[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　グラフ・図面

0.1　3 つのベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ の大きさを，それぞれ $|\boldsymbol{u}|, |\boldsymbol{v}|, |\boldsymbol{w}|$ で表す．ベクトルの内積を

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\phi \qquad (a)$$

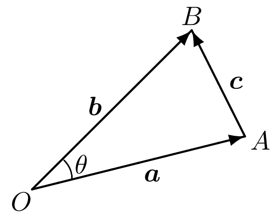
で定義する．ただし，ϕ はベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角である．この定義より，次の内積の基本性質が得られる．

$$|\boldsymbol{u}|^2 = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \qquad (b)$$

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} \qquad (c)$$

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} \qquad (d)$$

$$(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u} \qquad (e)$$



さらに，右の図のような三角形 OAB を考え，

3 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \boldsymbol{c} = \overrightarrow{AB}$$

で定義する．ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とする．次の式を証明せよ．

$$|\boldsymbol{c}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta$$

なお，内積の定義 (a) および基本的性質 (b)〜(e) を利用した場所を明示せよ．

(岩手大 1996)　　(m19960303)

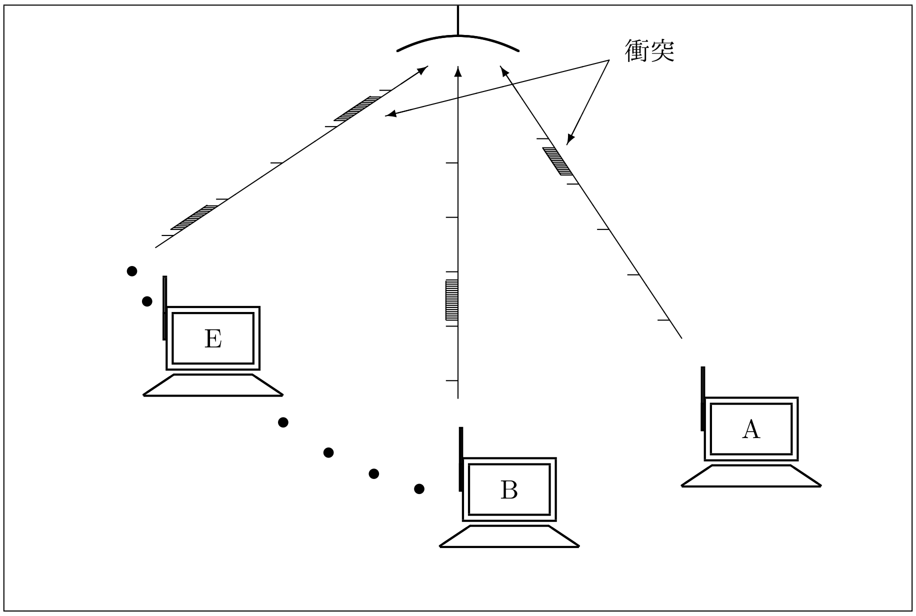
0.2　複数のコンピュータが長さ 1 秒の無線信号を中央のアンテナに送信するネットワークを考える（下図参照）．無線信号の交信は 1 秒ごとに行われ，$T-1$ (秒) から T (秒) の間に生起した無線信号は T (秒) の時点で送信される．また，2 台以上のコンピュータが同時に無線信号送信を行った場合には信号衝突（送信失敗）が起こり，後の時点で再送される．ここで，コンピュータ A 以外のコンピュータから生起された無線信号は，再送信号までも含めて次式の確率で送信されるものとする．このとき，以下の問に答えよ．なお，$P_r[k, n]$ は n 秒の間に k 個の無線信号が生起する確率であり，G は定数である．

$$P_r[k, n] = \frac{(Gn)^k}{k!} \exp(-Gn)$$

(1)　コンピュータ A が無線信号を送信した際，信号衝突が起こらない確率を求めよ．

(2)　コンピュータ A の信号送信が $j-1$ 回の信号衝突の後で成功する確率，すなわち送信回数が j 回となる確率を求めよ．

(3)　無線信号の送信回数の期待値を求めよ．



(東京大 1997)　　　(m19970705)

