[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　$f''\ (x)$

0.1　関数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　$f'(x)$ および $f''(x)$ を計算せよ．

(2)　関数 $f(x)$ の増減を調べよ．

(3)　曲線 $y = f(x)$ の概形を描け．

(北見工業大 2009)　　(m20090201)

0.2　$f(x) = \sqrt{x}\log x \quad (x \geq 0)$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1)　$f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ．

(2)　$\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$ を求めよ．

(3)　$f(x)$ の最小値を求めよ．

(4)　$y = f(x)$ のグラフの概形を描け．

(岩手大 1997)　　(m19970301)

0.3　関数 $f(x)$ の $x = a$ を中心とするテイラー展開は以下のように与えられる．

$$f(x) \sim f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots$$

ただし, $f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の第 n 次導関数 $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ を表す. また, $f'(x)$ および $f''(x)$ は $f(x)$ の導関数 $\dfrac{df}{dx}$ および第 2 次導関数 $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ をそれぞれ表す. 特に, $-1 < x < 1$ に対する関数 $\dfrac{1}{1-x}$ および $-\infty < x < \infty$ に対する関数 e^x の $x = 0$ を中心とするテイラー展開はそれぞれ次のように与えられる.

$$\frac{1}{1-x} \sim \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad , \qquad e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

x を実数とし, 関数 $g(x)$ と $h(x)$ を

$$g(x) = e^{x^2} \qquad , \qquad h(x) = \frac{e^{x^2}}{2-x}$$

と定義する.

(1)　$g(x)$ の $x = 0$ を中心とするテイラー展開を求めよ.

(2)　問 (1) の結果を用いて, $h(x)$ の $x = 0$ を中心とするテイラー展開の x^2 の項までを求めよ.

(3)　$h(x)$ の導関数 $h'(x)$ を求めよ.

(4)　$y = h(x)$ の $-\infty < x < \infty$ における発散する点, 極値を与える点に注意して, グラフの概略を描け.

（東北大 2004）　　(m20040502)

0.4　x を実数として, 関数 $f(x)$ を　$f(x) = x^2 e^{ax}$　と定義する. ただし, a は負の定数である.

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$, 第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(2)　$x \to +\infty$ のとき, $f(x)$ の極限 $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$ を求めよ.

(3)　$f(x)$ の増減 , 極値 , グラフの凹凸 , 変曲点を調べ, 増減表を書き, $y = f(x)$ の概形を描け.

(東北大 2005)　　(m20050502)

0.5 x を実数として, 関数 $f(x)$ は微分方程式

$$f''(x) - f(x) = 0$$

の解であり, 初期条件「$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$」を満たすものとする. さらに, この微分方程式の解 $f(x)$ から関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \int_0^x tf(t)dt$$

により定義する.

(1) 与えられた微分方程式の解 $f(x)$ を求めよ.

(2) $g(1)$ および $g(-1)$ を求めよ.

(3) 関数 $h(x)$ を

$$h(x) = \frac{d}{dx}\int_{-x}^{x^2} g(t)dt$$

により定義する. このとき, $h(1)$ を求めよ.

(東北大 2005) (m20050503)

0.6 x を実数とし, 関数 $f(x)$ を $f(x) = x - \sin x$ と定義する. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(2) $f'(x) = 0$ を満たすすべての実数 x および $f''(x) = 0$ を満たすすべての実数 x をそれぞれ求めよ.

(3) 関数 $y = f(x)$ の区間 $-2\pi \leqq x \leqq 2\pi$ における増減, 極値, グラフの凹凸, 変曲点を調べ, 増減表を書き, グラフの概形を描け.

(4) 任意の実数 x について不等式 $|x| \geqq \sin|x|$ が成り立つことを証明せよ.

(東北大 2006) (m20060502)

0.7 x を実数とし, 関数 $f(x)$ を $f(x) = e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2}$ と定義する.

(1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(2) $f'(x) = 0$ を満たすすべての実数 x および $f''(x) = 0$ を満たすすべての実数 x をそれぞれ求めよ.

(3) 関数 $y = f(x)$ の区間 $-5 \leqq x \leqq 5$ における増減, 極値, グラフの凹凸, 変曲点を調べ, 増減表を書き, グラフの概略を描け.

(4) 関数 $g(x)$ を $g(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-x+2}^{x}(t-1)(t-3)f(t)dt$ により定義する. このとき, $g(2)$ を求めよ.

(東北大 2008) (m20080501)

0.8 平均値の定理は次のように書くことができる.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \theta h), \quad 0 < \theta < 1$$

次の各関数に対して θ を x と h の関数として表せ.

(1) $f(x) = x^2$ (2) $f(x) = x^3$ (3) $f(x) = e^x$ (4) $f(x) = \log x$ $(x > 0)$

$x \neq 0$ で固定したときに各関数について, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\theta$ を求めよ.

一般に $f(x)$ が C^2 級の関数で $f''(x) \neq 0$ のとき $\displaystyle\lim_{h\to 0}\theta$ の値は定まるかどうか調べよ.

（お茶の水女子大 2000） (m20000603)

0.9 関数 $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ について以下の問に答えよ.

