求めた $p(x)$ に対して，$p(x)=0$ を満たす x をすべて求めなさい．

(4) (1) および (3) の結果より，$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ の値を求めなさい．

(秋田大 2022)　　(m20220403)

0.67　２行２列の行列 P と単位行列 E をそれぞれ

$$P=\begin{pmatrix} 1+\cos x & \sin x \\ \sin x & 1-\cos x \end{pmatrix} \quad , \quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) P^2 を計算せよ．

(2) 正整数 n に対して P^n を求めよ．

(3) 正整数 n に対して $(P+E)^n$ を求めよ．

(東北大 1994)　　(m19940503)

0.68　次の問いに答えよ．

(1) $\sin^4\theta\ \cos^2\theta=a_0+a_2\cos 2\theta+a_4\cos 4\theta+a_6\cos 6\theta$ とおくとき，a_0 , a_2 , a_4 , a_6 を定めよ．

(2) 変数変換 $x=a\sin^2\theta \quad (a>0)$ を用いて，次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^a x\sqrt{ax-x^2}dx$$

(3) 円柱 $(x-a)^2+(y-a)^2\leq a^2$ が，２平面 $z=ax$, $z=-ax$ により切り取られる部分の体積を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

(東北大 1995)　　(m19950501)

0.69　次の問いに答えよ．

(1) 次の微分方程式を $y(0)=a$ の条件の下に解け．

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}xy=x+\frac{1}{4}x^3 \qquad (*)$$

(2) x の関数 $y(x)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}(\cos xt+x^2t)dt$ について，式 $(*)$ が成り立つことを示せ．ただし，微分と積分の順序は交換できるものとする．

(東北大 1996)　　(m19960502)

0.70　点 $X(x,y)$ を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる点を $X'(x',y')$ とする．

(1) OX の長さは r であり，OX の方向は x 軸の正のむきを原点 O のまわりに α だけ回転した方向にあるとする．このとき，x,y,x',y' を r,α,θ により表わせ．ただし，角 θ と角 α の回転の方向は同一であるとする．

(2) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表わすとき，2×2 行列 T は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となることを示せ．

(3) 点 $A(x_1,y_1)$，点 $B(x_2,y_2)$ と原点 O からなる三角形 OAB を考える．三角形 OAB を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる三角形を $OA'B'$ とする．三角形 OAB の面積 S と三角形 $OA'B'$ の面積 S' を与える公式

$$S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|, \quad S'=\frac{1}{2}|x_1'y_2'-x_2'y_1'|$$

を用いて，$S=S'$ であることを示せ．

(4) 上記 (3) で定義した三角形 $OA'B'$ の辺 $A'B'$ が直線 $y'=1$ 上に位置し，$S'=\dfrac{1}{2}$ であるとする．この場合に，x_1, y_1, x_2, y_2 が満たすべき条件を示せ．

(5) 上記 (4) において，さらに，$x_1'=0,\ x_2'>0,\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$ とする．三角形 OAB を図示せよ．

(東北大 2001)　　(m20010503)

0.71 原点 $\boldsymbol{O}(0,0,0)$ を中心とする半径が 1 の球（単位球）に内接する正四面体を考える． 球の中心から各頂点 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ に至る 4 本のベクトルを $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}},\overrightarrow{\boldsymbol{OB}},\overrightarrow{\boldsymbol{OC}},\overrightarrow{\boldsymbol{OD}}$ とし，$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$ を z 軸に，$\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$ を xz 平面に置き， その 4 本の内, 任意の 2 本のベクトルのなす角度を θ とする． この時, 各ベクトルの成分は $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}=(0,0,1)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}=(-\sin\theta,0,\cos\theta)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{OC}}=(\sin\theta\cdot\cos 60^\circ,-\sin\theta\cdot\sin 60^\circ,\cos\theta)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{OD}}=(\sin\theta\cdot\cos 60^\circ,\sin\theta\cdot\sin 60^\circ,\cos\theta)$ と表せる．

(1) $\cos\theta$, $\sin\theta$ の値を求めよ．

(2) 単位球と頂点 $\boldsymbol{B}$ で接する平面の方程式を求めよ．

(3) 正四面体の 1 辺の長さを求めよ．

(4) 正四面体の体積を求めよ．

（東北大 2004）　　(m20040503)

0.72 円柱面 $x^2+y^2=ax$ と球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ で囲まれ, 不等式 $x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $z\geqq 0$ を満たす領域を R として, 次の問に答えよ．

(1) 領域 R の概形を描け．

(2) 変数変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ のヤコビアン $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ．

(3) 領域 R の体積 V を求めよ．

(東北大 2006)　　(m20060501)

0.73 x を実数とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\sin(a\cos x)$$

と定義する． ただし，a は実数の定数である． $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $a=1$ のとき $f(x)=0$ を満たすすべての実数 x を求めよ．

(2) $a=1$ のとき $f'(x)=0$ を満たすすべての実数 x を求めよ．

(3) $a=\pi$ のとき $y=f(x)$ の区間 $0\leqq x\leqq 2\pi$ における増減, 極値を調べ，増減表を書き，グラフの概形を描け． ただし，グラフには $y=0$ となる点の x の値も記すこと．

(東北大 2009)　　(m20090502)

0.74 xy 平面上の点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる．

$$\begin{cases} x(t)=-\dfrac{t}{\pi}\cos t \\ y(t)=\sin t \end{cases}$$

ここで, $0\leqq t\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする. このとき, 以下の問に答えよ．

(1) $t=\dfrac{m}{2}\pi$（ただし $m=0,1,2,3$）における点 P の座標, およびそれらの点における曲線 C の接線の傾きを求めよ. さらに, 曲線 C の概形を描け．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int t\sin^2 t\,dt$ を求めよ.

(3) 曲線 C と x 軸 $(x \geqq 0)$ および y 軸 $(y \geqq 0)$ によって囲まれる領域の面積を求めよ.

(東北大 2010)　　(m20100502)

0.75 x を実数とし， 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = e^{-x}\cos x$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の第 n 次導関数を $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ とするとき,

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \left(-\sqrt{2}\right)^n e^{-x}\cos\left(x - \frac{n\pi}{4}\right)$$

であることを数学的帰納法を用いて証明せよ.

(2) 関数 $y = f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べ，増減表を書き，グラフの概略を描け.

(3) 曲線 $y = f(x)$ $\left(区間\ 0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ.

(東北大 2011)　　(m20110502)

0.76 数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ とする．このとき．$b_n = a_{n+1} - \alpha a_n$ によって定められる数列 $\{b_n\}$ が公比 β の等比数列となるような α と β をすべて求めよ.

(2) $(n+2)a_{n+2} - 2(n+1)a_{n+1}\cos\theta + na_n = 0$ であるとき，a_1 と a_2 を用いて a_n $(n \geqq 3)$ を表せ，ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする.

(3) $a_1 = 1$, $a_2 = i$ (ただし $i = \sqrt{-1}$) とし，複素平面上で原点を O，複素数 a_n を表す点を A_n とする．a_n が (2) の式で表されるとき，三角形 OA_nA_{n+1} $(n \geqq 3)$ の面積を求めよ.

(東北大 2012)　　(m20120501)

0.77 z を正の実数とする．実変数の関数 $f(x)$ に対し，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xz} f(x)dx$ が存在するとき，これを $I[f](z)$ と書くことにする.

(1) f が区間 $[0, \infty)$ で連続かつ有界であれば，$I[f](z)$ が存在することを示せ.

(2) a を実数とする．$I[\sin ax](z)$，$I[\cos ax](z)$ をそれぞれ求めよ.

(東北大 2012)　　(m20120509)

0.78 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ の関係を用いて，以下の関係が成り立つことを示せ．ただし，　$i = \sqrt{-1}$ である.

(1) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\sin\theta$

(2) $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

(東北大 2015)　　(m20150501)

0.79 $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ で表される xy 平面上の曲線について，以下の問に答えよ．ただし，a は正の実数とする.

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として示せ.

(2) この曲線の概形を描き，曲線の全長を求めよ．

(3) この曲線が囲む面積を求めよ．

(東北大 2015)　　(m20150503)

0.80 x を実数とする．$n\times\ n$ 正方行列である $\boldsymbol{A}_n(x)$ と $\boldsymbol{B}_n$ を以下のように与える．

$$\boldsymbol{A}_n(x)=\begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -x & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -x \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}_n=\boldsymbol{A}_n(0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

すなわち，$\boldsymbol{A}_n(x)$ は対角要素がすべて $-x$，その両側の斜めの要素が 1，それ以外の要素がすべて 0 の 3 重対角行列である．$\boldsymbol{B}_n$ は $\boldsymbol{A}_n(x)$ において $x=0$ としたときの行列である．

(1) $\boldsymbol{B}_2$ の固有値をすべて求めよ．

(2) $\boldsymbol{B}_3$ の固有値をすべて求めよ．

(3) $\boldsymbol{B}_n$ の固有値のひとつを λ とする．この λ は $|\boldsymbol{A}_n(\lambda)|=0$ を満たすことを示せ．

(4) λ が $\boldsymbol{B}_n$ の固有値であるとき，$|\boldsymbol{A}_n(\lambda)|$ は漸化式 $|\boldsymbol{A}_n(\lambda)|=-\lambda|\boldsymbol{A}_{n-1}(\lambda)|-|\boldsymbol{A}_{n-2}(\lambda)|$ を満たすことを示せ．ただし，$|\boldsymbol{A}_0(\lambda)|=1$，$|\boldsymbol{A}_1(\lambda)|=-\lambda$ とする．

(5) $\lambda=-2\cos\theta$，$|\boldsymbol{A}_n(\lambda)|=\dfrac{\sin[\ (n+1)\theta\ ]}{\sin\theta}$ とおくとき，これらが (4) の漸化式を満たすことを示せ．ただし，$\sin\theta\neq 0$ である．

(6) $\dfrac{\sin[\ (n+1)\theta\ ]}{\sin\theta}=0$ を満たす θ を求めよ．これを使って，$\boldsymbol{B}_n$ の固有値 $\lambda=-2\cos\theta$ を求めよ．また，求めた固有値は，$n=2$，$n=3$ の場合，それぞれ (1) および (2) で求めた固有値と一致することを示せ．

(東北大 2015)　　(m20150505)

0.81 (1) 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ を求めよ．ただし，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ とする．

$$a_1=1,\ \ a_{n+1}=-a_n+S_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(2) 次の数列が収束するとき，実数 x の範囲と数列の極限を求めよ．

$$\frac{(2x-1)^n}{3^n} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(3) ロピタルの定理を用いて，以下の極限を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\dfrac{1}{1-\cos x}}$$

(東北大 2016)　　(m20160503)

0.82 (1) 実正方行列が直交行列であることの定義を述べよ．

(2) 2 次の直交行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \qquad (\theta : \text{実数})$$

の形であることを示せ.

(3) A を n 次直交行列とする．2 つのベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して， $A\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{w}$ の間の距離は，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ の間の距離に等しいことを示せ． ただし，距離はユークリット空間における標準的な距離とする.

(東北大 2016) (m20160506)

0.83 オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いて，次の関係が成り立つことを示せ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ である.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

(東北大 2018) (m20180501)

0.84 関数 $f(x)$ を，以下のように定義する．次の問いに答えよ.

$$f(x) = e^{2x}(\cos^2 x - \sin^2 x) \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

(1) $f(x) = 0$ となる x を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．また，この関数の増減表を示せ.

(3) k を実数とする．$f(x) = k$ の実数解の個数を求めよ.

(東北大 2018) (m20180502)

0.85 xyz 空間における点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる.

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = -a\sin t \end{cases}$$

ここで，a は正の実数である．$0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする．以下の問に答えよ.

(1) $t = \dfrac{\pi}{2}$ と $t = \pi$ のそれぞれに対し，点 P の座標とその点における曲線 C の接線方向を表すベクトルを求めよ.

(2) 曲線 C 上の任意の点 P における接線の方程式を求めよ.

(3) 曲線 C が平面上の曲線であることを示し，その平面の方程式と単位法線ベクトルを求めよ.

(4) 曲線 C が xz 平面に投影した曲線で囲まれる領域 D の面積を求めよ.

(東北大 2018) (m20180503)

0.86 $\mathbb{R}$ 内の閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数 $f(x)$ は $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 1$ をみたすとする．正の整数 n に対し

$$b_n = \int_0^1 f(x)\cos\frac{x}{\sqrt{n}}dx$$

とおくとき,

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty}(b_n)^n = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)$$

が成り立つことを以下の設問に沿って証明せよ.

(1) 任意の $x \geq 0$ に対し

$$0 \leq \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^3}{6}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 任意の n に対し

$$\left| b_n - 1 + \frac{1}{2n}\int_0^1 x^2 f(x)dx \right| \leq \frac{1}{6n\sqrt{n}}\int_0^1 x^3 \left| f(x) \right| dx$$

が成り立つことを示せ．

(3) 任意の実数 α, β に対し

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n\sqrt{n}}\right)^n = e^{\alpha}$$

が成り立つことを示せ．

(4) (2) および (3) の結果を利用して $(*)$ を結論せよ．

(東北大 2018)　　(m20180511)

0.87 xy 平面上の点 P の座標 (x, y) が，実数 t を媒介変数として次の式で与えられる．

$$\begin{cases} x(t) = (1 + \cos t)\cos t \\ y(t) = (1 + \cos t)\sin t \end{cases}$$

ここで，$0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $x(t)$ および $y(t)$ の増減表を作成し，曲線 C の概形を図示せよ．

(2) 曲線 C の長さを求めよ．

(3) 曲線 C と直線 $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$ によって囲まれる領域の面積 A を求めよ．

(東北大 2019)　　(m20190501)

0.88 任意の自然数 n に対する数列を以下の定積分により定義する．

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^{2n-1} x}$$

(1) I_1 を求めよ．

(2) I_2 を求めよ．必要であれば次の関係式を用いよ．

$$\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^3 x}$$

(3) I_n に成立する漸化式を求めよ．

(4) 以下に示す極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nI_n}{2^n}$$

(東北大 2020)　　(m20200502)

0.89 次の関数 $f(x, y)$ について，以下の問に答えよ．x, y の範囲はそれぞれ $0 < x < \pi/2$, $0 < y < \pi/2$ とする．

$$f(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x - y)$$

(1) 次の偏導関数を求めよ．

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

(2) 次式を満足する (x, y) の値をすべて求めよ．

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

(3) $f(x, y)$ の極値をすべて求めよ．

(東北大 2021)　　(m20210506)

0.90 極座標変換を用いて次に示す重積分を計算する．以下の問に答えよ．

$$I = \iint_D \frac{x-y}{(x^2+y^2)^2} dxdy, \qquad D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 2,\ \ 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x \right\}$$

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) 次に示す極座標変換のヤコビ行列とその行列式（ヤコビアン）を求めよ．

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

(3) (2) の極座標変換によって，xy 平面内の領域 D は $r\theta$ 平面内の領域 $\overline{D}$ に対応づけられる．下図に示す点 $O(0, 0)$ を原点とする r と θ の直交座標を用いて，領域 $\overline{D}$ を図示せよ．

(4) 重積分 I を計算せよ．

(東北大 2022)　　(m20220505)

0.91 点 $O(0, 0, 0)$ を原点とする xyz 空間において，中心を点 $C(0, 0, 1)$，半径を $1/2$ とする球面 S_1 がある．点 $A(0, 0, 2)$ を通る直線を z 軸まわりに回転して得られる円錐面 S_2 が，球面 S_1 に接している．ただし，$z \leqq 2$ とする．

(1) 円錐面 S_2 と球面 S_1 の接点のひとつを B とするとき，$\cos\angle CAB$ を求めよ．

(2) 円錐面 S_2 上の任意の点を $P(x, y, z)$ とするとき，円錐面 S_2 の方程式を求めよ．

(3) 円錐面 S_2 と xy 平面で囲まれた閉曲面を S とする．以下のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ の面積分 I を求めよ．

$$\boldsymbol{F} = (x^3 z)\,\mathbf{i} + (x^2 yz)\,\mathbf{j} + \{(x^2+y^2)z^2\}\,\mathbf{k}$$

$$I = \int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

ただし，$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は x, y, z 軸方向の基本ベクトルであり，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は S 内部から外向きに取るものとする．

(東北大 2022)　　(m20220506)

0.92 $\displaystyle\int e^x \cos x dx$ を求めよ．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970603)

0.93 m と n を整数として以下の定積分を考えましょう．

$$I(m, n) = \int_0^{2\pi} \sin(mx) \cdot \cos(nx) dx,$$

$$J(m,n) = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)dx,$$

$$K(m,n) = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)dx,$$

(1) 任意の m, n に対して $I(m,n)$ を求めてください．

(2) m と n が異なるときに，$J(m,n), K(m,n)$ を求めてください．

(3) 周期 2π の関数 $f(x)$ を三角関数で次のように展開します：

$$f(x) = c_0 + c_1\cos(x) + c_2\cos(2x) + c_3\cos(3x) + \cdots + a_1\sin(x) + a_2\sin(2x) + \cdots$$

このとき，係数 c_1, a_2 を求めてください．

（お茶の水女子大 1998） (m19980602)

0.94 次の計算をせよ．ただし，$\log x$ は自然対数であり，$\ln x$ と同じである．

(1) $\dfrac{d}{dx}\sin^2 x$ (2) $\dfrac{d}{dx}\cos(x^3)$ (3) $\dfrac{d}{dx}\log(\sqrt{x^2+1}+x)$ (4) $\dfrac{d}{dx}2^x$ (5) $\dfrac{d}{dx}x^x$

（お茶の水女子大 1999） (m19990601)

0.95 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to +0}x^3\log x$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+e^x)^{1/x}$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x+\sin x}{x}$

（お茶の水女子大 1999） (m19990602)

0.96 次の計算をせよ．ただし，$\log x$ は自然対数であり，$\ln x$ と同じである．

(1) $\displaystyle\int \sin 3x dx$ (2) $\displaystyle\int x\cos x dx$ (3) $\displaystyle\int \log x dx$ (4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}dx$ (5) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}dx$

（お茶の水女子大 1999） (m19990605)

0.97 図の様に，x, y 平面上の座標が (x, y) で表される点 P を原点 O のまわりに角度 α だけ回転すると，座標が (x', y') の点 P' に移った．以下の問に答えよ．

(1) 点 P の原点 O からの距離を r，O から P に到るベクトルが x 軸の正の方向となす角度を θ とすると，x と y は

$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$

と表される．この時 x' と y' を r，θ，α で表わせ．

(2) x' と y' を x と y と α で表す関係式をもとめよ．

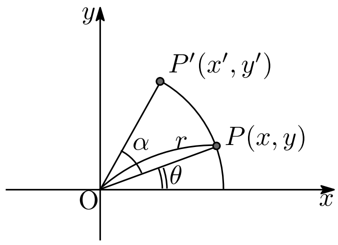
但し，必要があれば，以下の三角関数に関する公式を用いてもよい．

$\sin(\theta+\alpha) = \sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha, \quad \sin(\theta-\alpha) = \sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha$

$\cos(\theta-\alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha, \quad \cos(\theta+\alpha) = \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha$

(3) 複素数 z は，2 乗すると-1 となる i と称する虚数を導入して，実数 x と y を用いて $z = x+iy$ と定義される．この時，x と y は複素数 z の実部と虚部と呼ばれる．今，上記の点 P の座標 x と y とを実部と虚部に持つ複素数を z，点 P' の座標 x' と y' とを実部と虚部に持つ複素数を z' としよう．この時 z' を z で表すとどうなるか，議論せよ．但し，必要ならばオイラーの有名な公式：$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ を用いてもよい．

(4) 上記のオイラーの有名な公式を知っていると，上記の三角関数の公式は導出できるだろうか.「YES , NO , あるいは分からない」で答えよ．



(お茶の水女子大 1999)　　(m19990610)

0.98　次の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x}$

（お茶の水女子大 2000）　　(m20000604)

0.99　変数変換 $t = \tan(\theta/2)$ を用いて三角関数の積分を計算してみよう．

(1) $\cos\theta$ と $\sin\theta$ は変数 t を用いて，以下のように表せることを示せ．

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

(2) 次の関数式を示せ．　$\displaystyle\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{2}(1+t^2)$

(3) 次の不定積分を求めよ．　$\displaystyle\int \frac{d\theta}{\sin\theta}, \quad \int \frac{d\theta}{\cos\theta}$

ただし，もし必要であれば以下の公式を用いて良い．

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

（お茶の水女子大 2001）　　(m20010604)

0.100　以下に与えられる 3 行 3 列の行列 A を考える．

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

また，xyz 座標系の基底ベクトルを $\overrightarrow{e_x}$，$\overrightarrow{e_y}$，および $\overrightarrow{e_z}$ と表す．

$$\overrightarrow{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) $A\overrightarrow{e_x}$，$A\overrightarrow{e_y}$，および $A\overrightarrow{e_z}$ を計算せよ．

(2) 行列式 $detA$ を計算せよ．

(3) 逆行列 A^{-1} を求めよ．

(4) 基底ベクトル $\overrightarrow{e_x}$，$\overrightarrow{e_y}$，および $\overrightarrow{e_z}$ を三辺とする立方体を考える．変換 A によって，その体積は何倍に変換されるか．

（お茶の水女子大 2001）　　(m20010610)

0.101　次の極限が存在するように定数 a, b, c を定め，そのときの極限を求めよ．

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \cos x + a + bx + cx^2}{x^3}$$

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030602)

0.102 (1) ２変数関数 $g(x,y)$ が２回連続微分可能であるとき，それと $x=f_1(r,\theta)=r\cos\theta,\ y=f_2(r,\theta)=r\sin\theta$ の合成関数 $h(r,\theta)=g(r\cos\theta, r\sin\theta)$ について次の等式が成立することを示せ．ただし，$r\neq 0, (x,y)\neq(0,0)$ とする．

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

(2) ２変数関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) の近傍 $V=\{(x,y)|\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<r\}$ で２回連続微分可能であるとする．次の条件

$$\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)=\frac{\partial}{\partial y}f(a,b)=0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a,b)>0\,,\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a,b)\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(a,b)-\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(a,b)\right)^2>0$$

を満たすとき，$f(x,y)$ は (a,b) で極小であることを示せ．すなわち，

$U=\{(x,y)|\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<r'\}$ $(r'\leq r)$ があって，$(x,y)\in U-\{(a,b)\}$ ならば

$f(x,y)>f(a,b)$ が成り立つことを示せ．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030607)

0.103 関数

$$f(x)=|\cos x|\quad(-\pi\leq x\leq\pi)$$

のフーリエ級数を求めよ.

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090608)

0.104 2 次元のベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y)=(A_x(x,y),A_y(x,y))$, に対して，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$ は

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}$$

で与えられる．$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$ を極座標 $(x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta)$ であらわすと

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_r}{\partial r}+\frac{A_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}$$

となることを示せ．ここで，A_r は $\boldsymbol{A}$ の r 方向（動径方向）成分，A_θ はそれに垂直な方向の成分である．

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090610)

0.105 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{e^x+1}\,dx$

(お茶の水女子大 2010)　　(m20100602)

0.106 二次元平面上で x- y座標軸を反時計回りに θ だけ回転させた座標軸を x'- y' とする. ある点 P の位置 (x,y) はこの新しい座標軸では (x',y') と表されるが, 両者の間には次のような関係がある :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\ ,\quad A\equiv\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\qquad ①$$

以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A とその転置行列 A^T の積 AA^T を求めよ.

(2) 行列 B を

$$B=\begin{pmatrix}-\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\qquad ②$$

とするとき, BB^T は前問の AA^T に等しいことを示せ. また, A が 2 次元平面上での座標軸の回転を表していたのに対し, B は何を表すかを説明せよ.

(3) A, B のような行列は直交行列と呼ばれる. 前問で見たような行列 A と B の違いは直交行列のどのような性質によるのか、答えよ.

(お茶の水女子大 2010)　　(m20100606)

0.107 次の関数 $f(x)$ について以下の問いに答えよ.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \leq 0 \\ x\cos x & x > 0 \end{cases}$$

(1) 関数 $f(x)$ は $x=0$ で連続か？

(2) 関数 $f(x)$ は微分可能か？ 微分可能ならば導関数を記しなさい.

(3) 関数 $f(x)$ は $x=0$ で何回まで微分可能か？

(お茶の水女子大 2010)　　(m20100609)

0.108 極座標表示で表された曲線 ： $r = 1+\cos\theta$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ について，以下の各問に答えよ.

(1) 曲線の長さを求めよ.

(2) 曲線によって囲まれた図形の面積を求めよ.

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110606)

0.109 すべての実数 x について，不等式

$$\cos x + \sin x \geq 1 + x - \frac{2}{\pi}x^2$$

が成り立つことを示せ.

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110610)

0.110 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ を次式で定義する.

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\ , \quad \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

ここで e^x は指数関数を表す.

(1) 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ の微分を求めよ.

(2) 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ の無限級数展開の最初の 3 項目までを求めよ.

(3) 次の関係式（加法定理）を示せ.

$$\sinh(\alpha+\beta) = \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta$$

(4) 上の関係式（加法定理）から，正弦関数 $(\sin\theta)$ の加法定理を導け．ただし，次のオイラーの関係式は仮定して良い.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

(お茶の水女子大 2012)　　(m20120603)

0.111 極座標表示で

$$r^2 = \cos 2\theta \quad ただし \qquad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

と表される曲線の概形を描け.

(お茶の水女子大 2012)　　(m20120606)

0.112 実数列 $\{x_n\}$, $n=0,1,\cdots$, を次の漸化式で定義する.

$$x_0 = 0\,,\quad x_{n+1} = \cos x_n\,,\quad n=0,1,\cdots$$

(1) 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$x_0 < x_2 < x_4 < \cdots < x_{2n} < x_{2n+2} < \cdots$$

(2) 数列 $\{x_n\}$ はある正数 $\alpha > 0$ に収束することを示せ. また極限値 α は

$$\cos\alpha = \alpha$$

を満たすことを示せ.

(お茶の水女子大 2013) (m20130602)

0.113 次の方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(\boldsymbol{r}) = a\delta(\boldsymbol{r}), \tag{a}$$

に関する以下の問いに答えなさい. ここで右辺の a は正の実数, $\delta(\boldsymbol{r})$ は 3 次元のデルタ関数

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{b}$$

である.

(1) 関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ のフーリエ変換を

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k}) \tag{c}$$

とした時, これが方程式 (a) を満たすということから関数 $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$ を求めなさい.

(2) 積分要素 $d\boldsymbol{k}$ の直交座標系 (k_x, k_y, k_z) から極座標系 (k, θ, ϕ) への変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k} = \int_0^{\infty} dk \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi |J| \tag{d}$$

で与えられる. このときのヤコビアン J を書きなさい. ここで $k = |\boldsymbol{k}|$ である. また (d) の右辺が

$$\int_0^{\infty} k^2 dk \int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \tag{e}$$

と書けることを示しなさい.

(3) 問 (1) で求めた $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$ を使って, (c) から $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めなさい. 必要があれば, 公式

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2} \tag{f}$$

を用いてもよい.

(お茶の水女子大 2013) (m20130606)

0.114 三角形 ABC の三つの角について, 以下を示せ.

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} = 0$$

(お茶の水女子大 2013) (m20130610)

0.115 次の関数を微分せよ.

(1) $y = x^x$ (2) $y = \sin\bigl(\cos(x^2)\bigr)$

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160608)

0.116 逆三角関数 $f(x)=\sin^{-1}x$ (ただし，$-\pi/2\leq f(x)\leq \pi/2$) について，以下の問いに答えよ.

(1) $y=f(x)$ のグラフを描け.

(2) $\cos\left(\sin^{-1}x\right)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ を x で微分せよ.

(4) $f(x)$ の不定積分を求めよ.

(5) $y=f(x)$ として $y''(1-x^2)=y'x$ がり立つことを示せ.

(6) $f(x)$ をマクローリン展開せよ.

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170605)

0.117 極限値を求めよ.　(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-\cos x}{x}$

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170609)

0.118 整数 n に対して，$x\neq 0$ のとき $f_n(x)=x^n\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f_n(0)=0$ として $\mathbb{R}$ を定義域とする関数 f_n を定める.

(1) f_n の $x\neq 0$ における微分係数 $f_n'(x)$ を求めよ．また f_1 は $x=0$ で微分可能でないことを確かめよ.

(2) 自然数 m に対して $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上定義された f_n の m 階導関数 $f_n^{(m)}$ が存在する．適当な多項式 P_m，Q_m に対して，$x\neq 0$ で

$$f_n^{(m)}(x)=x^{n-2m}\left(P_m(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)+Q_m(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

が成り立ち，$P_m(0)$，$Q_m(0)$ のうち一方だけが 0 でないことを示せ．また $n>1$ のとき，$f_n^{(m)}$ が $\mathbb{R}$ 全体で定義されるための m の条件を求めよ.

(3) $n\leq 0$ のとき，広義積分

$$\int_0^1 f_n(x)dx$$

の収束，発散を調べよ.

(お茶の水女子大 2018)　　(m20180601)

0.119 以下の (1)～(3) に答えよ.

(1) 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

$$x^2\frac{dy}{dx}-xy-y^2=0$$

(2) 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=2x+3$$

(3) 以下の微分方程式を ( ) 内の初期条件のもとで解け.

(a) $\cos x\cos^2 y+\dfrac{dy}{dx}\sin^2 x\sin y=0$　　$\left(x=\dfrac{\pi}{2},\ y=0\right)$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=0$　　$\left(x=0,\ y=1\ \ and\ \ x=\dfrac{\pi}{4},\ y=0\right)$

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190601)

0.120　次の積分を計算せよ．(ただし，n は正の整数)

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\cos x dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-x^2}dx$

(お茶の水女子大 2020)　(m20200606)

0.121　a を正の定数とするとき，極形式 $r = a(1+\cos\theta)$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ で囲まれる領域について，以下の各問いに答えよ．

(1) 囲まれる領域の周の長さを求めよ．

(2) 囲まれる領域の面積を求めよ．

(お茶の水女子大 2020)　(m20200611)

0.122　関数 $\cosh x$ をマクローリン展開し, 0 でない最初の 3 項を求めよ．

(お茶の水女子大 2021)　(m20210606)

0.123　極座標に関する以下の各問に答えよ．

(1) 極座標を用いて $r = 1+\cos\theta$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ で表される曲線の長さを求めよ．

(2) 次の広義積分 I について，極座標の考え方を用いることで I^2 を求めよ．また，I を求めよ．

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$$

(お茶の水女子大 2021)　(m20210607)

0.124　不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx$ を計算せよ．

(お茶の水女子大 2022)　(m20220606)

0.125　(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx$　を求めよ．なお計算過程も示せ．ただし，m, n は $m, n > 0$ の整数とする．

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx$　を求めよ．なお計算過程も示せ．ただし，m, n は $m, n > 0$ の整数とする．

(3) フーリエ級数 $f(x) \approx \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$　について，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[{a_n}^2 + {b_n}^2\right]$$　を証明せよ．

(東京大 1998)　(m19980704)

0.126　曲面 $x^2+2y^2+3z^2 = 6$ を S とする．S に $(\pm\ 1, \pm\ 1, \pm\ 1)$ で内接する立方体を U とする．ただし，符号はすべての組み合わせをとる．曲面 S で囲まれた領域から立方体 U を除いた領域を V とする．領域 V に対する積分

$$I = \int_V (x^2+2y^2+3z^2)dx\,dy\,dz$$

を求めたい．以下の問いに答えよ．

(1) 立方体 U に対する積分

$$J = \int_U (x^2+2y^2+3z^2)dx\,dy\,dz$$

を求めよ．

(2) 球 $W : x^2+y^2+z^2 \leq 1$ に対する積分

$$K = \int_W (x^2+y^2+z^2) dx\, dy\, dz$$

を極座標 $(x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta)$ を用いて求めよ．体積素片に対して，$dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$ が成立することを利用してよい．

(3) 上の (1) と (2) を利用して，積分 I を求めよ．

(東京大 2000)　　(m20000702)

0.127 極座標 (r,θ) で表せる 2 次元領域 $r>1$, $0 \leq \theta < 2\pi$ で

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \qquad \text{(i)}$$

を満たし，境界条件

$$u(1,\theta) = \cos 3\theta \quad 0 \leq \theta < 2\pi \qquad \text{(ii)}$$

$$\lim_{r\to\infty} u(r,\theta) = 0 \quad 0 \leq \theta < 2\pi \qquad \text{(iii)}$$

を満たす解 $u(r,\theta)$ を以下の手順で求めよ．

(1) (i) の解として $u(r,\theta) = f(r)g(\theta)$ と表せるものを考える．これを (i) に代入し，左辺が r のみの関数，右辺が θ のみの関数であるような式を導け．

(2) この式が上記の 2 次元領域に対応する任意の (r,θ) に対して成立するためにはその両辺は r , θ によらない定数でなくてはならない．そこで，この定数を c として f の r に関する微分方程式と g の θ に関する微分方程式を導け．

(3) m を整数として $f(r) = r^m$ とおき，定数 c を m で表せ．次に，これを g の θ に関する微分方程式に代入し，(i) の解で，$u_m(r,\theta) = f(r)g(\theta)$ の形のものを求めよ．

(4) d_m を定数として，(i) の解で $u(r,\theta) = \displaystyle\sum_m d_m u_m(r,\theta)$ の形の解を考え，それが境界条件 (ii),(iii) をみたすようにして求める解 $u(r,\theta)$ 定めよ．

(東京大 2000)　　(m20000705)

0.128 (1) 複素変数の指数関数 e^x の級数展開は次式で表される．

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

上式を利用して, $\cos z$, $\sin z$ の級数展開を求めよ.

(2) 次の複素関数を特異点 $z=0$ のまわりでローラン展開し $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ の形で表せ. また, 特異点の種類を答えよ.

$$f_1(z) = z\sin\left(\frac{1}{z}\right), \qquad f_2(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}, \qquad f_3(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

(3) 次の積分を求めよ.

$$I = \oint_C f_3(z) dz$$

ただし, 積分路 C は複素平面上で原点を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を反時計回りに一周するものとする.

(東京大 2001)　　(m20010703)

0.129 (1) $\cos t$, $\sin t$ を e^{it} , e^{-it} の関数として表せ.

(2) 関数

$$f(u) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n \cos(2nu) \tag{1}$$

が与えられたとき,

$$a_n = \frac{1}{2N+1} \tag{2}$$

（ただし $0 \leq n \leq N$）とすると,

$$f(u) = \frac{A}{B} \tag{3}$$

の形に変形することができる. A と B とを求めよ. 途中の計算式も示すこと.

(3) 関数

$$g(u) = 2\sum_{n=1}^{N} a_n \cos\{(2n-1)u\} \tag{4}$$

が与えられている.

$$a_n = \frac{1}{2N} \tag{5}$$

（ただし $0 \leq n \leq N$）としたとき, 関数 $g(u)$ はどのような形に変形することができるか. できるだけ簡単な形で記せ. 途中の計算も示すこと.

(東京大 2002)　　(m20020703)

0.130 (1) 変数 t に関して周期 2π の周期関数 $f(t)$ が

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \tag{1}$$

と書けたときの a_n , b_n が

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt\,, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt\,, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{3}$$

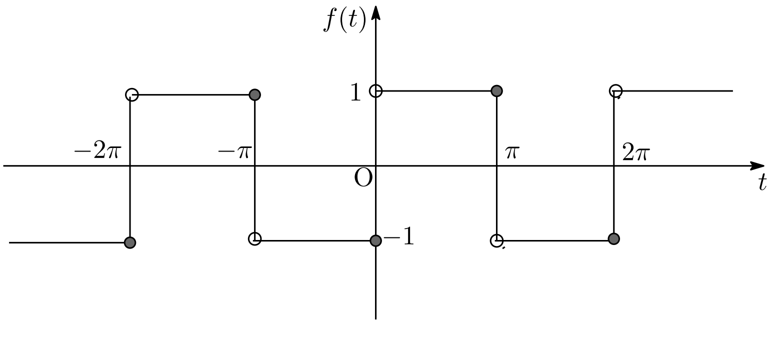
で与えられることを説明せよ．ただし，必要ならば三角関数の公式

$\sin A \sin B = -\frac{1}{2}\{\cos(A+B) - \cos(A-B)\}$, $\sin A \cos B = \frac{1}{2}\{\sin(A+B) + \sin(A-B)\}$

$\cos A \sin B = \frac{1}{2}\{\sin(A+B) - \sin(A-B)\}$, $\cos A \cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A+B) + \cos(A-B)\}$

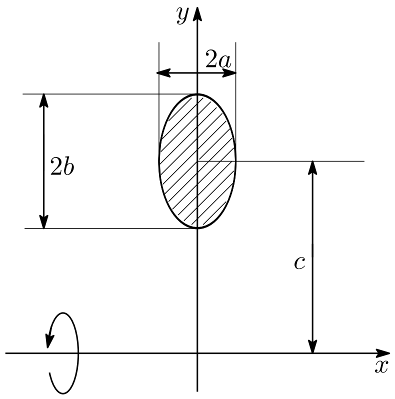
を用いよ．

(2) 下図は，値 1 と -1 をとる周期 2π の周期関数 $f(t)$ のグラフを示したものである．この関数 $f(t)$ を式 (1) の形に展開せよ．



(東京大 2003)　　(m20030704)

0.131 図のような xy 平面上の楕円（図中の斜線の部分）を x 軸の周りに回転させてできたドーナツ状の立体の体積を考える．楕円の短軸（x 軸方向）の長さを $2a$，長軸（y 軸方向）の長さを $2b$，楕円の中心と x 軸との距離を c ($c > a$, $c > b$) とするとき，以下の問いに答えよ．



(1)　y を x の関数として表現し，楕円の表す方程式を求めよ．

(2)　$x = a\cos\theta$ と置換し，楕円を x 軸の周りに 1 回転させてできた立体の体積を求めよ．

(3)　このドーナツ状の立体をさらに y 軸の周りに 1 回転させてできた立体の体積を求めよ．

(東京大 2004)　　(m20040701)

0.132　(1)　次の微分方程式を解け．

(a)　$(2xy + x^2)y' = 2(xy + y^2)$

(b)　$y' + 2y\cos x = \sin(2x)$

(2)　次の微分方程式を示した条件のもとで解け．

$y'' + y' - 2y = 3e^x$,　$y(0) = 1$,　$y'(0) = 1$

(東京大 2005)　　(m20050701)

0.133　微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = f(x) \tag{a}$$

ただし，　$x = 0$　のとき，　$y = 1$　かつ　$\dfrac{dy}{dx} = 0$　について，以下の問いに答えよ．

(1)　$f(x) = 0$ のときの解を求めよ．

(2)　$f(x) = \sin 2x$ のときの解を求めよ．ただし，(a) の特解が $y_p = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$ の形となることを利用してよい．A, B は定数である．

(3)　$f(x) = \displaystyle\sum_{N=1}^{100} \sin Nx$ のときの解を y_S とする．x が十分大きいとき，$\dfrac{y_S}{x}$ を x の関数として表せ．

(東京大 2006)　　(m20060703)

0.134　２つの媒介変数 s, θ によって表される曲面 S

$$S \ :\ x(s,\theta) = (s\cos\theta,\ s\sin\theta,\ \alpha\theta)\ ,\ (0 \leq s \leq 1)\ ,\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

について，以下の設問に答えよ．α は 0 以上の定数とする．

(1)　$x(s,\theta)$ の媒介変数 s を 1 と固定する事により，曲線 C

$$C \ :\ y(\theta) = x(1,\theta) = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ \alpha\theta)\ ,\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

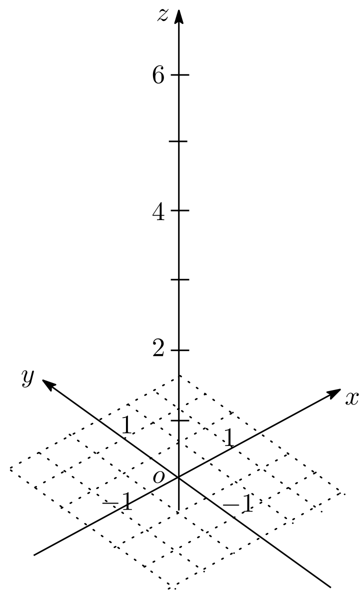
を得る．$\alpha = 1$ の場合について，下図の座標軸を参考にして曲線の概略を解答用紙に手描きせよ．

(2)　C 上の点を $P(= y(\theta))$ とする．P における接線の方程式を導出せよ．

(3)　(2) で求めた接線と xy 平面の交点を Q とする．θ が 0 から 2π まで連続的に変化するとき，Q が描く曲線の長さ ℓ を求めよ．

(4)　$\alpha = 0$ のとき，曲面 S は xy 平面上の単位円盤に一致する．$\alpha = 1$ としたとき，曲面 S の面積は，単位円盤の面積の何倍になるかを求めよ．ただし，次の不定積分の公式を使ってよい．

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2} + \log_e\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right\} + c \qquad (c\ \text{は積分定数})$$



(東京大 2009)　　(m20090703)

0.135 以下の問いに答えよ. ただし, $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする.

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$y'' + 2y' - 3y = x + \cos x$$

(2) 微分方程式

$$2yy'' - 3(y')^2 = y^2 \qquad y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1 \qquad (*)$$

を考える. ただし, $y > 1/2$, $y' > 0$ とする.

(a) $p = y'$ とおいて, 式 $(*)$ を p と y の 1 階微分方程式

$$f(y,p)\frac{dp}{dy} - 3p^2 = y^2 \qquad (**)$$

の形に変形する. このとき $f(y,p)$ を求めよ.

(b) 式 $(**)$ を解いて, p を y の式で表せ.

(c) 式 $(*)$ を解いて, y を x の式で表せ.

(東京大 2010)　　(m20100702)

0.136 以下の問いに答えよ．ただし，解とともに導出過程も示せ.

(1) 複素数 A_n を係数とする複素多項式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z-a)^n$$

を考える．ただし，z は複素変数，a は複素数，n は整数とする．複素平面上で a の周りを反時計回りに一周する経路 C に沿った積分について，以下の式が成り立つことを示せ．ここでは i を虚数単位とする.

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i A_{-1}$$

必要であれば以下のコーシーの積分定理を用いて良い.

複素関数 $g(z)$ が複素平面上の閉曲線 C' とその内部 D' で正則あれば.

C' を一周する経路に沿って $g(z)$ を積分すると，その結果はゼロである.

(2) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

(3) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

(4) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$$

(東京大 2012)　　(m20120704)

0.137 $f(x)$ を $-l \leqq x \leqq l$ で定義された関数とする．このとき，

$$a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\,dx \quad (m=0,1,2,\cdots)$$

$$b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\,dx \quad (m=1,2,\cdots)$$

とすると，$f(x)$ は，

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\frac{m\pi}{l}x + b_m \sin\frac{m\pi}{l}x\right) \quad \cdots \quad ①$$

と展開できる．以下の問に答えよ．

(1) 次式で定義された関数 $f(x)$ の a_m，b_m を求め，① 式で $l=1$ とした式に従い $f(x)$ を展開せよ．

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (-1 \leqq x \leqq 0) \\ 1-x & (0 < x \leqq 1) \end{cases}$$

(2) $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ で定義される関数 $f(x)=\cos x$ を ① 式で $l=\frac{\pi}{2}$ とした式に従い展開し，その展開式を利用し，以下の無限級数

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{15} + \frac{1}{35} - \frac{1}{63} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{4m^2-1} + \cdots$$

の値を求めよ．

(東京大 2013)　　(m20130701)

0.138 以下の問いに答えよ．i は虚数単位とする．

(1) 複素数の範囲で -4 の 4 乗根をすべて求めよ．

(2) 複素関数 $f(z)=z^2$ を複素平面上の点 $1+i$ から点 $2+2i$ にいたる線分に沿って積分した結果を示せ．

(3) 実関数の定積分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} \qquad (a>1)$$

を求めたい．$z=\exp(i\theta)$ とし，I を複素積分の形で表せ．積分路も示すこと．

(4) 留数定理を用いて (3) の I の値を計算せよ．

(5) 複素関数 $f(z) = f(x+iy) = \left(x^2 - y^2\right) + ibxy$ が正則となるように係数 b を定めよ．また，そのときの $f(z)$ の導関数を求めよ．

(東京大 2013)　　(m20130704)

0.139 カージオイドと呼ばれる極座標形式で表された曲線 $r = 1 + \cos\theta$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 曲線の概形を図示せよ．ただし，作図の根拠も示せ．

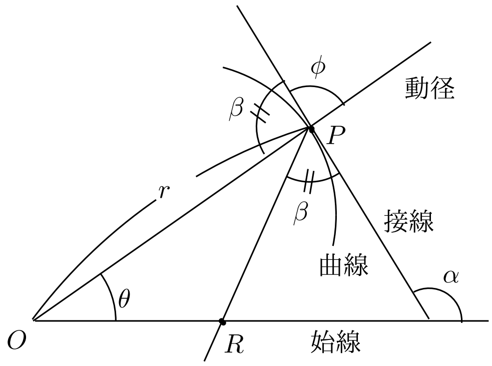
(2) この曲線の全周囲長を求めよ．ただし，$1 + \cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ という関係を用いても良い．

(3) 下図に示すように，曲線上の点 $P(r, \theta)$ $(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2})$ における接線と原点 O から点 P を結んだ直線（動径）のなす角度を ϕ とする．また，接線と始線のなす角度を α とする．このとき，$\tan\phi = \tan(\alpha - \theta)$ であることを用い，

$$\tan\phi = \frac{r}{r'}$$

となることを示せ．ただし，$r' = dr/d\theta$ である．また，これを用いて ϕ を θ で表せ．

(4) 下図に示すように，動径と接線のなす角度を β とする．曲線上の点 $P(r, \theta)$ $(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2})$ で接線と角度 β をなすもう一つの直線が始線と交わる点を R とする．このとき，三角形 OPR は二等辺三角形となることを示せ．



(東京大 2014)　　(m20140703)

0.140 以下の問いに答えよ．

(1) 次の微分方程式において $y(0) = 1$ を満たす解を求めよ．

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2+1}y = e^{-\tan^{-1}x}$$

(2) $-\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4}$ で定義された関数 y についての微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \frac{1}{\cos 2x} \qquad (*)$$

の一般解を以下の設問の手順にしたがって求めることを考える．

(a) 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$$

の 2 つの一次独立解 y_1, y_2 を実関数の形で求め，そのロンスキ行列式 $W(y_1,\ y_2)$ を計算せよ．ここでロンスキ行列式とは

$$W(y_1,\ y_2) = y_1\frac{dy_2}{dx} - y_2\frac{dy_1}{dx}$$

のことである．

(b) 式 $(*)$ の特殊解が,

$$\frac{du}{dx}y_1 + \frac{dv}{dx}y_2 = 0$$

を満たす $u(x)$, $v(x)$ を用いて

$$y = u(x)y_1 + v(x)y_2$$

という形に書けると仮定したとき，$u(x)$, $v(x)$ それぞれが満たす 1 階の微分方程式を導け.

(c) 式 $(*)$ の一般解を求めよ.

(東京大 2015)　　(m20150701)

0.141　xy 平面上において．媒介変数 θ を用いて次式で表されるサイクロイド曲線 C を考える.

$$\begin{cases} x(\theta) - \theta - \sin\theta & (1) \\ y(\theta) = 1 - \cos\theta & (2) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．ただし，必要に応じて次の関係式を用いてよい.

$$\begin{cases} \sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} & (3) \\ 1 - \cos\theta = 2\sin^2\dfrac{\theta}{2} & (4) \end{cases}$$

(1) $0 \leq \theta \leq 2\pi$ における曲線 C の概形を，根拠とともに示せ.

(2) 曲線 C 上の任意の点に対して，x 方向に 2π だけ平行移動させた点を考える．その点もまた曲線 C 上にあることを示せ.

(3) 原点 $O(0,0)$ から，曲線 C 上の点 $P(x(\varphi), y(\varphi))$　(ただし $0 \leq \varphi \leq \pi$) までの曲線の長さを $\ell(\varphi)$ とする.

(a) $\ell(\varphi)$ を求めよ.

(b) 図 3.1 に示すように，点 P における曲線 C の接線上の点 Q を考える.
ただし，$\overline{PQ} = \ell(\pi) - \ell(\varphi)$ であり，また，$\overline{OQ} > \overline{OP}$ とする．　点 P を $0 < \varphi < \pi$ の間で動かしたときの点 Q の軌跡を求め，その概形を示せ.

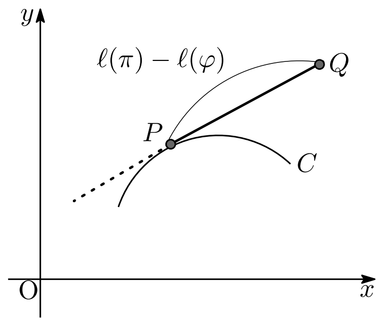


図 3.1

(東京大 2015)　　(m20150703)

0.142　以下の問いに答えよ．i は虚数単位はとする.

(1) 実数 a は $|a| < 1$ 満たすとする．留数定理を用いて，複素積分

$$\int_C \frac{dz}{(z+ai)(az+i)}$$

を求めよ．ただし，積分路 C は $|z| = 1$ であり，反時計回りに回るものとする.

(2) $0 < \gamma < \pi/2$ として，積分値

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \cos\gamma \sin\theta}$$

を次の手順で求めよ．

(a) $z = e^{i\theta}$ と変数変換を行うことにより複素積分に変形する．このとき，

$$I = \int_C f(z) dz$$

を満たす複素関数 $f(z)$ を求めよ．ただし，積分路 C は $|z| = 1$ であり，反時計回りに回るものとする．

(b) 複素関数 $f(z)$ の極を全て求めよ．

(c) 積分路 C 内に含まれる極を全て求めよ．

(d) 留数定理を用いて，積分値 I を求めよ．

(東京大 2017)　　(m20170704)

0.143　i を虚数単位とする．以下の問いに答えよ．

(1) $-i$ の 3 乗根

$$A = (-i)^{1/3}$$

を考える．

(a) A を全て求めて $a + ib$ の形で答えよ．a と b は実数とする．ただし，最終的な a と b の表式に三角関数を用いてはならない．

(b) A の全ての点を複素平面上に図示せよ．

(2) x と y を実数として複素数 $z = x + iy$ を考える．次の関数に関して以下の問いに答えよ．

$$u = \sin x \cosh y$$

(a) u を実数部分として持つ正則関数 $w(z)$ を求めよ．

(b) $\dfrac{dw(z)}{dz}$ を求めよ．

(3) 次の複素関数積分 I を考える．

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^5 - 3iz^4/2 + z^3} dz$$

ただし，積分路は複素平面上の単位円周上を反時計回りに一周するものとする

(a) 全ての極と対応する次数と留数を求めよ．

(b) 積分 I を求めよ．

(東京大 2018)　　(m20180704)

0.144　i を虚数単位とし，z は複素数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 次の複素数を $x + iy$（x, y は実数）の形ですべて求めよ．ただし，x, y の表式に三角関数を含んではならない．

(a) $\left(1 - \sqrt{3}i\right)^3$　　(b) $i^{1/2}$　　(c) $\dfrac{(1-i)^6}{(1+i)^8}$

(2) 関数 $z = \tan\omega = \dfrac{\sin\omega}{\cos\omega}$ の逆関数を $\omega = \tan^{-1} z$ で表す．

(a) 次の式が成り立つことを示せ．　$\tan^{-1} z = \dfrac{i}{2} \log\left(\dfrac{i+z}{i-z}\right)$

ただし，log は複素対数関数である．

(b) $\tan^{-1} z$ の z に関する微分を求めよ．

(3) 複素平面において，曲線 C を $z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とする．

(a) 次の積分 $I(k)$ を求めよ．ここで，k は $0 < k < 1$ の定数とする． $I(k) = \int_C \frac{1}{k^2 z^2 + 1} dz$

(b) $k = 2 - \sqrt{3}$ のとき，I の値を求めよ．

(4) 実積分 J の値を留数定理により求めることを考える． $J = \int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx$

(a) J の積分範囲を $[-\infty, \infty]$ と変形して，被積分関数に e^{ix} を用いて J を表せ．

(b) 関数 $f(z) = 1/(z^2+1)^2$ とする．複素平面において，図 1 の半径 Γ（円弧 ADB）の半径 R が十分に大きい時，次のことが成り立つことを示せ． $\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z) dz = 0$

(c) 図 1 の C に関する周回積分を考えることにより，J の値を求めよ．
このとき，複素平面の上半平面において，

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z) e^{iz} dz = 0$$

であることを用いてよい．

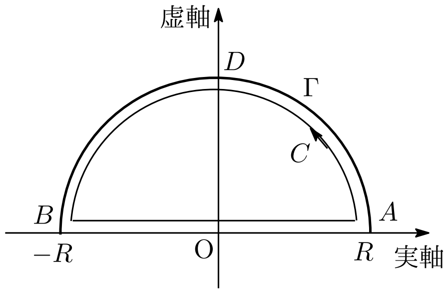


図 1

(東京大 2020) (m20200703)

0.145 以下の問いに答えよ．ただし，x は実変数，y は x に関する実関数であり，
$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$，$y' = \frac{dy}{dx}$ とする．また，e は自然対数の底とする．

(1) 次の微分方程式について考える．ただし，y は，任意の x に対し $y > 0$ を満たすものとする．

$$y' - 2y\sin^2(x) = \frac{e^{2x}\cos(2x)}{y}$$

(a) 関数 $f(x)$ を次式により定義する．定積分を計算し，$f(x)$ を求めよ．

$$f(x) = \int_0^x \left[-2\sin^2(t)\right] dt$$

(b) $z = ye^{f(x)}$ とするとき，$\frac{dz}{dx}$ を x と z の関数として表せ．

(c) y の一般解を求めよ．

(2) 次の微分方程式について考える．ただし，α および n は実定数であり，α は $-1 \leq \alpha \leq 1$ を満たすものとする．

$$y'' - 2\alpha y' + y = 2e^x$$

(a) y の特解を求めよ．

(b) y の一般解を求めよ．

(c) $\alpha = 1$ とする．$y(0) = 1$ および $y'(0) = 2$ を満たす y に関して，次の極限の収束・発散を調べよ．収束する場合にはその極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to+0} y^{x^{-n}}$$

(東京大 2022) (m20220701)

0.146 $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) $S_\theta = \cos\theta A + \sin\theta B$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする．θ を固定するとき，2次形式 ${}^t v S_\theta v = c$ (c は 0 でない定数，${}^t v$ は v の転置) の表わす図形は何か？

(東京工業大 1997)　　(m19970804)

0.147 (1) 関数 $x\cos x,\ \log(1+3x)$ をそれぞれ3次の項まで Maclaurin 展開せよ．

(2) 次の極限を求めよ．
$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{\log(1+3x)} - \frac{1}{3x\cos x}\right\}$$

(東京工業大 2001)　　(m20010801)

0.148 (1) 次の積分を求めよ．
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + 2e^{-x} + 3}dx$$

(2) $\varphi(a) = \displaystyle\int_0^\pi \log(1 - 2a\cos x + a^2)dx$ なる積分において，

(a) $2\varphi(a) = \varphi(a^2)$ が成り立つことを示せ．

(b) $\varphi(a)$ を求めよ．ただし，$|a| \neq 1$ とする．

(東京工業大 2002)　　(m20020801)

0.149 極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を考える．$(x, y) = (0, 0)$ 以外で定義された C^2 級関数 $f(x, y)$ について　$\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$　を r, θ に関する偏微分を用いて表わせ．

(東京工業大 2002)　　(m20020803)

0.150 $f(x, y)$ を $\boldsymbol{R}^2 - \{0\}$ 上の C^2- 級関数，　$x = r\cos\theta$，　$y = r\sin\theta$　を $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 - \{0\}$ の極座標とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) 次の等式を示せ．
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

(2) $f(x, y)$ は $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ のみの関数で，θ にはよらないとする．さらに f は条件
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$，　および　$r = 1$ のとき $f = 0$，$r = 2$ のとき $f = 1$
を満たすとする．このような f を求めよ．

(東京工業大 2006)　　(m20060801)

0.151 関数 $\sqrt{1+x}\ \cos x$ の $x = 0$ におけるテイラー展開の x^3 までの項を求めよ．

(東京工業大 2008)　　(m20080801)

0.152 n を整数として以下の設問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\ \cos nx\, dx$ を計算せよ．

(2) $f(x)$ を $[0,\ \pi]$ 上の連続関数とする．$f(x)$ が微分可能で導関数 $f'(x)$ が連続であれば
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^a f(x)\cos nx\, dx = 0$$
が成り立つことを示せ．（ ここで a は任意の実定数とする．）

(東京工業大 2010)　　(m20100801)

0.153 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; |x| + |y| \leqq \pi\right\}$ とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{e^{x+y}\cos(x+y)}{(x-y)^2+\pi^2}dxdy$$

(東京工業大 2020)　　(m20200804)

0.154 (1) xyz 空間内の xz 平面上の曲線 $x = e^z \cos z \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq z \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $x = 0$ で囲まれる領域を，z 軸のまわりに回転してできる回転体 A の体積を求めよ．

(2) 球 $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 3$ と円柱 $x^2 - 2x + y^2 \leqq 0$ の共通部分を B とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iiint_B |z|\; dxdydz$$

(東京工業大 2022)　　(m20220802)

0.155 $x = t - \sin t$，$y = 1 - \cos t$ $(0 < t < 2\pi)$ により定められる関数 $y = y(x)$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t を用いて表しなさい．

(東京農工大 2006)　　(m20060904)

0.156 $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t \quad \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の表す xy 平面上の曲線を C とする．次の問いに答えなさい．

(1) $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{dy}{dx}$ を求め，t の式で表しなさい．

(2) $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求め，t の式で表しなさい．

(3) x の関数 $y = f(x)$ の極値を求めなさい．ただし，極小値か極大値か，そのときの x の値も書きなさい．

(4) 曲線 C の全長 L を求めなさい．

(東京農工大 2009)　　(m20090902)

0.157 (1) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + 3y = \cos 2x$$

の解 $y = y(x)$ のうちで周期関数となるものを求めなさい．

(2) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 1$$

の解 $y = y(x)$ について $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x)$ の値を求めなさい．

(東京農工大 2011)　　(m20110901)

0.158 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3y = \cos\sqrt{3}x$ の解 $y = y(x)$ が，$y(0) = 1$，$\dfrac{dy}{dx}(0) = 1$ を満たすとき，y を求めなさい．

(東京農工大 2015)　　(m20150904)

0.159 微分方程式 $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x$ の解 $y = y(x)$ が，$y(0) = 0$，$y'(0) = 1$ を満たすとき，y を求めなさい．ただし $y' = \dfrac{dy}{dx}$，$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ である．

(東京農工大 2017)　　(m20170904)

0.160 C_r は円 $z = re^{i\theta}$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ を正の向きに一周するものとする．次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z(z-\pi)}dz$ (2) $\displaystyle\int_{C_4} \frac{1}{z(z-\pi)}dz$

(3) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{\cos z}{z(z-\pi)}dz$ (4) $\displaystyle\int_{C_4} \frac{\cos z}{z(z-\pi)}dz$

(電気通信大 1998) (m19981005)

0.161 関数 $f(x)$ $(-\pi < x < \pi)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{1-\cos x}} & (-\pi < x < \pi,\ x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

により定義する．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ は連続関数であることを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} f'(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to 0-} f'(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能でないことを示せ．

(電気通信大 1999) (m19991001)

0.162 整関数 $f(z)$ $(z = x + iy)$ は，$f(0) = 0$ を満たし，その実部が $u(x,y) = e^{-x}(x\cos y + ay\sin y)$ (a は実定数) という形をしているとする．このとき次の問いに答えよ．

(1) $u(x,y)$ が調和関数である（すなわち $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ を満たす）ことから a の値を定めよ．

(2) コーシー・リーマンの関係式に注意して $f(z)$ の虚部 $v(x,y)$ を求めよ．

(3) $f(z)$ を z の関数として表せ．

(電気通信大 1999) (m19991005)

0.163 定義域を $0 \leqq u \leqq 2\pi$, $0 \leqq v \leqq 1$ とするベクトル関数

$$\overrightarrow{r}(u,v) = \left(\sqrt{1+v^2}\cos u, \sqrt{1+v^2}\sin u, v\right)$$

が表す曲面を S とする．曲面 S 上の (u,v) に対応する点における法線単位ベクトルを求めよ．また，曲面 S の面積を求めよ．

(電気通信大 2001) (m20011005)

0.164 次の問いに答えよ．

(1) $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{1+z^2}$ の特異点をすべて求め，そこでの留数を計算せよ．

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}dx$ の値を求めよ．

(電気通信大 2001) (m20011009)

0.165 $z = x + iy$（z は複素数，x, y は実数，i は虚数単位）に対して，指数関数 e^z と対数関数 $\log_e z$ を

$$e^z := e^x(\cos y + i\sin y),$$

$$\log_e z := \mathrm{Log}_e|z| + i\arg z,$$

と定義する．ただし，e は自然対数の底，Log_e は，実数に対して，既に定義されている対数関数，$\arg z$ は z の偏角を表すものとする．

(1) この指数関数を用いて，三角関数 $\sin z, \cos z$ を定義せよ．また，これらの指数関数と対数関数を用いて，一般の巾乗関数 α^β（α, β は，２つの複素数）を定義せよ．

(2) $\cos z = -2$ を満たす複素数 z を，すべて求めよ．

(3) $i^{(-i)}, (-i)^{\frac{1}{3}}$ の 2 つの値を計算せよ．(答えは，複素数 $a + ib$ の形になるまで計算すること)

(電気通信大 2001)　　(m20011010)

0.166 次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_3^8 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$

(電気通信大 2005)　　(m20051004)

0.167 次の実定積分について考える（ただし $a > 1$ とする）．

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\cos^2\theta + a - 1} \qquad (*)$$

以下の設問 (1)〜(4) に従って答えよ．

(1) $z = e^{2i\theta}$ とおくとき, $\cos 2\theta$ を z を用いて表せ.