0.3　曲線 $y = x^2$ と 直線 $y = a\ (a > 0)$ で囲まれた図形 (図 1 灰色部分) を考える．この図形に一定の厚みを持たせて平面上に立てた場合（図 2）に，点 O を接触点として安定に立っていられるかどうか調べたい．

(1) この図形の重心を求めよ．この場合厚みが一定であるので，重心は図形に属する各点の x, y 座標の平均となる．

(2) 図形がわずかに傾き，平面との接触点が点 O から微小量 u だけずれた時 (図 3)，その新しい接触点 P における法線と y 軸との交点 Q を求めよ．

(3) 点 O で安定に立っているための，定数 a についての条件を求めよ．

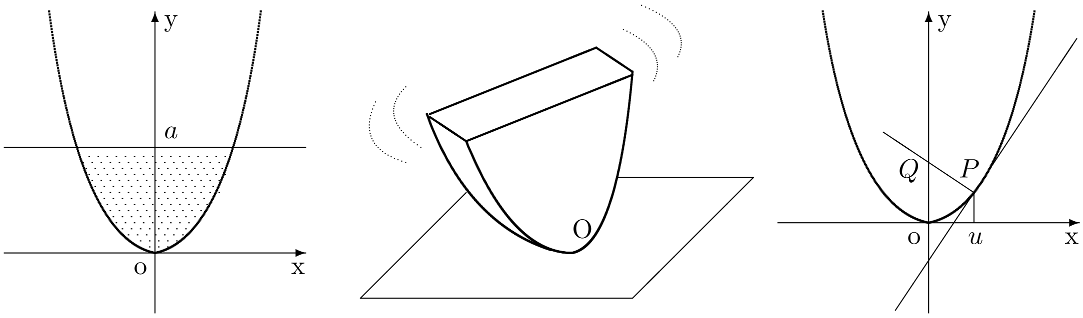


図 1　　図 2　　図 3

(東京大 1999)　　　(m19990701)

0.4　極座標系で表された半直線

$\theta = \alpha\,,\quad \theta = \beta \quad (0 \leqq \alpha < \beta < 2\pi)$

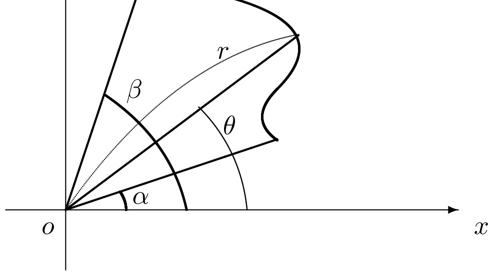
および，連続曲線

$r = f(\theta) \quad (\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$

で囲まれた閉領域 D の面積は

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 d\theta$$

で与えられることを示せ．



(東京工業大 2000）　(m20000802)

0.5　以下の設問に答えなさい．

(1) 図１のように，太さの無視できる長さ a の棒４本で結ばれた平面上の菱形を考える．この図形の各頂点は自由に動く蝶番で結ばれている．対角線を１本追加して，図形を固定し，４本の辺の囲む面積を最大にするには，どれだけの長さの対角線を付加すれば良いかを計算によって求めなさい．

ヒント：座標系を利用して，対角線の長さを頂点の座標を変数として表す．

(2) 図２のように，太さの無視できる長さ a の１２本で結ばれる平行六面体を考える．この物体の各頂点は自由に動く蝶番で結ばれている．この物体に対角線を付加して物体を固定したとき１２本の辺が囲む平行六面体の中の体積を最大にすることを考える．このとき，付加すべき対角線のなかで，最小の長さのものを何本付加すれば良いかを計算によって示しなさい．ただし，ある面が対角線によって固定されると，その面と平行な面も固定されることを仮定する．

