[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　$f'\ (x)$

0.1 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $f'(x)$ および $f''(x)$ を計算せよ.

(2) 関数 $f(x)$ の増減を調べよ.

(3) 曲線 $y=f(x)$ の概形を描け.

(北見工業大 2009)　(m20090201)

0.2 $f(x)=\sqrt{x}\log x \quad (x\geq 0)$ とするとき，以下の問に答えよ.

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ の最小値を求めよ.

(4) $y=f(x)$ のグラフの概形を描け.

(岩手大 1997)　(m19970301)

0.3 関数 $f(x)>0$ は閉区間 $[a,b]$ で微分可能であり，導関数 $f'(x)$ は連続であるとする．x 軸上に定点 $A(a,0)$ と動点 $P(x,0)$ をとる．ただし，$a<x\leq b$ とする．点 A, 点 P において x 軸に垂直な 2 直線と曲線 $y=f(x)$ との交点をそれぞれ B,Q とする．次の問いに答えよ.

(1) 弧 BQ の長さを求める式を書け.

(2) 曲線 $y=f(x), x$ 軸，直線 AB, 直線 PQ で囲まれた部分の面積と弧 BQ の長さの比が一定値 k であるとき，この曲線の方程式を導け.

(東北大 1994)　(m19940502)

0.4 関数　$F(x)=x\log x-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}$　の導関数を $F'(x)$ と表し，
関数 $f(x)$ を　$f(x)=F'(x)$　と定義する.

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ.　(2) 関数 $f(x)$ の増加・減少を調べよ.

(2) 等式　$f(c)=0 \quad (1<c<3)$　を満たす c が少なくとも 1 つ存在することを示せ.

(東北大 2001)　(m20010501)

0.5 関数 $f(x)$ の $x=a$ を中心とするテイラー展開は以下のように与えられる.

$$f(x)\sim f(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\cdots$$

ただし, $f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の第 n 次導関数 $\dfrac{d^nf}{dx^n}$ を表す. また, $f'(x)$ および $f''(x)$ は $f(x)$ の導関数 $\dfrac{df}{dx}$ および第 2 次導関数 $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ をそれぞれ表す. 特に, $-1<x<1$ に対する関数 $\dfrac{1}{1-x}$ および $-\infty<x<\infty$ に対する関数 e^x の $x=0$ を中心とするテイラー展開はそれぞれ次のように与えられる.

$$\frac{1}{1-x}\sim\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad , \qquad e^x\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

x を実数とし, 関数 $g(x)$ と $h(x)$ を

$$g(x)=e^{x^2} \quad , \qquad h(x)=\frac{e^{x^2}}{2-x}$$

と定義する.

(1) $g(x)$ の $x=0$ を中心とするテイラー展開を求めよ.

(2) 問 (1) の結果を用いて, $h(x)$ の $x=0$ を中心とするテイラー展開の x^2 の項までを求めよ.

(3) $h(x)$ の導関数 $h'(x)$ を求めよ.

(4) $y=h(x)$ の $-\infty < x < \infty$ における発散する点, 極値を与える点に注意して, グラフの概略を描け.

（東北大 2004）　(m20040502)

0.6 x を実数として, 関数 $f(x)$ を $f(x)=x^2e^{ax}$ と定義する. ただし, a は負の定数である.

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$, 第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(2) $x \to +\infty$ のとき, $f(x)$ の極限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ の増減 , 極値 , グラフの凹凸 , 変曲点を調べ, 増減表を書き, $y=f(x)$ の概形を描け.

(東北大 2005)　(m20050502)

0.7 x を実数とし, 関数 $f(x)$ を $f(x)=x-\sin x$ と定義する．このとき, 以下の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(2) $f'(x)=0$ を満たすすべての実数 x および $f''(x)=0$ を満たすすべての実数 x をそれぞれ求めよ.

(3) 関数 $y=f(x)$ の区間 $-2\pi \leqq x \leqq 2\pi$ における増減, 極値, グラフの凹凸, 変曲点を調べ, 増減表を書き, グラフの概形を描け.

(4) 任意の実数 x について不等式 $|x| \geqq \sin|x|$ が成り立つことを証明せよ.

(東北大 2006)　(m20060502)

0.8 x を実数とし，関数 $f(x)$ を $f(x)=e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2}$ と定義する.

(1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(2) $f'(x)=0$ を満たすすべての実数 x および $f''(x)=0$ を満たすすべての実数 x をそれぞれ求めよ.

(3) 関数 $y=f(x)$ の区間 $-5 \leqq x \leqq 5$ における増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べ，増減表を書き，グラフの概略を描け.

(4) 関数 $g(x)$ を $g(x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-x+2}^{x}(t-1)(t-3)f(t)dt$ により定義する．このとき，$g(2)$ を求めよ.

(東北大 2008)　(m20080501)

0.9 x を実数とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\sin(a\cos x)$$

と定義する．ただし，a は実数の定数である．$f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) $a=1$ のとき $f(x)=0$ を満たすすべての実数 x を求めよ.

(2) $a=1$ のとき $f'(x)=0$ を満たすすべての実数 x を求めよ.

(3) $a=\pi$ のとき $y=f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における増減, 極値を調べ，増減表を書き，グラフの概形を描け．ただし，グラフには $y=0$ となる点の x の値も記すこと.

(東北大 2009)　(m20090502)

0.10 $f(x)$ は有界な 3 階導関数を持つ関数とする．$h>0$ が小さいとき, 差分商

$$\frac{af(x)+bf(x+h)+cf(x+2h)}{h}$$

が一階導関数 $f'(x)$ を最も良く近似するように実定数 a,b,c を決定せよ.

（お茶の水女子大 2000）　(m20000602)

0.11 (1) $(-1,1)$ を定義域とする関数 f を，$f(x) = \arctan x + \arctan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ で定める．ただし，$\arctan x$ は，$\tan x \ \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数とする．

(a) $f'(x)$ を求めよ．

(b) $\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$ を示せ．

(2) g を $(-1,1)$ 上で定義された C^2 級関数とする．g のテイラー展開あるいはロピタルの定理を用いて

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(h)+g(2h)+g(-3h)-3g(0)}{h^2} = 7g''(0)$$

を示せ（ただし，ロピタルの定理を用いる際は，定理の仮定を満たしていると確認する事）．

(3) h を $(-2,2)$ 上で定義された C^1 級関数とする．$h(0)=0$ であれば，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{h(x)}{x^{3/2}}\,dx$ が存在することを示せ．

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090601)

0.12 微分可能な関数 $f_{ij}(x)$ $(i,j=1,2,3)$ に対して

$$f(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix}$$

とおく．このとき，$f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) & f'_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) & f'_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f'_{31}(x) & f'_{32}(x) & f'_{33}(x) \end{vmatrix}$$

と表されることを示せ．ただし，$|\quad|$ は行列式を表す．

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110607)

0.13 $f(x)$ を微分可能関数とし $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x) = \beta$ とする．このとき任意の実数 h に対して

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x+h) - f(x)\right)$$

が収束することを示し，その極限の値を β と h を用いて表せ．

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130603)

0.14 n を整数として以下の設問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,\cos nx\,dx$ を計算せよ．

(2) $f(x)$ を $[0,\ \pi]$ 上の連続関数とする．$f(x)$ が微分可能で導関数 $f'(x)$ が連続であれば

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^a f(x)\cos nx\,dx = 0$$

が成り立つことを示せ．（ ここで a は任意の実定数とする．）

(東京工業大 2010)　　(m20100801)

0.15 関数 $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ について以下の問に答えよ．

(1) $f'(x)$，$f''(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の極点，変曲点，凹凸を調べグラフを描け．

(東京農工大 1996)　　(m19960901)

0.16 関数 $f(x)$ $(-\pi < x < \pi)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{1-\cos x}} & (-\pi < x < \pi,\ x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

により定義する．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ は連続関数であることを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0+} f'(x)$，$\displaystyle\lim_{x \to 0-} f'(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能でないことを示せ．

(電気通信大 1999)　　(m19991001)

0.17 $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}x}{x^2+1}\right)$ について，次の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$ の値を求めよ．

(2) $f'(x)$ を計算せよ．

(3) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(電気通信大 2006)　　(m20061001)

0.18 $f(x) = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{10}$ のとき，次の値をそれぞれ求めよ．但し，$f'(x)$ は $f(x)$ の x に関する 1 階の微分を表す．

(1) $f'(0)$　　(2) $\dfrac{f'(1)}{f(1)}$　　(3) $f'(1)f'(-1)$

(電気通信大 2006)　　(m20061010)

0.19 関数 $f(x) = \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x$ $(x > 0)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x)$ を求めよ．

(2) $g(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ とおく．$g(x)$ を求めよ．

(3) $g(x) > 0$ $(x > 0)$ であることを示せ．

(4) $f(x)$ の値域 $\{f(x) \mid x > 0\}$ を求めよ．

(電気通信大 2009)　　(m20091003)

0.20 xy 平面上の曲線 C : $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t\cos t \end{cases}$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ について考える．C 上で y は x の関数となるが，これを $y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ と表す．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ $(0 < x < 1)$ を t の関数として表せ．

(2) $f(x)$ の $x = \dfrac{1}{2}$ におけるテイラー展開

$$f(x) = a_0 + a_1\left(x - \frac{1}{2}\right) + a_2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \cdots$$

の係数 a_0，a_1，a_2 を求めよ．

(3) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分を D とするとき，重積分 $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ の値を求めよ．

(電気通信大 2022)　　(m20221003)

0.21 次の問いに答えなさい．

(1) 三角関数 $y = \sin(x)$ を，単位円を用いて定義しなさい．

(2) 関数 $f(x)$ の微分（導関数）は $\quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad$ で定義される．
この定義に基づいて $y = \sin(x)$ の微分を，(1) の定義を用いて導きなさい．

(筑波大 2003) (m20031302)

0.22 $f(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2 \cdot 1}x^2 + \dfrac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1}x^3 + \cdots + \dfrac{1}{n!}x^n + \cdots \qquad$ (式 1)
について, 次の問に答えなさい.

(1) 項別微分を行ない導関数 $f'(x)$ を求めなさい.

(2) 微分方程式 $f(x) = f'(x)$ 満たす関数を $f(x) = \exp(x)$ と定義するとき (式 1) はこの定義を満足することを説明しなさい.

