[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　ε

0.1 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{x} \neq 0$ において関数 f を

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|}, \quad |\boldsymbol{x}| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$$

で定義する. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right)$, および $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_3}^2}$ を求めよ.

(2) $\varepsilon > 0$ に対して, $S_\varepsilon = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,;\, |\boldsymbol{x}| = \varepsilon\}$ とする. S_ε に沿う表面積分

$$\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S_ε 上の単位外向き法線ベクトルであり, $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} = \nabla f \cdot \boldsymbol{n}$ は f の $\boldsymbol{n}$ 方向への微分を表す.

(3) S を原点 O を内部に含む $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな閉曲面とするとき, S に沿う表面積分

$$\int_{S} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S 上の単位外向き法線ベクトルである.

(東北大 2005)　　(m20050505)

0.2 2 変数関数 $f(x,y)$ を $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ (ただし, $(x,y) \neq (0,0)$) と定義する．ここで，log は自然対数である．以下の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の全微分を求めよ.

(2) 曲面 $z = f(x,y)$ について，点 $(a, b, f(a,b))$ における法線および接平面の方程式を求めよ.

(3) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ を $D = \left\{(x,y) \,\middle|\, 0 < x^2+y^2 \leq 1\right\}$ として求めたい．$f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ において定義されていないので,

$D_\varepsilon = \left\{(x,y) \,\middle|\, \varepsilon^2 < x^2+y^2 \leq 1,\ \varepsilon \in \boldsymbol{R}\right\}$ として，$\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \iint_{D_\varepsilon} f(x,y)dxdy$ を計算せよ.

(筑波大 2013)　　(m20131308)

0.3 実数列 $\{x_n\}$ が実数 a に収束するとは，標準的な論理式で書くと

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \left(\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geqq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon)\right) \qquad (*)$$

が成り立つということである．次の問いに答えよ.

(1) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が実数 a で連続であることを，$(*)$ にならって理論式で書け.

(2) (1) の内容の否定を理論式で書け．ただし，その時に否定記号 $\neg$ やそれを暗黙に含む $\neq$ などの記号を使ってはならない.

(3) (2) の内容から，ある正の実数 ε が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|x_n - a| < 1/n$ かつ $|f(x_n) - f(a)| \geqq \varepsilon$ となるような実数列 $\{x_n\}$ が作れることを示せ.

(4) (3) の実数列 $\{x_n\}$ は a に収束することを示せ．また，実数列 $f(x_n)$ は $f(a)$ に収束することを示せ.

(5) これまでの議論（特に (3) と (4)）をもとに，実数列 $\{x_n\}$ は a に収束するとき実数列 $f(x_n)$ が必ず $f(a)$ に収束するなら，f は連続であることを証明せよ.

(筑波大 2015)　　(m20151305)

0.4 (1) $f(x)$ は $x \geqq 0$ において定義された実数値連続関数であって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して広義積分 $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x}dx$ が収束すると仮定する．このとき，任意の正の実数 a, b $(a < b)$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x}dx$$

(2) $f(x)$ は (1) の仮定を満たすとする．(1) の等式を用いて，任意の正の実数 a, b $(a < b)$ に対して，

$$\int_{0}^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(0)\log\frac{b}{a}$$

が成り立つことを示せ．

(3) 次の広義積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2}dx$

(筑波大 2019)　　(m20191317)

0.5 次の微分方程式の一般解を求めよ. ただし，$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ である.

(1) $2x^2y' = x^2 + y^2$

(2) $y'' + 2\varepsilon y' + {\omega_0}^2 y = F\sin\omega x$　　（ただし, $\varepsilon \neq 0$, ${\omega_0}^2 > \varepsilon^2$）

(埼玉大 2005)　　(m20051403)

0.6 3 次正方行列　$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$　について，以下の各問に答えよ.

(1) A の固有値 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ および対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ を一組求めよ.

