[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　Δ, δ

0.1 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{x} \neq 0$ において関数 f を

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|}, \quad |\boldsymbol{x}| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$$

で定義する. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right)$, および $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_3}^2}$ を求めよ.

(2) $\varepsilon > 0$ に対して, $S_\varepsilon = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \, ; \, |\boldsymbol{x}| = \varepsilon\}$ とする. S_ε に沿う表面積分

$$\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S_ε 上の単位外向き法線ベクトルであり, $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} = \nabla f \cdot \boldsymbol{n}$ は f の $\boldsymbol{n}$ 方向への微分を表す.

(3) S を原点 O を内部に含む $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな閉曲面とするとき, S に沿う表面積分

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S 上の単位外向き法線ベクトルである.

(東北大 2005)　　(m20050505)

0.2 次の方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(\boldsymbol{r}) = a\delta(\boldsymbol{r}), \tag{a}$$

に関する以下の問いに答えなさい. ここで右辺の a は正の実数, $\delta(\boldsymbol{r})$ は 3 次元のデルタ関数

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{b}$$

である.

(1) 関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ のフーリエ変換を

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \widetilde{\phi}(\boldsymbol{k}) \tag{c}$$

とした時, これが方程式 (a) を満たすということから関数 $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$ を求めなさい.

(2) 積分要素 $d\boldsymbol{k}$ の直交座標系 (k_x, k_y, k_z) から極座標系 (k, θ, ϕ) への変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k} = \int_0^{\infty} dk \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi |J| \tag{d}$$

で与えられる. このときのヤコビアン J を書きなさい. ここで $k = |\boldsymbol{k}|$ である. また (d) の右辺が

$$\int_0^{\infty} k^2 dk \int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \tag{e}$$

と書けることを示しなさい.

(3) 問 (1) で求めた $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$ を使って, (c) から $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めなさい. 必要があれば, 公式

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2} \tag{f}$$

を用いてもよい.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130606)

0.3 関数 $\delta_y(x)$ と $g(y)$ を次の式で定義する．

$$\delta_y(x) = \begin{cases} y^{-1} & (|x| < \frac{1}{2}y) \\ 0 & (|x| \geq \frac{1}{2}y) \end{cases} \qquad g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_y(x)dx$$

ここで，$f(x)$ は何回でも微分可能であるとする．このとき，$g(y)$ を y の 2 次の項まで求めよ．

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200609)

0.4 ある製品は一回の使用後, 確率 p でこわれるとしょう. このとき以下に問に答えよ.

(1) この製品を k 回使用したとき, まだこわれない確率を求めよ.

(2) N 個の製品をそれぞれ一回使用した後の確率を求めよ.

(a) すべてがこわれている確率はいくらか.

(b) すべてがこわれずに残っている確率はいくらか.

(c) M 個がこわれずに残っている確率はいくらか.

(3) N 個の製品をそれぞれ一回使用した後こわれずに残っている個数の期待値を求めよ.

次に, この製品は使用しなくても単位時間あたり α の確率でこわれるとしよう.
(つまり, 非常に短い時間 Δt 後に確率 $\alpha\Delta t$ でこわれる.) このとき, 以下の問に答えよ.

(4) ある製品をまったく使用しない場合, 時刻 t においてそれがこわれていない確率を $P(t)$ とするとき, $P(t)$ の従う微分方程式を記せ.

(5) $t = 0$ で $P(t) = 1$ として, $P(t)$ を求めよ.

(6) この製品を, 完成後時間 t の間に k 回使用したとき, まだこわれていない確率を求めよ. ただし, 使用に要する時間は t に比べて非常に短いとする.

(東京大 2001)　　(m20010705)

0.5 極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を考える．$(x, y) = (0, 0)$ 以外で定義された C^2 級関数 $f(x, y)$ について　$\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$　を r, θ に関する偏微分を用いて表わせ．

(東京工業大 2002)　　(m20020803)

0.6 次のような n 次正方行列の行列式を Δ_n とする．

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

このとき次の問いに答えよ．

(1) $\Delta_{n+2} = 2\Delta_{n+1} - \Delta_n$ が成り立つことを示せ．

(2) Δ_n の値を求めよ．

(東京工業大 2003)　　(m20030803)