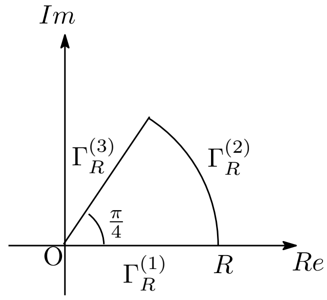
(2) 設問 (1) で示した変数変換 $(z = e^{2i\theta})$ によって, 式 $(*)$ の右辺を変数 z による複素積分にせよ. その際, 積分経路はどうなるかを説明せよ.

(3) 設問 (2) で示した複素積分において, 積分経路内での被積分関数の極と位数ならびに留数を求めよ.

(4) 留数定理を用いて, 実定積分 I の値を求めよ.

(電気通信大 2005)　　(m20051007)

0.168 右図に示すように，複素平面上にある中心角 $\pi/4$，半径 $R(>0)$ の領域の周囲を反時計回りに 1 周する経路 Γ_R を考える．また，図にあるように経路 Γ_R の各部分を $\Gamma_R^{(1)}, \Gamma_R^{(2)}, \Gamma_R^{(3)}$, と名付ける．



以下の 3 つの問いに順に答えよ．

(1) 経路 Γ_R では式 ① が成立する．

$$\int_{\Gamma_R} e^{-z^2} dz = 0 \qquad ①$$

次式のように G_R, P_R, C_R, S_R を定義するとき，式 ① をこれらを用いて表せ．

$$G_R = \int_0^R e^{-x^2} dx\ , \qquad P_R = \int_{\Gamma_R^{(2)}} e^{-z^2} dz\ ,$$

$$C_R = \int_0^R \cos r^2 dr\ , \qquad S_R = \int_0^R \sin r^2 dr\ ,$$

(2) P_R について次の不等式 ② が成立することを示すとともに，

$$|P_R| \leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2\cos 2\theta} R d\theta \qquad ②$$

$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$ では $0 \leq 1 - \dfrac{4}{\pi}\theta \leq \cos 2\theta$ となることを使って，$\displaystyle\lim_{R\to\infty} P_R = 0$ を示せ．

(3) 小問 (1), (2) で求めた結果を使って，定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^2 dx$ と $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2 dx$ を計算せよ．ただし、$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明なしに用いてよい．

(電気通信大 2006)　　(m20061008)

0.169 微分の定義に基づいて，次の各関数を x について微分せよ．

(1) $\cos x$　　(2) $\sqrt[3]{x}$

(電気通信大 2006)　　(m20061009)

0.170 (1) 関数 $f(x) = x\cos x$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めよ．

(2) 関数 $g(x) = \log(1+x)$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めよ．

(3) 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \log(1+x)}{x\sin x}$,　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\log(1+x)}{e^{x^2}-1}$

(電気通信大 2007)　　(m20071003)

0.171 関数 $y = f(x)$ のグラフ C が $(x, y) = (\sin t,\ t\cos t)$,　$(0 \le t \le \pi/2)$ と表されるとする．$t = \pi/4$ のときの C 上の点を $P(x_0, y_0)$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $f'(x_0)$ を計算し，点 P における C の接線の方程式を求めよ．

(2) $f''(x_0)$ を計算せよ．　(3) 曲線 C と x 軸とが囲む部分の面積を求めよ．

(電気通信大 2007)　　(m20071004)

0.172 (1) $u = \tan\dfrac{x}{2}$ とおく．$\sin x$, $\cos x$ を u を用いて表せ．

(2) $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$,　$I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$ を求めよ．

(電気通信大 2008)　　(m20081003)

0.173 次の微分方程式を解け．

(1) $\sin x\cos^2 y - \dfrac{dy}{dx}\cos^2 x = 0$

(2) $\dfrac{dy}{dx} + y\tan x = \sin 2x$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = \sin 2x$

(電気通信大 2009)　　(m20091004)

0.174 全微分可能な関数 $z = f(x, y)$ に対して，極座標による変数変換

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta\quad (r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$$

を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\left[\dfrac{\partial z}{\partial r}\ ,\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right] = \left[\dfrac{\partial z}{\partial x}\ ,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}\right] A$ を満たす行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ を求めよ．

(2) x, y の r, θ に関するヤコビアン（ヤコビの行列式）$\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を計算せよ．

(3) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ を r, $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を使って表せ．

(電気通信大 2012)　　(m20121003)

0.175 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy$,　$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqq y\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (x-y)^2\cos^2(x+y)\,dxdy\,,\qquad D=\{(x,y):|x|+|y|\leqq\pi\}$

(電気通信大 2014)　　(m20141004)

0.176　関数 $f(x,y)=(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とするとき，$f(x,y)=0$ を $r,\ \theta$ の式で表せ．

(3) 領域 $D=\{(x,y):f(x,y)\leqq\ 0,\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0\}$ の面積 S を求めよ．

(電気通信大 2015)　　(m20151003)

0.177　(1) $z=f(x,y)$ を C^2 級関数とし，$x=u^2-v^2,\ y=2uv$ であるとする．

(a) z_u を $z_x,\ z_y,\ u,\ v$ を用いて表せ．

(b) z_{uu} を $z_x,\ z_{xx},\ z_{xy},\ z_{yy},\ u,\ v$ を用いて表せ．

(2) 関数 $f(x,y)=\sin x+\sin y+\cos(x+y)\quad\left(0<x<\dfrac{\pi}{2},\ 0<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の極値を求めよ．

(電気通信大 2016)　　(m20161003)

0.178　複素関数 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ に対して，以下の各問いに答えよ．ただし，$i=\sqrt{-1}$ で，e は自然対数の底とする．

(1) $f(z)$ のすべての極を求め，各極における留数を求めよ．

(2) $z=Re^{i\theta}\ \ (R>1,\ 0\leqq\theta\leqq\pi)$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$|f(z)|\leqq\frac{1}{R^2-1}$$

(3) 広義積分 $I=\displaystyle\int_0^\infty\frac{\cos x}{x^2+1}dx$ を求めよ．

(電気通信大 2016)　　(m20161005)

0.179　以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位を表す．

(1) 複素数平面において $|z|=1$ 上を正の向きに 1 から i に至る曲線を C_1 とし，i から 1 に至る積分を C_2 とする，このとき，次の複素積分 $I_1,\ I_2$ の値を求めよ．

$$I_1=\int_{C_1}\frac{dz}{z^2}\,,\qquad I_2=\int_{C_2}\frac{dz}{z^2}$$

(2) 複素関数 $f(z)=\dfrac{1}{z^3-1}$ に対して，次の複素積分 I の値を求めよ．

$$I=\int_{|z-1|=1}f(z)dz\qquad\text{（積分路は正の向きに 1 周）}$$

(3) 複素関数 $g(z)=\dfrac{1}{z(1-\cos z)}$ の極 $z=0$ における位数と留数を求めよ．

(電気通信大 2017)　　(m20171005)

0.180　C^1 級関数 $f(r)$ に対して，次の合成関数

$$u(x,y)=f(\sqrt{x^2+y^2})\qquad(r=\sqrt{x^2+y^2})$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) xyz 空間内の曲面 $S : z = u(x, y)$ を考える．このとき，S 上の点 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ f(1))$ における S の接平面と z 軸との交点の z 座標 z_0 を $f(1),\ f'(1)$ を用いて表せ．ただし，α は定数とする．

(2) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ が r の関数として表されることを示せ．

(3) $f(r) = r^2 e^{-r^2}$ のとき，次の重積分 I の値を求めよ．

$$I = \iint_D u(x, y)\, dxdy\ , \qquad D = \left\{(x, y)\ \middle|\ x^2 + y^2 \leqq 1\right\}$$

(電気通信大 2019)　　(m20191003)

0.181 以下の各問いに答えよ．

(1) 微分方程式 $y' = y^2 - 1$ の解 $y = y(x)$ で，初期条件 $y(0) = 0$ を満たすものを求めよ．

(2) 次の各微分方程式の一般解をそれぞれ求めよ．

(i) $y' + 2y\cos x = \cos x$　　(ii) $y'' + 2y' + 2y = \cos 3x$

(電気通信大 2019)　　(m20191004)

0.182 (1) $z = e^{i\theta}$ とおくとき，$\cos\theta$ を z の有理式で表せ．ただし，i は虚数単位で，e は自然対数の底とする．

(2) 複素関数 $f(z) = \dfrac{z}{(z^2 + 4z + 1)^2}$ の極をすべて求めよ．更に，絶対値が 1 より小さい極における留数を計算せよ．

(3) 定積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2 + \cos\theta)^2}$ の値を求めよ．

(電気通信大 2021)　　(m20211006)

0.183 xy 平面上の曲線 C ： $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t\cos t \end{cases}$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ について考える．C 上で y は x の関数となるが，これを $y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ と表す．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ $(0 < x < 1)$ を t の関数として表せ．

(2) $f(x)$ の $x = \dfrac{1}{2}$ におけるテイラー展開

$$f(x) = a_0 + a_1\left(x - \frac{1}{2}\right) + a_2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \cdots$$

の係数 $a_0,\ a_1,\ a_2$ を求めよ．

(3) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分を D とするとき，重積分 $\displaystyle\iint_D x\, dxdy$ の値を求めよ．

(電気通信大 2022)　　(m20221003)

0.184 ３次元空間において，点 $A(3,0,0)$ ，$B(0,2,0)$ ，$C(0,0,1)$ を含む平面を α とする．次の問に答えよ．

(1) 平面 α と xy 平面のなす角を θ ($0 < \theta < \pi/2$) とするとき，$\cos\theta$ を求めよ．

(2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ．

(3) 平面 α と原点を中心とする半径 1 の球との交わりを xy 平面に正射影して出来る図形の面積を求めよ．

(横浜国立大 1993)　　(m19931102)

0.185 (1) m, n を整数とするとき，以下の式が成り立つことを示せなさい．

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

(2) 次の周期関数について解答しなさい．

$$f(x) = \begin{cases} -k & (-\pi < x < 0) \\ k & (0 < x < \pi) \end{cases} \quad , \quad f(x+2\pi) = f(x) \qquad k > 0$$

この関数を以下のように無限級数で表すとき，その係数 a_0，a_n，b_n を求めなさい．さらに，求められる無限級数を $n = 7$ の項まで示しなさい．

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

(横浜国立大 2008)　　(m20081105)

0.186 次の微分方程式を解け．

(1) $x^2\dfrac{dy}{dx} = y^2 + xy - x^2$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} + y = \cos x$

(横浜国立大 2011)　　(m20111102)

0.187 次の関数をフーリエ級数 $y = a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ に展開せよ．

(1) 区間 $x = [-\pi,\ \pi]$ で定義される関数 $y = \begin{cases} a\ :\ x \geq 0\ , & a \text{ は実定数} \\ 0\ :\ x < 0 \end{cases}$

(2) 区間 $x = [0,\ \pi]$ で定義される三角関数 $y = a\sin(nx)\cos(nx)$　ここで n は整数

(3) 区間 $x = [0,\ \pi]$ で定義される一次関数 $y = x$

(横浜国立大 2017)　　(m20171102)

0.188 行列 $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ および，$B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ に関して以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値とその固有ベクトルを求めよ．

(2) A^n を $\sin(n\theta)$，$\cos(n\theta)$ で表わせ．また，その求め方を説明せよ．

(3) B^n を $\sin(n\theta)$，$\cos(n\theta)$ で表わせ．また，その求め方を説明せよ．

(横浜国立大 2017)　　(m20171103)

0.189 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = (y-x)^2$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} = (y + \cos x)\sin x$

(横浜国立大 2017)　　(m20171104)

0.190 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} = \cos(x+y) - \cos(x-y)$

(横浜国立大 2019)　　(m20191102)

0.191 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $(x^2-1)^2\dfrac{dy}{dx}+2xy(x^2-1)=2$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\sin y\cos y}{\cos x}$

(横浜国立大 2021)　　(m20211102)

0.192 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $2\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2}=0$　　(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+\cos y}{\sin^2 x\ \cos^2 x}$

(横浜国立大 2022)　　(m20221102)

0.193 極座標による曲線 $r=r(\theta)$ を x,y 座標に変換したとき，次の関係が成り立つことを示せ.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{r'\sin\theta+r\cos\theta}{r'\cos\theta-r\sin\theta}\quad ,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{r^2-rr''+2r'^2}{(r'\cos\theta-r\sin\theta)^3}$$

ただし，　$r'=\dfrac{d}{d\theta}r(\theta)\quad ,\quad r''=\dfrac{d^2}{d\theta^2}r(\theta)$

(千葉大 1996)　　(m19961201)

0.194 無限回微分可能な関数 $f(x)$ を，定数 a の周りで Taylor 級数に展開すると,

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

となる．ただし,

$$f^{(n)}(a)=\left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right]_{x=a}$$

である．この関係を基に以下の設問に答えなさい.

(1) (a) e^x を原点 0 の周りに Taylor 級数に展開しなさい.

(b) $\cos x$ を原点 0 の周りに Taylor 級数に展開しなさい.

(c) $\sin x$ を原点 0 の周りに Taylor 級数に展開しなさい.

(2) (1) の結果を用いて，次の Euler の公式が成り立つことを示しなさい．ただし， i は虚数単位で， $i^2=-1$ である.

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

(3) (2) の結果を基に，次の等式が成り立つことを示しなさい.

$$e^{ix}\times e^{iy}=e^{i(x+y)}$$

(千葉大 2000)　　(m20001201)

0.195 2 次元平面上の直交座標系を x,y とする．原点から点 (a,b) までの距離を r，原点と点 (a,b) を結ぶ直線と， x 軸の正の方向とがなす角度を反時計回りの弧度法で計った角度を θ とする．このとき，曲線 $r=a(1+\cos\theta)$， $a>0$ によって囲まれる有限の領域の重心の x 座標を求めなさい.

(千葉大 2000)　　(m20001203)

0.196 ３次元空間中に球 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ と円柱 $x^2+y^2=2ax$ がある．球が円柱によって切り取られる立体の体積 V を以下の設問に答えることによって求めなさい.

(1) V が次のような重積分になることを図を書いて示しなさい.

$$V=2\iint_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy\ ,\ D=\{(x,y)\mid(x-a)^2+y^2\leq a^2\}$$

(2) x-y 座標系の原点を中心とする極座標 (r, θ) を用いると，領域 D が次のように表されることを示しなさい．

$$D = \left\{ (r, \theta) \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \,,\; 0 \leq r \leq 2a\cos\theta \right\}$$

(3) 設問 (1) の重積分を極座標に変換して体積 V を求めなさい．

(千葉大 2001)　　(m20011201)

0.197 次の微分方程式の初期条件を満たす解を求め，$x \geq 0$ の範囲で解曲線を図示しなさい．

$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 2\cos x$　　初期条件 : $y(0) = 1\,,\; y'(0) = 0$

(千葉大 2002)　　(m20021203)

0.198 次の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin 2x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$　（ただし, a, b は定数.）

(千葉大 2005)　　(m20051201)

0.199 三次元空間中に，球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ と円柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ がある．球面に囲まれる領域が円柱により切り取られる立体の上半分 $(z \geq 0)$ の体積 V を求めたい．

(1) V が次のような重積分になることを図で示しなさい．

$$V = \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy\,, \quad D = \{(x, y) \mid (x - a)^2 + y^2 \leq a^2\}$$

(2) 極座標を用いると，領域 D は次のように表されることを示しなさい．

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \,,\; 0 \leq r \leq 2a\cos\theta \right\}$$

(3) 極座標に変換して体積 V を求めなさい．

(千葉大 2008)　　(m20081203)

0.200 次の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{e^x - e^4}{x - 4}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\log(1 + x^2)}}$

(千葉大 2009)　　(m20091201)

0.201 次の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x \sin x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(3x - \sqrt{9x^2 - 3x - 1}\right)$

(千葉大 2011)　　(m20111201)

0.202 次の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x^x$

(千葉大 2012)　　(m20121201)

0.203 次の数列，または，関数の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n$　　ここで，$a_n = 2 + \dfrac{2}{a_{n-1}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$，$a_0 = 2$

(2) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x+1\right)$

(3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

(千葉大 2013)　　(m20131201)

0.204 三次元空間中に，球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ と円柱面 $x^2+y^2=ax$ がある．ただし，$a>0$．球面に囲まれる領域が円柱により切り取られる立体の上半分 $z\geq 0$ の体積 V を求めたい．

(1) V が次のような重積分になることを図で示しなさい．

$v=\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leq ax\right\}$

(2) 極座標を用いると，領域 D が次のように表されることを示しなさい．

$D=\left\{(r,\theta)\ \middle|\ -\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\ ,\ 0\leq r\leq a\cos\theta\right\}$

(3) 極座標に変換して体積 V を求めなさい．

(千葉大 2013)　　(m20131203)

0.205 三次元空間の中にデカルト直交座標系 $O-XYZ$ 座標系が定義されている．

$y=0$ 平面（$z-x$ 平面）上の点 $A=(x_0,0,z_0)$ を始点とし，一定方向で $y=0$ 平面から遠ざかる点 B がある．線分 AB の長さは λ で，線分 AB の方向ベクトルは，球座標系にならって，水平角（緯度）θ，方位角（経度）φ とする．ただし，$-90^\circ<\theta<90^\circ$，$0^\circ<\varphi<180^\circ$．点 B の座標は，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ から，

$$B=(\lambda\cos\theta\cos\varphi+x_0\ ,\ \lambda\cos\theta\sin\varphi\ ,\ \lambda\sin\theta+z_0)$$

で与えられる．定点 E を $E=(0,-a,h)$，$a>0$ として，点 E と点 B を結ぶ直線が $y=0$ 平面（$z-x$ 平面）と交わる点を P とする．$\lambda\to\infty$ の時の P の座標を求めなさい．

（ヒント ： $\lambda\to\infty$ の時の点 P を透視画法では消点 (Vanishing Point) と呼んでいる）

(千葉大 2015)　　(m20151205)

0.206 (1) $x=0$ 近傍で次の近次式が成り立つように，定数 A_i $(i=0.1,2,3,4)$ を求めなさい．

$\cos(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4$

(2) 次の関数をテイラー展開しなさい．

$\log(x+1)$

(3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{x}$ の極限値を求めなさい．

(4) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{4x}{\sqrt{1+x^2}}$ の極限値を求めなさい．

(千葉大 2016)　　(m20161201)

0.207 次の問に答えなさい．ただし，$\log x$ の底は，自然対数の底 (e) とする．

(1) (a) 関数 $\log(1+x)$ と $x\cos x$ を，それぞれ 3 次の項までマクローリン展開しなさい．

(b) $\lim_{x\to 0+0}\left(\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x\cos x}\right)$ を求めなさい．

(2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n+3^n}$ を求めなさい．

(3) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\log x+\sqrt{\log x}}-\sqrt{\log x-\sqrt{\log x}}\right)$ を求めなさい．

(4) $\lim_{x\to 0+0}(1-\tanh x)^{\frac{1}{\sin x}}$ を求めなさい．

(千葉大 2017)　　(m20171201)

0.208 次の微分方程式を解きなさい.

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}-2y=-2$, 初期条件 $t=0$ のとき $y=2,\ \dfrac{dy}{dt}=0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}-2y=\cos t-2t$ の一般解を求めなさい.

(千葉大 2017)　　(m20171204)

0.209 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ （ただし, $a,\ b>0$）が下に図示されている. 点 A の座標は $(a,0)$, 点 B の座標は $(0,b)$ であり, 点 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$ は楕円の弧 AB（第一象限）上の点（ただし, 点 A と点 B を除く）である. 次の設問に答えなさい.

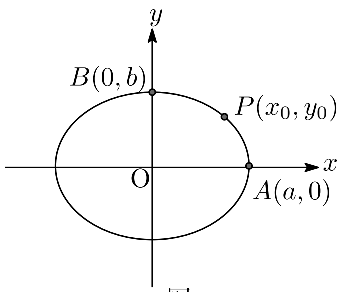
(1) 点 P で楕円に接する接線の方程式を $x,\ y,\ a,\ b,\ x_0,\ y_0$ を用いて表しなさい.

(2) $x_0=a\cos\theta,\ y_0=b\sin\theta$ （ただし, $0<\theta<\pi/2$ ）とおいたとき, 設問 (1) で求めた接線の方程式を $x,\ y,\ a,\ b,\ \theta$ を用いて表しなさい.

(3) 設問 (2) で求めた接線の方程式と x 軸および y 軸との交点をそれぞれ点 C および点 D とするとき, 線分 CD の長さを $a,\ b,\ \theta$ を用いて表しなさい.

(4) 線分 CD の長さが最小となる θ の値を $a,\ b$ を用いて表しなさい.

(5) 線分 CD の最小値を $a,\ b$ を用いて表しなさい.



図

(千葉大 2017)　　(m20171207)

0.210 $\dfrac{1}{\cos x-\sin x}$ を積分せよ.

(筑波大 1998)　　(m19981301)

0.211 テーラー展開を用い, $e^{iz}=\cos z+i\sin z$ の関係があることを示せ.

(筑波大 2000)　　(m20001302)

0.212 $f(x,y)=r^n$ とするとき, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を次の手順に従って求めよ.

ただし, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, n は整数とする.

変数の組 (x,y) を $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ により, (r,θ) の組に変数変換することを考える.

(1) $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=-\dfrac{\sin\theta}{r}$ および $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\cos\theta$ であることを示せ.

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial\theta}=0$ であることに注意し,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{\sin^2\theta}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r}$$

であることを示せ.

同様に，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ についても求め，整理することにより，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Bigl(r\,\frac{\partial f}{\partial r}\Bigr)$$

となる．

(3) $f(x,y)=r^n$ のとき，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を具体的に計算せよ．

(筑波大 2000）　(m20001303)

0.213 xy 平面上において原点を中心とする半径 b の円周上を等速度で運動する点の時刻 t における位置は $x=b\cos(\omega t+\phi)$，$y=b\sin(\omega t+\phi)$ で表すことができる．ここに，ω,ϕ は定数で，それぞれ，角速度，位相と呼ばれる．

(1) 位置を時間に対して微分すると速度ベクトル $\overrightarrow{v}$ が得られる．$\overrightarrow{v}$ を求め成分表示しなさい．

(2) 速度ベクトルをさらに時間に対して微分すると加速度ベクトル $\overrightarrow{\alpha}$ が得られる．$\overrightarrow{\alpha}$ を求め成分表示しなさい．また，$\overrightarrow{\alpha}$ と $\overrightarrow{v}$ は互いに直交することを示しなさい．

(3) ベクトル $\overrightarrow{\alpha}$，$\overrightarrow{v}$ の絶対値 $|\overrightarrow{\alpha}|$，$|\overrightarrow{v}|$ を計算しなさい．

(筑波大 2003)　(m20031312)

0.214 $z=f(x,y)$ が全微分可能で，$x=r\cdot\cos\theta$，$y=r\cdot\sin\theta$ であるとする．このとき，次式が成立することを証明せよ．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(筑波大 2006)　(m20061309)

0.215 $x=\cos t$，$y=\sin t$ のとき，次の関数を t で微分せよ．ただし，$f(x,y)$ は x,y に関して偏微分可能な関数である．

(1) $\cos x+\cosh y$　　(2) $f(x,y)$

(筑波大 2006)　(m20061312)

0.216 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ を求めよ．　(2) $\dfrac{\cos x}{x}$ の導関数を求めよ．

(3) 上記 (2) および $|\cos x|\leqq 1$ を利用し，不等式 $\displaystyle\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sin x}{x}dx\right|\leqq\frac{2}{x_1}$ が成り立つことを示せ．ただし，$0<x_1<x_2$ とする．

(筑波大 2007)　(m20071301)

0.217 すべての実数 x に対し $\sqrt{3}\sin x-\cos x=A\sin(x-\alpha)$ が成り立つとき，A，α を求めよ．ただし $A>0$，$0^\circ\leqq\alpha<360^\circ$とする ．

(筑波大 2007)　(m20071326)

0.218 $4\cos^2 x-12\cos x+9$ の最小値を求めよ．

(筑波大 2007)　(m20071327)

0.219 定積分 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$ の値を，以下の 2 通りの方法で計算せよ．

(1) (a) $I=2\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$ を示せ．

(b) 積分変数を $x=\tan\dfrac{\theta}{2}$ に置換せよ $\left(\text{ヒント：}\cos\theta=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\text{である}\right)$．

(c) 積分を実行して I を求めよ．

(2) (a) 複素数 $z=e^{i\theta}$ とおいたとき，$z+\dfrac{1}{z}$ を計算せよ．

(b) その結果を基に I を z に関する複素積分に変換せよ．

(c) 留数定理を用いて I を求めよ．

(筑波大 2008)　　(m20081311)

0.220 いろいろな関数を，多項式で表現してみよう．ある関数 $f(x)$ が，

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

のように，定数 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ を用いて x の多項式であらわされるとしよう．このとき，

(1) $f(0)=a_0,\ f'(0)=a_1,\ f''(0)=2a_2$ であることを示せ．

(2) 0 以上の任意の整数 n について，$f^{(n)}(0)=n!\,a_n$ であることを示せ．ここで，$f^{(n)}(x)$ は，$f(x)$ を n 回，微分したものである（$f(x)$ の n 階導関数）．ゼロの階乗は 1 とする．

(3) $f(x)=\dfrac{f(0)}{0!}+\dfrac{f'(0)}{1!}x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 　とできることを示せ．

(4) 関数 $\sin x$ は，このような多項式で表現できることがわかっている．具体的に $\sin x$ をこのような多項式で表現せよ．

(5) 関数 $\cos x$ や関数 e^x も，このような多項式で表現できることがわかっている．具体的に $\cos x$ と e^x をそれぞれ，このような多項式で表現せよ．

(6) 任意の実数 θ について，$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ となることを示せ，ただし，i は虚数単位とする．

(筑波大 2008)　　(m20081319)

0.221 変数 x,y の関数 $z=f(x,y)$ を変数変換 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ により新しい変数 $r,\ \theta$ で表す．このとき，関数 $z=f\left(x(r,\theta),\ y(r,\theta)\right)$ について以下の設問に答えよ．

(1) 1 階偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を $r,\ \theta,\ \dfrac{\partial z}{\partial r},\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を用いて表せ．

(2) 2 階偏導関数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ は

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial \theta}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}$$

であることを示せ．

(筑波大 2009)　　(m20091308)

0.222 領域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\right\}$ 上での重積分 $I=\displaystyle\iint_D(x^2+y^2)dxdy$ を以下の設問に従って求めよ．ただし，$a>0,\ b>0$ とする．

(1) $\begin{cases} x=ar\cos\theta \\ y=br\sin\theta \end{cases}$ により変数変換を行う．積分領域 D を変数 $r,\ \theta$ で表せ．

(2) 前問 (1) の変数変換を行ったときのヤコビアンを求めよ．

(3) 以上の結果を用い重積分 I を求めよ．

(筑波大 2009)　　(m20091309)

0.223 整数 $n \geqq 0$ に対して定義された不定積分を $I_n = \int \cos^n x\, dx$ とするとき，以下の漸化式を証明しなさい.

$$I_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geqq 2)$$

(筑波大 2009)　　(m20091316)

0.224 $e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z$（複号同順）という関係は, 複素関数としての指数関数, 三角関数の間にも成り立つ. この関係を使って, 逆余弦関数 $\arccos z$ ($\cos^{-1} z$ と書くこともある.) を対数関数を使って表せ.

(筑波大 2010)　　(m20101308)

0.225 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} |\sin x|\, dx$$

必要があれば次の公式を用いてもよい.

$$\int e^{-x} \sin x dx = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(筑波大 2011)　　(m20111302)

0.226 次の問いに答えよ.

(1) $\sinh x$ と $\cosh x$ をマクローリン展開せよ.

(2) 次の積分を計算せよ.

$$\int_0^1 \cosh x\, dx$$

(3) 次の積分を計算せよ.

$$\int_0^1 (1-x) \cosh x\, dx$$

(4) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\int_0^1 (1-x)^n \cosh x\, dx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n!}{(2m+n+1)!}$$

(筑波大 2013)　　(m20131304)

0.227 デカルトの葉形と呼ばれる平面曲線 $C : x^3 - 3xy + y^3 = 0$ について，次の問いに答えよ.

(1) C の特異点をすべて求めよ.

(2) C 上の点 (x, y) に関する xy の極値をすべて求めよ.

(3) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおき，C の極方程式を求めよ.

(4) C は第 1 象限で，ある図形を囲むがその図形の面積 S を求めよ.
(ヒント：極方程式を用いて，$t = \tan\theta$ とおけ)

(筑波大 2015)　　(m20151303)

0.228 $f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \sin x \quad (a_0,\ a_1,\ a_2$ は実定数) の形の実関数全体が作る実線形空間 V に内積 $(g, h) = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)h(x)dx \ \ (g, h \in V)$ を導入する．以下の問いに答えよ.

(1) 3 つの関数 $1,\ \cos x,\ \sin x$ は互いに直交することを示し，これらを正規化して正規直交基底を作れ.

(2) 線形変換 $F: f(x) \mapsto f(x+c)$ について，(1) で得られた正規直交基底に関する表現行列を求めよ．ここで，c は実定数である．

(筑波大 2015)　　(m20151308)

0.229 領域 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; (x+y)^2 + 4(x-y)^2 \leq 1\right\}$ における重積分

$I = \displaystyle\iint_D \frac{\left|x^2 - y^2\right|}{(x+y)^2 + 4(x-y)^2} dxdy$ の値を求めたい．以下の問いに答えよ．

(1) $x + y = r\cos\theta,\ x - y = \dfrac{r}{2}\sin\theta$ とするとき，$x,\ y$ の $r,\ \theta$ に関するヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算せよ．

(2) I を (1) で与えられた変数変換を用いて求めよ．

(筑波大 2017)　　(m20171301)

0.230 複素数 $z = x + iy$ の関数 $f(z) = \sinh 2z$ 　について，以下の問いに答えよ．ただし，$x,\ y$ は実数とする．　なお，$\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$，$\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ と定義し，オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いてよい．

(1) $f(z) = u + iv$ とするとき，$u,\ v$ を $x,\ y$ を用いて表せ．　ただし，$u,\ v$ は $x,\ y$ の実関数とする．

(2) $f(z) = 0$ となる z を求めよ．

(3) $w = f(z)$ により z 平面上の直線 $x = \dfrac{1}{2}$ を w 平面上に移したとき，w 平面上の図形は楕円になる．w 平面上にその楕円を図示せよ．

(筑波大 2017)　　(m20171302)

0.231 図のような円柱座標系での微積分に関する以下の問いに答えよ．

(1) 直交座標 (x, y, z) を円柱座標 (r, θ, z) に変換する，$x,\ y,\ \dfrac{\partial x}{\partial r},\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta},\ \dfrac{\partial x}{\partial z}$ を $r,\ \theta,\ z$ の関数として示せ．

(2) $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} & \dfrac{\partial r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} & \dfrac{\partial \theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = E$ が成り立つことに留意し，$\dfrac{\partial r}{\partial x},\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial x}$ を $r,\ \theta, z$ を用いて示せ．なお，E は単位行列である．

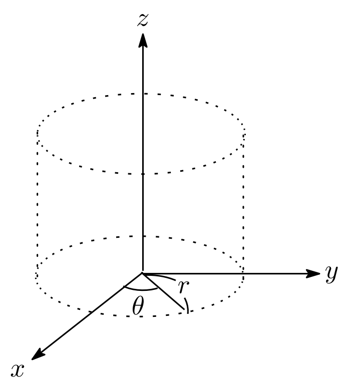
(3) (2) の結果を用いると円柱座標系のラプラシアンは
$\triangle = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ で表される．　関数 $f(r,\ \theta,\ z) = rz\cos\theta$ に対して $\triangle f$ を計算せよ．

(4) 円柱座標系で r だけを変数 $(r > 0)$ とする関数 $g(r)$ が $\triangle g(r) = 0,\ g(1) = 0,\ g(e) = 2$ の条件を満たす．この $g(r)$ を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

(5) $x,\ y,\ z$ の $r,\ \theta,\ z$ に対するヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算せよ．

(6) K を積分領域とする以下の三重積分を，円柱座標系への変数変換を用いて計算せよ．ただし，a は正の定数である．

$$\iiint_k y^2\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz, \qquad K = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq a\right\}$$



(筑波大 2018)　　(m20181301)

0.232　留数定理を用いて，以下の定積分の値を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2 - 2x + 2} dx$$

ただし，m は実定数とする．

(筑波大 2018)　　(m20181305)

0.233　関数 $f(x, y)$ は，x および y について偏微分可能で $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ なる関係を満足する．

関数 $f(x, y)$ を $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ \ (r > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$ で変数変換したときの $f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ は，変数 r を含まない関数となることを証明しなさい．

(筑波大 2018)　　(m20181315)

0.234　2 つの実数 $a,\ \theta$ に対して，3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

で定める．

(1)　A^2 の行列式を求めよ．

(2)　A^2 の階数を求めよ．

(3)　$\mathbb{R}^3$ の部分集合 V を

$$V = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; A^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \right\}$$

で定める．このとき，V の次元を求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191314)

0.235　(1)　$f(x)$ は $x \geqq 0$ において定義された実数値連続関数であって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して広義積分 $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ が収束すると仮定する．このとき，任意の正の実数 $a, b\ (a < b)$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx$$

(2)　$f(x)$ は (1) の仮定を満たすとする．(1) の等式を用いて，任意の正の実数 $a, b\ (a < b)$ に対して，

$$\int_{0}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \log \frac{b}{a}$$

が成り立つことを示せ．

(3) 次の広義積分の値を求めよ. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2} dx$

(筑波大 2019) (m20191317)

0.236 (1) 以下の広義積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\pi} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\, dx$$

(2) 関数 $f(x)$ は閉区間 $[0,1]$ で連続であり, $f(x) > 0\ \ (x \in [0,1])$ とする. このとき, 以下の広義積分が収束することを示せ.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)f(x)}}\, dx$$

(筑波大 2021) (m20211304)

0.237 複素変数 z の三角関数 $f(z) = \cos z$ に対し, $z = x + iy$, $f(z) = re^{i\theta}$ （i は虚数単位）とおくとき, 以下の空欄 (a) にあてはまる y の関数を求めよ.

$r^2 = \cos^2 x + \boxed{\quad \text{(a)} \quad}$

(筑波大 2022) (m20221301)

0.238 閉区間 $[0, 2\pi]$ 上の関数

$$f(x) = \sqrt{1 + a^2 + b^2 - 2a\cos x - 2b\sin x}$$

を考える. ただし, a, b は正の定数とする.

(1) $f(x)$ の最大値 M と最小値 m を求めよ.

(2) 関係式

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 + \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2}} \\[2ex] b = 1 + \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \qquad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

があるとき, 積 Mm の最大値を求めよ.

(埼玉大 2000) (m20001401)

0.239 実数 θ に対して $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} x^n$ とおく.

(1) 右辺の級数は $|x| < 1$ で収束することを示せ.

(2) $\displaystyle f'(x) = \frac{\sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$ を示せ. $\left[\text{ヒント}:\sin t = \dfrac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)\right]$

(埼玉大 2002) (m20021401)

0.240 $\cos 46^\circ$ の近似値を有効数字 3 桁の範囲において求めなさい. ただし, $\dfrac{\pi}{180} = 0.01745\cdots$, $\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である.

(埼玉大 2003) (m20031405)

0.241 (1) 次の行列 A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(2) 行列 A を $P^{-1}AP$ により対角化せよ. 解答では, まず, 行列 P を求めてから A を対角化せよ.

(埼玉大 2005) (m20051402)

0.242　次の関数を微分せよ．

(1)　$y = \dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}$　　(2)　$y = \sqrt{1+\cos x}$

(3)　$y = x^e e^x \quad (x>0)$　　(4)　$y = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

(埼玉大 2006)　　(m20061401)

0.243　(1)　$t = \tan\dfrac{x}{2}$ とするとき，$\sin x$，$\cos x$ および $\dfrac{dt}{dx}$ を t の式で表せ．

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$ を求めよ．

(埼玉大 2006)　　(m20061402)

0.244　$f(x,y) = x^2 - x\sin y - \cos^2 y$ とする．

(1)　偏導関数 f_x，f_y，f_{xx}，f_{xy}，f_{yx}，f_{yy} を求めよ．

(2)　$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めよ．

(3)　f の極値を求めよ．

(埼玉大 2006)　　(m20061409)

0.245　以下の微分方程式を解け.

(1)　$(x^2+2xy)dx + (x^2-y^2)dy = 0$　　(2)　$2x\dfrac{dy}{dx} - y = -xy^3$

(3)　$\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 2y = 10\cos x$　　(4)　$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3x\dfrac{dy}{dx} + 4y = x$

(埼玉大 2008)　　(m20081404)

0.246　$\boldsymbol{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ で表す．$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^2$ を長さ 1 のベクトルとして，直線

$$l = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0\}$$

に関する折り返し写像を T とする．すなわち，$T(\boldsymbol{x})$ は直線 l に関して $\boldsymbol{x}$ と線対称の位置にあるベクトルである.

(1)　$T(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ を用いて表せ.

(2)　$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ とするとき，$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる行列 A を求めよ.

(埼玉大 2008)　　(m20081406)

0.247　(1)　関数 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい.

(2)　関数 $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x}$ の第 4 次導関数 $f^{(4)}(x)$ を求めなさい.

(3)　次の極限値を求めなさい.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos 2x)}{\log(\cos 3x)}$$

(4)　xy 平面において $y = \dfrac{1}{\sin x}$ のグラフで与えられる曲線と 直線 $x = \dfrac{\pi}{3}$，$x = \dfrac{2\pi}{3}$ および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい.

(埼玉大 2009)　　(m20091401)

0.248 (1) $\boldsymbol{R}^2$ における一次変換 f は，点 $(1,2)$ を点 $(0,3)$ に，点 $(2,0)$ を点 $(4,2)$ に移す．このとき，以下の問いに答えなさい．

(a) 一次変換 f を表す行列を求めなさい．

(b) 一次変換 f によって，$y = x - 1$ は，どのような図形に移されるか．

(2) 次の 2 つのベクトルについて考える．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(a) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は，一次従属か一次独立か調べなさい．

(b) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ とするとき，$\cos\theta$ を求めなさい．

(3) 次の行列 $\boldsymbol{A}$ について考える．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) 固有値をすべて求めなさい．

(b) 固有ベクトルをすべて求めなさい．

(埼玉大 2009) (m20091402)

0.249 (1) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とする．ただし，θ は $0 < \theta < 2\pi$, $\theta \neq \pi$ を満たす実数とする．
次の条件 (a),(b),(c) をすべて満たすような α_1 , α_2 , $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ の組を 1 つ求めよ．

(a) α_1 , α_2 は相異なる複素数である．

(b) $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ は複素数を成分とする 2 次元ベクトルで，どちらも零ベクトルではなく，さらに $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)$ と $\dfrac{i}{2}(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)$ はともに実数を成分とするベクトルになる．

(c) $A\boldsymbol{p}_1 = \alpha_1\boldsymbol{p}_1$ かつ $A\boldsymbol{p}_2 = \alpha_2\boldsymbol{p}_2$ を満たす．

(2) B を 2 次の実正方行列とし，B のどの固有値も実数でないと仮定する．

(i) 次の (d),(e),(f) をすべて満たすような β_1 , β_2 , $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ の組が存在することを示せ．

(d) 正の実数 r と，$0 < \theta < 2\pi$, $\theta \neq \pi$ を満たす実数 θ を用いて，$\beta_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\beta_2 = r(\cos\theta - i\sin\theta)$ と表される．

(e) $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ は複素数を成分とする 2 次元ベクトルで，どちらも零ベクトルでなく，さらに $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2)$ と $\dfrac{i}{2}(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2)$ はともに実数を成分とするベクトルになる．

(f) $B\boldsymbol{q}_1 = \beta_1\boldsymbol{q}_1$ かつ $B\boldsymbol{q}_2 = \beta_2\boldsymbol{q}_2$ を満たす．

(ii) 2 次の実正則行列 M が存在して，

$$M^{-1}BM = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

となることを示せ．

(埼玉大 2009) (m20091405)

0.250 (1) つぎの関数を微分せよ．

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)$$

(2) つぎの関数の第 n 次導関数を求めよ.

$$y = (x+1)^2 \log(x+1)$$

(埼玉大 2010)　　(m20101405)

0.251 (1) 以下の微分方程式を解け.

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \tan x \cdot \tan y$

(b) $\cos x \dfrac{dy}{dx} - y \sin x = 2 \cos x \, \sin x$

(c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 6y = e^x$

(2) $y(t)$ が時刻 t における物体の位置を表すとすると, $f'(t)$ は速度, $f''(t)$ は加速度を表す.

(a) 下記の運動方程式を満たすこの物体の位置 $y(t)$ を求めよ.
$y''(t) + k^2 y(t) = 0 \quad (k > 0$ の定数$)$

(b) 初期条件　$y(0) = A_0\,,\ y'(0) = 0$　を満たす解を求めよ.

(埼玉大 2010)　　(m20101408)

0.252 (1) 次の関数を微分せよ.

$$y = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2x^2+1}\right)$$

(2) 次の関数について $\dfrac{dz}{dt}$ を t の関数で表せ.

$$z = x^2 + 2y\ , \quad x = \sin t\ , \quad y = 5\cos t$$

(埼玉大 2011)　　(m20111401)

0.253 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \cos(\sin x)$　　(2) $y = x^{\sin^{-1} x}$　$(0 < x < 1)$

(埼玉大 2012)　　(m20121401)

0.254 次の関数を微分せよ.

$y = \log\Big(\cos e^x\Big)$

(埼玉大 2015)　　(m20151401)

0.255 次の関数の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

$f(x,y) = \cos(xy)\sin y$

(埼玉大 2015)　　(m20151402)

0.256 以下の微分方程式を解け.

(1) $2\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{\tan x}$　　(2) $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = x^3 e^x$　　(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x$

(4) $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 8\dfrac{d^2y}{dx^2} + 16y = x^2$

(埼玉大 2016)　　(m20161407)

0.257 次の関数を x について微分せよ.

(1) $y = \dfrac{\sin 3x}{1 + \cos 3x}$　　(2) $y = e^{\frac{x}{\tan x}}$

(埼玉大 2017)　　(m20171401)

0.258 以下の微分方程式を解け.

(1) $\dfrac{dy}{dx}=e^{2y-x}$　　(2) $2xy\dfrac{dy}{dx}=y^2-4x^2$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+y=4e^x$　　(4) $\sin x\dfrac{dy}{dx}-2y\cos x=2x\sin^3 x$

(埼玉大 2017)　(m20171406)

0.259 (1) 関数 $x\cos x,\ \log(1+3x)$ をそれぞれ 3 次の項までマクローリン展開せよ.

(2) (1) の結果を用いて極限 $\displaystyle\lim_{x\Rightarrow 0}\left\{\frac{1}{\log(1+3x)}-\frac{1}{3x\cos x}\right\}$ を求めよ.

(埼玉大 2018)　(m20181404)

0.260 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $1-(\cos x)^2\dfrac{dy}{dx}=0$　　(2) $x\dfrac{dy}{dx}=x^2+y$

(3) $x^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+5xy\dfrac{dy}{dx}+6y^2=0$　　(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+5\dfrac{dy}{dx}+4y=x^3+1$

(埼玉大 2018)　(m20181406)

0.261 次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ について考える.

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}x\\5\\3\end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ とするとき $\cos\theta$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が一次従属となるように x を求めよ.

(埼玉大 2019)　(m20191405)

0.262 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx}=(2y+1)^2xe^{-x}$

(2) $\dfrac{x}{y}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}-1=0$

(3) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+2\sin x\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{2}\cos 2x=0$

(埼玉大 2019)　(m20191407)

0.263 $0\leqq\ x\leqq\ 180$ のとき，等式　$2\cos^2 x=3\sin x$ を満たす x の値を求めよ.

(群馬大 2001)　(m20011503)

0.264 $\tan\dfrac{\theta}{2}=x$ のとき，　以下の問いに答えよ.

(1) $\sin\theta=\dfrac{2x}{1+x^2}$ を証明せよ.　　(2) $\cos\theta=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ を証明せよ.

(群馬大 2007)　(m20071504)

0.265 以下の式を簡単にせよ.

(1) $(\sin 25^\circ-3\sin 65^\circ)^2+(3\cos 115^\circ+\cos 155^\circ)^2$

(2) $\tan(45^\circ+\theta)\tan(45^\circ-\theta)+\tan(135^\circ+\theta)\tan(135^\circ-\theta)$

(3) $(\sin x+\cos x)^2+\dfrac{(1-\tan x)^2}{1+\tan^2 x}+\tan^2 x+\cos^2 x\,(1-\tan^4 x)$

(群馬大 2013)　(m20131501)

0.266 次の微分方程式を解け．　$y'+y\tan x=\dfrac{1}{\cos x}$ ，$y(0)=1$

(茨城大 2001)　(m20011704)

0.267 z を複素数とするとき，$\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ ，$\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ である．次の各問いに答えよ．

(1) $\sin^2 z+\cos^2 z=1$ を示せ．

(2) y を実数とするとき，$\cos(iy)\geqq 1$ を示せ．

(3) $\cos z$ が実数となる z の条件を求めよ．

(茨城大 2001)　(m20011707)

0.268 複素平面上の曲線 $z(t)=\cos t+i(1+\sin t)$ $(0\leqq t\leqq\pi)$ を C とするとき，

(1) C を複素平面上に図示せよ．

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C z dz$ を求めよ．

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_C \overline{z} dz$ を求めよ．ただし,$\overline{z}$ は z の共役複素数を表す．

（茨城大 2004）　(m20041704)

0.269 $t>0$ とする．xy 平面内の領域 $D(t): t^2\leqq x^2+y^2\leqq 4t^2$, $x\geqq 0$, $y\geqq 0$ 上の二重積分 $F(t)=\displaystyle\iint_{D(t)}\frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy$ 　について，次の問に答えよ．

(1) 極座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ のヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算し，$F(t)$ を $r\theta$ 平面内の領域上の二重積分に変換せよ．

(2) $F'(t)$ を計算せよ．

(茨城大 2006)　(m20061702)

0.270 (x,y) を平面上の直交座標，(r,θ) を極座標とする．以下の問に答えよ．

$\rho>0$ とする．関数 $f(x,y)=r\sin 2\theta$ の正方形 $A=\{(x,y)\mid 0<x<\rho,\ 0<y<\rho\}$ 上の積分

$$I(\rho)=\iint_A f(x,y)dxdy$$

と扇形 $B=\{(r\cos\theta,r\sin\theta)\mid 0<r<\rho,\ 0<\theta<\pi/2\}$ 上の積分

$$J(\rho)=\iint_B f(x,y)dxdy$$

の大小関係を積分計算によらずに論ぜよ．次に積分計算を行って $I(\rho)$ と $J(\rho)$ を ρ の式で表し，大小関係を比較せよ．

(茨城大 2007)　(m20071705)

0.271 (x,y) を平面上の直交座標，(r,θ) を極座標とする．以下の各問に答えよ．

関数 $f(x,y)$ の定義域内の点 $\boldsymbol{p}$ およびベクトル $\boldsymbol{u}=(a,b)$ に対し，極限 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{p})}{t}$ を点 $\boldsymbol{p}$ での $\boldsymbol{u}$ 方向の微分係数と呼び，$\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{p})$ で表す．

(1) 関数 $f(x,y)=r\sin 3\theta$ の原点 $\boldsymbol{o}$ での $\boldsymbol{u}=(\cos\phi,\ \sin\phi)$ 方向の微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{o})$ を求めよ．また，偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{o})$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{o})$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ が点 $\boldsymbol{p}$ の近傍で偏微分可能，かつ，偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ が点 $\boldsymbol{p}$ で連続ならば等式

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{p})=a\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p})+b\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p})$$

が成立することを示せ．次に (1) の関数 f は原点 $\boldsymbol{o}$ でこの等式を満たさない理由を説明せよ．

(茨城大 2007)　　(m20071706)

0.272 (1) 関数 $y=\cos(x^2)$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ と $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．

(2) 次の連立不等式で表される範囲を xy 平面に図示せよ．

$$0 \leqq\ y \leqq \frac{\sqrt{\pi}}{2},\ \ y \leqq\ x \leqq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(3) 次の累次積分の順序を交換し，値を計算せよ．

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\left(\int_y^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\cos(x^2)dx\right)dy$$

(茨城大 2009)　　(m20091701)

0.273 $f(t)$ を $[0,\infty)$ 上で連続かつ広義積分可能な関数とする． また a,b は $a,b>0$ を満たす実数とし，$g(x,y)=f(a^2x^2+b^2y^2)$ とおく．以下の各問いに答えよ．

(1) $f(t)$ が $[0,\infty)$ 上で広義積分可能であることの定義を記述せよ．

(2) 変数変換

$$\begin{cases} x=\dfrac{r}{a}\cos\theta \\ y=\dfrac{r}{b}\sin\theta \end{cases}$$

によって，$r\theta$ 平面内の集合 $[\,0,\ 1\,]\times\left[\,0,\ \dfrac{\pi}{2}\,\right]$ は xy 平面内のどのような集合に写るか図示せよ．

(3) 等式

$$\iint_{[0,\infty)\ \times\ [0.\infty)} g(x,y)dxdy=\frac{\pi}{4ab}\int_0^\infty f(t)dt$$

が成り立つことを示せ．

(4)

$$I(a,b)=\iint_{[0,\infty)\ \times\ [0.\infty)} e^{-a^2(x^2+1)-b^2(y^2+1)}dxdy$$

とする．(3) の結果を用いて，条件 $a^2+b^2=1$ の下での $I(a,b)$ の最小値を求めよ．

(茨城大 2009)　　(m20091706)

0.274 次の連立不等式の表す領域を D とする．

$$y \geqq\ x,\ y \geqq\ -x,\ 4 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 9$$

以下の各問に答えよ．

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ に対して，$J = \dfrac{\partial x}{\partial r}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} - \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\dfrac{\partial y}{\partial r}$ とおく．J を計算せよ．

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$ を計算せよ．

(茨城大 2012)　　(m20121704)

0.275 実数 x, y に対して，$z = x+iy$ とする．複素関数 $f(z)$ を実部と虚部に分けて，$f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ とおく．$u(x,y) = e^{-2x}\cos 2y$ のとき，以下の各問に答えよ．

(1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を計算せよ．

(2) $v(x,y)$ は，$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ かつ $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ を満たすとする．このとき，$v(0,0) = 3$ となるような $v(x,y)$ を求めよ．

(3) $f(z)$ を z の関数として表せ．

(茨城大 2012)　　(m20121707)

0.276 次の関数を考える．

$$f(x,y) = x^2+y^2-(x^2+y^2)^2$$

$0 \leqq t$ に対して $D(t) = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqq 1,\ f(x,y) \geqq t\right\}$ とするとき，次の小問 (1), (2) および (3) に答えよ．

(1) 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta (r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ を用いて，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_{D(0)} f(x,y)dxdy$$

(2) 平面上の集合 $D(t)$ が表す領域の面積を $F(t)$ とするとき，$F(t)$ を求めよ．
ただし，平面上の集合 $D(t)$ が表す領域が空集合である場合や正の面積を持たない場合の t では $F(t) = 0$ とする．

(3) 次の等式を示せ．

$$\int_0^\infty F(t)dt = \iint_{D(0)} f(x,y)dxdy$$

(茨城大 2018)　　(m20181703)

0.277 $-\infty < x < \infty$ である x に対して，$\tan y = x$ 満たす y で $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす唯一のものを $y = \mathrm{Arctan}\, x$ と表わす．以下の各問に答えよ．

(1) $\cos(\mathrm{Arctan}\, x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ を示せ．

(2) 曲面 $z = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 上の点 $P = \left(1, 1, \dfrac{\pi}{4}\right)$ での接平面を求めよ．

(3) 関数 $y = x\sqrt{x^2+1} + \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ の微分を求めよ．

(4) 曲面 $z = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ の，xy 平面上の有界閉領域 $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqq 1\right\}$ の真上にある部分の曲面積を求めよ．

(茨城大 2022)　　(m20221702)

0.278 不定積分 $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}dx$ を求めよ．

（山梨大 2004）　　(m20041802)

0.279 $f(x,y) = x\arcsin y + y\arccos x$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を求めよ．ただし，$\arcsin y$, $\arccos x$ は，逆三角関数である．

(山梨大 2004)　　(m20041803)

0.280 (1) $f(x,y) = x^2 \sin y + y^3 \cos x$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を求めよ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \sin^3 x dx$ を求めよ.

(山梨大 2005)　　(m20051804)

0.281 座標平面上に曲線 $y = \cos x$ の $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分と x 軸とで囲まれた領域を D とし，関数 $f(x) = e^{\sin x}$ を考える．ここに，e は自然対数の底とする.

(1) $\dfrac{df(x)}{dx}$ を求めなさい.

(2) α が定数のとき，定積分 $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\cos x\,dx$ を α の式で表しなさい.

(3) D における二重積分 $\displaystyle\iint_D f(x)\,dxdy$ の値を求めなさい.

(山梨大 2008)　　(m20081804)

0.282 2次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} -\sin\dfrac{\theta}{2} \\ \cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ とを考える.

ただし，θ は任意の実数とする.

(1) A の固有値をすべて求めなさい.

(2) $\boldsymbol{V}$ は A の一つの固有ベクトルであることを示し，固有ベクトル $\boldsymbol{V}$ に対する A の固有値を求めなさい.

(山梨大 2009)　　(m20091802)

0.283 α を正の定数として，座標平面上の領域 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq y \leqq \alpha\}$ を考える．このとき，D における二重積分 $\displaystyle\iint_D \cos x \sin y\,dxdy$ を求め，α の式で表しなさい.

(山梨大 2009)　　(m20091804)

0.284 θ と ϕ を実数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix}$ を考える．以下の小問に答えよ.

(1) 行列の積 AB を計算し，その結果を行列 A, B と同じ形に変形せよ.

(2) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．なお，固有ベクトルは規格化しなくてもよい.

(3) 行列 A により xy 平面上の 4 点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が変換される点を求め，θ を正として図示せよ．また変換後の点が囲む面積を求めよ.

(山梨大 2018)　　(m20181802)

0.285 整数 n, 正数 b に対して，$I_n = \displaystyle\int_{-b}^{b} e^x \sin nx\,dx$, $R_n = \displaystyle\int_{-b}^{b} e^x \cos nx\,dx$ とおく．次の小問に答えよ.

(1) $I_n + nR_n$ を求めよ.

(2) $R_n - nI_n$ を求めよ.

(3) I_n と R_n を求めよ.

(4) $b = \pi$ のとき，I_n と R_n を求めよ.

(山梨大 2019)　　(m20191801)

0.286 任意の点 $P(x, y)$ が以下の関数により点 $Q(u, v)$ に写像されるとき，以下の問いに答えよ．ただし，x, y は任意の実数とする.

$$u = \frac{2}{\pi}x$$
$$v = y \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

(1) 点 P および点 Q を任意の実数からなる点の集合の要素として考えるとき，この写像は単射でも全射でもないことを，例を挙げて示せ.

