[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　[:::]

0.1 (1) 1 階微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ の一般解が $x = C\exp\left[\displaystyle\int^{y/x} \frac{du}{f(u)-u}\right]$ であることを示せ．ただし，C は任意定数，$u = \frac{y}{x}$ である．

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ． $x\dfrac{dy}{dx} - y = xe^{y/x}$

(北海道大 2004)　(m20040101)

0.2 以下の設問に答えよ. 途中の計算結果を詳しく記述すること.

(1) k を任意の実数とするとき, 次のベクトルの組 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ が一次独立となる条件を求めよ.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \ \ \boldsymbol{a}_3]$ とする. また, $k = 0$ とするとき, 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(3) $\boldsymbol{A}^n$（n は自然数）を求めよ.

(北海道大 2012)　(m20120101)

0.3 デカルト座標系 (x, y) と極座標 (r, θ) の関係が次のように与えられている. このとき, 以下の設問に答えよ.

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ r \geq 0,\ ,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

(1) 次の行列 J のすべての成分を r, θ の式で表せ.

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

(2) 次の積分 A を求めよ. ただし $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ とする.

$$A = \int_D x^2\, dxdy$$

(3) 次の行列 G のすべての成分を r, θ の式で表せ. ただし $r > 0$ とする.

$$G = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

(北海道大 2015)　(m20150101)

0.4 以下のように定義されるベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ に関する設問に答えよ.

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix},$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は 1 次従属であることを示せ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ すべてに直交するベクトルを求めよ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を列ベクトルとした行列に関する連立方程式

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ s \end{bmatrix}$$

が解を持つように，実数 s を定めよ．またそのときの解を求めよ．

(北海道大 2015)　　(m20150102)

0.5　n 次正方行列に関する以下の設問に答えよ．

(1) 1 つの行または列の全ての成分が 0 であるとき，その行列式の値は 0 であることを示せ．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

(2) 次の行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式を求めよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 12 & 12 \\ -1 & 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

(3) $\boldsymbol{B}$ を n 次正方行列，$\boldsymbol{x}$ を n 次列ベクトルとする．$\overline{\boldsymbol{B}}^T = -\boldsymbol{B}$ のとき，$\overline{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ の値は 0 または純虚数であることを示せ．ここで，$\overline{\boldsymbol{B}}^T$ および $\overline{\boldsymbol{x}}^T$ はそれぞれ $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{x}$ の共役転置行列である．

(北海道大 2016)　　(m20160102)

0.6　次式の三次元ベクトルに関して，次の各設問に答えなさい．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} p \\ 1 \\ q \end{bmatrix}$$

設問 1. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積を求め，二つのベクトルの関係を調べなさい．

設問 2. $\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ と直交するときの p と q を求めなさい．

設問 3. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次従属となるような p と q を求めなさい．

(北海道大 2018)　　(m20180102)

0.7　次式の $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ の行列について，次の設問に答えなさい．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

設問 1. $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

設問 2. $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$（$\boldsymbol{\Lambda}$ は対角行列）となる行列 $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{\Lambda}$ を求めなさい．

設問 3. $\boldsymbol{B}$ が直交行列であることを示しなさい．

設問 4. ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ を $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ による一次変換としたとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の大きさが等しいことを示しなさい．ただし，ベクトルの大きさの二乗は，$\boldsymbol{x}^T\, \boldsymbol{x}$ で求めることができる．ここで，T は転換を表す．

(北海道大 2018)　　(m20180103)

0.8 次の連立 1 次方程式について，以下の設問に答えなさい．

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ただし，a および b は任意の実数とする．また，途中の計算手順についても詳しく記述すること．

(1) この連立方程式が解を持たないために実数 a および b が満たすべき条件を求めなさい．

(2) この連立方程式が一意の解を持つために実数 a および b が満たすべき条件を求めなさい．　また，そのときの解を求めなさい．

(北海道大 2019)　　(m20190102)

0.9 次の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が 1 次従属となるとき，以下の設問に答えなさい．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ p \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ -p \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1) p を求めなさい．

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の 1 次結合で $\boldsymbol{c}$ を表しなさい．

(3) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ にともに直交し, 大きさが 1 のベクトルを求めなさい．

(4) (3) で求めたベクトルと, $\boldsymbol{c}$ の内積を求めなさい．

(5) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ のなす角を求めなさい．

(北海道大 2019)　　(m20190103)

0.10 次の 3 次元ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ について，以下の設問に答えよ

$$\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ p \\ 2p \end{bmatrix}$$

(1) ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ に垂直な単位ベクトルを求めなさい．

(2) ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ が 1 次従属になるとき，p の値を求めなさい．また，$\overrightarrow{c}$ を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ の線形結合で表しなさい．

(北海道大 2020)　　(m20200102)

0.11 次の行列 A について，以下の設問に答えなさい．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式を求めなさい．

(2) 行列 A の固有値と対応する固有ベクトルを求めなさい．

(3) 行列 $2A$ の行列式と固有値を求めなさい．

(北海道大 2021)　　(m20210102)

0.12 次の 3 次元ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$について，以下の設問に答えなさい．

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 2p \\ 3 \\ p \end{bmatrix}$$

(1) ベクトル $\vec{b}$, $\vec{c}$が直交するとき，p の値を求めなさい．

(2) ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$が 1 次従属になるとき，p の値を求めなさい．また $\vec{c}$を $\vec{a}$, $\vec{b}$ の一次結合で表しなさい．

(北海道大 2022) (m20220102)

0.13 次の行列 $\boldsymbol{A}$ について，以下の設問に答えなさい．ただし，a は任意の実数とする．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ が正則となるための a の条件を求めなさい．また，このとき逆行列を a を使って表しなさい．

(2) $a = 3$ のとき，固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(北海道大 2022) (m20220103)

0.14 対称行列 $\boldsymbol{A}$ およびベクトル $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ で定義する．

(1) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(3) $\boldsymbol{A}^n$ の逆行列を求めよ．ただし, n は自然数とする．

(東北大 2006) (m20060503)

0.15 3 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ について A^2, ${}^tAA$, A^{-1} を求めよ．ここで，${}^tA$ は A の転置行列を表す．

(東北大 2007) (m20070501)

0.16 行列 $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ で $f(v) = Bv$ と定義される線形写像（1 次写像）$f\ :\ \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ について，像 $\mathrm{Im}\, f$ と核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求めよ．

(東北大 2007) (m20070502)

0.17 行列 $\boldsymbol{A}$ および直交座標系の位置ベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ の逆行列を求めよ．

(2) $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．その際，固有ベクトルの大きさは 1 となるように求めよ．

(3) (2) で求めた固有値を α, β, γ ($\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$) とする．2 次形式 $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 10z^2$ を標準形 $\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2$ に変換する線形変換 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{p}$ を与える直交行列 $\boldsymbol{U}$ を求めよ．

(4) 線形変換 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{p}$ により，平面 $x + y + z = 1$ はどのような図形に変換されるか．変換前後の図形の概形を描け．

(東北大 2008)　　(m20080503)

0.18 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(東北大 2008)　　(m20080504)

0.19 3 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 11 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ について，行列式 $\det(A)$ と逆行列 A^{-1} を求めよ．

(東北大 2008)　　(m20080505)

0.20 行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めよ．さらに，A を対角化する直交行列を求めよ．

(東北大 2009)　　(m20090505)

0.21 行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

このとき, 以下の問に答えよ．

(1) A の固有値および固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルの大きさは任意でよい.

(2) $A^5 - 13A^3$ を計算せよ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P を 1 つ求めよ. また, その逆行列 P^{-1} を求めよ.

(4) A^n を求めよ. ただし, n は自然数とする.