0.7 a, b を実数とし，xy 平面上で定義された実数値関数

$$f(x, y) = x^4 - 2x^2y + ay^2 - by$$

を考える． (x_0, y_0) が関数 $f(x,y)$ の極小点であるとは，正の実数 δ が存在して，$|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ を満たす任意の点 (x,y) について

$$f(x,y) \geqq f(x_0, y_0)$$

が成り立つこととする．以下の問に答えよ．

(1) $b > 0$ のとき，$f(x,y)$ の極小点の個数を求めよ．(a の値によって場合分けして解答せよ)．

(2) $b = 0$ のとき，$f(x,y)$ の極小点の個数を求めよ．(a の値によって場合分けして解答せよ)．

(東京工業大 2022)　　(m20220801)

0.8 C^2 級の関数 $f(x,y,z)$ が $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ だけの関数 $g(r)$ を用いて $f(x,y,z) = g(r)$ と表されるとする．$\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) Δf を $g'(r)$, $g''(r)$ を用いて表せ．

(2) $\Delta f = 0$, $g(1) = 1$, $g'(1) = 2$ のとき，$g(r)$ を求めよ．

(電気通信大 2008)　　(m20081004)

0.9 次の問いに答えなさい．

(1) 三角関数 $y = \sin(x)$ を，単位円を用いて定義しなさい．

(2) 関数 $f(x)$ の微分（導関数）は　$f'(x) = \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$　で定義される．
この定義に基づいて $y = \sin(x)$ の微分を，(1) の定義を用いて導きなさい．

(筑波大 2003)　　(m20031302)

0.10 クーロンポテンシャル $\phi = \dfrac{1}{r}$ は原点以外の領域においてラプラスの方程式　$\Delta\phi = 0$
を満たすことを示しなさい．ただし，$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ である．

(筑波大 2006)　　(m20061303)

0.11 自然対数の底 e は　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$　と定義される．対数関数 $f(x) = \log x$ の x に関する微分が $1/x$ となることを微分の定義　$\dfrac{df(x)}{dx} = \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log(x+\Delta x) - \log x}{\Delta x}$　に基づき示しなさい．

(筑波大 2008)　　(m20081303)

0.12 n は 1 以上の整数とする．2 変数関数

$$f(x,y) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i-x)^2}{y} + n\log y \qquad (-\infty < x < \infty,\ y > 0)$$

について，次の問いに答えよ．

(1) 等式

$$\sum_{i=1}^{n}(i-x)^2 = n(\mu - x)^2 + n\delta$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\mu = \dfrac{n+1}{2}$, $\delta = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i-\mu)^2}{n}$ である．

(2) $f(x,y)$ の最小値を求めよ．

(筑波大 2016)　　(m20161303)

0.13 (1) $x = x_0$ 付近で連続な関数 $f(x)$ に対し，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$ が成り立つ関数 $\delta(x)$ がある．$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} 3\delta(x)e^{-ixy}dx$ の値を求めよ．ただし，$i=\sqrt{-1}$ とする．

(2) 関数 $f(x), g(x)$ があり，それぞれ $F(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx$ ，$G(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ixy}dx$ とするとき，次式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx\right)e^{-iyz}dz$ が収束するとして，これを，$F(y)$ および $G(y)$ を用いて表せ．ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx < \infty$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|dx < \infty$ とする．

(埼玉大 2014)　　(m20141403)

0.14 α, β, γ を互いに異なる数とし, ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ を次で定める.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ \gamma^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \\ \delta^2 \end{pmatrix}$$

このとき, ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は 1 次独立であることを示し, ベクトル $\boldsymbol{d}$ を, ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の 1 次結合で表せ.

(信州大 2004)　　(m20041903)

0.15 $\mathbb{R}$ で定義された実数値関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続とは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し或る $\delta > 0$ が存在して $|x-a| < \delta$ なる任意の x に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つことである．いま ε, a が与えられたとして，関数 $f(x) = \sin x$ について δ の 1 つを求めよ．

(信州大 2018)　　(m20181905)

0.16 $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数とする．$f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは，次の主張が成り立つ事として定義される．

P ：　任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して，$|x-a| < \delta$ となる任意の x に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ である．

以下の問いに答えよ．

(1) 命題 P の否定を書け．

(2) $f(x)$ を次で定義する．

$$f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(1) の答えにもとづいて，$f(x)$ は $x = 0$ で連続ではないことを証明せよ．