(3) 新しい関数 $ch(x)$, $sh(x)$ を

$$ch(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$$

$$sh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$$

で定義するとき, $ch(x)$ および $sh(x)$ の間には

$$sh'(x) = ch(x)$$

$$ch'(x) = sh(x)$$

$$(ch(x))^2 - (sh(x))^2 = 1$$

なる関係があることを示しなさい.

（筑波大 2004） (m20041312)

0.23 $f(x) = e^{-x} \sin x$ について以下の問いに答えなさい．

(1) $f'(x)$ を求め，$0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で $f'(x) = 0$ となる点をすべて挙げなさい．

(2) $y = f(x)$ の概略図をグラフで示しなさい． (3) 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を求めなさい．

(筑波大 2006) (m20061301)

0.24 関数 $\quad f(x) = \exp\left[-\dfrac{(x-a)^2}{2}\right] \quad$ について，次の問いに答えなさい．

(1) $f(x)$ の 1 次導関数 $f'(x)$ を求め，$f'(x) = 0$ となる x の値を示せ．

(2) $f(x)$ の 2 次導関数 $f''(x)$ を求め，$f''(x) = 0$ となる x の値を示せ．

(筑波大 2006) (m20061304)

0.25 関数 $f(x) = x \cdot \ln x \quad (x > 0)$ について，以下の設問に答えよ.

(1) $f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ. (2) 関数 $f(x)$ の極値と増減を求めよ.

(3) $x \to +0$ および $x \to +\infty$ における関数 $f(x)$ の極限値を求めよ.

(4) 関数 $f(x)$ のグラフの概形を示せ.

曲線 $y = x \cdot \ln x$ と x 軸と $x = a \quad (0 < a < 1)$ とで囲まれた部分の面積を $S(a)$ とおく.

(5) $S(a)$ を求めよ. (6) $S(a)$ の極限値 $\lim_{a \to +0} S(a)$ を求めよ.

参考： グラフの描画には自然対数の底として $e = 2.72$ の値を用いなさい.

(筑波大 2007) (m20071314)

0.26 次の微分方程式 (D) について (1) から (3) に答えなさい.

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0 \qquad \cdots\cdots \quad (D)$$

(1) $f'(x) = f(x)$ または $f'(x) = 2f(x)$ ならば，$f(x)$ は微分方程式 (D) の解であることを示しなさい.

(2) $f(x) = e^x$ および $f(x) = e^{2x}$ は微分方程式 (D) の解であることを示しなさい.

(3) 微分方程式 (D) の任意の解 $f(x)$ は，ある実数 a, b を用いて $f(x) = ae^x + be^{2x}$ と一意的に表せることを示しなさい.

(筑波大 2008) (m20081326)

0.27 $f(x)$ は何回でも微分可能で，$f'(x) = -xf(x)$ を満たすとき，以下の問いに答えよ.

(1) $f''(x)$ を，$f(x)$ を用いて表せ. (2) $f(0) = 1$ のとき，$f(x)$ を求めよ.

(筑波大 2008) (m20081339)

0.28 連続な導関数をもつ関数 $f(x)$ は, $x \geq 1$ において次の 3 条件を満たすとする.

(a) $f(x) > 0$

(b) $f(x+1) = xf(x)$

(c) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ は単調増加する. ただし, $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする.

このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 積分 $\displaystyle\int_1^x \log t\, dt$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\log t = \int_t^{t+1} \frac{f'(u)}{f(u)}\, du \quad (t \geq 1)$ が成り立つことを示せ.

(3) 不等式

$$\log \frac{f(x+1)}{f(2)} \geq x \log x - x + 1 \quad (x \geq 1)$$

が成り立つことを示せ.

(筑波大 2010) (m20101303)

0.29 x の関数 $f(x) = e^{-x^2}$ に関して以下の問題に答えなさい.

(1) f を 1 回微分した導関数 $f'(x)$ を求めなさい.

(2) f を n 回微分した導関数を $f^{(n)}(x)$ と表すとき，ある n 次の多項式 $\phi_n(x)$ によって，$f^{(n)}(x) = \phi_n(x)e^{-x^2}$ と表せることを証明しなさい.

(3) n を任意に固定する．このとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f^{(n)}(x)$ は収束するか．それとも発散するか．理由を付して答えなさい.

(筑波大 2011) (m20111306)

0.30 (1) 関数 $y = \sin^2 x$ のグラフを (x, y) 平面上に描きなさい.

(2) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ とは何か．定義を述べなさい.

(3) ある畑の面積は $0.5ha$ である．この面積を km^2 の単位で表しなさい.

(筑波大 2012) (m20121313)

0.31 $F(x, y) = x^3 - 3xy + 2y^2 - 4y = 0$ を満たす関数 $y = f(x)$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) $y=f(x)$ の 1 次導関数 $f'(x)$ を求めなさい．

(2) (1) の結果を用いて，$y=f(x)$ の極値を求めなさい．

(筑波大 2013)　　(m20131320)

0.32 逆正接関数 $f(x)=\mathrm{Tan}^{-1}x\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<f(x)<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に関する以下の問いに答えよ．

(1) $y=\mathrm{Tan}^{-1}x$ とおき，$x=\tan y$ とすることで，$\dfrac{dy}{dx}$ を y の関数として求めよ．

(2) $(1+x^2)f'(x)=1$ が成り立つことを示せ．

(3) $f^{(n)}(x)$ に関する漸化式 $(1+x^2)f^{(n+1)}(x)+2nxf^{(n)}(x)+n(n-1)f^{(n-1)}(x)=0$ が成り立つことを示せ．ただし，n は 1 以上の整数である．

(4) $f^{(n)}(0)$ に関する漸化式を解き，m を 0 以上の整数として $f^{(2m)}(0)$ および $f^{(2m+1)}(0)$ を求めよ．

(筑波大 2014)　　(m20141309)

0.33 関数 $f(x)$ が次式で与えられているとする．

$$f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\ , \\ 0 & (x=0)\ . \end{cases}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) $n=2$ のとき，$x=0$ において f は微分可能であるかを示せ．

(2) $n=2$ のとき，$f'(x)$ は $x=0$ で連続であるかどうかを示せ．

(3) $n=3$ のとき，$f'(x)$ は $x=0$ で連続であるかどうかを示せ．

(筑波大 2016)　　(m20161311)

0.34 Newton 法は方程式 $f(x)=0$ を満たす解 x の近似解を数値的に求める手法の 1 つである．具体的な手順は，以下の通りである．まず，漸化式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\ ,\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

を構成する．ここで，$f'(x_n)=\dfrac{d}{dx}f(x_n)\neq 0$ とする． 次に，この漸化式を適当な初期値 x_0 の下で解き，数列 $x_1,\ x_2,\ \cdots$ を計算する． 解が存在する場合には，その収束値 x_∞ は $f(x_\infty)=0$ を満たす．上述の Newton 法に関して，以下の設問に答えよ．

(1) Newton 法で x_0 から x_1 を求めることは，点 $(x_0,\ f(x_0))$ における $y=f(x)$ の接線と x 軸の交点を求めることになっている．これを示せ．

(2) Newton 法の漸化式から得られる数列 $\{x_n\}$，$n=0,\ 1,\ \cdots$ は，初期値 x_0 が $f(x)=0$ の解の近傍にあるときに収束し，その収束値は $f(x)=0$ の解を与える．これを以下の＜定理＞を用いて示せ．ただし，$f'(x)\neq 0$ かつ $f''(x)=\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ は連続であるとする．

＜定理＞

関数 $\varphi(x)$ が閉区間 I で微分可能で，$\varphi(x)$ の値域は I に含まれ，I では

$$\left|\frac{d}{dx}\varphi(x)\right|\leq k<1$$

であるとする．このとき，反復法 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ によって方程式 $x=\varphi(x)$ の

ただ 1 つの根 x_∞ が得られる．

(筑波大 2018)　　(m20181306)

0.35 x を 2 次以下の実数係数の多項式 $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ 全体が作る線形空間 $\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{W}$ について，$\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ の写像 F は，$f(x)$ を $f(x) + f'(x)$ に移す写像とする．

ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ を微分した関数（導関数）を表す．以下の設問に答えよ．

(1) F が上への 1 対 1 の線形写像であることを証明せよ．

(2) $\{x+1,\ x^2+x+1,\ 1\}$ が $\boldsymbol{W}$ の基底となることを証明せよ．

(3) $\boldsymbol{V}$ の基底 $\{x,\ -x^2+1,\ x^2-4x+3\}$ と $\boldsymbol{W}$ の基底 $\{x+1,\ x^2+x+1,\ 1\}$ に関する F の表現行列 A を求めよ．

(4) A を対角化して，行列 A^n を求めよ．(n は正の整数)

(筑波大 2018)　　(m20181307)

0.36 関係式 $F(x,y) = x^2 - 2xy + 9y^2 - 8 = 0$ をみたす関数 $y = f(x)$ について，以下の問いに答えよ．

(a) 停留点（$f'(x) = 0$ となる点）をすべて求めよ．

(b) (a) で求めた各点において $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．

(c) (a), (b) の結果を用いて極値をすべて求めよ．

(筑波大 2022)　　(m20221302)

0.37 実数 θ に対して　$f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} x^n$　とおく．

(1) 右辺の級数は　$|x| < 1$　で収束することを示せ．

(2) $f'(x) = \dfrac{\sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$ を示せ．　$\left[\text{ヒント}：\sin t = \dfrac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right) \right]$

(埼玉大 2002)　　(m20021401)

0.38 実数 α に対し，　$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x^{\alpha} \sin \dfrac{1}{x} & (x > 0) \end{cases}$　とおく．

(1) $\alpha > 1$ のとき，$f(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で微分可能であることを示せ．

(2) $\alpha \leq 1$ のとき，$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能でないことを示せ．

(3) $\alpha > 1$ のとき，$f'(x)$ が $-\infty < x < \infty$ で連続となる α の範囲を求めよ．

(埼玉大 2003)　　(m20031402)

0.39 (1) 関数 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい．

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x}$ の第 4 次導関数 $f^{(4)}(x)$ を求めなさい．

(3) 次の極限値を求めなさい．

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos 2x)}{\log(\cos 3x)}$$

(4) xy 平面において $y = \dfrac{1}{\sin x}$ のグラフで与えられる曲線と 直線 $x = \dfrac{\pi}{3}$，$x = \dfrac{2\pi}{3}$ および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい．

(埼玉大 2009)　　(m20091401)

0.40 $f(x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ とする．

(1) $(1+x^2)f''(x)+xf'(x)=0$ が成り立つことを示せ.