(1) $f'(x),\ f''(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の極点，変曲点，凹凸を調べグラフを描け.

(東京農工大 1996)　　(m19960901)

0.10 関数 $f(x) = \exp\left[-\dfrac{(x-a)^2}{2}\right]$ について，次の問いに答えなさい.

(1) $f(x)$ の 1 次導関数 $f'(x)$ を求め，$f'(x) = 0$ となる x の値を示せ.

(2) $f(x)$ の 2 次導関数 $f''(x)$ を求め，$f''(x) = 0$ となる x の値を示せ.

(筑波大 2006)　　(m20061304)

0.11 関数 $f(x) = x \cdot \ln x \quad (x > 0)$ について，以下の設問に答えよ.

(1) $f'(x)\,,\ f''(x)$ を求めよ.　　(2) 関数 $f(x)$ の極値と増減を求めよ.

(3) $x \to +0$ および $x \to +\infty$ における関数 $f(x)$ の極限値を求めよ.

(4) 関数 $f(x)$ のグラフの概形を示せ.

曲線 $y = x \cdot \ln x$ と x 軸と $x = a \quad (0 < a < 1)$ とで囲まれた部分の面積を $S(a)$ とおく.

(5) $S(a)$ を求めよ.　　(6) $S(a)$ の極限値 $\displaystyle\lim_{a \to +0} S(a)$ を求めよ.

参考： グラフの描画には自然対数の底として $e = 2.72$ の値を用いなさい.

(筑波大 2007)　　(m20071314)

0.12 次の微分方程式 (D) について (1) から (3) に答えなさい.

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0 \qquad \cdots\cdots \quad (D)$$

(1) $f'(x) = f(x)$ または $f'(x) = 2f(x)$ ならば，$f(x)$ は微分方程式 (D) の解であることを示しなさい.

(2) $f(x) = e^x$ および $f(x) = e^{2x}$ は微分方程式 (D) の解であることを示しなさい.

(3) 微分方程式 (D) の任意の解 $f(x)$ は，ある実数 a, b を用いて $f(x) = ae^x + be^{2x}$ と一意的に表せることを示しなさい.

(筑波大 2008)　　(m20081326)

0.13 $f(x)$ は何回でも微分可能で，$f'(x) = -xf(x)$ を満たすとき，以下の問いに答えよ.

(1) $f''(x)$ を，$f(x)$ を用いて表せ.　　(2) $f(0) = 1$ のとき，$f(x)$ を求めよ.

(筑波大 2008)　　(m20081339)

0.14 Newton 法は方程式 $f(x) = 0$ を満たす解 x の近似解を数値的に求める手法の 1 つである．具体的な手順は，以下の通りである．まず，漸化式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

を構成する．ここで，$f'(x_n) = \dfrac{d}{dx}f(x_n) \neq 0$ とする． 次に，この漸化式を適当な初期値 x_0 の下で解き，数列 $x_1,\ x_2,\ \cdots$ を計算する． 解が存在する場合には，その収束値 x_∞ は $f(x_\infty) = 0$ を満たす. 上述の Newton 法に関して，以下の設問に答えよ.

(1) Newton 法で x_0 から x_1 を求めることは，点 $(x_0,\ f(x_0))$ における $y = f(x)$ の接線と x 軸の交点を求めることになっている．これを示せ.

(2) Newton 法の漸化式から得られる数列 $\{x_n\}$, $n=0,\ 1,\ \cdots$ は，初期値 x_0 が $f(x)=0$ の解の近傍にあるときに収束し，その収束値は $f(x)=0$ の解を与える．これを以下の＜定理＞を用いて示せ．ただし，$f'(x)\neq 0$ かつ $f''(x)=\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ は連続であるとする．

＜定理＞

関数 $\varphi(x)$ が閉区間 I で微分可能で，$\varphi(x)$ の値域は I に含まれ，I では

$$\left|\frac{d}{dx}\varphi(x)\right| \leq k < 1$$

であるとする．このとき，反復法 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ によって方程式 $x=\varphi(x)$ のただ 1 つの根 x_∞ が得られる．

(筑波大 2018)　　(m20181306)

0.15 $f(x)=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ とする．

(1) $(1+x^2)f''(x)+xf'(x)=0$ が成り立つことを示せ．

(2) 非負整数 n に対し，

$$(1+x^2)f^{(n+2)}(x)+(2n+1)xf^{(n+1)}(x)+n^2f^{(n)}(x)=0$$

が成り立つことを示せ．

(埼玉大 2009)　　(m20091406)

0.16 関数 $f(x)=\sqrt{x}-\log x\quad(x>0)$ を考える．ただし，対数関数は自然対数によるものとする．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい．

(2) $f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めなさい．

(3) $f(x)$ の極小値を求めなさい．

(山梨大 2009)　　(m20091803)

0.17 $f(x)$ は区間 $[a,b]$ 上で 2 回連続微分可能な関数であり, $f(a)=f(b)=0$, $|f''(x)|\leq M\ \ (x\in[a,b])$ を満たすとする. このとき, $|f(x)|\leq M(b-a)^2\ \ (x\in[a,b])$ となることを示せ.