(信州大 2019)　　(m20191906)

0.17 何回でも偏微分可能な関数 $u(x,y,z)$ が　$\Delta u = 0$　$\left(\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$ をみたしているとする．このとき，　$v = x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z}$　に対して，Δv を計算せよ．

(金沢大 2007)　　(m20072211)

0.18 何回でも偏微分可能な関数 $u(x,y,z)$ が

$$\Delta u = 0 \qquad \left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

を満たしているとする．このとき，

$$v = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}$$

に対して，Δv を計算せよ．

(金沢大 2016)　　(m20162215)

0.19 一般に，関数 $y = f(x)$ について，x の微小増加量 Δx にともなう y の微小増加量を Δy とすると，導関数 dy/dx は近似的に $\Delta y/\Delta x$ を表す．このことを利用して，下記の問いに答えよ．

(1) 空気中の音速 u と絶対温度 T との間に，$u = \sqrt{kRT}$ の関係が成り立つものとする．ただし，比熱比 k と気体定数 R は定数である．このとき，du/dT を求めよ．

(2) 空気の絶対温度を 2% 増やすと，音速は近似的に何 % 増加するか答えよ．

(福井大 2003)　　(m20032406)

0.20 (1) $A = \begin{pmatrix} a+b & a & a \\ a & a+c & a \\ a & a & a+d \end{pmatrix}$ に対して，　$|A| = abcd\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$

となることを示せ．ただし，$abcd \neq 0$ とする．

(2) 行列 $A_n = \left(a_{ij}\right)$ $\left(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n,\ n \text{ は 3 以上の整数}\right)$ を，

$$a_{ij} = a_0 + a_i\delta_{ij}\ , \qquad a_i : \text{実数}\ (1 \le i \le n)$$

で定義するとき，

$$|A_n| = a_0a_1\cdots a_{n-1}a_n\left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n}\right)$$

となることを示せ．ただし，$a_0a_1\cdots a_{n-1}a_n \neq 0$ である．また，δ_{ij} は，$i = j$ のときに 1，$i \neq j$ のときに 0 をとるものとする．

(福井大 2016)　　(m20162409)

0.21 実関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であることの必要十分条件（定義としてもよい）を，“ 極限 ”という言葉を使わずに，$\varepsilon - \delta$ 論法を用いて書きなさい．

(岐阜大 2005)　　(m20052610)

0.22 コンピュータのグラフィックディスプレイに (x,y) 座標系の原点を中心とする半径 r の円を描くことを考える．このとき，半径 r の円は，x 軸となす角 θ（反時計回りを正方向とする）をパラメータとして

$$\begin{cases} x = \boxed{\qquad\text{（ア）}\qquad} \\ y = \boxed{\qquad\text{（イ）}\qquad} \end{cases}$$

と表現できるから，円を n 等分して，$\Delta\theta = 2\pi/n$ より $\Delta\theta$ を求め，

$\theta_0 = 0,\ x_0 = r,\ y_0 = 0$

$\theta_{i+1} = \theta_i + \Delta\theta \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$

として，

$$\begin{cases} x_{i+1} = \boxed{\quad\text{（ウ）}\quad} \\ y_{i+1} = \boxed{\quad\text{（エ）}\quad} \end{cases}$$

より，次々と点の座標 (x_0, y_0), (x_1, y_1), $\cdots$,(x_n, y_n) を求め，これらの 2 点間を順次，直線で結んでいけば円を描くことができる．上記の（ア）〜（エ）に入る式を答えよ．ただし,（ウ）,（エ）については，$r, \theta_i, \theta_{i+1}$ は使わない形で答えよ．

(岐阜大 2006)　　(m20062622)

0.23　2 変数関数 $f(x, y)$ がラプラス方程式 $\Delta f = 0$ を満たすとき，$f(x, y)$ を調和関数という． 次の関数 $f(x, y)$ は調和関数か否か調べよ． ここで，2 変数 (x, y) の偏微分作用素（ラプラシアン）Δ は, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ で定義する．

(1) $f = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$　　　(2) $f = e^x \sin y$

(岐阜大 2008)　　(m20082602)