ヒント：(1) の結果を利用する．

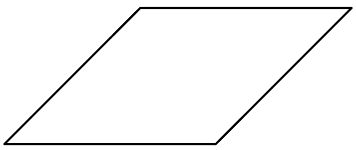


図１

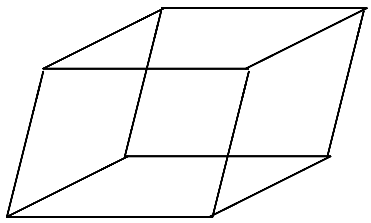
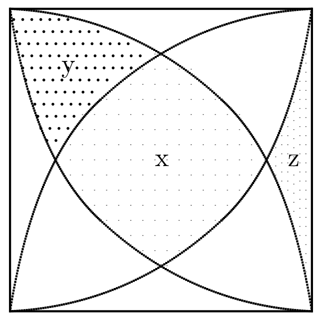


図２

(千葉大 2000）　(m20001202)

0.6　右下の図形は１辺の長さ１の正方形の中に，各頂点を中心として半径１の円弧を４つ描いたものである．図の x,y,z それぞれの領域の面積をやはり x,y,z で表す．



(1) 次の各式の空欄を埋めて，x,y,z の満たす連立方程式を作れ．

ただし，π は円周率である．

$$\begin{cases} \square x+\square y+\square z=1 \\ \square x+\square y+\square z=\dfrac{\pi}{4} \\ x+2y+z=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{\square}}{\square} \end{cases}$$

(2) x を求めよ．

(図書館情報大 1999)　(m19991601)

0.7　右の図のようにつながった管の上の入り口から玉を落とすと，

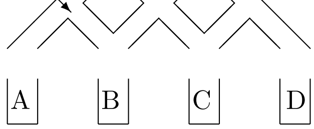
玉は枝分かれのところで，左側：右側 $=3:2$ の比率で

下に進み，最後に下の A～D のいずれかの容器に入る．

1000 個の玉を上から落としたとき，次の問に答えよ．

(1) 枝分かれの点 L を通過する玉の個数の期待値を求めよ．

(2) B の容器に入る玉の個数の期待値を求めよ．



(図書館情報大 1999)　　(m19991610)

0.8 (1) 辺の長さが a の正方形の四隅を図 (A) のように切り落としてできる正８角形の辺の長さを求めよ．

(2) 同じ正方形の各辺の中点に頂点を持つ正８角形（図 (B)）の面積は，図 (A) の正８角形の面積の何倍か．

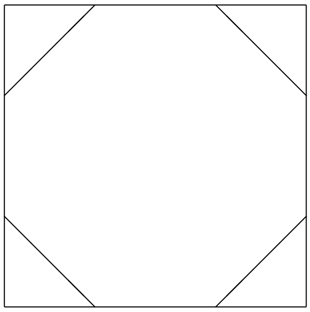


図 (A)

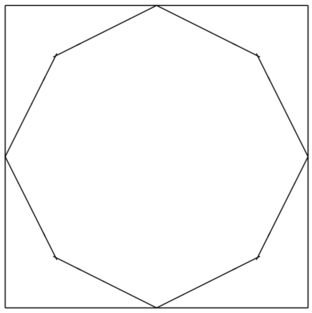


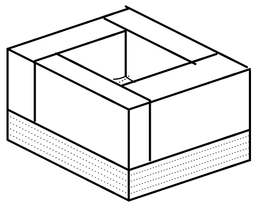
図 (B)

(図書館情報大 2000)　　(m20001602)

0.9 厚さ $1\,cm$ の板で内側が縦・横・深さ $1\,cm$ のマス M_1 を作る．

同じ板を使って M_1 がぴったりと入るように M_2 をつくる．

以下同様にして $M_3, M_4, \cdots, M_k, \cdots$ を作る．



(1) M_k の容積を求めよ．

(2) マス M_k の板の部分の体積がその容積よりも初めて小さくなるときの k の値を求めよ．

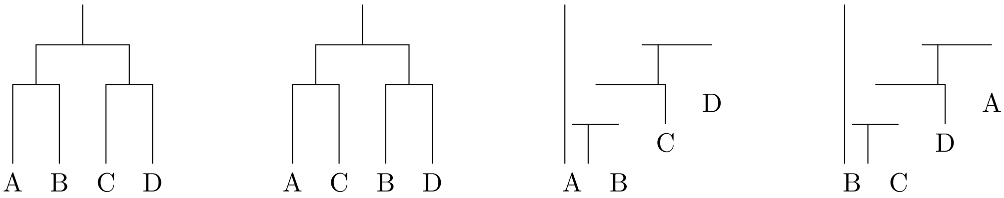
(図書館情報大 2000)　　(m20001604)