(東北大 2010)　　(m20100503)

0.22 3 次の対称行列 $\boldsymbol{A}$ および 3 次元ベクトル $\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ を用いて表される 2 次形式

$$f(\boldsymbol{m}) = {}^t\boldsymbol{m}\boldsymbol{A}\boldsymbol{m} = 5x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy + 4yz + 8xz$$

を考える．ここで，左上付き添字 t は転置を表す．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ を求めよ．

(2) (1) で求めた $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ．また，各固有値の重複度を答えよ．

(3) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ が対角行列となるような直交行列 $\boldsymbol{P}$ を 1 つ求めよ．また，この $\boldsymbol{P}$ を用いて $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ．

(4) 3次元ベクトル $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$ を考える．(3) で求めた $\boldsymbol{P}$ を用いて変数変換 $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}$ を行い，$f(\boldsymbol{m})$ の標準形を求めよ．

(東北大 2012)　　(m20120502)

0.23 3次の対称行列 A および3次元ベクトル $\boldsymbol{u}$ を，次のように定義する．

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 12 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) $f(x,y,z) = {}^t\boldsymbol{u}A\boldsymbol{u}$ と定める (ここで，左上付き添字 ^{t} は転置を表す)．$f(x,y,z)$ を x, y および z の多項式で表せ．

(3) 原点を通り A の固有ベクトルに平行な直線と，2次曲面 $f(x,y,z) = 18$ との交点をすべて求めよ．

(東北大 2014)　　(m20140502)

0.24 次の対称行列 $\boldsymbol{A}$ およびベクトル $\boldsymbol{r}$ について以下の問に答えよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさを1とする．

(2) ベクトル $\boldsymbol{r}$ を回転行列 $\boldsymbol{R}$ によって角度 θ 回転させたものをベクトル $\boldsymbol{s}$ とする．$\theta = 30^\circ$ とした場合の回転行列 $\boldsymbol{R}$ とベクトル $\boldsymbol{s}$ を求めよ．ただし，θ は反時計回りを正とする．

(3) 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = [\,1, 0\,]^t$, $\boldsymbol{e}_2 = [\,0, 1\,]^t$ を行列 $\boldsymbol{R}$ によってそれぞれ原点に対して反時計回りに角度 $\theta = 30^\circ$ 回転させたベクトルを $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$ とする．(2) で求めたベクトル $\boldsymbol{s}$ を $(\boldsymbol{e}'_1\ \ \boldsymbol{e}'_2)$ 座標系により表記したベクトル $\boldsymbol{s}'$ を求めよ．さらに $\boldsymbol{s}' = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{s}$ となる変換行列 $\boldsymbol{Q}$ を求めよ．

(東北大 2016)　　(m20160504)

0.25 $P(x) = x^2 + ax + b$, $Q(x) = x^2 + cx + d$ を実数係数の x の2次多項式とし，次の4次正方行列を考える．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & a & b \\ 1 & c & d & 0 \\ 0 & 1 & c & d \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) 2つの x の2次方程式 $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$ が共通の実数解 α をもつとき

$$A \begin{bmatrix} \alpha^3 \\ \alpha^2 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix} = o$$

となることを示し，A の行列式 $|A|$ は0となることを示せ．ただしここで o は数ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の原点を表すものとする．

(3) $P(x)=(x-1)(x-2)$ とする．このとき $|A|=Q(1)Q(2)$ であることを示し，$\operatorname{rank} A \leqq 3$ ならば $P(x)=0$，$Q(x)=0$ は少なくとも一つの共通の実数解をもつことを示せ

(4) $P(x)=0$ が 2 つの実数解 $x=\alpha$, β $(\alpha \neq \beta)$ を持つとする．このとき $\operatorname{rank} A=2$ であれば, $P(x)=0$, $Q(x)=0$ は 2 つの共通の実数解をもつことを示せ.

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110602)

0.26 以下ではすべての自然数 n に対して $\mathbb{R}^n$ の元は列ベクトル（縦ベクトル）で表されるものとする．以下の問いに答えよ.

(1) a,b,c を実数とし $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ とする．$\mathbb{R}^3$ の部分空間 H を

$$H=\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \middle| ax+by+cx=0\right\}$$

で定める．このとき H の次元とその基底を求めよ.

(2)

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

を実行列とする．A の階数が 2 であるための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}\neq 0\,,\quad 1\leq i\leq j\leq 3$$

となる自然数 i,j が存在することであることを示せ.

(3)

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

を階数 2 の実行列とし，線形写像 $f_A\ :\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ を $f_A(x)=Ax,\ x\in\mathbb{R}^3$, で定める．このとき f_A の核の次元と基底を求めよ.

(4)

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

を実行列とし、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

とする．線形写像 $f_B\ :\ \mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ を $f_B(x)=Bx,\ x\in\mathbb{R}^4$, で定める．このとき f_B の核の次元と基底を求めよ.

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160602)

0.27 一次変換 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ によって $\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{5}=1$ はどのような図形に変換されるか, 図形の方程式を示せ.

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220602)

0.28 行列

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -9 \\ 2 & 0 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

に対して，次の問に答えよ.

(1) 行列 A を対称行列 S と交代（逆対称，反対称）行列 K の和で表せ.

(2) 行列 $KS+SK$ は対称行列，交代行列，その他の行列の何れか.
又，行列 $KSKS+SKSK$ は上記の三つの行列の何れか.

(3) 行列 A の固有方程式を示せ.

(4) 行列 A の固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ.

(東京大 1997） (m19970702)

0.29 (1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx$ を求めよ．なお計算過程も示せ．ただし，m, n は $m, n > 0$ の整数とする.

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx$ を求めよ．なお計算過程も示せ．ただし，m, n は $m, n > 0$ の整数とする.

(3) フーリエ級数 $f(x) \approx \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$ について，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[{a_n}^2 + {b_n}^2\right]$$ を証明せよ.

(東京大 1998） (m19980704)

0.30 関数 $f(x)$ のラプラス変換 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$ を $L[f(x)] = F(s)$ と表す.

(1) $L[x]$ を求めよ.

(2) $L[e^{ax} f(x)] = F(s-a)$ を示せ.

(3) 上記 (2) の定理を用いて, xe^{2x} のラプラす変換を求めよ.

(4) 上記 (2) の定理を用いて, $L\left[2e^{-2x} - xe^{-2x}\right]$ を求めよ.

(東京大 2001) (m20010704)

0.31 指数関数 e^x のテイラー展開

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

を拡張して，行列 A の指数関数 e^A を，

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots$$

と定義する．ただし，I は単位行列である．いま，行列 e^A が

$$e^A = \begin{bmatrix} 2-e^{-1} & -1+e^{-1} \\ 2-2e^{-1} & -1+2e^{-1} \end{bmatrix}$$

と与えられたとき，以下の問に答えよ.

(1) 行列 e^A を対角化せよ.

(2) 正則行列 P に対して，$P^{-1}e^A P = e^{(P^{-1}AP)}$ が成り立つことを示せ.

(3) 行列 A を求めよ.

(東京大 2004) (m20040704)

0.32 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき，下の (1)〜(5) を答えよ.

ただし，3 つのベクトル $\boldsymbol{m}_1,\ \boldsymbol{m}_2,\ \boldsymbol{m}_3$ を $\boldsymbol{m}_1 = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{m}_2 = \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{m}_3 = \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \end{pmatrix}$ と

するとき，$M = [\boldsymbol{m}_1,\ \boldsymbol{m}_2,\ \boldsymbol{m}_3]$ と表される行列 M は $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$ であるとする．

(1) 行列の 3 つの固有値を $a_1,\ a_2,\ a_3$ および固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ を求めよ．ただし，$|\boldsymbol{u}_1| = |\boldsymbol{u}_2| = |\boldsymbol{u}_3| = 1$ とすること．

(2) 固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ を用いて作られる行列 U を $U = [\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3]$ とする．$UV = I$ のように行列 U に右からかけると単位行列 I となる行列 V を求めよ．

(3) 固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ は互いにどのような関係にあるか説明せよ．

(4) 固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ と行列 U について, 下式を満たすような 3 つの行列 $P_1,\ P_2,\ P_3$ を求めよ．ただし，$P_1,\ P_2,\ P_3$ はそれぞれ 3 行 3 列の行列であり，$\mathbf{0}$ は零ベクトルである．

$$\begin{cases} P_1U = [\ \boldsymbol{u}_1 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}\ ] \\ P_2U = [\ \mathbf{0} \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \mathbf{0}\ ] \\ P_3U = [\ \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \boldsymbol{u}_3\ ] \end{cases}$$

(5) 行列 A の n 乗である A^n を求めよ．ただし，n は正の整数である．

(東京大 2011)　　(m20110705)

0.33 行列 A を $A = \begin{bmatrix} x & \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & 1-x & 2 \\ y & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする．ただし，x と y は実数とする．

以下の問いに答えよ．なお，${}^tX$ を X の転置行列とすると，$X = -{}^tX$ を満たす X を交代行列と呼ぶ．また，$X = {}^tX$ を満たす X を対称行列と呼ぶ．

(1) A は交代行列と対称行列の和で表すことができる．交代行列を T，対称行列を S とするとき，T と S を求めよ．

(2) T は正則か否かを示せ．

(3) $x = y = 0$ のとき．T の固有値を求めよ．

(4) 行列 B を $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & y \\ 0 & y & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x-\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする．
$y \neq 0$ のとき，A は正則でなく，B は正則であった．このとき，x を求めよ．

(東京大 2012)　　(m20120705)

0.34 実数をとる変数 $x_{ij}(i = 1,2,3;\ j = 1,2,3)$ を用いて，行列 X を

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

で定義する．X の行列式を $|X|$ で表し，X の逆行列を X^{-1} で表す．また，正の実数 s の自然対数を $\log s$ で表す．以下の問いに答えよ．