0.24　(1) $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は次の式で計算される．

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

この関係を用いて，以下に示す関数のラプラス変換を求めよ．

ただし，以下の計算では，$(\mathrm{Re}[s] > 0)$ とする．

(a) $f(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$　　ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

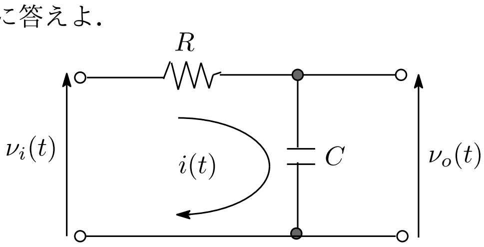
(b) $f(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(c) $f(t) = t\, u(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(d) $f(t) = e^{-\alpha t} u(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t \geq 0 \quad (\alpha > 0) \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(2) 右図に示すように直列 RC 回路について以下の問いに答えよ．

(a) 図に示すように，入力電圧を $\nu_i(t)$，出力電圧を $\nu_o(t)$，ならびに，電流を $i(t)$ とするとき，これらの関係を示す回路方程式を記述せよ．
ただし，$t = 0$ のとき，$\nu_o(t) = 0$ である．



(b) $\nu_i(t)$, $\nu_o(t)$ ならびに $i(t)$ のラプラス変換を，それぞれ $V_i(s)$, $V_o(s)$ そして $I(s)$ と表すものとする．このとき，(a) で求めた回路方程式をラプラス変換して，次の伝達関数 $G(s)$ を求めよ．

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

(c) $\nu_i(t)$ が次のように与えられるとき

$$\nu_i(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

出力電圧 $\nu_o(t)$ のラプラス変換 $V_o(s)$ を求めよ．

(d) $V_o(s)$ をラプラス逆変換して出力電圧 $\nu_o(t)$ を求めよ．

(e) $G(s)$ をラプラス逆変換して，インパルス応答 $g(t)$ を求めよ．

(f) インパルス応答 $g(t)$ を用いて，(c) で定義した入力電圧があるときの出力電圧 $\nu_o(t)$ を求めよ．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062708)

0.25 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ とし，次の計算結果を最も簡明な形で示せ．　$\Delta\left(\tan^{-1}\dfrac{y}{x}\right)$

(名古屋工業大 2008)　　(m20082903)

0.26 関数の微分の定義は次式で与えられる．

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

この極限値が存在するとき，関数 $h(x)$ は微分可能であるという．

上の定義を用いて，次の定理を証明しなさい．

【定理】
関数 $f(x)$ と $g(x)$ が微分可能であれば，$f(x)+g(x)$ は微分可能であり，
次の公式が成り立つ．

$$\{f(x)+g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$$

(三重大 2002)　　(m20023107)

0.27 m と n が整数のとき，次の式を証明せよ．

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta(m-n)} d\theta = \delta_{m,n}$$

ただし，$i = \sqrt{-1}$ である．また，$\delta_{m,n}$ はクロネッカーのデルタで，

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$ と定義されている．

また，必要なら公式　$e^{ix} = \cos x + i \sin x$　を用いよ．

(奈良女子大 2003)　　(m20033210)

0.28 次の文章の（あ）～（え）に適当な数式を入れよ．

ある容積 V の室内の空気には粒子状の汚染物が含まれており，換気を行って汚染物の濃度（単位体積あたりの粒子数）を下げることにした．時刻 t における濃度を $C(t)$ とし，単位時間あたり一定の体積 Q の室内の空気を，汚染物が含まない空気に入れ換えるとすれば，時刻 t から微小時間 δt 後の時刻 $t+\delta t$ までの間に排出される粒子数は $\boxed{\text{（あ）}}$ となる．その結果，濃度は $C(t)$ から $C(t+\delta t)$ に変化した．ただし，室内の濃度は常に空間的に一様であり，換気を開始してからの汚染物の発生はなかったものとする．上記の関係を式で表すと

$$C(t+\delta t) = \boxed{\text{（い）}}$$

である．$\delta t \to 0$ の極限を考えることにより，濃度 $C(t)$ に関する微分方程式

$$\boxed{\text{（う）}}$$

を得る．この微分方程式の解は

$$C(t) = \boxed{\text{（え）}}$$

である．ただし，換気を開始した瞬間を時刻 $t=0$ とし，その時の濃度を C_0 とする．

(京都大 2015)　　(m20153302)