(信州大 2003)　　(m20031904)

0.18 次の問に答えよ．

(1) $[a,b]$ を含む開区間上で定義された 2 回微分可能な関数 $f(x)$ が $[a,b]$ 上で $f''(x)>0$ となるとする．$0<h<b-a$ となる h をとるとき $[a,b-h]$ で定義される関数 $g(x)=f(x+h)-f(x)$ は増加関数となることを平均値の定理を用いて示せ．

(2) 曲面 $z=y^2-x^2$ 上の点 $(1,2,3)$ における接平面の方程式を求めよ．

(信州大 2004)　　(m20041902)

0.19 閉区間 $[0,1]$ で定義された連続関数 $f(x)$ が開区間 $(0,1)$ で 2 回微分可能で，次の 2 つの条件

(i) $f(0)=f(1)=0$

(ii) すべての $0<x<1$ に対して

$$(1-x)f'(x)=1-x-2x\int_1^x\frac{f(t)}{t^3}dt-\frac{f(x)}{x}$$

を満たしているとする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $f''(x)$ を x の有理式で表せ.

(2) $f(x)$ を求めよ.

(信州大 2019)　　(m20191901)

0.20 関数 $f(x)$ は開区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ において,

$$f(x) = \log \cos x$$

で定義されているとする. このとき, 次に問いに答えよ. ただし, 対数は自然対数である.

(1) $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の 2 次までのマクローリン展開を求めよ. また, 剰余項 $R_3(x)$ を求めよ.

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \cos^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ を求めよ.

(信州大 2023)　　(m20231901)

0.21 $f(x)$ はすべての実数で定義された何回でも微分可能な関数で, $f(0) = 1, f'(0) = -1, f''(0) = 1$ かつ相異なる実数 u, v に対して等式

$$\frac{f(u) - f(v)}{u - v} = f'(\frac{u+v}{2})$$

を満たしているものとする. このとき次の問いに答えよ.

(1) 任意の実数 x, y $(y \neq 0)$ に対して,

$$f(x+y) - f(x-y) = 2f'(x)y$$

が成り立つことを示せ.

(2) 任意の実数 x, y $(y \neq 0)$ に対して,

$$f''(x+y) = f''(x-y)$$

が成り立つことを示せ. さらに $f''(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ を求めよ.

(新潟大 1998)　　(m19982002)

0.22 閉区間 $[a, b]$ を含むある開区間上で定義された実数値関数 $f(x)$ が 2 回連続微分可能で, 任意の点 $x \in [a, b]$ において, $f''(x) \geq 0$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 任意の $c \in [a, b]$ に対して, 次の不等式が成立することを証明せよ.

$$(b-c)f(a) + (c-a)f(b) \geq (b-a)f(c)$$

(2) (1) の不等式で, 真に不等号 $>$ が成立するのはどんな場合か.

(3) 上の結果を用いて, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき, $\sin x > \dfrac{2}{\pi}x$ となることを示せ.

(新潟大 1999)　　(m19992001)

0.23 関数 $f(t)$ は 2 回連続的微分可能で, $f(t), f'(x), f''(x)$ は有界とする.

$s > 0$ に対して $g(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ とするとき, 次の問に答えよ.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f''(x)\, dt = s^2 g(s) - sf(0) - f'(0)$ を示せ.

(2) ω は定数とする. $f(t) = \sin \omega t$ のとき, $g(s)$ を求めよ.

(金沢大 1999）　(m19992212)

0.24 関数 $f(x)=\log(1+x)$, $x>-1$ について，次の問いに答えよ．ただし，log は自然対数とする．

(1) $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ にマクローリンの定理を当てはめ，次の不等式を証明せよ．

$$\left|\log 1.1-0.095\right|<\frac{1}{3000}$$

(金沢大 2002)　(m20022201)

0.25 $f(x)=\sqrt{1+x}$ $(x>-1)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$, $f''(x)$ および $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(2) マクローリンの定理を適用し，$f(x)$ の $(n-1)$ 次近似多項式およびその剰余項 R_n を求めよ．

(3) (2) で得られた結果を $n=2$ の場合に用いて，$\sqrt{1.01}$ の近似値を 1.005 としたときの誤差を評価せよ．

(金沢大 2008)　(m20082202)

0.26 関数 $f(x)$ が $f(0)=0,\ f'(0)=1$ および微分方程式

$$(1-x^2)f''(x)=xf'(x) \qquad (-1<x<1)$$

を満たしている. 次の問いに答えよ.

(1) $m=1,2,3,\cdots$ について

$$(1-x^2)f^{(m+2)}(x)-2mxf^{(m+1)}(x)-m(m-1)f^{(m)}(x)=xf^{(m+1)}(x)+mf^{(m)}(x)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $m=2,3,4,\cdots$ について

$$f^n(0)=(n-2)^2f^{(n-2)}(0)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$f^{(0)}(x)=f(x)$ とする．

(3) $f(x)$ は区間 $-1<x<1$ でマクローリン級数に展開できるとする．その級数が

$$f(x)=x+\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

となることを示せ．ただし，$(2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)(2n)$, $(2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)(2n-1)$ である.