(2) ベクトル列 $\boldsymbol{u}_n$ を　$\boldsymbol{u}_n = A^n \begin{bmatrix} \varepsilon \\ -1+2\varepsilon \\ 2+\varepsilon \end{bmatrix}$，　$(n = 0, 1, 2, \cdots)$　で定める．ただし，$\varepsilon = 2^{-100}$ とし，A^0 は単位行列を表す．このとき，$\boldsymbol{u}_n$ を (1) で求めた $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ の一次結合で表せ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，ユークリッドノルムを $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$ とする．(2) で与えた $\boldsymbol{u}_n$ について，以下を調べよ.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ||\boldsymbol{u}_n||$　(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{||\boldsymbol{u}_{n+1}||}{||\boldsymbol{u}_n||}$　(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{u}_n}{||\boldsymbol{u}_n||}$

(d) $\left\|\boldsymbol{u}_n - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\| \leq 2^{-10}$ なる n の存在の有無.

(茨城大 2007)　　(m20071707)

0.7 3 次元デカルト座標系で (x, y, z) と表される点を任意の軸のまわりに回転させる演算子に関して，次の設問に答えよ.

(1) 点 (x, y, z) を z 軸のまわりに，その軸の正方向からみて反時計回りに角度 ϕ 回転させる演算子を，3 行 3 列の行列 $R_z(\phi)$ で表す．このとき，$R_z(\phi)$ を求めよ.

(2) 設問 (1) の $R_z(\phi)$ において，角度 ϕ が微小量 ϵ であるとき，ϵ の 2 次のオーダーまで考慮して $R_z(\epsilon)$ を求めよ.

(3) 設問 (1), (2) と同様にして, x 軸, y 軸のまわりの回転を表す行列 $R_x(\epsilon)$, $R_y(\epsilon)$ を, それぞれ ϵ の 2 次のオーダーまでの範囲で求めよ.

(4) $R_x(\epsilon)$ と $R_y(\epsilon)$ の交換関係を $[R_x(\epsilon),\ R_y(\epsilon)]$ と書き, $[R_x(\epsilon),\ R_y(\epsilon)] = R_x(\epsilon)R_y(\epsilon) - R_y(\epsilon)R_x(\epsilon)$ とする. このとき $[R_x(\epsilon),\ R_y(\epsilon)]$ を ϵ の 2 次のオーダーまでの範囲で, 単位行列 I と $R_z(\epsilon^2)$ を用いて表せ.

(山梨大 2017)　　(m20171803)

0.8 (1) 複素数 z に対する二項方程式 $z^5 = 1$ の解を全て求めよ. また, $z \neq 1$ の解の一つを ω として, 1 以外の全ての解を ω を用いて表し, 1 を含む全ての解を複素平面上に図示せよ.

(2) 複素数 z に対する二項方程式 $z^5 = 5$ の全ての解を, 前問 (1) の ω を用いて表せ.

(3) 複素数 α をそれ自身に変換する写像を ε, α を $\omega\alpha$ に変換する写像を σ とするとき, 合成写像 σ^2, σ^3, σ^4 によって, α はどのように変換されるか答えよ.

(4) 前問 (3) の写像 σ の合成写像 σ^{n+4} $(n = 1, 2, 3, 4, 5)$ により α を変換せよ.

(山梨大 2019)　　(m20191803)

0.9 $\mathbb{R}$ で定義された実数値関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続とは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し或る $\delta > 0$ が存在して $|x - a| < \delta$ なる任意の x に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つことである. いま ε, a が与えられたとして, 関数 $f(x) = \sin x$ について δ の 1 つを求めよ.

(信州大 2018)　　(m20181905)

0.10 $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数とする. $f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは, 次の主張が成り立つ事として定義される.

P :　任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して, $|x - a| < \delta$ となる任意の x に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ である.

以下の問いに答えよ.

(1) 命題 P の否定を書け.

(2) $f(x)$ を次で定義する.

$$f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x}\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

(1) の答えにもとづいて, $f(x)$ は $x = 0$ で連続ではないことを証明せよ.

(信州大 2019)　　(m20191906)

0.11 数列 $\{a_n\}$ に対して, $a_n \to \alpha \ \ (n \to \infty)$ の定義は,「任意の $\varepsilon > 0$ に対してある番号 n_0 があって, $n \geq n_0$ である任意の n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ」である.

$a_n \to \alpha \ \ (n \to \infty)$, $a_n \to \beta \ \ (n \to \infty)$ であるとき, $a_n + b_n \to \alpha + \beta \ \ (n \to \infty)$ が成り立つことを上の定義に従って証明せよ. ただし, α, β は実数とする.