(1) $|X|$ の x_{11} に関する偏導関数 $\dfrac{\partial|X|}{\partial x_{11}}$ を，$x_{ij}(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$ のうちの必要なものを用いて表せ．

(2) X が $|X|>0$ を満たすとき，$y_{ij}(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$ を

$$y_{ij}=\frac{\partial(\log|X^{-1}|)}{\partial x_{ij}}$$

で定義する．このとき，y_{11} を，$|X|$ と $x_{ij}(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$ のうちの必要なものを用いて表せ．

(3) (2) で定義した $y_{ij}(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$ を用いて，行列 Y を

$$Y=\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix}$$

で定義する．このとき，X^{-1} を用いて Y を表せ．

(東京大 2014)　　(m20140705)

0.35 (1) 関数 $y(x)$ に関する次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2+2xy-x^2}{2x^2}$$

(2) 関数 $q(t)$ に関する次の微分方程式について，以下の問いに答えよ．ただし，R, C, E は 0 ではない正の実定数である．また，$q(t)\leqq CE$ が成り立つ．

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E$$

(a) 一般解を求めよ．

(b) 初期条件 $t=0$, $q(t)=0$ を満たす解を求めよ．

(c) 前問 (b) で求めた解の $t\geqq 0$ におけるグラフの概形を描け．

(3) 関数 $x(t)$ に関する次の 2 階の微分方程式について，

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0$$

下記のように変数変換を行なって 1 階の連立微分方程式に書き換えるとき，係数行列 A を求めよ．

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1=x,\quad x_2=\frac{dx}{dt}$$

ただし，m, c, k は実数定数であって，m は 0 ではない．

(東京大 2017)　　(m20170701)

0.36 2 つの正方行列 A, B を

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\qquad B=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}+1 & \frac{1}{\sqrt{2}}-1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}-1 & \frac{1}{\sqrt{2}}+1 & 1 \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

とし，行列 C を $C = BAB^{-1}$ とする．以下の問いに答えよ．なお，以下では任意のベクトル $\overrightarrow{x}$ に対し $\overrightarrow{x}^T$ はその転置を表すものとする． また，行列 I を単位行列とし， ある正方行列 X に対して $\exp(X)$ を

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots$$

と定義する．

(1) 行列 A の固有値を複素数の範囲で求めよ．

(2) 行列 C の固有値を複素数の範囲で求めよ．

(3) あるスカラー変数 t に対して $\exp(At)$ を求めよ．

(4) 3 次元ベクトル $\overrightarrow{x}$ に対してスカラー関数 $f(\overrightarrow{x})$ を

$$f(\overrightarrow{x}) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \exp\left(C\frac{2\pi k}{n}\right)\overrightarrow{a} - \overrightarrow{x} \right\}^T \left\{ \exp\left(C\frac{2\pi k}{n}\right)\overrightarrow{a} - \overrightarrow{x} \right\}$$

とおく．ただし，n は $n > 1$ を満たす整数，$\overrightarrow{a}$ は以下のような 3 次元ベクトルである．

$$\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

関数 $f(\overrightarrow{x})$ を最小にする $\overrightarrow{x}$ は，ある単位ベクトル $\overrightarrow{b}$ を用いて以下のような形式で表せる．

$$\overrightarrow{x} = \boxed{\text{（ア）}} \left(\sum_{k=1}^{n} \boxed{\text{（イ）}} \right) \overrightarrow{b}$$

(a) (ア) と (イ) に入る数式を書け．必要であれば a_1，a_2，a_3，n，k を用いてよい．なお，行列を含まない形式で解答すること．

(b) $\overrightarrow{b}$ を求めよ．

(5) (4) で求めた $\overrightarrow{x}$ に対して，$n \to \infty$ としたときの $\overrightarrow{x}$ を a_1，a_2，a_3 を用いて表せ．

(東京大 2018)　　(m20180705)

0.37 i を虚数単位とし，w と z は複素数とする．また，e を自然対数の底とする．以下の問いに答えよ．

(1) 次の式を満たす複素数 A を考える．

$$A^6 = i$$

(a) A を全て求めて $x + iy$ (x, y は実数) の形で求めよ．x, y の表式は三角関数を用いて書き下せ．

(b) A を全て求めて $x + iy$ (x, y は実数) の形で求めよ．ただし，x, y の表式は三角関数や指数関数を含んではならない．

(c) A を全ての点を複素平面上に図示せよ．

(2) a と t を実数として，以下の積分値を求めたい．

$$F(a) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{d}{dt} \log_e(1 + ae^{it}) \right] dt$$

(a) $z = e^{it}$ と変数変換を行う事により，複素積分に変形せよ．また，被積分関数に対して全ての極と対応する次数，および留数を求めよ．

(b) a で場合分けして，$F(a)$ を求めよ．ただし，極が積分路上にある場合は考えなくて良い．

(c) 複素平面上で $1+ae^{it}$ を t の関数として考え，$F(a)$ が a に対して変化する事を文章で説明せよ．

(3) 以下の関数で定義される w に関して，$z = x + iy$ が上半面 $y > 0$ を満たす範囲を動くとき，w が動く範囲を複素平面上に図示せよ．

$$w = \frac{i-z}{i+z}$$

(東京大 2022)　　(m20220703)

0.38 行列 $A = \begin{bmatrix} -8 & -2 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \\ -6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ について，

(1) 固有値を求めよ．

(2) 固有値に対する基底ベクトルを求めよ．

(東京工業大 2001)　　(m20010806)

0.39 a を実数として，$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & a \\ 4 & 3a & 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする．

(1) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{0}$ でない解 $\boldsymbol{x}$ をもつような a の値をすべて求めなさい．

(2) (1) の方程式の $\boldsymbol{0}$ でない解 $\boldsymbol{x}$ のうち，x_1, x_2, x_3 がすべて整数で，$x_1 + x_2 + x_3$ が最小の正の整数となるような $\boldsymbol{x}$ を，(1) で定めたそれぞれの a について，求めなさい．

(東京農工大 2009)　　(m20090901)

0.40 次の 4 次正方行列 A, B に対して $A, B, A^{-1}B$ の行列式を求めなさい．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2a+b & 2c+d & 0 & b \\ a+b & c+d & -a & b \\ -a-b & -c-d & 3a & b \\ -2a+b & -2c+d & a & b \end{bmatrix}$$

(電気通信大 2007)　　(m20071001)

0.41 $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 5 & 9 & 7 \\ -8 & -14 & -11 \end{bmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) A の行列式 $\det(A)$ と階数 $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ．

(2) A^2 の行列式 $\det(A^2)$ と階数 $\mathrm{rank}(A^2)$ を求めよ．

(3) $T_A(x) = Ax$ で定まる写像 $T_A : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ の像 $\mathrm{Im}\, T_A$ の次元を求めよ．

(4) $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底で，次の条件を満たすものを構成せよ．
（条件）一つめのベクトルだけが T_A の核 $\mathrm{Ker}\, T_A$ に属する．
注 ： $\mathrm{Im}\, T_A = \{T_A(x) \mid x \in \boldsymbol{R}^3\}$,　$\mathrm{Ker}\, T_A = \{x \in \boldsymbol{R}^3 \mid T_A(x) = 0\}$.

(電気通信大 2008)　　(m20081001)

0.42 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ とおく．

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立であることを証明せよ．

(2) $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表されるか表されないかを判定し，表される場合は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表せ.

(電気通信大 2008)　　(m20081002)

0.43 行列 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ で定義される xy 平面の 1 次変換について，以下の問いに答えよ.

(1) 直線 $y = 3x$ の像を求めよ.

(2) 原点を通る直線のうち，その像が原点だけになるものを求めよ.

(3) 原点を通る直線のうち，その像がその直線自身になるものを求めよ.

(4) この 1 次変換による xy 平面の像を図示せよ.

(電気通信大 2009)　　(m20091001)

0.44 A を下に定める $2\times\ 2$ 行列とし，M は A などを用いて下のように定義される $4\times\ 4$ 行列とする（I は単位行列，O は零行列）．以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} -I & 2A^{-1} \\ A & O \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) M の行列式 $\det M$，および M の逆行列 M^{-1} を求めよ.

(3) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4$ について $M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ の解を求めよ.

(電気通信大 2010)　　(m20101001)

0.45 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ とし，I を 3 次の単位行列とする．以下の問いに答えよ.

(1) A の逆行列があれば求めよ.

(2) 行列式 $\det(\lambda I - A)$ を λ に関する多項式の形に整理せよ.

(3) $A\boldsymbol{x} = \lambda_0 \boldsymbol{x}$ となる $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ をもつような，実数 λ_0 を求めよ．また，そのときの $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ をひとつ答えよ.

(4) A^{2010} を求めよ.