(金沢大 2012)　(m20122202)

0.27 関数 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$ $(|x|<1)$ について，次の問いに答えよ.

(1) $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ を求めよ.

(2) $(x-x^3)f''(x)=f'(x)$ を示せ.

(3) $f^{(n)}(0)$ を求めよ.

(金沢大 2015)　(m20152202)

0.28 (1) R 上の滑らかな関数 $f(x)$ がつねに $f''(x)\geqq 0$ を満たすならば，任意の $a,b\in R$ と任意の $t\in[0,\ 1]$ に対して

$$f((1-t)a+tb)\leqq (1-t)f(a)+tf(b)$$

が成り立つことを示せ.

(2) R^2 上の滑らかな関数 $g(x_1,x_2)$ が任意の点 $P=(p_1,p_2)$ と任意のベクトル $\boldsymbol{v}=(v_1.v_2)$ に対して

$$\frac{\partial^2 g}{\partial {x_1}^2}(P)v_1^2+2\frac{\partial^2 g}{\partial x_1\,\partial x_2}(P)v_1v_2+\frac{\partial^2 g}{\partial {x_2}^2}\geqq\ 0$$

を満たすならば，任意の 2 点 $P=(p_1,p_2)$, $Q=(q_1,q_2)$，および任意の $t\in[0,\ 1]$ に対して

$$g((1-t)P+tQ)\leqq\ (1-t)g(P)+tg(Q)$$

が成り立つことを示せ.

(金沢大 2015)　　(m20152207)

0.29 関数 $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x} & (x>0\text{ のとき}) \\ 0 & (x\leqq 0\text{ のとき}) \end{cases}$ について，次の問いに答えよ.

(1) $x>0$ に対し，$f'(x)$ と $f''(x)$ を計算せよ.

(2) 正の整数 n に対し，$\displaystyle\lim_{y\to\infty} y^n e^{-y}=0$ を示せ.

(3) $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$ であることを示せ.

(金沢大 2017)　　(m20172207)

0.30 (1) 任意の非負整数 $n=0,1,2,\cdots$ に対して

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$$

が成り立つことを示せ.

(2) 次の関数 $f(x)$ は $x=0$ で微分可能であることを示せ.

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

(3) (2) の関数 $f(x)$ は $\boldsymbol{R}$ 上で 2 回微分可能であり，2 階導関数 $f''(x)$ は $x=0$ で連続であることを示せ.

(4) 関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け.

(金沢大 2018)　　(m20182203)

0.31 以下の各問いに答えよ．ただし，a, k, L は定数とする.

(1) $g'(t)=-ak^2g(t)$ の一般解を求めよ.

(2) $f''(x)=-k^2f(x)$ の一般解を求めよ.

(3) (1)，(2) の解を合成した $y(x,t)=f(x)g(t)$ が $(*)$ を満たすことを示せ.

$$\frac{\partial y}{\partial t}=a\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\qquad\cdots(*)$$

(4) $(*)$ 式において，$y(0,t)=y(L,t)=0\quad(t>0)$ を満たす，y の一般解を求めよ.

(富山大 2022)　　(m20222305)

0.32 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1-2x}$ のマクローリン展開を，次の順序に従い求めよ.

(1) $f'(x)$, $f''(x)$ および $f'''(x)$ を計算せよ.

(2) 一般項 $f^{(n)}(0)$ を推定せよ（答のみでよい）.

(3) (2) の結果を用いて，関数 $f(x)$ を $x=0$ で無限級数にテーラー展開せよ.

(福井大 2007)　　(m20072402)

0.33 (1) 関数 $f(x)=\log(1+x)$（ただし $x>-1$）の 1〜4 階の導関数（つまり $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, および $f^{(4)}(x)$ ）をそれぞれ求めよ.

(2) (1) の結果にもとづき, 上で定義された関数 $f(x)$ の n 階の導関数を推測し, $f^{(n)}(x)$ が実際に推測された関数で表現されることを, 数学的帰納法を用いて証明せよ.

(3) (2) の結果を使い, 関数 $f(x)$ のマクローリン展開（$x=0$ でのテーラー展開）を, 無限級数の和の形 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \text{の形}\right)$ で求めよ,

(4) (3) の結果を用いて, 関数 $g(x)=\log\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)$（ただし $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$）のマクローリン展開を, 無限級数の和の形で求めよ（経過を書く必要はあるが, 証明の必要はなし）.

(福井大 2008)　　(m20082401)

0.34 関数 $f(x)=(x^2+4x)e^{-x}$ について以下の問いに答えよ.

(1) 1 階の導関数 $f'(x)$, 2 階の導関数 $f''(x)$ と $\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) $0\le x<\infty$ の範囲で増減表を書き, $y=f(x)$ のグラフを描け.

(福井大 2008)　　(m20082402)

0.35 (1) 平均 0, 分散 1 の正規分布 $f(x)$ に関する以下の問に答えよ.