(2) 点 P が $(0, 1) \to \left(\dfrac{3\pi}{2}, 1\right) \to \left(\dfrac{3\pi}{2}, 3\right) \to (0, 3) \to (0, 1)$ と移動したとき，点 Q の移動軌跡をグラフに示せ.

(3) 点 Q の移動軌跡で囲まれる領域の面積は，点 P の移動軌跡で囲まれる領域の面積の何倍になるか求めよ.

(山梨大 2023)　　(m20231803)

0.287 $\tan^{-1}x$ は $\tan x$ の逆関数で区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ に値をとるとする．このとき

(1) $(\tan^{-1}x)'$ を求めよ.

(2) $\dfrac{d}{dt}\tan^{-1}(\cos t)$ を求めよ.

(3) $\tan^{-1}(\cos t)$ の導関数の $t = \dfrac{\pi}{2}$ における値を求めよ.

(信州大 1999)　　(m19991901)

0.288 (1) 単位円周 $x^2 + y^2 = 1$ 上で定義された関数 $f(x, y) = x^3 + y^2$ の値域を求めよ.

(2) 2 変数関数 $f(x, y) = \sin x \cos y$ のマクローリン展開を 2 次項まで求めよ.

(信州大 2005)　　(m20051904)

0.289 $xy-$ 平面上の連続関数 $f(x, y)$ を考える．f の 1 階偏導関数 $f_x(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}f(x, y)$ および $f_y(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y}f(x, y)$ はともに $xy-$ 平面上で連続であるとする．このとき，ある $\theta_0 \in (0, 2\pi)$ が存在し，

$-f_x(\cos\theta_0, \sin\theta_0)\sin\theta_0 + f_y(\cos\theta_0, \sin\theta_0)\cos\theta_0 = 0$　　となることを示せ.

(信州大 2008)　　(m20081903)

0.290 (1) $|x| \leq \dfrac{1}{2}$ ならば，$|\log(1 + x) - x| \leq 2x^2$ が成立することを証明せよ.

(2) 次の等式を証明せよ.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1 + \frac{1}{n}\cos\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \cos x\,dx$$

(信州大 2012)　　(m20121903)

0.291 領域 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 < x < \dfrac{5}{6}\pi,\ 0 < y < \dfrac{5}{6}\pi\right\}$ で定義された

2 変数関数 $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$ について，次の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $f_x(x, y)$ および $f_y(x, y)$ を求めよ．また，第 2 次偏導関数 $f_{xx}(x, y)$ ，$f_{xy}(x, y)$ および $f_{yy}(x, y)$ を求めよ.

(2) $f_x(x,y)=0$ かつ $f_y(x,y)=0$ を満たす領域 D 内の点 (x,y) をすべて求めよ.

(3) 関数 $f(x,y)$ の領域 D における極値を求めよ.

(信州大 2013)　　(m20131901)

0.292 次の極限を調べ，それが存在する場合は極限値を求め，存在しない場合はその理由を述べよ.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,\pi)} \frac{\cos xy}{x^2+y^2-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2+y^4}$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)^3+y^3-1}{(x^2-1)^3-y+1}$

(信州大 2015)　　(m20151901)

0.293 平面内の領域 $D=\{(x,y)\,|\,(x,y)\neq(0,0)\}$ で定義される 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して，$\triangle f(x,y)=f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)$ と定める．また，$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\ \ (r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とし，$z=f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，領域 D で $f(x,y)$ の 2 階までのすべての偏導関数が存在して，それらはすべて連続である.

(1) $z_r,\ z_\theta$ を $r,\ \theta,\ f_x,\ f_y$ を用いて表せ.

(2) $z_{rr}+\dfrac{1}{r}z_r+\dfrac{1}{r^2}z_{\theta\theta}=\triangle f$ を示せ.

(3) $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\log(x^2+y^2)$ のとき，$\triangle f(x,y)$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする;

(信州大 2016)　　(m20161901)

0.294 2 変数関数 $f(x,y)=-\sin^3 x+2\sin x\cos^2 y$ について，次の問いに答えよ.

(1) $D=\{(x,y)\mid 0<x<\pi,\ 0<y<\pi\}$ における $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(2) $E=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq\pi,\ 0\leqq y\leqq\pi\}$ における $f(x,y)$ の最大値，最小値を求めよ.

(信州大 2018)　　(m20181901)

0.295 $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数とする．$f(x)$ が $x=a$ で連続であるとは，次の主張が成り立つ事として定義される.

P :　任意の $\varepsilon>0$ に対し，ある $\delta>0$ が存在して，$|x-a|<\delta$ となる任意の x に対して $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ である.

以下の問いに答えよ.

(1) 命題 P の否定を書け.

(2) $f(x)$ を次で定義する.

$$f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x}\,, & x\neq 0\\ 0\,, & x=0\end{cases}$$

(1) の答えにもとづいて，$f(x)$ は $x=0$ で連続ではないことを証明せよ.

(信州大 2019)　　(m20191906)

0.296 (1) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$$

(2) 次の極限が存在しないことを示せ.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

(3) 2 変数関数 $z=f(x,y)$ と $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ の合成関数 $f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ に対し，関係式

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}$$

が成り立つことを示せ.

(信州大 2020)　　(m20201905)

0.297 (1) 次の不定積分を求めよ.

$$\int \tan^{-1}\sqrt{x}\,dx$$

(2) $\mathbb{R}^2$ 内の領域 D を $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\le x+y\le 1,\ 0\le x-2y\le 1\right\}$ で定めるとき，2 重積分

$$\iint_D (3x+2y)dxdy$$

の値を求めよ.

(3) f は $[0,1]$ 上の実数値連続関数で，$\displaystyle\int_0^1 |xf(x)|dx<\infty$ であるとする．このとき，次の関数が $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを示せ.

$$g(x) := \int_0^1 \cos(xy)f(y)dy$$

(信州大 2020)　　(m20201906)

0.298 関数 $f(x)$ は開区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ において，

$$f(x)=\log\cos x$$

で定義されているとする．このとき，次に問いに答えよ．ただし，対数は自然対数である.

(1) $f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の 2 次までのマクローリン展開を求めよ．また，剰余項 $R_3(x)$ を求めよ.

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ を求めよ.

(信州大 2023)　　(m20231901)

0.299 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ dx$ を求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\ dx$ を求めよ．ただし，n は正の偶数とする.

(信州大 2023)　　(m20231902)

0.300 楕円 C : $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ について，次の問いに答えよ.

(1) 点 $F(\sqrt{3},0)$ と C 上の点 $P(x,y)$ を結ぶ線分 FP の長さを r，線分 FP と x 軸の正の方向とのなす角を θ とするとき

$$r=\frac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}$$

が成り立つことを示せ.

(2) 点 F を通る C の任意の弦 PQ に対して，線分 FP, FQ の長さをそれぞれ p,q とするとき，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}$ の値は一定であることを示せ.

(3) 点 F において互いに直交する C の二つの弦の長さの逆数の和は一定であることを示せ．

ここで楕円 C の弦とは C 上の異なる 2 点を結ぶ線分のことである．

(新潟大 1998)　　(m19982001)

0.301 次の問いに答えよ．

(1) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とすると，$\sin x$, $\cos x$, dx は，それぞれ次のように t で表されることを示せ．

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\ ,\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

(2) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{3\sin x+4\cos x}dx$ を求めよ．

(新潟大 2000)　　(m20002002)

0.302 $A=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ (θ は実数) とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 行列 P の逆行列 P^{-1} 及び，行列 A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように θ $(0\leq\theta\leq\pi/2)$ の値を定めよ．

(3) 曲線 $x^2+2\sqrt{3}xy-y^2=2$ の概形を描け．

(新潟大 2000)　　(m20002004)

0.303 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left\{\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+x}\right\}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log_2(1+x)}{x}$

(新潟大 2001)　　(m20012001)

0.304 周期 2π の関数 $f(x)$ が

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

と書かれた時，$f(x)$ はフーリエ級数展開されたという．一般に，係数 a_n,b_n は

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\quad b_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

として求められる．今，$f(x)$ が，区間 $-\pi<x\leq\pi$ で

$$f(x)=x$$

である時，フーリエ級数の係数 a_n,b_n を求めよ．

(新潟大 2001)　　(m20012010)

0.305 行列 $A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ (θは実数) について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるように $\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の値を求めよ．

(3) 曲線 $5x^2+2xy+5y^2-12=0$ の概形を描け．

(新潟大 2004)　　(m20042005)

0.306 自然数 n に対して, $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n tdt$ とおく. 次の問に答えよ.

(1) 任意の実数 x に対して, $1+x \leqq e^x$ を示せ.

(2) $(1-x^2)^n \leqq e^{-nx^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ および $e^{-nx^2} \leqq (1+x^2)^{-n}$ $(-\infty < x < \infty)$ を示せ.

(3) $x = \cos t$ とおくことにより, $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n dx = I_{2n+1}$ を示せ.

(4) $x = \tan t$ とおくことにより, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = I_{2n-2}$ $(n \geqq 2)$ を示せ.

(5) $\sqrt{n}\, I_{2n+1} \leqq \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx \leqq \sqrt{n}\, I_{2n-2}$ $(n \geqq 2)$ を示せ.

(新潟大 2005)　　(m20052003)

0.307 問 (1)〜(4) の不定積分および定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int x dx$　(2) $\displaystyle\int \cos x dx$　(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx$　(4) $\displaystyle\int_1^4 (2x^2+3x+1) dx$

(新潟大 2006)　　(m20062008)

0.308 以下の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int (x^2+1)(x-1) dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+q} dx$ $(q>0)$　(3) $\displaystyle\int e^{-x} \cos(ax) dx$ $(a>0)$

(新潟大 2006)　　(m20062010)

0.309 物理によく用いられるオイラーの公式（ $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 　ここで, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位 ）は, 指数関数と三角関数を結びつける重要な公式である. この公式を使って, 次の関係式を証明せよ.

(1) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$　(2) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

(新潟大 2007)　　(m20072003)

0.310 (1) 三角関数に対して次のような公式がある.

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx \tag{a}$$

ここで, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする. 式 (a), または, 三角関数の加法定理, 倍角公式などを用いて, 次の式が成り立つことを証明せよ.

$$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x \tag{b}$$

(2) 式 (b) の両辺を x で微分することにより

$$\sin 5x = (16\cos^4 x - 12\cos^2 x + 1)\sin x \tag{c}$$

となることを証明せよ.

(3) $\cos\dfrac{\pi}{5}$ を求めよ.

(新潟大 2008)　　(m20082002)

0.311 極座標表示の曲線 C ： $r = 1+\cos\theta$ $(-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$ について, 次の各問に答えよ.

(1) xy 座標で表したとき, x と y の最大値, 最小値を求めよ. また, C の概形を描け.

(2) C で囲まれる図形の面積を求めよ.

(3) C の長さを求めよ.

(新潟大 2009)　　(m20092009)

0.312 以下の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin x - \log(x+1)}$$

(新潟大 2010)　　(m20102004)

0.313 次の微分方程式を解け.

(1) $(2x-2y-1)\,dx+(-2x+6y+3)\,dy=0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}-6y=-2\cos 2x$

(新潟大 2010) (m20102009)

0.314 $\begin{cases} x=3\cos\theta \\ y=5\sin\theta \end{cases}$ で表される点 $P(x,y)$ はどのような曲線を描くか求めなさい.
また，概略形も示すこと．（フリーハンドでよい）

(新潟大 2011) (m20112011)

0.315 次の 3 つの関数のそれぞれの導関数を求めよ.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{3x^2}$ (2) $g(x)=-\cos(2x+2)$ (3) $h(x)=(x+1)(x^2+x+1)$

(新潟大 2011) (m20112013)

0.316 座標平面において，曲線 $C:x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ で囲まれた図形を F とする．このとき，次の各問いに答えよ.

(1) F の概形をかけ.

(2) 媒介変数表示 $x=\cos^3\theta$, $y=\sin^3\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ を用いて，F の面積を求めよ.

(3) 媒介変数表示 $x=\cos^3\theta$, $y=\sin^3\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ を用いて，F の周りの長さを求めよ.

(新潟大 2012) (m20122016)

0.317 次の 2 変数関数 $f(x,y)$ について，偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ求めよ.

$$f(x,y)=\sin^2(x+y)\cos(x+y)$$

(新潟大 2014) (m20142001)

0.318 次の関数を微分せよ．ただし, e は自然対数の底とする.

(1) $(x^3+2x-3)^4$ (2) $\log_e(x^3+2)$ (ただし $x>0$) (3) e^{3x+1} (4) xe^{-3x} (5) $e^{\cos x}$

(新潟大 2014) (m20142013)

0.319 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int(5x-4)\,dx$ (2) $\displaystyle\int\sqrt{x^5}\,dx$ (3) $\displaystyle\int x\cos x\,dx$

(新潟大 2014) (m20142014)

0.320 3 次元空間上のベクトル $\vec{\mathrm{V}}$ を x 軸のまわりで角度 θ だけ回転するとベクトル $\vec{\mathrm{V}}'$ へ変換される．この関係を 3× 3 行列 $U(\theta)$ を用いて

$$\vec{\mathrm{V}}'=U(\theta)\vec{\mathrm{V}}$$

と書く．ここで，$U(\theta)$ は

$$U(\theta)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

で与えられる．以下の問いに答えよ.

(1) 行列 $U(\theta)$ の行列式 $\det U(\theta)$ を求めよ.

(2) 行列 $U(\theta)$ の逆行列 $U(\theta)^{-1}$ を求めよ.

(3) 行列 K を

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

としたとき, K^2, K^3, および K^4 を求めよ. さらに, 正の整数 m に対して, K^{2m} と K^{2m-1} を求めよ.

(4) 一般に, 正方行列 X の指数関数は無限級数

$$e^X = E + X + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}X^n$$

で定義される. ここで, E は単位行列を表し, $X^0 = E$ である. 問 (3) の結果を利用して,

$$e^{\theta K} = U(\theta)$$

となることを示せ.

(新潟大 2014) (m20142017)

0.321 右の極限は存在するか, 存在すればその値を求めよ. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x)^{\sin x} - 1}{xe^{-x^2}}$

(新潟大 2015) (m20152005)

0.322 $y = \sqrt{\cos x}$ のとき, y'' を求めよ.

(新潟大 2015) (m20152007)

0.323 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx$ を求めよ.

(新潟大 2015) (m20152008)

0.324 次の (1)〜(3) の関数を微分せよ.

(1) $y = x^3(x-1)^2(x+2)^2$ (2) $y = \sqrt{1+\cos x}$ (3) $y = \dfrac{x^2+2}{x-1}$

(新潟大 2015) (m20152013)

0.325 以下の極限は存在するか, 存在すればその値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{(1+\cos x)\log(1+x)}$$

(新潟大 2016) (m20162005)

0.326 三角関数に関する以下の問いに答えよ.

(1) e^x, $\cos x$, $\sin x$ を $x = 0$ のまわりでテイラー展開せよ.

(2) オイラーの関係式,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

が成り立つことを, 問 (1) のテイラー展開の結果を用いて示せ.

(3) 任意の正の整数 n について, 次の恒等式が成り立つことを示せ.

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

(4) 問 (3) の恒等式を用いて，以下の式を証明せよ．

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta$$
$$\sin(3\theta) = 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta$$

(新潟大 2016)　　(m20162010)

0.327 自然数 n に対して，

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x}dx\ , \qquad J_n = \int_0^\pi \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx$$

とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) 次の公式を利用して，$I_{n+2} = I_n$ を示せ．

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

(2) I_n を求めよ．

(3) 数列 $\{J_n\}$ が等差数列になることを示せ．

(4) J_n を求めよ．

(新潟大 2016)　　(m20162011)

0.328 曲線 $y = \cosh x$ の $x = 0$ から $x = 2$ までの弧の長さを求めよ．

(新潟大 2017)　　(m20172006)

0.329 次の定積分を求めよ．　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\ dx$

(新潟大 2017)　　(m20172010)

0.330 座標平面上の 3 点 $A(-2,\ 0)$，$B(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$，$C(2\cos 2\theta,\ 2\sin 2\theta)$ の線分 AC の長さ $\overline{AC}$ と線分 BC の長さ $\overline{BC}$ の和 $\overline{AC} + \overline{BC}$ の最大値を $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ の範囲で求めよ．

(新潟大 2017)　　(m20172015)

0.331 以下のように行列 $A,\ B,\ C$ を定義する．

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{i\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

また，I を 3×3 の単位行列とする．ここで，i は虚数単位で $i = \sqrt{-1}$ である．

(1) $A^2 + B^2 + C^2 = kI$ となることを示し，定数 k を求めよ．

(2) A の固有値を求めよ．

(3) 一般に，正方行列 M の指数関数 e^M は，無限級数 $e^M \equiv \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}M^n$ で定義される．α を実定数としたとき，

$$e^{i\alpha C} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$$

（問題ではこうなっていましたが, (2, 2) 成分は 1 になるものと思われます）

となることを示せ．

(4) ベクトル $\overrightarrow{v}(\phi)$ を $\overrightarrow{v}(\phi) = \dfrac{\sin\phi}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{i\cos\phi}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と定義する．

このとき，$e^{i\alpha C}\overrightarrow{v}(\phi) = \overrightarrow{v}(\phi')$ と書けることを示し，ϕ' を求めよ．ただし，ϕ と ϕ' は実定数である．

(新潟大 2017)　　(m20172017)

0.332　次の (1)〜(3) の関数を x で微分せよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $y = \sqrt{1+\sin x}$　　(2) $y = xe^{1/x}$　　(3) $y = -\log_e(\cos x)$

(新潟大 2018)　　(m20182001)

0.333　次の (1)〜(3) の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int\left(\frac{x+3}{x}\right)^2 dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{x+1}{(2x-1)^3}dx$　　(3) $\displaystyle\int\sin^2 x\cos x dx$

(新潟大 2018)　　(m20182002)

0.334　不定積分 $\displaystyle\int\sin^2 x\cos x dx$ を求めよ（積分定数は C とせよ）．

(新潟大 2019)　　(m20192002)

0.335　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け．　$\sqrt{2}\sin 2x - \sqrt{2}\sin x - 2\cos x + 1 < 0$

(新潟大 2019)　　(m20192009)

0.336　2 つの行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ．

(1) A の行列式 $\det A$ と逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 2 つの行列の積 AB を求めよ．

(3) 4 つの行列 A, B, A^{-1} および AB は，いずれも二次元 XY 座標平面上における任意の点 $P(x, y)$ をそれぞれ異なる $P'(x', y')$ に移動させる．A, B, A^{-1} および AB が，それぞれどのように点 P を点 P' に移動させるか，幾何学的意味を述べよ．

(新潟大 2020)　　(m20202007)

0.337　n を自然数とする．$x^2\cos x$ の n 次導関数を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222001)

0.338　(1) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{x+3}{(x+1)^2(x-2)}dx$ を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{2+\cos x}dx$ を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222002)

0.339　虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を含む指数関数 $e^{i\theta}$ を三角関数で表す公式はオイラーの公式と呼ばれる．物理の問題を扱うには，よく似た行列の関係式を用いると便利なことが多い．このことに関連した以下の問いに答えよ．

(1) オイラーの公式を書け．つまり，実数 θ に対して $e^{i\theta}$ を三角関数を用いて表せ．

(2) 二次正方行列 I および J を

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する．J^2 を計算し，J^2 と I の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3) 一般に二次正方行列 X に対し，そのゼロ乗 X^0 および指数関数 e^X は次式で定義される：

$$X^0 = I, \qquad e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n = I + X + \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{3!} X^3 + \cdots$$

(2) の関係式に着目すると，行列 $e^{\theta J}$ は I に比例する部分と J に比例する部分の和

$$e^{\theta J} = f(\theta) I + g(\theta) J$$

で表すことができる．このとき，関数 $f(\theta)$ および $g(\theta)$ を求めよ．

なお，必要ならば，三角関数のベキ展開（テイラー・マクローリン展開）が次式で与えられることを用いてもよい．

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} \qquad = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \cdots$$

$$\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots$$

(4) (3) で求めた行列 $e^{\theta J}$ に対して，その行列式の値を答えよ．

次に，これまでの結果の応用として，調和振動子の運動を表す微分方程式

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

の解 $x(t)$ を求めたい．ここで ω は正の定数である．以下の問いに答えよ．

(5) 変数 $p(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ および $q(t) = \omega x(t)$ を用いると，この微分方程式は,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$$

の形に表すことができる．ここで K は t に依らない二次正方行列である．行列 K を答えよ．

(6) (5) の微分方程式の解は次式で与えられる：

$$\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = e^{Kt} \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$$

以上のことから，初期条件 $p(0) = p_0$, $q(0) = q_0$ に対応する解 $x(t)$ を求めよ．

(新潟大 2022) (m20222006)

0.340 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ．

(2) $\boldsymbol{A}$ を対角化する行列 $\boldsymbol{P}$ のうち，$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となるものを求めよ．

ただし，$0 \leq \theta \leq \pi/2$ とする．また，θ を求めよ．さらに，$\boldsymbol{P}$ を用いて $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ．

(3) 前問 (2) の条件において，$\mathbf{P}^6$ を求めよ．

(新潟大 2022) (m20222009)

0.341 次の定積分 I_n ($n = 0, 1, 2, 3, \cdots$) について，以下の問に答えよ．

$$I_n = \int_0^{\pi} \cos^{2n}\theta \, d\theta$$

(1) I_0 および I_1 を求めよ．

(2) $n=1,2,3,\cdots$ に対して， I_n を I_{n-1} で表せ（部分積分法を利用せよ）．

(3) I_n を n の式で表せ．

(長岡技科大 1992） (m19922101)

0.342 $f(t)=e^{-t}\cos t$, $g(t)=e^{-t}\sin t$ とするとき，

(1) $\begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ となる，定数を成分とする 2×2 行列 A を求めよ．

(2) 4 階の導関数 $f^{(4)}(t)$, $g^{(4)}(t)$ を求めよ．

(長岡技科大 1994) (m19942106)

0.343 次の 2 つの微分方程式について，以下の問いに答えよ．

$$y''-y=0 \qquad (*)$$

$$y''-y=e^{2x}\cos x \qquad (**)$$

(1) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めよ．

(2) $y=e^{2x}(a\cos x+b\sin x)$ が $(**)$ の解となるような定数 a,b を求めよ．

(3) 微分方程式 $(**)$ の一般解を求めよ．

(長岡技科大 1996) (m19962103)

0.344 自然数 n について，定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx$ の値を求めよ．

(長岡技科大 2000) (m20002102)

0.345 (1) 1 周期が T である関数 $f(t)$ は, 以下のようにフーリエ級数展開される.

$n=0,1,2,3,\cdots$ として C_n および θ_n を, a_n および b_n で表せ. 但し, $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$ とする.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t\Big) \\ &= C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos\big(n\omega_0 t-\theta_n\big) \end{aligned}$$

(2) 上式におけるフーリエ係数 a_n および b_n は, $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$ として,

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \quad , \quad n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin n\omega_0 t\,dt \quad , \quad n=1,2,3,\cdots$$

により計算できる. 1 周期において, 次式で定義される関数 $f(t)$ をフーリエ級数展開せよ.

$$f(t)=\begin{cases} -1 & , \quad -\dfrac{T}{2}\le t<0 \\ 1 & , \quad 0\le t\le \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

(3) $\sin^2 t$ および $\sin^3 t$ を, それぞれフーリエ級数展開せよ.

(4) $\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots$ となることを証明せよ.

(長岡技科大 2005) (m20052106)

0.346 実数 θ に対して $R(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とおく．以下の問いに答えなさい．

(1) $R(\theta)K = KR(-\theta)$ を示しなさい.

(2) 原点を通る傾き $\tan\theta$ の直線に関する対称移動を表す行列を $A(\theta)$ とするとき, $A(\theta) = R(2\theta)K$ を示しなさい.

(3) $A\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)A(\theta) = R\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ となる $A(\theta)$ を求めなさい.

(長岡技研大 2007) (m20072102)

0.347 x の関数 y についての微分方程式

$(*) \qquad y'' - y = e^x \sin x$

を考える. 下の問いに答えなさい.

(1) 微分方程式 $y'' - y = 0$ の一般解を求めなさい.

(2) a, b を定数として, $y = ae^x \cos x + be^x \sin x$ が微分方程式 $(*)$ を満たすような a, b の値を求めなさい.

(3) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めなさい.

(長岡技科大 2017) (m20172102)

0.348 x の関数 $y = y(x)$ に関する微分方程式

$(*) \quad y'' + y = \sin x$

を考える.

$u = u(x) = -y\cos x + y'\sin x, \ v = v(x) = y\sin x + y'\cos x$

とおくとき, 下の問いに答えなさい.

(1) $-u\cos x + v\sin x = y$ が成り立つことを示しなさい.

(2) $u', \ v'$ を x の関数として表しなさい.

(3) $u, \ v$ を x の関数として表しなさい.

(4) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めなさい.

(長岡技科大 2020) (m20202102)

0.349 (1) 極座標変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ に対して, ヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

(2) 重積分

$$\iint_{x^2+y^2 \leqq 1} \sqrt{x^2+y^2}\, \exp\Big(-\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^3\Big) dxdy$$

を求めよ. ただし, $\exp(t) = e^t$ である.

(金沢大 1999) (m19992204)

0.350 変数変換 $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ (a, b は正定数) に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき, (x, y) の動く領域 D を図示せよ.

(2) ヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\, dxdy$ を求めよ.

(金沢大 2000) (m20002202)

0.351 重積分 $I=\iint_D \dfrac{x}{y\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dxdy$ について次の問に答えよ．

ここに $D=\left\{(x,y)\ :\ y \geq x \geq 0\ ,\ \dfrac{1}{2} \leq x^2+y^2 \leq 1\right\}$ とする．

(1) D の形を図示せよ．

(2) 極座標変換 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ を用いて重積分 I の値を求めよ．

(金沢大 2001)　　(m20012202)

0.352 (1) $y=\cos x$ の第 n 階導関数 $y^{(n)}$ は，

$$y^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\ n=1,2,3,\cdots$$

で与えられることを示せ．

(2) 次の関数の第 n 階導関数 $y^{(n)}$, $n=1,2,3,\cdots$ を求めよ．

(a) $y=(ax+b)\cos x$ (a,b は定数)　　(b) $y=\cos^2 x$

(金沢大 2003)　　(m20032201)

0.353 $\sinh t=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$, $\cosh t=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) n 階導関数 $\sinh^{(n)} t$, $\cosh^{(n)} t$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を求めよ.

(2) $\begin{cases} x=\cosh t \\ y=\sinh t \end{cases}$ とおく. t を消去し, x と y の関係を求めよ.

また, $-\infty<t<\infty$ のとき, 点 (x,y) の描く曲線の概形を示せ.

（金沢大 2004）　　(m20042201)

0.354 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$ とするとき, 次の問に答えよ.

(1) $1+x-\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}<f(x)<1+x-\dfrac{x^2}{2!}$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{4}\right)$ を示せ.

(2) (1) を利用して $\cos(0.1)+\sin(0.1)$ の近似値を小数点以下第 2 位まで求めよ.

(金沢大 2005)　　(m20052202)

0.355 関数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\log(2+\cos x)}{x-\pi} & (x\neq\pi) \\ 0 & (x=\pi) \end{cases}$ について, 次の問に答えよ.

(1) $f(x)$ は $x=\pi$ で連続であるかどうか調べよ.

(2) $x=\pi$ での $f(x)$ の微分係数 $f'(\pi)$ は存在するか. 存在するときにはその値を求め, 存在しないときにはその理由を述べよ.

(金沢大 2005)　　(m20052206)

0.356 a,b は正の実数とする.

(1) $\dfrac{x}{a}=r\cos\theta$, $\dfrac{y}{b}=r\sin\theta$ $(0<r\ ,\ 0<\theta<2\pi)$ とおくとき, ヤコビアン

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$ を求めよ.

(2) 積分 $\iint_D \left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)dxdy$ を計算せよ. ただし, $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ y \geqq 0,\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1\right\}$ とする.

(金沢大 2005)　　(m20052207)

0.357 (1) 関数 $\sin x$ を $x=0$ でテーラー展開したときのテーラー級数の最初の 3 項を求めなさい.

(2) (1) の結果を使い, 次の関数 $f(x)$ の $x=0$ における導関数の値 $f'(0)$ を求めなさい.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$$

(3) 次の関数 $g(x)$ を $x=-\pi/2$ から $x=1$ まで定積分しなさい.

$$g(x)=\begin{cases}\cos^2 x & (x<0)\\ \dfrac{1}{2x+1} & (x\geq 0)\end{cases}$$

(金沢大 2005)　　(m20052208)

0.358 $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}(\cosh x)=\sinh x$, $\dfrac{d}{dx}(\sinh x)=\cosh x$ を示せ.

(2) $\cosh(\alpha+\beta)=\cosh\alpha\,\cosh\beta+\sinh\alpha\,\sinh\beta$ を示せ.

(3) $f(x)=e^{x\cosh\alpha}\cosh(x\sinh\alpha)$ とする．ただし，α は定数とする.

$$\frac{d^nf}{dx^n}=e^{x\cosh\alpha}\cosh(n\alpha+x\sinh\alpha)\,,\quad n=1,2,3,\cdots$$

を示せ.

(金沢大 2009)　　(m20092202)

0.359 次の問に答えよ.

(1) 変数変換 $x=ar\cos\theta$, $y=br\sin\theta$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ．ただし，a, b は正の定数とする.

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D\frac{1}{(1+2x^2+y^2)^2}\,dxdy$, $\quad D=\{(x,y)\ :\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0\}$ を求めよ.

(金沢大 2009)　　(m20092203)

0.360 (1) $x=u\cosh v$, $y=u\sinh v$ とおく.

$$1\leqq\ u\leqq\ 2,\ -\infty<v<\infty\ \text{のとき}\ x\geqq\ 1,\ 1\leqq\ x^2-y^2\leqq\ 4$$

となることを示せ. ただし, $\cosh v=\dfrac{e^v+e^{-v}}{2}$, $\sinh v=\dfrac{e^v-e^{-v}}{2}$ である.

(2) 変数変換 $x=u\cosh v$, $y=u\sinh v$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

(3) 重積分

$$\iint_D\frac{\log(x^2-y^2)}{x}\,dxdy$$

を計算せよ. ただし $D=\left\{(x,y)\,|\,x\geqq\ 1,\ 1\leqq\ x^2-y^2\leqq\ 4\right\}$ とする.

(金沢大 2010)　　(m20102203)

0.361 次の不定積分をしなさい.

$$\int x\cos x\,dx$$

(金沢大 2010)　　(m20102210)

0.362 (1) 変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0)$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ.

(2) 重積分

$$\iint_{x^2+y^2\leqq 2} \log(1+x^2+y^2)\,dxdy$$

を計算せよ.

(金沢大 2012) (m20122203)

0.363 (1) $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$ を示せ. ここで, $\sin^{-1} x$ は逆正弦関数を表す.

(2) 座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi)$$

に対するやコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ.

(3) 重積分

$$\iint_D \frac{y}{(x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy$$

を求めよ. ただし, $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; \dfrac{1}{4} \leqq x^2+y^2 \leqq \dfrac{3}{4},\ 0 \leqq y \leqq x\right\}$ とする.

(金沢大 2015) (m20152203)

0.364 有界閉領域 D, E を

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 \;\middle|\; \frac{1}{2} \leqq x^2+y^2 \leqq x\right\} ,$$

$$E = \left\{(r,\theta) \in R^2 \;\middle|\; -\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4},\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq r \leqq \cos\theta\right\}$$

とする. 次の問いに答えよ.

(1) D を図示せよ.

(2) 写像 $T : R^2 \to R^2$ を

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

とする. $(r,\theta) \in E$ のとき $T(r,\theta) \in D$ であることを示せ.

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$ の値を求めよ.

(金沢大 2015) (m20152208)

0.365 行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値と規格化された固有ベクトルを求めなさい.

(2) ある行列 P を用いて, 行列 $A' = P^{-1}AP$ を対角行列にすることができる. P と A' を求めなさい.

(金沢大 2015) (m20152211)

0.366 $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ $(n \geq 2)$ を示せ.

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cos^5 x dx$ を求めよ.

(金沢大 2016) (m20162221)

0.367 a, b, c は正の定数とし，x, y は次で定義される R^2 の領域 D の点とする.

$$D = \left\{ (x, y) \in R^2 \,\middle|\, 0 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq c^2 \right\}$$

(1) 変数 r, θ を用いて $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$ と変数変換を行う．この時,
関数行列式（ヤコビアン）$\left| \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right|$ を求めよ.

(2) (1) の変数変換を用いて重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy$ を求めよ.

(金沢大 2016) (m20162223)

0.368 $f(x, y)$ を C^2 級の実数値関数とする．極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を行ったとき $f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ が r だけの関数（$g(r)$ とする）になるならば，以下が成り立つことを示せ.

(1) $f_x y = f_y x$.

(2) $f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \dfrac{1}{r} g_r$.

(金沢大 2017) (m20172204)

0.369 定数 $a > 0$ を与えて，開区間 $\left(0, \dfrac{\pi}{a}\right)$ 上で関数 $f(x) = \dfrac{\cos(ax)}{\sin(ax)}$ を考える．次の問いに答えよ.

(1) $x = 0$ での右側極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0+0} f(x)$ と $x = \dfrac{\pi}{a}$ での左側極限 $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{a} - 0} f(x)$ をそれぞれ調べよ.

(2) $f(x)$ は $\left(0, \dfrac{\pi}{a}\right)$ 上で，$f'(x) = -a\left(1 + f(x)^2\right)$ を満たすことを示せ.

(3) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在することを示し，その導関数 $(f^{-1})'(x)$ を求めよ.

(4) (3) の関数 $f^{-1}(x)$ と $f(b) = b$ を満たす定数 b $\left(0 < b < \dfrac{\pi}{a}\right)$ に対して，広義積分

$$\int_b^{\infty} \frac{1}{(1 + x^2)\left\{1 + \left(f^{-1}(x)\right)^2\right\}} dx$$

を a と b を用いて表せ.

(金沢大 2018) (m20182207)

0.370 被積分関数に自然対数を含んでいる定積分

$$I = \int_0^1 \frac{\log(1 + x)}{1 + x^2} dx$$

の値が $0.18 < I < 0.28$ となることを確かめる．次の問いに答えよ.

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，不等式

$$\frac{\log(1 + x)}{1 + x^2} \geqq \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)(1 - x^2)$$

が成り立つことを示し，これを用いて $I \geqq \dfrac{11}{60}$ であることを導け.

(2) 2 つの等式

$$1 + \tan\theta = \frac{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \theta)}{\cos\theta} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

および

$$\int_0^{\pi/4} \log\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right\} d\theta = \int_0^{\pi/4} \log(\cos\theta) d\theta$$

がそれぞれ成り立つことを示し，これらを用いて定積分 I を計算せよ．

(3) $\pi < 3.2$ および $\log 2 < 0.7$ であることと問題 (1)(2) の結果を合わせて，$0.18 < I < 0.28$ であることを確かめよ．

(金沢大 2019)　　(m20192202)

0.371 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)) = (\cos t,\ \sin t,\ t)$ で表される曲線を考える．

(a) $\boldsymbol{r}(t)$ での単位接線ベクトルを求めなさい．

(b) $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲で，この曲線に沿って線積分 $\displaystyle\int_C xy^2 ds$ を求めなさい．ただし ds は曲線の線素とする．

(金沢大 2021)　　(m20212213)

0.372 (1) $\alpha > 1$ のとき，関数 $f(x) = (x + |x|)^\alpha$ は $\boldsymbol{R}$ 上の C^1 級関数であることを証明せよ．

(2) 集合 $\left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{4}(x + |x|)^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq -2\right\}$ の面積を求めよ．

(3) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right) - 1 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(x^2\right)}$$

(金沢大 2022)　　(m20222201)

0.373 $\boldsymbol{R}^2$ の領域を次で定義する．

$$D = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; |x| < \frac{\pi}{2},\ |y| < \cos^2 x\right\}$$

以下の問いに答えよ．

(1) D の概形を図示せよ．

(2) 関数 $g(x, y) = \dfrac{1}{(y - 2)\cos x}$ は，D 上の連続関数であることを示せ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^2 y^2}{\cos^6 x} dxdy$ の値を求めよ．

(金沢大 2022)　　(m20222202)

0.374 C^1 級関数 $z = f(x, y)$ に対して，$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とするとき

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \quad (r \neq 0)$$

が成り立つことを示せ．

(金沢大 2022)　　(m20222208)

0.375 次の $y_1(t)$, $y_2(t)$ に関する連立微分方程式を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} & = & y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} & = & -y_1 + \cos t \end{cases}$$

(1) 上の連立微分方程式の同次方程式（第 2 式右辺の $\cos t$ が無い場合の連立微分方程式）の一般解を求めよ．

(2) 定数変化法を用いて，上の連立微分方程式の一般解を求めよ．

(富山大 1994)　　(m19942301)

0.376 $x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ a,b$ は正の定数）によって描かれる $x-y$ 平面上の図形 S について，以下の問いに答えよ．

(1) θ を消去して x,y のみたす関係式を導け．

(2) S の概形を描け．

(3) S 上の点 P $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ における S の接線 l の方程式を求めよ．

(4) l が x 軸，y 軸の両方に交わるとき，その交点をそれぞれ A,B とする．線分 AB の長さを求めよ．

(5) 線分 AB の長さの最小値を求めよ．

(富山大 2001)　　(m20012302)

0.377 次の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int x^2\log x^2 dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^3 x}{1+\sin x}dx$

(富山大 2003)　　(m20032302)

0.378 $x=a\cos\theta\,,\ y=b(1+\sin\theta)$ $(\pi \leq \theta \leq 2\pi\,,\ a,b$ は正の定数) によって描かれる $x-y$ 平面上の曲線 S について，次の問いに答えよ．

(1) θ を消去して，x,y の関係式を導け．

(2) S のおおよその形を描け．

(3) y 軸（鉛直方向）を回転軸としてできる曲線 S の回転面を内壁とする容器 A に水を注ぐ，水位が $b/2$ のときの水量 V を求めよ．ここで，水位とは x 軸からの水面の高さをいう．

(4) 関数 $y=cx^2$ $(c>0)$ の y 軸を回転軸としてできる回転体 B を，容器 A 内に入れたとき，(3) で注がれた水があふれないための c の条件を求めよ．

(富山大 2003)　　(m20032303)

0.379 3 次元空間 $O-xyz$ に 3 点 $A(1,2,3)$, $B(2,2,1)$, $C(1,3,1)$ がある. ベクトル $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{CB}$ として, 以下の問いに答えよ.

(1) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のそれぞれの長さを求めよ.

(2) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角を θ とするとき, $\cos\theta$ を求めよ.

(3) 三角形 ABC の面積 S を求めよ.

(4) 点 B は原点 O から平面 ABC への垂線の足であることを示せ.

(5) 三角錐 $OABC$ の体積 V を求めよ.

（富山大 2004）　　(m20042306)

0.380 次の関数の導関数を求めよ.

(1) $x\cos x$　　(2) $\sqrt{1+x^2}$　　(3) $\dfrac{1}{1+\sin^2 x}$　　(4) $\mathrm{Tan}^{-1}x$

(富山大 2005)　　(m20052301)

0.381 以下の問に答えよ.

(1) 変数変換

$$x = r\cos\theta \qquad (r \geq 0)$$
$$y = r\sin\theta$$

により，$(x, y) = (2, 2)$ に対応付けられる (r, θ) 平面の点の座標を求めよ．また, この変数変換のヤコビ行列式を求めよ．

(2) xy 平面の領域 D を

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

と定める. 定積分

$$\iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dxdy$$

を求めよ.

(富山大 2005)　　(m20052305)

0.382 次の微分方程式 3 問のうち, 2 問を選択し, それぞれ一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = y + y^2$

(2) $(\sin x)\dfrac{dy}{dx} + (\cos x)y = 0$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$

(富山大 2005)　　(m20052306)

0.383 $f(x) = \log\left(\cos^2 x\right)$ を x で微分せよ.

(富山大 2005)　　(m20052311)

0.384 関数 $y = \sin x + \cos x \ \ (0 \leqq \ x \leqq \ 2\pi)$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) y の導関数を求め, 関数 y の増減と極大値, 極小値を調べよ．

(2) 関数 y のグラフを描け, 関数 y と x 軸との交点の座標も明らかにせよ．

(3) x が 0 から $\dfrac{3\pi}{4}$ の範囲で, 関数 y と x 軸で囲まれる面積を求めよ．

(富山大 2006)　　(m20062306)

0.385 次の常微分方程式３問のうち, ２問を選択し, それぞれ一般項を求めよ．ただし, (3) については, $y = \cdots$ の形で表現する必要はない．また y' , y'' は, それぞれ dy/dx , d^2y/dx^2 を意味する．

(1) $y'' + 6y' + 9y = 0$　　(2) $xy' + y^2 = 4$　　(3) $y' = \dfrac{2x - 2y + \cos x}{2x - 4y - \sin y}$

(富山大 2006)　　(m20062307)

0.386 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1}(2x) \quad \left(-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}\right)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}xe^{x^2}$　　(3) $\dfrac{d}{dx}(\log_e x)^x \quad (x > e)$

(富山大 2007)　　(m20072301)

0.387 (1) $f(\theta(t)) = \sqrt{1 + \sin^2\theta(t)} + 3\cos\theta(t) + 2$ において, $\dfrac{df}{dt}$ を求めよ.

(2) $f(\theta_1(t)\, ,\ \theta_2(t)) = 5 + \cos\theta_1(t) + 2\sin(\theta_1(t) + \theta_2(t))$ において, $\dfrac{df}{dt}$ を求めよ.

(富山大 2007)　　(m20072305)

0.388 θ を任意の実数, I を単位行列, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ として, 行列 A が $A = (\cos\theta)I + (i\sin\theta)\sigma_1$ で与えられるとき, 以下の問いに答えよ. ここで i は虚数単位とする.

(1) ${\sigma_1}^2$ を計算せよ.

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) σ_2 の固有値 λ と固有ベクトル ν を求めよ.

(4) $A\sigma_2 A^{-1}$ を計算して σ_2 を対角化するように θ を決定せよ. ただし, θ の範囲を $0 < \theta < \pi/2$ とする. また, このときの θ の値を用いた行列 A により, σ_2 の固有ベクトル ν を変換したベクトル $u = A\nu$ を求めよ.

(富山大 2008)　　(m20082303)

0.389 半径 a の球の体積 V を求める. 以下の問いに答えよ.

(1) 直交座標 (x, y, z) を用いて, V を積分表示せよ.

(2) (x, y, z) の極座標 (r, θ, φ) への変換

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$$

を用いて, $\dfrac{\partial x}{\partial r}$, $\dfrac{\partial x}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}$, $\dfrac{\partial y}{\partial r}$, $\dfrac{\partial y}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}$, $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}$ を求めよ.

(3) $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(4) (1) および (3) の結果を用いて, V を (r, θ, φ) で積分表示せよ.

(5) (4) の積分を実行し, V を求めよ.

(富山大 2009)　　(m20092304)

0.390 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}x^2e^{-2x}$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\log(\tan x)\ \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$　　(3) $\dfrac{d}{dx}(\cos x)^x\ \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

(富山大 2010)　　(m20102301)

0.391 次の計算をせよ.

(4) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 + 2x - 3}\,dx$　　(5) $\displaystyle\int x\cos^2 x\,dx$

(富山大 2010)　　(m20102302)

0.392 (1) 直交座標の二重積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ を変数変換

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

によって, 極座標 $(r,\ \theta)$ の二重積分に変換せよ.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ の値を求めよ.

(富山大 2010)　　(m20102305)

0.393 次の微分方程式 4 問中から 3 問を選択し, それぞれの一般解を求めよ.

ただし, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ である.

(1) $y^2 + 1 - 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$ (2) $x^2 + y^2 - 2xy\dfrac{dy}{dx} = 0$

(3) $(\cosh x)\dfrac{dy}{dx} + (y - x)\sinh x = 0$ (4) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0$

(富山大 2010) (m20102306)

0.394 $-1 < a < 1$ のとき，次の問いに答えよ．

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{inx}$ $(x \in R)$ は R 上一様に絶対収束することを示せ．ただし，i は虚数単位を表す．

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx$ $(x \in R)$ の和を求めよ．

(富山大 2011) (m20112303)

0.395 懸垂曲線 $y = a\cosh\dfrac{x}{a}$ $\quad(a > 0)$ と直線 $y = b$ $\quad(b > a)$ で囲まれた図形を考える．

(1) 直線と懸垂曲線は $x = \pm\ell$ で交差する．逆双曲線関数を用いて，定数 a と b で ℓ を表せ．

(2) 曲線の長さは曲線の線素 $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ を積分することによって与えられる．この図形の周囲の長さを a と b を用いて表せ．

双曲線関数 $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ ， $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ ，逆双曲線関数 $\cosh^{-1}x = \pm\log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ $(x > 1)$ ， $\sinh^{-1}x = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ を用いても良い．

(富山大 2012) (m20122305)

0.396 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{\log_e(1 - x)^2}$ (2) $\dfrac{d}{dx}(\cos 2x)^{-2}$ (3) $\dfrac{d}{dx}\tan\left(\dfrac{e^{x^2}}{2}\right)$

(富山大 2013) (m20132301)

0.397 次の計算をせよ．計算の概略も示すこと．

(1) $\displaystyle\int \arctan\frac{x}{2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^4 x - 6cos^6 x)\,dx$

(富山大 2015) (m20152306)

0.398 次の計算をせよ．ただし，計算の概略も示すこと．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx$ (2) $\displaystyle\int x\log_e x dx$ $\quad(x > 0)$

(富山大 2017) (m20172302)

0.399 半径 $a(a > 0)$ の円が x 軸に接して滑らずに転がるとき，円周上の定点が描く曲線をサイクロイドといい，パラメータを t として

$$x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

で与えられる．このとき次の各問いに答えよ．

(1) 導関数 $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ を計算せよ．

(2) $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$ を求めよ．

(3) 一般に，パラメータ t が α から β まで変化したとき，点 $(x(t), y(t))$ が描く曲線の長さ l は次式で表される．

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

サイクロイドにおいて，$t = t_0$ $(0 < t_0 < 2\pi)$ を初期値として
円が一回転したとき $(t = t_0 + 2\pi)$ の曲線の長さを求めよ．

(富山大 2018)　　(m20182307)

0.400　2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ が次の様に定義され，

$$f(x) = \int_0^x e^t(\sin t + \cos t)dt$$

$$g(x) = \int_0^x e^t(\cos t - \sin t)dt$$

また，$f^{(n)}(x)$，$g^{(n)}(x)$ を，それぞれ，$f(x)$，$g(x)$ の n 次導関数とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ．

(2) $f^{(1)}(x)$ と $g^{(1)}(x)$ を求めよ．

(3) $f^{(2)}(x)$ と $g^{(2)}(x)$，および，$f^{(3)}(x)$ と $g^{(3)}(x)$ を求めよ．

(4) $n \geqq 2$ として，$f^{(n)}(x)$ と $g^{(n)}(x)$ それぞれを $f^{(n-1)}(x)$ および $g^{(n-1)}(x)$ を用いた漸化式で表せ．

(富山大 2019)　　(m20192305)

0.401　次の式で定義される xy 平面上の曲線 y_1 と y_2 および $x = 0$ と $x = 2\pi$ で囲まれる面積を求めよ

$$\begin{cases} y_1 = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ y_2 = \sin(x) \end{cases}$$

(富山大 2021)　　(m20212304)

0.402　関数 $f(X) = \sqrt{3}\sin X + \cos X$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 関数 $f(X)$ の導関数 $f'(X)$ を求めなさい．

(2) 関数 $f(X)$ の区間 $0 \leq X \leq \pi$ における最大値 f_M と最小値 f_m を求めなさい．

(3) 関数 $f(X)$ の定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(X)dX$ を求めなさい．

(4) 関数 $f(X)$ の区間 $0 \leq X \leq \pi$ でのグラフの概略を示しなさい．

(福井大 2000)　　(m20002406)

0.403　微分方程式　$x \cdot \cos\dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{dy}{dx} = -x + y \cdot \cos\dfrac{y}{x}$　を解け．

(福井大 2000)　　(m20002409)

0.404　以下の関数の 1 次導関数を求めなさい．

(1) $x^n e^{-x}$　　(2) x^x　　(3) $\cos^{-1} x^3$　　(4) $\sqrt{\dfrac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}}$　　(5) $\sin^{-1}(n \sin x)$

(福井大 2001)　　(m20012402)

0.405　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 - x}dx$　　(2) $\displaystyle\int e^{kx}x^3 dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x}dx$

(福井大 2001)　　(m20012405)

0.406 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\log(1+\tan\theta)d\theta$ (2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}}x\cos x^2dx$

(福井大 2001) (m20012406)

0.407 次の微分方程式を解け.

(1) $2xydy+(1-y^2)dx=0$ (2) $xdy/dx+2y=x^2$

(2) $d^2y/dx^2-3dy/dx+2y=e^{3x}$ (4) $d^2y/dx^2+y=\cos x$

(福井大 2001) (m20012412)

0.408 以下に二つの線型変換がある.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\end{pmatrix}$$

(1) これらの行列による変換は平面上でどのような幾何学的意味を持つか説明せよ.

(2) $A,\ B$ による合成変換の行列を求めよ.

(3) (2) で求めた合成変換の行列の逆変換行列を求めよ.

(4) (2) で求めた合成変換によって，直線 $y=3x+2$ はどのような図形に変換されるか.

(福井大 2001) (m20012418)

0.409 下記の関数 $y=f(x)$ の導関数を求めよ．ただし，a,b は定数とする.

(1) $f(x)=e^{ax}(\cos bx+\sin bx)$ (2) $f(x)=x^{ax+b}$

(福井大 2003) (m20032403)

0.410 次の関数を積分しなさい.

(1) $y=\dfrac{\sqrt{\log x}}{x}$ (2) $y=x\sin x^2$ (3) $y=\dfrac{1}{\cos x}$

(福井大 2003) (m20032409)

0.411 次の行列 $\mathbf{B}$，ベクトル $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ がある．3 次元の空間でベクトル $\mathbf{a}$ は (x_1,y_1,z_1) の点を表し，ベクトル $\mathbf{b}$ は $(1,0,0)$ の点を表し，ベクトル $\mathbf{c}$ は直線を表す.

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\ \mathbf{c}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ t\end{pmatrix},\ \text{ここでtは任意の実数},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & 0 & \sin\frac{\pi}{6}\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\frac{\pi}{6} & 0 & \cos\frac{\pi}{6}\end{pmatrix}$$

(1) 線形変換（一次変換）$\mathbf{y_1}=\mathbf{Bb}$ によって，ベクトル $\mathbf{b}$ は 3 次元座標でどこに移されるかわかるように図に描きなさい.

(2) 線形変換（一次変換）$\mathbf{y_2}=\mathbf{Bc}$ によって，ベクトル $\mathbf{c}$ は 3 次元座標でどこに移されるか．ベクトル $\mathbf{y_2}=\mathbf{Bc}$ を図に描き，どのような形か説明しなさい.

(福井大 2003) (m20032415)

0.412 (1) 次の定積分を示せ．m と n は整数とする.

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin mxdx=0\ ,\ \int_0^{2\pi}\cos nxdx=0$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin mx\cos nxdx=0$

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin mx\sin nxdx=\begin{cases}0\,(m\neq n)\\ \pi\,(m=n)\end{cases}$

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0\,(m \neq n) \\ \pi\,(m = n) \end{cases}$

(2) $x(t)$ を周期 T の周期関数とするとき，$x(t)$ を次のように書くことができる．

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2\pi k}{T}t + b_k \sin\frac{2\pi k}{T}t\right)$$

このとき，(1) の知見を活用し，$a_k\,(k \geq 0)$, $b_k\,(k \geq 1)$ を $x(t)$ を用いて表せ．

(福井大 2003)　　(m20032417)

0.413 極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x - x^2}{2 - 6x + 3x^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} i}{n^2 - 1}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{x^2}$

（福井大 2004）　　(m20042405)

0.414 x, y がパラメータ表示により

$x = a\cos^3 t$

$y = b\sin^3 t$

で与えられているとき, dy/dx を求めなさい. ただし, $a \neq 0$, $b \neq 0$ とする.

（福井大 2004）　　(m20042407)

0.415 次の曲線の長さを求めよ.

$$x = e^{-t}\cos t\ ,\quad y = e^{-t}\sin t \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(福井大 2005)　　(m20052404)

0.416 2 行 2 列の行列

$\boldsymbol{A}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$,　　$\boldsymbol{B}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

(1) $\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{A}(y) = \boldsymbol{A}(x + y)$

(2) $\boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{B}(y) = \boldsymbol{A}(x - y)$

(3) $\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}(y) = \boldsymbol{B}(x + y)$

(4) $\bigl(\boldsymbol{A}(x)\bigr)^n = \boldsymbol{A}(nx)$

(福井大 2005)　　(m20052411)

0.417 $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ であって, $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\cos\beta = -\dfrac{8}{17}$ のとき, 次の値を求めよ.

(1) $\sin(\alpha + \beta)$　　(2) $\cos(\alpha - \beta)$

(福井大 2005)　　(m20052415)

0.418 $\dfrac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = \cot\dfrac{\theta}{2}$ が成り立つ.

この式の両辺を微分し，微分した左辺と右辺が等しくなることを示せ.

ただし，必要に応じて三角関数の 2 倍角の公式 “ $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ ” を使え.

(福井大 2006)　　(m20062401)

0.419 $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ のとき，$t = t_0$ に対応する点 (x_0, y_0) における接線と法線の方程式を求めよ．

(福井大 2006)　　(m20062402)

0.420 次の不定積分を求めよ．　$\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$，　$a > 0$，$|x| \leq a$

ただし，必要に応じて三角関数の 2 倍角の公式

“ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ および $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ ” を使え．

(福井大 2006)　　(m20062403)

0.421 以下の問に答えよ．なお，i は虚数単位である．

(1) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i$ を極形式（$\cos\theta + i\sin\theta$ の形式）で表せ．

(2) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i$ の 3 乗根を複素平面上に図示せよ．

(福井大 2006)　　(m20062411)

0.422 次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 1$　　(2) $x(x-y)\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 0$　　(3) $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^2$　　(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x$

(福井大 2006)　　(m20062412)

0.423 $y = a\sin x + b\cos x$ について次の問いに答えよ．

(1) 上の関数が，$y = A\sin(x + \theta)$ の形に変換できることを示しなさい．

(2) $a = 1,\ b = \sqrt{3}$ の時，A および θ の値を求めよ．

(3) $0 \leq x \leq \pi$ とする時，関数の最大値と最小値，ならびにその時の x の値を示せ．

(福井大 2006)　　(m20062415)

0.424 次の関数を微分しなさい．

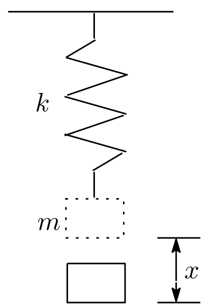
(1) $y = \sqrt{x}$　　(2) $y = \dfrac{1}{x+1}$　　(3) $y = \cos x \sin^2 x$

(4) $y = e^{x^2}$　　(5) $y = x^{3x}$

(福井大 2006)　　(m20062416)

0.425 図のように，バネ定数が k で，質量を無視できるバネに，質量 m のおもりを吊り下げる．つりあった位置から，上下方向に振動させる時の変位を x とする．このとき，時間 t に対するおもりの運動は，次の運動方程式によって表現できる．

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$



(1) $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とおくとき，$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ は，上の運動方程式の一般解であることを示しなさい．

(2) $m = 0.16(kg),\ k = 4(kg/sec^2)$ とするとき，おもりの運動の周期を求めなさい．

(3) $t = 0$ において，$x = 2(cm),\ \dfrac{dx}{dt} = 0(cm/sec)$ とするとき，定数 A, B の値を求め，3 秒間の変位のグラフのおよその形を示せ．

(福井大 2006)　　(m20062418)

0.426 点 $P(x,y)$ は，時間 t の時，$x=a\cos(2\pi t)$, $y=a\sin(2\pi t)$ の位置にあるものとする．

(1) $a=e^{-t}$ とする時，$-1\leq t\leq 1$ の範囲で，時間 t に対する a および x の描く図形のおよその形を示せ．

(2) $-1\leq t\leq 1$ の範囲で，点 P の描く図形のおよその形を示せ．

(3) $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ をそれぞれ求めよ．　(4) 点 P の時刻 t における速度を求めよ．

(福井大 2006)　　(m20062419)

0.427 次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$　(2) $2\begin{pmatrix}1 & 3\\-3 & -1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2 & 4\\1 & 3\end{pmatrix}$

(3) ${}^T\!\begin{pmatrix}-2 & 0\\-1 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 5\\3 & 6\end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6}\\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3}\\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

(福井大 2006)　　(m20062421)

0.428 二次元直交座標 (x,y) を，以下の式に従い極座標 (r,θ) に変換するものとする．

$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$　ただし，$r\geq 0$, $0\leq\theta<2\pi$ として，以下の設問に答えよ．

(1) r および θ を，x および y を用いて表せ（答のみでよい）．

(2) $\dfrac{\partial r}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$ を計算せよ（途中経過も書くこと）．

(3) (2) の結果を用いて，$\dfrac{\partial^2\log r}{\partial x^2}$ を計算せよ（途中経過も書くこと）．

(福井大 2007)　　(m20072403)

0.429 関数 $g(x)=\cos x$ を，$x=\dfrac{\pi}{2}$ の周りで Taylor 展開せよ．

(福井大 2007)　　(m20072414)

0.430 (1) 次の関数を積分せよ．　（途中の計算式も書くこと）

$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$　　ヒント ： $\sqrt{x^2+a}=t-x$ とおく．

(2) 次の定積分を求めよ．　（途中の計算式も書くこと)}

$\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$　　$(a>0)$

なお，必要に応じて三角関数の二倍角の公式 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ を用いよ．

(福井大 2008)　　(m20082403)

0.431 次の値を求めよ．

(1) $\cos 55^\circ+\cos 65^\circ+\cos 175^\circ$　(2) $\log_3 9\sqrt{5}+\dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{1}{5}$　(3) $\left(\sqrt[3]{27^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(4^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$

(福井大 2008)　　(m20082412)

0.432 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5^x-3^x}{5^x+3^x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Bigl(\cos x\Bigr)^{\frac{1}{x^2}}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Bigl(1+8x\Bigr)^{\frac{1}{x}}$

(福井大 2008)　　(m20082413)

0.433 次の関数を微分しなさい.