(電気通信大 2011)　　(m20111001)

0.46 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とし，線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を

$$f(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1 + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{a}_2 + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{a}_3$$

で定める．ここで，$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}_i)$ は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{a}_i$ の $\mathbb{R}^4$ での標準内積を表す．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $f(\boldsymbol{a}_1)$，$f(\boldsymbol{a}_2)$，$f(\boldsymbol{a}_3)$，$f(\boldsymbol{a}_4)$ を求めよ.

(2) $\mathrm{Ker}(f)$ の次元と基底を求めよ.

(3) $\mathrm{Im}(f)$ の次元を求めよ.

(4) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ の基底 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$ に関する表現行列を求めよ.

(電気通信大 2011)　　(m20111002)

0.47　3 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1)　A の固有値をすべて求めよ．

(2)　A の各固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(3)　$B = P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正則行列 P と対角行列 B を 1 組求めよ．

(電気通信大 2012)　　(m20121001)

0.48　3 次正方行列 A と $\mathbb{R}^3$ の部分空間 V を次の通りとする．

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \\ -7 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 4x + y - 2z = 0 \right\}.$$

線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(x) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ で定める．以下の問いに答えよ．

(1)　f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元とその基底を 1 組求めよ．

(2)　V の部分空間 $V \cap \mathrm{Im}\, f$ の基底を 1 組求めよ．ただし，$\mathrm{Im}\, f$ は f の像を表す．

(3)　V の基底 $\{\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\}$ で，$\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u})$ を満たすものを 1 組求めよ．

(電気通信大 2012)　　(m20121002)

0.49　全微分可能な関数 $z = f(x, y)$ に対して，極座標による変数変換

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \quad (r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$$

を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$\left[\dfrac{\partial z}{\partial r}, \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right] = \left[\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right] A$ を満たす行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ を求めよ．

(2)　x, y の r, θ に関するヤコビアン（ヤコビの行列式）$\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を計算せよ．

(3)　$\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ を r, $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を使って表せ．

(電気通信大 2012)　　(m20121003)

0.50　3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を計算せよ．

(2) 原点を通り，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を含む $\mathbb{R}^3$ 内の平面の方程式を求めよ．

(3) 次の条件を満たす 3 次正方行列 A を求めよ．

(a) A の対角成分は上から $1, -5, 2$ である．

(b) $\boldsymbol{a}$ は A の固有値 2 に対する固有ベクトルである．

(c) $\boldsymbol{b}$ は A の固有値 -1 に対する固有ベクトルである.

(4) 前問の条件を満たす A の定める $\mathbb{R}^3$ の線形変換を考える．k, ℓ を実数とするとき $k\boldsymbol{a} + \ell\boldsymbol{b}$ のこの変換による像を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の線形結合で表せ.

(5) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を基底とする $\mathbb{R}^3$ の部分空間を W とする．A の定める W から W への線形変換の基底 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ に関する表現行列を求めよ.

(電気通信大 2013)　　(m20131001)

0.51 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を平面 $x + z = 0$ に関する対称移動とし，$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を平面 $y - z = 0$ に関する対称移動とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) 平面 $x + z = 0$ の原点を通る法線に点 (x, y, z) からおろした垂線の足を P とするとき，点 P の座標を求めよ.

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる 3 次正方行列 A を求めよ.

(3) 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ を解け.

(4) 平面 $x + z = 0$ と平面 $y - z = 0$ のなす角 θ を求めよ，ただし，$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ とする.

(5) $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は原点を通る直線を軸とする回転移動となる．軸となる直線の方向ベクトルと回転する角度を答えよ.

(電気通信大 2013)　　(m20131002)

0.52 4 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^4$ を以下で定義する.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

さらに，$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を V とし，線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ で定義する．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) 不適切な設問により解答を導き出せないという出題ミスがあったため, 掲載を差し控えさせていただきます.

(2) f を部分空間 V に制限して得られる線形写像を

$$g : V \to V\ , \qquad g(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in V)$$

とするとき，g の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\}$ に関する表現行列 B を求めよ.

(3) B の固有ベクトルをすべて求め，その各固有値に対する B の固有ベクトルを求めよ.

(4) V の基底 $\{\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2\}$ に関する g の表現行列が対角行列になるような基底 $\{\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2\}$ を 1 組求めよ.

(電気通信大 2014)　　(m20141001)

0.53 4 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^4$ を以下で定義する.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -7 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \\ 11 & -9 & 13 & -11 \\ 18 & -16 & 10 & -8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

さらに，$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を V とし，線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元 $\dim \mathrm{Im}\, f$ および f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元 $\dim \mathrm{Ker}\, f$ を求めよ．

(2) $\mathrm{Ker}\, f \subset V$ を示せ．

(3) V と $\mathrm{Im}\, f$ の共通部分 $V \cap \mathrm{Im}\, f$ の次元を求め，その基底を 1 組求めよ．

(電気通信大 2014)　　(m20141002)

0.54　a を実数とし，4 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^4$ を次の通りとする．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 2 \\ -1 & -6 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & -16 & a \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

さらに, 線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \ (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元 $\dim(\mathrm{Im}\, f)$ を，a の値に応じて場合分けして求めよ．

(2) $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$ のとき，f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を 1 組求めよ．

(3) $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$ のとき，$\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\, f$ となることを示し，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解を求めよ．

(電気通信大 2015)　　(m20151001)

0.55　線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$，$p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$，$q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$，を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}, \quad p\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad q\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

で定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Ker}\, p \subset \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$ を示せ．
ここで，$\mathrm{Ker}\, p$ は，p の核，$\mathrm{Ker}\,(g \circ f)$ は合成写像 $g \circ f$ の核である．

(2) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，を条件 $g \circ p = q \circ f$ を満たす線形写像とする．$g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$ を求め，$\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する g の表現行列 A を求めよ．

(3) A の固有値をすべて求めよ．

(電気通信大 2015)　　(m20151002)

0.56　3 次正方行列 A と $\mathbb{R}^3$ 内の平面 P を次式で定義する．

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -18 & 3 \\ 2 & -6 & 1 \\ 4 & -14 & 3 \end{bmatrix}, \qquad P = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x - 2y + z = 4 \right\}$$

さらに，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ で定義する．
このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求めよ．

(2) $\mathrm{Im}\, f$ と P の共通部分 $l = (\mathrm{Im}\, f) \cap P$ は，$\mathbb{R}^3$ 内の直線とみなすことができる．
$\mathbb{R}^3$ 内の原点 O から直線 l へ垂線 OH を下ろすとき，点 H の座標を求めよ．

(3) $\boldsymbol{x} \in P$ かつ $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を求めよ．

(電気通信大 2016)　　(m20161001)

0.57 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を次式で定義する．

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_2 \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$$

ただし，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i)$ は，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{v}_i$ の $\mathbb{R}^3$ における標準内積とする $(i = 1, 2)$．
さらに，W を $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^3$ の部分空間とし，線形写像 $g : W \to W$ を

$$g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \qquad (f(\boldsymbol{x}) \in W)$$

で定義するとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を求めよ．

(2) W の基底 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ に関する g の表現行列 A を求めよ．

(3) A の固有値をすべて求めよ．

(電気通信大 2016)　　(m20161002)

0.58 次の 3 次正方行列 A に対して，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 3 \\ 6 & -5 & 2 \\ -24 & 12 & -7 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の各固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(3) A の階数 $\mathrm{rank}\, A$ を求めよ．

(電気通信大 2017)　　(m20171001)

0.59 p, q を実数とし，3 次正方行列 A, B を次の通りとする．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} p & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \\ 7 & 0 & q \end{bmatrix}$$

さらに，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,　$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ をそれぞれ

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \qquad g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$$

で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求め，その基底を 1 組求めよ．

(2) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ が $\mathrm{Im}\, f$ に含まれるための x, y, z の条件を求めよ．

(3) $g(\mathrm{Im}\, f) \subset \mathrm{Im}\, f$ となるような p, q の値を求めよ．ただし，$g(\mathrm{Im}\, f) = \{g(x) \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}\, f\}$ とする,.