(a) $f(x)$ の極大点における x と $f(x)$ の値を求めよ. また, $f(x)$ の変曲点 ($f''(x)=0$) における x と $f(x)$ の値を求めよ.

(b) $f(x)$ のグラフを図示せよ.

(2) 確率変数 X と Y に関する以下の問に答えよ.

(a) 任意の実数 λ に対して次の関係が成り立つことを示せ.

$$E[\{\lambda(X-\mu_x)+(Y-\mu_y)\}^2]=\lambda^2\sigma_x^2+2\lambda\sigma_{xy}+\sigma_y^2$$

ここで, $E[X]$ は X の期待値を表し,

$$\begin{aligned}
&\mu_x=E[X]\\
&\mu_y=E[Y]\\
&\sigma_x^2=E[(X-\mu_x)^2]\\
&\sigma_y^2=E[(X-\mu_y)^2]\\
&\sigma_{xy}=E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]
\end{aligned}$$

とする.

(b) $E[\{\lambda(X-\mu_x)+(Y-\mu_y)\}^2]\ge 0$ となることを示せ.

(c) (a) , (b) の関係を利用して相関係数 ρ_{xy} が -1 から 1 の間の値を取ることをとる示せ. ただし, $\sigma_x^2\sigma_y^2\ne 0$ とする.

(三重大 2004)　　(m20043115)

0.36 微分可能な関数 $f(x)$ が, $f(x)=\cos^2(x)+\displaystyle\int_0^x f(t)\{\sin(x)\cos(t)-\sin(t)\cos(x)\}\,dt$ を満たすとき, 以下の問に答えなさい.

(1) 与式の両辺を微分して $f'(x)$ を求めなさい.

(2) $f''(x)$ を求めなさい.

(3) $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ をそれぞれ求めなさい.

(4) 問 (1)〜(3) の結果を用いて, $\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx$ を求めなさい.

(三重大 2014)　　(m20143101)

0.37 n を 2 以上の自然数とし, 多項式 $f(x)=(x+1)^n$ と $g(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ を考える.（ただし, c_k は定数）

(1) $f'(x)$, $g'(x)$, $f''(x)$ および $g''(x)$ を求めよ.

(2) $f'(0)-g'(0)$ および $f''(0)-g''(0)$ を求めよ.

（奈良女子大 2004）　　(m20043202)

0.38 (1) 2 回微分可能な関数 $F(x)$ に対し，不定積分に関する関係式

$$\int (F''(x)+F(x))\sin x dx = F'(x)\sin x - F(x)\cos x + C$$

を示せ．ただし，C は任意定数とする．

(2) n を 3 以上の自然数とする．微分方程式

$$y'+y=e^{-x}\left\{x^n+n(n-1)x^{n-2}\right\}\sin x$$

の解 $y=y(x)$ で条件 $y(0)=0$ を満たすものを求めよ.

(京都工芸繊維大 2017)　　(m20173405)

0.39 (1) 関数 $f(x)$ は，任意の実数 x に対して 2 次導関数 $f''(x)$ が存在して $f''(x) \geqq 0$ を満たすとする. $x_1 < x_2$ として次の問いに答えよ.

(a) $x_1 < x_3 < x_2$ を満たす任意の x_3 に対して，次の不等式が成立することを示せ.

$$\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leqq \frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}$$

(b) $0 \leqq \alpha \leqq 1$ を満たす任意の α に対して，次の不等式が成立することを示せ.

$$f\big(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\big) \leqq \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$$

(2) $f(x)=\log(1+\exp x)$ は任意の実数 x に対して，$f''(x) \geqq 0$ を満たすことを示せ.

(3) (1) と (2) の結果を用いて，$0 \leqq \alpha \leqq 1$ を満たす任意の α と任意の正数 y_1, y_2, z_1, z_2 に対して次の不等式が成り立つことを示せ.（ヒント：$x_i=\log y_i - \log z_i$, $i=1,2$ とせよ.）

$${y_1}^{\alpha}{y_2}^{1-\alpha}+{z_1}^{\alpha}{z_2}^{1-\alpha} \leqq (y_1+z_1)^{\alpha}(y_2+z_2)^{1-\alpha}$$

(大阪大 2002)　　(m20023502)

0.40 $f(x)=\sin^{-1}x$ とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) $f'(x), f''(x)$ を求めよ.

(2) f の n 階微分を $f^{(n)}$ と書くとき,

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+1)xf^{(n+1)}(x)-n^2f^{(n)}(x)=0$$

となることを示せ.

(3) $f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0)$ を示せ.

(4) $f^{(n)}(0)$ を求めよ.

(神戸大 2003)　　(m20033801)

0.41 微分方程式の初期値問題

$$f''(x)+f(x)=\sin x\,, \quad f(0)=f'(0)=0$$

において,

$$F(x)=f(x)\cos x - f'(x)\sin x\,, \quad G(x)=f(x)\sin x + f'(x)\cos x$$

とおく．以下の問いに答えよ.