0.29 つぎの各問いに答えよ．

(1) 3 変数の関数 $f(x,y,z) = 2x^2z - y^2z^2 + 3x^2y + 4xy$ を考える．このとき，Δf を求めよ．ただし，Δ はラプラス作要素

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

とする．

(2) $g(x,y,z) = x^2 - axy^2 + bz^2 + 2xz^2$ とする．$\Delta g = 0$ であるような，a, b の値を求めよ．

(大阪府立大 2013)　　(m20133606)

0.30 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ とする．$\Delta \log(x^2 + y^2)$ を求めよ．

(神戸大 2000)　　(m20003802)

0.31 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ とするとき，$\Delta(x^2 + y^2 + z^2)^s$ を求めよ．但し，s は実数とする．

(神戸大 2002)　　(m20023806)

0.32 $D_0(x) \equiv 1,\ D_n(x) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2\cos kx\ (n \geq 1)$，$F_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} D_k(x)\ (n \geq 0)$ で $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{D_n\}$ と $\{F_n\}$ を定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $D_n(x)\sin\dfrac{x}{2} = \sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right)x$ となることを示せ．

(2) $F_n(x)\sin^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2(n+1)}\Big\{1 - \cos(n+1)x\Big\} = \dfrac{1}{n+1}\sin^2\dfrac{n+1}{2}x$ となることを示せ．

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)dy = 2\pi$ となることを示せ．

(4) $0 < \delta < \pi$ なる δ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\delta\leq|y|\leq\pi} F_n(y)dy = 0$ となることを示せ．

(神戸大 2016)　　(m20163805)

0.33 関係式 $y = x\tan\theta$ の定める陰関数 $\theta = \theta(x,y)$ について　$\Delta\theta = \dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$　を計算せよ．

(神戸大 2017)　　(m20173803)

0.34 微分可能な関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は次式で与えられる．

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

このことを用いて, 次の問いに答えなさい．

(1) $y = \log_e x$ の導関数を求めなさい．ただし，$e = \displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ とする．

(2) $y = x^n$ の導関数を求めなさい．ただし，n は正の整数とする．

（鳥取大 2004）　　(m20043901)

0.35 微分可能な関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義式　$f'(x) = \displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ を用いて, 以下の微分公式を証明せよ．

(1) $y(x) = u(x)v(x)$ の微分 ： $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

(2) $y(x) = \sin(x)$ の微分 ： $y'(x) = \cos(x)$　　ただし, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を利用してもよい．

(鳥取大 2006)　　(m20063901)

0.36 微分とは, 導関数を求めることをいう. 導関数とは, 関数 $f(x)$ における微分係数を, x の関数で表した関数 $\dfrac{df(x)}{dx}$ のことをいう. 微分係数とは, x から $x+\Delta x$ の区間における関数 $f(x)$ の平均変化率において, $\Delta x \to 0$ の極限を取った値をいう. そのような<u>定義に従って</u>

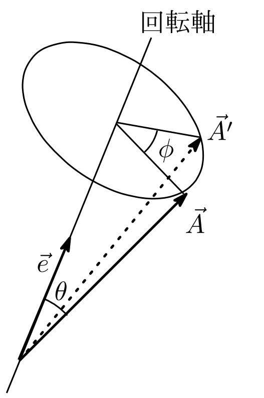
(1) $y=x^2$ を x について微分すると, $\dfrac{dy}{dx}=2x$ となることを示しなさい.

(2) $y=\sqrt{x+1}$ を x について微分すると, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ となることを示しなさい.

(山口大 2005) (m20054307)

0.37 右図のように，ベクトル $\vec{A}$ をその始点を通る回転軸のまわりに回転させたら $\vec{A}'$ になった．回転軸の方向を表す単位ベクトルを $\vec{e}$ とする．回転角 ϕ（単位はラジアン）が 1 に比べて十分小さい場合について，ベクトルの変化 $\Delta\vec{A}=\vec{A}'-\vec{A}$ とベクトル積 $\vec{e}\times\vec{A}$ の関係を説明しなさい．

（結果だけでなく，ベクトル積の定義に基づいてわかりやすく説明しなさい．）



(山口大 2006) (m20064307)

0.38 $f(x)$ を閉区間 $I=[a,b]$ 上の連続関数とする. I 上に $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$ を