(1) $y = \sin^{-1} x$ (2) $y = x^x$ (3) $y = \log\sqrt{x^2+a^2}$

(4) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ (5) $y = a^x$

(福井大 2008) (m20082414)

0.434 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$ (2) $\dfrac{1-x}{x^2}$ (3) $\tan x$ (4) $e^x \cos x$

(福井大 2008) (m20082416)

0.435 定積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mt \cos nt\, dt$ を以下の手順で求めよ．ただし，m, n 自然数とする.

(1) $\sin mt\ \cos nt$ を三角関数の和または差の形に変形せよ.

(2) $m = n$ の時の定積分を求めよ.

(3) $m \neq n$ の時の定積分を求めよ.

(福井大 2008) (m20082417)

0.436 (1) 次の関数を微分せよ.

(a) $y = \sin^3 4x$

(b) $y = a^x$

(2) 極座標系 (r, θ) についての方程式 $r = 2a\cos\theta$ の $\theta = \alpha$ における接線の方程式を求める．以下の各問に従って解答せよ.

なお，必要に応じて右下の公式を利用せよ.

$$\left\{\begin{array}{l} \sin 2A = 2\sin A\cos A \\ \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A \\ \cos(A \pm B) = \cos A\cos A \mp \sin A\sin B \end{array}\right\}$$

(a) 極座標系 (r, θ) と直交座標系 (x, y) との関係を求めよ.

$x =$

$y =$

(b) $\theta = \alpha$ における接線の傾き dy/dx を求めよ.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\theta=\alpha)} =$$

(c) $\theta = \alpha$ における接線の方程式を求めよ．ただし，解答は途中の計算を示すとともに，$\boxed{}$ 内に記号または数字を入れて方程式を完成せよ.

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos\left(\boxed{}\boxed{} - \boxed{}\right)}{\boxed{}\, a\cos^2\boxed{}}$$

(福井大 2009) (m20092401)

0.437 (1) 内径が a，外径が b である球殻の体積を，極座標系での 3 重積分を使って表し，その値を求めよ．ただし，極座標 (r, θ, ϕ) は，直角座標 (x, y, z) を使って，

$$x = r\sin\theta\cos\phi\,,\ y = r\sin\theta\sin\phi\,,\ z = r\cos\theta \quad (0 \le r \le \infty\,,\ 0 \le \theta \le \pi\,,\ 0 \le \phi \le 2\pi)$$

で定義される.

(2) 楕円 $x^2 - xy + y^2 = 4$ の面積を求めよ.

(福井大 2009) (m20092402)

0.438 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $x^2dy-(y^2-1)dx=0$

(2) $\dfrac{dy}{dx}\cos x=-y\sin x$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{xy-x^2}$ （変数変換を用いよ）

(福井大 2009) (m20092404)

0.439 x は鋭角，y は鈍角であり，$\sin x=\dfrac{1}{2}$，$\sin y=\dfrac{1}{3}$ とする．このとき，$\sin(x+y)$，$\cos(x+y)$ の値を求めよ．

(福井大 2009) (m20092406)

0.440 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin x-x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}\right)$ (3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n+2}{3n^2+4}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2+2n}-3n\right)$ (5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

(福井大 2010) (m20102413)

0.441 次の関数 $r=a(1+\cos\theta)$，$(a>0)$ で囲まれた部分の面積 A を求めよ．

(福井大 2010) (m20102417)

0.442 次の関数を微分せよ．

(1) $y=\log_e\left(\cos^2 x\right)$ (2) $y=x^{\tan^{-1}x}$

(福井大 2011) (m20112402)

0.443 つぎの微分方程式の一般解を導出して，初期条件を満たす解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx}-xy=x$ (初期条件 : $x=0$ のとき，$y=0$)

(2) $\dfrac{dy}{dx}+e^xy=2e^x$ (初期条件 : $x=0$ のとき，$y=1$)

(3) $\dfrac{dy}{dx}+y\cos x=\sin x\,\cos x$ (初期条件 : $x=0$ のとき，$y=0$)

(福井大 2011) (m20112408)

0.444 次の値を求めよ．

(1) $(x^3y^2)^{-\frac{2}{3}}\times\ x^2y^{\frac{4}{3}}$

(2) $5^{\log_5 7}$

(3) $4\log_2\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\log_2 3+\log_2\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

(4) $(\sin 40^\circ+\sin 50^\circ)^2+(\cos 50^\circ-\cos 40^\circ)^2$

(5) $\sin x+\cos x=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}$ の値

(福井大 2011) (m20112413)

0.445 次の関数を微分せよ．

(1) $y=\sin x^2$ (2) $y=\cos x\,\sin^2 x$ (3) $y=2^{3x}$ (4) $y=x^x$

(福井大 2011) (m20112414)

0.446 次の関数の不定積分を求めよ

(1) $x(2x-3)^2$ (2) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$ (3) $\dfrac{e^x}{e^x+1}$ (4) $e^x\cos x$

(福井大 2011) (m20112415)

0.447 次のベクトルと行列の演算を行え.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2) $3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ (4) ${}^t\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ （t は転置を表す）

(福井大 2011) (m20112418)

0.448 次の方程式を解け.

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$$

(福井大 2012) (m20122415)

0.449 次の関数の最大値及び最小値を求めよ.

$$\cos 2x + \sin x$$

(福井大 2012) (m20122416)

0.450 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \sqrt{4\sin x + 6}$

(2) $y = \log \sqrt[5]{\dfrac{x+5}{x-5}}$

(3) $y = -\tan^5 x$

(4) $y = \sin^5 x + \cos^5 x$

(福井大 2012) (m20122417)

0.451 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $8x^3 - 6x^2 - 2 + 2e^{3x} + 4\sin x$

(2) $\cos x \sin^6 x$

(3) $\dfrac{1}{5e^x+1}$ (4) $\dfrac{6x+8}{x^2-8x+12}$

(福井大 2012) (m20122418)

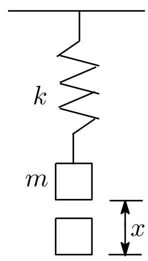
0.452 次のベクトルと行列の演算を行え.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2) $3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

(福井大 2012) (m20122419)

0.453 図のように，バネ定数が k で，質量を無視できるバネに，質量 m のおもりを吊り下げる．つりあった位置から，上下方向に振動させる時の変位を x とする．このとき，時間 t に対するおもりの運動は，次の運動方程式によって表現できる．



$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$$

(1) $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とおくとき，$x=A\cos\omega t+B\sin\omega t$ は，上式の一般解であることを示せ．

(2) $m=2.25(kg)$, $k=4\pi^2(kg\cdot m/s^2/m)$ とするとき，おもりの振動の周期を求めなさい．

(3) $t=0$ において，$x=2(cm)$, $\dfrac{dx}{dt}=0\ (cm/s)$ とするとき，定数 A,B の値を求め，3 秒間の変位と時間の関係のおよその形を示せ．

(福井大 2012)　　(m20122423)

0.454 次式はマクローリン展開の一般式である．

$$f(x)=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad \text{ただし，} f^{(n)} \text{は } n \text{ 次導関数を示す．}$$

(1) $f(x)=e^x$ の $n=4$ までのマクローリン展開を示すとともに，e の近似値を求めよ．

(2) $f(x)=\sin x$ および $f(x)=\cos x$ について，$n=5$ までのマクローリン展開を示せ．

(3) 上の結果を利用して $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ を示せ; ただし，$i^2=-1$ である．

(福井大 2012)　　(m20122424)

0.455 不定積分を求めよ．

< 公式 > 必要に応じて次の公式を使ってもよい．

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C \quad (a,C \text{ は定数})$$

(1) $\displaystyle\int\sin^2 x\,\cos x\,dx$

(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2(2+x^2)}$

(福井大 2013)　　(m20132407)

0.456 以下の設問に答えよ．ただし以下で i は虚数単位である．

(1) $\dfrac{5-i}{5+i}$ を $a+bi$ の形で表せ．

(2) $\left|\dfrac{1+i}{2+i}\right|$ の値を求めよ．

(3) 次の複素数を極形式で表せ．

1) $2+2\sqrt{3}i$　　　　2) $\dfrac{2}{1-i}$

(4) $x=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $y=\cos\beta+i\sin\beta$ とするとき，$xy=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$ であることを確かめよ．

(5) 上記 (4) の x について，$x^n=\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha)$ が成り立つことを示せ．ただし n は自然数とする．

(福井大 2013)　　(m20132417)

0.457 次の設問に答えなさい.

(1) プールの水面の高さ h が, 時間 t に関し $k\dfrac{h}{b}A\,dt = -a\,dh$ を満足するように変化している. ただし k, a, b, A は定数である. $t=0$ のとき $h=h_0$, $t=t_1$ のとき $h=h_1$ として, 定数 k を求めなさい.

(2) 時間 t での位置 (x, y) が $(e^t\cos t,\ e^t\sin t)$ で与えられる動点 P がある. ただし $0 \leq t \leq 2\pi$ とする.

(a) $t=0$ における位置を示せ.

(b) 座標 x の時間 t に関するグラフの概形を示せ.

(c) $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を求めよ.

(d) $0 \leq t \leq 2\pi$ での動点 P の移動距離を求めよ.

(福井大 2013) (m20132419)

0.458 次のベクトルと行列の演算を行え.

(1) $(1\quad 2\quad 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2) $3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) ${}^t\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

(福井大 2013) (m20132421)

0.459 以下の微分方程式を解け.

(1) $e^y dx + (xe^y - 3y^2)dy = 0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x$

(福井大 2014) (m20142413)

0.460 以下の (1) および (2) の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi - 2x}$

(福井大 2014) (m20142417)

0.461 次の (1) および (2) の関数を微分せよ.

(1) $\dfrac{2x-1}{x^2}$ (2) $\cos^{-1}\dfrac{1}{x}$

(福井大 2014) (m20142419)

0.462 次の (1), (2) および (3) の関数の不定積分を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$ (2) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ (3) $\dfrac{e^{3x}}{e^x - 1}$

(福井大 2014) (m20142421)

0.463 以下の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{2}}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$ (2) $\displaystyle\int e^x\cos x dx$

(福井大 2014) (m20142423)

0.464 以下の常微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = ay$ (2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + x = \cos 2t$

(福井大 2014) (m20142425)

0.465 $t < 0$ で $f(t) = 0$ である関数 $f(t)$ のラプラス変換は，以下のように与えられる.

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

次の関数のラプラス変換を求めよ.

(1) $f(t) = e^{at}$

(2) $f(t) = \displaystyle\int_0^t \cos(t-\tau)\cos\tau d\tau$

(福井大 2014) (m20142426)

0.466 次の関数を微分せよ.

(1) $y = (x^2+2)^4$ (2) $y = \sin(3x+\pi)$ (3) $y = \sin x \cdot \cos^2 x$ (4) $y = x^{2x}$

(福井大 2015) (m20152415)

0.467 関数 $y = e^{-x}\cos x,\quad 0 \leq x \leq 2\pi$ について，以下の問に答えよ.

(1) この関数の概形を示せ.

(2) この関数と x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ.

(福井大 2015) (m20152417)

0.468 時間 t での位置が $(x = \cos t + t\sin t,\ y = \sin t - t\cos t)$ で与えられる動点 P がある.

(1) $t = 0$ における位置を求めよ.

(2) $0 \leq t \leq 2\pi$ での動点の軌跡の概形を示せ.

(3) $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を求めよ.

(4) $0 \leq t \leq 2\pi$ での動点 P の移動距離を求めよ.

(福井大 2015) (m20152418)

0.469 次のベクトルと行列の演算を行え.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (3) ${}^t\!\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$（$t$ は転置記号）

(2) $3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ -\sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}$

(福井大 2015) (m20152420)

0.470 行列 A, B, C に関して，行列式を計算しなさい．また，逆行列を，それぞれ求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(福井大 2015) (m20152423)

0.471 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin 3x| dx$　　　（必要であれば，変数変換 $3x = t$ を使用せよ.）

(福井大 2016)　　(m20162403)

0.472 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $y = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^3$　　(2) $y = \sin^3 x \cos^3 x$　　(3) $y = \dfrac{1}{e^x + 1}$　　(4) $y = \dfrac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$

(福井大 2016)　　(m20162412)

0.473 以下の微分方程式を解きなさい.

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = \cos x$

(福井大 2018)　　(m20182408)

0.474 $\dfrac{\partial}{\partial t}\cos(kx - \omega t + \theta)$ を計算せよ.

(福井大 2018)　　(m20182416)

0.475 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int (\sin 3x + \cos x)^2 dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{5x-5}} dx$

(福井大 2018)　　(m20182425)

0.476 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^2 (x^3 + x^2 + 5x + 3 + 4\pi \sin \pi x + e^{2x}) dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^3 \cos x dx$

(福井大 2018)　　(m20182426)

0.477 次のベクトルと行列の演算を行え.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$　　(2) $4\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　　(4) ${}^t\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$　　(t:転置を表す)

(5) $\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(福井大 2018)　　(m20182428)

0.478 次の定積分を求めよ.

(1) $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$　　(2) $I = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x \, dx$

(福井大 2020)　　(m20202403)

0.479 関数 $u = f(x, y)$ が以下の式で表せるとき，導関数 $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ を求めよ.

$$u = x \cos y - y \cos x, \quad x = \cos 2t, \quad y = \sin 2t$$

(福井大 2020)　　(m20202404)

0.480 関数 $f(t)$ $(t \geq 0)$ のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \ (s > 0)$$

について考える．以下の問いに答えよ．

(1) $f(t) = \cos^2 t$ $(t \geq 0)$ のラプラス変換を求めよ．　$\mathcal{L}[\cos^2 t]$

(2) $f(t) = t\sin at$ $(t \geq 0,$ 定数 $a \neq 0)$ のラプラス変換を求めよ．　$\mathcal{L}[t\sin at]$

(福井大 2020)　(m20202414)

0.481 非負の整数 n，および $-1 \leqq x \leqq 1$ を満たす任意の実数 x に対して，

$$T_n(x) = \cos nz, \quad ただし，\cos z = x \tag{1}$$

と定義する．式 (1) において，$n = 0$ とおくと

$$T_0(x) = \cos 0 = 1 \tag{2}$$

となり，$n = 1$ とおくと

$$T_1(x) = \cos z = x \tag{3}$$

となる．以下の問いに答えよ．

(a) 加法定理

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{4}$$

を利用し，$T_2(x)$ を x の多項式として表せ.

(b) $T_n(x)$ は，$T_{n+1}(x)$ と $T_{n-1}(x)$ によって

$$T_n(x) = \frac{T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)}{2x} \tag{5}$$

と表される．これを次のようにして証明したい．以下の下線部 (A)〜(C) を適当に埋めよ.

【証明】式 (1) の定義と式 (4) の加法定理を用いると

$$T_{n+1}(x) = \cos(nz + z) = \cos nz \cos z - \underline{\qquad\qquad}(\mathrm{A}) \tag{6}$$

$$T_{n-1}(x) = \cos(nz - z) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}(\mathrm{B}) \tag{7}$$

と書ける．式 (6) と式 (7) の各辺を加えると

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = \underline{\qquad\qquad}(\mathrm{C}) \tag{8}$$

が得られる．式 (8) の右辺を変形すると

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \tag{9}$$

となり，これより式 (5) が導きられる．

(c) 式 (5) に基づいて，$T_3(x)$ を x の多項式として表せ.

(d) $T_3(x)$ を用いて，$\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ の多項式として表せ.

(e) (d) の結果を利用して，次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta \tag{10}$$

ちなみに，$T_n(x)$ は第一種チェビシェフ多項式と呼ばれ，cos の n 倍角の公式の導出やチェビシェフ展開に基づく関数の近似表現等に利用される有名な多項式である．

(福井大 2020)　(m20202422)

0.482 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \left(\dfrac{4x+3}{x^2-3x+4}\right)$　　(2) $y = \sin^5 x\ \cos 5x$

(3) $y = \log(1+x^2)$　　(4) $y = e^{\sqrt{x}}$

(福井大 2020)　(m20202423)

0.483 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^e x^2 \log x dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 2x dx$

(福井大 2020)　(m20202425)

0.484 次のベクトルと行列の演算を行え.

(1) $2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$　　(2) $3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$　　(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

(福井大 2020)　(m20202427)

0.485 $\cosh x$ をマクローリン級数展開せよ．ただし，一般項も示すこと.

(福井大 2021)　(m20212403)

0.486 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $3\dfrac{d^2x}{dt^2} + 10\dfrac{dx}{dt} + 3x = 0$　　(1) $3\dfrac{d^2x}{dt^2} + 10\dfrac{dx}{dt} + 3x = 9t + 5\cos t$

(福井大 2021)　(m20212411)

0.487 (1) 複素フーリエ級数展開を用いて以下の関数が成立することを示せ

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

(2) 関数 $f(t)$ 及び $g(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega)$ 及び $G(\omega)$ と表す．このとき，以下のフーリエ変換が $F(\omega)G(\omega)$ となることを示せ.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du$$

(福井大 2021)　(m20212412)

0.488 非負の実数 θ[rad] を媒介変数とする曲線

$$\begin{cases} x = \theta\cos\theta \\ y = \theta\sin\theta \end{cases} \tag{1}$$

は「アルキメデスのらせん」と呼ばれ，その概形は図 1 に示す「蚊取り線香」に近い，図 2 のような渦巻状の曲線となる.

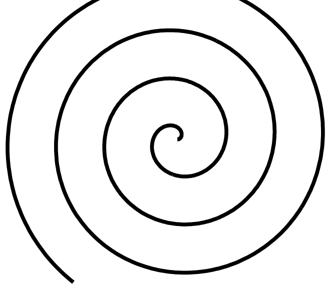


図１：蚊取り線香

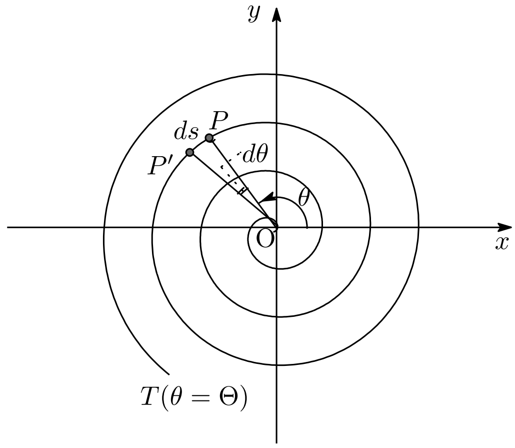


図２：「アルキメデスのらせん」

図 2 に示すように，曲線上の点 P に対して θ を微小角度 $d\theta$ だけ増加させ，点 P が P' に移動したとする．このときの $P-P'$ 間の微小な長さを ds と表すと，$\dfrac{ds}{d\theta}$ は，

$$\frac{ds}{d\theta}=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \tag{2}$$

で与えられる．以下の問いに答えよ．

(1) 式 (1) の x, y に対し，$\dfrac{dx}{d\theta}$, $\dfrac{dy}{d\theta}$ を各々求めよ．

(2) 式 (2) を利用して，$\dfrac{d\theta}{ds}$ を θ によって表せ，$\dfrac{ds}{d\theta}$ ではなく $\dfrac{d\theta}{ds}$ を求めることに注意．

(3) (2) で求めた θ の関数 $\dfrac{d\theta}{ds}$ について，グラフの概形を描きたい．$\dfrac{d\theta}{ds}$ の θ に関する 1 階導関数を用いて増減を調べ，$\dfrac{d\theta}{ds}$ を縦軸に，θ を横軸に取ったグラフの概形を示せ．

(4) 図 2 に示すように，「らせん」の内側の端点は原点 O に一致し，外側の端点 T に対する θ を $\theta=\Theta$ とおく．このとき，O から T までの曲線の長さ L を Θ によって表せ．【ヒント】L の計算過程で現れる定積分には複数の計算方法が知られており，そのひとつに $\theta=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ と置換する方法がある $\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\text{ は双曲正弦関数 } \sinh t \text{ であるので，双曲線関数を用いてもよい}\right)$.

(福井大 2021)　　(m20212419)

0.489 次の関数を微分せよ．

(1) $y=\log x(5-x)$

(2) $y=\dfrac{4x-1}{e^x}$

(3) $y=\dfrac{\sin x}{\cos x+1}$

(4) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2+2x}}$

(福井大 2021)　　(m20212420)

0.490 (1) 次の不定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-16}{e^x-4}dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}dx$

(2) 次の定積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int_6^{10} x(x-6)^2 dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} (\cos\theta+1)^2 d\theta$

(福井大 2021)　　(m20212421)

0.491 次式で表される曲線（サイクロイド）と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ.

$$x = 2(t-\sin t)$$
$$y = 2(1-\cos t)$$
$$\text{ここで, } 0 \leq t \leq 2\pi$$

(福井大 2021)　　(m20212422)

0.492 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \log\left(5\sqrt{x^2+1}+5x\right)$　　(2) $y = \dfrac{-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(3) $y = \cos\dfrac{5\pi}{x^2+5}$　　(4) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(福井大 2022)　　(m20222401)

0.493 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^2 e^{2x}\sqrt{e^x}\ dx$　　(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\ dx$

(福井大 2022)　　(m20222403)

0.494 $f(x) = 4\sin x\cdot\cos 2x+\cos x\cdot\sin 2x\ \ (0 \leq x \leq \pi)$ の最大値を求めよ.

(福井大 2022)　　(m20222404)

0.495 以下に示す行列の演算を行いなさい. ただし, 三角関数は数値に置き換えて算出すること. また, 式中の t は転置を意味する.

$$4\begin{pmatrix} \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \\ \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \\ \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \end{pmatrix}^t$$

(福井大 2022)　　(m20222406)

0.496 次式は, 単振動の運動方程式である. なお, m : 質量, k : バネ定数, x : 変位, t : 時間である.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$$

(1) 角速度 ω(rad/s) を m および k を用いて表しなさい.
なお, 上に示した運動方程式の解は $x = A\cos(\omega\cdot t)+B\sin(\omega\cdot t)$ になる.
ここに, A, B は初期値によって決まる定数である.

(2) $m=1$ (kg), $k=1$ (N/m) の場合について, $t=0$ 秒における初期値を $x=1$ (m), $\dfrac{dx}{dt}=0$ (m/s) として 単振動の運動方程式を解きなさい.

(福井大 2022)　　(m20222411)

0.497 次の定積分を求めよ,

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3-\cos 2x}\ dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\sin x\ dx$

(福井大 2022)　　(m20222414)

0.498 次の積分の値を計算せよ．

$$\iint_D \sin(x+y)\cos(x-y)dxdy\ , \qquad D=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ 0\le x+y\le\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\le x-y\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

(福井大 2022)　　(m20222416)

0.499 基本周期が 2π である関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開を考える．以下の問いに答えよ．

$$f(x)=\begin{cases}1 & \left(0<x\le\dfrac{\pi}{2}\right)\\ 0 & \left(\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{3\pi}{2}\right)\\ 1 & \left(\dfrac{3\pi}{2}<x\le 2\pi\right)\end{cases}$$

(1) 以下の積分を計算せよ．

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\ dx \quad (n\ne 0)$$

(2) 以下の積分を計算せよ．

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\ dx \quad (n\ne 0)$$

(3) 基本周期が 2π である関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開を求めよ．

(福井大 2022)　　(m20222423)

0.500 半径 a の球面の xyz 座標を媒介変数 $(\theta,\ \phi)$ で

$$\boldsymbol{r}=(x,y,z)=(a\sin\theta\cos\phi,\ a\sin\theta\sin\phi,\ a\cos\theta)$$

と表す．ただし，$0\le\theta\le\pi,\ 0\le\phi\le 2\pi$ である．以下の問いに答えよ．

(1) 以下のベクトル積

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\phi}$$

を求めよ．また，これは何を表すか答えよ．

(2) 次の積分を求め，何を表すか答えよ．

$$\iint_D\left\|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\phi}\right\|d\theta d\phi$$

ただし，$||\cdot||$ はベクトルの長さを表し，領域 D は $\theta,\ \phi$ の動く範囲，すなわち $D=\{(\theta,\ \phi\mid 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\phi\le 2\pi)\}$ である．

(3) 球面の x 座標 $x=a\sin\theta\cos\phi$ に対して，次の積分を求めよ．

$$\iint_D x\left\|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\phi}\right\|d\theta d\phi$$

(福井大 2022)　　(m20222427)

0.501 (1) 複素積分 $\displaystyle\int_C\frac{1}{z^2+4z+1}dz$ を求めよ．ここで，C は複素数平面の原点を中心とする半径 1 の円周を正の向きに 1 周する積分路とする．

(2) 実定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos\theta}d\theta$ を (1) を利用して求めよ．

(静岡大 2004)　　(m20042507)

0.502 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}$ を求めよ．

(静岡大 2006)　　(m20062501)

0.503 (1) $\displaystyle\frac{dy}{dx} = -ky + \cos \omega x$ を解け．　　(2) $\displaystyle\frac{dy}{dx} + \frac{1-y^2}{1-x^2} = 0$ を解け．

(3) $\displaystyle\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} + x^2 y^3$ を解け　（ヒント：$u = y^{-2}$ と置け）．

(静岡大 2006)　　(m20062508)

0.504 (1) $\displaystyle\frac{d^2x}{dt^2} + {\omega_0}^2 x = 0$ の一般解を求めよ．ここで，ω_0 は正の定数とする．

(2) $\displaystyle\frac{d^2x}{dt^2} + {\omega_0}^2 x = \cos(\omega t)$ の特解を求めよ．ここで，ω は正の定数であるが，特に，次の 2 つの場合に分けて特解を求めよ: (a) $\omega \neq \omega_0$ の場合 ; (b) $\omega = \omega_0$ の場合．

(静岡大 2007)　　(m20072509)

0.505 (1) 関数 $f(x) = \sin x \cos x$ の原点を中心とするテイラー級数を求めよ．

(2) 複素数 $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{14}$ を $x + iy$ の形に改めよ．（i は虚数単位）

(3) 2 変数関数 $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2$ の極値を求めよ．

(静岡大 2008)　　(m20082501)

0.506 (1) 常微分方程式 $\displaystyle\frac{dy}{dx} = xe^{x+y}$ の一般解を求めよ．

(2) 常微分方程式 $\displaystyle\frac{dy}{dx} + \frac{\cos x}{\sin x} y = \frac{1}{\cos^2 x}$ の初期条件 $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$ を満たす解を求めよ．

(静岡大 2008)　　(m20082503)

0.507 $(0, 2\pi)$ において，$f(x) = x + \sqrt{2}\cos x$ の極値を求めよ．なお，極大値・極小値の区別も明記すること．

(静岡大 2008)　　(m20082507)

0.508 以下の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x \, dx$　　(2) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dxdy$,　$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \, , \, 0 \leq x \, , \, 0 \leq y\}$

(静岡大 2009)　　(m20092504)

0.509 $y = x^{x\cos(x)}$ とするとき，$y' = x^{x\cos(x)}\{(\cos(x) - x\sin(x))\log(x) + \cos(x)\}$ が成り立つことを証明しなさい．

(静岡大 2009)　　(m20092509)

0.510 次の微分方程式の初期値問題の解 $y = y(x)$ を求めよ．

(1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y^2 \sin 2x \, \cos 3x & (x \geqq 0) \\ y(0) = \dfrac{5}{3} \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+2y}{x} & (x \geqq 1) \\ y(1) = 1 \end{cases}$

(静岡大 2011)　　(m20112507)

0.511 次の微分方程式 ① について以下の問に答えよ．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

$$xy'' + 2y' + xy = 0 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

(1) 関数 $y_1 = \dfrac{\cos x}{x}$ は，微分方程式 ① の解であることを示せ．

(2) x の関数 u について，$y = uy_1$ が微分方程式 ① の解であるとき，u は次の微分方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 2(\tan x)\frac{du}{dx} = 0$$

を満たすことを示せ．

(3) $\dfrac{du}{dx} = v$ とおくとき v を求めよ．

(4) u を求めよ．

(5) 微分方程式 ① の一般解を求めよ．

(静岡大 2011)　　(m20112509)

0.512 3 つの複素数を $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$, $\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$, $\gamma = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とする．ここで，i は虚数単位をあらわす．このとき，次の問いに答えよ．

(1) α, β, γ を複素平面上に図示せよ．

(2) α^{2011} を $x + yi$ (x, y は実数) という形にあらわせ．

(3) $\alpha^m = \beta$, $\alpha^n = \gamma$ をみたす整数 m, n があれば求めよ．

(4) 複素平面上で α, β, γ を結んでできる三角形の内角をそれぞれ a, b, c とするとき，

$$(\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)(\cos c + i\sin c)$$

を求めよ．

(静岡大 2012)　　(m20122507)

0.513 次の各微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $x\dfrac{dy}{dx} = 2y$　　(2) $\dfrac{dy}{dx}\sin x + y\cos x = x$　　(3) $(2x^2y + y^2)\,dx + (x^3 + xy)\,dy = 0$

(静岡大 2012)　　(m20122508)

0.514 次の極限値を求めなさい．

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x\sin(x) - \frac{\pi}{2}}{\cos(x)}\right)$　　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2}\right)$

(静岡大 2015)　　(m20152501)

0.515 関数 $f(x) = \cos(ax)\cos(bx)$ の第 n 次導関数は

$$f^{(n)}(x) = \frac{(a+b)^n}{2}\cos\left((a+b)x + \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{(a-b)^n}{2}\cos\left((a-b)x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

となることを示しなさい．

(静岡大 2015)　　(m20152502)

0.516 変数 (r, θ) ($r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$) から変数 (x, y) への変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

を考える．また領域 D を

$$D = \{(x, y) \quad ; \ -x \leq y \leq x\}$$

によって定義する．

(1) (x, y) が領域 D を動くとき (r, θ) が動く範囲を求めよ．また，その対応が 1 対 1 であることを示せ．

(2) 次の積分の値を上記の変数変換を用いて求めよ．

$$\iint_D \exp(-x^2 - y^2 - xy)dxdy$$

ここで積分の範囲は領域 D である．

(岐阜大 1997)　　(m19972601)

0.517 次の微分方程式を解け．

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = \cos t$$

ただし，$t = 0$ のとき，$y = e^{2\pi} + e^{\pi} + 0.1$ であり，$t = \pi$ のとき，$y = 1.9$ である．

(岐阜大 1998)　　(m19982601)

0.518 (1) 関数を $x = a\sin t$，$y = b\cos t$ とするとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(2) 次の関数の概略図を描け．

(a) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$　　(b) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$　　(c) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(3) ある曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \ (a, b > 0)$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

(岐阜大 2001)　　(m20012603)

0.519 次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $\cos^2 x$　　(2) $\dfrac{1}{a^2 - x^2}$

(岐阜大 2001)　　(m20012605)

0.520 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ によって極座標 (r, θ) を導入するとき，x, y の関数 $f(x, y)$ の x についての偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ を r および θ についての偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial r}, \dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ を用いて表せ．

(岐阜大 2003)　　(m20032603)

0.521 関数 $y = \sin 3x \cos 2x$ の不定積分を求めよ．

(岐阜大 2005)　　(m20052617)

0.522 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{9x^2 + 6}{x^3 + 2x + 1}dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin 7x \ \cos x dx$

(岐阜大 2006)　　(m20062604)

0.523 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \cos(2\pi x)dx$　　(2) $\displaystyle\int \cos^2(2\pi x)dx$

(岐阜大 2006)　　(m20062615)

0.524 次の関数について，$\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ．　$z = \sin(2x)\cos(y)$, $x = e^{-2t}$, $y = \log_e 3t$

(岐阜大 2007)　　(m20072609)

0.525 次の不定積分を以下の指示に従い計算せよ．ただし，積分定数は C とする．　$\displaystyle\int \sin x \sin 3x dx$

(1) 被積分関数 $(\sin x \sin 3x)$ を加法定理を用い，積を含まない cos 関数のみの式に書き換え，不定積分を計算せよ．

(2) 部分積分をすることで不定積分を計算せよ.

(岐阜大 2007) (m20072621)

0.526 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_x^1 y^2 e^{xy} dy \right) dx$

(岐阜大 2008) (m20082614)

0.527 y は x の関数であるとして, 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y'' + y = 0$ (2) $y'' - 7y' + 12y = 6x^2 + 5x + 18$ (3) $y'' - 4y' + 4y = \cos x$

(岐阜大 2008) (m20082616)

0.528 y は x の関数であるとする. 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + y \cos x = \sin x \cos x$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) 初期条件 $y(0) = 0$ を満たす解を求めよ.

(2) 上で求めた解 $y(x)$ の $0 \leqq x \leqq \pi$ における最大値を求めよ.

(岐阜大 2009) (m20092606)

0.529 次の (1)〜(3) の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n \, dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx$ （ヒント：極座標変換）

(岐阜大 2009) (m20092612)

0.530 次の式の値を求めよ.

(1) $\tan\theta = 1/3$ のとき. $(\sin\theta + \cos\theta)^2$ の値を求めよ.

(2) $(1 + \tan\alpha)/(1 - \tan\alpha) = 2 + \sqrt{3}$ のとき, $\cos\alpha$ の値を求めよ.

(岐阜大 2009) (m20092614)

0.531 (1) $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 4}$ とするとき, 不定積分 $\displaystyle\int f(x) dx$ を求めよ.

(2) x-y 平面において, $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $(a > 0,\ 0 \leq t \leq 2\pi)$（サイクロイド曲線）が描く曲線の長さを求めよ.

(岐阜大 2009) (m20092619)

0.532 次のパラメータ表示で与えられる xyz 空間内の曲線 C と直線 ℓ について, 以下の問いに答えよ. ただし, 空間内の二点 P, Q に対して, 二点間の距離を $\overline{PQ}$ で表す.

$$C : \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = \cos\theta + \sin\theta \end{cases} \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi) \qquad \ell : \begin{cases} x = t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

(1) P を曲線 C 上の点, Q を直線 ℓ 上の点とするとき, $\overline{PQ}^2$ を θ と t の式で表せ.

(2) P を曲線 C 上の点, Q を直線 ℓ 上の点とするとき, $\overline{PQ}$ の最小値, および, そのときの P と Q の座標を求めよ.

(岐阜大 2010)　　(m20102604)

0.533 以下の式でガンマ関数 $\Gamma(t)$ を定義する．

$$\Gamma(t)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{t-1}dx\,,\ t>0.$$

次の問に答えよ．ただし，$t>0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^t=0$ となることは証明しなくても使ってよい．

(1) $t>0$ に対して $\Gamma(t+1)=t\Gamma(t)$ となることを示せ．

(2) 自然数 n に対して $\Gamma(n+1)=n!$ となることを示せ．

(3) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$，すなわち

$$\left(\int_o^{\infty} e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx\right)\left(\int_o^{\infty} e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}dy\right)$$

を x,y の 2 変数関数の重積分で表せ．

(4) 変数 (x,y) から (r,θ) への変数変換

$$\begin{cases}\sqrt{x}=r\cos\theta,\\ \sqrt{y}=r\sin\theta\end{cases}$$

に対してヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ．

(5) 前問 (4) の変数変換を用いて (3) の重積分を計算し $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ．

(岐阜大 2014)　　(m20142601)

0.534 $a,b>0$ とする．xy 平面の第 1 象限において $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1$ が表す曲線を C とする．

また，x 軸，y 軸および C で囲まれる閉領域を A とする．以下の問に答えよ．

(1) $x=a\cos^4 t.\ y=b\sin^4 t$ とする．このとき，$\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}$ の値を求めよ．また，$\dfrac{dx}{dt}$ を t を用いて表せ．

(2) 曲線 C を $y=y(x)$ と表し，$y'(x)=\dfrac{dy(x)}{dx}$ とする．このとき，$\displaystyle\lim_{x\to a-0} y'(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} y'(x)$ を求めよ．

(3) A の概形を描け．

(4) A の面積を求めよ．

(岐阜大 2016)　　(m20162601)

0.535 $y=y(x),\ y'=\dfrac{dy(x)}{dx}$ とする．微分方程式

(E)　　$y'+y\cos x=\sin x\cos x$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) 同次方程式 $y'+y\cos x=0$ の一般解を求めよ．

(2) (E) の一般解を求めよ．

(3) (E) の解で，条件 $y(0)=0$ を満たすものを求めよ．

(4) (3) で求めた y について，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{y(x)}{x^2}$ を求めよ．

(岐阜大 2016)　　(m20162604)

0.536 $y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 微分方程式

$$(E_1)\quad y' - yx = 0$$

の一般解を求めよ．

(2) 微分方程式

$$(E_2)\quad y' - yx\cos(x^2) = 0$$

の一般解を求めよ．

(3) e を自然対数の底として，α, β を実数とする．微分方程式

$$(E_3)\quad y' - \alpha y = e^{\beta x}$$

の一般解を求めよ．

(4) γ を実数とする．微分方程式

$$(E_4)\quad y' - yx(\gamma + \cos(x^2)) = 0$$

の解 $y(x)$ で初期条件 $y(0) = 1$ を満たすものを求めよ．$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}$ の収束・発散を判定せよ．

(岐阜大 2022)　　(m20222602)

0.537 $\sin 2\alpha$ を $\sin\alpha$ と $\cos\alpha$ を用いて表せ.

(豊橋技科大 1997)　　(m19972701)

0.538 $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ のとき, $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(豊橋技科大 1997)　　(m19972702)

0.539 $0 \leqq x \leqq \pi$ で定義された関数 $f(x)$ が以下のように与えられている.

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ -1 & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi\right) \end{cases}$$

$f(x)$ を $g(x)$ で近似するとき，近似誤差 I は以下の積分と考えるものとする.

$$I = \int_0^{\pi} \bigl(f(x) - g(x)\bigr)^2\,dx$$

(1) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx$ を計算せよ.

(2) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} (\cos x)^2\,dx$ を計算せよ.

(3) 定数 a を用いて， $g(x) = a\cdot\cos x$ で近似するとき，誤差 I を計算せよ.

(4) $g(x) = a\cdot\cos x$ で近似するとき，誤差 I を最小にする a を計算せよ.

公式 $\cos a\cdot\cos b = \dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$ を利用してもよい.

(豊橋技科大 1997)　　(m19972705)

0.540 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は次の式で表される.

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{1}{2!}f^{(2)}(0)x^2 + \cdots \frac{1}{n!}f^{(n)}x^n + \cdots$$

ただし， $f^{(n)}(0)$ は $x = 0$ での n 階微分である．このとき，次の関数のマクローリン展開を，$n = 2$ まで表せ.

(1) $f(x) = \sin x$

(2) $f(x) = \cos x$

(豊橋技科大 1997） (m19972706)

0.541 $\sin A + \cos A = \sqrt{2}$ のとき，$\sin A \cos A$ および $\sin^4 A + \cos^4 A$ の値を求めよ．

(豊橋技科大 1998) (m19982702)

0.542 直線上を運動する点 P の出発してから t 秒後の位置が，$x = e^{-\pi t}\cos \pi t$ で表されるとき，出発してから 3 秒後の速度を求めよ．

(豊橋技科大 1998） (m19982704)

0.543 以下の問いに答えよ．

(1) $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\, d\theta$ とする．この式の右辺に部分積分の公式を適用することにより， n が 2 以上の整数ならば $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ なる関係が成立することを示せ．

(2) 解答用紙中に記したア～エのうち，次の媒介変数表示で与えられる曲線
$x = a\cos^3\theta$ ， $y = a\sin^3\theta$ （ただし， $a > 0$ ）の概略を描いた図として最も適当なものを選び，図の記号ア，イ，ウ，エのいずれかに○を付けよ．(図略）

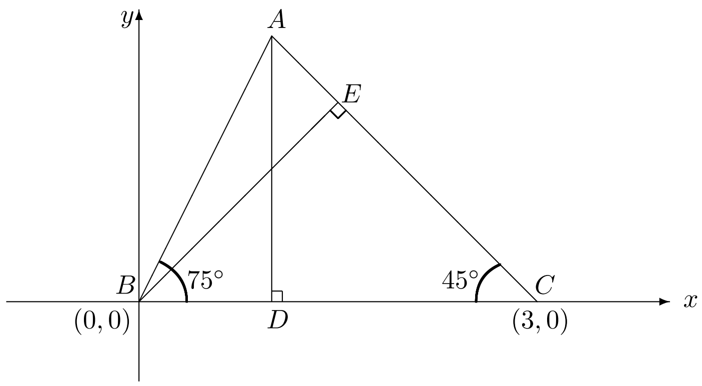
(3) また，この曲線によって囲まれる図形の面積 S を求めよ．なお，問 (1) で求めた関係を利用すると計算が容易になる．

(豊橋技科大 1998） (m19982707)

0.544 図に示す三角形 ABC に関して次の各問に答えよ．

(1) $\sin 75^\circ$ ， $\cos 75^\circ$ を加法定理を用いて求めよ．

(2) 点 C の座標を $(3, 0)$ ， 点 A ， B より辺 BC , AC に下ろした垂線を AD ， BE とする．このとき，辺 AE ， EC の長さを求めよ．



(3) 三角形 ABC の外接円の中心の座標を求めよ．

(豊橋技科大 1999） (m19992702)

0.545 以下に示す関数について次の各問に答えよ．

$$f(x) = \cos x + x\sin x$$

(1) 関数 $f(x)$ を微分せよ．

(2) $[-2\pi\,,\,2\pi]$ の区間における関数 $f(x)$ の極値を求め，増減表を作成せよ．また，この関数の概形を描け．

(3) $[-2\pi\,,\,0]$ および $[0\,,\,2\pi]$ の区間における関数 $f(x)$ のそれぞれの最小点を結ぶ，直線の式 $g(x)$ を求めよ．そして，この直線 $g(x)$ と関数 $f(x)$ で囲まれる領域の面積を求めよ．

(豊橋技科大 2001) (m20012706)

0.546 方程式 $\cos^2 x + \sin x + a = 0$ について x の範囲を $0 \leq x < 2\pi$ とする．

(1) この方程式を満たす実数 a の範囲を求めよ．

(2) 実数 a の値に対する方程式の解の個数を調べよ．

(豊橋技科大 2004)　(m20042704)

0.547 xy 直交座標系の点列 (x_i, y_i), $i = 1, \cdots, N$ に対し，各点からの垂直距離の 2 乗和が最小となるような直線を求めたい．次の各問いに答えよ．

(1) 次の文章中の空欄 $\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{コ}}$ に適当な数式を入れよ．
各点に単位質量を置いたときの重心を G とすると，その座標は

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} \\ \boxed{\text{イ}} \end{pmatrix} \tag{1}$$

となる．xy 座標系に対し，この重心 G を原点として，角度 θ で回転させた uv 座標系を考える．このとき

$$\begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \tag{2}$$

とおけば，(x_i, y_i) と (u_i, v_i) との関係は θ を用いて

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}} \\ -\boxed{\text{エ}} & \boxed{\text{ウ}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \end{pmatrix} \tag{3}$$

で与えられる．もし求めたい直線を u 軸にとれば，問題は

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^{N} v_i^2 \tag{4}$$

で定義される $J(\theta)$ を最小にする角度 θ を求めることに等しい．
式 (3) の v_i を θ で微分し，u_i を用いて表すと

$$\frac{\partial v_i}{\partial \theta} = \boxed{\text{オ}} \tag{5}$$

となるから，式 (4) を θ で微分して 0 とおけば

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = -2 \sum_{i=1}^{N} u_i v_i = 0 \tag{6}$$

を得る．この式 (6) に，式 (3) を代入することにより，

$$\boxed{\text{カ}} \sum_{i=1}^{N} x_i' y_i' = \boxed{\text{キ}} \sum_{i=1}^{N} ({x_i'}^2 - {y_i'}^2) \tag{7}$$

となり，次式を得る．

$$\frac{2\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}} = \frac{2\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i'}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} ({x_i'}^2 - {y_i'}^2)} \tag{8}$$

式 (8) の左辺は，倍角の公式により

$$\frac{2\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}} = \boxed{\text{ク}} \tag{9}$$

と書けるから，式 (8) は

$$\boxed{\text{ク}} = \frac{2\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i'}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} ({x_i'}^2 - {y_i'}^2)} \tag{10}$$

となる．よって，式 (10) の右辺を計算して，式 (4) を最小化する θ を求めればよい．

式 (4) を最小化する θ を $\hat{\theta}$ とし，求めたい直線が重心 G を通ることを用いれば，直線の式は

$$y = \tan\hat{\theta}\left(x - \boxed{\quad ケ \quad}\right) + \boxed{\quad コ \quad} \tag{11}$$

として与えられる．

(2) 4 点 $(-1, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$ があるとする．

(a) これらの 4 点に単位質量を置いたときの重心 G の座標を求めよ．

(b) これらの 4 点に関し，$\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i'$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} {x_i'}^2$ および $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} {y_i'}^2$ を求めよ．

(c) これらの 4 点からの垂直距離の 2 乗和が最小となる直線の傾き θ を求めよ．ただし，分数は既約分数とし，三角関数およびその逆関数はそのままでよい（例：$\cos\dfrac{7}{4}\pi$ や $\sin^{-1}\dfrac{1}{3}$ など）．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062710)

0.548 不定積分 $I_n = \displaystyle\int \cos^n t\,dt \quad (n = 0, 2, 4, \cdots)$ とする．以下の問いに答えよ．ただし，積分定数は省略すること．

(1) I_0 と I_2 を求めよ．

(2) $I_4 = \dfrac{1}{4}\left(\sin t \cos^3 t + 3I_2\right)$ であることを示せ．

(3) $n \geq 2$ のとき，I_n を I_{n-2} を用いた式として求めよ．

(4) 定積分 $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt \quad (n = 0, 2, 4, \cdots)$ を求めよ．

(豊橋技科大 2008)　　(m20082703)

0.549 媒介変数 t を用いて表される次の曲線について, 以下の問いに答えよ.

$$x = \sqrt{3}\,\sin t$$
$$y = \sqrt{3}\,\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$$

ただし, $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{3}$ である.

(1) $t = 0,\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{3}$ のそれぞれに対応する x–y 座標上の点 A, B および C の座標を示せ.

(2) この曲線は点 A, B および C を通る楕円の一部を表している. この曲線と x 軸, y 軸の正の部分で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

(豊橋技科大 2010)　　(m20102704)

0.550 (1) 次の不定積分を解け.

$$\int \frac{3x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$$

(2) $x = 2(\theta - \sin\theta)$, $y = 1 - 2\cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ で表される曲線について以下の問いに答えよ.

(a) $y \geqq 0$ となる θ の範囲を求めよ.

(b) $y \geqq 0$ の範囲の曲線と x 軸とで囲まれた部分の面積 S を求めよ.

(豊橋技科大 2011)　　(m20112706)

0.551 次の不定積分を求めよ.

$$\int e^x \cos \pi x dx$$

(豊橋技科大 2013)　　(m20132702)

0.552 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満足するベクトル $\boldsymbol{x}$ の大きさ（長さ）$|\boldsymbol{x}|$ を求めよ．

(3) A の固有値 λ_1 と λ_2 を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leqq \lambda_2$ とする．

(4) n を正の整数 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とするとき，A^n を求めよ．

(豊橋技科大 2013)　　(m20132705)

0.553 $x-y$ 平面上の 2 つの曲線 $y = f(x) = a - \cos 2x$ と $y = g(x) = 2\sqrt{2}\sin x$ に関する以下の問いに答えよ．ただし，a は定数である．

(1) $f(x)$ と $g(x)$ の導関数 $f'(x)$ と $g'(x)$ を求めよ．

(2) $f'(x) = g'(x)$ となる x を求めよ．ただし，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(3) 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において接するとき，a の値を求めよ．

(4) (3) のように 2 つの曲線が接するとき，$x \geqq 0$ かつ (3) の接点までの範囲で y 軸と 2 つの曲線が囲む面積を求めよ．

(豊橋技科大 2015)　　(m20152701)

0.554 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \cos^2 x dx$　　(2) $\displaystyle\int x\cos x dx$

(豊橋技科大 2017)　　(m20172704)

0.555 xy 平面上の曲線 $y = \cos(x - \pi) + 1$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ と直線 $y = 0$ に囲まれた図形 D について，次の問いに答えよ．

(1) D の面積 S を求めよ．

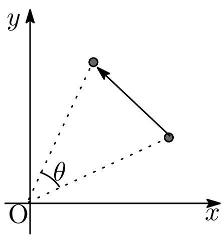
(2) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

(3) D を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_2 を求めよ．

(豊橋技科大 2017)　　(m20172705)

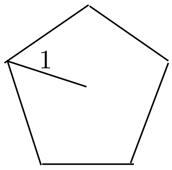
0.556 xy 平面上において，原点 O を中心に反時計回りに θ の回転を行う一次変換は下図の行列 A_θ で表される．この行列を利用して三角関数の計算を行うとともに，図形の面積の値を求めたい．以下の問いに答えよ．

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



(1) ${A_\theta}^2$, ${A_\theta}^3$ を計算し，$\cos\theta$, $\sin\theta$ で表せ．また，$A_{n\theta} = (A_\theta)^n$ であることを利用して $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$, $\cos 3\theta$, $\sin 3\theta$ を $\cos\theta$, $\sin\theta$ で表せ．

(2) $\sin\dfrac{2\pi}{5}$ の値を α とおく．半径 1 の円に内接する正五角形の面積を α を用いて表せ.

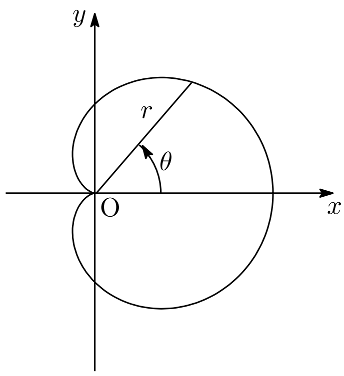


(3) (1) の結果を用いて $\sin\dfrac{\pi}{10}$, $\cos\dfrac{\pi}{10}$ の値をそれぞれ求めよ.

(4) 半径 1 の円に内接する正五角形の面積の値を求めよ.

(豊橋技科大 2019)　　(m20192703)

0.557 極方程式 $r = 1 + \cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ で表される曲線について，以下の問いに答えよ.



(1) 曲線上の点の座標 (x, y) を，θ を用いて表せ.

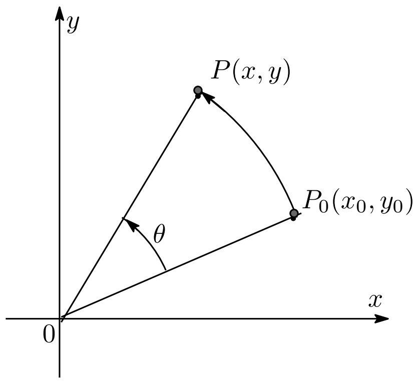
(2) 曲線上の $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ における点を P とする．点 P における曲線の接線の方程式を，x と y を用いて表せ.

(3) 曲線に囲まれた領域の面積を求めよ.

(4) 曲線の全長を求めよ.

(豊橋技科大 2020)　　(m20202703)

0.558 図のように，xy 平面上の点 $P_0(x_0, y_0)$ を原点 O のまわりに θ だけ回転した点 $P(x, y)$ に移す座標変換は次の線形変換により表される．また，このときの変換行列を $A(\theta)$ と定義する．以下の設問に答えよ.



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) xy 平面上の点を x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍する変換行列 B を a と b を用いて表せ.

(2) xy 平面上の点を原点 O のまわりに $(-\theta)$ 回転し，その後 x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍し，最後に原点 O のまわりに θ 回転する線形変換を考える．このときの変換行列 C を a, b, $\cos\theta$ および $\sin\theta$ を用いて表せ.

(3) 次に示す変換行列 D の固有値を求め，それぞれの固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルをすべて求めよ.

$$D = \begin{pmatrix} \dfrac{11}{4} & \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{4} & \dfrac{9}{4} \end{pmatrix}$$

(4) 変換行列 C が変換行列 D に等しいとき，a, b および θ の値を求めよ．ただし，θ は $0 \leq \theta \leq \pi/2$ の範囲にあるとする.

(豊橋技科大 2021)　　(m20212701)

0.559 関数 $f(x, y) = e^{ax}\cos by$ について，次の問いに答えよ．　ただし，a, b は実数の定数とする.

ア．2 次偏導関数 f_{xx}，f_{xy}，f_{yy} を求めよ.

イ．$f(x, y)$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ.

(豊橋技科大 2022)　　(m20222702)

0.560 $\tan x = t$ とするとき，$\sin 2x$, $\cos 2x$ を t で表わせ．次に，dx を t 及び dt で表わせ.

(名古屋大 2000)　　(m20002801)

0.561 次の関数のすべての極値を求め，グラフの概形をかけ.

(1) $y = -\cos 2x + 2\cos x \qquad (0 \leq x \leq 2\pi)$

(2) $y = e^{1-x^2}$　　(3) $y = x^3 e^{-x}$

(名古屋大 2002)　　(m20022801)

0.562 以下の常微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2} + 3\dfrac{dy(x)}{dx} + 2y(x) = 0$　　(2) $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2} + y(x) = \cos x$

(名古屋大 2005)　　(m20052804)

0.563 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x^2+2x}{x^3+3x^2-x-3}\,dx$ を求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \pi(x^3+x)\cos\left\{\frac{\pi}{4}(x^2+1)\right\}dx$ を求めよ.

(名古屋大 2006)　　(m20062803)

0.564 次のサイクロイド曲線に対して，以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases} \qquad (a > 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

(1) 曲線の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(2) $\theta = \pi$ における接線の方程式を求めよ.

(3) 曲線を x 軸のまわりに回転させるときにできる立体の体積を求めよ．なお，次の公式を用いてもよい．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\,\dfrac{\pi}{2} & (n:\text{偶数}) \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n:\text{奇数}) \end{cases}$$

ただし，$n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots 2 & (n:\text{偶数}) \\ n(n-2)(n-4)\cdots 1 & (n:\text{奇数}) \end{cases}$

(名古屋大 2008)　　(m20082802)

0.565 以下の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx\,\cos nx\,dx$　（ m, n は負でない整数 ）

(2) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$　（ ヒント：$x=\tan\theta$とおけ．また，$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$である．）

(名古屋大 2011)　　(m20112803)

0.566 次の不定積分を求めよ．　$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^3 x}dx$

(名古屋大 2016)　　(m20162804)

0.567 三次元ユークリッド空間において，点 O を原点とし正規直交ベクトルの組 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3(=\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)$ を基底とする座標系 E がある．また，点 P があって，点 O から点 P までの位置は実変数 t に関するベクトル関数 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PO}}(t)$ で表される．座標系 E を用いて表した $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PO}}(t)$ を変数 t に関して 2 階微分すると $\sin(t)\boldsymbol{e}_1-\cos(t)\boldsymbol{e}_2$ となった．なお，$t=0$ のとき，座標系 E を用いて表した $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PO}}(t)$ の変数 t に関する 1 階微分の値は $-\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_3$ であり，また，$t=0$ のとき $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PO}}(0)$ の値は $\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$ である．　このとき，以下の設問に答えよ．

(1) ベクトル関数 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PO}}(t)$ を求めよ．

(2) 正規直交ベクトルの組 $\boldsymbol{b}_1=\cos(t)\boldsymbol{e}_1+\sin(t)\boldsymbol{e}_2$，　$\boldsymbol{b}_2=-\sin(t)\boldsymbol{e}_1+\cos(t)\boldsymbol{e}_2$，　$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{e}_3$ がある．また，ある点 Q があって，点 P から点 Q までの位置を表すベクトル関数 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{QP}}(t)$ は $\boldsymbol{r}_{\mathrm{QP}}(t)=5t\boldsymbol{b}_1+7t\boldsymbol{b}_2$ である．

(a) 座標系 E を用いて表したベクトル $\boldsymbol{b}_1$ と $\boldsymbol{b}_2$ について，変数 t に関する 2 階微分をそれぞれ求めよ．得られたベクトルは基底としてベクトル $\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$ を用いて表せ．

(b) 点 O から点 Q までの位置を表すベクトル関数を $\boldsymbol{r}_{\mathrm{QO}}(t)$ とおく．　座標系 E を用いて表した $\boldsymbol{r}_{\mathrm{QO}}(t)$ の変数 t に関する 2 階微分を求めよ．得られたベクトルは基底としてベクトル $\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$ を用いて表せ．

(名古屋大 2017)　　(m20172806)

0.568 互いに直交する三つの単位ベクトル $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ による正規直交座標系において，

曲線 C を $\boldsymbol{r}(t)=\cos t\,\boldsymbol{i}+\sin t\,\boldsymbol{j}+2t\,\boldsymbol{k}$　$(0\leqq t\leqq\pi)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{r}(t)$ および $\boldsymbol{k}$ に直交する単位ベクトル $\boldsymbol{u}(t)$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{k}$ および設問 (1) で求めた $\boldsymbol{u}(t)$ の三つのベクトルに囲まれる 4 面体の体積を求めよ．

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=x\,\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{j}+z\cos z\,\boldsymbol{k}$ を考える．ベクトル場 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ の曲線 C 上の線積分を求めよ．

(名古屋大 2022)　　(m20222802)

0.569 (1) 二次元平面上の第一象限において $0 \leq x^2 + y^2 \leq R$ によって定められる部分を A とする．次の A 上での重積分を求めよ． $a > 0$ とする．

$$\iint_A e^{-(ax)^2-(ay)2} dx\, dy$$

ただし，次の変数変換を用いて計算を行うこと．

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

(2) (1) で求めたことを用いて次の積分を求めよ．

$$\int_0^{+\infty} e^{-(ax)^2} dx$$

(名古屋工業大 1999)　　(m19992904)

0.570 関数 $f(x) = e^{\sin x}$ のマクローリン展開を次の指示に従って計算しなさい.

(1) $f'(x)$ と $f(x)$ との関係を導きなさい. その関係式に対してライプニッツの公式を適用し, $f^{(n+1)}(x)$ を $f^{(k)}(x)$ $(0 \leq k \leq n)$ を用いて表しなさい. ただし, n は任意の自然数とし, 等式 $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ を用いてもよい.

(2) $f(x)$ のマクローリン展開を x^5 の項まで求めなさい. ただし剰余項を求める必要はない.

(名古屋工業大 2010)　　(m20102903)

0.571 (1) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ と置くとき，t を用いて $\cos x$ を表せ．また $\dfrac{dx}{dt}$ を t で表せ.