(新潟大 2002)　　(m20022003)

0.12 関数 $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad ((x, y) \neq (0, 0))$ について, 次の問に答えよ.

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を計算せよ.

(2) $0 < \varepsilon < 1$ とする. 積分　$I(\varepsilon) = \displaystyle\iint_{\varepsilon \leqq \sqrt{x^2+y^2} \leqq 1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dxdy$　を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} (\sin\varepsilon) I(\varepsilon)$ を求めよ.

(金沢大 2006)　　(m20062203)

0.13 領域 $D(\varepsilon)=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 1-\varepsilon,\ |y| \leqq x\}$ $(0<\varepsilon<1)$ に対して $I(\varepsilon)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\iint_{D(\varepsilon)} \dfrac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 領域 $D(\varepsilon)$ を図示せよ．　(2) $I(\varepsilon)$ を計算せよ．　(3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\log I(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}$ の値を求めよ．

(金沢大 2007)　　(m20072203)

0.14 $x \geqq 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ が

$$0 \leqq f(x) \leqq \int_0^x f(t)dt$$

を満たすとする．次の (1)〜(3) を示せ,

(1) 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\dfrac{d}{dx}\log\left(\varepsilon+\displaystyle\int_0^x f(t)dt\right)<1.$

(2) 任意の $\varepsilon>0$ に対して $f(x)<\varepsilon e^x.$

(3) 任意の $x \geqq 0$ に対して $f(x)=0.$

(金沢大 2013)　　(m20132203)

0.15 $0<\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}$ とし,

$$D_\varepsilon=\left\{(x,y)\,\middle|\, x \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq (\tan\varepsilon)x\right\},$$

$$I_\varepsilon=\iint_{D_\varepsilon} xy^2dxdy$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) D_ε を図示せよ．

(2) I_ε を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{-3}(I_\varepsilon-a)=b$ となる定数 a,b を求めよ．

(金沢大 2013)　　(m20132208)

0.16 2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 及びベクトル $\boldsymbol{q}_0=\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ を用いて以下のような漸化式を定義する．このとき，以下の設問に答えよ．

$$\boldsymbol{q}_{n+1}=A\boldsymbol{q}_n \quad (n \text{ は整数})$$

(1) $\boldsymbol{q}_n$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{\varepsilon}_n=\dfrac{{}^T\boldsymbol{q}_n\,A\,\boldsymbol{q}_n}{{}^T\boldsymbol{q}_n\,\boldsymbol{q}_n}$ 及び $\boldsymbol{p}_n=\dfrac{\boldsymbol{q}_n}{|\boldsymbol{q}_n|}$ とするとき，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 及び $\boldsymbol{p}_n$ を求めよ．ここで，${}^T\boldsymbol{q}_n$ は $\boldsymbol{q}_n$ を転置したベクトルである．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 及び $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{p}_n$ を求めよ．

(福井大 2018)　　(m20182406)

0.17 実関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であることの必要十分条件（定義としてもよい）を，“ 極限 ”という言葉を使わずに，$\varepsilon-\delta$ 論法を用いて書きなさい．

(岐阜大 2005)　　(m20052610)

0.18 平面極座標系 (r, θ) において　$r = \dfrac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta}$　（ただし，ε は 0 または正の整数）
と表される曲線がある．以下の問いに答えよ．

(1) この曲線の式をデカルト直交座標系 (x, y) で表せ．

(2) 定数 ε が以下の値のときの曲線の名称を答えよ．

(a) $\varepsilon = 0$　(b) $0 < \varepsilon < 1$　(c) $\varepsilon = 1$　(d) $\varepsilon > 1$

(三重大 2006)　(m20063102)

0.19 関数 $g(\varepsilon) = \cos^2(\theta + \varepsilon)$ を ε についてマクローリン展開

$$g(\varepsilon) = a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 + \cdots$$

を行い，係数 a, b, c を求めなさい．ただし，θ は定数とする．

(三重大 2022)　(m20223102)

0.20 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ．ただし，ε は実数で，$\varepsilon \neq \pm 1$, $\varepsilon \neq 0$ であるとする．

(1) 逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 行列 A の固有値を求めよ．

(3) 各固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(奈良女子大 2003)　(m20033209)