(2) 非負整数 n に対し,

$$(1+x^2)f^{(n+2)}(x)+(2n+1)xf^{(n+1)}(x)+n^2f^{(n)}(x)=0$$

が成り立つことを示せ.

(埼玉大 2009)　　(m20091406)

0.41 $x>0$ に対して

$$F(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x)$ を求めよ.

(2) $F'(x)$ を求めよ. ただし, 等式

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{e^{-xt}\sin t}{t}\right\}dt$$

が成り立つことを用いてよい.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0} F(x)$ を求めよ.

(埼玉大 2010)　　(m20101403)

0.42 次の関数について以下の問いに答えよ.　　$f(x)=\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$

(1) $f'(x)g(x)=1$ を満たす $g(x)$ を求めよ.

(2) $f'(x)g(x)=1$ に積の微分に関するライプニッツの公式を適用して, 次の漸化式が成り立つことを示せ.

$$(x^2-1)f^{(n+1)}(x)+2nxf^{(n)}(x)+n(n-1)f^{(n-1)}(x)=0 \qquad (n\geqq 1)$$

(埼玉大 2019)　　(m20191401)

0.43 関数 $y=\sin x$ の定義域を $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\ x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ に制限すると, その逆関数 $y=\mathrm{Arcsin}\,x$ を考えることができる. 次の各問に答えよ.

(1) $f(x)=(\mathrm{Arcsin}\,x)^2$ は, どのような 2 つの関数の合成関数とみなすことができるか答えよ.

(2) 合成関数の微分公式に従い, $f(x)=(\mathrm{Arcsin}\,x)^2$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた関数 $f'(x)$ に対して, 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f'(x)dx$ を求めよ.

(茨城大 2007)　　(m20071701)

0.44 関数 $f(x)$ は R 上で微分可能で導関数 $f'(x)$ が連続であるとする. a を 0 でない定数として

$$z=f(x+ay)$$

と定める. 以下の各問に答えよ.

(1) 次の等式を示せ.

$$\frac{\partial z}{\partial y}-a\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

(2) $z=f(x+ay)$ が表す曲面上の点 $\big(0.0.f(0)\big)$ におけるこの曲面の接平面の方程式を求めよ.

(茨城大 2015)　　(m20151707)

0.45　a を正の定数とする．関数 $f(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．
ただし，対数は自然対数とする．

(茨城大 2020)　　(m20201703)

0.46　関数 $f(x) = \sqrt{x} - \log x \quad (x > 0)$ を考える．ただし，対数関数は自然対数によるものとする．

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい．

(2)　$f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めなさい．

(3)　$f(x)$ の極小値を求めなさい．

(山梨大 2009)　　(m20091803)

0.47　関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は,

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$

で定義される. この定義を用いて, $f(x) = x^3$ の導関数は $f'(x) = 3x^2$ となることを示しなさい.

(山梨大 2010)　　(m20101803)

0.48　開区間 $(-\pi,\ \pi)$ において，実関数 $f(x)$ が微分可能であり，その導関数 $f'(x)$ が連続であるとする．このような $f(x)$ を用いて，a_n（但し，n は自然数）が次式で定義されているとき，以下の小問に答えよ．

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

(1)　$f(x) = \sin x$ のとき，微分の定義に従って，導関数 $f'(x)$ を導け．

(2)　$f(x) = \sin 3x$ のとき，a_n を求めよ．

(3)　$f(x) = x$ のとき，a_n を求めよ．

(山梨大 2018)　　(m20181801)

0.49　閉区間 $[0, 1]$ で定義された連続関数 $f(x)$ が開区間 $(0, 1)$ で 2 回微分可能で，次の 2 つの条件

(i)　$f(0) = f(1) = 0$

(ii)　すべての $0 < x < 1$ に対して

$$(1 - x)f'(x) = 1 - x - 2x \int_1^x \frac{f(t)}{t^3} dt - \frac{f(x)}{x}$$

を満たしているとする．このとき以下の問いに答えよ．

(1)　$f''(x)$ を x の有理式で表せ．

(2)　$f(x)$ を求めよ．

(信州大 2019)　　(m20191901)

0.50　$f(x) = x^x\ (x > 0)$ の微分 $f'(x)$ を求めよ．

(信州大 2019)　　(m20191907)

0.51　関数 $f(x)$ は開区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ において,

$$f(x) = \log \cos x$$

で定義されているとする．このとき，次に問いに答えよ．ただし，対数は自然対数である．

(1)　$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)$ を求めよ．

(2)　$f(x)$ の 2 次までのマクローリン展開を求めよ．また，剰余項 $R_3(x)$ を求めよ．

(3) 極限 $\lim_{n\to\infty}\cos^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ を求めよ.

(信州大 2023)　　(m20231901)

0.52 $f(x)$ はすべての実数で定義された何回でも微分可能な関数で，$f(0)=1, f'(0)=-1, f''(0)=1$ かつ相異なる実数 u, v に対して等式

$$\frac{f(u)-f(v)}{u-v}=f'(\frac{u+v}{2})$$

を満たしているものとする．このとき次の問いに答えよ．

(1) 任意の実数 x, y $(y\neq 0)$ に対して，

$$f(x+y)-f(x-y)=2f'(x)y$$

が成り立つことを示せ．

(2) 任意の実数 x, y $(y\neq 0)$ に対して，

$$f''(x+y)=f''(x-y)$$

が成り立つことを示せ．さらに $f''(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ を求めよ．

(新潟大 1998)　　(m19982002)

0.53 実変数の実数値関数 $f(x)$ を　$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & , \quad x\neq 0 \text{ の場合} \\ 0 & , \quad x=0 \text{ の場合}\end{cases}$
によって定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\lim_{x\to 0}f(x)=0$ となることを示せ．

(2) $x\neq 0$ に対して，$f'(x)$ を求めよ．

(2) $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ を求めよ．

(4) $f'(x)$ は $x=0$ で連続でないことを示せ．

(3) $F(x,y)=f(xy)$ とおくとき，$xy\neq 0$ に対して，x に関する偏導関数 $\frac{\partial F}{\partial x}$，および，$y$ に関する偏導関数 $\frac{\partial F}{\partial y}$ を求めよ．

(新潟大 2001)　　(m20012004)

0.54 $0<x$ において定義された関数 $f(x)=-\frac{1}{x}+\frac{C}{x^n}$ が $x=p$ $(0<p)$ において極値をとるとき，以下の問いに答えよ．ただし，C は正の実数，n は 2 以上の整数である．

(1) $\lim_{x\to\infty}f(x)$ を求めよ．

(2) $\lim_{x\to +0}f(x)$ を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(4) C の値を，p および n を用いて表せ．

(5) この関数の極値を，p および n を用いて表せ．

(6) この関数の概形をグラフで示せ．

(新潟大 2006)　　(m20062014)

0.55 関数 $f(x)=(x+3)\sqrt{-x^2-2x+3}$ $(-3\leqq x\leqq 1)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の最大値を求めよ．

(3) 極限 $\lim_{x\to -3+0}f'(x)$ と $\lim_{x\to 1-0}f'(x)$ を求めよ．

(新潟大 2019)　　(m20192013)

0.56 次のことを示せ．

(1) $f(x) = \begin{cases} x^{-1} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ とする． $f(x)$ は連続でない．

(2) $f(x) = \begin{cases} x^{m} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$ とする． $m \geq 3$ ならば，$f'(x)$ は微分可能である．

(3) 数列 $\left\{ \dfrac{1}{n^2} \right\}$ は有界である．

(金沢大 1999)　　(m19992201)

0.57 関数 $f(t)$ は 2 回連続的微分可能で， $f(t), f'(x), f''(x)$ は有界とする．

$s > 0$ に対して $g(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f''(x)\,dt = s^2 g(s) - sf(0) - f'(0)$ を示せ．

(2) ω は定数とする． $f(t) = \sin \omega t$ のとき， $g(s)$ を求めよ．

(金沢大 1999)　　(m19992212)

0.58 関数 $f(x) = \log(1+x)$, $x > -1$ について，次の問いに答えよ．ただし，log は自然対数とする．

(1) $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ にマクローリンの定理を当てはめ，次の不等式を証明せよ．

$$\left| \log 1.1 - 0.095 \right| < \frac{1}{3000}$$

(金沢大 2002)　　(m20022201)

0.59 $f(x)$ を $f'(x) = f(x),\ f(0) = 1$ を満たす関数とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\left(e^{-x} f(x)\right)' = 0$ を示せ．また，これを用いて $f(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ．

(3) (2) の結果を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$ の値を求めよ．

(金沢大 2007)　　(m20072202)

0.60 次のことを示せ．

(1) $f(x) = \begin{cases} x^{-1} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ とする． $f(x)$ は連続でない．

(2) $f(x) = \begin{cases} x^{m} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$ とする． $m \geq 3$ ならば，$f'(x)$ は微分可能である．

(金沢大 2007)　　(m20072209)

0.61 $f(x) = \sqrt{1+x}\ (x > -1)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f'(x),\ f''(x)$ および $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(2) マクローリンの定理を適用し，$f(x)$ の $(n-1)$ 次近似多項式およびその剰余項 R_n を求めよ．

(3) (2) で得られた結果を $n = 2$ の場合に用いて，$\sqrt{1.01}$ の近似値を 1.005 としたときの誤差を評価せよ．

(金沢大 2008)　　(m20082202)

0.62 関数 $\tan x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ とする. 次の問いに答えよ．

(1) 公式 $\dfrac{d}{dy}\tan y = \tan^2 y + 1 \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を利用して

$$(x^2+1)f'(x) = 1 \quad (-\infty < x < \infty)$$

となることを示せ.

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$(x^2+1)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$$

が成立することを示せ.

(3) $m = 1, 2, 3, \cdots$ に対して, 微分係数 $f^{(2m+1)}(0)$ の値を求めよ.

(金沢大 2010)　　(m20102202)

0.63 関数 $f(x)$ が $f(0) = 0,\ f'(0) = 1$ および微分方程式

$$(1-x^2)f''(x) = xf'(x) \qquad (-1 < x < 1)$$

を満たしている. 次の問いに答えよ.