(2) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ と置換して定積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi/3} \frac{1}{5 + 4\cos x} dx$ の値を求めよ.

(名古屋工業大 2018)　　(m20182902)

0.572 関数 $f(x, y) = \cos x + \cos y + \cos(x - y)$ について，3 点

(i) $(x, y) = (0, 0)$,　　(ii) $(x, y) = \left(\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{2\pi}{3}\right)$,　　(iii) $(x, y) = (\pi, 0)$

は，$f_x(x, y) = 0,\ f_y(x, y) = 0$ を満たす．このとき各点で $f(x, y)$ が極値を取るかどうかを判定せよ. また，極値を取る場合には極値を求めよ.

(名古屋工業大 2018)　　(m20182903)

0.573 関数 $y = \sin x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と $y = \cos x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ に対して，その逆関数をそれぞれ $\mathrm{Sin}^{-1}x$, $\mathrm{Cos}^{-1}x$ と書く．そのとき次の方程式を解け.

$$\mathrm{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{15}}{4} + \mathrm{Cos}^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3} = \mathrm{Cos}^{-1}x$$

(名古屋工業大 2019)　　(m20192901)

0.574 関数 $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2 + 1}$ に対し，$f(x)$ のマクローリン展開を x^4 の項まででで打ち切って得られる高々4 次の多項式 $g(x)$ を求めよ.

(名古屋工業大 2020)　　(m20202901)

0.575 (1) 次の不定積分を求めよ.　$\displaystyle\int \frac{dx}{3 + \cos x}$

(2) 次の広義積分が収束するかどうか判定せよ.　$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5 + 1}}$

(名古屋工業大 2020)　　(m20202902)

0.576 次の関数 $f(x,y)$ および $g(x,y)$ が原点 $(0,0)$ において極値をとるかどうかを，それぞれ判定せよ．なお，極値をとる場合については極大・極小の区別を明示して判定すること．

$$f(x,y) = x^2y + 3x^2 - 5xy + 2y^2$$
$$g(x,y) = (1 + x^2 - y^2)\cos(3x - 2y)$$

(名古屋工業大 2020)　　(m20202903)

0.577 関数 $f(x) = \sin\left(\mathrm{Cos}^{-1}x\right)$ の増減を調べ，極値を求めよ．ただし，$y = \mathrm{Cos}^{-1}x$ の値域は $0 \leqq y \leqq \pi$ である．

(名古屋工業大 2022)　　(m20222901)

0.578 2回偏微分可能な関数 $f(x,y)$ に対して，$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ と定義する．

(1) $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ 及び $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ 及び $\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ を求めよ．

(3) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ が成り立つことを示せ．

尚，導出の過程で次の公式を用いて良い．

【公式】$z = f(x,y)$ として，関数 $x = x(u,v), y = y(u,v)$ がいずれも偏微分可能ならば，

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

が成り立つ．　（愛知県立大 2000）　　(m20003001)

0.579 次の関数の不定積分を求めなさい．　$y = \cos^2 x$

(三重大 2003)　　(m20033104)

0.580 空間ベクトル $\boldsymbol{a} = (3, 2, -1)$, $\boldsymbol{b} = (4, 1, 2)$ について，以下の値を求めよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$

(2) ベクトル積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を隣りあう2辺とする平行四辺形の面積 S

(三重大 2003)　　(m20033109)

0.581 次の不定積分を求めなさい．ただし，e は自然数の底，ω は実定数とする．

$$\int e^x \cos\omega x dx$$

(三重大 2005)　　(m20053108)

0.582 以下の (1)～(3) の設問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log_e x}{x^2}dx$ 　の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta}{\sin\theta + \cos\theta}d\theta$ 　の値を求めよ．

(3) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

$$f(x) = 2 \cdot x - \int_0^{\pi} f(t) \cdot \cos t \cdot dt$$

(三重大 2005)　　(m20053112)

0.583 $f(x) = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x + x$ が $x = \pi/3$ で極大値をとる. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) 係数 a, b の満足する条件を求めよ.

(2) この極大値のとりうる範囲を求めよ.

(三重大 2005) (m20053114)

0.584 円に内接する四角形 $ABCD$ があり, $AB = 4$, $BC = 3$, $CD = 2$, $DA = 1$ のとき, 次の問に答えよ.

(1) $\cos A$ の値を求めよ.

(2) 四角形 $ABCD$ の面積を求めよ.

(三重大 2005) (m20053115)

0.585 (1) 3 次元空間において, 直線

$$l_1 \ : \ \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-2}{3}$$

および点 $P(0,1,2)$ を含む平面の式を求めよ.

(2) l_1 および原点 $O(0,0,0)$ を含む平面の式を求めよ.

(3) この二つの平面が成す角を θ とするとき, $\cos\theta$ の値を求めよ. ただし, $\theta \leq 90$°とする .

(三重大 2005) (m20053116)

0.586 次の不定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \left(x^2 + 2x + 3 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} \right) dx$

(2) $\displaystyle\int \{\sin(\omega t + a) + \cos(\omega t + b)\}\, dt$ ただし, ω, a, b は定数である.

(3) $\displaystyle\int \sin^3\theta \ d\theta$

(三重大 2006) (m20063101)

0.587 平面極座標系 (r, θ) において $r = \dfrac{1}{1 + \varepsilon\cos\theta}$ (ただし, ε は 0 または正の整数)
と表される曲線がある. 以下の問いに答えよ.

(1) この曲線の式をデカルト直交座標系 (x, y) で表せ.

(2) 定数 ε が以下の値のときの曲線の名称を答えよ.

(a) $\varepsilon = 0$ (b) $0 < \varepsilon < 1$ (c) $\varepsilon = 1$ (d) $\varepsilon > 1$

(三重大 2006) (m20063102)

0.588 空間ベクトル $\boldsymbol{m} = (1, -3, 1)$ と $\boldsymbol{n} = (3, 2, -2)$ について, 以下の問いに答えなさい.

(1) $\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$ の値を求めなさい.

(2) $\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の面積を求めなさい.

(3) 点 $A = (1, 4, 0)$ を通り, $\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ に平行な平面の方程式を求めなさい.

(三重大 2006) (m20063110)

0.589 以下の関数を x で微分せよ.

(1) a^x (2) xa^x (3) $\dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ (4) $\displaystyle\int_0^x (x\cos t - \sin t)dt$

(三重大 2007) (m20073107)

0.590 次の関数 $f(x) = \begin{cases} c\cos x & \left(|x| \leq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \left(|x| > \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ が確率密度になるような定数 c の値を求めよ.　(2) その分布の分布関数を求めよ.

(3) その分布の平均を求めよ.　(4) その分布の分散を求めよ.

(三重大 2007)　(m20073116)

0.591 次の (1) から (3) の微分方程式を，それぞれ与えられた初期条件のもとで解きなさい.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 3y$ （初期条件は $x = 0$ のとき $y = 5$）

(2) $\dfrac{dy}{dx} = 2\dfrac{y}{x}$ （初期条件は $x = 1$ のとき $y = 3$）

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \cos(x + y)$ （初期条件は $x = 0$ のとき $y = 0$）

(三重大 2009)　(m20093105)

0.592 近似式について，以下の問いに答えよ.

(1) $\alpha << 1$ が成り立つ場合，$(1 + \alpha)^3 \approx 1 + 3\alpha$ と近似できる理由を述べよ.

(2) $\cos(\theta + \triangle\theta)$ を θ の周りで，$\triangle\theta^5$ までテーラー展開せよ.

(3) 上記の展開式の 1 次 $(\triangle\theta)$ までを利用して，$\cos(61^\circ)$ の近似値を求めよ．ただし，テーラー展開内の θ はラジアン表記であることに留意せよ.

(三重大 2009)　(m20093109)

0.593 指示に従って導関数を求めなさい.

(1) $y = \left(e^x + e^{-x}\right)^2$ を x で微分せよ．e は自然対数の底を表す.

(2) $y = x \cdot \sqrt{\dfrac{a - x}{a + x}}$ を x で微分せよ．a は定数を示す.

(3) $x = \sin t,\ y = \cos 2t$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(三重大 2011)　(m20113101)

0.594 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x$ において，初期条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$（ただし，$y'(x) \equiv dy(x)/dx$）を満たす解を求めよ.

(三重大 2011)　(m20113107)

0.595 ベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x\,,\ A_y\,,\ A_z)$ とベクトル $\boldsymbol{B} = (B_x\,,\ B_y\,,\ B_z)$ が与えられている．以下の問に答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ によって構成される平行四辺形の面積を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ がなす角度を θ とした場合に，$\cos\theta$ の値を求めよ.

(三重大 2012)　(m20123103)

0.596 xy 平面上の曲線 $r = (1 + \cos\theta)$ の概形を描け．またこの曲線の全長を求めよ．ただし r は動径，θ は r が x 軸となす角で $-\pi \leq \theta \leq \pi$ とする.　(三重大 2012)　(m20123110)

0.597 次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{x+1}{x\sqrt{2x+1}}\,dx \qquad\qquad \int x\cos^2 x\,dx$$

(三重大 2012)　　(m20123112)

0.598 地上から角度 α の方向に初速度 v_0 で投げ上げた物体の t 秒後の位置は，投げ上げた地点を原点にとり，物体の運動する曲線を含む平面上で，地面上に x 軸，鉛直方向に y 軸をとると，

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha$$
$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

で与えられる．この時の以下の設問に答えよ．ただし，g は重力の加速度である．

(1) この物体は，どのような曲線を描いて運動するか，軌跡の式を示して説明せよ．

(2) この物体が最高点に達した時点と地面に着いた時点について，両者の速度と方向を求め，両者の関係を説明せよ．

(三重大 2012)　　(m20123115)

0.599 原点を O とする 3 次元直交座標系上に，点 $A(0,1,2)$ と点 $B(3,3,0)$ がある．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\angle AOB = \theta$ として，$\cos\theta$ を求めよ．

(2) 線分 $\overline{AB}$ の長さを求めよ．

(3) 3 点 O, A, B を通る平面の法線ベクトルを求めよ．ただし，正規化しなくて良い．

(4) $\triangle AOB$ の面積を求めよ．

(三重大 2013)　　(m20133101)

0.600 y の x に関する 1 階微分を y' で表すとき，微分方程式

$$y' + 3y = \cos 2x$$

を初期条件 $y(0) = 1$ のもとで解きなさい．

(三重大 2013)　　(m20133106)

0.601 微分可能な関数 $f(x)$ が，$f(x) = \cos^2(x) + \displaystyle\int_0^x f(t)\{\sin(x)\cos(t) - \sin(t)\cos(x)\}\,dt$ を満たすとき，以下の問に答えなさい．

(1) 与式の両辺を微分して $f'(x)$ を求めなさい．

(2) $f''(x)$ を求めなさい．

(3) $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$ をそれぞれ求めなさい．

(4) 問 (1)〜(3) の結果を用いて，$\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx$ を求めなさい．

(三重大 2014)　　(m20143101)

0.602 xyz 空間に 3 点 $O(0,0,0)$，$A(1,1,2)$，$B(3,4,3)$ がある．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $\angle AOB = \theta$ としたとき，$\cos\theta$ を求めなさい．

(2) $\triangle OAB$ の面積を求めなさい．

(3) 平面 OAB の方程式を求めなさい．

(三重大 2014)　　(m20143103)

0.603 次の関数を微分せよ．

(1) $y=(3x-1)^3$　　(2) $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$

(3) $y=\log_e\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$　　(4) $y=\dfrac{2e^x+1}{e^x+1}$

(三重大 2014)　　(m20143106)

0.604 以下の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int\frac{(x^2+1)^2}{x^3}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$

(3) $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$　ただし $|x|<a,\ a>0$　　(4) $\displaystyle\int\sinh x\,dx$

(三重大 2015)　　(m20153104)

0.605 3 次元直交座標系の xyz 空間に点 A$(0,\ 1,\ 1)$，点 B$(-a,\ 0,\ 1)$，点 C$(a\cos t,\ a\sin t,\ 0)$ がある．ただし，a は正の実数で，$0\leqq t<2\pi$ である．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $\angle ACB=\theta,\ t=\pi$ とした場合，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ となる a を求めなさい．

(2) (1) の条件において，$\triangle ABC$ の面積を求めなさい．

(3) $\triangle ABC$ の重心を G とする．点 C について t を変化させたとすると，$\overrightarrow{AG}$ と $\overrightarrow{AC}$ が垂直となるような a がただ一つ決まる場合の $\cos t$ と $\sin t$ を求めよ．

(三重大 2016)　　(m20163102)

0.606 次の関数を微分せよ．

(1) $y=\dfrac{\sin x-x\cos x}{x\sin x+\cos x}$　　(2) $y=\sqrt{x^2+3x+2}$　　(3) $y=x^{\log_e x}$

(三重大 2016)　　(m20163109)

0.607 xy 平面上のサイクロイドは，θ をパラメータとして

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta)\\ y=a(1-\cos\theta)\end{cases}$$

で与えられる．ただし，a は正の定数である．この曲線の $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ 部分の長さを求めよ．

(三重大 2016)　　(m20163114)

0.608 (1) 次の関数の不定積分を求めなさい．

$\sin 3x\cos 2x$

(2) 次の曲線と y 軸とで囲まれた部分を y 軸周りに回転してできる回転体の体積を求めなさい．

$y=-3x^2+12\quad(0\leqq x\leqq 2)$

(三重大 2017)　　(m20173103)

0.609 定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}2e^x\cos x dx$ を計算しなさい．

(三重大 2017)　　(m20173107)

0.610 次の関数を微分せよ．

(1) $y=\dfrac{4\sqrt[4]{x}-2x^{-2}+x}{3x}$　　(2) $y=\dfrac{1}{\cos 2x}$　　(3) $y=\sqrt{x\sqrt{x}}$

(三重大 2017)　　(m20173109)

0.611 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+y=\cos 2x$ の一般解を求めよ．

(三重大 2017)　　(m20173117)

0.612 三角関数について，以下の問いに答えよ．ただし，n は自然数である．
この際，オイラーの公式 ($e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$) を用いても良い．ただし，$i$ は虚数単位である．

(1) $\sin(2\theta)$ および $\cos(2\theta)$ を $\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いて表現せよ．

(2) $\sin(3\theta)$ および $\cos(3\theta)$ を $\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いて表現せよ．

(3) $\sin(4\theta)$ および $\cos(4\theta)$ を $\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いて表現せよ．

(4) $\cos(10\theta)$ を $\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いて表現せよ．

(5) $\cos(n\theta)$ は，$\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いてどのように表現されるか推定せよ．

(三重大 2018)　　(m20183102)

0.613 次の関数を微分せよ．

(1) $y = 5^{-2x}$　　(2) $y = \sin^4 x \cos^4 x$　　(3) $y = x^{\log x}$

(4) $y = \dfrac{(x-1)\cdot\sqrt[3]{3x+1}}{\sqrt{(2x+5)^3}}$　　(5) $y = \log_a(2x^2-4)\quad (a>0,\ a\neq 1)$

(三重大 2018)　　(m20183106)

0.614 以下の設問 (1) から (3) に答えよ．

(1) $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx,\quad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx$ とすると，$A = B$ であることを示せ．

(2) (1) の結果を利用して A の値を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x}dx$ の値を計算せよ．

(三重大 2018)　　(m20183110)

0.615 (1) 次の行列 A の行列式 $|A|$ を求めよ．また行列 A と次のベクトル $\overrightarrow{v}$ の積 $A\overrightarrow{v}$ を計算し，$A\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$ となることを示せ．　ただし θ, ϕ は実数，i は虚数単位とする．

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)e^{-i\phi} \\ \sin(\theta)e^{i\phi} & -\cos(\theta) \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

(2) (1) の行列 A について，$\phi = 0$ としたときの 2 つの固有値および固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさは 1 とせよ．

(3) 次の行列 B の 2 つの固有値を求めよ．ただし k は実数とする．また $|k| \leq 1$ として，大きさ 1 とした 2 つの固有ベクトルを求めよ．また 2 つの固有値を k の関数として，$|k| \leq 1$ の範囲でグラフに描け．

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$$

(三重大 2018)　　(m20183112)

0.616 次の関数を微分せよ．（e は自然対数の底である.）

(1) $y = x^2 e^x$　　(2) $y = \sqrt{\cos 2x}$

(3) $y = \log_e(1-e^{-x})$　　(4) $y = \sqrt{\dfrac{x}{(x+1)^5}}$

(三重大 2020)　　(m20203101)

0.617 次の不定積分，定積分を求めよ．（e は自然対数の底である.）

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+1}dx =$　　(2) $\displaystyle\int xe^{-x}dx =$

(3) $\displaystyle\int_1^2 (x-1)(x-2)dx =$ 　　　(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx =$

(三重大 2020)　　(m20203102)

0.618 関数 $g(\varepsilon) = \cos^2(\theta + \varepsilon)$ を ε についてマクローリン展開

$$g(\varepsilon) = a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 + \cdots$$

を行い，係数 a, b, c を求めなさい．ただし，θ は定数とする．

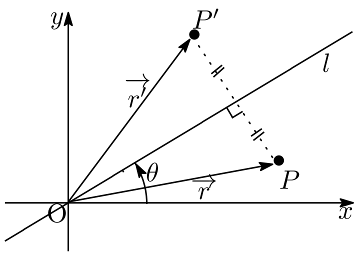
(三重大 2022)　　(m20223102)

0.619 原点 O を通る角度 θ 方向の直線 l に関して，空間の点 P（位置ベクトルを $\overrightarrow{r}$）を点 P'（位置ベクトルを $\overrightarrow{r'}$）へ反転させる作用（R_θ と記す）を考える．

$$\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \overrightarrow{r'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\theta \overrightarrow{r}$$

このとき，反転の作用は次のように表わせることを示せ．

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$



(奈良女子大 2002)　　(m20023208)

0.620 m と n が整数のとき，次の式を証明せよ．

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta(m-n)} d\theta = \delta_{m,n}$$

ただし，$i = \sqrt{-1}$ である．また，$\delta_{m,n}$ はクロネッカーのデルタで，

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$ と定義されている．

また，必要なら公式　$e^{ix} = \cos x + i \sin x$　を用いよ．

(奈良女子大 2003)　　(m20033210)

0.621 次の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x dx$ 　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$

（奈良女子大 2004）　　(m20043203)

0.622 次の 2 行 2 列の行列 $F(\theta)$ について以下の問に答えよ．

$$F(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) $F(\theta)$ について次の関係が成立することを示せ．

$$F(\theta_1)F(\theta_2) = F(\theta_1 + \theta_2)$$

(2) 行列 A を次の 2 行 2 列の行列であるとする.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき, $F(-\theta)AF(\theta)$ が対角行列 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ の形になる θ の値と, そのときの対角要素 λ_1 , λ_2 を求めよ.

(奈良女子大 2005)　　(m20053204)

0.623 実数 θ に対して $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とおく．また，2 次の単位行列を E とおく．次の問に答えよ．

(1) ${}^tA(\theta)A(\theta) = E$ となることを示せ．ただしここで，${}^tA(\theta)$ は $A(\theta)$ の転置行列である．

(2) $A(-\theta)$ が $A(\theta)$ の逆行列であることを示せ．

(3) 実数 θ, θ' に対し，$A(\theta)A(\theta') = A(\theta + \theta')$ が成り立つことを示せ．

(奈良女子大 2006)　　(m20063204)

0.624 2 次元平面の直交座標を (x, y)，また，極座標を (r, θ) とする．このとき,

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

の関係が成り立つ．x, y および r, θ が時間 t の関数であるとき，$\dfrac{dx}{dt}$ と $\dfrac{dy}{dt}$ を $\dfrac{dr}{dt}$ と $\dfrac{d\theta}{dt}$ を用いて表せ.

(奈良女子大 2007)　　(m20073206)

0.625 次の不定積分 I を求めよ.　　$I = \displaystyle\int x\cos x\,dx$

(奈良女子大 2007)　　(m20073207)

0.626 次の微分を求めよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{-ax}\cos(bx)\right)$　（a, b は定数）

(2) $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(奈良女子大 2009)　　(m20093204)

0.627 次の不定積分と定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int xe^{-ax}dx$　（a は定数）

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{1-2a\cos\theta+a^2}}$　$(a > 0)$

(奈良女子大 2009)　　(m20093205)

0.628 次ののような 2 つの行列 A と B があるとき，以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

(1) 積 AB を求めよ.

(2) 行列 A の逆行列を求めよ.

(3) 2 次元ベクトル $\boldsymbol{X}$ に行列 A をかけて，$\boldsymbol{Y} = A\boldsymbol{X}$ を作った．このとき，2 つのベクトル $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ はどのような関係になるか述べよ．

(奈良女子大 2009)　　(m20093207)

0.629　次の定積分 I に関する以下の問いに答えよ．

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

(1) 次の定積分を求めよ．

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$$

(2) 変数を変えることで, I^2 は次のように書けることを示せ．

$$I^2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

(3) この 2 次元積分は直交座標 (x,y) から極座標 (r,θ) に変換することで求めることができる. 積分を実行して I^2 を求め, $I = \sqrt{\pi}$ であることを示せ．
ただし, $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ であり, $dxdy = rdrd\theta$ である．

(奈良女子大 2010)　　(m20103204)

0.630　次の微分方程式について以下の問いに答えよ．

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

(1) 次の $x(t)$ はこの微分方程式の解であることを示せ．

$$x(t) = C_1\sin(\omega t) + C_2\cos(\omega t)$$

ここで, $C_1,\ C_2$ は定数である．

(2) この $x(t)$ は次のように表すこともできる．

$$x(t) = B_1 e^{+i\omega t} + B_2 e^{-i\omega t}$$

このとき, $B_1,\ B_2$ と $C_1,\ C_2$ の関係を求めよ．

(奈良女子大 2010)　　(m20103205)

0.631　以下の関数を微分せよ．

(1) $y = \cosh\left(\sqrt{x^2+1}\right)$　　(2) $y = \tan^{-1} x$

(奈良女子大 2011)　　(m20113204)

0.632　以下の関数を微分せよ．ただし，a, b, c は実定数である．

(1) $y = \cos(ax^2 + bx + c)$

(2) $y = \dfrac{\exp(-ax)}{x^2}$

(奈良女子大 2012)　　(m20123201)

0.633　微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + {\omega_0}^2 x = A\cos(\omega t) \qquad \cdots(\text{ア})$$

の一般解 $x(t)$ は，$A = 0$ の場合の一般解 $x_0(t)$ と $A \neq 0$ の特解 $x_1(t)$ の和 $x_0(t) + x_1(t)$ で表される．以下の問いに答えよ．ただし，$A,\ \omega,\ \omega_0$ は実定数である．

(1) $x_0(t)$ を求めよ.

(2) $x_1(t)=\alpha\cos(\omega t)+\beta\sin(\omega t)$ とおいて式 (ア) に代入し，未知定数 α と β を決定することにより $x_1(t)$ を求めよ．ただし，$\omega\neq\omega_0$ とする.

(3) 初期条件が $x(0)=x_0$, $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0$ の場合，式 (ア) の解を求めよ．また，$\omega\to\omega_0$ とした時，その解はどうなるか.

(奈良女子大 2012) (m20123203)

0.634 次の行列 $A(\theta)$ について以下の問に答えよ.

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) $A(\theta_1+\theta_2)=A(\theta_1)A(\theta_2)$ であることを示せ.

(3) $A(\theta)A(-\theta)=I$ を示せ．ここで I は単位行列である.

(4) 行列 $A\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ の固有値をすべて求めよ.

(奈良女子大 2013) (m20133208)

0.635 次の積分を求めよ．ただし，a は正の実定数である.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$ (3) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos x\,dx$

(奈良女子大 2014) (m20143202)

0.636 次の積分を求めよ．ただし，a は正の定数，n は正の整数である.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty r^3\exp\left(-ar^2\right)dr$ 2 (1) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^n x\,\cos x\,dx$

(奈良女子大 2015) (m20153202)

0.637 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x^2}$ を求めよ.

(2) 関数 $y=\log\sqrt{1-x^2}$ を微分せよ．ただし，x は実数で $|x|<1$ とする.

(奈良女子大 2016) (m20163204)

0.638 行列 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ として，$\boldsymbol{r}'=A\boldsymbol{r}$ を求めよ.

(2) 行列式 A を求めよ.

(3) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(奈良女子大 2017) (m20173208)

0.639 関数 $f(x)=\cos^{-1}(x^3)$ を微分せよ.

(奈良女子大 2019) (m20193204)

0.640 2 次元の xy 平面内の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に関する以下の問いに答えよ.

ただし，$a>b>0$ であり，また楕円の離心率を

$$\tilde{e}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

とする.

(1) 楕円の周囲の長さ L は

$$L=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\tilde{e}^2\cos^2\theta}\,d\theta$$

で与えられることを示せ.

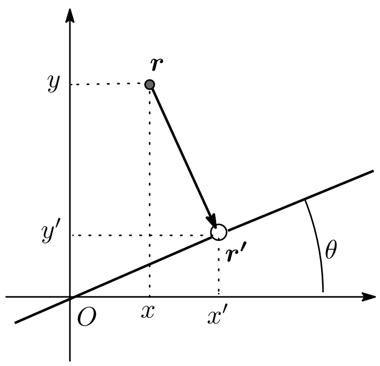
(2) 離心率 $\tilde{e}$ が 1 より十分小さいとき，長さ L は近似的に

$$L=2\pi a\left(1-\frac{1}{4}\tilde{e}^2\right)$$

となることを示せ.

(奈良女子大 2022)　　(m20223207)

0.641 下図のように xy 平面上の任意の点 $\boldsymbol{r}=(x,y)$ を，x 軸から角度 θ 傾いた直線に垂直に射影した点 $\boldsymbol{r}'=(x',y')$ を求める変換を考える．以下の問いに答えよ.



(1) ベクトル $\boldsymbol{r}$ と単位ベクトル $\boldsymbol{e}=(\cos\theta,\sin\theta)$ を使って，ベクトル $\boldsymbol{r}'$ を表せ.

(2) (x,y) と (x',y') の関係は 2×2 行列 A を使って一次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

として表すことができる．行列 A を求めよ.

(3) 行列 A の 2 つの固有値を計算し，それぞれの固有値に属する固有ベクトルの方向を求めよ.

(奈良女子大 2022)　　(m20223209)

0.642 関数 $r=a(1+\cos\theta)$ が領域 $A\{-\pi\leq\theta\leq\pi\}$ で定義されている．以下の問いに答えよ.

(1) この閉曲線の長さ L を求めよ.

(2) この閉曲線に囲まれた面積 S を求めよ.

(京都大 1998)　　(m19983302)

0.643 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+9y=7\cos 3x$ を $\left(\dfrac{d}{dx}+3i\right)\left(\dfrac{d}{dx}-3i\right)y=7\cos 3x$ と書く.

$z=\left(\dfrac{d}{dx}-3i\right)y$ と置くことにより，上の微分方程式は $\left(\dfrac{d}{dx}+3i\right)z=7\cos 3x$ となる．これを用いて，上の微分方程式の一般解を以下の問いに従って求めよ.

(1) $\dfrac{dz}{dx} + 3iz = 7\cos 3x$ の解 z を求めよ．

(2) 上の解 z を使って，$\dfrac{dy}{dx} - 3iy = z$ の解 y を求めよ．

(京都大 2002)　　(m20023302)

0.644 次のラプラスの積分を考える．　$I(a) = \displaystyle\int_0^\infty \exp[-x^2]\cos 2ax\, dx$　以下の問に答えよ．

(1) 平面の直角座標 (x, y) から極座標 (r, θ) への変換公式を用いて，$x^2 + y^2$ および $dxdy$ を極座標で表せ．

(2) 積分 $I(0)$ の値は $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ と求められることを，$I(0)^2$ を計算して示せ．

(3) 積分 $I(a)$ の値を求めよ．例えば，$I(a)$ を a に関して微分してみる．

(京都大 2006)　　(m20063304)

0.645 3 次元ユークリッド空間の直交座標系を一つ定め，その x 軸，y 軸および z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ とする．２つのベクトル $\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{e}_x + u_y\boldsymbol{e}_y + u_z\boldsymbol{e}_z$ および $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{e}_x + v_y\boldsymbol{e}_y + v_z\boldsymbol{e}_z$ について，以下の (1)～(4) に答えよ．ただし，$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は零ベクトルではないものとする．

(1) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$ を u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z を用いて表せ．

(2) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積 S を u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z を用いて表せ．ただし，平行四辺形の表裏や向きは考えないものとする．

(3) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ に対して，ベクトル $\boldsymbol{w}$ を，行列式を形式的に用いて

$$\boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

と定義する．ベクトル $\boldsymbol{w}$ は，$\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ に直交することを示せ．

(4) ベクトル $\boldsymbol{w}$ の長さは (2) の面積 S に等しいことを示せ．

(京都大 2009)　　(m20093304)

0.646 xy 平面上の曲線 C が媒介変数 t を用いて　$x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$　$(0 \leq t \leq 2\pi)$ で与えられている．ここで，r は正の定数とする．このとき，次の (1)～(3) に答えよ．

(1) 曲線 C の長さ l を求めよ．

(2) 曲線 C と x 軸とで囲まれる図形の面積 S を求めよ．

(3) 曲線 C 上の両端以外の点 P に対して，P における C の法線と x 軸との交点を考え，その座標を $(a, 0)$ とする．P を動かすとき，P における C の接線と直線 $x = a$ との交点は，どのような図形を描くか．

(京都大 2012)　　(m20123303)

0.647 滑らかな曲線 C 上を動く点 P について，次の問 (1)～(2) に答えよ．なお，図 $4-1$ に示すように，P における曲線の単位接線ベクトルを $\boldsymbol{m}$，単位主法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ と表すものとする．

(1) C 上の点 P とそれに非常に近い点 P_1, P_2 の 3 点を通る円を C_0 とし，C_0 の中心を点 O，半径を ρ，線分 P_1P の中点と線分 PP_2 の中点の間の距離を ds，直線 P_1P と直線 PP_2 のなす角を $d\varphi$，とする（図 $4-1$, $4-2$）．点 P_1, P_2 間の C に変曲点はないものとする．

(a) 直線 P_1P，直線 PP_2 上の単位ベクトル $\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_2$ は近接する 2 つの単位接線ベクトルとみることができ $\boldsymbol{m}_2 - \boldsymbol{m}_1 = d\boldsymbol{m}$ である．このとき $\left|\dfrac{d\boldsymbol{m}}{ds}\right| = \dfrac{1}{\rho}$ となることを示せ．

(b) $\dfrac{d\boldsymbol{m}}{ds}$ は $\boldsymbol{m}$ と垂直であり，$\dfrac{d\boldsymbol{m}}{ds} = \dfrac{1}{\rho}\boldsymbol{n}$ となることを示せ．

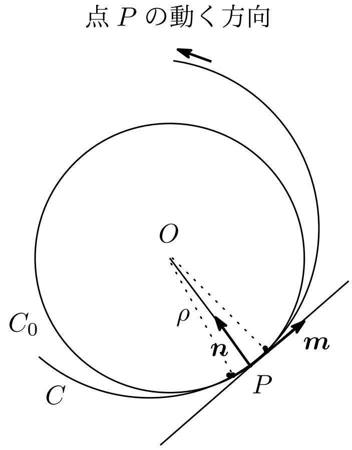


図 4 − 1

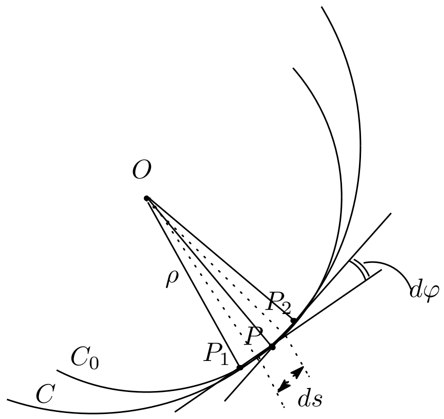


図 4 − 2

(2) 点 P の時刻 t における位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ が，

$\boldsymbol{r}(t) = [b\cos t \quad b\sin t \quad ct]$ （b, c は正の定数）

で表されるとき，P の速度 $\boldsymbol{v}(t)$，および，加速度 $\boldsymbol{a}(t)$ を，P の軌跡における，単位接線ベクトル $\boldsymbol{m}$ と単位主法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ で表せ．

(京都大 2013) (m20133304)

0.648 R^2 に直交座標系 $O-xy$ をとり，次式で定義される曲線 C を考える．

$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta + b\cos 2\theta \\ y &= a\sin\theta + b\sin 2\theta \end{aligned} \qquad (0 \le \theta \le 2\pi)$$

ここに，a, b は正の数であり，$a \neq b$ を満たすものとする．このとき問 (1)〜(3) に答えよ．

(1) $\Phi(\theta)$ は，次式を満たす連続関数であるとする．

$$(a\cos\theta + b\cos 2\theta)\tan\Phi(\theta) = a\sin\theta + b\sin 2\theta \qquad (0 \le \theta \le 2\pi)$$

このとき，$\dfrac{d\Phi}{d\theta}$ を θ の関数として求めよ．

(2) $a = 2$, $b = 1$ のとき，C の概形を描け．また $\Phi(0) = 0$ であるとき，$\Phi(2\pi)$ を求めよ．

(3) $a = 2$, $b = 1$ のとき，次の積分を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$$

(京都大 2014) (m20143306)

0.649 実数のパラメータ θ に依存する行列 $A(\theta)$ が

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{2}{3}\cos^2\theta & -\dfrac{2}{3}\cos\theta\sin\theta \\ -\dfrac{2}{3}\cos\theta\sin\theta & 1 - \dfrac{2}{3}\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

で与えられている．$\mathbb{R}^2$ の点 $\boldsymbol{x}$ をデカルト座標系 $O - x_1x_2$ を用いて $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2)$ と表す．これらを用いて，集合 $\Omega(\theta)$ を

$$\Omega(\theta) = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \cdot A(\theta)\}\boldsymbol{x} \le 1\}$$

と定義する．ここに，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{2} x_i y_i$$

である．このとき，次の (1)〜(4) に答えよ．

(1) $A(\theta)$ のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化して単位ベクトルとせよ．

(2) $\Omega(\theta)$ の概形を描け．

(3) $\Omega(0) \cap \Omega(\pi/2)$ の面積を求めよ．

(4) $\displaystyle\bigcup_{0 \leq \theta \leq \pi/2} \Omega(\theta)$ を図示し，その面積を求めよ．ここに，$\boldsymbol{x} \in \displaystyle\bigcup_{0 \leq \theta \leq \pi/2} \Omega(\theta)$ とは，$0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$ なる θ_0 があって，$\boldsymbol{x} \in \Omega(\theta_0)$ となることである．

(京都大 2015)　　(m20153305)

0.650　次の定積分の値を求めよ．（ただし，e は自然対数の底）

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{3x^2-1}{x}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^\pi \left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2 dx$

(京都大 2017)　　(m20173305)

0.651　次の三角関数または指数関数を含む定積分の値を求めよ．（ただし，e は自然対数の底）

（イ）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos^3 x}{1+\sin x}dx$　　（ロ）$\displaystyle\int_0^1 \frac{7e^x}{e^x+1}dx$

(京都大 2018)　　(m20183302)

0.652　次の三角関数を含む微分方程式の一般解を，定数 C を用いて求めよ．

（イ）$\displaystyle x\tan\frac{y}{x} - y + x\frac{dy}{dx} = 0$　　（ロ）$\displaystyle\left(\tan y - 6x^2\right)dx + \frac{x}{\cos^2 y}dy = 0$

(京都大 2018)　　(m20183304)

0.653　次の指数関数を含む微分方程式の一般解を，定数 C を用いて求めよ．

（イ）$\displaystyle\frac{dy}{dx} + e^x y = 7e^x$　　（ロ）$(y + e^x\sin y)\,dx + (x + e^x\cos y)\,dy = 0$

(京都大 2018)　　(m20183305)

0.654　(1) 次の微分方程式の一般解を，定数 C を用いて求めよ．

（イ）$\displaystyle\frac{dy}{dx} = y^2 + y - 6$

（ロ）$\displaystyle\frac{dy}{dx} = 2 + \frac{y}{x} + e^{-\frac{y}{x}}$

（ハ）$\displaystyle\left(\frac{3}{x}+\frac{y}{x^2}\right)dx + \left(3y - \frac{1}{x}\right)dy = 0$

(2) 次の微分方程式の一般解を，定数 C を用いて求めよ．
なお，積分因子は $\sin x$ である．

$$(2\sin y\cos x - 2)\,dx + \cos y\sin x\,dy = 0 \qquad (0 < x < \pi)$$

(京都大 2022)　　(m20223301)

0.655　(1) 次の積分の値を求めよ．

（イ）$\displaystyle\int_e^3 x^2\log_e x\ dx$　　（ロ）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x\ dx$　　（ハ）$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2+x}{4x^2+1}dx$

(2) 次の広義積分の値を求めよ．

（イ）$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$　　（ロ）$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\log_e(1+x^2)\ dx$

(京都大 2022)　　(m20223303)

0.656 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$ を計算せよ．

(京都工芸繊維大 2000)　　(m20003404)

0.657 自然数 $n \geqq 2$ に対して，

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx,\ J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

とおく．次の (1),(2) を証明せよ．

(1) $I_n = J_n$　　(2) $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$

(京都工芸繊維大 2001)　　(m20013403)

0.658 媒介変数表示された曲線 $C : x = 3\cos t\,,\ y = 2\sin t\ \ (0 \leqq\ t \leqq\ 2\pi)$ を図示し，この曲線で囲まれた図形 D 上の重積分 $\displaystyle\iint_D (xy+1)dxdy$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2002)　　(m20023406)

0.659 微分方程式　$y'' + 2y' + 5y = 10\sin x$　を考える．

(1) $a\cos x + b\sin x$ がこの微分方程式の解になるように定数 a, b を定めよ．

(2) 初期条件 $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ を満たす解を求めよ．

(京都工芸繊維大 2005)　　(m20053410)

0.660 実数 x が $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする．行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin x & \cos x & \tan x \\ -\sin x & 0 & 0 & \cos x \\ -\cos x & 0 & 0 & \sin x \\ -\tan x & -\cos x & -\sin x & 0 \end{vmatrix}$$

の値が $\dfrac{1}{4}$ となるような x をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2009)　　(m20093401)

0.661 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \cos x - e^x}{x\sin x}$ を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^3 - 3x + 1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2009)　　(m20093402)

0.662 (1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} (\cos x)\log(\cos x)$ を求めよ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)\log(\cos x)dx$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2012)　　(m20123403)

0.663 xy 平面上の関数 $f(x, y) = x^3 + 2xy - x + 2y$ を考える．実数 a, b は $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ を満たしている．実数 t の関数

$$g(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h\cos t\,,\ b + h\sin t) - f(a, b)}{h^2}$$

を考える．

(1) a, b の値を求めよ．

(2) 次の等式を証明せよ．

$$g(t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cos^2 t + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\sin t\,\cos t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\sin^2 t$$

(3) t が実数全体を動くとき，$g(t)$ の最大値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2013)　　(m20133402)

0.664 xy 平面上の図形 D : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 　$(0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq\ r \leqq\ e^{\theta})$ に対して，

重積分 $\displaystyle\iint_D 1dxdy$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2013)　　(m20133404)

0.665 実数 $a,\ b$ に対して関数 $f(x) = e^{-x}\cos x + ax + b$ を考える．$f(x)$ は $f(0) = 0,\ f'(0) = 0$ を満たすとする．

(1) $a,\ b$ の値を求めよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^m}$ が存在し，その極限値が 0 とは異なるような正の整数 m のうち最小のものを求めよ．

(京都工芸繊維大 2014)　　(m20143402)

0.666 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}$ および $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2017)　　(m20173402)

0.667 (1) 2 回微分可能な関数 $F(x)$ に対し，不定積分に関する関係式

$$\int (F''(x) + F(x))\sin x dx = F'(x)\sin x - F(x)\cos x + C$$

を示せ．ただし，C は任意定数とする．

(2) n を 3 以上の自然数とする．微分方程式

$$y' + y = e^{-x}\left\{x^n + n(n-1)x^{n-2}\right\}\sin x$$

の解 $y = y(x)$ で条件 $y(0) = 0$ を満たすものを求めよ．

(京都工芸繊維大 2017)　　(m20173405)

0.668 a を実数とする．実数全体で定義された関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & (x \neq 0) \\ a & (x = 0) \end{cases}$$

を満たし，$x = 0$ で連続であるとする．

(1) a の値を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ．さらに，$f'(0)$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2018)　　(m20183403)

0.669 関数 $z=f(x,y)$ は C^2 級であるとする．x,y が別の 2 変数 s,t の関数であり，

$$x=2\cos s+3\sin t\ ,\qquad y=4\sin s+5\cos t$$

と表されているとする．$(s,t)=\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ のときの x,y の値をそれぞれ p,q とする．ただし，関数 $f(x,y)$ が C^2 級であるとは，$f(x,y)$ の 2 階までのすべての偏導関数が存在して, それらが連続であることである．

(1) x,y の s,t に関する 1 階偏導関数をすべて求めよ．

(2) z を s,t の関数と見なしたとき，$\dfrac{\partial z}{\partial s}\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ を $f_x(p,q)$ および $f_y(p,q)$ を用いて表せ．

(3) z を s,t の関数と見なしたとき，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial t\partial s}\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ を $f_{xx}(p,q)$，$f_{xy}(p,q)$ および $f_{yy}(p,q)$ を用いて表せ．

(京都工芸繊維大 2019)　　(m20193403)

0.670 区間 $I=[-\pi,\pi]$ で連続な関数 $f(x)$ に対して

$$R(k)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\ dx\ ,\quad (k=0,1,2,\cdots)$$

とするとき，次の問に答えよ．

(1) $|a|<1$ なる実数 a に対して

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n}a^j\cos jx$$

としたとき

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}R(k)$$

を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ が I で非負であるとき

$$|R(k)|\leq R(0)\ ,\quad k=0,1,2,\cdots$$

が成り立つことを示せ．

(大阪大 1996）　　(m19963502)

0.671 実数値関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{\sqrt{1-2x\cos y+x^2}}\,dy$$

とするとき，次の問に答えよ．

(1) $f(0)$ の値を求めよ．

(2) 積分を用いずに $f(x)$ を表せ．

(3) $f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty}x^{-\frac{1}{2}}f(x)\,dx$ を求めよ．

(大阪大 1999）　　(m19993502)

0.672 $X,\ Y$ は独立で，いずれも平均 0，分散 σ^2 を持つ確率変数であり，$s,\ t,\ \lambda$ は実定数とする．2 つの確率変数

$$S=X\cos\lambda s+Y\sin\lambda s,\quad T=X\cos\lambda(s+t)+Y\sin\lambda(s+t)$$

を考えるとき，次の問に答えよ．

(1) $S,\ T$ の平均，分散，共分散を求めよ．

(2) $S,\ T$ の相関係数を求めよ．

(大阪大 2001) (m20013509)

0.673 (1) 関数 $f(x) = x^2\ (-\pi \leqq\ x \leqq \pi)$ を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\bigr)$$

とフーリエ級数展開したとき，$a_n (n \geqq\ 0)$, $b_n (n \geqq\ 1)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ を示せ．

(大阪大 2002) (m20023506)

0.674 実数全体で定義された連続関数 $f(x)$ に対して $g(x)$ を $\displaystyle g(x) = \int_0^x tf(x-t)dt$ で定めるとき，次の (1), (2), (3) に答えよ．

(1) $f(x)$ が奇関数ならば $g(x)$ も奇関数であり，$f(x)$ が偶関数ならば $g(x)$ も偶関数であることを示せ．

(2) $f(x) = \cos x$ のとき，$g(x), g'(x), g''(x)$ を求めよ．

(3) $f(0) > 0$ のとき，$g(x)$ は $x = 0$ で極小値をとることを示せ．

(大阪大 2003) (m20033501)

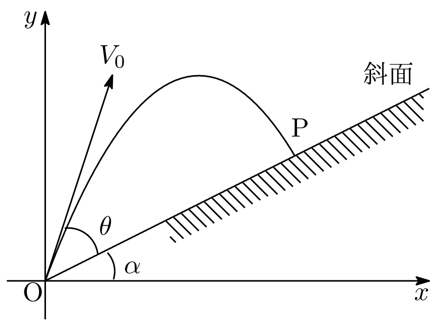
0.675 $a > 0,\ 0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，関数 $y = \sin 2x + 2a(\sin x + \cos x) + 2$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $t = \sin x + \cos x$ とおいて，y を t の関数として表せ．

(2) y の最大値および最小値を求めよ．

(大阪大 2004) (m20043502)

0.676 右図のように水平面と $\alpha\ (0 < \alpha < \pi/2)$ の角をなす斜面において，初速度 V_0 で斜面に対して $\theta\ (\theta > 0,\ 0 < \alpha + \theta < \pi/2)$ の方向に物体を投げる．以下の問いに答えよ．



(1) 物体の軌跡の x および y 座標は時間 t を媒介変数とするとき，

$$x = V_0 t \cos(\alpha + \theta)$$
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t \sin(\alpha + \theta)$$

で与えられる．ただし，g は重力加速度である．斜面上の到達距離 OP を求めよ．

(2) 到達距離が最大となる投射角度 θ およびその時の到達距離 OP を求めよ．

(大阪大 2004) (m20043503)

0.677 xy 平面上で，曲線 C は媒介変数 θ を用いて，

$$x = 2a\cos\theta + a\cos 2\theta$$

$$y = 2a\sin\theta - a\sin 2\theta$$

で表される．ただし, $a > 0$ とする．

この曲線 C によって表される図形について，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 C の概略図を示せ．

(2) 曲線 C に囲まれる図形の面積を求めよ．

(大阪大 2005)　　(m20053502)

0.678 関数 $f(x)$ を近似する三角多項式

$$P_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

の中で誤差

$$E_N = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(P_N(x) - f(x)\right)^2 dx$$

を最小にする

$$\{a_0\,,\ a_1\,, \cdots,\ a_N\,,\ b_1\,, \cdots,\ b_N\}$$

は $f(x)$ のフーリエ係数であることを示せ.

(大阪大 2005)　　(m20053510)

0.679 (1) 空間上の直交座標 (x, y, z) を極座標 (r, θ, φ) ：

$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad (r > 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi < 2\pi)$

に変換するとき，そのヤコビアン（関数行列式）を計算しなさい.

(2) 広義積分　$I(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} dx\,dy\,dz$

について，$\alpha = \dfrac{1}{2}$ のときの値 $I\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めなさい.

(3) $I(\alpha)$ が収束する α の範囲を求めなさい.

(4) 広義積分　$J(\alpha,\ \beta) = \displaystyle\iiint_B \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha \mid \log(x^2+y^2+z^2) \mid^\beta} dx\,dy\,dz$

が収束するような $\alpha,\ \beta$ の満たすべき条件を求めなさい.

ただし，$B = \left\{(x, y, z)\ :\ x^2+y^2+z^2 < \dfrac{1}{4}\right\}$.

(大阪大 2007)　　(m20073506)

0.680 (1) 関数 $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$　$(-\pi \leqq\ x \leqq \pi)$ を　$f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$　とフーリエ級数に展開したとき，a_n　$(n = 0, 1, 2, \cdots)$，b_n　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$　を求めよ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ を示せ.

(大阪大 2007)　　(m20073511)

0.681 次の値を留数定理を用いて計算し，四捨五入で小数点以下第 1 位まで求めよ．ただし，$e = 2.718\cdots$ である.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2\cos\theta} d\theta$$

(大阪大 2008)　　(m20083505)

0.682 $|a| < 1$ とする．以下の式を示せ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a^n \cos nx + a^2 \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx = 2a\cos x \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx$

ただし $\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos nx \cos x$ を用いよ.

(2) $1 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx = \frac{1-a^2}{1-2a\cos x + a^2}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{1-2a\cos x + a^2} dx = \frac{\pi a^n}{1-a^2}$

(大阪大 2008)　　(m20083506)

0.683 関数 $f(x) = e^{-x}\cos x$ について，以下の問いに答えよ．ただし，x は実数，e は自然対数の底とする．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ．

(2) (1) の結果を用いて，$\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(x)|\,dx$ を求めよ．ただし，n は 0 または正の偶数とする．

(大阪大 2008)　　(m20083509)

0.684 自然数 n に対して

$$I_n(t) = \frac{1}{\pi^n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\left(\dfrac{t}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k\right)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+{x_k}^2\right)}\,dx_1\cdots dx_n \quad (t\in\mathbb{R})$$

とおく．

(1) 留数定理を用いて $I_1(t)$ を求めよ．

(2) $I_n(t)$ を求めよ．

(大阪大 2009)　　(m20093506)

0.685 閉区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x\sin x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

と定義する．

(1) $f(x)$ のフーリエ係数

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を求めよ．

(2) (1) で求めた a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ に対して，

$$\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2 = \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ．

(大阪大 2009)　　(m20093507)

0.686 微分方程式に関する以下の問いに答えよ．

(1) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + 4y = 0$ の一般解を求めよ．

(2) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + 4y = \cos\omega t$ の特殊解を $y = P\cos\omega t + Q\sin\omega t$ と表すとき, 係数 P と Q 求めよ．ただし, ω は実数で $\omega > 0$ である．

(大阪大 2010)　　(m20103503)

0.687 関数 f を, 実軸上で定義された周期 1 の連続微分可能な実数値関数とする. この f に対して $\hat{f}(k)$ を

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 e^{-2\pi ikt} f(t)\,dt$$

と定義する. このとき, 複素数 z に対して

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} \hat{f}(k) \bar{z}^{|k|}$$

とおく.

(1) 任意の $r \in (0,1)$ に対して, $u(z)$ は $|z| \leq r$ で絶対かつ一様収束することを示せ.

(2) $u = u(z)$ は実数値関数で, $z = x + iy$ とするとき,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

となることを示せ.

(3) 任意の $r \in (0,1)$ に対して, $z = re^{2\pi i\theta}$ とするとき,

$$u(z) = \int_0^1 f(t) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi(\theta - t)) + r^2}\,dt$$

となることを示せ.

(大阪大 2010) (m20103509)

0.688 $g(x)$ を周期 2π の連続関数とする. 以下を示せ.

(1) $\displaystyle\lim_{m\to-\infty} \int_0^{2\pi} g(x) \sin mx\,dx = 0$

(2) 有限三角級数

$$p_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\ . \quad n = 1, 2, \cdots$$

に対して

$$\lim_{m\to-\infty} \int_0^{2\pi} g(x) p_n(mx) dx = a_0 \int_0^{2\pi} g(x) dx$$

(3) 上の $p_n(x)$ が $n \to +\infty$ で $p(x)$ に $[0, 2\pi]$ 上一様収束するとき

$$\lim_{m\to-\infty} \int_0^{2\pi} g(x) p(mx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(x) dx \cdot \int_0^{2\pi} g(x) dx$$

(大阪大 2011) (m20113510)

0.689 C は複素平面上の円周 $\{z\,;\,|z| = 4\}$, D は $\{z\,;\,|z| < 4\}$ とする.

(1) D に円周 C を付け加えた集合 $\overline{D} = C \cup D$ で正則な関数に対するコーシーの積分表示を書け.

(2) 次の複素積分を求めよ.

$$\int_C \frac{ze^z \cos z}{(z-\pi)^2 (z+\pi)^2}\,dz$$

なおコーシーの積分表示では微分と積分が交換可能であることを用いてよい.

(3) 次の複素積分を求めよ.

$$\int_C \frac{ze^z \sin z}{(z-\pi)^2 (z+\pi)^2}\,dz$$

(大阪大 2012) (m20123509)

0.690 (1)

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{\pi} - \cos(x)\right), \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

で定義された周期 2π を持つ関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\}$$

とフーリエ級数に展開したとき,

$$a_n,\ (n = 0, 1, 2, \cdots),\ b_n,\ (n = 1, 2, \cdots)$$

を求めよ.

(2) (1) の結果を利用して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

の値を求めよ.

(大阪大 2012) (m20123510)

0.691 自然数 m, k に対して,

$$A_{m,k} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^m x \, \cos kx \, dx\,, \quad A_{0,0} = 2\pi$$

とおく.

(1) 任意の自然数 m, k に対して, 以下の等式を示せ.

$$A_{m,k} = \frac{1}{1 + \frac{k}{m}} A_{m-1,k-1}$$

ただし, $\cos(k-1)x = \cos kx \cos x + \sin kx \sin x$ を用いてもよい.

(2) 自然数 m が与えられたとき, $\cos^{2m-1} x$ のフーリエ級数が

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_{2k-1} \cos(2k-1)x$$

の形で表されることを示し, フーリエ級数 a_{2m-1} を求めよ.
ただし, $\cos^{2m-1} x = (\cos x)^{2m-1}$ とする.

(大阪大 2013) (m20133507)

0.692 曲線 C が媒介変数表示 $x = f(s),\ y = g(s),\ s \geq 0$ で表される. ただし, $\cosh s = (e^s + e^{-s})/2$, $\sinh s = (e^s - e^{-s})/2$ を用いて

$$f(s) = s - \frac{\sinh s}{\cosh s}$$

$$g(s) = \frac{1}{\cosh s}$$

と定義する. 以下の設問に答えよ.

(1) 定数 $b > 0$ に対して曲線 $C(b)$ が $x = f(s),\ y = g(s),\ 0 \leq s \leq b$ で表される. $C(b)$ の長さ $\ell(b)$ を求めよ.

(2) 点 P は時刻 0 で $x = f(0),\ y = g(0)$ を出発して s が増える方向へ一定の速さで C 上を移動する. 時刻 $t > 0$ までに移動した経路の長さを t とする. 時刻 t における P の位置を $x = f(\varphi(t))$, $y = g(\varphi(t))$ と表すための関数 $\varphi(t)$ を求めよ

(大阪大 2014)　　(m20143501)

0.693 $\{f_k(x)\}_{k=1.2.\cdots}$ を閉区間 $I(\subset \mathbb{R})$ で定義された実数値連続関数の列とする．二つの条件を考える．

$$\text{条件 1 ：}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\Big|f_k(x)\Big| < \infty, \qquad x \in I$$

$$\text{条件 2 ：}\quad \max_{x\in I}\left|\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \to 0 \qquad (m, n \to \infty)$$

条件 1 が満たされるとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は I において絶対収束するという．条件 2 が満たされるとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は I において一様収束するという．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = |x|\ \ (x \in [-\pi,\ \pi])$ のフーリエ級数

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

を求めよ．

(2) (1) で求めた級数 $s(x)$ が $[-\pi, \pi]$ において絶対収束することを示せ．

(3) (1) で求めた級数 $s(x)$ が $[-\pi, \pi]$ において一様収束することを示せ．

(大阪大 2014)　　(m20143506)

0.694 ベクトル $\boldsymbol{p} = (p_x,\ p_y,\ p_z)$, $\boldsymbol{q} = (q_x,\ q_y,\ q_z)$ に対して，$\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ の内積，外積をそれぞれ $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p}\times\ \boldsymbol{q}$ と表す．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x,\ A_y,\ A_z)$, $\boldsymbol{B} = (B_x,\ B_y,\ B_z)$, $\boldsymbol{C} = (C_x,\ C_y,\ C_z)$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$A\cdot(B\times\ C) = B\cdot(C\times\ A) = C\cdot(A\times\ B)$$

(2) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (4, 3, 5)$, $\boldsymbol{b} = (3, 1, 4)$, $\boldsymbol{c} = (8, 3, 2)$ が作る平行六面体の体積を求めよ．

(3) 空間内に直交座標系をとる．$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ をそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルとする．

$$\boldsymbol{e}_r = \cos u\,\cos v\,\boldsymbol{i} + \sin u\,\cos v\,\boldsymbol{j} + \sin v\,\boldsymbol{k}$$

とおく．正の定数 R に対して，原点を中心とした半径 R の球面 S は，次の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ で表せる．

$$\boldsymbol{r} = R\mathbf{e}_r,\ \ 0 \leqq\ u \leqq\ 2\pi,\ \ -\frac{\pi}{2} \leqq\ v \leqq \frac{\pi}{2}$$

球面 S 上の各点 P における外向き法線ベクトルが，点 P の位置ベクトルと同じ向きをもつように S の向きを定める．このとき，ベクトル $\boldsymbol{F} = \dfrac{u}{R}\boldsymbol{e}_r$ に対して，S における次の面積分を求めよ．

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot dS$$

(大阪大 2015)　　(m20153503)

0.695 以下のの問いに答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位であり，a, b は $a > b > 0$ を満たす定数とする．

(1) 次の式で表される曲線 C を複素平面上に図示せよ．

$$C : z = z(t) = a\,\cos t + i\,b\,\sin t \qquad (0 \leqq\ t \leqq\ 2\pi)$$

(2) (1) で与えられた曲線 C に沿う次の積分の値を求めよ.

$$\int_C \frac{1}{z} dx$$

(3) 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt$$

(大阪大 2015)　　(m20153504)

0.696 (1) 複素変数 z の関数 $f(z) = \overline{z}$ は正則であるか否かを判定せよ．ただし，$\overline{z}$ は z の複素共役とする．

(2) $a > b > 0$ となる実定数 a, b において，積分　$I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\cos t}$　の値を求めよ.

(3) 複素平面 C から 1 点 α だけを除いた領域 $D(\alpha) = C - \{\alpha\}$ において，複素変数 z の関数 $g(z) = 1/(z - \alpha)$ の原始関数を求めよ．もし存在しないならばその理由を述べよ.

(大阪大 2016)　　(m20163505)

0.697 (1) α は整数でない実数とする．$\cos(\alpha x)$ $(-\pi < x < \pi)$ をフーリエ級数展開せよ．すなわち

$$\cos(\alpha x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big\}\,, \qquad -\pi < x < \pi$$

を満たす

$$a_n\,, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$
$$b_n\,, \quad n = 1, 2, \cdots$$

を求めよ.

(2) y は $\sin y \neq 0$ を満たす実数とする．(1) の結果を利用して

$$\frac{1}{\sin y} = \frac{1}{y} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{y + n\pi} + \frac{1}{y - n\pi} \right\}$$

が成立することを示せ.

(大阪大 2016)　　(m20163506)

0.698 関数 $x(t)$, $y(t)$ に関する次の連立微分方程式について，以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 2y + \cos 2t \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

(1) $x(t)$ および $y(t)$ の一般解を求めよ.

(2) 初期条件 $x(0) = y(0) = 0$ として $x(t)$ と $y(t)$ を求めよ.