0.21 開区間 $(0,1)(= \{x \,|\, 0 < x < 1\})$ 上の関数

$$f(x) = -x \log x$$

に対して次の問に答えよ．

(1) $0 < a < 1$ のとき微分係数 $f'(a)$ を求めよ．

(2) $(0,1)$ における関数 $f(x)$ の最大値を求めよ．

(3) $0 < a < 1$ のとき $f(a^2) = 2af(a)$ が成り立つことを示せ．

(4) $\displaystyle\lim_{a \to +0} f(a^2) = 0$ が成り立つことを示せ．

(5) $(0,1)$ における関数 $f(x)$ のグラフの概形を描け．

(6) $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{1} f(x)dx$ を求めよ．

(奈良女子大 2005)　(m20053203)

0.22 関数

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - a - ibx}$$

について，以下の設問に答えよ．ただし，x は実変数，a と b は正の実定数，$i = \sqrt{-1}$ である．

(1) $f(x)$ を変形して

$$f(x) = A\left(\frac{1}{x - z_1} - \frac{1}{x - z_2}\right)$$

としたとき，z_1 および z_2 を求め，複素平面上に図示せよ．ただし，A, z_1, z_2 は複素数の定数である．

(2) ζ を実数とし，積分

$$I(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-\zeta}\, dx$$

のコーシーの主値，すなわち

$$I(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{\zeta-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-\zeta}\, dx + \int_{\zeta+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x-\zeta}\, dx \right) \qquad ①$$

を考える．式①の積分路は実数軸上にあるが，図1で示した複素平面内における積分路 C_1, C_2, C_3 に沿った複素積分を利用することにより，$I(\zeta)$ を求めることができる．ここで，C_1 は原点を中心とした半径 R の下半円周，C_2 は ζ を中心とした半径 ε の下半円周，C_3 はこれらの半円周とそれらを結ぶ実数軸の線分で構成される閉曲線であり，いずれも図中の矢印に沿って積分するものとする．

(a) C_1 に沿った積分路の $R \to \infty$ での極限値を求めよ．

(b) ε が十分小さいとき，C_2 に沿った積分値を求めよ．

(c) C_3 に沿った積分値を求めよ．

(d) 以上の結果から，$I(\zeta)$ を求めよ．

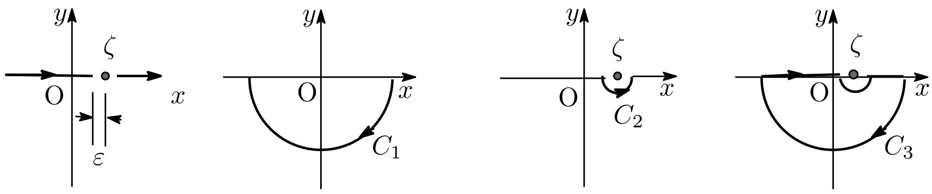


図1　左から順に，式 ① の積分路，C_1，C_2，C_3 を示す．

(京都大 2008)　　(m20083305)

0.23　a，b を実数とするとき，以下の等式を示せ．

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log \left(e^{\frac{a}{\varepsilon}} + e^{\frac{b}{\varepsilon}} \right) = \max\{a, b\}$$

(神戸大 2002)　　(m20023801)

0.24　$\varepsilon > 0$ とし，$D_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ とおく．このとき次の値を求めよ．

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{x^2 - y^2}{x^4 + y^4} dxdy$$

(神戸大 2004)　　(m20043804)

0.25　z は $|z| = 1$，$z \neq 1$ を満たす複素数とする．このとき，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n} + \cdots \qquad (*)$$

が（ある複素数に）収束することを示したい．以下の問いに答えよ．非負整数 n に対し $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k$ とおく．

(1) 非負整数 n に対し $|S_n| \leq \dfrac{2}{|1-z|}$ であることを示せ．

(2) $m > n$ であるような正の整数 m, n に対し次が成り立つことを示せ．

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{z^k}{k} = \sum_{k=n}^{m-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{S_m}{m} - \frac{S_{n-1}}{n}$$