(1) $m = 1, 2, 3, \cdots$ について

$$(1-x^2)f^{(m+2)}(x) - 2mxf^{(m+1)}(x) - m(m-1)f^{(m)}(x) = xf^{(m+1)}(x) + mf^{(m)}(x)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $m = 2, 3, 4, \cdots$ について

$$f^n(0) = (n-2)^2 f^{(n-2)}(0)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$f^{(0)}(x) = f(x)$ とする.

(3) $f(x)$ は区間 $-1 < x < 1$ でマクローリン級数に展開できるとする．その級数が

$$f(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

となることを示せ．ただし，$(2n)!! = 2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)(2n)$，$(2n-1)!! = 1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)(2n-1)$ である.

(金沢大 2012)　　(m20122202)

0.64 $x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ について，次の問いに答えよ.

(1) $f'(x) < 0$ となる x の範囲を求めよ.

(2) $N \geqq 3$ に対して,

$$\sum_{n=3}^{N} f(n) < \int_2^N f(x)dx$$

が成り立つことを示せ．ただし必要ならば，$e < 3$ であることは証明なしで用いてよい.

(3) $f(x)$ の不定積分を求めよ.

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ が収束することを示せ.

(金沢大 2012)　　(m20122206)

0.65 関数 $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}\ \ (|x| < 1)$ について，次の問いに答えよ.

(1) $f'(0),\ f''(0),\ f'''(0)$ を求めよ.

(2) $(x-x^3)f''(x)=f'(x)$ を示せ.

(3) $f^{(n)}(0)$ を求めよ.

(金沢大 2015)　　(m20152202)

0.66 次のことを示せ.

(1) $f(x)=\begin{cases} x^{-1} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ とする. $f(x)$ は連続でない.

(2) $f(x)=\begin{cases} x^{m} & (x>0) \\ 0 & (x\leq 0) \end{cases}$ とする. $m\geq 3$ ならば, $f'(x)$ は微分可能である.

(金沢大 2016)　　(m20162213)

0.67 関数 $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x} & (x>0\ \text{のとき}) \\ 0 & (x\leqq 0\ \text{のとき}) \end{cases}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $x>0$ に対し, $f'(x)$ と $f''(x)$ を計算せよ.

(2) 正の整数 n に対し, $\displaystyle\lim_{y\to\infty} y^n e^{-y}=0$ を示せ.

(3) $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$ であることを示せ.

(金沢大 2017)　　(m20172207)

0.68 定数 $a>0$ を与えて, 開区間 $\left(0,\dfrac{\pi}{a}\right)$ 上で関数 $f(x)=\dfrac{\cos(ax)}{\sin(ax)}$ を考える. 次の問いに答えよ.

(1) $x=0$ での右側極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} f(x)$ と $x=\dfrac{\pi}{a}$ での左側極限 $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{a}-0} f(x)$ をそれぞれ調べよ.

(2) $f(x)$ は $\left(0,\dfrac{\pi}{a}\right)$ 上で, $f'(x)=-a\left(1+f(x)^2\right)$ を満たすことを示せ.

(3) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在することを示し, その導関数 $(f^{-1})'(x)$ を求めよ.

(4) (3) の関数 $f^{-1}(x)$ と $f(b)=b$ を満たす定数 b $\left(0<b<\dfrac{\pi}{a}\right)$ に対して, 広義積分

$$\int_b^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)\left\{1+\left(f^{-1}(x)\right)^2\right\}}dx$$

を a と b を用いて表せ.

(金沢大 2018)　　(m20182207)

0.69 関数 $f\ :\ \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を次式で定義する.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\dfrac{x^2}{4}\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ は $x=0$ で微分可能であることを示せ.

(2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求め, $f'(x)$ が $x=0$ で連続でないことを示せ.

(3) $f(x)$ は $x=0$ のとき最小値をとり, かつ $f(x)$ が最小値をとるのは $x=0$ のときに限ることを示せ.

(金沢大 2019)　　(m20192206)

0.70 $\boldsymbol{R}$ 上の関数 f は，任意の有界閉区間において積分可能であり

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \boldsymbol{R})$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) $F(x) = \int_0^x f(y)dy \quad (x \in \boldsymbol{R})$ とするとき，f は

$$f(x) = F(x+1) - F(x) - F(1) \quad (x \in \boldsymbol{R})$$

を満たすことを示せ.

(2) f は微分可能であり，任意の実数 x に対して，$f'(x) = f(1)$ が成り立つことを示せ.

(3) 任意の実数 x に対して，$f(x) = f(1)x$ が成り立つことを示せ.

(金沢大 2021) (m20212208)

0.71 関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqq 0) \\ e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \end{cases}$$

は微分可能であるか. 微分可能であるならば導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(富山大 2004) (m20042310)

0.72 関数 $f(X) = \sqrt{3}\sin X + \cos X$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 関数 $f(X)$ の導関数 $f'(X)$ を求めなさい.

(2) 関数 $f(X)$ の区間 $0 \le X \le \pi$ における最大値 f_M と最小値 f_m を求めなさい.

(3) 関数 $f(X)$ の定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(X)dX$ を求めなさい.

(4) 関数 $f(X)$ の区間 $0 \le X \le \pi$ でのグラフの概略を示しなさい.

(福井大 2000) (m20002406)

0.73 関数 $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$ のマクローリン展開を，次の順序に従い求めよ.

(1) $f'(x)$，$f''(x)$ および $f'''(x)$ を計算せよ.

(2) 一般項 $f^{(n)}(0)$ を推定せよ（答のみでよい）.

(3) (2) の結果を用いて，関数 $f(x)$ を $x = 0$ で無限級数にテーラー展開せよ.

(福井大 2007) (m20072402)

0.74 (1) 関数 $f(x) = \log(1+x)$（ただし $x > -1$）の 1〜4 階の導関数（つまり $f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$，および $f^{(4)}(x)$ ）をそれぞれ求めよ.

(2) (1) の結果にもとづき, 上で定義された関数 $f(x)$ の n 階の導関数を推測し，$f^{(n)}(x)$ が実際に推測された関数で表現されることを，数学的帰納法を用いて証明せよ.

(3) (2) の結果を使い，関数 $f(x)$ のマクローリン展開（$x = 0$ でのテーラー展開）を，無限級数の和の形 $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \text{の形}\right)$ で求めよ，

(4) (3) の結果を用いて，関数 $g(x) = \log\left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)$（ただし $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$）のマクローリン展開を，無限級数の和の形で求めよ（経過を書く必要はあるが，証明の必要はなし）.

(福井大 2008) (m20082401)

0.75 関数 $f(x)=(x^2+4x)e^{-x}$ について以下の問いに答えよ.

(1) 1 階の導関数 $f'(x)$, 2 階の導関数 $f''(x)$ と $\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) $0 \leq x < \infty$ の範囲で増減表を書き, $y=f(x)$ のグラフを描け.

(福井大 2008) (m20082402)

0.76 $f(x)$, $g(x)$ を微分可能な x の実関数とする. $(f(x)g(x))'$ は, $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ として表されることを示しなさい. ただし, $'$ は, x に関する導関数を表すものとする.

(岐阜大 2005) (m20052611)

0.77 $F(x)$ はすべての x において 2 回微分可能な関数で, $F'(x)=f(x)$ とする. このとき置換微分法により

$$I=\int_a^b xf(x^2)dx$$

の値を F を用いて表せ. ただし, a,b は正の定数とする. また, 重積分

$$J=\iint_D \frac{xyf(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy\ ,\quad D\ :\ x,y \geqq\ 0,\ p^2 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ q^2$$

の値を F を用いて表せ. ただし, p,q は正の定数とする.

(岐阜大 2011) (m20112606)

0.78 以下に示す関数について次の問いに答えよ. $f(x)=xe^{-x}$

(1) 関数 $f(x)$ を微分せよ.

(2) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点を求め, 増減表を作成せよ. また, $y=f(x)$ の概形を描け.

(3) 関数 $f(x)$ の表す曲線と x 軸と $x=q$ $(q>0)$ の直線とで囲まれる図形の面積を $S(q)$ とする. このとき, 極限 $\lim_{q\to\infty} S(q)$ を求めよ.

(豊橋技科大 2006) (m20062706)

0.79 次の関数について以下の問いに答えよ.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

(1) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

(2) $f(x)$ の一次導関数を $f'(x)$ とする. $f'(0)$ の値を求めよ.

(豊橋技科大 2010) (m20102703)

0.80 $x-y$ 平面上の 2 つの曲線 $y=f(x)=a-\cos 2x$ と $y=g(x)=2\sqrt{2}\sin x$ に関する以下の問いに答えよ. ただし, a は定数である.

(1) $f(x)$ と $g(x)$ の導関数 $f'(x)$ と $g'(x)$ を求めよ.

(2) $f'(x)=g'(x)$ となる x を求めよ. ただし, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ とする.

(3) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において接するとき, a の値を求めよ.

(4) (3) のように 2 つの曲線が接するとき, $x \geqq\ 0$ かつ (3) の接点までの範囲で y 軸と 2 つの曲線が囲む面積を求めよ.

(豊橋技科大 2015) (m20152701)

0.81 関数 $f(x)$ が $[0, \infty)$ において微分可能で，次の微分方程式を満たす.

$$f'(x) - \frac{1}{x+1} f(x) = (x+1)^2 e^x$$

このとき,

(1) 微分方程式の一般解 $f(x)$ を求めよ.

(2) 初期条件 $f(0) = 1$ を満たす特殊解 $f(x)$ を求めよ.

(名古屋工業大 2009) (m20092907)

0.82 関数 $f(x) = e^{\sin x}$ のマクローリン展開を次の指示に従って計算しなさい.

(1) $f'(x)$ と $f(x)$ との関係を導きなさい. その関係式に対してライプニッツの公式を適用し, $f^{(n+1)}(x)$ を $f^{(k)}(x)$ $(0 \leq k \leq n)$ を用いて表しなさい. ただし, n は任意の自然数とし, 等式 $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ を用いてもよい.

(2) $f(x)$ のマクローリン展開を x^5 の項まで求めなさい. ただし剰余項を求める必要はない.