(3) $t \to \infty$ において $x(t)$ が $A\cos(\omega t + \theta)$ なる関数形に漸近することを示し，その時の A, ω, θ の値を求めよ．ただし，A, ω, θ は実数であり，$A > 0$, $\omega > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ とする．また，θ は逆三角関数を用いて表しても構わない.

(大阪大 2016)　　(m20163509)

0.699 θ が $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で変化するとき，$x = 2\cos\theta$,　$y = 2\sin 2\theta$ で表される点 (x, y) は 1 つの曲線を描く．この曲線の方程式を $y = f(x)$ とする．$y = f(x)$ の 1 点 (a, b) における接線の方程式が $y = -2(x - c)$ となるとき，以下の問いに答えよ.

(1) a, b, c の値をそれぞれ求めよ.

(2) 区間 $0 \leq x \leq a$ における曲線 $y = f(x)$ と区間 $a \leq x \leq c$ における直線 $y = -2(x-c)$ と x 軸で囲まれる領域を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ.

(大阪大 2017)　　(m20173501)

0.700 (1) 実 2 変数の実数値関数 $u(x,y)$ と $v(x,y)$ に対して，複素変数 z の関数 f を

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \qquad (z = x + iy)$$

で定める．$f(0) = 0$ かつ

$$v(x,y) = ye^x \cos y + (x+1)e^x \sin y$$

であるとき，f が複素平面上で正則となる $u(x,y)$ を求めよ.

(2) $0 < a < 1$ とする．積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1 - a\cos\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} d\theta$ の値を求めよ.

(大阪大 2019)　　(m20193509)

0.701 (1) 次の (1-1),(1-2) で与えられる，周期 2π の関数のフーリエ級数をそれぞれ求めよ．すなわち，$f(x)$ が連続な点で

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\}$$

が成り立つような

$$a_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$
$$b_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

をそれぞれ求めよ.

(1-1) $f(x) = \cos^2 x + \cos x$

(1-2) $f(x) = x \quad (-\pi < x \leqq \pi)\ , \quad f(x + 2\pi) = f(x)$

(2) (1) の結果を利用して，等式

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

を示せ.

(大阪大 2019)　　(m20193510)

0.702 原点を中心とした半径 r $(r \neq 0)$ の球面 S は媒介変数 u, v（ラジアン単位）を用いて，

$$\boldsymbol{r}\bigl(= \boldsymbol{r}(u,\ v)\bigr) = r\,\boldsymbol{i}_r = r\cos u\cos v\ \boldsymbol{i}_x + r\sin u\cos v\ \boldsymbol{i}_y + r\sin v\ \boldsymbol{i}_z$$
$$(0 \leqq u \leqq 2\pi,\ -\pi/2 \leqq v \leqq \pi/2)$$

と表すことができる．ここで，$\boldsymbol{i}_x$, $\boldsymbol{i}_y$, $\boldsymbol{i}_z$ は x, y, z 座標のそれぞれの基本ベクトルであり，$\boldsymbol{i}_r$ は $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトルである.

(1) $\dfrac{\partial r}{\partial u} \times \dfrac{\partial r}{\partial v}$ を r, $\boldsymbol{i}_r$, v で表せ.

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{R} = \dfrac{u^2}{r}\boldsymbol{i}_r$ とするとき，$\boldsymbol{R}$ の球面 S に沿う面積分,

$$\iint_S \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の外向きの単位法線ベクトルとする.

(大阪大 2021)　　(m20213502)

0.703 複素数 z に関する以下の複素関数 $f(z)$ を考える.

$$f(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{(3z^2 - 10z + 3)(2z^2 + 5z + 2)}$$

(1) $f(z)$ の孤立特異点を全て求めよ．

(2) (1) で求めた孤立特異点のうち，$|z|<1$ を満たすそれぞれの点における $f(z)$ の留数を求めよ．

(3) $|z|=1$ のとき，実数 θ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ を用いて $z=e^{i\theta}$ とおける．ただし，$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位を表す．このとき，$\cos\theta$ を z を用いて表せ．

(4) 以下の積分を複素積分に置き換えることにより，その値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta+1}{(5-3\cos\theta)(5+4\cos\theta)}\,d\theta$$

(大阪大 2021)　　(m20213504)

0.704 $0 \leqq \theta < 2\pi,\ 0 \leqq \phi < 2\pi$ とする．3 次の正方行列 $A,\ B$ を次式で定義し，$C=AB$ とする．

$$A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}$$

なお，虚数単位は $i\ (=\sqrt{-1})$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 行列 C の行列式の値を求めよ．

(2) 行列 C のすべての固有値およびそれらの絶対値を求めよ．

(大阪大 2022)　　(m20223506)

0.705 定数 C は正の実数とし，確率変数 X は $f(x)=\dfrac{C}{1+x^2}$ $(-\infty<x<\infty)$ を確率密度関数にもつとする．以下の設問に答えよ．

(1) 定数 C を求めよ．

(2) 確率変数 Y を $Y=\cos X$ によって定める．このとき，Y の期待値と分散を留数定理を用いることによって求めよ．

(大阪大 2022)　　(m20223508)

0.706 次の微分方程式の一般解を定数変化法で求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx}+4y=\cos(x)$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=\cos(x)$

(大阪府立大 2003)　　(m20033601)

0.707 (1) 次の値をそれぞれ $re^{i\theta}$ の形で表せ．

(a) $\dfrac{5-i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+i3}$　　(b) $\sqrt[3]{1-i}$

(2) 次の積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{2}{5+4\cos\theta}d\theta$

(大阪府立大 2003)　　(m20033603)

0.708 (1) $8i$ の 3 乗根をすべて求めよ．ただし，i は虚数単位である．

(2) 複素積分を用いて，次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta}$$

(大阪府立大 2008)　　(m20083603)

0.709 n を 0 以上の整数とし,

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x^2+y^2)^{n/2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

とおく．このとき, 次の問いに答えよ．ただし. 任意の自然数 ℓ に対して, $\lim_{t\to\infty} t^{\ell}e^{-t^2} = 0$ となることは証明なしに用いてもよい.

(1) 極座標への変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を用いて, J_n を r に関する積分のみで表示せよ.

(2) J_0 の値を求めよ.

(3) n を 2 以上の自然数とするとき, J_n と J_{n-2} の関係式を求め, さらに J_{10} の値を求めよ.

(大阪府立大 2010)　　(m20103602)

0.710 次の関数の導関数を求めなさい.

(1) $\tanh x$　　(2) $\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ $\quad(-1 < x < 1)$　　(3) $\log_e(\cos x)$ $\quad\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

(大阪府立大 2010)　　(m20103611)

0.711 $x,\, y$ は次のような変数 θ の関数である.

$$x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1-\cos\theta) \qquad (a > 0,\ 0 \leqq \theta \leqq\ 2\pi)$$

2 次元直交座標系 $(x,\, y)$ において, $x,\, y$ が表す曲線（サイクロイド）と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めなさい.

(大阪府立大 2010)　　(m20103613)

0.712 関数 $X(r,\theta) = r\cos\theta$, $Y(r,\theta) = r\sin\theta$ の定義域はいずれも $D = (0,\infty)\times\ (-\pi,\pi)$ とする．次の問いに答えよ.

(1) ２つの集合

$$A = \big\{\big(X(r,\theta_0), Y(r,\theta_0)\big)\,|\, r\in(0,\infty)\big\},\ B = \big\{\big(X(r_0,\theta), Y(r_0,\theta)\big)\,|\,\theta\in(-\pi,\pi)\big\}$$

を 1 つの座標平面上に図示せよ．ただし，$\theta_0 \in (-\pi,\pi),\ r_0\in(0,\infty)$ は定数である.

(2) 行列 $J(r,\theta) = \begin{pmatrix} X_r(r,\theta) & Y_r(r,\theta) \\ X_\theta(r,\theta) & Y_\theta(r,\theta)\end{pmatrix}$ とその行列式 $|J(r,\theta)|$ を求めよ．ただし,

$$X_r = \frac{\partial X}{\partial r},\ Y_r = \frac{\partial Y}{\partial r},\ X_\theta = \frac{\partial X}{\partial\theta},\ Y_\theta = \frac{\partial X}{\partial\theta}$$

である.

(3) ２つのベクトル $\big(X_r(r,\theta), Y_r(r,\theta)\big)$, $\big(X_\theta(r,\theta), Y_\theta(r,\theta)\big)$ が直交することを示せ.

(大阪府立大 2011)　　(m20113602)

0.713 (1) $\omega = \exp z$ により，z 平面の直線 $x = A$（定数）が ω 平面で描く図形を説明せよ.

(2) 次の定積分の値を求めよ．ただし，$|a| \neq 1$ とする.

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{1}{1-2a\,\cos\theta + a^2}\,d\theta$$

(大阪府立大 2011)　　(m20113609)

0.714 (1) $y = \{\log(\log x)\}^3$ の一次導関数を求めよ.

(2) $y = \cos 2x$ の二次導関数を求めよ.

(3) $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 3}$ の一次導関数を求めよ．

(大阪府立大 2011) (m20113610)

0.715 以下の問いに答えよ．

(1) $z = x + iy$ とするとき，実部が $u(x, y) = x^2 - y^2$ で与えられる正則関数 $f(z)$ の虚部を求めよ．また，$f(z)$ を z の関数として表せ．

(2) 次の定積分値を求めよ．

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\cos\theta + 5} d\theta$$

(大阪府立大 2013) (m20133609)

0.716 (1) 次の方程式において，z についてすべての解を極形式で表せ．また，それを複素平面上に図示せよ．ただし，i は虚数単位である． $z^3 = -2 + 2i$

(2) 留数定理を用いて，次の積分値を求めよ． $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 1} dx$

(大阪府立大 2016) (m20163601)

0.717 非負の整数 n に対して

$$S_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$$

とおく．このとき，各問に答えよ．

(1) $n \geqq 2$ に対して等式 $S_n = \dfrac{n-1}{n} S_{n-2}$ を示し，n の偶奇で場合分けをして，S_n の値を求めよ．

(2) 比 $\dfrac{S_{2n}}{S_{2n-1}}$ を考え，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_{2n}}{S_{2n-1}}$ の値を求めることで，次を示せ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$$

(大阪府立大 2018) (m20183604)

0.718 次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x + y + 1}{2x + 2y - 1}$ (2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = \cos x$

(大阪府立大 2019) (m20193602)

0.719 ℓ, m, n を自然数として，次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{\ell\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^{2\ell}$

(2) x が有理数であるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left[\lim_{m\to\infty} \{\cos(m!\pi x)\}^{2n}\right]$

(3) x が無理数であるとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} \left[\lim_{n\to\infty} \{\cos(m!\pi x)\}^{2n}\right]$

(大阪府立大 2019) (m20193605)

0.720 3 次元空間内の単位球を B とおく．すなわち，

$$B = \left\{(x, y, z) \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1\right\}$$

とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ とおく．この変数変換のヤコビ行列式を計算せよ．

(2) 定積分

$$\iiint_B (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}dxdydz$$

の値を求めよ.

(大阪府立大 2019)　(m20193607)

0.721 パラメータ表示の曲線 $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$ $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の長さを求めよ.

(関西大 2003)　(m20033702)

0.722 $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=0$ という関係がある．$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ として，$(x,y)\to(r,\theta)$ に変数変換せよ．ただし，$f(x,y)=g(r,\theta)$

(神戸大 1994)　(m19943801)

0.723 公式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を使って，次の (1)〜(3) を示せ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=1$

(3) $\dfrac{d}{dx}\sin x=\cos x$

(神戸大 1998)　(m19983801)

0.724 $f(x,y)$ は何回でも微分できる関数とする．$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ g(r,\theta)=f(x,y)$ とするとき，以下の等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

(神戸大 2001)　(m20013805)

0.725 $x=u\cos\alpha-v\sin\alpha$，$y=u\sin\alpha+v\cos\alpha$（$\alpha$ は定数）のとき，x,y に関して 2 階偏微分可能な $z=z(x,y)$ について

(1) $z_u^2+z_v^2$ を z の x,y に関する偏導関数を用いて表せ.

(2) $z_{uu}+z_{vv}$ を z の x,y に関する第 2 次偏導関数を用いて表せ.

ただし，z_u, z_{uu} は z の u に関する第 1 次および第 2 次偏導関数を表す.

(神戸大 2003)　(m20033804)

0.726 x を 0 でない実数とする．このとき，次の等式を示せ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{1+\cos\left(\frac{1}{n}x\right)+\cos\left(\frac{2}{n}x\right)+\cdots+\cos\left(\frac{n-1}{n}x\right)\right\}=\frac{\sin x}{x}$$

(神戸大 2004)　(m20043802)

0.727 次の各問に答えよ.

(1) 積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta d\theta$ の値を求めよ.

(2) 次の D 上の重積分を, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ と変数変換することにより求めよ.

$$\iint_D x^2dxdy,\ \ D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq x\}$$

(神戸大 2004)　(m20043805)

0.728 次の計算をしなさい.

(1) $\sin^{-1} x$ を sin の逆関数とするとき
$\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1})^2$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx \quad (m, n \in Z)$

(3) $\displaystyle\iint_{x,y \geq 0,\, x+y \leq 1} xydxdy$

(4) $\displaystyle\iint_V e^{-x^2-y^2} dxdy$
ここで V は第 1 象限 $V = \{(x, y) \mid x \geq 0\,,\ y \geq 0\}$ を表す.

(神戸大 2005) (m20053802)

0.729 $r : [a, b] \longrightarrow \boldsymbol{R}^+$ を連続微分可能な関数とし，$(x, y)-$ 平面上の曲線 $x = r(\theta)\cos\theta\,,\ y = r(\theta)\sin\theta\,,$ $a \leq \theta \leq b$ を α とする．ここで $0 \leq a \leq b \leq \pi/2$．曲線 α 上の各点と原点を結ぶ線分から出来る扇形領域の面積を $\mathcal{A}$, α の長さを $\mathcal{L}$ とするとき

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(r)d\theta\,, \qquad \mathcal{L} = \int_a^b g(r, r')d\theta$$

となる $f(r)$ と $g(r, r')$ を与えよ．さらに $r(\theta) = 1/\cos\theta$ の場合の $\mathcal{A}$ または $\mathcal{L}$ の上記公式を用いて

$$\int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \sqrt{3}$$

を説明せよ．

(神戸大 2006) (m20063804)

0.730 (1) 次の関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $\partial f/\partial x\,,\ \partial f/\partial y$ を計算せよ．$\sin^{-1}$ は sin の逆関数．

$$\text{(i) } f(x, y) = e^{3x}\cos 2y\,, \qquad \text{(ii) } f(x, y) = \sin^{-1}\frac{x}{y}$$

(2) 関数 $f(y_1, y_2)$ が 2 階連続微分可能であるとき，$f(ax_{11} + bx_{12}\,,\ ax_{21} + bx_{22})$ $(a, b$ は定数$)$ について $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{22}\partial x_{11}} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{21}\partial x_{12}}$ を計算せよ

(神戸大 2006) (m20063805)

0.731 次の微分方程式の一般解を求めよ．ただし，y', y'' はそれぞれ $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す.

(1) $y'' - y' - 2y = 0$

(2) $y'' - y' - 2y = \cos x$

(神戸大 2009) (m20093808)

0.732 微分方程式の初期値問題

$$f''(x) + f(x) = \sin x\,, \quad f(0) = f'(0) = 0$$

において,

$$F(x) = f(x)\cos x - f'(x)\sin x\,, \quad G(x) = f(x)\sin x + f'(x)\cos x$$

とおく．以下の問いに答えよ.

(1) $F'(x)\,,\ G'(x)$ を求めよ．（f を含まない形で表せ.）

(2) $F(x)\,,\ G(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ を求めよ.

(神戸大 2009) (m20093812)

0.733 $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 $f(x,y)=(x+\cos y)e^{-x}$ の極値を全て求め，極大・極小を判定せよ.

(神戸大 2011) (m20113804)

0.734 $f(u,v)=u^3-3uv^2$, $g(u,v)=3u^2v-v^3$, $u=(e^y+e^{-y})\cos x$, $v=(e^{-y}-e^y)\sin x$ のとき，偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial g}{\partial y}$ を計算せよ.

(神戸大 2012) (m20123802)

0.735 $f(x,y)=\dfrac{\sin x}{\cos x+\cosh x}$ に対して，$\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(x,y)+\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x,y)$ を計算せよ.

ただし，$\cosh y=\dfrac{e^y+e^{-1}}{2}$ である.

(神戸大 2016) (m20163803)

0.736 $D_0(x)\equiv 1,\ D_n(x)=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2\cos kx\ (n\geq 1)$ ， $F_n(x)=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}D_k(x)\ (n\geq 0)$ で $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{D_n\}$ と $\{F_n\}$ を定義する．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $D_n(x)\sin\dfrac{x}{2}=\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x$ となることを示せ.

(2) $F_n(x)\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2(n+1)}\Big\{1-\cos(n+1)x\Big\}=\dfrac{1}{n+1}\sin^2\dfrac{n+1}{2}x$ となることを示せ.

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}F_n(y)dy=2\pi$ となることを示せ.

(4) $0<\delta<\pi$ なる δ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\delta\leq|y|\leq\pi}F_n(y)dy=0$ となることを示せ.

(神戸大 2016) (m20163805)

0.737 xy 平面上に 4 点 $P=(0,\pi),\ Q=(\pi,0),\ R=(2\pi,\pi),\ S=(\pi,2\pi)$ をとり，四辺形 $PQRS$ で囲まれた領域（周上の点も含む）を D とする．関数 $f(x,y)=\cos x+\sin y$ について以下の各問に答えよ.

(1) D の内部における $f(x,y)$ の極値を調べよ.
（ここで，D の内部とは D から周上の点を除いた領域である.）

(2) D における $f(x,y)$ の最大値と最小値を求めよ.

(神戸大 2016) (m20163808)

0.738 (1) $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $g(x,y)=x^3+y^3-9xy$ の臨界点を全て求め， それぞれの点で関数が極値をとるかどうか判定せよ.

(2) $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ が回転対称であるとき，$x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ を満たすことを示せ．ただし，$f(x,y)$ が回転対称であるとは，任意の $x,y,\theta\in\mathbb{R}$ に対し

$$f(x,y)=f(x\cos\theta+y\sin\theta,\ -x\sin\theta+y\cos\theta)$$

を満たすことをいう.

(神戸大 2018) (m20183803)

0.739 (1) xy 平面上の領域

$$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+(y-1)^2\leq 1\right\}$$

が極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\quad(0\leq\theta<2\pi)$ によって対応する θr 平面上の領域を E とする．D と E を図示せよ.

(2) xyz 空間内の領域 $A,\ B$ を次のように定める．

$$A=\left\{(x,y,z)\ \middle|\ x^2+y^2+z^2\leq 4,\quad 0\leq z\right\}$$

$$B=\left\{(x,y,z)\ \middle|\ x^2+(y-1)^2\leq 1\right\}$$

A と B の共通部分の体積を求めよ．

(神戸大 2020)　　(m20203804)

0.740 (1) $D=\left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2\ \middle|\ x^2+y^2\leq 2,\ \ y\geq x,\ \ y\geq 0\right\}$ とする．積分 $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy$ を求めよ．

(2) $D=\left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2\ \middle|\ xy\geq 0\right\}$ とする．積分 $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}\cos(ax^2+ay^2)dxdy$ を求めよ．ただし，a は実数である．

(3) D は $\boldsymbol{R}^2$ 内の有界閉領域で直線 $y=x$ について線対称であるとする．積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^2-y^2}{1+x^4+y^4}dxdy$ を求めよ．

(神戸大 2023)　　(m20233804)

0.741 $z=f(x,y),\ x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ f$ は C^1 級なるとき，次式を証明せよ．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(鳥取大 2000)　　(m20003904)

0.742 自然数 n に対し，$P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ とおく．このとき次の各問いに答えよ．

(1) $P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x)$ を求めよ．

(2) 自然数 n を固定する．各 $j=0,1,...,n-1$ に対し，多項式 $\dfrac{d^j}{dx^j}(x^2-1)^n$ は x^2-1 で割り切れることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) 次の関係式が成り立つことを示せ．

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases}\dfrac{2}{2n+1} & (n=m)\\ 0 & (n\neq m)\end{cases}$$

ただし必要ならば $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}t\ dt=\frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}$ を用いてよい．

(鳥取大 2001)　　(m20013902)

0.743 次の積分を計算しなさい．

(1) $\displaystyle\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx$　　ただし，L は正で，n,m は正の整数をとるものとする．

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}x^2e^{-ax+b}dx$　　ただし，a は正とする．

（鳥取大 2004）　　(m20043902)

0.744 飛行している物体の時刻 t での位置座標 (x,y,z) が次式で与えられる．

$x=a\sin t$

$y=a\cos t$

$z=bt$

ただし，a,b は定数である. 次の問いに答えなさい．

(1) この物体の速度の大きさを求めなさい.

(2) この物体が $1 \le t \le 3$ の間に飛行した軌跡の長さを求めなさい.

（鳥取大 2004） (m20043905)

0.745 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}(2x+3)^n$ (2) $\dfrac{d}{dx}\sin^2(x/3)$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

(鳥取大 2005) (m20053901)

0.746 n 回連続微分可能な関数 $f(x)$ は x が 0 に近い範囲では

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

で近似することができる（ $f^{(n)}(0)$ は $f(x)$ を n 回微分し $x=0$ としたもの ） これを利用して, 以下の関数の 5 次の近似式の $a_0, \cdots, a_5$ と $b_0, \cdots, b_5$ を求めよ.

$$e^x \text{ の近似式} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$$
$$\cos x \text{ の近似式} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5$$

(鳥取大 2005) (m20053905)

0.747 負でない整数 n に対し, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^n x dx$ とおくとき, 以下の問に答えよ.

(1) I_0 および I_1 を求めよ.

(2) $n \ge 2$ に対し, $I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ が成り立つことを示せ.

(3) I_n を求めよ.

(鳥取大 2005) (m20053906)

0.748 微分可能な関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義式 $f'(x) = \displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ を用いて, 以下の微分公式を証明せよ.

(1) $y(x)=u(x)v(x)$ の微分 ： $y'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

(2) $y(x)=\sin(x)$ の微分 ： $y'(x)=\cos(x)$ ただし, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を利用してもよい.

(鳥取大 2006) (m20063901)

0.749 (1) $Z=f(x,y)=\sin(x)\cos(y)$, $x=e^t$, $y=\log_e(t)$ のとき, dZ/dt を t の関数として求めよ.

(2) xy 平面上の点 (x,y) が $\phi(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$ で表される曲線上を動くとき, 関数 $Z=f(x,y)=x+2y+5$ が極値をとる点 (x,y) とその極値を求めよ（偏微分の手法を用いて解答すること）.

(鳥取大 2006) (m20063902)

0.750 位置ベクトル, $\overrightarrow{OA}=3\vec{\boldsymbol{i}}+\vec{\boldsymbol{k}}$, $\overrightarrow{OB}=3\vec{\boldsymbol{i}}+4\vec{\boldsymbol{j}}+\vec{\boldsymbol{k}}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{\boldsymbol{j}}+3\vec{\boldsymbol{k}}$ が与えられている. 以下の問いに答えなさい. なお, $\vec{\boldsymbol{i}}$, $\vec{\boldsymbol{j}}$ および $\vec{\boldsymbol{k}}$ はそれぞれ x, y および z 方向における単位ベクトルを, O は原点を表す.

(1) 外積 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$ を求めよ.

(2) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ の内積を計算し, $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ とのなす角 θ に対する $\cos\theta$ を求めよ.

(3) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ で作られる三角形 OAC の面積を求めよ.

(4) ベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ および $\overrightarrow{OC}$ で作られる平行六面体の体積を求めよ.

(鳥取大 2007)　　(m20073913)

0.751 $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ とおくとき，次の式が成り立つことを示せ.

(1) $R(\alpha)R(\beta) = R(\beta)R(\alpha) = R(\alpha+\beta)$　　(2) $R(-\alpha) = R(\alpha)^{-1}$

(鳥取大 2007)　　(m20073914)

0.752 方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x$ の特殊解を定数変化法を用いて求めよ.

(鳥取大 2009)　　(m20093902)

0.753 2 次元において直交座標 (x, y) と極座標 (r, θ) には,

$$x = r\cos\theta\ , \quad y = r\sin\theta$$

の関係式がある $(r > 0,\ 0 < \theta \leq 2\pi)$; これについて, 以下の問に答えよ.

(1) r を x, y のみの関数として表せ. また, θ を x, y のみの関数として表せ.

(2) 以下の偏微分をそれぞれ計算せよ.

$(2a)$ $\dfrac{\partial x}{\partial r}$　　$(2b)$ $\dfrac{\partial r}{\partial x}$　　$(2c)$ $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$

(鳥取大 2010)　　(m20103902)

0.754 $f(x) = \cos(x)$ は x が十分小さい範囲で,

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{4} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \tag{1}$$

と 4 次式近似できる. ただし $f^{(n)}(x)$ は n 次導関数とする. これについて, 以下の問に答えよ

(1) $f(x),\ f^{(1)}(x),\ f^{(2)}(x),\ f^{(3)}(x),\ f^{(4)}(x)$ を計算し, 式 (1) 右辺の具体的関数形を書け.

(2) 関数 $g(x)$

$$g(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2} \tag{2}$$

について, (1) で求めた $\cos(x)$ の近似式を用いることで, $g(x)$ の近似式を求めよ.

(3) (2) で得られた近似式より, $g(0.1)$ の近似値を計算せよ. 必要なら $1/24 \approx 0.042$ を用いて良い.

(鳥取大 2010)　　(m20103903)

0.755 サイクロイド：$x = a(t - \sin t)\ ,\ \ y = a(1-\cos t)$　$(a > 0\ ,\ 0 \leq t \leq 2\pi)$ の長さ L を求めよ.

(鳥取大 2010)　　(m20103905)

0.756 次の問に答えよ.

(1) サイクロイド：$x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta$　$(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ.

(2) 曲線 $y = 2x^2$ と直線 $y = x$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに回転したときに得られる立体の体積を求めよ.

(鳥取大 2011)　　(m20113904)

0.757 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 1 - y^2$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 2y = \cos x$

(鳥取大 2011)　　(m20113908)

0.758 実数 x に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}$ を求めよ．

(岡山大 2003) (m20034002)

0.759 $n=1,2$ に対して，極座標で与えられた曲線 $C_n : r^n = \cos n\theta$ を考える。次の問に答えよ。

(1) 曲線 C_1 を xy 平面に描き，x 軸のまわりに回転してできる図形の表面積を求めよ．

(2) 曲線 $C_2(0 \leq \theta \leq \pi/4)$ の長さ l は，$l = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ で与えられることを示せ．

(岡山大 2006) (m20064002)

0.760 (1) 関数 $f(t)$ を $f(t) = \dfrac{1+at}{1+bt}$ によって定義する（a,b は定数）．このとき，$f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ を計算せよ．

(2) 次の極限値が存在するように定数 a,b を定め，その極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^6}\left(\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}\right)$$

(岡山大 2008) (m20084001)

0.761 $|x| \neq 1$ なる実数 x に対して

$$f(x) = \int_0^{\pi} \log(1-2x\cos t + x^2)dt$$

で関数 $f(x)$ を定義する．次の各問いに答えよ．

(1) $f(x) = f(-x)$ を示せ．

(2) $f(x) + f(-x) = f(x^2)$ を示せ．

(3) $x \neq 0$ のとき，$f(x) = 2\pi\log|x| + f(\frac{1}{x})$ を示せ．

(4) $|x| < 1$ のとき，$f(x)$ を求めよ．

(5) $|x| > 1$ のとき，$f(x)$ を求めよ．

(岡山大 2012) (m20124002)

0.762 関数 $a_{m,n}(x)$ $(m,n \in \mathbb{N})$ を

$$a_{m,n}(x) = \cos^{2n}(m!\pi x)$$

とし，関数 $g_m(x)$ $(m \in \mathbb{N})$ および $f(x)$ を

$$g_m(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{1+a_{m,n}(x)}$$

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} g_m(x)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) x が無理数のとき $g_m(x)$ を求めよ．

(2) x が有理数のとき $f(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ は $x=0$ で連続であることを示せ．

(4) $f(x)$ は $x=0$ で微分不可能であることを示せ．

(岡山大 2013) (m20134001)

0.763 関数 $f_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ を

$$f_n(x) = c_n \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^n$$

で定める．ただし，c_n は正の定数で

$$\int_0^\pi f_n(x)dx = 1$$

となるように選ぶ．以下の問いに答えよ．

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_0^\pi \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^n \sin x dx$$

を求めよ．

(2) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $c_n < \dfrac{n+1}{2}$ が成り立つことを示せ．

(3) $0 < x \leqq \pi$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．

(岡山大 2016) (m20164001)

0.764 $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対し，$I_n = \displaystyle\int_0^\pi \cos^n x dx$ とおく．次に答えよ．

(1) I_2, I_3 を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ に対し，$I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ を示せ．

(3) $n \geqq 4$ に対し，I_n を求めよ．

(広島大 2003) (m20034103)

0.765 a, b は実定数で $a \neq 0$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int e^{ax} \sin bx\, dx$，$\displaystyle\int e^{ax} \cos bx\, dx$ を求めよ．

(2) 1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + ay = \cos bx \qquad (*)$$

の一般解を求めよ．

(3) 初期値 $y(0)$ がどのような値であっても，$x \to \infty$ のとき微分方程式 $(*)$ の解 $y(x)$ が収束するための必要十分条件を a と b を用いて表せ．

(広島大 2006) (m20064105)

0.766 次の定積分を計算せよ． $\displaystyle\int_0^\infty \cos(ax)e^{-x}dx$ (ただし，a は正定数)

(広島大 2006) (m20064107)

0.767 (1) 曲線 $y = \cosh x$ $(0 \leqq x \leqq \log 3)$ の長さを求めよ．ただし，$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ である．

(2) $\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\}$ のとき，$\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy$ を求めよ．

(広島大 2009) (m20094101)

0.768 2 次の実正方行列全体のなすベクトル空間を V とし，その任意の元 A, B に対して

$$(A, B) = \mathrm{tr}\,({}^t\!AB),$$

とおく．ただし，${}^t\!A$ は A の転置行列とし，$\mathrm{tr}\, C$ は行列 C のトレースとする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) (A, B) は内積であることを示せ．

(2) A と B が

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

で与えられているとき，(A, B) を求め，さらに A と B のなす角 θ を求めよ．

ただし，$0 \leqq \alpha - \beta \leqq \pi$ とする．

(3) (2) で定義した A に対して，線形写像 $f : V \to \mathbb{R}$ を $f(X) = (A, X)\ \ (X \in V)$ で定義する．このとき $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求め，$\mathrm{Ker}\, f$ の正規直交基底を 1 組求めよ．

(広島大 2009)　　(m20094104)

0.769 (1) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを示せ．

(3) 積分 $I(c) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2cx\, dx$ について，$\dfrac{dI(c)}{dc}$ を c, $I(c)$ を用いて表せ．

(4) 積分 $I(c)$ を求めよ．

(広島大 2010)　　(m20104102)

0.770 (1) $\cos x$ の $x = 0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ．

(2) $\log(1-x)$ の $x = 0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ．

(3) (1) と (2) を用いて, $\log\cos x$ の $x = 0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ．

(4) a を実数とするとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \cos^n \frac{a}{\sqrt{n}} = e^{-\frac{a^2}{2}}$ が成り立つことを示せ．

(広島大 2011)　　(m20114105)

0.771 実数列 $\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^\infty$ 全体のなす実ベクトル空間を V とし，級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^\infty {a_i}^2$ が収束するような実数列 $\{a_n\}$ 全体の集合を W とする．以下の問いに答えよ．

(1) W が V の部分ベクトル空間をなすことを示せ．

(2) $\{a_n\}, \{b_n\} \in W$ に対して，級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^\infty a_i b_i$ が絶対収束することを示せ．

(3) $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \displaystyle\sum_{i=1}^\infty a_i b_i$ は W 上の内積であることを示せ．

(4) $a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, $b_n = \left(\dfrac{5}{7}\right)^n$ のとき，$\{a_n\}, \{b_n\}$ の交角 θ を求めよ．ただし，内積空間の元 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対してノルムを $||\boldsymbol{a}|| := \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$ と書くとき，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の交角とは $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ||\boldsymbol{a}||\ ||\boldsymbol{b}|| \cos\theta$ を満たす実数 $\theta (0 \le \theta \le \pi)$ のことである．

(広島大 2014)　　(m20144109)

0.772 実数 ℓ に対して $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x, y)$ を次で定める．

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^\ell}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．

(1) f が原点 $(0, 0)$ において連続であるための ℓ の条件を求めよ．

(2) f が原点 $(0, 0)$ で x について偏微分可能であるための ℓ の条件を求めよ．

(3) $\ell = 1$ のとき，極限

$$J = \lim_{R\to\infty} \iint_{x^2+y^2 \le R^2} f(x,y)dxdy$$

を考える．変数変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ により，J は

$$J = \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \frac{\sin\left(r^4\varphi(\theta)\right)}{r} dr \right) d\theta$$

となることを示せ．ここで，$\varphi(\theta) = \cos^4\theta + \sin^4\theta$ である．

(4) $\ell = 1$ のとき (3) の極限 J が存在することを示し，その値を求めよ．
その際，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ は収束し，その値が $\dfrac{\pi}{2}$ であることを用いても良い．

(広島大 2014)　　(m20144110)

0.773 (1) 2 以上の自然数 n に対して，

$$\int \cos^n \frac{x}{3}dx = \frac{3}{n}\cos^{n-1}\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}\frac{x}{3}dx$$

が成り立つことを示せ．

(2) $f(\theta) = \cos^3\dfrac{\theta}{3}$ とし，xy平面上の曲線

$$C\ :\ \begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\sin\theta \end{cases} \qquad (0 \le \theta \le 2\pi)$$

を考える．次の (i)，(ii)，(iii) に答えよ．

(i) C の概形を図示せよ（x 軸，y 軸との交点の座標も記すこと）．

(ii) C の長さを求めよ．

(iii) C で囲まれた部分の面積を求めよ．

(広島大 2016)　　(m20164102)

0.774 (1) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(a > 0)$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．ただし，途中の計算式も解答用紙に明記すること．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$ の値を求めよ．ただし，途中の計算式も解答用紙に明記すること．

(広島大 2016)　　(m20164109)

0.775 実数 x に対し，

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

と定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = \tanh x$ のグラフを描け．増減表を書き，変曲点があればすべて求めること．

(2) $|f(x)| \le \dfrac{4}{5}$ を満たす x からなる区間を求めよ．

(3) $f''(x) + 2f(x)\left(1 - f(x)^2\right) = 0$ が成り立つことを示せ．

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)^2 dx$ を求めよ．

(広島大 2017)　　(m20174102)

0.776 xy 平面上において，θ を変数として，座標 $x,\ y$ が，$x = a(\theta - \sin\theta)$，$y = a(1 - \cos\theta)$ で与えられる曲線を，サイクロイドと呼ぶ．ここで，a は定数である．$\theta \geq 0$ におけるこの曲線上で，x 軸に対する曲線の傾きが 0 となる点 $(x,\ y)$ のうち，原点 $(x = 0,\ y = 0)$ に最も近い点を $(x_1,\ y_1)$，2 番目に近い点を $(x_2,\ y_2)$，$\cdots$，n 番目に近い点を $(x_n,\ y_n)$ とする．$x_n,\ y_n$ を求めよ．

(広島大 2018)　　(m20184109)

0.777 次の積分を計算せよ．

$\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx\,\cos nx\,dx$　　　ただし，m, n は整数とする．

(広島大 2021)　　(m20214108)

0.778 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x(1 - \cos x)}$ を求めよ．

(2) x の関数 $x^2 e^x$ の n 次導関数を求めよ．ただし，n は 2 以上の整数とする．

(3) $z = f(x, y)$，$x = g(t)$，$y = h(t)$ がそれぞれ C^2 級の関数であるとき，$\dfrac{d^2 z}{dt^2}$ を求めよ．

(広島市立大 2007)　　(m20074201)

0.779 2 重積分 . $S = \displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy$,　$D = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$ を求めることによって，

$I = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$　　を求めたい．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $S = I^2$ を示せ．

(2) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と変数変換して S を求めよ．また，I を求めよ．

(広島市立大 2008)　　(m20084201)

0.780 関数 $z = e^x(\cos x + \sin y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(広島市立大 2010)　　(m20104201)

0.781 変数変換 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ を用いて, 2 重積分

$$S = \iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy\ ,\quad D = \left\{(x, y) \,|\, 1 \leqq\ x^2 + y^2 \leqq\ 4\right\}$$

の値を求めよ．

(広島市立大 2010)　　(m20104203)

0.782 極座標 (r, θ) で表示して $r = 1 + \cos\theta$ で表わされる曲線を考える．極座標で $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ と表わせるこの曲線上の点 A での接線の方程式を求めよ．

(広島市立大 2012)　　(m20124203)

0.783 (1) 関数 $z = \cos(xy)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x, y) = xe^{-(x^2+y^2)}$ の極値と，極値をとる点を求めよ．

(広島市立大 2013)　　(m20134201)

0.784 $D = \left\{(x, y) \in R^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1\ ,\ x \leq \sqrt{3}y\right\}$ とおく．
変数変換 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ を用いて，

$$\iint_D xy^2\,dxdy$$

を求めよ．

(広島市立大 2013)　　(m20134202)

0.785 次の微分方程式を解け.

$$y'' + 2y' + 3y = 2\cos x$$

(山口大 1999)　　(m19994303)

0.786 $\sqrt{3}\sin x + \cos x$ を $r\sin(x+\alpha),\ r>0$ の形に表せ.

(山口大 2001)　　(m20014302)

0.787 次の方程式を解きなさい.　$\cos 3\theta + \cos\theta = 0 \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

(山口大 2001)　　(m20014304)

0.788 次の式を $r\sin(x+\alpha),\ -\pi < \alpha \leqq \pi$ の形に表せ.　$\sin x - \sqrt{3}\cos x$

(山口大 2001)　　(m20014306)

0.789 双曲線関数 $\sinh(x), \cosh(x)$ および $\tanh(x)$ は次のように定義される.

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

(1) $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$ を証明しなさい.

(2) $y = \tanh(x)$ のグラフを描きなさい.

(山口大 2001)　　(m20014308)

0.790 (1) 不定積分 $\displaystyle\int x\log x\ dx$ を求めなさい.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^3 x\,dx$ を求めなさい.

(山口大 2001)　　(m20014310)

0.791 行列 $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ について

(1) 逆行列 $A(\theta)^{-1}$ を求めなさい.

(2) $A(\theta_1 + \theta_2) = A(\theta_1)A(\theta_2)$ を示しなさい.

(3) $A(\theta)A(-\theta) = I$（I は単位行列）を示しなさい.

(山口大 2002)　　(m20024303)

0.792 θ の範囲が $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき，θ の関数　$y = 2\cos 2\theta + 4\sin\theta + 1$

の最大値と最小値を求めなさい．また，そのときの θ の値を求めなさい.

(山口大 2003)　　(m20034301)

0.793 ド・モアブルの法則 $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ を数学的帰納法で証明しなさい.

(山口大 2003)　　(m20034304)

0.794 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \tan x dx$ を求めなさい.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int x\cos ax dx$ を求めなさい.

(3) 不定積分 $\displaystyle\int dx/(x^2(1-x))$ を求めなさい.

(山口大 2003)　　(m20034306)

0.795 次の等式を満たす $f(x)$ を求めよ.

$$f(x)=\sin x-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt$$

（山口大 2004）　(m20044304)

0.796 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ の逆行列を求めなさい.

（山口大 2004）　(m20044308)

0.797 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x dx$

(2) $\displaystyle\int x\cos ax dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$

(山口大 2005)　(m20054306)

0.798 次の微分方程式を解きなさい.

(1) $x\dfrac{dy}{dx}+y=0$

(2) $x\dfrac{dy}{dx}+y=x\log x$　を (1) の結果を利用して解きなさい.

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+5y=e^x\cos 2x$

(山口大 2005)　(m20054308)

0.799 $f(x)=\tan^{-1}x$ のとき, 次の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の導関数を求めよ.

(2) 次の等式を数学的帰納法により証明せよ. ただし, $y=f(x)$ とする.

$$\frac{d^ny}{dx^n}=(n-1)!\,\cos^n y\,\sin\left(ny+\frac{n\pi}{2}\right)\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

(3) $f^{(n)}(x)=\dfrac{d^ny}{dx^n}$ とすると, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$f^{(2m)}(0)=0\,,\quad f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m(2m)!\qquad(m=0,1,2,3,\cdots)$$

(4) 関数 $f(x)$ をマクローリン展開せよ.

(5) 次の等式を証明せよ.

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{2m+1}$$

(山口大 2005)　(m20054311)

0.800 (1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx$　（ n：整数）をそれぞれ求めなさい.

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx$　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx$　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx$　（n,m：正整数）をそれぞれ求めなさい.

(3) 周期 2π をもち，$f(x) = \begin{cases} -\pi/4 & (-\pi < x < 0 \text{ のとき}) \\ \pi/4 & (0 < x < \pi \text{のとき}) \end{cases}$ で定義される関数をフーリエ級数に展開しなさい．

(山口大 2007)　　(m20074301)

0.801　$f(x) = \cos x + \alpha x$ が極値をもたないための α の条件を求めなさい．

(山口大 2009)　　(m20094310)

0.802　関数 $f(x) = \cos(3x^2)$ をマクローリン展開しなさい．

(山口大 2009)　　(m20094314)

0.803　θ の範囲が $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の θ の関数

$$y = \frac{1}{4}(\cos 2\theta)^2 - \frac{7}{3}(\sin\theta)^3 + \frac{3}{4}$$

の増減表を作成し，グラフの概形を描きなさい．

(山口大 2014)　　(m20144304)

0.804　下に示す関数 y の最大値および最小値を求めなさい．また，そのときの θ の値を求めなさい．

$$y = \cos^2\theta + \sin\theta \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

(山口大 2015)　　(m20154303)

0.805　一辺の長さが 3 の正四面体 $ABCD$ において，辺 BC の中点を M とする．
さらに辺 CD 上で $CN = 2ND$ を満たす点を N とする，

(1) 線分 AM, AN, MN の長さを求めなさい．

(2) $\angle MAN = \theta$ とおくとき，$\cos\theta$ の値を求めなさい．

(3) $\triangle AMN$ の面積を求めなさい．

(山口大 2021)　　(m20214303)

0.806　次の問に答えよ．

(1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とする．このとき，行列式 $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を r, θ で表せ．

(2) (1) で求めた J に対して，$I = \displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty f(r\cos\theta, r\sin\theta)Jdr$ であることを用いて，$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ のとき I の値を求めよ．

(徳島大 1999)　　(m19994402)

0.807　次の微分方程式の一般解 $y = y(x)$ を求めよ．

(1) $y'' - 3y' + 2y = 0$

(2) $y'' - 3y' + 2y = \cos x$

(3) $y'' - 2y' + y = 0$

(4) $y'' - 2y' + y = e^x$

(徳島大 1999)　　(m19994403)

0.808 $A(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 1-\cos\theta & 1 & \sin\theta\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}$ とする.

(1) $A(\theta)$ が正則であることを示せ.

(2) 1 が $A(\theta)$ の固有値であることを示せ.

(3) $A^2(\theta)(=A(\theta)A(\theta))$ に対して，$A^2(\theta)=A(m\theta)$ となる自然数 m を求めよ.

(徳島大 2003)　　(m20034404)

0.809 $y=y(x)$ が微分方程式 $y''+2y'+5y=0$ を満たす. 次の問に答えよ.

(1) 微分方程式の一般解を求めよ. ただし, 最終結果に複素数が現れてはならない.（必要ならオイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を用いてもよい.）

(2) 初期条件 $y(0)=y'(0)=-e^{\frac{3}{4}\pi}$ を満たす微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた $y(x)$ に対し, $y\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)$ と $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}y(x)$ を求めよ.

(徳島大 2005)　　(m20054404)

0.810 $f(x)=\sqrt{1-\cos x}$ について，次の問いに答えよ.

(1) $f'(x)$ を求めよ.　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\{f'(x)\}^2$ を求めよ.

(3) $f''(x)$ を求めよ.　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}f''(x)$ を求めよ.

(徳島大 2008)　　(m20084402)

0.811 次の連立微分方程式の一般解 $x=x(t),\ y=y(t)$ を求めよ.　$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x\sin t\\ \dfrac{dy}{dt}=x\cos t+y\sin t\end{cases}$

(徳島大 2008)　　(m20084404)

0.812 (1) $f(x)$ は微分可能で $f'(x)$ は連続とする．このとき，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{a^2f(x)-x^2f(a)}{x-a}$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x+1}$ を求める次の計算の誤りを指摘せよ.

ロピタルの定理を用いて　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x+1}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)'}{(x+1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{1}=0$

(徳島大 2009)　　(m20094402)

0.813 $0<a<1,\ D_a=\left\{(x,y)\ ;\ a^2\leqq\ x^2+y^2\leqq\dfrac{1}{a^2}\right\}$ とする.

(1) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とする. 行列式 $J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r}\\ \dfrac{\partial x}{\partial\theta} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}$ を $r,\ \theta$ で表せ.

(2) $\displaystyle I(a)=\iint_{D_a}e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{a\to 0}I(a)$ を求めよ.

(徳島大 2010)　　(m20104404)

0.814 連立微分方程式 $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ \cos t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ の一般解を求めよ.

(徳島大 2012)　　(m20124404)

0.815 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{x^2-\pi^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-e^{-x})}{\sin x - x\cos x}$

(徳島大 2012) (m20124406)

0.816 n は自然数とする.

(1) $\sin(n+1)x-\sin(n-1)x=2\cos nx\sin x$ を示せ.

(2) $\displaystyle I_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+1)x-\sin(n-1)x}{\sin x}dx$ を求めよ.

(3) $\displaystyle J_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx$ を求めよ.

(徳島大 2013) (m20134403)

0.817 $0<a<\dfrac{1}{2}$ とし, xy 平面上の領域を $D=\left\{(x,y)\ ;\ y\leqq\ x\leqq\dfrac{1}{2},\ a\leqq\ y\leqq\dfrac{1}{2}\right\}$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) D を図示せよ.

(2) $\displaystyle I_a=\iint_D\cos\left(\pi(x-a)^2\right)dxdy$ を求めよ.

(3) (2) の I_a について, $\displaystyle\lim_{a\to\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-a\right)^{-2}I_a$ を求めよ.

(徳島大 2014) (m20144403)

0.818 関数 $f(x)$ は, $\sin f(x)=\cos^2 x,\ 0\leqq f(x)\leqq\dfrac{\pi}{2}$ を満たす.

(1) $f(0),\ f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ をそれぞれ求めよ.

(2) $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right),\ f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ をそれぞれ求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0}f'(x)$ を求めよ.

(徳島大 2018) (m20184402)

0.819 xy 平面上の領域を $D=\left\{(x,\ y)\ ;\ x^2+y^2\leqq 2x,\ y\geqq\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right\}$ とする.

(1) D の概形を図示せよ.

(2) 変数変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\ (r\geqq 0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ により, D に対応する $r\theta$ 平面上の領域を E とする. E は, 定数 $\alpha,\ \beta$ および関数 $f(\theta)$ を用いて $\{(r,\ \theta)\ ;\ \alpha\leqq\theta\leqq\beta,\ 0\leqq r\leqq f(\theta)\}$ と表される. $\alpha,\ \beta,\ f(\theta)$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を求めよ.

(徳島大 2018) (m20184403)

0.820 次は, ロピタルの定理の使用例である.

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ は $\dfrac{0}{0}$ の不定形であるから, ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$$

これらにならって極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right)$ を求めてみる. 以下の問いに答えよ.

(1) ロピタルの定理が使える様に，$\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\log x}\right)$ を式変形せよ．

(2) 極限値 $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\log x}\right)$ を求めよ．

(高知大 2008)　　(m20084505)

0.821 次の媒介変数で表された曲線

$$x = f(t) = \cos^3 t\ ,\quad y = g(t) = \sin^3 t$$

について以下の問いに答えよ．

(1) この曲線は通常何と呼ばれているか答えよ．

(2) $f'(t)$ と $g'(t)$ を求めよ．

(3) t の範囲を $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ とした時の曲線の長さ L を求めよ．

(高知大 2018)　　(m20184505)

0.822 $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数 $f(x,y)$ が与えられているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 1 変数関数 $a(t)$ を用いて $f(x,y) = a(y-\sin x)$ と表されるとする．このとき，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ求め，

$$\frac{\partial f}{\partial x} + (\cos x)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

が成り立つことを確かめよ．

(2) $u = y - \sin x,\ v = x$ とおく．この変換のもとで，$u,\ v$ の関数 $g(u,v)$ を $g(u,v) = f(x,y)$ で定義する．このとき，$\dfrac{\partial g}{\partial u}$ および $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ を $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を用いて表せ．

(3) $f(x,y)$ が $\mathbb{R}^2$ 上 $(*)$ をみたすとする．このとき，$f(x,y)$ は $y-\sin x$ のみの関数であること，つまりある 1 変数関数 $a(t)$ を用いて $f(x,y) = a(y-\sin x)$ と表されることを示せ．

(4) $f(x,y)$ が $\mathbb{R}^2$ 上 $(*)$ をみたし，かつ $f(0,y) = y^2$ がすべての実数 y について成り立つとき，$f(x,y)$ を求めよ．

(高知大 2019)　　(m20194502)

0.823 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$　　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{4-\cos^2 x}dx$

（愛媛大 2004）　　(m20044602)

0.824 定数 a, b が $a > b > 0$ を満たすとき, パラメータ表示された曲線

$$\begin{cases} x = & a\cos t \\ y = & b\sin t \end{cases} \qquad (0 \leqq\ t \leqq\ 2\pi)$$

を考える．

(1) この曲線の概形を描け．

(2) $t = \dfrac{\pi}{4}$ に対応する点におけるこの曲線の接線の方程式を求め, (1) で描いた図に書き入れよ．

(3) もとの曲線を y 軸を中心に回転したときにできる図形の体積を求めよ．

(愛媛大 2005)　　(m20054605)

0.825 (1) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

(2) 次の関数を微分せよ．

(a) $x\sin^{-1}x$ (b) $\log\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ (c) $a^{x\log x}$（ただし，a は $a\neq 1$ である正の定数）

(愛媛大 2006) (m20064601)

0.826 (1) 不定積分 $\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx$ を求めよ。 (2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1+3t^2}\,dt$ を求めよ。

(愛媛大 2006) (m20064602)

0.827 C^2 級の 2 変数関数 $z=f(x,y)$ と 2 次元の極座標変換 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ の合成は，r と θ の関数 $z=f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ になる．

(1) 次の等式を示せ． $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を z の r と θ についての偏導関数および r と θ のみを用いて表せ．

(愛媛大 2006) (m20064615)

0.828 (1) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^{10}-a^{10}}{x-a}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x^2}{x\sin 2x}$

(2) 次の関数を微分せよ．

(a) $e^{-2x}\cos\dfrac{x}{2}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (c) $x^{\frac{1}{x}}$ $(x>0)$

(愛媛大 2007) (m20074601)

0.829 平面中の点 P_1, P_2 のデカルト座標（直交座標）をそれぞれ $(x_1,\,y_1)$, $(x_2,\,y_2)$ とする．これら 2 つの点 P_1, P_2 と原点 O とで作られる角を $\angle P_1OP_2=\theta$ とする場合，$\cos\theta$ を 2 つの点の座標で表すとどのようになるか．

(愛媛大 2007) (m20074618)

0.830 (1) (a) 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{\cos x}-1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ を示せ． ただし，n は自然数とする．

(2) 次の関数の導関数を求めよ．

(a) $\log|2x+1|$ (b) $\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ (c) $(\sin x)^{\sin x}$

(愛媛大 2008) (m20084608)

0.831 (1) $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ が偏微分可能であるとき，$J(u,v)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\psi}{\partial v}-\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial\psi}{\partial u}$ とおく．次の φ, ψ に対して $J(u,v)$ を求めよ．

(a) $\varphi(u,v)=e^u\cos v$, $\psi(u,v)=e^u\sin v$

(b) $\varphi(u,v)=\sqrt{u^2+v^2}$, $\psi(u,v)=\tan^{-1}\dfrac{v}{u}$

(2) $D=\{(x,y)\ ;\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x^2+y^2\leqq 1\}$ とするとき，次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D x\sqrt{y}\,dxdy$$

(愛媛大 2008) (m20084610)

0.832 関数 $z=f(x,y)$ は偏微分可能であるとする. $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ と極座標変換するとき, 次の 2 つの式が成立することを示せ.

$$(a)\ x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=r\cos 2\theta\frac{\partial z}{\partial r}-\sin 2\theta\frac{\partial z}{\partial \theta} \qquad (b)\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(愛媛大 2010) (m20104603)

0.833 以下の問に答えよ.

(1) 次の累次積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{2y}{\pi}}^1 \cos\frac{y}{x}dx\right)dy$$

(2) $D=\{(x,y)\,:\,x,y\geq 0,\ 0\leq x^2+y^2\leq 2\}$ とするとき, 次の積分の値を求めよ.

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2+1}\,dxdy$$

(愛媛大 2011) (m20114605)

0.834 (1) $f(x)=\tan^{-1}x+\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ とおく. ただし, $\tan^{-1}x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする.

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ. (b) $f(2)$ の値を求めよ.

(2) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{-4x}}{\sin 5x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{\log x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right)$

(愛媛大 2011) (m20114607)

0.835 (1) 次の不定積分を求めよ.

$$\int e^{2x}\cos x\,dx$$

(2) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおいて, 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2+\cos x}\,dx$$

(愛媛大 2011) (m20114608)

0.836 (1) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$

(2) x の関数 $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ を微分せよ.

(3) $f(x)=\cos^{-1}(\sin x)$ とおく. ただし, $\cos^{-1}x$ の値域は $[0,\pi]$ とする.

(a) $f(\frac{\pi}{2})$ を求めよ.

(b) $f(x)$ を微分せよ.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}f'(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}f'(x)$ を求めよ.

(愛媛大 2013) (m20134601)

0.837 (1) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\log(1+x)}{x^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{4}{x}\right)^{x^2}$

(2) x の関数 $x\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}x$ を微分せよ.

(3) 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\cos^{-1}x+\cos^{-1}(-x)=\pi$$

ただし, $\cos^{-1}x$ の値域は $[0,\ \pi]$ とする.

(愛媛大 2015)　　(m20154601)

0.838 (1) C^1 級の関数 $z=f(x,y)$ と $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ の合成関数 $z=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ に対して

$${z_x}^2+{z_y}^2={z_r}^2+\frac{1}{r^2}{z_\theta}^2$$

が成り立つことを示せ.

(2) $f(x,y)=2x^4-8xy^3+y^4+5$ とする. 関数 $f(x,y)=0$ で定まる陰関数 y の極値を求めよ.

(愛媛大 2015)　　(m20154606)

0.839 (1) 次で定義される関数 $f(x,y)$ の原点 $(0,0)$ での連続性を調べよ.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(2) C^1 級の関数 $f(x,y)$ は

$$x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

を満たすとする. このとき, $z=f(x,y)$ と $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ の合成関数 $z=f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ は r だけの関数であることを示せ.

(3) 連続関数 $f(x)$ について, 次の等式を示せ.

$$\int_0^x dy\int_0^y dz\int_0^z f(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^x(x-t)^2f(t)dt$$

(愛媛大 2016)　　(m20164603)

0.840 (1) $\tan^{-1}x=\sin^{-1}\dfrac{3}{5}$ を満たす x の値を求めよ. ただし, $\tan^{-1}x$ は逆正接関数とし $\sin^{-1}x$ は逆正弦関数とする.

(2) $y=(x^2+1)e^{-3x}$ の n 次導関数をライプニッツの公式を用いて求めよ.

(3) 自然数 n に対して $I_n=\displaystyle\int\sin^n x dx$ と定める. このとき次の漸化式を示せ.

$$I_n=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}\qquad(n\geq 3)$$

(愛媛大 2017)　　(m20174614)

0.841 (1) 次の不定積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-3x+2}$　　(b) $\displaystyle\int e^{\cos x}\sin 2xdx$

(2) 次の広義積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+3}$$

(愛媛大 2018)　　(m20184602)

0.842 (1) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2x\tan x-\frac{\pi}{2}}{\sin x-\cos x}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\log\left(\frac{x+2}{x+4}\right)$

(2) $f(x)=\sqrt{x+2}$ とする．

(a) 3 階までの導関数 $f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)$ を求めよ．

(b) 次の式

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-a_0-a_1x-a_2x^2}{x^2}=0$$

が成り立つように定数 $a_0,\ a_1,\ a_2$ を定めよ．

(愛媛大 2021)　　(m20214601)

0.843 (1) 次の極限値を求めよ．ただし，$[x]$ は，実数 x を超えない最大の整数とする．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+3x^2)}{\log(5+7x)}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{x^2-[3x]x+2}{x-1}$　　(c) $\displaystyle\lim_{x\to0}\int_0^{x/2}\frac{dt}{(\sin x)\sqrt{1-t^2}}$

(2) 次の関数の導関数を求めよ．

(a) $\sqrt{1+\cos^2 x}$　　(b) $\sin^{-1}(\log x)$

(愛媛大 2022)　　(m20224606)

0.844 $\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\theta\end{cases}$　　$(0\le\theta\le\pi\ ,\ 0\le\varphi\le2\pi\ ,\ r\ge0)$　　とする．

(1) ヤコビヤンが $r^2\sin\theta$ になることを示せ．

(2) $D\ :\ \{x^2+y^2+z^2\leqq R^2\quad x\geqq0\ ,\ y\geqq0\ ,\ z\geqq0\ \}$

D は半径 R の球の $\dfrac{1}{8}$ である．このときの

$$\iiint_D xy\,dx\,dy\,dz$$

を求めよ．

(九州大 1999)　　(m19994703)

0.845 xy 平面上の点 (x,y) と，uv 平面上の点 (u,v) との間に

$$u=e^x\cos y,\quad v=e^x\sin y$$

という対応関係がある．このとき，xy 平面上の 3 点 $A(0,0),B(1,0),C(1,\dfrac{\pi}{2})$ を頂点とする三角形 ABC を，上の対応関係によって uv 平面上に移した図形を P として，次の問いに答えよ．

(1) 図形 P がどのような図形であるかを示せ．

(2) 図形 P の面積を求めよ．

(九州大 2000)　　(m20004701)

0.846 次の積分の計算をしなさい．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+\sin x}\log(1+\sin x)dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}t^2e^{-t}dt$

(九州大 2001)　　(m20014701)

0.847 次の積分の値を求めたい．

$$I(p)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-2p\cos\theta+p^2}d\theta,\quad 0<p<1$$

(1) 関係式

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad \text{および} \quad \frac{d}{d\theta}e^{i\theta} = ie^{i\theta}$$

を利用して，$I(p)$ を複素平面内の単位円周 C に沿っての線積分

$$I(p) = \int_C F(z)dz$$

と書き換えるには，$F(z)$ をどう定めたらよいか．

(2) 積分 $I(p)$ の値を求めよ．

(九州大 2001)　　(m20014708)

0.848 次の問いに答えよ．

(1) $\cos\omega t$ のラプラス変換を求めよ．

(2) $e^{at}\sin\omega t$ のラプラス変換を求めよ．

(3) 上記の結果を利用して，方程式

$$\int_0^t f(t-\tau)\cos\omega\tau d\tau = e^{at}\sin\omega t$$

を満たす関数 $f(t)$ を求めよ．

(九州大 2001)　　(m20014709)

0.849 y を x の関数，a , b を定数とする．また，微分方程式 $y'' + ay' + by = f(x)$ に対する特解を y_1 とし，$y'' + ay' + by = g(x)$ に対する特解を y_2 とする．このとき，

(1) 微分方程式 $y'' + ay' + by = f(x) + g(x)$ に対する一つの特解は $y_1 + y_2$ となることを示せ．

(2) 微分方程式 $y'' + y' - 2y = \cos x + e^{-x}$ に対する一般解を求めよ．

(九州大 2003)　　(m20034704)

0.850 $f = x^2 + y^2 + \frac{1}{4}z^2 - 1$ とする. 座標系の原点を O, x, y, z 軸上で正の向きをもつ単位ベクトルをそれぞれ i, j, k とし, 以下の問に答えよ.