(1) $F'(x)$, $G'(x)$ を求めよ．（f を含まない形で表せ.）

(2) $F(x)$, $G(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ を求めよ．

(神戸大 2009)　　(m20093812)

0.42 区間 I 上の関数 $f(x)$ が，$x < y < z$ なる I の任意の 3 点 x, y, z に対して不等式

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

を満たすとき，$f(x)$ は上に凸であるという．

(1) $f(x)$ が I 上で 2 回微分可能であり，$f''(x) \leq 0$ が任意の x で成り立つならば，$f(x)$ は上に凸であることを示せ．

(2) $f(x)$ が上に凸であれば，$x < y$ なる I の任意の 2 点 x, y と $0 < a < 1$ なる任意の実数 a に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$f(ax+(1-a)y) \geq af(x)+(1-a)f(y)$$

(3) $\alpha, \beta > 0, \alpha+\beta = 1$ であれば，任意の $x, y > 0$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$x^{\alpha}y^{\beta} \leq \alpha x+\beta y$$

(岡山大 2001)　　(m20014001)

0.43 ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n$ について以下の問いに答えよ．

(1) 収束半径 r を求めよ．

(2) $|x| < r$ に対して

$$f(x) = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n$$

とする．第 2 次導関数 $f''(x)$ を x の有理式で表せ．

(3) $f(x) = (1-x)\log(1-x)+x-\dfrac{x^2}{2}$ を示せ．

(岡山大 2014)　　(m20144001)

0.44 $\mathbb{R}$ 上の 2 回微分可能な関数 $f(x)$ が常に $f''(x) > 0$ を満たすとする. 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f'(x)$ は狭義単調増加であることを示せ.

(2) $x_1 < x_2 < x_3$ のとき, 次が成り立つことを示せ.

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

(3) $a < b$，$f(a) = a$ かつ $f(b) = b$ であるとする. このとき, $a < x < b$ ならば $f(x) < x$ であることを示せ.

(4) $b > 0$，$f(0) > 0$，$f(b) = b$ かつ $f'(b) > 1$ であるとする. このとき, 方程式 $f(x) = x$ は, $0 < x < b$ の範囲に解をただ一つ持つことを示せ.

(広島大 2011)　　(m20114101)

0.45 実数 x に対し,

$$\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

と定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = \tanh x$ のグラフを描け．増減表を書き，変曲点があればすべて求めること．

(2) $|f(x)| \leq \dfrac{4}{5}$ を満たす x からなる区間を求めよ.

(3) $f''(x)+2f(x)\Big(1-f(x)^2\Big)=0$ が成り立つことを示せ.

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)^2 dx$ を求めよ.

(広島大 2017)　　(m20174102)

0.46 $f(x)=\sqrt{1-\cos x}$ について，次の問いに答えよ.

(1) $f'(x)$ を求めよ.　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\{f'(x)\}^2$ を求めよ.

(3) $f''(x)$ を求めよ.　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f''(x)$ を求めよ.

(徳島大 2008)　　(m20084402)

0.47 (1) $f(x)=\log(1+x^2)$ とする． $f''(x)$ を求めよ.

(2) $y=y(x)$ が微分方程式 $y''-2y'+y=0$ を満たしている． このとき，$u=e^{-x}y$ とおいて，u が満たす微分方程式を求めよ． また，この u の微分方程式の一般解を求めよ.

(3) 微分方程式 $y''-2y'+y=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}e^x$ の一般解を求めよ.

(徳島大 2015)　　(m20154404)

0.48 関数 $f(x)$ は $\boldsymbol{R}$ 上で 2 回微分可能であり，さらに $\boldsymbol{R}$ 上で $f''(x)>0$ を満たしているとする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $a<b$ で $f(a)=f(b)=0$ ならば　$f'(a)<0<f'(b)$　が成り立つことを，次のロールの定理を用いて示せ.

ロールの定理.　1 回微分可能な実数値関数 $g(x)$ が $a<b$ となる a, b について $g(a)=g(b)$ を満たすならば，$a<\xi<b$ となる ξ で $g'(\xi)=0$ となるものが存在する.

(2) $a<b<c$ であるとする．このとき　$f(a)=f(b)=f(c)=0$　が成り立たないことを示せ.

(3) $a<b$ で $f(a)<0<f(b)$ とする．このとき　$f(x)=0$　を満たす x が a と b の間に唯一つ存在することを示せ.

(高知大 2006)　　(m20064501)

0.49 $f(x)$ を $(0,\infty)$ 上で 2 回微分可能な関数とする. $0<a<b$ とし,

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{K}{2}(b-a)^2$$

を満たす定数を K とする.

(1) $F(x)=f(b)-\{f(x)+f'(x)(b-x)+\dfrac{K}{2}(b-x)^2\}$ とおくとき，$F'(x)$ を求めよ.

(2) $K=f''(a+\theta(b-a))$ を満たす $0<\theta<1$ が存在することを示せ.

(3) すべての $x>0$ に対して $f''(x)\geqq\delta$ を満たす定数 $\delta>0$ が存在するとき,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$$

であることを示せ.