(3) (1),(2) を用いて，以下の条件 (C) が成り立つことを示せ．

$$\begin{array}{l}\text{任意の正の実数 } \varepsilon \text{ に対し，正の整数 } N \text{ が存在して，} \\ m > n \geq N \text{ であるような任意の整数 } m, n \text{ に対して} \\ \left| \displaystyle\sum_{k=n}^{m-1} \frac{z^k}{k} \right| < \varepsilon \text{ が成り立つ．}\end{array} \qquad (C)$$

（コーシーの収束条件定理によれば，条件 (C) は級数 $(*)$ の収束と同値であるため，(3) より級数 $(*)$ の収束が証明できることになる．）

(神戸大 2014)　　(m20143810)

0.26 関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で連続であるとは

『任意の正の数 ε に対し，正の数 δ で $|x - x_0| < \delta$ であるならば $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ をみたすものがとれる』$\cdots$ (★)

ときをいう．このとき，次の問いに答えよ．

まず $f(x) = x^2$ として，(1) と (2) に答えよ．

(1) $x_0 = 0,\ \varepsilon = \dfrac{1}{100}$ としたときに (★) が成立する δ を求めよ．

(2) $x_0 = 0$ とし，任意の $\varepsilon > 0$ に対して (★) が成立する δ を求めることにより，$f(x) = x^2$ が $x = 0$ で連続であることを示せ．

次に

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{m} & (x \text{ が } 0 \text{ でない有理数で，その既約分数表示が } m > 0 \text{ として } \dfrac{n}{m} \text{ と表せるとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき，または } x \text{ が無理数のとき}) \end{cases}$$

と定義された関数について，以下の (3)〜(5) に答えよ．

(3) 次の値を求めよ．

(a) $f\left(\dfrac{2}{3}\right)$　　(b) $f\left(\sqrt{2}\right)$　　(c) $f\left(\dfrac{4}{8}\right)$

(4) M を自然数とする．$|x| < \dfrac{1}{M}$ をみたす有理数 x $(x \neq 0)$ の既約分数表示の分母を m とすれば $|m| > M$ となることを示せ．

(5) $f(x)$ が $x = 0$ で連続となることを示せ．

(高知大 2007)　　(m20074502)

0.27 $f(x)$ は開区間 $(-1, 1)$ 上で連続な正値関数で，

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = 1$$

を満たすとする．さらに，正の整数 n ごとに実数直線 $\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f_n(x)$ を，

$$f_n(x) = \begin{cases} nf(nx) & \left(x \in \left(-\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n}\right) \text{ のとき}\right) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

で与える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx$ を求めよ．

(2) N を正の整数とし，ε を正の数とする．$\mathbb{R}$ 上で定義された連続関数 $g(x)$ が閉区間 $\left[-\frac{1}{N},\ \frac{1}{N}\right]$ 上で $\left|g(x)\right| < \varepsilon$ を満たせば，$n > N$ を満たす任意の整数 n に対して，

$$-\varepsilon \leqq \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x)dx \leqq \varepsilon$$

であることを示せ．

(3) $\mathbb{R}$ 上で定義された任意の連続関数 $h(x)$ に対して，$a_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)h(x)dx$ とおく．

このとき，$g(x) = h(x) - h(0)$ に対して (2) の結果を利用することにより，

数列 $\{a_n\}$ は $n \to \infty$ のとき $h(0)$ に収束することを示せ．

(高知大 2016)　　(m20164502)

0.28 (1) $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 f を次で定義する．

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，$\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$ は存在するか．理由をつけて答えよ．

(2) $a,\ A,\ B \in \mathbb{R}$ を定数とする．$g,\ h$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数とする．$\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) = A$ と $\displaystyle\lim_{x \to A} h(x) = B$ が成り立つとする．また，$x \neq a$ のとき, $g(x) \neq A$ であるとする．このとき，$\displaystyle\lim_{x \to a} h(g(x)) = B$ が成り立つことを $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて示せ．

(3) $a,\ A,\ B \in \mathbb{R}$ を定数とする．$g,\ h$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数とする．$\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) = A$ と $\displaystyle\lim_{x \to A} h(x) = B$ が成り立つとする．このとき，$\displaystyle\lim_{x \to a} h(g(x) = B$ が常に成り立つか．理由をつけて答えよ．

(高知大 2018)　　(m20184501)