(電気通信大 2017)　　(m20171002)

0.60 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合として表せ．

(2) 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{v}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{v}_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

で定義する．線形写像 f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求め，その基底を 1 組求めよ．

(3) (2) で定義した線形写像 f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求め，その基底を 1 組求めよ．

(電気通信大 2018) (m20181001)

0.61 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ に対して，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(x) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ で定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ が零ベクトルでない解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ をもつとする．このような実数 λ の値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めたそれぞれの λ に対して，$\mathbb{R}^3$ の部分空間 $V_\lambda = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\right\}$ の基底を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$ をうまくとると，f の基底 $\boldsymbol{B}$ に関する表現行列 M は対角行列となる．このような $\boldsymbol{B}$ および M を 1 組求めよ．

(電気通信大 2018) (m20181002)

0.62 次の 3 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 3 \\ -6 & -7 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の最大の固有値に対応する固有ベクトルをひとつ求めよ．

(3) $\boldsymbol{a}_n = A^n\boldsymbol{a}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ と定義するとき，$\boldsymbol{a}_n$ を求めよ．

(電気通信大 2019) (m20191001)

0.63 a, p, q を実数の定数として，行列 A, B を次で定義する，

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & a & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ p & q & 2 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

さらに，線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$，$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ をそれぞれ

$$f(x) = Ax \quad (x \in \mathbb{R}^4), \qquad g(v) = Bv \quad (v \in \mathbb{R}^3)$$

で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元が最大となる a の値 a_0 を求めよ．さらに，そのときの $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を 1 組求めよ．

(2) $a = a_0$ のとき，f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の基底を 1 組求めよ．

(3) $a = a_0$ のとき，$g(\mathrm{Im}\, f) \subset \mathrm{Ker}\, f$ が成り立つような定数 p, q の値を求めよ．
ただし，$g(\mathrm{Im}\, f) = \{g(v) \mid v \in \mathrm{Im}\, f\}$ である．

(電気通信大 2019)　　(m20191002)

0.64 a を実数とし，行列 $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -1 & 8 & -3 \\ 3 & 3 & -3 & 1 & -8 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 & -1 & a \end{bmatrix}$ とする．

線形写像 $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ を $f(x) = Ax \ (x \in \mathbb{R}^5)$ で定義する．以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im} f$ ついて，$\mathrm{Im} f \neq \mathbb{R}^4$ となるための a の値を求めよ．

(2) a が (1) で求めた値のとき，f の核 $\mathrm{Ker} f$ の次元 $\dim \mathrm{Ker} f$ を求め，その基底を 1 組求めよ．

(3) a が (1) で求めた値のとき，$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 16 \\ 7 \\ b \end{bmatrix} \in \mathrm{Im} f$ となる b の条件を求めよ．

(電気通信大 2020)　　(m20201001)

0.65 3 次正方行列 A と $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{v}$ を次の通りとする．以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の実数の固有値と，それに対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) $\boldsymbol{v}$, $A\boldsymbol{v}$, $A^2\boldsymbol{v}$ が 1 次独立でないことを示せ．

(3) $A^3\boldsymbol{v}$, $A^4\boldsymbol{v}$ をそれぞれ $\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{v}$ の 1 次結合で表せ

(電気通信大 2020)　　(m20201002)

0.66 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ に関する以下の問いに答えよ．

(1) I を 3 次単位行列とするとき，行列 $(A - 2I)(A - 3I)$ を求めよ．

(2) A の固有値をすべて求めよ．

(3) A の m 乗 A^m（m は非負整数）を

$$A^m = \lambda_1^m P_1 + \lambda_2^m P_2$$

という形に表せ．ここで，P_1, P_2 は 3 次正方行列であり，P_1, P_2 の各成分，および λ_1, λ_2 は，m に依存しない定数である．

(電気通信大 2021)　　(m20211002)

0.67 線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を以下で定義する．

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 3y + 6z + 4w \\ -3x + 3y - 8z - 4w \\ 2x + 3y - 3z - 4w \\ -5x + 6y - 15z - 8w \end{bmatrix}$$

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元と基底を求めよ．

次に，4 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & -4 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ を用いて，線形写像 $g\ :\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を

$g(x) = Ax \quad (x \in \mathbb{R}^4)$ で定義する．

(2) g の像 $\mathrm{Im}\, g$ の次元と基底を求めよ．

(3) 共通部分 $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, g$ の基底を求めよ．

(電気通信大 2022)　　(m20221001)

0.68　3 次正方行列 $M = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -10 & 8 & -4 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ を考える．

(1) M の固有値をすべて求め，さらに最小の固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

次に，$\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3)$ と線形写像 $f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を考える．
基底 $\mathcal{A}$ に関する f の表現行列が M であるとする．

(2) $f(\boldsymbol{a}_1)$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表せ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3)$ を考える．基底 $\mathcal{B}$ に関する f の表現行列が対角行列になっているとする．このような $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3)$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ を用いて一組求めよ．

(電気通信大 2022)　　(m20221002)

0.69　以下の行列 A の固有値をすべて求めよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 7 \\ 7 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

(横浜国立大 2005)　　(m20051101)

0.70　(1)　以下の行列 A の行列式を求めよ．　$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 2 & 2 \\ x & y & 3 & 3 \\ x & y & z & 4 \end{bmatrix}$

(2)　以下の行列 B の B^n を求めよ．　$B = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}$　但し，$n = 1, 2, 3, \cdots,$ とする．

(横浜国立大 2006)　　(m20061102)

0.71　行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ に関して以下の問いに答えよ．

(1) 逆行列を求めよ．　　(2) 固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) (2) で求めた固有ベクトルが線形独立である事を示せ．

(横浜国立大 2007)　　(m20071101)

0.72 (1) 1 階常微分方程式の一般形は以下のように与えられる．

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad ①$$

この式の解の公式を導く．以下の記述の空欄を埋めなさい．

まず，同次（斉次）方程式の解を求める．① の同次方程式は以下のように表される．

$$y' + P(x)y = \boxed{\text{（ア）}}$$

この同次方程式は，変数分離形であるので，解は，任意の定数を C として，以下のように求められる．

$$y = C \cdot \boxed{\text{（イ）}} \qquad (\cdot \text{ は積を意味する.})$$

この結果を用いて，① の解を定数変化法で求める．従って，① の解を

$$y = C(x) \cdot \boxed{\text{（イ）}} \qquad ②$$

とおく．これを ① の左辺に代入して整理すると

$$y' + P(x)y = C' \cdot \boxed{\text{（イ）}} = Q(x)$$

すなわち，

$$C' = Q(x) \cdot \boxed{\text{（ウ）}}$$

両辺を積分して $C(x)$ を求め，② に代入すると，① の解の公式が以下のように求められる．

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

(2) (1) を参考にして，微分方程式を解く方法のひとつである，“定数変化法”について説明しなさい．

(3) 次の微分方程式を (1) の公式を用いて解きなさい．

$$y' - y = e^x$$

(横浜国立大 2008) (m20081103)

0.73 以下の行列 A に対して，次の問いに答えよ．

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A^2 を求めよ．

(3) A の逆行列を求めよ．

(横浜国立大 2009) (m20091102)

0.74 以下の $n \times\ n$ 行列 J_n を考える．

$$J_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

例えば,

$$J_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad J_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

である, J_n の行列式を a_n とおくとき, 次の問いに答えよ.

(1) a_2 を求めよ.

(2) a_3 を求めよ.

(3) a_4 を求めよ.

(4) a_n を求めよ. 但し, $n = 2, 3, 4, \cdots$

(横浜国立大 2011) (m20111101)

0.75 以下の行列 A に対して, 次の問いに答えよ. 但し, $i = \sqrt{-1}$ とする.

$$A = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}i \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A の逆行列を求めよ.

(横浜国立大 2015) (m20151101)

0.76 次の行列 A に対して, 多項式 $f(x)$ を $f(x) = \det(xE - A)$ で定義する. ただし, E は $3 \times\ 3$ の単位行列とする.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値を求めよ. (2) $f(A)$ を求めよ. (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ を求めよ.

(横浜国立大 2016) (m20161101)

0.77 行列 $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ および, $B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ に関して以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値とその固有ベクトルを求めよ.

(2) A^n を $\sin(n\theta)$, $\cos(n\theta)$ で表わせ. また, その求め方を説明せよ.

(3) B^n を $\sin(n\theta)$, $\cos(n\theta)$ で表わせ. また, その求め方を説明せよ.

(横浜国立大 2017) (m20171103)

0.78 以下の行列 A が与えられている.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & a \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ただし, A は異なる 2 つの実数を固有値として持つ. また, 定数 a は正の実数である.

このとき, 次の問いに答えよ.

(1) a の値を求めよ.

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(3) A^{-1} を求めよ.

(横浜国立大 2018)　　(m20181101)

0.79 次の行列 A が，1 と 4 を固有値としてもつとき，以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & a \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

ただし，a は実数の定数である.

(1) a を求めよ.

(2) 行列 A の固有ベクトルを求めよ.

(3) 行列 A を対角化せよ.

(4) A^n を計算せよ.

(横浜国立大 2019)　　(m20191101)

0.80 次の行列 A および B に関して以下の問いに答えよ.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix} \qquad B = \frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & a & -1 & -a \end{bmatrix}$$

ただし，a は実数の定数であり，$A^{-1} = A^T$ が成り立つものとする．なお，任意の実数行列 X の逆行列を X^{-1} と表し，転置行列を X^T と表す.

(1) a を求めよ.

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(3) BB^T を求めよ.

(4) B の逆行列 B^{-1} を求めよ.