0.10 A, B, C, D の４人がトーナメント戦で優勝を争う．

A と B，C と D はそれぞれ同程度の強さで，互いに対戦したとき勝つ確率はそれぞれ 0.5 であり，

一方 A，B は C，D より強く，対戦したとき A（または B）が勝つ確率は 0.7 とする．

下の図の (a)-(d) 組み合わせで対戦を進めたとき，それぞれの場合に A が優勝する確率を求めよ．



(a)　(b)　(c)　(d)

(図書館情報大 2002)　　(m20021602)

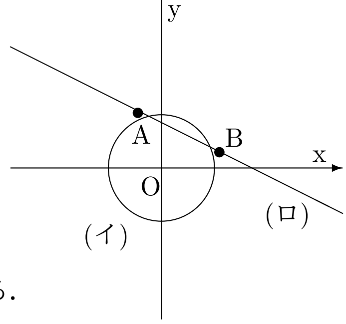
0.11 以下の問に答えよ．

(1) 以下の式で表される円 (イ) と直線 (ロ) は交わっている．図に示すように，

円と直線の交点をそれぞれ A，B とする．

$x^2 + y^2 = 5$　$\cdots$　（イ）

$x + 2y = 3$　$\cdots$　（ロ）



(a) 原点 O から直線 (ロ) におろした垂線の長さを求めよ．

(b) 線分 AB の長さを求めよ．

(2) 以下の式で表される球 (ハ) と平面 (ニ) は交わっている．

$x^2+y^2+z^2=4 \qquad \cdots$ （ハ）

$x+2y+3z=7 \qquad \cdots$ （ニ）

(a) 原点 O から平面 (ニ) におろした垂線の長さを求めよ．

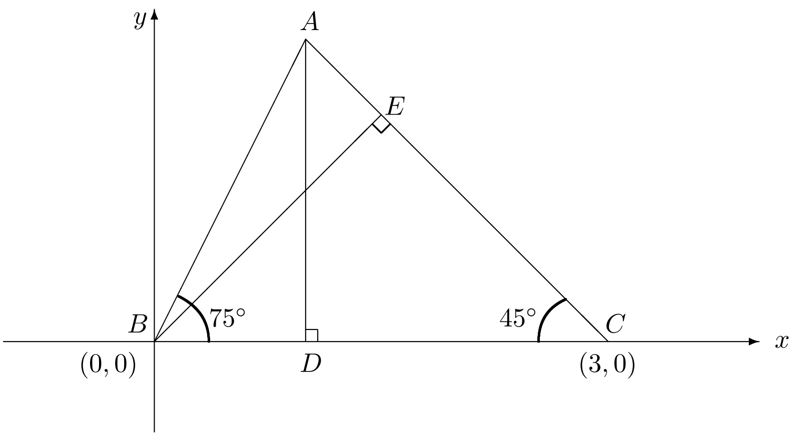
(b) 平面 (ニ) と球 (ハ) が交わってできる円の面積を求めよ．

(豊橋技科大 1998） (m19982710)

0.12 図に示す三角形 ABC に関して次の各問に答えよ．

(1) $\sin 75°$, $\cos 75°$ を加法定理を用いて求めよ．

(2) 点 C の座標を $(3,0)$, 点 A , B より辺 BC , AC に下ろした垂線を AD , BE とする．このとき，辺 AE , EC の長さを求めよ．



(3) 三角形 ABC の外接円の中心の座標を求めよ．

(豊橋技科大 1999） (m19992702)