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

となるように選び, I の分割と呼び Δ で表す. また

$$|\Delta|=\max_{1\le i\le n}(x_i-x_{i-1})$$

とする. さらに $x_{i-1}\le \xi_i \le x_i$ を満たす ξ_i をとり, $\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$ をこの分割の代表系と呼び, $\xi(\Delta)$ で表す. このとき

$$S\left(f,\xi(\Delta)\right)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

を分割 Δ とその代表系 $\xi(\Delta)$ に関するリーマン和と呼ぶ. 任意の分割の列と任意の代表系に対して

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S\left(f,\xi(\Delta)\right)$$

が一意に存在する. その極限 S を $f(x)$ の I における積分といい

$$\int_a^b f(x)dx=S$$

とかく. この定義を用いて次の問に答えよ. ただし, 以下において $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で正値連続な関数とし

$$f_{in}=f(a+i\delta_n)\,,\qquad \delta_n=\frac{b-a}{n}$$

とする.

(1) 次の式を示せ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{1n}+f_{2n}+\cdots f_{nn}}{n}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

(2) 次の式を示せ.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f_{1n}f_{2n}\cdots f_{nn}} = \boldsymbol{e}^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f(x)dx}$$

(3) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)}$$

(高知大 2005)　　(m20054501)

0.39 関数 $f(x)$ が $x=x_0$ で連続であるとは

『任意の正の数 ε に対し，正の数 δ で $|x-x_0|<\delta$ であるならば $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ をみたすものがとれる』$\cdots$ (★)

ときをいう．このとき，次の問いに答えよ．

まず $f(x)=x^2$ として，(1) と (2) に答えよ．

(1) $x_0=0,\ \varepsilon=\dfrac{1}{100}$ としたときに (★) が成立する δ を求めよ．

(2) $x_0=0$ とし，任意の $\varepsilon>0$ に対して (★) が成立する δ を求めることにより，$f(x)=x^2$ が $x=0$ で連続であることを示せ．

次に

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{m} & (x\text{ が }0\text{ でない有理数で, その既約分数表示が }m>0\text{ として}\dfrac{n}{m}\text{と表せるとき})\\ 0 & (x=0\text{ のとき, または }x\text{ が無理数のとき})\end{cases}$$

と定義された関数について，以下の (3)〜(5) に答えよ．

(3) 次の値を求めよ．

(a) $f\left(\dfrac{2}{3}\right)$　　(b) $f\left(\sqrt{2}\right)$　　(c) $f\left(\dfrac{4}{8}\right)$

(4) M を自然数とする．$|x|<\dfrac{1}{M}$ をみたす有理数 x $(x\neq 0)$ の既約分数表示の分母を m とすれば $|m|>M$ となることを示せ．

(5) $f(x)$ が $x=0$ で連続となることを示せ．

(高知大 2007)　　(m20074502)

0.40 線形写像 $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i=\begin{pmatrix}\delta_{i,1}\\ \delta_{i,2}\\ \delta_{i,3}\\ \delta_{i,4}\end{pmatrix}$ に対して $f(\boldsymbol{e}_i)=\displaystyle\sum_{k=1}^{i} i\boldsymbol{e}_k$ となっている．ただし，$\delta_{i,j}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$ である．このとき次の問いに答えよ．

(1) $f(\boldsymbol{e}_4)$ はどんなベクトルか，成分表示せよ．

(2) $f(\boldsymbol{e}_1),\ f(\boldsymbol{e}_2),\ f(\boldsymbol{e}_3),\ f(\boldsymbol{e}_4)$ は 1 次独立であることを示せ．

(3) $\mathbb{R}^4$ の基底を $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_4,\ \boldsymbol{e}_4$ とするとき．f の表現行列 A を求めよ．

(4) A は正則であることを示せ．

(5) f の逆写像はあるか．あれば求め，無ければその理由を述べよ．

(高知大 2011)　　(m20114504)

0.41 (1) $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 f を次で定義する.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, $\lim_{x \to 0} f(x)$ は存在するか. 理由をつけて答えよ.