(横浜国立大 2021)　　(m20211101)

0.81 無限回微分可能な関数 $f(x)$ を，定数 a の周りで Taylor 級数に展開すると，

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

となる．ただし，

$$f^{(n)}(a) = \left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right]_{x=a}$$

である．この関係を基に以下の設問に答えなさい.

(1) (a) e^x を原点 0 の周りに Taylor 級数に展開しなさい.

(b) $\cos x$ を原点 0 の周りに Taylor 級数に展開しなさい.

(c) $\sin x$ を原点 0 の周りに Taylor 級数に展開しなさい.

(2) (1) の結果を用いて，次の Euler の公式が成り立つことを示しなさい．ただし，i は虚数単位で，$i^2 = -1$ である.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

(3) (2) の結果を基に，次の等式が成り立つことを示しなさい.

$$e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)}$$

(千葉大 2000)　　(m20001201)

0.82 次の行列 A について答えなさい.　$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) 固有ベクトルを用いて A を対角化しなさい.

(千葉大 2004)　　(m20041204)

0.83 次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ に関する以下の問いに答えなさい.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は線形独立であることを示しなさい.

(2) 以下の手順に従って, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ から, 互いに直交する大きさ 1 の 3 つのベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ を求めなさい.

(a) $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{\boldsymbol{a}_1}{||\boldsymbol{a}_1||}$ を求める.

(b) $\boldsymbol{a}_2$ の $\boldsymbol{u}_1$ に直交する成分 $\boldsymbol{b}_2$ を求め, $\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{\boldsymbol{b}_2}{||\boldsymbol{b}_2||}$ を求める.

(c) $\boldsymbol{a}_3$ の $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ に直交する成分 $\boldsymbol{b}_3$ を求め, $\boldsymbol{u}_3 = \dfrac{\boldsymbol{b}_3}{||\boldsymbol{b}_3||}$ を求める.

(千葉大 2010)　　(m20101202)

0.84 次の行列 A, ベクトル $\boldsymbol{b}$ に関する以下の設問に答えなさい.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(1) A^TA を求めなさい．ただし，A^T は A の転置行列である.

(2) A^TA が逆行列を持つことを示しなさい.

(3) $||A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}||^2$ が最小となるような変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ を，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ と置いたとき，p, q の値を求めなさい．ただし，$||\boldsymbol{a}||$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ の長さを表す.

(千葉大 2011)　　(m20111202)

0.85 次の重積分に関して以下の問に答えなさい.

$$I = \iint_D \frac{x+y}{y^2} \sin(x+y)\, dxdy$$

$$D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 1 \leq y \leq 2\,,\ 0 \leq x \leq y \right\}$$

(1) 積分領域 D を $u = x + y,\ v = \dfrac{x}{y}$ の関係で (u, v) へ変数変換した場合の D に対応する積分領域を D' とする．$O{-}xy$ 平面での D，および，$O{-}uv$ 平面での D' を図示しなさい.

(2) 関数行列式（ヤコビアン）$J(x,y) = \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$ を求めなさい.

(3) 重積分 I の値を求めなさい.

(千葉大 2016)　　(m20161203)

0.86 実対称行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ について，以下の問に答えなさい.

(1) 行列 A は，異なる二つの実数の固有値 λ_1，λ_2 を持つ（ただし，$\lambda_1 < \lambda_2$）．λ_1，λ_2 を求めなさい.

(2) 行列 A は，ある直交行列 Q によって $Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ と対角化できる．この直交行列 Q を求めなさい．（なお，実正方行列 Q が ${}^t\!QQ = I$（I は単位行列）を満たすとき，Q を直交行列という）

(千葉大 2017)　　(m20171202)

0.87 正方行列 A に関して，以下の問いに答えよ.

(1) $A \neq O$ であるとき，A が $A^2 = O$ を満足するなら（つまり，A がべき零行列なら），$I + A$ は正則である（逆行列を持つ）ことを示せ．ただし，行列 O , I はそれぞれ零行列，単位行列である.

(2) A として次のような 2 行 2 列の行列を考える.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

この行列の固有値を求めよ．ただし，a, b, c, d は一般には複素数である.

(3) (2) において，A の固有値が重根となるための条件を示し，これに対する規格化された固有関数をすべて求めよ.

(4) (2) における行列 A が，べき零行列であるための条件を求めよ．この条件と (3) の結果に基づいて，A の固有値は重根 0 となることを示し，これに対する規格化された固有関数をすべて求めよ.

(筑波大 2000)　　(m20001308)

0.88 2 次曲線 $-{x_1}^2 + 4x_1x_2 + 2{x_2}^2 = 1$ を行列で表すと

$$[\, x_1 \quad x_2 \,] \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1 \cdots (*)$$

となる．以下の問いに答えよ.

(1) 行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2 \ (\lambda_1 < \lambda_2)$ を求めよ.

(2) 固有値 λ_1, λ_2 について，それぞれの正規化された固有ベクトル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ を求めよ.

(3) 行列 $P = [\,\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2\,]$ を用いた変換

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y}\ , \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\ , \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

によって，式 $(*)$ を $y_1, y_2, \lambda_1, \lambda_2$ のみで表せ．

ヒント: P が直交行列（${}^tP = P^{-1}$，上付き添字の t は行列の転置）であることを利用する．

(4) 式 (1) で表される図形の種類は何か．

(筑波大 2000）　(m20001309)

0.89 ベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ が 1 次独立か否かを判定せよ．

(筑波大 2001)　(m20011307)

0.90 実数の定数 $\alpha,\ \beta$ に対し，行列 $A,\ P$ を

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) $P^n\ (n \geqq 2)$ を求めよ．

(2) $A,\ A^2$ を $\alpha,\ \beta,\ I,\ P,\ P^2$ を用いて表せ．ただし，I は 3 次の単位行列を表す．

(3) $A^n\ (n \geqq 2)$ を $n,\ \alpha,\ \beta,\ I,\ P,\ P^2$ を用いて表せ．A^n はどのような行列になるか．

(4) $\exp A$ を $\alpha,\ \beta$ を用いてできるだけ簡単な行列の形に直せ．ただし，$\exp A$ は，

$$\exp A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots$$

で定められる行列を表す．

(5) $\exp(-A)$ を $\alpha,\ \beta,\ I,\ P,\ P^2$ を用いて表し，$(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$ であることを証明せよ．

(筑波大 2001)　(m20011308)

0.91 行列 $A = \begin{bmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{bmatrix}$ に関して，以下の問に答えよ．ただし，$0 < a < 1$ かつ $0 < b < 1$ とする．

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化する必要はない．

(2) 上で求めた固有ベクトルのもとで行列 A を対角化したときの対角行列 B を求めよ．

(3) 行列 A の対角化を用いて，A^n を求めよ（n は自然数）．

(筑波大 2001)　(m20011310)

0.92 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ とする．

(1) A の固有値と対応する固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) ある正則行列 P を用いて, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}$ と対角化することは可能か. 可能であれば, P の成分と $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の値を求めよ. 対角化不可能であれば, その理由を説明せよ.

(筑波大 2004)　　(m20041322)

0.93 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & a & b \end{bmatrix}$ とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 行列 A が正則であるための a, b の条件を述べよ.

(2) $a = -1$, $b = 1$ のとき, 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(筑波大 2005)　　(m20051303)

0.94 未知数 $x_1, \cdots x_n$ についての連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考える. ここで,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

である. さらに, A の第 i 列の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ とおくことにより $A = [\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n]$ と表す. このとき, 以下の設問に答えよ.

(1) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ が存在するための必要十分条件は $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$ の 1 次結合で表されることである. このことを示せ.

(2) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ が存在するための必要十分条件は $\mathrm{rank}[\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n] = \mathrm{rank}[\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n \ \boldsymbol{b}]$ が成り立つことである. このことを示せ. ここで, $[\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n \ \boldsymbol{b}]$ は A の右側に列ベクトル $\boldsymbol{b}$ を加えた m 行 $n+1$ 列の行列を表す.

(3) 次の連立 1 次方程式の解が存在するかどうか調べ, 存在するときはそれを求めよ.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

(4) 次の連立 1 次方程式の解が存在するかどうか調べ, 存在するときはそれを求めよ.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 7 \\ -2x_1 - 5x_2 - x_3 + 13x_4 = -12 \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 21x_4 = 19 \end{cases}$$

(筑波大 2005)　　(m20051312)

0.95 関数　$f(x) = \exp\left[-\dfrac{(x-a)^2}{2}\right]$　について，次の問いに答えなさい.

(1) $f(x)$ の 1 次導関数 $f'(x)$ を求め，$f'(x) = 0$ となる x の値を示せ.

(2) $f(x)$ の 2 次導関数 $f''(x)$ を求め，$f''(x) = 0$ となる x の値を示せ.