(名古屋工業大 2010) (m20102903)

0.83 関数の微分の定義は次式で与えられる.

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

この極限値が存在するとき，関数 $h(x)$ は微分可能であるという.

上の定義を用いて，次の定理を証明しなさい.

【定理】
関数 $f(x)$ と $g(x)$ が微分可能であれば, $f(x) + g(x)$ は微分可能であり,
次の公式が成り立つ.

$$\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$$

(三重大 2002) (m20023107)

0.84 微分可能な関数 $f(x)$ が, $f(x) = \cos^2(x) + \displaystyle\int_0^x f(t)\{\sin(x)\cos(t) - \sin(t)\cos(x)\}\,dt$ を満たすとき, 以下の問に答えなさい.

(1) 与式の両辺を微分して $f'(x)$ を求めなさい.

(2) $f''(x)$ を求めなさい.

(3) $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ をそれぞれ求めなさい.

(4) 問 (1)〜(3) の結果を用いて, $\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx$ を求めなさい.

(三重大 2014) (m20143101)

0.85 n を 2 以上の自然数とし, 多項式 $f(x) = (x+1)^n$ と $g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ を考える.（ただし, c_k は定数）

(1) $f'(x)$, $g'(x)$, $f''(x)$ および $g''(x)$ を求めよ.

(2) $f'(0) - g'(0)$ および $f''(0) - g''(0)$ を求めよ.

（奈良女子大 2004） (m20043202)

0.86 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $f'(x)$ を求めよ.

(2) a を実数とする．$y = f(x)$ の接線で点 $A(a, 0)$ を通るものがちょうど 2 本存在するための a の条件を求めよ.

(奈良女子大 2022)　　(m20223203)

0.87 任意の関数 $y = f(x)$ がある区間 I で微分可能であるとき，I の各点に対して次式で定義される y' を関数 y の導関数と呼び, 導関数を求めることを関数 y を微分するという.

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(1) 上の定義式を用いて, 次の関数の導関数を求めよ.

$$y = \log x \qquad (x > 0)$$

(2) 今関数 $f(x)$ と $g(x)$ は微分可能であるとする. この時, 上の導関数の定義式を用いて, 次の事を示せ.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

但し, $g(x) \neq 0$ とする.

（京都大 2004）　　(m20043301)

0.88 (1) 2 回微分可能な関数 $F(x)$ に対し，不定積分に関する関係式

$$\int (F''(x) + F(x)) \sin x dx = F'(x) \sin x - F(x) \cos x + C$$

を示せ．ただし，C は任意定数とする.

(2) n を 3 以上の自然数とする．微分方程式

$$y' + y = e^{-x} \left\{x^n + n(n-1)x^{n-2}\right\} \sin x$$

の解 $y = y(x)$ で条件 $y(0) = 0$ を満たすものを求めよ.

(京都工芸繊維大 2017)　　(m20173405)

0.89 関数 $f(x)$ は区間 $(-\infty,\ \infty)$ で 2 回微分可能であるとする．関数 $g(x)$ を

$$g(x) = f(x)^2 - 2f(x) - f'(x)$$

と定める．ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である．2 変数関数 $u(x, y),\ v(x, y)$ をそれぞれ

$$u(x, y) = f(x - y)\ , \qquad v(x, y) = g(x - y)$$

と定める．以下の問に答えよ.

(1) $f(x) = e^{-2x}$ であるとき，偏導関数

$$\frac{\partial u}{\partial x}\ , \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial y}$$

をそれぞれ求めよ.

(2) 2 変数関数

$$w = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{\partial u}{\partial x}$$

を v の偏導関数を用いて表せ.

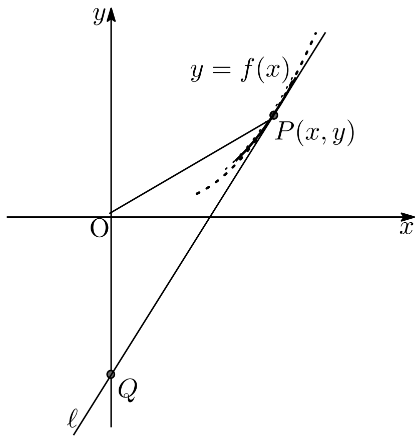
(3) a を正の実数とする．$|f(0)-1|<a$ であり，すべての x について $g(x)=a^2-1$ であるとする．このとき

$$\lim_{y\to\infty} u(x,y)$$

を求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193505)

0.90 xy 平面上の $x>0$ に微分可能な曲線 $y=f(x)$ がある．この曲線上の点 $P(x,y)$ における接線 ℓ は右図のように y 軸と交わり，その交点を Q とする．また，右図の O は原点を表す．



(1) x に関する $f(x)$ の一階微分 $f'(x)$ が $f'(x)>0$ であり，線分 $\overline{OP}$ と線分 $\overline{OQ}$ が同じ長さであるとして，x と y の関係を微分方程式で表せ．

(2) $u=\dfrac{y}{x}$ とおくことにより (1) の微分方程式を解いて，曲線 $y=f(x)$ を求めよ．
ただし，曲線は点 $(2,0)$ を通るものとする．

(大阪大 2021)　　(m20213503)

0.91 関数　$f(x)=\dfrac{1-2x+x^2}{1+x^2}$　について，次の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) 閉区間 $[0,2]$ における $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(関西大 2003)　　(m20033701)

0.92 関数 $f(x)=2^x$ について，次の問に答えよ．

(1) 導関数 $f'(x)$ と n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ をマクローリン (Maclaurin) の定理によって

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+R_{n+1}$$

の形で表すとき，a_1，a_n，剰余項 R_{n+1} を求めよ．

(神戸大 1996)　　(m19963803)

0.93 $(-\infty,\infty)$ 上で定義された実数値関数 $f(x)$ が任意の $a\leq b,\ 0<t<1$ に対し

$$f(ta+(1-t)b)\leq tf(a)+(1-t)f(b)$$

を満たすとき下に凸であるという．$f(x)$ を $(-\infty,\infty)$ 上で定義された微分可能な実数値関数とするとき，$f'(x)$ が単調増加なら $f(x)$ は下に凸であることを上の定義に基づいて示せ．

（神戸大 2001）　　(m20013802)

0.94 $f(x)=\sin^{-1}x$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f'(x), f''(x)$ を求めよ．

(2) f の n 階微分を $f^{(n)}$ と書くとき，

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+1)xf^{(n+1)}(x)-n^2f^{(n)}(x)=0$$

となることを示せ．

(3) $f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0)$ を示せ．

(4) $f^{(n)}(0)$ を求めよ.

(神戸大 2003)　　(m20033801)

0.95 微分方程式の初期値問題

$$f''(x)+f(x)=\sin x\,,\quad f(0)=f'(0)=0$$

において，

$$F(x)=f(x)\cos x-f'(x)\sin x\,,\quad G(x)=f(x)\sin x+f'(x)\cos x$$

とおく．以下の問いに答えよ.

(1) $F'(x)$, $G'(x)$ を求めよ．（f を含まない形で表せ.）

(2) $F(x)$, $G(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ を求めよ.

(神戸大 2009)　　(m20093812)

0.96

$$f(x)=\tan x-\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\quad\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

とおく．以下の問いに答えよ.

(1) $f'(x)$ を求めよ.

(2) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f(x)>0$ を示せ.

(3) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x<\tanh(\tan x)$ を証明せよ.

（ただし，任意の実数 t に対して，$\tanh t=\dfrac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$ である．）

(神戸大 2011)　　(m20113807)

0.97 $g(x)$ を $\mathbb{R}$ 上定義された 2 回微分可能な関数とし，$\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases} g(x)+x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ g(0) & x=0 \end{cases}$$

と定める．以下の問いに答えよ.

(1) $x\neq 0$ として $f'(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ は $x=0$ で微分可能であることを示し，$f'(0)$ を求めよ.

(3) $f'(x)$ は $x=0$ で微分可能でないことを示せ.

(神戸大 2013)　　(m20133806)

0.98 正の実数 x に対し $f(x)=x^{x^x}$ と定義する．$f'(x)$ を計算せよ.

(神戸大 2015)　　(m20153805)

0.99 $(-1,1)$ で定義された C^∞-級関数 $f(x)$ は次の微分方程式を満たすとする：

$$(1-x^2)f'(x)-xf(x)=1,\quad f(0)=0.$$

自然数 n に対し，$a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ とおく.

(1) a_n を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leqq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$ が成り立つことを示せ．ただし，不等式 $1-x \leqq e^{-x} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ および等式 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明せずに用いてよい．

(3) $n \to \infty$ のとき数列 $\{a_n\}$ の収束・発散を判定せよ．また，収束するときは極限値を求めよ．

(神戸大 2018)　　(m20183805)

0.100　微分可能な関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は次式で与えられる．

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

このことを用いて, 次の問いに答えなさい.

(1) $y = \log_e x$ の導関数を求めなさい. ただし，$e = \displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ とする.

(2) $y = x^n$ の導関数を求めなさい. ただし，n は正の整数とする.

（鳥取大 2004）　　(m20043901)

0.101　微分可能な関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義式　$f'(x) = \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ を用いて, 以下の微分公式を証明せよ.

(1) $y(x) = u(x)v(x)$ の微分 : $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

(2) $y(x) = \sin(x)$ の微分 : $y'(x) = \cos(x)$　ただし, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を利用してもよい.

(鳥取大 2006)　　(m20063901)

0.102　関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続な増加関数であるとき，区間 $(a,b]$ 上の関数 $F(x)$ を $F(x) = \dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)dt$　で定義する．このとき次の各問いに答えよ．

(1) $F(x)$ の x による微分 $F'(x)$ を $f(x)$ と $F(x)$ を使って表せ.

(2) 区間 $(a,b]$ において $f(x) - F(x) \geqq 0$ であることを示せ.

(3) 区間 $(a,b]$ において $F(x)$ は増加関数となることを示せ.

(4) 区間 $(0,\infty)$ で定義される関数 $F(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ は増加関数であることを示せ.

(岡山大 2007)　　(m20074002)

0.103　数直線 $(-\infty,\infty)$ 上の関数 $F(x)$ と $f(x)$ を

$$F(x) = x^2\log(1+x^2)\,,\quad f(x) = F'(x)$$

によって定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $g(x) = \displaystyle\int_0^x (tf'(t) - f(t))\,dt$ を求めよ.