(2) $a,\ A,\ B \in \mathbb{R}$ を定数とする. $g,\ h$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数とする. $\lim_{x \to a} g(x) = A$ と $\lim_{x \to A} h(x) = B$ が成り立つとする. また, $x \neq a$ のとき, $g(x) \neq A$ であるとする. このとき, $\lim_{x \to a} h(g(x)) = B$ が成り立つことを $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて示せ.

(3) $a,\ A,\ B \in \mathbb{R}$ を定数とする. $g,\ h$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数とする. $\lim_{x \to a} g(x) = A$ と $\lim_{x \to A} h(x) = B$ が成り立つとする. このとき, $\lim_{x \to a} h(g(x) = B$ が常に成り立つか. 理由をつけて答えよ.

(高知大 2018) (m20184501)

0.42 $f(x)$ を $(0, \infty)$ 上で 2 回微分可能な関数とする. $0 < a < b$ とし,

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{K}{2}(b-a)^2$$

を満たす定数を K とする.

(1) $F(x) = f(b) - \{f(x) + f'(x)(b-x) + \dfrac{K}{2}(b-x)^2\}$ とおくとき, $F'(x)$ を求めよ.

(2) $K = f''(a + \theta(b-a))$ を満たす $0 < \theta < 1$ が存在することを示せ.

(3) すべての $x > 0$ に対して $f''(x) \geqq \delta$ を満たす定数 $\delta > 0$ が存在するとき,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

であることを示せ.

(愛媛大 2005) (m20054608)

0.43 $f(x,y,z) = \dfrac{e^{kr}}{r}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
の時, 次の問に答えよ(ここで k は定数である).

(1) $\dfrac{\partial r}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}$ を求めよ.

(2) ラプラシアン $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ を求めよ.

(九州大 1996) (m19964701)

0.44 関数 $f(x) = x^3$ が $x = 1$ で連続であることを $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて証明せよ.

(佐賀大 2003) (m20034903)

0.45 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ は半開区間 $(0, 1]$ で一様連続でないことを次の手順で示せ.

(1) 一様連続であることを $\varepsilon - \delta$ 法を用いて書け.

(2) (1) の否定命題を作れ.

(3) (2) が成り立つことを示せ.

(佐賀大 2004) (m20044901)

0.46 2 次元 xy 平面を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) 点 $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ を原点の回りに角 ϕ だけ回転して $(x',y') = \big(r\cos(\theta+\phi),\ r\sin(\theta+\phi)\big)$ に移すときの回転行列 $R(\phi)$ を求めよ.

(2) $\Delta\phi$ が十分小さいとき，$R(\phi)$ が次のように表されることを示せ．

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\phi \\ \Delta\phi & 1 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2015)　　(m20154913)

0.47 半径 1 の円板が x 軸上をすべることなくころがったとき，円周上にある一点 P の軌跡に着目する．円板の回転角を θ とし，$\theta = 0$ のとき，点 P は原点に位置したとする．

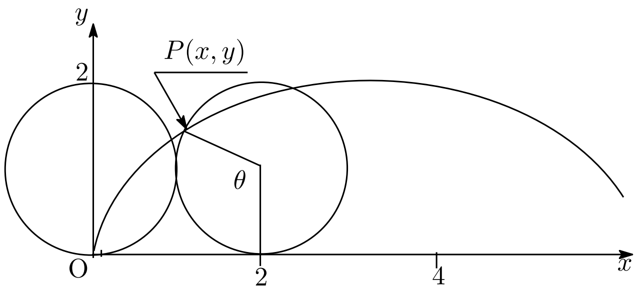
(1) 回転角が θ で与えられるとき，点 P の x 座標と y 座標を求めよ．

(2) さらに微小な角 $\Delta\theta$ 回転したときの，x 座標と y 座標の変化量を求めよ．

(3) また，このときの，点 P が移動した弧の長さを求めよ．

(4) 回転角が 0 から 2π まで変化したときの，点 P が移動した弧の長さを求めよ．

(5) 回転角が 0 から 2π まで変化したときの，点 P の軌跡と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．



(佐賀大 2017)　　(m20174908)

0.48 連続な関数 $f(x, y)$ の Taylor 展開について，右辺第 2 項，第 3 項を記述せよ．

ただし，Δx は x の微小な変化量である．

$$f(x + \Delta x,\ y) = f(x, y) + \boxed{} + \boxed{} + O(\Delta x^3)$$

(長崎大 2008)　　(m20085013)