(筑波大 2006)　　(m20061304)

0.96 線形写像　$f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$　$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax_1 + ax_2 + x_3 \\ ax_1 + x_2 + ax_3 \\ x_1 + ax_2 + ax_3 \end{bmatrix}$　$(a \in \boldsymbol{R})$

について, 以下の問に答えなさい.

(1) f の標準基底に関する表現行列 F を求めよ.

(2) f が全単射（写像の表現行列が正則）となる条件を求めよ.

(3) f が全単射であるとき，逆写像 f^{-1} の標準基底に関する表現行列を求めよ．

(筑波大 2007)　　(m20071315)

0.97 2 次の実対称行列 A で作った 2 次形式が次のように与えられたとする． ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = 2x^2 - 4xy + 5y^2$

ここで　$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，${}^t\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$　である．

(1) A の固有値と固有ベクトル（正規化したもの）をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた固有ベクトルを並べて作った 2 次の正方行列 P とその転置行列 ${}^tP$ を使って ${}^tPAP$ を計算せよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{x}$ に適当な一次変換を行い上記の 2 次形式を標準形に変換せよ．

(筑波大 2007)　　(m20071320)

0.98 以下の 4 つの列ベクトルがあるとする．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(1) 三つの列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が一次独立となる条件を述べなさい．

(2) 次に (1) と異なり，三つの列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が一次従属だと仮定する．このとき，ベクトル $\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線形結合として表せますか？表せる場合はその式を示しなさい．表せない場合はその理由を説明しなさい．

(筑波大 2008)　　(m20081301)

0.99 列ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$ を二つの列ベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ が張る空間に射影することを考える． いま $\boldsymbol{a}_1$ を第一列，$\boldsymbol{a}_2$ を第二列，としてもつ 3 行 2 列の行列を A とする．

(1) 3 次元空間にベクトル $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)$ を示す図を描きなさい．

(2) $\boldsymbol{b}$ を $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)$ の張る平面へ射影する点を $p = A\overline{x}$ ，ここで $\overline{x}$ は $2\times\ 1$ 行列，とする．$\overline{x}$ を求める式が $A^TA\overline{x} = A^T\boldsymbol{b}$ で与えられる理由を説明しなさい．なお A^T は行列 A の転置をあらわす．

(3) この時射影された点 p の座標を示しなさい．

(4) この射影を与える $\overline{x}$ の成分 $\overline{x} = (\overline{x}_1\ ,\ \overline{x}_2)^T$ を求めなさい．

(筑波大 2008)　　(m20081302)

0.100 方程式 $x^3 - 1 = 0$ の 3 つの根を 1, α, β とし，$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha+\beta}{2} & \dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \dfrac{\alpha-\beta}{2} & \dfrac{\alpha+\beta}{2} \end{bmatrix}$ とする．

(1) A^3 を α, β を用いずに表せ．　(2) A^2 の逆行列を，A を用いて表せ．

(3) A^7 を α, β を用いて表せ．　(4) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(5) A を対角化せよ．

(筑波大 2008)　　(m20081312)

0.101 いま以下のような連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = b$ があるとします.

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & -8 & 0 \\ -2 & 10 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 10 \end{bmatrix} = b\,.$$

この連立方程式を解くために以下のはきだし法を用いることを考える.

(a) 1 行目の方程式を 2 倍して 2 行目の方程式から引く．この操作をする行列を E とする.

(b) 1 行目の方程式を -1 倍して 3 行目の方程式から引く．この操作をする行列を F とする.

(c) これらの操作の後，2 行目の方程式を -1 倍して 3 行目の方程式から引く．この操作をする行列を G とする.

この結果として新しい係数行列 U をもった以下のような連立一次方程式 $U\boldsymbol{x} = d$ がつくられた.

$$U\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -14 \\ 1 \end{bmatrix} = d\,.$$

(1) この連立一次方程式の解 $\boldsymbol{x}$ を求めなさい.

(2) 行列 U は上三角行列になっているが，このはきだし法を行う過程で用いた $GFEA = U$ となる行列 E, F, G を求めなさい.

(3) またこれらの行列のうち E の作用の逆，すばわち，第 1 行の 2 倍を第 2 行に加える行列を求めなさい．この行列を E' とすると $E'\,E$ はどんな行列になるか答えなさい.

(4) 上記の (2) から $E^{-1}F^{-1}G^{-1}U = A$ と表せるが，この行列 $E^{-1}F^{-1}G^{-1} = L$ が下三角行列になることを示しなさい.

(5) 上記の (2) から (4) ではきだし法を用いて，行列 A が下三角行列 L と上三角行列 U との積，すなわち，$A = LU$ と表されることがわかった．これと同じ考え方を用いて以下の行列 B を下三角行列と上三角行列との積であらわしなさい.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(筑波大 2009)　　(m20091301)

0.102 次の連立一次方程式を掃き出し法によって三角行列に変形して，x_1, x_2, x_3 を求めなさい．解答に際しては，以下の各段階に対応する行列を明記しなさい.

$$\begin{cases} 10x_1 - 30x_2 + 20x_3 = 310 \\ 3x_1 - 4x_2 - 69x_3 = 43 \\ 9x_1 - 20x_2 - 82x_3 = 334 \end{cases}$$

第 1 段階

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

第 2 段階

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \end{array}\right]$$

第 3 段階

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]$$

(筑波大 2011)　　(m20111307)

0.103　ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

に対して線形変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が $f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{e}_1$, $f(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{e}_2$ を満たすとき，未知数 y を成分に含むベクトル

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

に関して以下の設問に答えよ．

(1)　$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ が線形独立となる必要十分条件を求めよ．

(2)　$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ が線形従属のとき，$\boldsymbol{c}$ の f による像 $f(\boldsymbol{c})$ を求めよ．

(3)　$f(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{e}_3$ ならば，f に逆写像 f^{-1} が存在し，$f^{-1}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を満たす行列 A は $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}]$ に等しいことを示せ．

(4)　$f(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{e}_3$ のとき，$f(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ を満たす行列 B を求めよ．

(筑波大 2011)　　(m20111310)

0.104　E を単位行列とするとき, 次の実交代行列 A に対して，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(1)　$E + A$ の逆行列を求めよ．

(2)　上の結果を利用して，$P = (E - A)(E + A)^{-1}$ を求めよ．

(3)　P は直交行列であることを示せ．

(筑波大 2012)　　(m20121307)

0.105　方程式 $\sin x = 0$ の解は $x = m\pi(0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots)$ であることから，多項式

$$g_n(x) = Cx\left[\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\right]\ \left[\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\right]\cdots\left[\left(1 - \frac{x}{n\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{n\pi}\right)\right]$$

は，定数 C を適切に選べば $x = 0$ のまわりで $\sin x$ の良い近似であることがわかっている．

ここで，n は正の大きな整数である．この多項式と $x = 0$ のまわりでのベキ級数展開

$\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$ を比較する．ここで，$a_k(k = 0, 1, 2, \cdots)$ は定数である．

(1)　$\sin x$ のベキ級数展開の 3 次の項まで，すなわち a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ．

(2)　多項式 $g_n(x)$ と (1) で求めたベキ級数展開との 1 次の項の係数が一致するように C の値を決めよ

(3)　多項式 $g_n(x)$ と (1) で求めたベキ級数展開との 3 次の項の係数は $n \to \infty$ の極限で一致する．このことを使って，無限級数 $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} + \cdots$ の和 S を求めよ．

(筑波大 2012)　　(m20121310)

0.106 $\boldsymbol{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \, x, y, z \in \boldsymbol{R} \right\}$ とし，線形変換 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ は，$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$，

$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$，　$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ を満たすとする．

(1) この線形変換 f の標準的な基底に関する行列表現を示せ．

(2) ある実数 $\lambda(\neq 0)$ が存在して，$f(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ のうち，$||\boldsymbol{x}|| = 1$ を満たすベクトルをすべて求めよ．

(3) 整数 $n(> 0)$ に対し，線形変換 f^n を，$f^1(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$，$f^n(\boldsymbol{x}) = f\big(f^{n-1}(\boldsymbol{x})\big)$ で帰納的に定義する．f^n の標準的な基底に関する行列表現を，直交行列と対角行列を用いて表せ．

(筑波大 2014)　　(m20141302)

0.107 n 次元実数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ において，内積を標準内積（自然な内積）で定義する．A を n 次直交行列，F を $F(x) = A\boldsymbol{x}$ で定められる $\boldsymbol{R}^n$ の線形変換とするとき，以下の問いに答えよ．なお，$\boldsymbol{R}^n$ のベクトルはすべて列ベクトルとする;

(1) $\boldsymbol{R}^n$ のある正規直交基底を $c_1, \cdots, c_n$ とする．$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ で表すとき，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ の基底 $\{c_i\}$ に関する座標ベクトルは