(2) $f'(x) > \dfrac{f(x)}{x} > \dfrac{2F(x)}{x^2} > 0 \quad (x \neq 0)$ が成り立つことを示せ.

(3) $g(x)$ は下に凸な関数であることを示せ.

(岡山大 2009)　　(m20094001)

0.104　実数全体を定義域とする関数 $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ を考える．

(1) $f(x)^2 - f'(x)^2$ を計算せよ．

(2) $f(x)$ は単調増加であることを示せ.

(3) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ について

$$\left\{f^{-1}(x)\right\}' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

を示せ.

(岡山大 2010) (m20104001)

0.105 関数 $f(x)$, $f_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ を，閉区間 $[a,b]$ 上で微分可能であり，それらの導関数は $[a,b]$ 上で連続とし，

(i) すべての n について $\quad f_n(a) = f(a)\,,$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n'(x) - f'(x)|\,dx = 0\,,$

を満たすものとする．このとき次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ を $f(a)$ と $f'(x)$ を使って表せ.

(2) $f_n(x)$ は $f(x)$ に各点収束することを示せ.

(3) $f_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束することを示せ.

(岡山大 2012) (m20124001)

0.106 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^x \frac{t+1}{t^2+1}dt$$

により定める．以下の問いに答えよ.

(1) $f(1)$ の値を求めよ.

(2) 導関数 $f'(x)$ の $x=0$ におけるテイラー展開を求め，その収束半径を答えよ.

(3) 正の整数 n に対して，n 階微分係数 $f^{(n)}(0)$ を求めよ.

(岡山大 2013) (m20134002)

0.107 $\mathbb{R}$ 上の 2 回微分可能な関数 $f(x)$ が常に $f''(x) > 0$ を満たすとする. 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f'(x)$ は狭義単調増加であることを示せ.

(2) $x_1 < x_2 < x_3$ のとき, 次が成り立つことを示せ.

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

(3) $a < b$, $f(a) = a$ かつ $f(b) = b$ であるとする. このとき, $a < x < b$ ならば $f(x) < x$ であることを示せ.

(4) $b > 0$, $f(0) > 0$, $f(b) = b$ かつ $f'(b) > 1$ であるとする. このとき, 方程式 $f(x) = x$ は, $0 < x < b$ の範囲に解をただ一つ持つことを示せ.

(広島大 2011) (m20114101)

0.108 (1) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0), \end{cases}$ とする.

(a) $f(x)$ が $\mathbb{R}$ で微分可能であることを示せ.

(b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が $x=0$ で連続であるか否か理由もつけて答えよ.

(2) $g(x)$ は開区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の微分可能な関数とし，$a,\ b \in I$ は $a < b$ を満たすとする.

(a) $g'(a) < 0 < g'(b)$ とする．$g(x)$ は $a < \xi < b$ を満たすある $\xi \in \mathbb{R}$ で閉区間 $[a,\ b]$ での最小値をとることを示せ．また $g'(\xi)$ を求めよ．

(b) $g'(a) < k < g'(b)$ を満たす任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して，$g'(\eta) = k,\ a < \eta < b$ を満たす $\eta \in \mathbb{R}$ が存在することを示せ．

(c) $g'(x)$ が I で狭義単調増加であるならば，$g'(x)$ は I で連続であることを示せ．

(広島大 2015)　　(m20154105)

0.109　実数 x に対し，

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

と定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = \tanh x$ のグラフを描け．増減表を書き，変曲点があればすべて求めること．

(2) $|f(x)| \leq \dfrac{4}{5}$ を満たす x からなる区間を求めよ．

(3) $f''(x) + 2f(x)\Big(1 - f(x)^2\Big) = 0$ が成り立つことを示せ．

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)^2 dx$ を求めよ．

(広島大 2017)　　(m20174102)

0.110　非負整数 n に対し，

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

と定める．ただし，$0! = 1$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) x を実数とする．級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

は $4|x| < 1$ のとき絶対収束し，$4|x| > 1$ のとき発散することを示せ．

(2) $4|x| < 1$ 満たす実数 x に対し，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

と定める．このとき，

$$(1 - 4x)f'(x) = 2f(x)$$

が成り立つことを示せ．ここで，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す．

(3) $4|x| < 1$ 満たす実数 x に対し，

$$\sqrt{1 - 4x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$$

が成り立つことを示せ．

(4) 級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}$$

は ∞ に発散することを示せ．

(広島大 2021)　　(m20214105)

0.111　$f(x) = \sin(\sin(\sin x))$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(徳島大 1998)　　(m19984401)

0.112 $x \neq 0$ として，$f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{x}$ を考える．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$ を求めよ． (2) $f'(x)$ を求めよ． (3) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f'(x)$ を求めよ．

(徳島大 2007) (m20074402)

0.113 $f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ． (2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \{f'(x)\}^2$ を求めよ．

(3) $f''(x)$ を求めよ． (4) $\displaystyle\lim_{x \to 0} f''(x)$ を求めよ．

(徳島大 2008) (m20084402)

0.114 (1) $f(x)$ は微分可能で $f'(x)$ は連続とする．このとき，$\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{a^2 f(x) - x^2 f(a)}{x - a}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x + 1}$ を求める次の計算の誤りを指摘せよ．

ロピタルの定理を用いて $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x + 1} = \lim_{x \to 0} \frac{(\cos x)'}{(x + 1)'} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{1} = 0$

(徳島大 2009) (m20094402)

0.115 (1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2^x + \sin x - 3^x + 5x}{x}$ を求めよ．

(2) $f(x) = \sin^3(4x + 3)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(徳島大 2010) (m20104402)

0.116 関数 $f(x)$ は，$\sin f(x) = \cos^2 x$，$0 \leqq f(x) \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす．

(1) $f(0)$，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ をそれぞれ求めよ．

(2) $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ をそれぞれ求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{x \to +0} f'(x)$ を求めよ．

(徳島大 2018) (m20184402)

0.117 x を変数とする高々二次の多項式全体から集合を

$$P = \{a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \mid a_0,\ a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}\}$$

とする. P の元 $f(x) = b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ と $g(x) = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$ に対して加法 $f + g$ と定数倍 λf を次のように定義する.

① $(f + g)(x) = (b_2 + c_2)x^2 + (b_1 + c_1)x + (b_0 + c_0)$

② $(\lambda f)(x) = \lambda b_2 x^2 + \lambda b_1 x + \lambda b_0$

これにより P は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) P の元 x と x^2 は P において一次独立であることを示せ.

(2) P の元 $1,\ x,\ x^2$ は P の基底となることを示せ.

(3) P の任意の元 f に対して, 写像 $\varphi : P \to P$ を次で定義する.

$$\varphi(f)(x) = x f'(x)$$

ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す. このとき φ は線形写像となることを示せ.

(4) φ の核 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ と φ の像 $\mathrm{Im}(\varphi)$ を求めよ.

(高知大 2010)　　(m20104503) ,

0.118　実数直線 $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x=0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ が $x=0$ で連続であることを示せ．

(2)　$x\neq 0$ のとき，$f(x)$ の 1 階導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(3)　$f(x)$ が $x=0$ で微分可能であることを示せ．また，$f'(0)$ を求めよ．

(4)　$f'(x)$ が $x=0$ で連続でないことを示せ．

(高知大 2012)　　(m20124501)

0.119　$f(x)=\displaystyle\int_0^x \sin t^2 dt$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$f'(x)$ を求めよ．

(2)　実数 a に対して，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{e^x-e^a}$ を求めよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}$ を求めよ．

(4)　任意の実数 x に対して，$|f(x)| \leqq |x|$ を示せ．

(高知大 2012)　　(m20124502)

0.120　次の問いに答えよ．

(1)　微分可能な関数 $f(x)$ が微分可能な逆関数 $f^{-1}(x)$ を持つとする．このとき，次の式を示せ,

$$(f^{-1})'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$$

(2)　$f(x)=\tan x$ とし，$\tan x=t$ とおく．(1) を用いて次の式を示せ．

$$(f^{-1})'(t)=\frac{1}{1+t^2}$$

(3)　(2) を用いて次の式を示せ．

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{3}$$

(4)　次の値を求めよ．

$$\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}$$

(高知大 2013)　　(m20134501)

0.121　関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases} \displaystyle\int_0^{x^2}\sin\left(\frac{1}{t}\right)dt & (x\neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x=0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$x\neq 0$ のとき，$f'(x)$ を求めよ．

(2)　任意の実数 x に対して，$|f(x)| \leqq x^2$ であることを示せ．

(3) $f(x)$ は $x=0$ で微分可能かどうかを理由を挙げて答えよ.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xf'(x)$ を求めよ.

(高知大 2014)　　(m20144501)

0.122 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ とする.

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to-0} f(x)$ を求めよ.

(4) $y=f(x)$ の増減を調べて，グラフを描け.

(愛媛大 2000)　　(m20004601)

0.123 (1) 次の関数を微分せよ.

(a) $\log(1+x^4)$　　(b) $\sin^{-1} x^2$

(2) α, β を定数とし，

$$f(x)=\begin{cases} \tan^{-1} x & (x>1) \\ \beta & (x=1) \\ \alpha x-\alpha+\beta & (x<1) \end{cases}$$

とおく. ただし $\tan^{-1} x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする. 次の問いに答えよ.

(a) $f(x)$ が $x=1$ で連続になるように β を定めよ.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f'(x)=\lim_{x\to1-0} f'(x)$ となるように α を定めよ.

(愛媛大 2005)　　(m20054601)

0.124 $f(x)$ を $(0,\infty)$ 上で 2 回微分可能な関数とする. $0<a<b$ とし,

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{K}{2}(b-a)^2$$

を満たす定数を K とする.

(1) $F(x)=f(b)-\{f(x)+f'(x)(b-x)+\dfrac{K}{2}(b-x)^2\}$ とおくとき，$F'(x)$ を求めよ.

(2) $K=f''(a+\theta(b-a))$ を満たす $0<\theta<1$ が存在することを示せ.

(3) すべての $x>0$ に対して $f''(x)\geqq\delta$ を満たす定数 $\delta>0$ が存在するとき,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$$

であることを示せ.