(1) スカラー場 f の勾配を計算せよ.

(2) 曲面 $f = 0$ 上の点 $P(x_0, y_0, z_0)$ における勾配ベクトル a とベクトル $\overrightarrow{OP}$ とのなす角を, z_0 を用いて表せ.

(3) $x = \sin\theta\cos\varphi$, $y = \sin\theta\sin\varphi$, $z = 2\cos\theta$ とおく．ただし, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ である. 曲面 $f = 0$ 上の点 $Q(\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$, $2\cos\theta)$ における接平面を張る二つのベクトルの組を示し, 法線ベクトルを計算せよ.

(4) (3) と同じ表記の下で, $0 \leq \theta \leq \theta_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ により囲まれる曲面の面積を $S(\theta_0)$ とする. $\frac{dS}{d\theta_0}$ を求めよ．ただし, $0 \leq \theta_0 \leq \pi$ である.

（九州大 2004）　　(m20044707)

0.851 複素変数の関数 $f(z) = \frac{1}{2z^2 - 5z + 2}$ について次の問いに答えよ. ただし, 積分路 C は, 単位円周 $|z| = 1$ を反時計回りに一周する閉曲線とする.

(1) $f(z)$ の各極における留数を求めよ.

(2) 積分 $I = \int_C f(z)dz$ の値を求めよ.

(3) $z = e^{i\theta}$（θ : 実数 , i : 虚数単位）のとき， $\cos\theta = \alpha z + \beta z^{-1}$ を満たす実数 α , β を求めよ.

(4) 積分路 C のパラメータ表示 $C:\ z=e^{i\theta},\ 0 \leqq \theta \leqq\ 2\pi$ を用いることにより, (2) の積分 I は, 次のように変換できる.

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{a}{b\cos\theta+c}d\theta \quad (a,b,c:\ \text{定数})$$

a,b,c を求めよ.

(九州大 2005)　　(m20054703)

0.852 (1) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-ay=0$ を解け.

(2) 区間 $[0,\ell\,]$ での $\dfrac{d^2y}{dx^2}+a^2y=0$ の解で $\begin{cases} y(0)=0 \\ y(\ell)=0 \end{cases}$ を満たす恒等的に 0 でない解を求めよ.

また，a がどのような値のときにそのような解が存在するか答えよ.

(3) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+a^2y=f(x)$ （ただし，$f(x)$ は既知関数）の一般解を定数変化法により求めることを考える.

同次形 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+a^2y=0$ の一般解は，$y=c_1\sin ax+c_2\cos ax \cdots$ ①

であるとし，c_1 および c_2 を x の関数と考えて方程式の特殊解を求めた結果，一般解が

$$y=\frac{1}{a}\left\{\sin ax\int f(x)\cos axdx-\cos ax\int f(x)\sin axdx\right\}+c_1\sin ax+c_2\cos ax$$

となることを示せ.

(九州大 2006)　　(m20064702)

0.853 (1) 2 つの任意の自然数 m,n について，次をそれぞれ示せ.

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nxdx=0$　　(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx=\begin{cases} 0\ ;\ m\neq n \\ \pi\ ;\ m=n \end{cases}$

(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nxdx=\begin{cases} 0\ ;\ m\neq n \\ \pi\ ;\ m=n \end{cases}$

(2) 周期 2π の関数 $f(x)$ がフーリエ級数に展開できる，つまり $\displaystyle f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$

と表現できるとき，

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$　　(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos pxdx$　　(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin pxdx$　　$(\ p=1,2,\cdots)$

をそれぞれ計算せよ.

(3) 周期 2π の関数 $f(x)=|x|\ ;\ -\pi<x\leq\pi$ をフーリエ級数に展開せよ.

(4) (3) の結果を用いて，

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$　　(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$　　(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$　　をそれぞれ計算せよ.

(九州大 2006)　　(m20064704)

0.854 $0 \leqq\ x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ で定義された二つの関数

$$f(x)=-\log(\cos x)\,,\quad g(x)=\log\left(\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right)$$

に対して，以下の問に答えよ.

(1) $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を $\cos x$ を用いて表せ.

(2) 曲線 $y=f(x)$ $(0 \leqq\ x \leqq \frac{\pi}{3})$ の長さを求めよ.

(九州大 2006)　　(m20064712)

0.855 $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1, 2)$ を 2×2 実行列とする． A^T で A の転置行列を表すとする． ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ に対して内積を $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ で定める．

(1) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ が成立する時，$A^T A = AA^T = E$ が成り立つことを示せ．ただし，E は単位行列とする．

(2) (1) の行列 A の行列式は 1 もしくは -1 であることを示せ．さらに行列 A の固有値は絶対値が 1 であることを示せ．

(3) (2) において A の行列式が -1 であるとき，ある実数 θ が存在して
$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ 　と書けることを示せ．

(九州大 2007)　　(m20074708)

0.856 積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a\cos\theta}\,d\theta$ を複素平面の積分に変換して計算する．ただし，a は $0 < a < 1$ の実数である．

(1) 単位円上の任意の点，$z = e^{i\theta}$ に対して，$d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ であることを示せ．

(2) $\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ であることから，I を積分経路を単位円 $|z| = 1$ とする複素積分へ変換せよ．

(3) (2) で得られた複素積分の被積分関数の特異点のうち，単位円内部に含まれる点を書け．

(4) 留数計算によって，$I = \dfrac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$ となることを示せ．

(九州大 2008)　　(m20084703)

0.857 (1) (a) 微分方程式　$\dfrac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$　について，$x = 0$ および $x = L$ において $y = 0$ となる解を求めよ．ただし，ω, L は正の実数である．

(b) 微分方程式　$\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\gamma\omega\dfrac{dy}{dx} + \omega^2 y = F\cos\omega x$　について，$x = 0$ において $y = 0$, $\dfrac{dy}{dx} = 0$ となる解を求めよ．ただし，$\gamma,\ \omega,\ F$ は実数であり，$\omega > 0,\ 0 < \gamma < 1$ である．

(2) (a) 次の微分方程式の一般解を求めよ．　$\dfrac{dy}{dx} + y = y^2$

(b) (a) の解を利用して，次の微分方程式　$\dfrac{dy}{dx} + (2x + 1)y - y^2 = x^2 + x + 1$　の一般解を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084706)

0.858 複素数 z を変数とする偶関数 $f(z)$，奇関数 $g(z)$ が次の関係式を満たすとき，以下の問いに答えよ．

$$e^{iz} = f(z) + i \cdot g(z)$$

なお，i は虚数単位であり，e は自然対数の底である．

(1) $f(z)$ ならびに $g(z)$ を用いて，e^{-iz} を表せ．
ヒント：題意より，$f(z) = f(-z)$, $g(z) = -g(-z)$ が成立する．

(2) e^{iz} ならびに e^{-iz} を用いて，$f(z)$ と $g(z)$ をそれぞれ表せ．

(3) $g(x + iy) = u + iv$ と表すとき，以下の関係式が成立することを示せ．

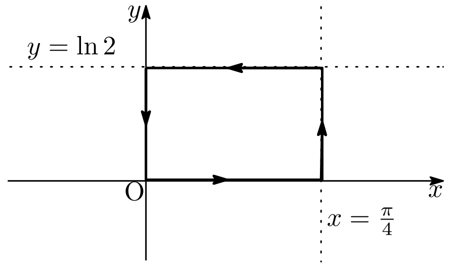
$$u = \sin x \cdot \cosh y$$
$$v = \cos x \cdot \sinh y$$

ただし，x, y, u, v は実数であり，$\cosh y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$，$\sinh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$ である．

(4) $g(x+iy)=i$ を満たす $x+iy$ を全て求めよ.

(5) $g(x+iy)=u+iv$ とし，点 (x,y) が下図の太線で示す xy 平面上の長方形に沿って，原点 O を出発して反時計回りに一周したとき，uv 平面上の点 (u,v) はどのような軌跡を描くか．その軌跡の概略図を示せ.

ヒント：任意の実数 x,y で，$\cos^2 x+\sin^2 x=1$, $\cosh^2 y-\sinh^2 y=1$ が成立する.



(九州大 2008)　　(m20084707)

0.859 (1) 実数 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leq t\leq 1$ に対して，等式 $\dfrac{1+t^2}{t(1+t-t^2)}=\dfrac{a}{t}+\dfrac{b+ct}{1+t-t^2}$ が成り立つように a,b,c を定めよ.

(2) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくとき，$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$ ，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ と表せることを示せ.

(3) 変数変換 $t=\tan\dfrac{x}{2}$ を行い，次の定積分 $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{(\sin x+2\cos x)\sin x}$ の値を求めよ.

(九州大 2008)　　(m20084718)

0.860 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$，$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$，$b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$，

$g(x)=\dfrac{1}{2}a_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ とおく．ただし，n を自然数とする.

(1) フーリエ係数 a_n , b_n を計算せよ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ は発散することを示せ.

(3) フーリエ級数 $g(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ で収束することを示せ.

(4) $x=\pm\pi$ で $f(x)$ と $g(x)$ がどのような関係にあるか述べよ.

(九州大 2009)　　(m20094703)

0.861 (1) n が整数であるとき，複素数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ について以下の式が成り立つことを示せ.

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\quad\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

(2) (i) 式を用い，$\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ を用いて表せ.

(3) (i) 式を用い，複素数 $1-i$ の三乗根をすべて求めよ.

(4) (i) 式を用い，1 の N 乗根をすべて求めよ．ただし，N は正の整数とする．また，$N=4$ の場合の解を複素平面上に図示せよ.

(九州大 2009)　　(m20094704)

0.862 次の定積分を計算せよ.

(1) $2^4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\cos^4 x\,dx$

(2) $2^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x \, dx$

(九州大 2009)　　(m20094705)

0.863 3 次元空間内で

$V = \{(x, y, z) \ ; \ x = t\cos\theta \ , \ y = t\sin\theta \ , \ z = r \ , \ 0 \leq t \leq r \ , \ 0 \leq r \leq 3 \ , \ 0 \leq \theta < 2\pi\}$

で表される集合 V を考える.

(1) V の体積を求めよ.

(2) L を平面

$$z = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + 1$$

とし, $S = V \cap L$ とおく.

$$\min\{z \ ; \ (x, y, z) \in S\} \qquad \max\{z \ ; \ (x, y, z) \in S\}$$

を求めよ.

(九州大 2010)　　(m20104705)

0.864 アステロイド C : $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ に対し，各問いに答えよ.

(1) 曲線 C 上の点 (x, y) に対し，$x = \cos^3 t$ のとき，y を t を用いて表せ.

(2) 曲線 C の囲む領域の面積 S を求めよ.

(3) 曲線 C の長さ L を求めよ.

(九州大 2011)　　(m20114702)

0.865 直交座標を (x, y)，極座標を (r, θ) とするとき，曲線 C : $r = 2(1 + \cos\theta)$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 曲線 C と x 軸，y 軸との交点の直交座標を求めて，曲線 C の概形を xy 平面上に描け.

(2) $r \leqq 2(1 + \cos\theta)$, $y \geqq 0$, $y \leqq -\dfrac{1}{2}x + 2$ で表される領域の面積を求めよ.

(3) 上の (2) で考えた領域の外周の長さを求めよ.

(九州大 2012)　　(m20124703)

0.866 (1) 次の周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \left(-\pi \leqq x < -\dfrac{\pi}{4}\right) \\ 1 & \left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq x < \dfrac{3\pi}{4}\right) \\ -1 & \left(\dfrac{3\pi}{4} \leqq x < \pi\right) \end{cases} \qquad , \qquad f(x + 2\pi) = f(x)$$

(2) 関数 $f(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$ で定義する．次式で定義される関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，関数 $y = F(\omega)$ のグラフの概形を描け．なお，T は正の実数とする.

$$f(t) = \begin{cases} a & (|t| \leqq T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

(3) 関数 $f(t)$ は $t > 0$ で定義されているものとし，$f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$ で定義するとき，以下の問いに答えよ.

(a) $f(t)=\sin\omega t$ のラプラス変換が $F(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ であることを示せ.

(b) $f(t)=\cos\omega t$ のラプラス変換が $F(s)=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ であることを示せ.

(c) $f(t)=a+bt$ のラプラス変換が $F(s)=\dfrac{as+b}{s^2}$ であることを示せ.

(九州大 2012)　　(m20124704)

0.867 (1) 周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を次のように定める. 以下の問いに答えよ.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\quad(n=0,1,\cdots),\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\quad(n=1,2,\cdots)$$

(a) 任意の実数 α に対して $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}f(x)\cos nxdx=a_n$ が成立することを示せ.

(b) 整数 n と実数 x に対して $\cos n(x+\pi)=\begin{cases}\cos nx & (n\text{ が偶数})\\ -\cos nx & (n\text{ が奇数})\end{cases}$ が成立する.

このことを踏まえ, 関数 $g(x)=f(x+\pi)$ のフーリエ係数 $a'_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nxdx$,

$b'_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin nxdx$ を a_n, b_n を用いて表せ.

(2) 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $F(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$ とおく. 以下の問いに答えよ.

(a) $f(x)=e^{-|x|}$ のフーリエ変換を求めよ.

(b) フーリエの積分定理（逆フーリエ変換）を利用して, 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos u}{1+u^2}du$$

(九州大 2013)　　(m20134703)

0.868 (1) $u=f(x,y)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ $(r>0)$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(a) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ を r, θ および, u の r, θ に関する偏導関数を用いて表せ.

(b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を r, θ および, u の r, θ に関する偏導関数を用いて表せ.

(2) 領域 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq 1\right\}$ において, 関数 $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ を考える. 以下の問いに答えよ.

(a) 領域 $\left\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\right\}$ における $f(x,y)$ の極値とそれを与える (x,y) を求めよ. 極大か極小かも述べよ.

(b) 単位円 $x^2+y^2=1$ 上での $f(x,y)$ の最大値, 最小値とそれらを与える (x,y) を求めよ.

(c) 領域 D における $f(x,y)$ の最大値, 最小値とそれらを与える (x,y) を求めよ.

(九州大 2014)　　(m20144704)

0.869 C を区間 $0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で定義された媒介変数方程式 $x(t)=e^t\sin t$, $y(t)=e^t\cos t$ で表される xy 平面上の曲面とする.

(1) 導関数 $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{dy}{dx}$ をそれぞれ求めよ.

(2) 曲線 C の増減を調べ, xy 平面上にグラフをかけ. ただし, $e^{\frac{\pi}{4}}\fallingdotseq 2.19$ である.

(3) 曲線 C の x 軸, y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

(九州大 2015)　　(m20154703)

0.870 (1) (a) 周期 $2L$ の区分的に連続な関数 $f(x)$ をフーリエ級数で表現した式を示し，そのフーリエ係数を求める式を示せ．

(b) 次の関数 $f(x)$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} -2x-4 & (-2 \leqq x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 4-2x & (0 < x \leqq 2) \end{cases}$$

(2) $t > 0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \mathfrak{L}[f(t)] = \displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ とする．必要ならば下記の表にある関係式を用いて，次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．また (b) については，$f(t)$ $(t > 0)$ のグラフをかけ．

(a) $F(s) = \dfrac{2}{s(s+1)(s+2)}$

(b) $F(s) = \dfrac{-s+2}{s^2+2s+4}$

表：

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathfrak{L}[1] = \dfrac{1}{s},\quad \mathfrak{L}[t^n] = \dfrac{n!}{s^{n+1}}\ (n=1,2,\cdots),\quad \mathfrak{L}[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a},\quad \mathfrak{L}[\sin\omega t] = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}, \\ \mathfrak{L}[\cos\omega t] = \dfrac{s}{s^2+\omega^2},\ \mathfrak{L}[f(at)] = \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right),\ \mathfrak{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a),\ \mathfrak{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau}F(s) \end{array}}$$

(九州大 2016)　　(m20164703)

0.871 直交座標系の x, y, z 軸の基本ベクトルを $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とし，位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とする．閉曲線 $C : \boldsymbol{r} = 2\cos\theta\boldsymbol{i} + 2\sin\theta\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 閉曲線 C 上の点における大きさ 1 の接ベクトルを求めよ．

(2) スカラー場 $\varphi = \dfrac{1}{4}x^2y$ の 閉曲線 C に沿う線積分を求めよ．

(3) 閉曲線 C で囲まれた円板を S とし，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{A} = -\frac{1+z}{x^2}\boldsymbol{i} + \frac{z^2}{xy}\boldsymbol{j} + (x^2z - y)\boldsymbol{k}$$

とする．$(\bigtriangledown\varphi) \times \boldsymbol{A} + \varphi(\bigtriangledown \times \boldsymbol{A})$ の S 上の面積分を求めよ．

(九州大 2016)　　(m20164704)

0.872 a, b は $a > 1$, $b > 0$ なる定数とする．$x \geqq 0$ において関数 $f(x)$ を次の式で定義する．　$f(x) = a^{-bx}$

(1) $f(x)$ の導関数を求めよ．

(2) 次の積分（広義積分）を求めよ．　$\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$

(3) 次の積分（広義積分）を求めよ．　$\displaystyle\int_0^\infty a^{-x}\cos x dx$

(九州大 2016)　　(m20164707)

0.873 次の微分方程式を解け．

(1) $x^2y' = (2x+y)(x+y)$　　(2) $y''\sin x + y'\cos x = 0$　　(3) $y'' + y = \sin x$

(九州大 2017)　　(m20174706)

0.874 (1) 次の $y(x)$ に関する微分方程式を初期条件 $y(0)=2,\ y'(0)=0$ のもとで解け.

$$y''+4y'+20y=0$$

(2) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ.

$$y''+2y'+y=50\sin x\cos x$$

(3) 次の完全微分形の方程式について，一般解を求めよ.

$$(4x^3-6xy)dx+(8y-3x^2)dy=0$$

(九州大 2018) (m20184701)

0.875 z を複素数とし，$a>2$ とする．次の問いに答えよ.

(1)

$$\int_C \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2-az+1)}dz$$

を求めよ．ただし，C は原点を中心とする半径 1 の円周を反時計回りに進む積分路とする.

(2)

$$\int_0^{2\pi} \frac{4\sin^2\theta}{a-2\cos\theta}d\theta$$

を求めよ.

(九州大 2018) (m20184704)

0.876 t の関数 y に対して，$y'''=\dfrac{d^3y}{dt^3}$, $y''=\dfrac{d^2y}{dt^2}$, $y'=\dfrac{dy}{dt}$ とおく．以下の問いに答えよ.

(1) $A,\ B$ を実定数とする．$y=A\cos t+B\sin t$ が次の微分方程式

$$y'''-y''+4y'-4y=\cos t \qquad \cdots(\mathrm{Q1})$$

を満たすように $A,\ B$ を定めよ.

(2) 微分方程式 (Q1) の一般解を求めよ.

(3) 次の微分方程式に対して $z=\dfrac{1}{y}$ とおいて z に関する微分方程式を導出せよ.

$$y'-\frac{1}{2}y=-y^2 \qquad \cdots(\mathrm{Q2})$$

(4) 微分方程式 (Q2) の一般解を求めよ.

(九州大 2019) (m20194702)

0.877 直交座標系において，x,y,z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ とする.
ベクトル場 $\boldsymbol{a}=(1-2x^2)e^{-x^2-y^2}\,\boldsymbol{i}-2xye^{-x^2-y^2}\,\boldsymbol{j}+2z\,\boldsymbol{k}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $\nabla\times\boldsymbol{a}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a}=\nabla\phi$ となるようなスカラー関数 ϕ が存在するか否かを答えよ．存在する場合は，ϕ を求めよ．ただし，原点 $(x,y,z)=(0,0,0)$ において $\phi=0$ とする.

(3) 位置ベクトル $\boldsymbol{r}=2\cos t\,\boldsymbol{i}+2\sin t\,\boldsymbol{j}+t\,\boldsymbol{k}$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ で与えられる曲線 C 上で，線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}$ の値を求めよ.

(九州大 2021) (m20214703)

0.878 周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

で表される．以下の問いに答えよ．

(1) 区間 $[-\pi, \pi)$ において次のように定義される周期 2π の関数 $g(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$g(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$$

(2) 区間 $[-\pi, \pi)$ において次のように定義される周期 2π の関数 $h(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(3) 次の無限級数の和を求めよ．

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

(九州大 2021)　　(m20214704)

0.879 $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$ とする．点 $\boldsymbol{x}_1 = (x_1, y_1)$ は円 $C_1 = \left\{ (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; {x_1}^2 + {y_1}^2 = 1 \right\}$ 上を動き，点 $\boldsymbol{x}_2 = (x_2, y_2)$ は円 $C_2 = \left\{ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x_2 - a)^2 + {y_2}^2 = r^2 \right\}$ 上を動くものとする．

2 点 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ 間のユークリッド距離に関する極値問題について，以下の問いに答えよ．ただし，$\mathbb{R}$ は実数全体を表すとする．

(1) 関数

$$f(\theta_1, \theta_2) = (r \cos\theta_2 + a - \cos\theta_1)^2 + (r \sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2, \quad (\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R})$$

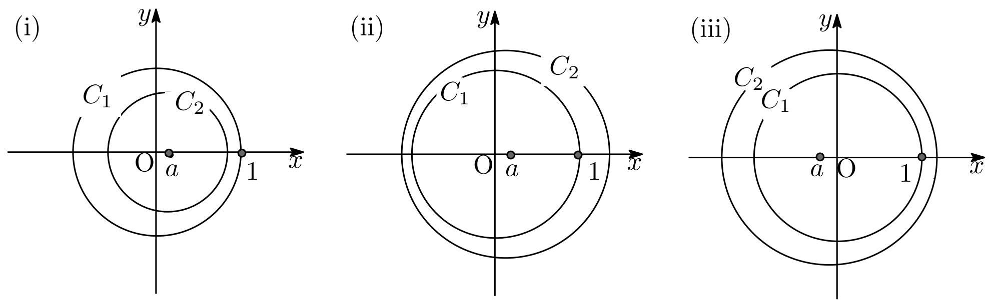
の $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ におけるヘッセ行列

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} f_{\theta_1\theta_1}(0,0) & f_{\theta_1\theta_2}(0,0) \\ f_{\theta_2\theta_1}(0,0) & f_{\theta_2\theta_2}(0,0) \end{pmatrix}$$

を求めよ．

(2) (1) で求めたヘッセ行列が正定値になるための条件を a と r で表せ．

(3) 図 (i)(ii)(iii) それぞれについて，点 $\boldsymbol{x}_1^* = (1, 0)$, $\boldsymbol{x}_2^* = (a + r, 0)$ が極値問題の極小解であるかどうか判定せよ．



(九州大 2021)　　(m20214712)

0.880 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．a, b は実数である．

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値が 2 つの異なる実数で得られることを示せ．

(2) 以下に示す行列 P を用いると $P^{-1}AP$ は対角行列となった．このとき，a, b の満たすべき条件を示せ.

$$P = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{4} & -\sin\dfrac{\pi}{4} \\ \sin\dfrac{\pi}{4} & \cos\dfrac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

(九州大 2022) (m20224708)

0.881 以下に答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ を示し，これを使って $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos x}$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{a^2+x}-\sqrt{a^2-x}}{x}$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ を微分せよ.

（九州芸術工科大 2000） (m20004801)

0.882 (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ を求めよ.

(2) 以下に順に答えよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ を示せ.

(b) $1+\cos x=2\left(\sin\dfrac{\pi-x}{2}\right)^2$ を示せ.

(c) 上の (a) と (b) を使って，$\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}$ を求めよ.

(3) $\dfrac{d}{dx}e^{x^x}$ を求めよ.

（九州芸術工科大 2001） (m20014801)

0.883 (1) $x^n\log x$ を積分せよ．ただし，log は自然対数.

(2) $I_1=\displaystyle\int e^{ax}\sin bx dx,\quad I_2=\int e^{ax}\cos bx dx$ を求めよ.

(3) 次を証明せよ. $\displaystyle\int_0^\pi xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$

（九州芸術工科大 2001） (m20014803)

0.884 (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ を求めよ. (2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x\cos x}{1-\cos x}$ を求めよ.

(九州芸術工科大 2005) (m20054805)

0.885 次の関数の増減の状態を調べて，0°≦ x ≦ 180°の範囲でグラフを書きなさい.

$$f(x)=\sin x(1+\cos x)$$

（佐賀大 2000） (m20004903)

0.886 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+3})$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-5\sin 2x}{x\cos x}$

(佐賀大 2003) (m20034906)

0.887 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x\log x dx$ (2) $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}dx$

(佐賀大 2003) (m20034908)

0.888 置換積分法を用いて，次の定積分を計算せよ．ただし，逆三角関数 $\tan^{-1}x = \arctan x$ について，$(\tan^{-1}x)' = 1/(1+x^2)$ となることに注意する．

(1) $\displaystyle\int_{2/\pi}^{6/\pi} \frac{\cos(1/x)}{x^2}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{1+x^4}dx$

(佐賀大 2003) (m20034913)

0.889 以下の関数の不定積分を求めなさい．

(1) $1/(9x^2-4)$ (2) $1/(4x^2+1)$

(2) $x\cos(3x-1)$ (4) $\sin^2(3x+2)$

(佐賀大 2003) (m20034914)

0.890 次の問に答えよ.

(1) $\sqrt{1+2\log x}$ を x について微分せよ.

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\tan x - \frac{1}{\cos x}\right)$ を求めよ.

（佐賀大 2004） (m20044902)

0.891 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2}$$

（佐賀大 2004） (m20044904)

0.892 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx \quad \left(\text{ヒント ： } \tan\frac{x}{2} = t \text{ とおく}\right)$

(2) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx \quad (m, n \text{ ： } 0 \text{ 以上の整数})$

（佐賀大 2004） (m20044911)

0.893 $f(x) = \cos x$ を $x = a$ のまわりで Taylor 展開せよ.

（佐賀大 2004） (m20044914)

0.894 $z = f(x, y)$ は全微分可能とし, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とするとき, $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ ならば, $f(x, y)$ は θ だけの関数であることを示せ.

（佐賀大 2004） (m20044916)

0.895 次の問に答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin x}{x^3-x}$ を求めよ.

(2) 逆三角関数 $\cos^{-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ $(x>0)$ の導関数を求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054913)

0.896 次の関数の 1 次微分を求めなさい.

(1) $y = \sqrt{2x^2+3}$ (2) $y = \dfrac{1}{\cos x}$ (3) $y = e^{-x}\sin(5x+2)$ (4) $y = \log\dfrac{x-1}{x+1}$

(佐賀大 2005) (m20054920)

0.897 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int (3x^2 + \frac{1}{x})\,dx$ (2) $\displaystyle\int x\cos(x^2+1)\,dx$ (3) $\displaystyle\int 10^x\,dx$

(4) $\displaystyle\int \log x\,dx$ (5) $\displaystyle\int x\sin(2x+1)\,dx$ (6) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$

(佐賀大 2005) (m20054922)

0.898 次の問に答えよ.

(1) 三角関数の加法定理より

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}$$

を導出せよ.

(2) 導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

を利用して $(\sin x)' = \cos x$ であることを示せ.

(佐賀大 2005) (m20054924)

0.899 次の問に答えよ.

(1) r を中心からの距離, θ を x 軸とのなす角とする． いま曲線が極座標 $r = f(\theta)$ で与えられる場合, 曲線と直線 $\theta = \theta_1$ および $\theta = \theta_2$ とで囲まれる図形の面積 S が次式で与えられることを証明せよ.

$$S = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\{f(\theta)\}^2\,d\theta$$

(2) 曲線 $r = a(1+\cos\theta)$, $a > 0$ の囲む面積を求めよ．ただし $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ とする.

(3) 極座標 r の直交座標の微分量（変分）について，その二乗和の平方根を考慮することにより $r = a(1+\cos\theta)$, $a > 0$ の境界線の全長を求めよ．ただし $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ とする.

(佐賀大 2005) (m20054925)

0.900 $\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおく. 以下の問に答えよ.

(1) $\dfrac{dx}{dt}$ を求めよ. ただし, 答えは t の関数として表せ.

(2) $\cos x$ を t で表せ.

(3) 変数変換 $\tan\dfrac{x}{2} = t$ を行って, 積分 $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}\,dx$ を求めよ.

(4) 曲線 $y = -\log|\cos x|$, $\left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}\right)$ の長さを求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054932)

0.901 $x = \cos^4 t,\ y = \sin^4 t$ とするとき，導関数 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．ただし，結果は t の関数のままでよい.

(佐賀大 2006) (m20064913)

0.902 $x^2\cos 3x$ の n 次導関数を求めよ．ただし，$g(x) = \cos ax\ \ (a > 0)$ のとき，$g^{(n)}(x) = a^n\cos\left(ax + \dfrac{n}{2}\pi\right)$ となることを証明せずに使用してもよい.

(佐賀大 2006) (m20064914)

0.903 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$ を計算せよ.

(佐賀大 2006) (m20064915)

0.904 以下の関数の不定積分を求めなさい．ただし，記号 exp は $\exp(x) = e^x$ を意味する．

(1) $x^2 + 4x + 1$　(2) $\cos(2x)$　(3) $4x\exp(x^2)$　(4) $1/(x^2 - 9)$　(5) $x \ln x$

(佐賀大 2006)　(m20064926)

0.905 一つの質点が x 軸上を加速度 a で運動する．時刻 t における加速度が $a = 2\pi\cos 2\pi t$ で与えられるとき，時刻 t における点の位置 x を求めよ．ただし，$t = 0$ における位置および速度は 0 とする．

(佐賀大 2006)　(m20064928)

0.906 次の微分方程式を解け．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$，$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ である．

(1) $y'' - 4y' - 12y = 0$　(2) $y'' - 4y' - 12y = 12x - 8$　(3) $\dfrac{dy}{dx} + y = y^2(\cos x - \sin x)$

(佐賀大 2006)　(m20064931)

0.907 次の不定積分を求めよ．ただし積分定数は C とする．

(1) $\displaystyle\int (3x+2)\sin x\,dx$　(2) $\displaystyle\int \sin^2 x\,\cos^3 x\,dx$　($t = \sin x$ と置いて考えよ)

(佐賀大 2006)　(m20064937)

0.908 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int x^{-3/7}\,dx$　(2) $\displaystyle\int \cos(3x)\,dx$　(3) $\displaystyle\int \tan x\,dx$

(4) $\displaystyle\int 2x \cdot \log x\,dx$　(5) $\displaystyle\int \frac{1}{1-4x^2}\,dx$

(佐賀大 2007)　(m20074903)

0.909 (1) 関数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ を $x = 0$ の周りでテイラー展開し，x^3 の項まで書け.

(2) 微分方程式 $y''(x) + 9y(x) = 0$ の一般解を求めよ.

(3) 関数 $f(x) = x$（定義域を $-\pi \leq x \leq \pi$ とする）を　$f(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}[\,a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\,]$

と書くとき，a_0，a_n，b_n を求めよ.

(佐賀大 2007)　(m20074906)

0.910 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)^2}$　(2) $e^{-x}\cos^2 x$

(佐賀大 2007)　(m20074917)

0.911 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $x\dfrac{dy}{dx} + y = x^3y^3$　(2) $y'' - 2y' + 10y = 0$　(3) $y'' - 2y' + 10y = 2\cos 2x + 10\sin 2x$

(佐賀大 2007)　(m20074918)

0.912 次の関数を x について，微分せよ．但し，log の底は e とする.

(1) $y = \sin 3x\cos 3x$　(2) $y = (x\sin x)^3$　(3) $y = (\log x)^2$　(4) $y = 10^x$

(佐賀大 2007)　(m20074922)

0.913 次の不定積分を行え.

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x - e^{-x}}\,dx$

(佐賀大 2008)　(m20084901)

0.914 次の微分方程式を解け．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{dy'}{dx}$ とする．

(1) $y'' = ax$ (2) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\cos x$

(佐賀大 2008) (m20084903)

0.915 a, b を実数とし，次の問いに答えよ．

(1) 次の等式を証明せよ．

$$\int_0^{2\pi} f(a\sin x + b\cos x)dx = \int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin x\right)dx$$

(2) 前問の結果を用いて，次の定積分を求めよ．

$$\int_0^{2\pi}(a\sin x + b\cos x)^2 dx$$

(佐賀大 2009) (m20094901)

0.916 全微分可能な 2 変数関数 $z = f(x, y)$ が，$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を満たすとする．

$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ のとき，$\dfrac{\partial z}{\partial r}$，$\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めよ．

(佐賀大 2009) (m20094906)

0.917 天井からバネが吊り下げられ（バネの一方の先は天井に固定されている），質量 m のおもりがバネのもう一方の先についている．おもりがつり合った位置から距離 y（下の方向が正）にあるとき，$-ky$ の力をうけ，さらに摩擦の力 $-c\dfrac{dy}{dt}$ をうけて運動の方程式

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - c\frac{dy}{dt}$$

が成り立っている（ただし，$4mk - c^2 > 0$）．このとき y は t の関数として

$$y = e^{At}(\cos Bt + \sin Bt)$$

のかたちに書ける．ただし．A, B は定数で $B > 0$．このときの A と B を求めよ．

(佐賀大 2009) (m20094913)

0.918 次の関数の x に対する導関数を求めよ．

(1) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-2x}}$

(2) $f(x) = \cos(2x + 3\sin(3x))$

(佐賀大 2009) (m20094914)

0.919 次の関数の x に関する偏微分を求めよ．

(1) $f(x, y) = x\cos(2y) + y\sin(2x) + x\cos(3x) + y\sin(2y)$

(2) $f(x, y) = (\ln(xy))^2$ $(x > 0,\ y > 0)$ （ただし $\ln(x)$ は底を e とする自然対数）

(佐賀大 2009) (m20094915)

0.920 不定積分 $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx$ （a, b は定数）を計算せよ．

(佐賀大 2009) (m20094922)

0.921 (1) 次の関数を微分しなさい.

$$y = \frac{2x+1}{x^2+1}$$

(2) 次の関数を合成関数の微分法で微分しなさい.

(a) $y = \sqrt{x^2+4}$

(b) $y = e^{2x+1}$

(3) 不定形の極限値を求めなさい.

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1-2\cos x}{x^3}$ （$x \cong 0$ のとき $x = \sin x$ となる関係を利用して解答しなさい）

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log x}{x^2}$

(佐賀大 2009) (m20094929)

0.922 (1) 次の極限を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

(2) (1) の結果を利用して次の極限を求めよ.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(\theta+h)-\cos(\theta)}{h}$$

(佐賀大 2010) (m20104913)

0.923 $f(x) = \cos 3x$ を, マクローリン展開の公式

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

を用いて x の 2 次式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ (a_0〜a_2は係数) で近似することを考える.

(1) 2 次式中の係数 $a_0,\ a_1,\ a_2$ を求めよ.

(2) 近似式を利用して $\cos 0.6$ の近似値を計算せよ.

(佐賀大 2010) (m20104919)

0.924 次の不定積分を求めよ. ただし積分定数は C とする.

(1) $\displaystyle\int (x+4)\cos x\,dx$

(2) $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx$ ($t = \sin x$ と置いて考えよ)

(佐賀大 2010) (m20104920)

0.925 行列 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

(1) $|A|$（A の行列式）を求めよ.

(2) A^{-1}（A の逆行列）を求めよ.

(3) $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_3$ の内積を求めよ.

(4) $\boldsymbol{a}_2$ と $\boldsymbol{a}_3$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$ を求めよ.

(5) $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ を用いて表せ.

(佐賀大 2010) (m20104922)

0.926 次の不定積分または定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \left(2x - \frac{1}{x}\right)^2 dx$ (2) $\displaystyle\int x \sec^2 x dx \quad (\sec^2 x = 1/\cos^2 x)$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \left(1 - x^2\right)^{7/2} dx$ (4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \cos x)\, dx$

(佐賀大 2011) (m20114903)

0.927 $\displaystyle\int 2x \sin x \, \cos x \, dx$ を求めよ.

(佐賀大 2011) (m20114906)

0.928 次の関数を微分せよ.

(1) 10^x (2) $\dfrac{1}{\sin^2 x}$ (3) $\cosh^{-1} x$

(佐賀大 2011) (m20114910)

0.929 次の不定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \left(\frac{3x+5}{x^2+4x+3}\right) dx$ (2) $\displaystyle\int \left(x^3 e^{-x^2}\right) dx$ (3) $\displaystyle\int (\sin 2x \, \cos 3x) \, dx$

(佐賀大 2011) (m20114911)

0.930 2 変数関数 $f(x,y) = \cos(x^2 y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を，それぞれ求めよ.

(佐賀大 2011) (m20114912)

0.931 次の関数 y の導関数 dy/dx を求めなさい.

(1) $y = x^2 + \sqrt{x}$ (2) $y = e^{2x^2}$

(3) $y = \sin(3x) \cos x$ (4) $y = x \log x$

(佐賀大 2012) (m20124907)

0.932 次の関数 $f(x)$ の微分 $f'(x)$ を計算せよ.

(1) $f(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x+1}$ (2) $f(x) = e^{\sin x} \cos(2x)$

(佐賀大 2012) (m20124911)

0.933 $\boldsymbol{A}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ のとき，次の等式が成り立つことを示しなさい.

(1) $\boldsymbol{A}(\theta)^{-1} = \boldsymbol{A}(-\theta)$ (2) $\boldsymbol{A}(\alpha + \beta) = \boldsymbol{A}(\alpha)\boldsymbol{A}(\beta)$

(佐賀大 2012) (m20124915)

0.934 距離 x と時間 t に関する関数 $J(x,t)$ が距離 x に関する関数 $X(x)$，時間 t に関する関数 $T(t)$ を用いて

$$J(x,t) = X(x)T(t)$$

で表される場合を想定する．いま，これらの関数が次の微分方程式を満たすものとする.

$$T(t)\frac{d^2 X(x)}{dx^2} - X(x)\frac{1}{c^2}\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = 0$$

時刻 $t = 0$ において $J(x,0)$ が

$$J(x,0) = \cos 3x$$

で与えられた場合，任意の時刻 $t > 0$ における $J(x,t)$ を求めよ.

(佐賀大 2013) (m20134904)

0.935 次の定積分を求めよ; ただし，$\sin^{-1} x$ は $\sin x$ の逆関数である．また，(2) は $t = \cos x$ とする置換積分法を用いよ．

(1) $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \sin^{-1} x \, dx$ (2) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin}{2 - \sin^2 x} \, dx$

(佐賀大 2013) (m20134912)

0.936 次の関数 y の導関数 dy/dx を求めなさい．

(1) $y = x \log_e x - x$ (2) $y = \dfrac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}$ (3) $y = \dfrac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax}$

(4) $y = 3^{-x}$ (5) $y = \log_e \left| \tan \dfrac{x}{2} \right|$

(佐賀大 2013) (m20134924)

0.937 全微分可能な 2 変数関数 $z = f(x, y)$ が $\dfrac{\partial z}{\partial x} = x\sqrt{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = y\sqrt{x^2+y^2}$ を満たすとする．$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ のとき，$\dfrac{\partial z}{\partial r},\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めよ．

(佐賀大 2014) (m20144913)

0.938 次の関数を微分せよ．

(1) $\ln \dfrac{1}{x^4+1}$ (2) $y = e^{x^3} \cos x$

(佐賀大 2015) (m20154901)

0.939 2 次元 xy 平面を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 点 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ を原点の回りに角 ϕ だけ回転して $(x', y') = \big(r\cos(\theta+\phi),\ r\sin(\theta+\phi)\big)$ に移すときの回転行列 $R(\phi)$ を求めよ．

(2) $\Delta\phi$ が十分小さいとき，$R(\phi)$ が次のように表されることを示せ．

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\phi \\ \Delta\phi & 1 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2015) (m20154913)

0.940 次の積分について，問いに答えよ．ただし，log は自然対数である．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^4+x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1} dx$ を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 x^2 \log x dx$ を求めよ．

(3) $D = \left\{(x, y) \ : \ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$ として，2 重積分 $\displaystyle\iint_D \cos(x+y) dxdy$ を求めよ．

(佐賀大 2016) (m20164903)

0.941 次の関数 z の偏導関数 $\partial z/\partial x,\ \partial z/\partial y$ を求めなさい．

(1) $z = \dfrac{x-y}{x+y}$ (2) $z = \sin x \, \cos y$

(佐賀大 2016) (m20164931)

0.942 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+3x+1}{x^2+1} dx$ (2) $\displaystyle\int \log\big(x + \sqrt{x^2+1}\big) dx$

(3) $\displaystyle\int \cos^4 x \, \sin x dx$ (4) $\displaystyle\int x e^{x^2} dx$

(佐賀大 2016) (m20164932)

0.943 次の定積分の値を求めよ. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(1+\sin^2 x\right)\cos x\ dx$

(佐賀大 2017) (m20174901)

0.944 次の関数 z の偏導関数 $\partial z/\partial x,\ \partial z/\partial y$ を求めなさい.

(1) $z = 3x^2 - 5xy + 3y^2 - 2x + 4y + 10$ (2) $z = e^{2x}\cos 2y$

(佐賀大 2017) (m20174912)

0.945 次の関数を微分せよ.

(1) $\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+1}$ (2) $\log\dfrac{\cos x}{x}$

(佐賀大 2018) (m20184909)

0.946 次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$$

(佐賀大 2018) (m20184910)

0.947 次の問いに答えよ. ただし, log は自然対数であり, e は自然対数の底である.

(1) 次の不定積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\cos x}$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$

(2) 次の定積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int_1^e x\log x dx$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(佐賀大 2018) (m20184917)

0.948 つぎの関係を示せ.

(1) n が正の奇数 $n = 1, 3, 5, \cdots$ のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}$$

(2) n が正の偶数 $n = 2, 4, 6, \cdots$ のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{\pi}{2}\frac{(n-1)!!}{n!!}$$

ここで !! は 1 つ飛ばしの階乗を表す. たとえば $4!! = 4\cdot 2 = 8,\ 5!! = 5\cdot 3\cdot 1 = 15$ である.

(佐賀大 2018) (m20184927)

0.949 次の積分をせよ.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \sin 2x e^{-x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty \cos 2x e^{-x}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^1 x(x^2+1)^5\,dx$

(佐賀大 2021) (m20214912)

0.950 $f(x,y) = \sin^2(x) - \cos(y)$ $\left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \pi\right)$ の極値を求めよ.

(佐賀大 2021) (m20214917)

0.951 次の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x+\infty} \frac{x-\cos x}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x^x$

(佐賀大 2021)　　(m20214920)

0.952 重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)^2\,dxdy \qquad D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 4\right\}$ について $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ として計算せよ.

(佐賀大 2021)　　(m20214926)

0.953 (1) つぎの式で与えられる x の関数 y を x に関して微分せよ.

$$y = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

(2) x および y が, 媒介変数 t を用いて, つぎの 2 つの式で与えられる. ただし, $t > 0$ とする. この y を x に関して微分し, その結果を t の関数で示せ.

$$x = \frac{1}{t^3+t+1} \qquad y = \frac{2t}{t^3+t+1}$$

(佐賀大 2022)　　(m20224901)

0.954 次の関数 y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい.

(1) $y = (x+3)^8$　　(2) $y = \sin(2x)$　　(3) $y = e^{\cos x}$

(4) $y = \sqrt{x^3+x^2+1}$　　(5) $y = \log(x^3+1)$　　(6) $y = \dfrac{\log(x)}{x^2+3}$

(佐賀大 2022)　　(m20224919)

0.955 次の不定積分を求めなさい. 積分定数を C とする. 必要な計算過程も記すこと.

(1) $\displaystyle\int (\cos x + 3x^3)dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin^2(x)dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-3)(x+2)}dx$　　(4) $\displaystyle\int x^3\log(x)dx$

(佐賀大 2022)　　(m20224921)

0.956 次の微分方程式の一般解を求めなさい. 答えだけでなく途中経過も記載すること.

(1) $x\cos\dfrac{y}{x}\dfrac{dy}{dx} = y\cos\dfrac{y}{x} - x$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^x + \cos x$

(佐賀大 2022)　　(m20224930)

0.957 x を $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ の実数とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ を用いて, 次の公式

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

を導きなさい.

(2) $y = \tan^{-1} x$ に対して, 逆関数の微分の公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)}$$

を用いて, $\dfrac{dy}{dx}$ を x を用いて表しなさい.

(3) n を自然数とし,

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx$$

とおく. この I_n に対して, $n = 1$ のときの I_1 を求めなさい.

(4) (3) で与えられた I_n を

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx = \int 1 \times \frac{1}{(x^2+1)^n}dx$$

と考え, 部分積分法を用いて

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right)I_n$$

が成り立つことを示しなさい.

(5) (3) で与えられた I_n に対して, $n=3$ のときの I_3 を求めなさい.

(長崎大 2005) (m20055001)

0.958 次の関数が与えられている.

$f(x) = 1 - \cos x$

$g(x) = x \sin x$

(1) これらの関数をそれぞれ x の 4 乗までの多項式に展開せよ.

(2) これらの関数を次式に代入し, その極限を求めよ. また, その結果がロピタルの定理を用いた結果と一致することを示せ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

(長崎大 2005) (m20055010)

0.959 次の行列 $\boldsymbol{A}$ について以下の問に答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ.

(2) 固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) 大きさを 1 に規格化した固有ベクトルを列ベクトルとして並べてできる行列 $\boldsymbol{P}$ の逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ を求めよ.

(4) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ を計算せよ.

(長崎大 2005) (m20055013)

0.960 次の式 Ψ についてその偏導関数 $\partial\Psi/\partial r$ および $\partial\Psi/\partial\theta$ を計算しなさい.

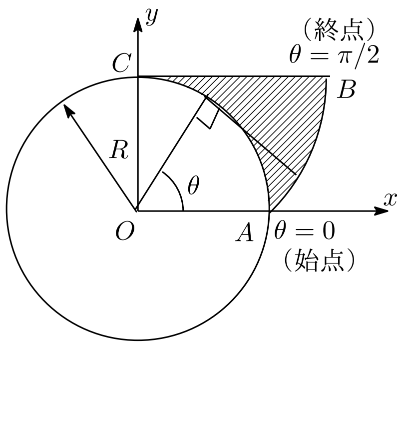
$\Psi = \cos\theta \exp(-r)$

(長崎大 2005) (m20055018)

0.961 太さを無視できる糸を巻き付けた半径 R の円柱がある. 糸を張りながら円柱から外すとき以下の問いに答えよ.

(1) 図のように $\theta = 0$ の位置からはじめて $\theta = \pi/2$ まで糸が外れた. 円柱から外れた糸の長さ BC はいくらか.

(2) θ の位置まで糸が外れたとき, 糸の先端の x および y 座標を R と θ を用いて表せ.



(3) $\theta=\pi/2$ まで糸を外す間に，糸の先端が描く曲線の長さ AB は次式で計算できる．

$$AB=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

上式を計算して曲線 AB の長さを求めよ．

(4) 図中の斜線部分の面積 $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A}=R^2\left\{\int_0^{\pi/2}\left(\theta\sin\theta\cos\theta+\theta^2\sin^2\theta\right)d\theta-\frac{\pi}{4}\right\}$$

で与えられる．右辺に含まれる定積分 $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\theta\sin\theta\cos\theta\,d\theta$ の値を求めよ．

(長崎大 2007)　　(m20075002)

0.962 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\,\sin x\,dx$ を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{x^2}\,dx$ を求めよ．

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy\,,\quad D=\{(x,y)\mid 0\le x\le y\le 1\}$ を計算せよ．

(4) 平面曲線が $\begin{cases} x=e^t\sin t \\ y=e^t\cos t\end{cases}\,,\quad \left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$ で与えられるとき，曲線の長さ L を求めよ．

(長崎大 2007)　　(m20075004)

0.963 (1) 次の不定積分を求めよ． $\displaystyle\int\sin^2 x\cos^3 x\,dx$

(2) 次の方程式で囲まれる面積を求めよ．ただし，a, b は定数である． $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(長崎大 2007)　　(m20075011)

0.964 関数

$$f(x)=1-e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-x/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

について，以下の問いに答えなさい．ただし，$0\le x\le 2\sqrt{3}\pi$ とする．

(1) $\dfrac{df}{dx}=0$ を満足する x の値をすべて求めなさい．

(2) (1) で求めた x に対して，$f(x)$ の値および $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ の値を求めなさい．

(3) $0\le x\le 2\sqrt{3}\pi$ における，最初の極大値を y_1，2 番目の極大値を y_2 とし，

$$p_1=y_1-1\,,\quad p_2=y_2-1$$

と定義する．このとき，$\ln(p_2/p_1)$ を求めなさい．ln は自然対数（底が e の対数）を表す．

(長崎大 2008)　　(m20085001)

0.965 次の (a),(b) の行列式の値をそれぞれ求めよ．

(a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}$　　(b) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{vmatrix}$　ただし，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$

(長崎大 2008)　　(m20085017)

0.966 次式で定義される I_n について，以下の問いに答えよ．

$$I_n = \int_0^n e^{-st}\cos\omega t\,dt$$

ただし，s, ω, n は正の実数である．

(1) I_n を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めなさい．

(長崎大 2009) (m20095003)

0.967 以下の問いに答えよ．ただし，a は正の定数とする．

(1) a^x の微分を求めよ．

(2) $\tan^{-1} x$ の微分を求めよ．

(3) $f(x,y) = \dfrac{\tan^{-1} x}{a^y}$ の x 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と y 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ求めよ．

(4) $\cos x$ をマクローリン展開せよ．

(長崎大 2009) (m20095007)

0.968 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ を求めよ．

(2) $D = \left\{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1\,,\ x^2 \leqq y \leqq 1\right\}$ とするとき，領域 D を図示し，2 重積分 $\displaystyle\iint x\sqrt{y}\,dxdy$ を求めよ．

(3) xy 平面上での曲線が次式で与えられるとき，曲線を図示し，その長さを求めよ．

$$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases} \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

(長崎大 2009) (m20095008)

0.969 (1) 次の関数を微分せよ．

(a) $\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$

(b) $e^{-x^2} + \tan x$

(2) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x^x$

(長崎大 2009) (m20095011)

0.970 (1) 不定積分 $\displaystyle\int (1+x)\sqrt{1-x}\,dx$ を求めよ．

(2) $D = \{(x,y) \mid 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4\,,\ x \geqq 0\}$ とするとき，領域 D を図示し，次の 2 重積分を求めよ．

$$I = \iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$$

(3) xy 平面上での曲線が次式で与えられるとき，その長さを求めよ．

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi\,,\ a > 0)$$

(長崎大 2009) (m20095012)

0.971 関数 $u(x,y) = e^x \cos y$ がある. 以下の設問に答えよ.

(1) 次の偏微分を求めよ.
$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}$$

(2) 次の式を計算せよ.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

(長崎大 2010) (m20105009)

0.972 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx$ を求めよ.

(2) 次の 3 つの曲線で囲まれた図形を x 軸に関して回転してできる回転体の体積を求めよ.
$$y = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}, \qquad x \text{ 軸}, \qquad \text{直線 } x = 2$$

(長崎大 2010) (m20105013)

0.973 以下の問いに答えよ.

(1) $e^{2x}\sin(ax)$ の微分を求めよ. ただし a は定数である.

(2) $x^{\sin x}$ の微分を求めよ.

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin x - x}$ を計算せよ.

(長崎大 2011) (m20115008)

0.974 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a > 0)$

(長崎大 2011) (m20115010)

0.975 次の定積分の値を求めよ.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x)dx$$

(大分大 2005) (m20055102)

0.976 座標平面上の助変数表示をもつ曲線
$$C\ :\ \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = -1 + \cos t \end{cases} \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$
について次の問いに答えよ.

(1) 曲線 C の概形を示せ.

(2) 曲線 C の長さを求めよ.

(大分大 2009) (m20095104)

0.977 座標平面上を動く点 P の時刻 t における位置が
$$\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t \end{cases} \qquad (0 \leqq t < +\infty)$$
で与えられている.

(1) $t = \dfrac{\pi}{6}$ のときの点 P の位置を求めよ.

(2) $t = \dfrac{\pi}{3}$ のときの点 P の速度ベクトルを求めよ.

(3) $0 \leqq t \leqq 4\pi$ の間に点 P の進む距離を求めよ.

(大分大 2010)　　(m20105101)

0.978 $\cos^2 t$ のラプラス変換を求めよ.

(大分大 2012)　　(m20125102)

0.979 周期関数 $f(x)=|x|\ \ (-\pi \leq x < \pi)$, $\ f(x+2\pi)=f(x)$ の $(-\pi,\ \pi)$ におけるフーリエ級数は次のようになる.

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

これを用いて, 次の公式を証明せよ.

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

(大分大 2013)　　(m20135104)

0.980 n 次の実正方行列 A について, ${}^tAA=E$ が成り立つとき, A は n 次の直交行列であるという. ここで, ${}^tA$ は A の転置行列, E は n 次の単位行列だある. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) A, B が共に n 次の直交行列であれば, AB, A^{-1} も n 次の直交行列であることを示せ.

(2) 2 次の直交行列 A は次の 2 つの行列のいずれかの形をしていることを示せ.
$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

(熊本大 2004)　　(m20045203)

0.981 $x=r\cos\theta$, $y=2r\sin\theta$ のとき, 行列式 $J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(熊本大 2006)　　(m20065201)

0.982 3 次元空間内に原点 O を一つの頂点とする三角形 OAB がある. 点 A と点 B の直交座標をそれぞれ (x_1, y_1, z_1) および (x_2, y_2, z_2) とし, 線分 OA と線分 OB のなす角を θ として, 以下の問に答えなさい.

(1) 線分 OA および OB の長さを $\overline{OA}$ および $\overline{OB}$ のように書くことにする. このとき, 線分 AB の長さの 2 乗 $\overline{AB}^2$ を $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, および θ を用いて表しなさい.

(2) $\cos^2\theta \leq 1$ であることを利用して, 次の不等式

$$(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2) \geq (x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2 \qquad ①$$

が成り立つことを示しなさい.

(3) 不等式 ① で等号が成立する条件を示し, そのとき三点 O, A および B はどのような位置関係にあるか述べなさい.

(熊本大 2014)　　(m20145202)

0.983 次の重積分の値を求めるために, 以下の小問 (1) と (2) について答えなさい.

$$\iint_{4\leq x^2+y^2\leq 9}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \qquad ①$$

(1) 変数 x, y を $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ のように変数 r, θ を用いて変数変換をする, この変数変換のヤコビアン $J=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$ を求めなさい.

(2) 変数 r, θ とヤコビアン J を用いて, 式 ① の重積分の値を求めなさい.

(熊本大 2014)　　(m20145203)

0.984　$S=\displaystyle\int_0^{\pi}(x-a\cos x-b)^2dx$ とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1)　$A=\displaystyle\int_0^{\pi}x\cos xdx,\ B=\int_0^{\pi}\cos^2 xdx$ をそれぞれ求めなさい．

(2)　S を最小とする a と b を求めなさい．

(熊本大 2015)　　(m20155202)

0.985　$x(t)=\cos t,\ y(t)=\sin t,\ f(x,y)=x^2y+2y$ のとき，$f(x(t),y(t))$ を t で微分せよ．

(熊本大 2019)　　(m20195201)

0.986　xy 平面上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を同じ平面上の点 $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ に移す写像

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1)　この写像の表す固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ と固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ の組を求めなさい．なお，固有ベクトルの大きさは $\sqrt{2}$ とすること．

(2)　xy 平面上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ により以下のように表せる．

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\alpha\boldsymbol{x}_1+\beta\boldsymbol{x}_2$$

$\alpha,\ \beta$ を $x,\ y$ を用いて表しなさい．

(3)　$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ を $\alpha,\ \beta,\ \boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ を用いて表しなさい．

(熊本大 2019)　　(m20195203)

0.987　変数 x , y , z から, 変数 u , v , w への変数変換を

$$u=x\cos z-y\sin z\ ,\qquad v=x\sin z+y\cos z\ ,\qquad w=z$$

と定めたとき, 以下の各問に答えよ.

(1)　次の恒等式が成立することを示せ.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)=1$$

(2)　関数 $f=e^{-\sqrt{u^2+v^2}}\cos w$ に対して, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ を x , y , z の関数として求めよ.