(愛媛大 2005)　　(m20054608)

0.50 $x>-1$ で定義された関数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{3}}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の $x=0$ でのテイラー展開（マクローリン展開）を x^2 の項まで求めよ．ただし，3 次の剰余項についても $f'''(x)$ を用いて正しく書け．

(3) (2) の結果を利用して，$(8.1)^{\frac{1}{3}}$ を小数点以下 3 桁まで求めよ．

(愛媛大 2007)　　(m20074610)

0.51 (1) 次の極限値を求めよ．

$(a)\ \displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2x\tan x-\frac{\pi}{2}}{\sin x-\cos x}$　　$(b)\ \displaystyle\lim_{x\to\infty}x\log\left(\frac{x+2}{x+4}\right)$

(2) $f(x)=\sqrt{x+2}$ とする．

(a) 3 階までの導関数 $f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)$ を求めよ．

(b) 次の式

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-a_0-a_1x-a_2x^2}{x^2}=0$$

が成り立つように定数 $a_0,\ a_1,\ a_2$ を定めよ．

(愛媛大 2021)　　(m20214601)

0.52 多項式で表される関数 $f(x)$ について　次の (i) ∼ (iv) がわかった．

(i) $f(0)=0$

(ii) $x=-4$ および $x=2$ のみで $f'(x)=0$

(iii) $-5\leq x\leq 2$ について $f'(x)\geq 0$

(iv) $-4<x<0$ について $f''(x)>0$

これらの情報からわかる範囲で，区間 $[-5,\ 2]$ における $f(x)$ のグラフの概形をかけ．ただし，(i) ∼ (iv) の各々がどのように反映するかを文章で記述すること．

(愛媛大 2022)　　(m20224603)

0.53 関数 $f(x)=\sin(\log x)\quad(x>0)$ を考える．$f'(x),\ f''(x)$ をそれぞれ $f(x)$ の 1 次および 2 次の導関数とする．また，π は円周率，e は自然対数の底とする．以下の問いに答えよ．

(1) $1\leqq x\leqq e^{\pi}$ において $f'(x)=0$ となる x を求めよ．

(2) $1\leqq x\leqq e^{\pi}$ において $f''(x)<0$ となる x の範囲を求めよ．

(3) 2 点 $(1,f(1)),\ (e^{\pi/2},f(e^{\pi/2}))$ を通る直線の方程式を求めよ．

(4) $\dfrac{e^{\pi/4}-1}{e^{\pi/2}-1}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が成り立つことを示せ．

(九州大 2012)　　(m20124705)

0.54 区間 $(0,\infty)$ 上の関数　　$f(x)=e^{-(\log x)^2}$　　について以下の問いに答えよ．

(1) 導関数 $f'(x),\ f''(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $y=f(x)$ の増減，凹凸を調べグラフの概形を描け．

(3) 広義積分　　$\displaystyle\int_0^{\infty}f(x)dx$　　を求めよ．

(九州大 2019)　　(m20194705)

0.55 (1) $f(x)=\exp(x)$ のとき，$f'(x)$ と $f''(x)$ はどのように表されますか．

(2) $f(x)=\exp(x)$ のとき，$f(0),\ f'(0),\ f''(0)$ はどうなりますか．

(3) マクローリンの定理は次式で表される.

$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\,x^2/2! + \cdots$

$\cdots + f^{(n-1)}(0)\,x^{n-1}/(n-1)! + f^{(n)}\,(\theta x)\,x^n/n! \quad (0 < \theta < 1)$

$f(x) = \exp(x)$ をマクローリンの定理を用いて第 4 項まで示しなさい.

（マクローリン展開）ただし，$\exp(x) = e^x$ である.

(4) 上記のマクローリン展開を第 4 項まで計算して，$\exp(1)$ を小数点以下 2 桁まで求めなさい.

(佐賀大 2007)　　(m20074902)

0.56 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ の第 2 階導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(3) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ をマクローリン展開し，2 次の項まで求めよ.

(長崎大 2011)　　(m20115009)

0.57 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$$

と定義する.

(1) $f(x)$ の 1 次から 4 次までの導関数 $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$ を求めなさい.

(2) $f(x)$ の $x = 0$ における 1 次から 4 次までの微分係数 $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$, $f^{(4)}(0)$ を求めなさい.

(3) $f(x)$ のマクローリン級数展開を 4 次の項まで求めなさい.

(大分大 2012)　　(m20125107)

0.58 x の n 次多項式関数 $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n$ について，以下の問題に答えなさい. ただし，a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_n, a は，定数とする. また，必要に応じて，階乗記号 $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ を用いてよい.

(1) $f(x)$ の 1 階導関数 $f'(x)$, 2 階導関数 $f''(x)$, 3 階導関数 $f'''(x)$, n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ を計算しなさい.

(2) $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ が成立することを示しなさい.

(鹿児島大 2012)　　(m20125425)

0.59 関数

$f(x) = a^2x^2 - b(x+1) + \sin ax + \cos ax$

について, 以下の設問に答えよ. ただし, a, b は実数である.

(1) 第 1 次導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を導け.

(2) 全ての実数 x に対し, $f''(x) > 0$ であることを示せ.