(愛媛大 2005)　　(m20054608)

0.125 $x>-1$ で定義された関数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{3}}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の $x=0$ でのテイラー展開（マクローリン展開）を x^2 の項まで求めよ．ただし，3 次の剰余項についても $f'''(x)$ を用いて正しく書け.

(3) (2) の結果を利用して，$(8.1)^{\frac{1}{3}}$ を小数点以下 3 桁まで求めよ.

(愛媛大 2007)　　(m20074610)

0.126 (1) 次の曲線上の与えられた点 (a,b) における接線の方程式を求めよ.

(a) $y = x\log x$, $(a,b)=(e,e)$ (b) $y = \dfrac{e^{2x}-e^{-x}}{e^{3x}+e^{-2x}}$, $(a,b)=(0,0)$

(2) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x}-2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x - x}{x^3}$ ただし, $\tan^{-1}x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする.

(3) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義を述べよ. さらに, $f(x)=c$（定数関数）ならば $f'(x)=0$ であることを定義に従って示せ.

(愛媛大 2010) (m20104601)

0.127 (1) $f(x)=\tan^{-1}x+\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ とおく. ただし, $\tan^{-1}x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする.

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ. (b) $f(2)$ の値を求めよ.

(2) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{-4x}}{\sin 5x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{\log x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right)$

(愛媛大 2011) (m20114607)

0.128 (1) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$

(2) x の関数 $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ を微分せよ.

(3) $f(x)=\cos^{-1}(\sin x)$ とおく. ただし, $\cos^{-1}x$ の値域は $[0,\pi]$ とする.

(a) $f(\frac{\pi}{2})$ を求めよ.

(b) $f(x)$ を微分せよ.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}f'(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}f'(x)$ を求めよ.

(愛媛大 2013) (m20134601)

0.129 (1) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2x\tan x-\frac{\pi}{2}}{\sin x-\cos x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\log\left(\frac{x+2}{x+4}\right)$

(2) $f(x)=\sqrt{x+2}$ とする.

(a) 3 階までの導関数 $f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)$ を求めよ.

(b) 次の式

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-a_0-a_1x-a_2x^2}{x^2}=0$$

が成り立つように定数 $a_0,\ a_1,\ a_2$ を定めよ.

(愛媛大 2021) (m20214601)

0.130 多項式で表される関数 $f(x)$ について 次の (i) ∼ (iv) がわかった.

(i) $f(0)=0$

(ii) $x=-4$ および $x=2$ のみで $f'(x)=0$

(iii) $-5\le x\le 2$ について $f'(x)\ge 0$

(iv) $-4<x<0$ について $f''(x)>0$

これらの情報からわかる範囲で，区間 $[-5,\ 2]$ における $f(x)$ のグラフの概形をかけ．ただし，(i) $\sim$ (iv) の各々がどのように反映するかを文章で記述すること．

(愛媛大 2022)　　(m20224603)

0.131 $f(x)=\begin{cases} x^3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & (x>0) \\ 0 & (x\leq 0) \end{cases}$

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) 導関数 $f'(x)$ は連続であるか調べ，また，導関数 $f'(x)$ が微分可能な関数か調べよ．

(九州大 1999)　　(m19994701)

0.132 $x\neq 0$ に対して，

$$f(x)=-\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{x}$$

とおく. ただし, $\mathrm{Tan}^{-1}y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ は, $y=\tan x$ の逆関数である.

(1) $x\neq 0$ で

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

であることを示せ.

(2) 次の計算には誤りがある. 誤りの原因を指摘し, 正しい積分値を求めよ.

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\Big[f(x)\Big]_{-1}^{1}=f(1)-f(-1)=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$$

(九州大 2010)　　(m20104707)

0.133 関数 $f(x)=\sin(\log x)\quad(x>0)$ を考える．$f'(x),\ f''(x)$ をそれぞれ $f(x)$ の 1 次および 2 次の導関数とする．また，π は円周率，e は自然対数の底とする．以下の問いに答えよ.

(1) $1\leqq x\leqq e^{\pi}$ において $f'(x)=0$ となる x を求めよ.

(2) $1\leqq x\leqq e^{\pi}$ において $f''(x)<0$ となる x の範囲を求めよ.

(3) 2 点 $(1,f(1)),\ (e^{\pi/2},f(e^{\pi/2}))$ を通る直線の方程式を求めよ.

(4) $\dfrac{e^{\pi/4}-1}{e^{\pi/2}-1}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が成り立つことを示せ.

(九州大 2012)　　(m20124705)

0.134 区間 $(0,\infty)$ 上の関数　$f(x)=e^{-(\log x)^2}$　について以下の問いに答えよ.

(1) 導関数 $f'(x),\ f''(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $y=f(x)$ の増減，凹凸を調べグラフの概形を描け.

(3) 広義積分　$\displaystyle\int_0^{\infty}f(x)dx$　を求めよ.

(九州大 2019)　　(m20194705)

0.135 x の関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^1\sqrt{|\,t-x\,|}\,dt$ について，次の問に答えよ．

(1) $f(x)$ の微分 $f'(x)$ を求めよ．

(2) $-1\leq x\leq 1$ における $f(x)$ の最大・最小値を求めよ．

(九州芸術工科大 1999)　　(m19994802)

0.136 以下の問に答えよ.

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2}|2-x-x^2|dx$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int x\log x dx$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$ を証明せよ.

(4) $\displaystyle F(x)=\int_a^{-x^2} f(t)dt$ のとき，$F'(x)$ を求めよ.

（九州芸術工科大 2000） (m20004803)

0.137 $x>0$ の範囲で定義された関数 $f(x)=x^x$ について，次の問いに答えよ．ただし，計算の際は $x^x=e^{x\log x}$ と変形せよ．また，$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=1$ は既知としてよい.

(1) 導関数 $f'(x)$ を計算し，$f(x)$ の最小値を求めよ.

(2) $y=f(x)$ のグラフの概形を図示せよ.

(佐賀大 2003) (m20034904)

0.138 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ について以下の問に答えよ.

(1) 導関数 $f'(x)$ の定義を示せ.

(2) 定義に基づいて $f(x)=x^n$ (n : 自然数) の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)=x^x$ $(x>0)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

（佐賀大 2004） (m20044905)

0.139 次の問に答えよ.

(1) 三角関数の加法定理より

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

を導出せよ.

(2) 導関数の定義

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

を利用して $(\sin x)'=\cos x$ であることを示せ.

(佐賀大 2005) (m20054924)

0.140 (1) $f(x)=\exp(x)$ のとき，$f'(x)$ と $f''(x)$ はどのように表されますか.

(2) $f(x)=\exp(x)$ のとき，$f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$ はどうなりますか.

(3) マクローリンの定理は次式で表される.

$$f(x)=f(0)+f'(0)\,x+f''(0)\,x^2/2!+\cdots$$
$$\cdots+f^{(n-1)}(0)\,x^{n-1}/(n-1)!+f^{(n)}(\theta x)\,x^n/n! \quad (0<\theta<1)$$

$f(x)=\exp(x)$ をマクローリンの定理を用いて第 4 項まで示しなさい.

（マクローリン展開）ただし，$\exp(x)=e^x$ である.

(4) 上記のマクローリン展開を第 4 項まで計算して，$\exp(1)$ を小数点以下 2 桁まで求めなさい.

(佐賀大 2007) (m20074902)

0.141 (1) 導関数の定義 $\displaystyle f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ を利用して $\left(\sqrt{2x}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ であることを示せ.

(2) $x = 3\sin t$ として $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算せよ.

(佐賀大 2009) (m20094910)

0.142 積分に関する, 以下の問いに答えよ. ただし, $\sin^{-1} x$ は $\sin x$ の逆関数とする.

(1) $\left(x\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1} x\right)' = 2\sqrt{1-x^2}$ を示せ.

(2) $f(x) = x^2 \sin^{-1} x$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(3) 不定積分 $\displaystyle\int x\,\sin^{-1} x\,dx$ を求めよ.

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{1/2} x\,\sin^{-1} x\,dx$ を計算せよ.

(佐賀大 2010) (m20104910)

0.143 3 次関数 $f(x)$ が次の条件を満たすとき, $f(x)$ を求めなさい. ただし, $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である.

$$f(-2) = 0\,, \qquad f(0) = 0\,, \qquad f'(1) = -5\,, \qquad f'(-1) = -1\,.$$

(佐賀大 2010) (m20104925)

0.144 次の関数 $f(x)$ の微分 $f'(x)$ を計算せよ.

(1) $f(x) = \dfrac{x^4+x^2+1}{x+1}$ (2) $f(x) = e^{\sin x}\cos(2x)$

(佐賀大 2012) (m20124911)

0.145 次の関数 $f(x)$ の微分 $f'(x)$ を計算せよ.

(1) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ (2) $f(x) = x\log_{10} x$

(佐賀大 2014) (m20144901)

0.146 $a > 0$ の範囲で定義された関数 $f(x) = x + \sqrt{a^2+x^2}$ について以下の問に答えよ.

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(2) $\sqrt{a^2+x^2}$ を $f(x)$ と $f'(x)$ で表せ.

(3) 定積分 $I = \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ を計算せよ.

(4) 定積分 $J = \displaystyle\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2+x^2}dx$ を (3) で求めた I を用いて表せ.

(長崎大 2005) (m20055003)

0.147 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ の第 2 階導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(3) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ をマクローリン展開し, 2 次の項まで求めよ.

(長崎大 2011) (m20115009)

0.148 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$$

と定義する.

(1) $f(x)$ の 1 次から 4 次までの導関数 $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$ を求めなさい.

(2) $f(x)$ の $x=0$ における 1 次から 4 次までの微分係数 $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$, $f^{(4)}(0)$ を求めなさい.

(3) $f(x)$ のマクローリン級数展開を 4 次の項まで求めなさい.

(大分大 2012)　　(m20125107)

0.149 以下の問に答えよ.

(1) x の関数 $f(x)$, $g(x)$ について，以下の部分積分法の公式
$\displaystyle\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$
が成り立つことを示せ.

(2) 上記の公式を利用して，不定積分 $\displaystyle\int \log x\, dx$ を求めよ.

(3) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とする．このとき，$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$ であることを示せ.

(4) 前問の結果を利用して，不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$ を求めよ.

(鹿児島大 2011)　　(m20115401)

0.150 x の n 次多項式関数 $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n$ について，以下の問題に答えなさい．ただし，a_0，a_1，a_2，$\cdots$ ，a_n，a は，定数とする．また，必要に応じて，階乗記号 $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ を用いてよい.