0.29 複素平面上の中心 a，半径 r の半円 $C_r(a)$ を $C_r(a) = \{z = a + re^{i\theta}\ ;\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$ で定める. ただし, $i = \sqrt{-1}$ である．

(1) 正則関数 $f(z)$ に対して次式を示せ. $z = a + \varepsilon e^{i\theta}$ とおいて考えよ．

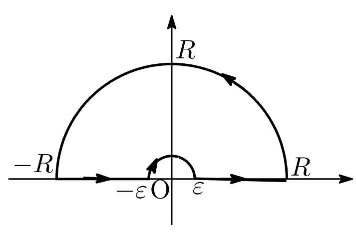
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{z - a} dz = i\pi f(a)$$

(2) 不等式 $\dfrac{2}{\pi}\theta \leq \sin\theta \left(0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が成立つことを示せ．

(3) (2) の結果を用いて次式を証明せよ．

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

(4) 関数 $\dfrac{e^{iz}}{z}$ の積分を図の矢印に示す道に沿って考えることにより, 定積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ の値を計算せよ．



（九州大 2004）　　(m20044708)

0.30 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\ \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を関数とし、$\alpha, \beta, x_0 \in \mathbb{R}$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$ ならば，正数 M が存在し，すべての n に対して $|a_n| \leqq M$ となることを示しなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} b_n = \beta$ ならば，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n b_n = \alpha\beta$ となることを示しなさい．

(3) $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq \alpha$ とする．このとき，正数 $\varepsilon > 0$ と $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ となる実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在し，$|f(x_n) - \alpha| \geq \varepsilon \ (n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示しなさい．

(4) 次の二つの条件が同値であることを示しなさい．

(a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$.

(b) 実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ を満たせば，$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$.

(九州大 2006)　　(m20064709)

0.31 正の実数 $p > 0$ に対して，定積分 $f_n(p) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + nx^p}\, dx\,, \quad n = 1, 2, \cdots$ を考える．

(1) 次の極限値を求めよ． $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, f_n(2)$

(2) $0 < \varepsilon < 1$ に対して $f_n(p)$ の積分区間を $[\,0,\ \varepsilon\,]$ と $[\,\varepsilon,\ 1\,]$ に分けることにより次の不等式を示せ．

$$0 < f_n(p) < \varepsilon + \frac{1 - \varepsilon}{1 + n\varepsilon^p}$$

(3) (2) を用い $\lim_{n\to\infty} f_n(p) = 0$ であることを示せ．

(九州大 2007)　　(m20074705)

0.32 次の問に答えよ．ただし，log は自然対数を表す．自然対数の底は $e = 2.718\cdots$ である．

(1) 次の積分（広義積分）の値を求めよ．

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon > 0,\ \varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

(2) 極限値に関する次の二つの等式が成り立つことを証明せよ．

$$\lim_{x > 0,\ x \to 0} x \log x = 0 \quad , \qquad \lim_{x > 0,\ x \to 0} x^x = 1$$

(3) 閉区間 $[0, 1]$ 上の関数 f, g を次のように定義する．

$$0 < x \leq 1 \text{ のとき } f(x) = x \log x, \quad g(x) = x^x, \quad f(0) = 0, \quad g(0) = 1$$

このとき，f, g の各々について，$[0, 1]$ における最大値と最小値を求めよ．

(4) 次の積分（広義積分）は有限値に収束するか，それとも無限大に発散するか，いずれであるか判定せよ．その理由も示せ．

$$\int_0^1 \frac{x^x}{\sqrt{x}} dx$$

（九州芸術工科大 2000 ）　　(m20004802)

0.33 関数 $f(x) = x^3$ が $x = 1$ で連続であることを $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて証明せよ．

(佐賀大 2003)　　(m20034903)

0.34 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ は半開区間 $(0, 1]$ で一様連続でないことを次の手順で示せ．

(1) 一様連続であることを $\varepsilon - \delta$ 法を用いて書け．

(2) (1) の否定命題を作れ．

(3) (2) が成り立つことを示せ．

（佐賀大 2004）　　(m20044901)

0.35 (1) 不定積分 $\displaystyle\int (\log x)^2 dx$ を求めよ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 (\log x)^2 dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 (\log x)^2 dx$ の値を求めよ．

(佐賀大 2006)　　(m20064901)