(3) 設問 (2) の結果から, $f'(x)$ は増加関数であることがわかる. このとき, 領域 $x > 0$ において, $f'(x) > 0$ が成立するためには a と b の間にどのような関係があればよいか. 関係式を導け.

(4) 設問 (3) の条件のもとで, 領域 $x > 0$ において $f(x) > 0$ が成立するためには, さらにどのような条件が必要か.

(島根大 2005)　　(m20055808)

0.60　関数 $f(x) = (ax+b)e^{cx} \quad (c \neq 0)$ を考える. 以下の問に答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$, 2 階導関数 $f''(x)$, さらに n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を求めよ.

(3) $0 < c < 1$ のとき , $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nc^n = 0$ を証明せよ.

$\left(\text{ヒント : } c = \dfrac{1}{1+\alpha} \quad (\alpha > 0) \quad \text{とおいて } (1+\alpha)^n \text{ の 2 項展開を考えよ.}\right)$

(4) $0 < c < 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(n)}(x)\right)$$

を求めよ.

(島根大 2005)　　(m20055811)

0.61　(1) 関数 $f(x) = (x+1)e^{-2x}$ について, $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ. また, 3 以上の整数 n に対して第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $y = x^x$ $(x > 0)$ の極値を求めよ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx$ の値を求めよ.

(4) 曲線 $y = x\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{3\pi}{2}\right)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ.

(島根大 2009)　　(m20095802)

0.62　(1) $f(x) = \sin^{-1} x \quad (-1 < x < 1)$ とするとき, $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$ を求めよ.

(2) 設問 (1) の結果を用いて $f(x)$ を x^3 の項まで $x = 0$ のまわりにおいてべき級数展開せよ.

(3) 設問 (2) の結果を用いて $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1} x}{x}$ および $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1} x - x}{x^3}$ の値を求めよ.

(島根大 2010)　　(m20105808)

0.63　以下の各設問に答えよ. ただし, x は実数とする.

(1) 関数 $f(x)$, $g(x)$ を $f(x) = x - \tan^{-1} x$, $g(x) = x - x\sin x$ と定義する. 以下の問いに答えよ.

(a) 導関数 $f'(x)$, 第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(b) 導関数 $g'(x)$, 第 2 次導関数 $g''(x)$ を求めよ.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ の値を求めよ.

(2) 関数 $y(x)$ を $y(x) = (x^2+1)e^{-x}$ と定義する. 以下の問いに答えよ.

(a) 導関数 $y'(x)$, 第 2 次導関数 $y''(x)$ を求めよ.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ であることを示せ.

(c) $y'(x)$, および $y''(x)$ の符号を用いて, 関数 $y(x)$ の増減表を作成せよ. また, 関数 $y(x)$ のグラフの概形をかけ.

(島根大 2012)　　(m20125801)

0.64　$f(x)$ は実数全体で定義された以下の条件 $(*)$ を満たす関数とする.

$$(*) \quad f''(x) = f(x)\,, \quad f(0) = 1,\ f'(0) = 0$$

次の問いに答えよ.

(1) $\left(f(x)\right)^2 - \left(f'(x)\right)^2 = 1$ を証明せよ.

(2) $f(x)$ を求めよ.

(3) 関数 $f(x)$ と $f'(x)$ のグラフの概形をかけ.

(4) 自然数 n に対し，$f^{(n)}(0)$ の値を求め，さらに $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ.

(島根大 2013)　　(m20135802)

0.65 閉区間 $[a,b]$ で連続で，開区間 (a,b) で微分可能である関数 $f(x)$ に対して，次の命題（平均値の定理）が成り立つ.

ある $c(a < c < b)$ が存在して

$$(*) \qquad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

次の問いに答えよ.

(1) $f(x) = x^2$ のとき，区間 (a,b) において，$(*)$ が成り立つような c を求めよ.

(2) 閉区間 $[a,b]$ で連続かつ，開区間 (a,b) で 2 回微分可能でつねに $f''(x) > 0$ を満たす関数 $f(x)$ を考える．このとき，区間 (a,b) において関数

$$F(x) = \frac{f(b)(x-a)+f(a)(b-x)}{b-a} - f(x)$$

はつねに正であり，かつ $F(x)$ の極大値が区間 (a,b) において，ただ一つだけ存在することを示せ.

(3) $b > a > 1$ とする．次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{b^2-a^2}{2ab} > \log\frac{b}{a}$$

(島根大 2017)　　(m20175806)

0.66 以下の問に答えよ.

(1) $f:(x,y) \longrightarrow (2x, -x+y)$ において線形変換 f が与えられているとき，f をあらわす行列 A を求めよ.

(2) $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & f(x) & f'(x) & f''(x) \\ 1 & g(x) & g'(x) & g''(x) \\ 1 & h(x) & h'(x) & h''(x) \\ 1 & k(x) & k'(x) & k''(x) \end{vmatrix}$ について，$\dfrac{dD(x)}{dx}$ を求めよ。

（ただし，$f(x)$ は x の関数，$f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}, f''(x) = \dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$，$g(x), h(x), k(x)$ についても同様）

(宇都宮大 2004)　　(m20046102)