(1) $f(x)$ の 1 階導関数 $f'(x)$，2 階導関数 $f''(x)$，3 階導関数 $f'''(x)$，n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ を計算しなさい.

(2) $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ が成立することを示しなさい.

(鹿児島大 2012)　　(m20125425)

0.151 (1) 次の微分を計算せよ.
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

(2) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(3) $f(x) = 3x^3+1$, $g(x) = x^4-5$ に対する合成関数 $h(x) = f(g(x))$ および $k(x) = g(f(x))$ の導関数 $h'(x), k'(x)$ をそれぞれ求めよ.

(室蘭工業大 2010)　　(m20105501)

0.152 関数
$$f(x) = a^2x^2 - b(x+1) + \sin ax + \cos ax$$
について, 以下の設問に答えよ. ただし, a, b は実数である.

(1) 第 1 次導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を導け.

(2) 全ての実数 x に対し, $f''(x) > 0$ であることを示せ.

(3) 設問 (2) の結果から, $f'(x)$ は増加関数であることがわかる. このとき, 領域 $x>0$ において, $f'(x) > 0$ が成立するためには a と b の間にどのような関係があればよいか. 関係式を導け.

(4) 設問 (3) の条件のもとで, 領域 $x>0$ において $f(x)>0$ が成立するためには, さらにどのような条件が必要か.

(島根大 2005)　　(m20055808)

0.153 関数 $f(x)=(ax+b)e^{cx} \quad (c \neq 0)$ を考える. 以下の問に答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$, 2 階導関数 $f''(x)$, さらに n 階導関数 $f^{(n)}(x) \ \ (n=1,2,\cdots)$ を求めよ.

(3) $0<c<1$ のとき , $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nc^n = 0$ を証明せよ.

$\left(\text{ヒント : } c=\dfrac{1}{1+\alpha} \quad (\alpha>0) \quad \text{とおいて} \ (1+\alpha)^n \ \text{の 2 項展開を考えよ.} \right)$

(4) $0<c<1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x)+f'(x)+f''(x)+\cdots+f^{(n)}(x)\right)$$

を求めよ.

(島根大 2005) (m20055811)

0.154 (1) 関数 $f(x)=(x+1)e^{-2x}$ について, $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ. また, 3 以上の整数 n に対して第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $y=x^x \ (x>0)$ の極値を求めよ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx$ の値を求めよ.

(4) 曲線 $y=x\cos x \ \left(0 \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2}\right)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ.

(島根大 2009) (m20095802)

0.155 (1) $f(x)=\sin^{-1}x \quad (-1<x<1)$ とするとき, $f'(x),\ f''(x),\ f^{(3)}(x)$ を求めよ.

(2) 設問 (1) の結果を用いて $f(x)$ を x^3 の項まで $x=0$ のまわりにおいてべき級数展開せよ.

(3) 設問 (2) の結果を用いて $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}x}{x}$ および $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}x-x}{x^3}$ の値を求めよ.

(島根大 2010) (m20105808)

0.156 以下の各設問に答えよ. ただし, x は実数とする.

(1) 関数 $f(x),\ g(x)$ を $f(x)=x-\tan^{-1}x$, $g(x)=x-x\sin x$ と定義する. 以下の問いに答えよ.

(a) 導関数 $f'(x)$, 第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(b) 導関数 $g'(x)$, 第 2 次導関数 $g''(x)$ を求めよ.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}$ の値を求めよ.

(2) 関数 $y(x)$ を $y(x)=(x^2+1)e^{-x}$ と定義する. 以下の問いに答えよ.

(a) 導関数 $y'(x)$, 第 2 次導関数 $y''(x)$ を求めよ.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x)=0$ であることを示せ.

(c) $y'(x)$, および $y''(x)$ の符号を用いて, 関数 $y(x)$ の増減表を作成せよ. また, 関数 $y(x)$ のグラフの概形をかけ.

(島根大 2012) (m20125801)

0.157 $f(x)$ は実数全体で定義された以下の条件 $(*)$ を満たす関数とする.

$$(*) \quad f''(x)=f(x)\,, \quad f(0)=1,\ f'(0)=0$$

次の問いに答えよ.

(1) $\left(f(x)\right)^2-\left(f'(x)\right)^2=1$ を証明せよ.

(2) $f(x)$ を求めよ.

(3) 関数 $f(x)$ と $f'(x)$ のグラフの概形をかけ.

(4) 自然数 n に対し，$f^{(n)}(0)$ の値を求め，さらに $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ.

(島根大 2013) (m20135802)

0.158 関数 $f(x) = \arcsin x$ $(-1, x < 1,\ -\pi/2 < y < \pi/2)$ に関する次の問いに答えよ.

(1) 逆関数の微分法を用いて $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を証明せよ.

(2) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ.

(3) $f^{(n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次導関数とする．ただし $f^{(0)}(x) = f(x)$ である．このとき，0 以上の整数 n に対し，

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (1+2n)xf^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0$$

が成り立つことを証明せよ.

(4) $f(x) = \arcsin x$ のマクローリン展開を 5 次の項まで求めよ.

(島根大 2015) (m20155806)

0.159 (1) $f(x)$ は $(-\infty,\ +\infty)$ で定義された連続関数とする．$F(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)dt$ とおくとき，導関数 $F'(x)$ を $f(x)$ を用いて表せ.

(2) $f(x)$ は $(-\infty,\ +\infty)$ で定義された下に凸な連続関数とする．このとき，すべての $x > 0$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ.

$$2xf(0) \leqq \int_{-x}^{x} f(t)dt$$

(島根大 2019) (m20195806)

0.160 次の微分方程式について，以下の設問に答えよ.

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + 2\frac{df(x)}{dx} - 8f(x) + g(x) = 0$$

(1) 関数 $g(x) = 0$ の場合において，微分方程式を満たす関数 $f(x)$ の一般解を求めよ.

(2) 関数 $g(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-x}$ の場合において，微分方程式を満たす関数 $f(x)$ の一般解を求めよ.

(3) 設問 (2) において，$x = 0$ のときの関数 $f(x)$ およびその 1 階導関数 $f'(x)$ の値がそれぞれ次のように与えられたとき，関数 $f(x)$ を求めよ.

$$f(0) = -\frac{1}{18},\ f'(0) = \frac{13}{18}$$

(4) 設問 (3) において求めた関数 $f(x)$ を x の 2 次の項までマクローリン展開せよ.

(島根大 2020) (m20205801)

0.161 関数 $f(x) = x^2 \log_e \dfrac{1}{x^2}$ について以下の問に答えよ．ただし，e は自然対数の底である.

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の最大値を求めよ.

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ を求めよ

(首都大 2004) (m20045904)

0.162 関数 $f(x)$ の導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

にしたがって，$f(x) = \sin x$ の導関数が $f'(x) = \cos x$ であることを示せ.

(滋賀県立大 2008)　　(m20086001)

0.163 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(x,\, y)$ と点 $(x+dx,\, y+dy)$ の間の無限小長さ ds は

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

によって与えられる. さらに, 曲線に沿って $a \leq x \leq b$ の長さ L_1 は, 次の式で与えられる.

$$L_1 = \int_a^b \sqrt{1 + \bigl(f'(x)\bigr)^2}\, dx$$

(1) 曲線がパラメータ t によって

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

のように表されるとき、パラメータ $\alpha \leq t \leq \beta$ に対応する曲線の長さ L_2 が

$$L_2 = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

で与えられることを示せ.

(2) 次のパラメータ t によって表される曲線 $C : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \dfrac{1}{3}t^3 \end{cases}$ $(0 \leq t \leq 2)$ の長さを求めよ.

(滋賀県立大 2010)　　(m20106001)

0.164 曲線 $C : y = f(x)$ に沿って $0 \leqq x \leqq a$ の間の長さ $L(C)$ は，次の式で与えられる.

$$L(C) = \int_0^a \sqrt{1 + \Bigl(f'(x)\Bigr)^2}\, dx$$

特に，曲線 C を懸垂線またはカテナリーと呼ばれる次の式で表される曲線とする.

$$C \,:\, y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

この懸垂線に沿っての $0 \leqq x \leqq a$ の間の長さ $L(C)$ を求めよ.

(滋賀県立大 2013)　　(m20136001)

0.165 以下の問に答えよ.

(1) $f : (x, y) \longrightarrow (2x, -x+y)$ において線形変換 f が与えられているとき，f をあらわす行列 A を求めよ.

(2) $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & f(x) & f'(x) & f''(x) \\ 1 & g(x) & g'(x) & g''(x) \\ 1 & h(x) & h'(x) & h''(x) \\ 1 & k(x) & k'(x) & k''(x) \end{vmatrix}$ について，$\dfrac{dD(x)}{dx}$ を求めよ。

（ただし，$f(x)$ は x の関数，$f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}, f''(x) = \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$，$g(x), h(x), k(x)$ についても同様）

(宇都宮大 2004)　　(m20046102)

0.166 関数 $f(x)$ の導関数は次のように定義される．

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

この定義に従って次の関数の導関数を求めなさい．導く過程も示しなさい．

(1) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

(東京海洋大 2013)　　(m20136403)

0.167 関数 $f(x)$ の導関数は次のように定義される．

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

この定義に従って次の関数の導関数を求めなさい．導く過程も示しなさい．

(1) $f(x) = x^2 - 4x + 8$　　(2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

(東京海洋大 2017)　　(m20176403)

0.168 次の定積分を求めなさい．ただし，e は自然対数の基底である．

$$\int_0^2 x^2 e^x dx$$

なお，解答に際して，$f'(x)$, $g'(x)$ を，それぞれ，$f(x)$, $g(x)$ の一階導関数とするとき，

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

を用いてよい．

(和歌山大 2017)　　(m20176503)

0.169 関数 $f(x) = e^x \sin x$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(東京工科大 2010)　　(m20106902)

0.170 関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が，条件 $f(0) = -3$, $f(1) = -\dfrac{9}{4}$, $f'(2) = 10$, $f'(3) = 20$ をすべて満たすとする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする．

(1) a, b, c, d の値を求めよ．

(2) $y = f(x)$ の極値を求め，そのグラフをかけ．

(3) $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(富山県立大 2017)　　(m20177103)