0.13 次の各問いに答えよ．

(1) 次の無限数列の一般項を示し，収束・発散を調べ，収束する場合にはその極限値を求めよ．

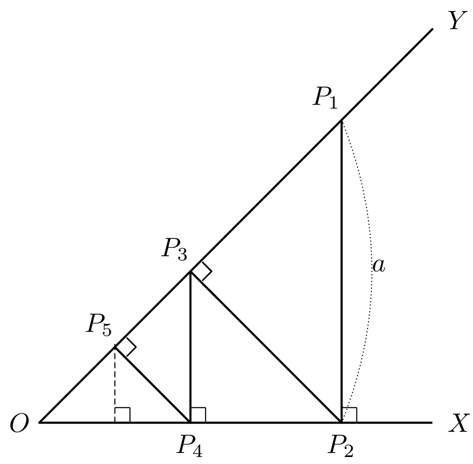
(a) $\dfrac{3}{1}$, $\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{7}{7}$, $\dfrac{9}{10}$, $\dfrac{11}{13}$, $\cdots\cdots$

(b) $\sqrt{2}-\sqrt{1}$, $\sqrt{4}-\sqrt{2}$, $\sqrt{6}-\sqrt{3}$, $\cdots\cdots$

(2) 図において，$\angle XOY=\pi/4$, P_1P_2 の長さを a とする．OY 線上の点 P_1 から，OX 線上に垂線を下ろした点を P_2 とする．さらに点 P_2 から OY 線上に垂線を下ろし，その点を P_3 とする．同様に順次 , P_4 , P_5 , $\cdots\cdots$ を無限にとるものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(a) 垂線（線分）の和を級数で示せ．

(b) 垂線（線分）の和を求めよ．



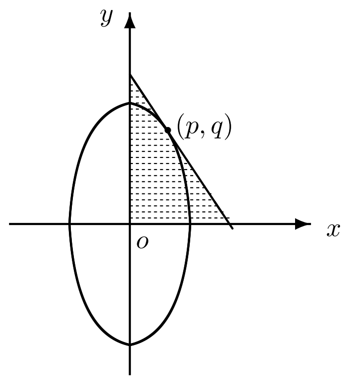
(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+3}$ を求めよ．

(豊橋技科大 1999)　　(m19992704)

0.14 以下の各問いに答えよ．

(1) $4x^2+y^2=4$ で表される楕円上の点 (p,q) における接線の方程式は，$4px+qy=4$ となることを示せ．

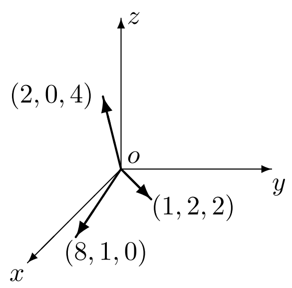
(2) $p>0, q>0$ のとき，問 (1) の接線と x 軸および y 軸で囲まれる面積（下図の斜線部）を最小にしたい．この面積が最小になる楕円上の点 (p_0,q_0) を求める場合の計算方法を示し，その点 (p_0,q_0) の値を示せ．



(豊橋技科大 2000)　　(m20002704)

0.15 3 本のベクトル：

$$a=\begin{pmatrix}8\\1\\0\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\qquad c=\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$$

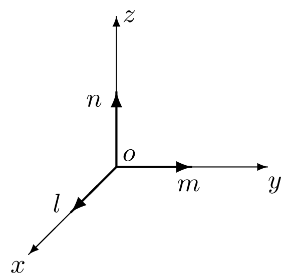


を 3 辺とする平行 6 面体を，これらを列ベクトルとする行列 A

$$A = (a, b, c) = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

で表すとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) この平行 6 面体と体積の等しい立方体を，下図に示す基底ベクトル (l, m, n) を用いて，上と同様に行列 $B = (l, m, n)$ で表せ．



(2) 平行 6 面体 A を，変数 $PA = B$ により体積の等しい立方体 B に変換する行列 P を求めよ．

(豊橋技科大 2001)　　(m20012709)