(宮崎大 2005)　　(m20055303)

0.988　2 変数関数 $f(x,y)=\log(1+x^2+2y^2)$ について，次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x,y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2)　$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\ (r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくとき，関数 f の $r,\ \theta$ に関する偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial r},\ \dfrac{\partial f}{\partial\theta}$ を $x,\ y$ のみを用いて表せ．

(宮崎大 2007)　　(m20075302)

0.989 (1) 平面内の領域　$D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$
を xy 平面上に図示せよ．ただし，a, b は正の定数とする．

(2) $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta\ \ (r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ と変換したとき，領域 D に対応する $r\theta$ 平面上の領域 E を不等式で表し，またそれを図示せよ．

(3) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ．

(4) (3) で求めたヤコビアンを用いて，重積分 $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ の値を求めよ．

(宮崎大 2008)　　(m20085303)

0.990 (1) 次の微分方程式の一般解 $y = y(x)$ を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

(2) 次の微分方程式の一般解 $y = y(x)$ を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = \cos x$$

(宮崎大 2009)　　(m20095305)

0.991 重積分

$$I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}\,dxdy\ ,\quad D = \{(x, y)\,|\,x^2 + y^2 \leqq 1\}$$

について，次の各問いに答えよ．

(1) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおいたときのヤコビアン $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を求めよ．

(2) 重積分 I の値を求めよ．

(宮崎大 2011)　　(m20115304)

0.992 変数 t の関数 $x = x(t),\ y = y(t)$ が次の連立微分方程式の初期値問題を満たしているとする．

$$(*)\cdots\cdots \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \\ x(0) = 1\ , \qquad y(0) = 0 \end{cases}$$

このとき，次の各問に答えよ．

(1) 新しい関数 $r = r(t)$ と $\theta = \theta(t)$ を用いて，関数 $x,\ y$ を $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$，とおく（ただし，$r > 0$）．このとき，$r,\ \theta$ はそれぞれ

$$\frac{dr}{dt} = 2r\ ,\quad \frac{d\theta}{dt} = 1$$

を満たすことを示せ．

(2) 連立微分方程式の初期値問題 $(*)$ を解け．

(宮崎大 2011)　　(m20115305)

0.993 次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) オイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を用いて，$\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ を導け．

(2) (1) の結果を用いて，以下の等式がすべての実数 θ に対して成立するように，定数 a と b を定めよ．

$$\sin^3\theta=a\sin\theta+b\sin 3\theta$$

(宮崎大 2012)　　(m20125301)

0.994 x と y について何回でも偏微分可能な 2 変数関数 $f(x,y)$ に対し，

$$x=x(u,v)=u\cos\alpha-y\sin\alpha\ ,\quad y=y(u,v)=u\sin\alpha+v\cos\alpha$$

を代入して，合成関数 $g(u,v)=f\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ を作る．ここで，α は実数の定数とする．これについて，次の各問に答えよ．ただし，以下では関数の引数を省略しており，例えば $\dfrac{\partial g}{\partial u}$，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ は，それぞれ $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)$，$\dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ の意味である．

(1) 等式 $\dfrac{\partial g}{\partial u}=a_1\dfrac{\partial f}{\partial x}+a_2\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を満たす定数 a_1，a_2 を求めよ．

(2) 等式 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}=b_1\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+b_2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+b_3\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を満たす定数 b_1，b_2，b_3 を求めよ．

(3) 等式 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}=c_1\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+c_2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+c_3\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を満たす定数 c_1，c_2，c_3 を求めよ．

(宮崎大 2014)　　(m20145305)

0.995 (1) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+y\sin x=0$ の一般解 $y=y(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $y=a\cos x+b$ が微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+y\sin x=\sin 2x$ の特殊解となるように，定数 a，b の値を定めよ．

(3) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+y\sin x=\sin 2x$ を，$y(0)=5$ という条件の下で解け．

(宮崎大 2019)　　(m20195305)

0.996 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}$

（鹿児島大 2001）　　(m20015402)

0.997 置換積分法を用いて，次の不定積分を求めよ．ただし，$a\neq 0$

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$　　($x=a\sin\theta$とおく)　　(2) $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}dx$　　($x=a\sin\theta$とおく)

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{1+\cos x}dx$　　($t=\tan\dfrac{x}{2}$とおく)

（鹿児島大 2001）　　(m20015407)

0.998 積分 $\displaystyle\int t^2\cos t dt$ を求めよ．

（鹿児島大 2001）　　(m20015410)

0.999 $\tan\dfrac{x}{2}=t$ と置くとき，積分 $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}dx$ を求めよ．

（鹿児島大 2001）　　(m20015411)

0.1000 微分方程式に関する以下の問に答えよ．

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(a) $ydy = 3(x^2y^2 + xy^2)dx$

(b) $ye^{y-x}dy = dx$

(2) 次の微分方程式が, 右に示す解をもつことを示せ. ただし, a, b は任意の定数とする.

$$y'' + 4y' + 8y = 0 \qquad : \quad y = ae^{-2x}\cos 2x + be^{-2x}\sin 2x$$

(鹿児島大 2005)　　(m20055402)

0.1001 次の x に関する関数において, 1 階の導関数を求めなさい.

(1) $\dfrac{1}{1-x}$

(2) $\sin 2x + \cos x$

(3) $e^x \log x$

(鹿児島大 2005)　　(m20055409)

0.1002 次の定積分を実施しなさい.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left(4x^3 - 6x^2 + 1\right) dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x+1}\, dx$

(3) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x\, dx$

(鹿児島大 2005)　　(m20055410)

0.1003 平面内にある直交直線座標系で規定したベクトルの変換行列 $\boldsymbol{A}$ において, 次の問に答えなさい.

(1) 原点の周りに反時計回りに $\dfrac{\pi}{6}$ ラジアン回転させるベクトルの変換行列 $\boldsymbol{A}$（直交行列）は次のように与えられる.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

行列 $\boldsymbol{A}$ を用いてベクトル $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を回転変換させるには, $\boldsymbol{Ar}$ の演算をすればよい. 回転変換によって得られるベクトルを求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ をベクトル $\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$ に変換する 2 行 2 列の変換行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ. ただし, a, b は実数とする.

(鹿児島大 2005)　　(m20055411)

0.1004 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int xe^x dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{(x+c)dx}{(x+a)(x+b)} \quad (a \neq b)$　　(3) $\displaystyle\int \frac{1-\cos 2x}{2}\cos x dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (-a < x < a,\ a > 0)$

(鹿児島大 2006)　　(m20065401)

0.1005 微分方程式に関する以下の問に答えよ.

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(a) $2xdx - dy = x(xdy - 2ydx)$　　(b) $(y^2 + \cos x)dx + (2xy - \sin y)dy = 0$

(2) 次の微分方程式の完全解を求めよ．

$$y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}$$

(鹿児島大 2006)　(m20065402)

0.1006 次の関数を微分せよ．

(1) $y = (8-x)^2 + 3x$　(2) $y = \log x \cdot e^{-x}$　(3) $y = \sin x \cdot (1 + \cos x)$

(鹿児島大 2006)　(m20065411)

0.1007 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \sin x \cos 2x$　(2) $y = \sin^{-1} x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$

(鹿児島大 2006)　(m20065413)

0.1008 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \cos x dx$

(鹿児島大 2006)　(m20065414)

0.1009 ベクトル $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \boldsymbol{A_3}$ は互いに直交していることを示せ．

$$\boldsymbol{A_1} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A_2} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2006)　(m20065415)

0.1010 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int xe^{-2x} dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{(x+1)}{x^2+2x+3}\, dx$　(3) $\displaystyle\int \sin x \cos x\, dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} \quad (a > 0)$

(鹿児島大 2007)　(m20075401)

0.1011 (1) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(a) $\left(x^2 + 2xy\right) dx + xydy = 0$　(b) $\left(xy^2 + \sin x\right) dx + \left(x^2 y + \cos y\right) dy = 0$

(2) 次の微分方程式の完全解を求めよ．

$$y'' + 4y' + 3y = 3e^{-x}$$

(鹿児島大 2007)　(m20075402)

0.1012 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)$　(2) $y = \tan(x) \cdot \log(x)$

(鹿児島大 2007)　(m20075409)

0.1013 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x^2 e^x\, dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+3}\, dx$　(3) $\displaystyle\int \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a > 0,\ -a < x < a)$

(鹿児島大 2008)　(m20085401)

0.1014 (1) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(a) $(xy + 2x - 3y - 6)dx + dy = 0$ (b) $(x^2y + \cos x)dx + (x^3/3 + \sin y)dy = 0$

(2) 次の微分方程式の完全解を求めよ． $y'' + 2y' + 2y = 4\sin x$

(鹿児島大 2008) (m20085402)

0.1015 次の関数の微分を求めよ．

(1) $f(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ (2) $f(x) = \sin^{-1}(x)$

(鹿児島大 2008) (m20085409)

0.1016 (1) $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right)$ を x で微分せよ． (2) x^x を x で微分せよ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2 - x - 2}\,dx$ を求めよ． (4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}\,dx$ を求めよ．

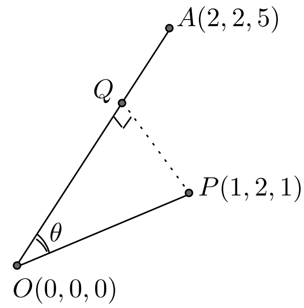
(鹿児島大 2008) (m20085414)

0.1017 図の様に点 O を原点として，点 $A(2, 2, 5)$，点 $P(1, 2, 1)$ がある．点 P から直線 OA におろした垂線の足を点 Q とする．この時，以下の問いに答えなさい．

(1) 図の様に直線 OA と直線 OP の成す角度を θ とする時，$\cos\theta$ を求めなさい．

(2) 直線 OQ の長さを求めなさい．求めた長さを用いて，ベクトル $\overrightarrow{OQ}$ を求めなさい．

(3) ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ を求めなさい．



(鹿児島大 2009) (m20095407)

0.1018 (1) x^x を x で微分せよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2 - x - 2}\,dx$ を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}\,dx$ を求めよ．

(鹿児島大 2009) (m20095410)

0.1019 (1) $\displaystyle\int (2x^2 - 1/x)^2 dx$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle\int \cos^3 x dx$ を求めなさい．

(3) 楕円（長軸 a，短軸 b，$x = a\cos\theta$，$y = b\sin\theta$）の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2009) (m20095412)

0.1020 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $5xy^2dy + 2(x^3 - 3x)ydx = 0$

(2) $(xy + \sin x \cdot \cos y)dx + (x^2/2 + \cos x \cdot \sin y)dy = 0$

(3) $y'' + 2y' + y = 0$

(鹿児島大 2009)　　(m20095414)

0.1021 次の微分・定積分を求めなさい.

(1) $\dfrac{d}{dx}(\log|\cos x|)$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx$

(鹿児島大 2009)　　(m20095417)

0.1022 原点 $O(0,0)$, 点 $A(4,-1)$, 点 $B(2,2)$ がある時, 以下の問いに答えなさい.

(1) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の長さと内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ を求めなさい.

(2) 角 AOB を θ とする時, $\cos\theta$ と $\sin\theta$ を求めなさい.

(3) 三角形 OAB の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2009)　　(m20095419)

0.1023 次の微分を計算し, 簡単な式で表せ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\log(\cos x)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}\right)$

(鹿児島大 2010)　　(m20105401)

0.1024 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $2xydx + xydy + ydx + 2xdy = 0$

(2) $(2xy^2 + \sin x)dx + (2x^2y + \cos y)dy = 0$

(3) $y'' + y' - 2y = e^{-2x} + 3e^{2x}$

(鹿児島大 2010)　　(m20105403)

0.1025 原点 $O(0,0)$, 点 $A(2,1)$ がある時, 以下の問いに答えなさい.

(1) 点 A に対して x 軸に関して線対称な点 B を求めなさい.

(2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$, $\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|$ を求めなさい. それらを使い $\angle AOB = \theta$ とした時の $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めなさい.

(3) 点 A を原点の周りに反時計回りに 45° 回転させた点　C の座標を求めなさい.

(鹿児島大 2010)　　(m20105409)

0.1026 以下の問に答えよ.

(1) x の関数 $f(x)$, $g(x)$ について, 以下の部分積分法の公式

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

が成り立つことを示せ.

(2) 上記の公式を利用して, 不定積分 $\displaystyle\int \log x\,dx$ を求めよ.

(3) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とする. このとき, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$ であることを示せ.

(4) 前問の結果を利用して, 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$ を求めよ.

(鹿児島大 2011)　　(m20115401)

0.1027 直交座標系 $O-XYZ$ におけるベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ と $\boldsymbol{c} = (c_1,\ c_2,\ c_3)$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ により作られる三角形に余弦定理を適用して，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積について，$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ が成り立つことを示せ．ただし，θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角であり，また $|\boldsymbol{a}|$ と $|\boldsymbol{b}|$ はそれぞれ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の大きさを表し，$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$, $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2}$ である．

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積は $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$ と定義される．これより，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\ \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\ \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b})$ が成り立つことを示せ．

(鹿児島大 2011)　(m20115403)

0.1028 次の関数を微分しなさい．

$$\cos^{-1}\frac{x}{a}$$

(鹿児島大 2011)　(m20115407)

0.1029 次の微分を計算し，簡単な式で表せ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left\{\sin(x^3)\right\}$　(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\log x\cdot\cos x\right)$

(鹿児島大 2012)　(m20125401)

0.1030 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x\cos x\,dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+1}\,dx$

(鹿児島大 2012)　(m20125402)

0.1031 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $(xy^2-x)dx-(y+x^2y)dy=0$

(2) $(y^2+1)dx+(2xy+\cos y)dy=0$

(3) $y''+4y'+5y=2\cos x+3e^{-x}$

(鹿児島大 2012)　(m20125403)

0.1032 行列 $A=\begin{pmatrix}\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$，行列 $B=\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$ がある．このとき，以下の各問に答えよ．

(1) AB ならびに BA を求めよ．

(2) $C=\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $D=2BA-C$ とするとき，D を求めよ．

(3) n を正の整数，$\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}\cos\phi \\ \sin\phi\end{pmatrix}$ とするとき，$D^n\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}\cos(-n\pi/2+2n\theta+\phi) \\ \sin(-n\pi/2+2n\theta+\phi)\end{pmatrix}$ であることを証明せよ．

(4) $R=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$ とするとき $D^n=R$ の形に書けることを示し，β を求めよ．また，このことを利用して逆行列 $(D^n)^{-1}$ を求めよ．

(鹿児島大 2012)　(m20125404)

0.1033 次の微分を計算し，簡単な式で表せ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{e^{2x}}{2}\log(x^2+1)\right\}$　(2) $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{\cos^2 x}{(2x+1)^2}\right\}$

(鹿児島大 2012)　(m20125406)

0.1034 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^2-2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$

(鹿児島大 2012) (m20125407)

0.1035 次の不定積分を求めなさい.

$\displaystyle\int x^2 \cos x\,dx$

(鹿児島大 2012) (m20125412)

0.1036 x 軸と y 軸からなる直交座標平面上に点 $A(2,1)$ と点 $B(2,-1)$ があるとき，以下の問いに答えなさい.

(1) 点 A の y 軸に関して対称な点 P の座標を求めなさい.

(2) 座標平面の原点を O としたとき，$OA \perp OQ$ かつ $OA = OQ$ となるような，第 2 象限にある点 Q の座標を求めなさい.

(3) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積を求めなさい．また，$\angle AOB$ を θ としたとき，$\cos\theta$ の値を求めなさい.

(鹿児島大 2012) (m20125419)

0.1037 以下の問題に答えなさい.

(1) $(x^2+1)^2$ を微分しなさい.

(2) 関数 $y = \cos^2 x - \sin^2 x$ の最大値，最小値，そのときの x の値を求めなさい.

(鹿児島大 2012) (m20125421)

0.1038 以下の問いに答えなさい.

(1) 関数 $y = \cos x \quad (-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2)$ と x 軸で囲まれた面積を求めなさい.

(2) t の関数 $F(t) = \displaystyle\int_0^{10} z(x)\cos(t-x)dx$ の最大値が $\sqrt{\left\{\displaystyle\int_0^{10} z(x)\cos x dx\right\}^2 + \left\{\displaystyle\int_0^{10} z(x)\sin x dx\right\}^2}$ となることを示しなさい．ただし，$z(x)$ は，x に関する任意の関数である.

(鹿児島大 2012) (m20125422)

0.1039 以下の問題に答えなさい.

(1) 加法定理 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ を用いて $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$ が成立することを示しなさい.

(2) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ を，$x = a\sin t$ とおくことにより計算しなさい．ただし，$a > 0$ とする.

(鹿児島大 2012) (m20125426)

0.1040 x の関数 y に関する微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0$ について次の問に答えなさい.

(1) この微分方程式の一般解は，$y = A\sin kx + B\cos kx$ で与えられる（A, B は未定係数）．$x = 0$ のとき $y = 0$ とすると，未定係数 B の値はいくらか.

(2) さらに，$x = 10$ のとき，$y = 0$ とする．未定係数 A が 0 以外の値を取り得るための k の値を求めなさい.

(鹿児島大 2012) (m20125428)

0.1041 次の関数 y を x で微分し，三角関数 1 つを用いた式に整理しなさい．

$y = \cos^2 x - \sin^2 x$

(鹿児島大 2012)　　(m20125432)

0.1042 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ を求めなさい．

(鹿児島大 2012)　　(m20125435)

0.1043 次の関数の，付記の区間での，最大値，最小値を求めなさい．

$f(x) = 2\cos x + \cos 2x \qquad \left(0 \leqq\ x \leqq\ 2\pi\right)$

(鹿児島大 2013)　　(m20135413)

0.1044 次の微分を求めなさい．

$\dfrac{d}{dx}\left[\cosh x^2\right]$　　（ただし，cosh はハイパボリックコサインとする.）

(鹿児島大 2014)　　(m20145411)

0.1045 xyz 直交座標系の原点を O とする．この空間内に 2 点 $A(1, 2, 0)$，点 $P(a, b, 0)$ がある．以下の問いに答えなさい． ただし，点 P は 2 点 O, A を通る直線上にはないものとする．

(1) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OP}$ のなす角度を θ としたとき，$\cos\theta$ を求めなさい．

(2) 2 点 A, P を通る直線の方程式を求めなさい．

(3) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OP}$ の外積を求めなさい．

(4) 三角形 OAP の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2014)　　(m20145413)

0.1046 次の関数の，付記の区間での，最大値，最小値を求めなさい．

$f(x) = \cos x + \sin^2 x \quad (0 \leqq\ x \leqq\ 2\pi)$

(鹿児島大 2014)　　(m20145416)

0.1047 次の微分を求めなさい．ただし，n は自然数である．　$\dfrac{d^n}{dx^n}\cos^2 x dx$

(鹿児島大 2015)　　(m20155406)

0.1048 直交座標系で $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{OQ} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ とする． ただし，$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ は互いに平行ではない．$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ はいずれも零ベクトルではない．

(1) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めなさい．

(2) $\triangle OPQ$ の面積 S を求めなさい．

(鹿児島大 2015)　　(m20155408)

0.1049 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が，逆行列と転置行列の等しい直交行列（$A^T = A^{-1}$）であることを示せ．

(鹿児島大 2015)　　(m20155415)

0.1050 次の定積分を求めなさい．ただし，$m.n$ は自然数とする．

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx$$

(鹿児島大 2015)　　(m20155418)

0.1051 以下の微分を計算せよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\log(x^2+4x+4)$ （ただし，$x>0$）　　(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right)$ （ただし，$0<x<\pi$）

(鹿児島大 2016)　　(m20165401)

0.1052 以下の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{x}{\cos^2 x}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x\sin x dx$

(鹿児島大 2016)　　(m20165402)

0.1053 次の微分を求めなさい．

$\dfrac{d}{dx}(\cos^2 x+\cos^2 y)$　　（ただし，$x+y=\pi/2$ とする．）

(鹿児島大 2016)　　(m20165406)

0.1054 三角形の加法定理を用いて，

$$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=2\sin(\theta-a)$$

の式における a を決定したい．どのように決定するか解法の過程を説明せよ．また a の値を答えよ．

(鹿児島大 2016)　　(m20165411)

0.1055 次の関数を x で微分しなさい．

$$y=x^{\cos(x)}$$

(鹿児島大 2016)　　(m20165414)

0.1056 以下の微分方程式の解を求めよ．ただし，虚数単位は i とする．

(1) $y\dfrac{dy}{dx}+x=0$　　（ただし，$x=1$ のとき $y=1$ ）

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-6\dfrac{dy}{dx}+10y=0$　　（ただし，$x=0$ のとき $y=1$，$\dfrac{dy}{dx}=4$ ）

(3) $(\cos x+y)dx+xdy=0$　　（ただし，$x=\pi$ のとき $y=1$ ）

(鹿児島大 2017)　　(m20175403)

0.1057 次の微分を求めなさい．

$\dfrac{d}{dx}\left(\cos^3(x^2+1)\right)$

(鹿児島大 2018)　　(m20185406)

0.1058 (1) $f(x,y)=x^2+xy+y^3$, $x(t)=\cos t$, $y(t)=\sin t$ のとき，$\dfrac{d}{dt}f\left(x(t),\ y(t)\right)$ を計算しなさい．

(2) $g(x)=e^x$, $x=r\cos t$ のとき，$\dfrac{\partial}{\partial t}g(r\cos t)$, $\dfrac{\partial}{\partial r}g(r\cos t)$ を計算しなさい．

(鹿児島大 2018)　　(m20185414)

0.1059 次の微分を計算しなさい．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2x}{1+2x^2}\right)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}(\sin 2x\cos^2 x)$

(鹿児島大 2018)　　(m20185420)

0.1060 以下の微分を求めなさい．

$\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{\cos x+1}\right)$

(鹿児島大 2018)　　(m20185425)

0.1061 以下の不定積分を求めなさい.

$$\int x\cos 2x dx$$

(鹿児島大 2018) (m20185426)

0.1062 曲線 $y=\sin x\cos x$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) 曲線のグラフを $0\leq x\leq\pi$ の範囲でかきなさい.

(2) $0\leq x\leq\pi$ の範囲において，曲線と直線 $y=\dfrac{1}{4}$ で囲まれた部分の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2018) (m20185429)

0.1063 次の関数の導関数を求めよ.

$$f(x)=e^x\cdot\cos x$$

(鹿児島大 2018) (m20185430)

0.1064 次の関数の不定積分を求めよ.

$$f(x)=4x^2\cdot\cos 2x$$

(鹿児島大 2018) (m20185432)

0.1065 以下の微分を計算せよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2-4x-5}{x^2+3x+2}\right)$ (2) $\dfrac{d}{dx}\big[\cos(\log ax)\big]$

(鹿児島大 2021) (m20215401)

0.1066 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=1$ (ただし，$x>0$) (2) $(x+\sin y)dx+x\cos y dy=0$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}+2y=x^2$

(鹿児島大 2021) (m20215403)

0.1067 不定積分 $\displaystyle\int x\sin 2x\,\cos 2x\,dx$ を求めなさい.

(鹿児島大 2021) (m20215407)

0.1068 $\sqrt{\cos x}$ の導関数を求めよ.

(鹿児島大 2021) (m20215413)

0.1069 $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx$ の定積分を求めよ.

(鹿児島大 2021) (m20215414)

0.1070 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ を求めたい．解法の指針を最初に述べた後に解答せよ.

(鹿児島大 2021) (m20215417)

0.1071 曲線 C : $x=\cos(t)$, $y=\sin(t)$, $z=\sqrt{3}\cdot t$ $(0\leq t\leq 2\pi)$ のとき，次式を求めなさい.
ただし，s は曲線の長さを表す.

$$\int_C(xy+z)ds$$

(鹿児島大 2021) (m20215420)

0.1072 以下の微分を計算せよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-x-1}\right)$ (2) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sin x}{1-\cos x}\right)$

(鹿児島大 2022) (m20225401)

0.1073 $\dfrac{d}{dx}\left(\cos(\sin x^2)+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}\right)$ を求めなさい.

(鹿児島大 2022) (m20225406)

0.1074 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ を求めたい．解法の指針を最初に述べた後に解答せよ.

(鹿児島大 2022) (m20225411)

0.1075 次式で定義される双曲線関数：

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\ ,\qquad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

について, 以下を示しなさい.

(1) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$

(2) $\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$

(室蘭工業大 2005) (m20055506)

0.1076 以下の不定積分を求めなさい.

(1) $I=\displaystyle\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$ (2) $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}dx$

(室蘭工業大 2005) (m20055509)

0.1077 次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\bigl(2e^x+\cos x\bigr)dx$$

(室蘭工業大 2005) (m20055514)

0.1078 次の式が与えられている. $f(x)=\dfrac{\sin 2x-\cos 2x}{\sin 2x+\cos 2x}$ 導関数 $\dfrac{df}{dx}$ を求めなさい.

(室蘭工業大 2006) (m20065505)

0.1079 次の式が与えられている. $f(x,y)=x^2y+y^2\cos x+y^3$

偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ を求めなさい.

(室蘭工業大 2006) (m20065507)

0.1080 オイラーの公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ に関する以下の問に答えよ.

(1) オイラーの公式を用いて，つぎの公式を証明せよ.

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

(2) $e^{i(\theta+\varphi)}=e^{i\theta}e^{i\varphi}$ という式に，オイラーの公式を適用し，両辺の実部と虚部を比較して，余弦関数および正弦関数の加法公式

$$\cos(\theta+\varphi)=\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi$$
$$\sin(\theta+\varphi)=\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi$$

を導出せよ.

(室蘭工業大 2006) (m20065508)

0.1081 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が直交行列であることを示しなさい.

(室蘭工業大 2007) (m20075506)

0.1082 (1) $\cos^2\theta\sin(2\theta) - \cos\theta\sin(3\theta) = A\sin(4\theta)$ と表したとき，係数 A を求めよ.

(2) $\cos^5\theta = B\cos\theta + C\cos(3\theta) + D\cos(5\theta)$ と表したとき，係数 B, C, D を求めよ.

(室蘭工業大 2007) (m20075511)

0.1083 次の関数の導関数を求めなさい.

$$f(x) = e^x \cos x$$

(室蘭工業大 2008) (m20085504)

0.1084 次の微分方程式の特殊解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = -y$,　初期条件 $x = 0$ のとき $y = 5$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - e^x + \cos(x)$,　初期条件 $x = 0$ のとき $y = 2$

(室蘭工業大 2009) (m20095506)

0.1085 行列 A を $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ としたとき, 次の問いに答えよ.

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(2) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) 行列 A の 2 乗 A^2 を求めよ.

(4) 行列 A の N 乗 A^N を求めよ.

(室蘭工業大 2010) (m20105502)

0.1086 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$　　(2) $y = \dfrac{\cos x}{x}$

(室蘭工業大 2011) (m20115503)

0.1087 次の不定積分を求めよ.

$$\int x^2 \cos x dx$$

(室蘭工業大 2014) (m20145503)

0.1088 $y = e^{-5x}\cos 5x$ を x で微分せよ．e は自然対数の底である.

(室蘭工業大 2015) (m20155502)

0.1089 $y = \cos x \quad \left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ.

(室蘭工業大 2015) (m20155503)

0.1090 不定積分 $I = \displaystyle\int e^{-px}\cos(kx)dx$ を求めよ．ただし，p と k はゼロでない定数とする.

(室蘭工業大 2015) (m20155506)

0.1091 (1) から (3) の関数をそれぞれ微分せよ.

(1) $y = -\cos(2x)$　　(2) $y = e^{-3x^2}$　　(3) $y = \log(2x^2+1)$

(室蘭工業大 2015) (m20155507)

0.1092 2 変数関数 $z = z(x, y)$, $x(r, \theta) = r\cos\theta$, $y(r, \theta) = r\sin\theta$ の偏微分に関する以下の問いに答えよ．ただし，以下では，$r = 0$ の場合は除いて考える．

(1) 偏微分 $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を用いて表せ．

(2) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$ となることを示せ．

(室蘭工業大 2015)　　(m20155512)

0.1093 次の関数を微分せよ．

(1) $y = x^3\cos 3x$　　(2) $y = \log\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$　　(3) $y = \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^3$

(室蘭工業大 2015)　　(m20155514)

0.1094 関数 $f(x) = \sin 2x - \cos 3x$ について，x^3 までのマクローリン展開を求めなさい．

(室蘭工業大 2016)　　(m20165502)

0.1095 以下の不定積分を計算せよ．なお，積分定数は省略してよい．

(1) $\displaystyle\int e^{-3x}\cos(4x)dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x}+1}dx$

(室蘭工業大 2017)　　(m20175508)

0.1096 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$y'' + 3y' + 2y = \cos x$$

(室蘭工業大 2018)　　(m20185503)

0.1097 関数 (1) と (2) を x で微分せよ．

(1) $y = \log\left(x^3 + 4x^2 + 5x + 2\right)$　　(2) $y = \cos\left(x^2 + \dfrac{2}{x}\right)e^{-x}$

(室蘭工業大 2018)　　(m20185505)

0.1098 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に関する以下の問いに答えよ．

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ．

(2) 行列式 $|A|$ を計算せよ．

(室蘭工業大 2018)　　(m20185509)

0.1099 常微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 3y = 13\sin 2x$ に関する以下の問いに答えよ．

(1) この方程式の右辺がゼロの場合の解（同次解）y_0 を求めよ．

(2) 特解 y_1 を $y_1 = A\sin 2x + B\cos 2x$ の形を仮定して求めよ．ただし，A, B は定数とする．

(3) 初期条件を，$x = 0$ で，$y = 0$, $\dfrac{dy}{dx} = 2$ として，解 y を求めよ．

(室蘭工業大 2018)　　(m20185510)

0.1100 次の不定積分を求めよ．

$$\int x\cos(4x)dx$$

(室蘭工業大 2021) (m20215506)

0.1101 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$y'' - 3y' - 4y = \cos x$$

ただし，$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ の意味である．

(室蘭工業大 2021) (m20215507)

0.1102 (1) 関数 $f(x) = \cos 2x + \sin(-3x)$ に対して，1 次から 3 次までの導関数を求めなさい．

(2) (1) で求めた導関数を用いて，関数 $f(x) = \cos 2x + \sin(-3x)$ について x^3 までのマクローリン展開を求めなさい．

(室蘭工業大 2022) (m20225504)

0.1103 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$ を求めよ． (2) $f(x) = \log|\sin^{-1} x|$ を微分せよ．

(岡山県立大 2007) (m20075601)

0.1104 以下の問いに答えよ．

(1) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ を示せ．

(2) $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ とおくとき，$n > 1$ に対して I_n と I_{n-2} の関係式を求めよ．

(香川大 2012) (m20125701)

0.1105 下記の関数 $f(x, y)$ について，次の問いに答えよ．ただし，α と β はそれぞれ正の定数であるとする．

$$f(x, y) = \cos\alpha x\; e^{-\beta y}$$

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ と $\dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y)$ をそれぞれ導出せよ．

(2) 求めた偏導関数に関して，$x = \dfrac{\pi}{2\alpha}$, $y = \dfrac{1}{\beta}$ における偏微分係数をそれぞれ求めよ．

(香川大 2014) (m20145701)

0.1106 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$

(香川大 2018) (m20185701)

0.1107 逆正弦関数 $\sin^{-1} x$ と逆余弦関数 $\cos^{-1} x$ について, 次の問いに答えよ．

(1) 次の値を求めよ．

(i) $\sin^{-1}(-1)$, (ii) $\cos^{-1} 0$, (iii) $\sin^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (iv) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

(2) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ．

(3) $y = \sin^{-1} x$ の微分と不定積分を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}$ の値を求めよ．

(島根大 2005)　　(m20055806)

0.1108 関数

$$f(x) = a^2x^2 - b(x+1) + \sin ax + \cos ax$$

について, 以下の設問に答えよ. ただし, a, b は実数である.

(1) 第 1 次導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を導け.

(2) 全ての実数 x に対し, $f''(x) > 0$ であることを示せ.

(3) 設問 (2) の結果から, $f'(x)$ は増加関数であることがわかる. このとき, 領域 $x > 0$ において, $f'(x) > 0$ が成立するためには a と b の間にどのような関係があればよいか. 関係式を導け.

(4) 設問 (3) の条件のもとで, 領域 $x > 0$ において $f(x) > 0$ が成立するためには, さらにどのような条件が必要か.

(島根大 2005)　　(m20055808)

0.1109 関数 $f(x) = e^{-x}(\sin x + \cos x)$ の極値を調べよ.

(島根大 2006)　　(m20065806)

0.1110 $f(x, y)$ を C^2 級の関数とし, θ を定数として　$x = u\cos\theta - v\sin\theta$,　$y = u\sin\theta + v\cos\theta$　とする.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ を求めよ.　　(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ を $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ と $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を用いて表せ.

(島根大 2006)　　(m20065810)

0.1111 $e^x \cos x$ の不定積分を求めよ.

(島根大 2006)　　(m20065816)

0.1112 一般に, 関数 $f(x)$ が周期 2π の周期関数で, 区間 $[-\pi, \pi]$ でいくつか（有限個）の点を除いて連続であるとき, 次のように三角関数の級数に展開できる. これを $f(x)$ のフーリエ級数という.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ \ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ \ b_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

周期 2π の周期関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} -2x & (-\pi \leqq x \leqq 0) \\ 2x & (0 < x \leqq \pi) \end{cases}$$ のとき, $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ

(島根大 2007)　　(m20075814)

0.1113 (1) 関数 $f(x) = (x+1)e^{-2x}$ について, $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ. また, 3 以上の整数 n に対して第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $y = x^x$ $(x > 0)$ の極値を求めよ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\sin x\, dx$ の値を求めよ.

(4) 曲線 $y = x\cos x$ $\left(0 \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2}\right)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ.

(島根大 2009)　　(m20095802)

0.1114 (1) 次の極限値は存在するかどうか調べよ.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2 + y^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(2) $f(x,y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(a) f の 2 次偏導関数をすべて求めよ．

(b) $x = \sin(u+v)$，$y = \cos(u-v)$ とするとき，偏導関数 f_u と f_v を求めよ．

(島根大 2009)　　(m20095803)

0.1115 以下の設問に答えよ．ただし，T $(T>0)$ および ϕ は定数である．

(1) 次の定積分を計算せよ．　$\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt$

(2) 次の定積分を計算せよ．　$\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^{T} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\phi\right)\right]^2 dt$

(3) 次式が成り立つことを示せ．　$\displaystyle\int_0^{T} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)dt = 0$

(4) 次の定積分を計算せよ．　$\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^{T} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)+3\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{3}\right)\right]^2 dt$

(島根大 2017)　　(m20175801)

0.1116 $f(x) = -\log\cos x$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{f(x)}$ を求めよ．

(3) $-\pi/2 < x < \pi/2$ のとき，$f(x) \geq x^2/2$ であることを示せ．

(4) 曲線 $y = f(x)$ の，$0 \leq x \leq \pi/3$ の部分の長さを求めよ．

(島根大 2018)　　(m20185806)

0.1117 $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x-y \leq 1,\ 0 \leq x+y \leq \pi\}$ とするとき，重積分

$$\iint_D (x-y)\cos(x^2-y^2)dxdy$$

の値を求めよ．

(島根大 2018)　　(m20185808)

0.1118 次の関数を積分せよ．

(1) $x\big(x^2+1\big)^{\alpha}$

(2) $\big(\cos x\big)^{\alpha}\sin x$

(首都大 2003)　　(m20035905)

0.1119 次の微分方程式を解け．　$\dfrac{dy}{dx} - y = \cos x - \sin x$　　(首都大 2008)　　(m20085904)

0.1120 $f(x) = \cos x$ について以下の問いに答えよ. ただし, $-\pi \leq x \leq \pi$ とする.

(1) マクローリン展開を用いて $f(x)$ を 2 次式で近似せよ．

(2) $f(x)$ および $f(x)$ を 2 次式で近似した曲線を図示せよ．

(首都大 2010)　　(m20105906)

0.1121 次の関数を微分しなさい.

(1) $f(x) = xe^{-x^2}$　　(2) $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$

(首都大 2011)　(m20115904)

0.1122 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int x^2 \cos x \, dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{\left(\log x\right)^2}{x} \, dx$

(首都大 2012)　(m20125907)

0.1123 行列 A を $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えなさい.

(1) A の行列式 $|A|$ を求めなさい.

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ には $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ の関係があった．このときの，x_1 と x_2 を求めなさい.

(首都大 2013)　(m20135901)

0.1124 直交座標系 (x, y, z) における 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (2, -2, 1)$ と $\boldsymbol{b} = (1, 1, 2)$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めなさい.

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に垂直な単位ベクトルをすべて求めなさい.

(3) $(0, 0, 0)$, $(2, -2, 1)$, $(1, 1, 2)$ の 3 点を通る平面の方程式を示しなさい.

(首都大 2013)　(m20135902)

0.1125 次の関数を微分しなさい.

(1) $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)^2}$　　(2) $f(x) = \sin^4 x \cos 3x$

(首都大 2013)　(m20135904)

0.1126 次の文章中の $\boxed{①}$ 〜 $\boxed{⑤}$ に入れるのに最も適当な分数を答えなさい.

(1) $\dfrac{1}{\cos x}$ のマクローリン展開を x^4 の項まで求めると，$1 + \boxed{①} x^2 + \boxed{②} x^4$ が得られる.

(2) $\tan x$ のマクローリン展開を x^5 の項まで求めると，$x + \boxed{③} x^3 + \boxed{④} x^5$ が得られる.

(3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x^3}$ の極限値は，$\boxed{⑤}$ である.

(首都大 2014)　(m20145906)

0.1127 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int x \log x \, dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$

(首都大 2015)　(m20155908)

0.1128 ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ について，

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} u \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

で定める．下記の (1), (2), (3) に答えなさい．ただし，u は正の実数である.

(1) 内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ とベクトルの長さ $||\boldsymbol{a}||,\ ||\boldsymbol{b}||$ をそれぞれ求めなさい.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ としたときの $\cos\theta$ を求めなさい.

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するための u を求めなさい.

(首都大 2016)　　(m20165903)

0.1129 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{\cos x-1}$ を求めなさい.

(首都大 2016)　　(m20165907)

0.1130 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int 8x\left(4x^2-1\right)^{10}dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$

(首都大 2016)　　(m20165908)

0.1131 $t(0<t<2\pi)$ の関数 $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ について，以下の問いに答えよ．ただし，a は 0 でない定数とする.

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.　　(2) (1) の結果を用いて，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ.

(首都大 2016)　　(m20165911)

0.1132 ベクトル場 $\overrightarrow{a}=y\overrightarrow{i}-x\overrightarrow{j}$ と曲線 C： $\overrightarrow{r}=(\cos^2 t)\overrightarrow{i}+(\sin^2 t)\overrightarrow{j}\quad\left(0\leq t\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $d\overrightarrow{r}$ を計算せよ.

(2) 内積 $\overrightarrow{a}\cdot d\overrightarrow{r}$ を計算せよ.

(3) (2) の結果を用いて，C に沿う線積分 $I=\displaystyle\int_C\overrightarrow{a}\cdot d\overrightarrow{r}$ の値を求めよ.

(首都大 2016)　　(m20165913)

0.1133 次の関数を微分しなさい．解答は答えのみでよい.

(1) $f(x)=\sqrt{x}e^{-x}$　　(2) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$　　(3) $f(x)=\cos^{-1}(\log x)$

(首都大 2017)　　(m20175901)

0.1134 関数 $f(x)=e^x\cos x$ のマクローリン級数を x^3 の項まで求めなさい.

(首都大 2017)　　(m20175903)

0.1135 次の不定積分を求めなさい.　　$f(x)=\displaystyle\int\cos^2 x\ dx$

(首都大 2017)　　(m20175905)

0.1136 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ を求めなさい.

(首都大 2018)　　(m20185907)

0.1137 次の関数を微分しなさい.

(1) $f(x)=\dfrac{x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{3}}}$　　(2) $f(x)=(\cos x)^{\sin x}$

(東京都立大 2020)　　(m20205903)

0.1138 (1) 次の関数について $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.　$x=\dfrac{a}{\cos\theta},\quad y=b\tan\theta$ （ $a,\ b$ は定数，ただし，$a\neq0$ ）

(2) 次の関数について $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.　$y=\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}x\right)$

(3) 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{x \to +0} x^x$

(東京都立大 2020) (m20205910)

0.1139 0 以上の整数 n に対し，C_n，S_n を

$$C_n = \int_0^\pi x^n \cos x dx$$

$$S_n = \int_0^\pi x^n \sin x dx$$

のように定義するとき，以下の問いに答えよ．

(1) C_0，S_0 を求めよ．

(2) C_n を S_{n-1} を用いて表せ．

(3) S_n を C_{n-1} を用いて表せ．

(4) 前問 (1)〜(3) の答えを用いて S_3 を求めよ．

(東京都立大 2021) (m20215904)

0.1140 不定積分

$$I = \int \frac{1}{4\sin x + 3\cos x} dx$$

について 以下の問いに答えよ．

(1) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ として置換し，上記の不定積分を $I = \displaystyle\int g(t)dt$ の形で表せ．

(2) 前問 (1) で得られた式を用いて不定積分 I を求めよ．なお，解は $\tan\dfrac{x}{2}$ を含む式でよい．

(東京都立大 2022) (m20225905)

0.1141 (1) 未知関数 $y = y(x)$ に対する 2 階同次線形常微分方程式 $y'' - 2y' - 8y = 0$ の一般解を求めよ．

(2) 2 階非同次線形常微分方程式 $y'' - 2y' - 8y = 25\cos 3x$ の特殊解を求めよ，その結果をつかって，一般解を書け．

(滋賀県立大 2007) (m20076002)

0.1142 関数 $f(x)$ の導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

にしたがって，$f(x) = \sin x$ の導関数が $f'(x) = \cos x$ であることを示せ．

(滋賀県立大 2008) (m20086001)

0.1143 (1) 未知関数 $y = y(x)$ に対する 2 階定数係数同次線形常微分方程式 $y'' + y' - 6y = 0$ の一般解を求めよ．

(2) 2 階定数係数非同次線形常微分方程式 $y'' + y' - 6y = \sin x$ の特殊解を求めよ．
（特殊解を $y = A\sin x + B\cos x$ と仮定してよい．A，B は定数である.）

(3) 上記 (2) の非同次線形常微分方程式の一般解を書き下せ．

[注；(1) における「同次」および (2) における「非同次」は，それぞれ「斉次」および「非斉次」といわれることもある.]

(滋賀県立大 2008) (m20086002)

0.1144 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は次で与えられる．

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

(1) 関数 $f(x) = (1+x)\sin x - x\cos x$ のマクローリン展開を書き下せ. ただし, x^4 の項までを明確に求め, それよりも高次の項は $\cdots$ と略してよい.

(2) (1) の結果を使って, 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)\sin x - x\cos x}{x^2}$$

(滋賀県立大 2010)　　(m20106002)

0.1145 $y = \cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ の逆関数 $y = \cosh^{-1} x$ について，次の各式を示せ.

(1)

$$y = \cosh^{-1} x = \pm\log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

(2) $y > 0$ の $y = \cosh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ について

$$y' = \frac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

(滋賀県立大 2011)　　(m20116001)

0.1146 (1) 未知関数 $y = y(x)$ に対する 2 階同次線形常微分方程式

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

の一般解を求めよ.

(2) 2 階非同次線形常微分方程式

$$y'' - 6y' + 9y = \cos x$$

の特殊解を求めよ．その結果をつかって，一般解を書き下せ.

(滋賀県立大 2011)　　(m20116002)

0.1147 逆三角関数に関する次の方程式を解け.

$$\cos^{-1} x = 2\sin^{-1}\frac{3}{5}$$

(滋賀県立大 2012)　　(m20126001)

0.1148 (1) 未知関数 $y = y(x)$ に対する 2 階定数係数同次線形常微分方程式

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

の一般解を求めよ.

(2) 2 階定数係数非同次線形常微分方程式

$$y'' + 5y' + 6y = \cos 2x$$

の特殊解を求めよ.

(3) 上記 (2) の非同次線形常微分方程式の一般解を書け.

[注: (1) における「同次」および (2) における「非同次」は，それぞれ「斉次」および「非斉次」といわれることもある.]

(滋賀県立大 2012)　　(m20126002)

0.1149 (1) 未知関数 $y=y(x)$ に対する 2 階定数係数同次線形常微分方程式

$$y''+y'-12y=0$$

の一般解を求めよ.

(2) 2 階定数係数非同次線形常微分方程式

$$y''+y'-12y=2\cos x$$

の特殊解を求めよ. （特殊解を $y=A\sin x+B\cos x$ と仮定してよい.）

(3) 上記 (2) の非同次線形常微分方程式の一般解を書き下せ.

(滋賀県立大 2013) (m20136002)

0.1150 (1) 未知関数 $y=y(x)$ に対する 2 階定数係数同次線形常微分方程式

$$y''-8y'+16y=0$$

の一般解を求めよ.

(2) 2 階定数係数非同次線形常微分方程式

$$y''-8y'+16y=2\cos x$$

の特殊解を求めよ.

（特殊解を $y(x)=A\sin x+B\cos x$ と仮定してよい.）

(3) 上記 (2) の非同次線形常微分方程式の一般解を書き下せ.

(滋賀県立大 2014) (m20146002)

0.1151 D を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1$ （$a,\ b$ は正の実数）で与えられる領域とするとき, $x=ar\cos\theta$, $y=br\sin\theta$ とおくことにより, $\displaystyle\iint_D x^2dxdy$ を求めよ.

(滋賀県立大 2015) (m20156004)

0.1152 関数 $f(x,y)=\cos^{-1}\bigl(x^2+3y^3\bigr)$ について, $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ.

(滋賀県立大 2021) (m20216002)

0.1153 (1) 次の関数を微分せよ. ただし $a>0$ とする.

$$y=\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\ \right|$$

(2) m と n を正の整数とするとき, 次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\ dx$$

(宇都宮大 2005) (m20056103)

0.1154 以下の定積分および不定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2(x+2)(x-1)dx$ (2) $\displaystyle\int\frac{1}{(x-q)(x-q-1)}dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x+1}}dx$

(宇都宮大 2007) (m20076101)

0.1155 $\displaystyle\int\frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}dx$ を求めよ.

(宇都宮大 2007) (m20076109)

0.1156 関数 $z=f(x,y)$ の x と y が r と θ の関数で $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ の関係にあるとき, $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めよ.

(宇都宮大 2014) (m20146107)

0.1157 図 1 のように，点 A, B, C, D が xy 軸平面上にある．原点 O とし，

各座標を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と示すとき，$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，　$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

また，$\overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OA}$ を原点を中心として，反時計方向に角度 θ 回転させたものである．$\overrightarrow{OD}$ は $\overrightarrow{OC}$ を同様に角度 θ 回転させた点である．

以下の問に答えよ．

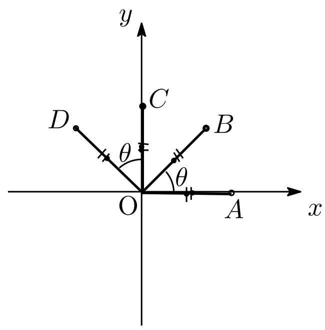


図 1:xy 軸平面

(1) 点 B, D の座標を求めよ．

(2) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$ を計算せよ．

(3) 原点を中心とした長さ 1 である任意のベクトル $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ は，

$\overrightarrow{OA}$ を角度 α 回転させることによって得られる．角度 α 回転させる一次変換を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

と表すとき，a, b, c, d を求めよ．

(4) $\cos(\alpha + \beta)$ を $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta$ を用いて表せ．

(工学院大 2003)　　(m20036206)

0.1158 (1) 曲線 $y = \cos 2\pi x$ に $x = \dfrac{1}{6}$ で接する直線の傾き（勾配）を求めなさい.（図 2 参照）

(2) x, y 軸と曲線 $y = \cos 2\pi x$，直線 $x = \dfrac{1}{6}$ に囲まれる図形の面積を求めよ．

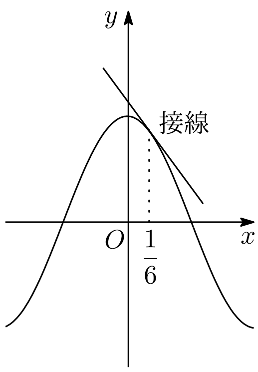


図 2:曲線 $y = \cos 2\pi x$

(工学院大 2003)　　(m20036208)

0.1159 $y = \sin^2 x + \cos x$ $(0^\circ \leqq x < 360^\circ)$ の最小値を求めよ．

(工学院大 2004)　　(m20046202)

0.1160 (1) 行列 $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ の固有値が実数となることを証明せよ．

(2) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求め，$AA^{-1} = E$ となることを証明せよ．ただし，E は単位行列である．

(工学院大 2004)　　(m20046205)

0.1161 $y = \sin^2\theta + \sin 2\theta + 3\cos^2\theta$ $(0^\circ \leqq \theta < 90^\circ)$ の最大値とそのときの θ の値を求めよ．

(工学院大 2005)　　(m20056202)

0.1162 微分方程式 $y' - y = e^{2x}\cos x$ を解け．

(はこだて未来大 2007)　　(m20076307)

0.1163 未知関数 $y = y(x)$ に対する微分方程式

$$y'' + y = \cos x$$

を初期条件 $y(0) = y'(0) = 1$ のもとで解け.

(はこだて未来大 2013) (m20136302)

0.1164 t を媒介変数として，方程式

$$x = \cos^3 t\ , \qquad y = \sin^3 t \qquad \left(0 \leqq\ t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

で表される座標平面上の曲線を D とする．以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ をそれぞれ求めよ.

(2) 曲線 D の接線のうち，接点の x 座標が $\dfrac{27}{125}$ であるものを求めよ.

(3) 曲線 D の長さを求めよ.

(はこだて未来大 2014) (m20146304)

0.1165 $-1 \leq x \leq 1$ において，$f(x) = x\ \mathrm{Cos}^{-1}x$ とする．ここで，$\mathrm{Cos}^{-1}x$ は逆余弦関数で，$\arccos x$ と書くこともある．以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \frac{\pi}{2}x}{x^2}$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$ の値を求めよ.

(はこだて未来大 2021) (m20216302)

0.1166 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{3x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1}dx$ (2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x \sin x}$ $(\tan x = t$ とおく$)$

(東京海洋大 2007) (m20076404)

0.1167 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x}{(x^2 + 4)(x - 2)}\,dx$ を計算せよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \cos x\,dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2008) (m20086403)

0.1168 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2 + x}{x^3 + x^2 + x + 1}\,dx$ を計算せよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x\,\cos^2 x\,dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2011) (m20116403)

0.1169 次の関数を微分しなさい.

(1) $f(x) = x^2 + x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ (2) $f(x) = x^2 \cos\dfrac{1}{x}$

(3) $f(x) = \left(x^2 + \sqrt{x} + 1\right)^{\frac{3}{2}}$ (4) $f(x) = \log_e(x^3 + x + 1)$

(東京海洋大 2012) (m20126407)

0.1170 下記の定積分，または不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int_0^1 (3x^3+4x^2-2)dx$ (2) $\displaystyle\int (\cos 2x+\sin 3x)dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x^2}dx$

(4) $\displaystyle\int x\cos(1+x^2)dx$ (5) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$

(東京海洋大 2013) (m20136402)

0.1171 下記の関数を x で微分しなさい．

(1) $y=(\cos x+\sin x)^2$ (2) $y=(x-2)(x+3)^2$ (3) $y=x^x$ (4) $y=e^{1+x^2}$

(東京海洋大 2014) (m20146401)

0.1172 下記の定積分，または不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \frac{2}{2x-1}dx$ (2) $\displaystyle\int 2^{3x}dx$ (3) $\displaystyle\int x\cos x dx$ (4) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{3-x}}dx$

(東京海洋大 2014) (m20146402)

0.1173 次の不定積分，または定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int 2\sin x\cos x\,dx$ (2) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^1 (x^3+3x^2-x+1)\,dx$

(東京海洋大 2015) (m20156402)

0.1174 (1) 曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ と直線 $x=2,\ x=5,\ y=0$ で囲まれる面積を求めなさい．

(2) 曲線 $y=\cos x$ の $-\dfrac{3}{4}\pi\leqq x\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ の範囲と，直線 $y=0$ で囲まれる面積を求めなさい．

(東京海洋大 2015) (m20156403)

0.1175 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2-2}$ を計算せよ．

(2) $n=0,1,2,\cdots$ に対し，定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos(nx)dx$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2016) (m20166407)

0.1176 次の関数を x で微分しなさい．

(1) $y=\dfrac{1}{2x+5}$ (2) $y=\sqrt{1-x^2}$

(3) $y=\dfrac{\log_e x}{x^2}$ (4) $y=\cos(5x-3)$

(東京海洋大 2021) (m20216401)

0.1177 次の不定積分，または定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int (2\cos^2 x-1)\,dx$ (2) $\displaystyle\int 3x\sqrt{x^2+1}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2+3x-28}$ (4) $\displaystyle\int_0^2 (2x+1)^3\,dx$

(東京海洋大 2021) (m20216402)

0.1178 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2+3x+3}{x^3+x^2+2x+2}dx$ を計算せよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi^2}\cos\left(3\sqrt{x}\,\right)dx$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2022) (m20226403)

0.1179 次の不定積分，または定積分を求めなさい．

1) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}dx$ 2) $\displaystyle\int 2\sin x\cos x dx$

3) $\displaystyle\int_1^4 \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx$ 4) $\displaystyle\int_1^2 x^2 \log x\, dx$

(東京海洋大 2022) (m20226407)

0.1180 (1) $f(t)=e^{-|t|}$ のフーリエ変換を求めなさい．

(2) $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{1+\omega^2}\,d\omega$ と $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega}{1+\omega^2}\,d\omega$ の値を求めなさい．

(和歌山大 2009) (m20096504)

0.1181 次の微分方程式の一般解を求め, さらに, 与えられた初期条件を満たす特殊解を求めなさい．

(1) $\displaystyle y\frac{dy}{dx}=x^3\ ,\quad y(1)=1$

(2) $\displaystyle \frac{dy}{dx}=\cos 3x\ ,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

(3) $\displaystyle \frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=0\ ,\quad y(0)=0\ ,\ y'(0)=1$

(和歌山大 2010) (m20106503)

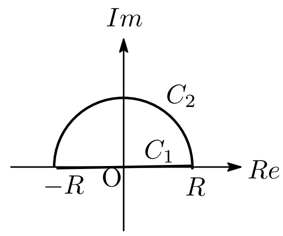
0.1182 R を 1 より大きい実数として, 図のように複素平面上で線分 C_1 と上半円周 C_2 からなる曲線 $C=C_1+C_2$ が与えられている. ただし, 曲線 C の向きは反時計まわりとする.

複素関数 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ について, 次の問いに答えなさい.

(1) C_2 上で $|f(z)| \leqq \dfrac{1}{R^2-1}$ が成り立つことを示しなさい.

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ の値を求めなさい.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x+i\sin x}{x^2+1}\,dx$ の値を求めなさい.



(和歌山大 2010) (m20106505)

0.1183 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin 5x\sin 7x}$ の値を求めなさい．

(和歌山大 2010) (m20106506)

0.1184 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-2x}{2(1-\cos x)}$ の値を求めなさい．

(和歌山大 2012) (m20126504)

0.1185 次の各問いに答えなさい．

(1) $\displaystyle\int e^x\cos nx\,dx$ を求めなさい． ただし n は正の整数とする．

(2) $\displaystyle\int e^x\sin nx\,dx$ を求めなさい． ただし n は正の整数とする．

(3) 関数 $f(x)=e^x\quad(-\pi\le x\le\pi)$ をフーリエ級数展開 $\displaystyle f(x)\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n\cos nx+b_n\sin nx\Big]$ したとき，係数 $a_n(n\ge 0)$，$b_n(n\ge 1)$ を求めなさい．

(和歌山大 2012) (m20126507)

0.1186 複素関数について，次の各問いに答えなさい.

(1) 関数 $w = z + \dfrac{1}{z}$ に対して $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $w = u + iv$ とおくとき， u, v を r, θ で表しなさい.

(2) 関数 $f(z)$ が領域 D で正則であるとき，$\mathrm{Re}f(z)$ が定数ならば $f(z)$ も定数であることを証明しなさい.

(3) 積分路 $C : |z| = 2$ の向きは反時計回りとして，次の積分値を求めなさい.

$$\int_C \frac{2z+1}{z(z-3)}dz$$

(和歌山大 2014) (m20146508)

0.1187 次の関数の $x = \dfrac{\pi}{2}$ のまわりのテイラー展開を 3 次の項まで求めなさい.

$$f(x) = x\cos x$$

(和歌山大 2015) (m20156502)

0.1188 次の値を求めなさい. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\exp(\cos x)}{\cos x}$

(和歌山大 2015) (m20156503)

0.1189 次の 2 重積分を求めなさい.

$$\iint_D x\cos y\, dxdy\,, \quad D = \{(x,y)\,|\,0 \leq x \leq \pi,\ x \leq y \leq 2x\}$$

(和歌山大 2015) (m20156504)

0.1190 次の (1), (2) に答えなさい．ただし，x を実数，z を複素数とする．また，i は虚数単位，e は自然対数の基底である.

(1) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - iz + 2}$ の $z = 0$ の周りでのテイラー展開を求めなさい.

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 4\cos x}$ を，$z = e^{ix}$ として $|z| = 1$ の閉路積分から求めなさい.

(和歌山大 2017) (m20176508)

0.1191 (1) 次の重積分を，極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ によって，r と θ の積分に変数変換しなさい.

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy, \qquad D = \left\{(x,y)\mid x^2+y^2 \leq 1\right\}$$

(2) (1) の積分の値を求めなさい.

(和歌山大 2018) (m20186503)

0.1192 次の (1)〜(3) に答えなさい．ただし，i は虚数単位とする.

(1) 次の関数の組 (A) と (B) のうち，コーシー・リーマンの方程式を満たすものを選びなさい.

(A) $u = e^x\cos y$, $v = e^x\sin y$

(B) $u = e^x\sin y$, $v = e^x\cos y$

(2) (1) で選んだ u, v に対して，$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$ とおくとき，$f'(z)$ を求めなさい.

(3) (2) の関数 $f(z)$ に対して，次の積分の値を求めなさい．ただし, 積分路 C は $|z| = 1$ とし，向きは反時計回りとする.

$$\oint_C \frac{f(z)}{z}dz$$

(和歌山大 2018)　　(m20186505)

0.1193　関数 $f(x)$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ x & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

のフーリエ級数展開を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

とするとき，次の (1)〜(3) に答えなさい.

(1)　a_0 を求めなさい.

(2)　a_n，$n = 1, 2, 3, \cdots$ を求めなさい.

(3)　b_n，$n = 1, 2, 3, \cdots$ を求めなさい.

(和歌山大 2018)　　(m20186506)

0.1194　(1)　不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 - 1}$ を計算せよ.　　(2)　不定積分 $\displaystyle\int x \cos x \, dx$ を計算せよ.

(東京工科大 2010)　　(m20106905)