$\begin{bmatrix} (\boldsymbol{x},\ c_1) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{x},\ c_n) \end{bmatrix}$ で与えられることを示せ．

(2) 直交変換の定義を正確に述べよ（同値な定義のどれでもよい）．また，F が直交変換である（直交変換の定義を満たす）ことを示せ．

(3) A の固有値 λ（実数に限らない）の絶対値は 1 であること ($|\lambda| = 1$) を示せ．

(筑波大 2015)　　(m20151311)

0.108 未知数 x, y を含む次の 3 つの行列に関して設問 (1)〜(4) に答えなさい．

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ y & 0 & 0 & x \end{bmatrix},\quad G(x) = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix},\quad H(y) = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix}$$

ただし，a, b, c はいずれも 0 でないものとする．

(1) $G(x)$ と $H(y)$ の行列式 $|G(x)|$ と $|H(y)|$ をそれぞれ求めなさい．

(2) $|G(x)| = |H(y)|$ が成り立つ必要十分条件を求めなさい．

(3) $|G(x)|$ と $|H(y)|$ を使って $F(x,y)$ の行列式 $|F(x,y)|$ を表しなさい．

(4) $|G(x)| \neq |H(y)|$ のとき，$|F(x,y)| = 0$ が成り立つ必要十分条件を求めなさい．

(筑波大 2015)　　(m20151320)

0.109 $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の独立な固有ベクトルをすべて求めよ.

(3) A は対角化可能であるかどうかを示せ. もし A が対角化可能ならば, $P^{-1}AP$ が対角行列になるような P を求めよ.

(筑波大 2016) (m20161310)

0.110 (1) 数列

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が単調減少であることを示せ.

(2) 上の数列が, $C \geqq \dfrac{1}{2}$ を満たすある定数 C に収束することを示せ.

(3) 広義積分

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \right) dx$$

の値を上の定数 C を用いて表せ. ただし, $[\alpha]$ は α を超えない最大の整数を表す.

(筑波大 2017) (m20171317)

0.111 (1) n 次正方行列 $A = (a_{ik})$ において, 第 i 行, 第 k 列を取り去って得られる $(n-1)$ 次行列式に符号 $(-1)^{i+k}$ をつけたものを A の第 $(i,\ k)$ 余因子といい, $\triangle_{ik}$ により表す. このとき, 以下の問に答えよ.

(a) A の行列式 $|A|$ を第 $(n,\ k)$ 余因子 $(k = 1, \cdots, n)$ を使って表せ.

(b) A の逆行列 A^{-1} の第 $(i,\ k)$ 成分を A の行列式と余因子により表せ.

(2) A を n 次正方行列, D を m 次正方行列とする. また, $O_{m,n}$ を $(m,\ n)$ 次の零行列, I_n, I_m をそれぞれ n 次と m 次の単位行列とする. A が正則であるとき,
行列の積 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ O_{m,n} & I_m \end{bmatrix}$ を求め, それから, $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ の行列式を求めよ.

(3) A, B, C を n 次正則行列, O_n を n 次零行列とするとき, $2n$ 次行列 $\begin{bmatrix} A & B \\ O_n & C \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(筑波大 2018) (m20181308)

0.112 $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) S の固有値をすべて求めよ.

(2) S の固有値に対応する固有ベクトルをすべて求めよ.

(3) S の固有値に対応する固有ベクトルを並べて得られる直交行列 P を一つ示せ.

(4) (3) の直交行列 P に対して, P^TSP を求めよ. ただし, P^T は P の転置行列である.

(筑波大 2018) (m20181309)

0.113 (1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次独立であるとき, ベクトル $3\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c}$ は一次独立であるか否かを示せ.

(2) 次の $\boldsymbol{a}_1$ から $\boldsymbol{a}_5$ のベクトルの中で，一次独立であるベクトルの数が最大となる一次独立ベクトルの組を 1 つ示せ．また，その他のベクトルを一次独立ベクトルの線形結合により表せ．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

(筑波大 2019)　　(m20191308)

0.114 次の行列 A について，以下の問に答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値を全て求めよ．

(2) (1) で求めた全ての固有値に対して固有ベクトルを求めよ．

(3) A は対角化可能か述べよ．また，対角化可能ならば，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P を求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191309)

0.115 ある企業で従業員の喫煙状況を調査したところ， 毎年，非喫煙者（喫煙経験がない者）の $\dfrac{1}{9}$ が喫煙を始め， 喫煙者のうち $\dfrac{1}{3}$ が禁煙する． また，禁煙者（かつて喫煙していて，かつ喫煙を止めた者）のうち $\dfrac{1}{6}$ は，再び喫煙を始めることが分かった．ただし，ある年の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数をそれぞれ x_0，y_0，z_0，その n 年後の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数をそれぞれ x_n，y_n，z_n とし，対象期間中に従業員は変わらないものとする．

(1) 1 年後の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数 x_1，y_1，z_1 を x_0，y_0，z_0 で表せ．

(2) ある年の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数とその n 年後の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数をそれぞれ

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

と書く．1 年後の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数を表す式を

$$\boldsymbol{x}_1 = A\boldsymbol{x}_0$$

としたとき，行列 A を求めよ．

(3) 行列 A の固有値と対応する固有ベクトルを全て求めよ．

(4) $\boldsymbol{x}_n$ を A と $\boldsymbol{x}_{n-1}$ で表せ．

(5) n 年後非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数を表す式を

$$\boldsymbol{x}_n = B\boldsymbol{x}_0$$

とする．このとき，行列 B を A を用いて表せ．さらに，行列 B を求めよ．

(6) ある年の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数はそれぞれ 1458 人，456 人，408 人だった．その 3 年後の禁煙者の人数を求めよ．

(筑波大 2020)　　(m20201303)

0.116 $n \times n$ 行列 A を

$$\begin{bmatrix} b & \cdots & \cdots & b & a \\ \vdots & & \iddots & a & b \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ b & a & \iddots & & \vdots \\ a & b & \cdots & \cdots & b \end{bmatrix}$$

とおく．但し，n は 2 以上の整数，a, b は実数で，$a \neq 0$ であるとする．以下の問に答えよ．

(1) 行列 A の行列式の値を a, b および n を用いて表せ．

(2) 行列 A の行列式の値が 0 となるようなすべての b に対して，b を a と n を用いて表せ．

(3) (2) で求めたそれぞれの b に対応する行列 A の階数を求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211309)

0.117 次の $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形変換 f について，以下の問に答えよ．

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} z \\ x+y \\ 4x \end{bmatrix}$$

(1) $H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ は $\mathbb{R}^3$ の標準基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ に関する f の表現行列であることを示せ．

(2) H の固有値，各固有値の固有空間をそれぞれ求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底で，その基底に関する f の表現行列が対角行列になるようなものを 1 つ求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211310)

0.118 次の 3 次正方行列を考える．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ．

(2) 行列 A のそれぞれの固有値に対応する，固有空間を張る（固有）ベクトルを求めよ．

(3) (2) で求めた固有ベクトルを用いて，3 次実数空間の正規直交基底を求めよ．

(4) (3) で求めた正規直交基底を並べた行列 P を用いて，行列 A を対角化せよ．

(筑波大 2022)　　(m20221305)

0.119 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ について以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{rank}\, A = 3$ となる a の実数値を求めなさい．

(2) $a = 2$ のとき，A の行列式を求めなさい．

(3) $a = 1$ のとき，A の逆行列を求めなさい．

（埼玉大 2001）　　(m20011407)

0.120 実数 θ に対して $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} x^n$ とおく.

(1) 右辺の級数は $|x| < 1$ で収束することを示せ.

(2) $f'(x) = \frac{\sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$ を示せ. $\left[\text{ヒント}：\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right) \right]$

(埼玉大 2002) (m20021401)

0.121 (1) 次の関数を微分せよ.

$$\left[\ \sin^{-1}(2x)\ \right]^3 \qquad \left(\ |x| < \frac{1}{2}\ \right)$$

ただし, $\sin^{-1}()$ は逆正弦関数の主値をとるものとする.

(2) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^{2x}}{(a+b)x} \qquad (a > 0\,,\ b > 0\,,\ a \neq b)$$

（埼玉大 2004） (m20041401)

0.122 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) 固有値 λ_1, λ_2 と，それに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ を一組求めよ.

(2) 固有ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ を並べて作った行列を $P = [\,\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\,]$ としたとき，$P^{-1}AP$ を求めよ.

(3) A^n を求めよ.

(埼玉大 2012) (m20121404)

0.123 行列 $\boldsymbol{A}$ について以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b & -2 \\ b & a & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値が $-1, 1, 3$ となる a と b の値を求めよ．ただし，$a > b > 0$ とする.

(2) 固有値が $-1, 1, 3$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$, $\boldsymbol{V}_3$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$, $\boldsymbol{V}_3$ は単位ベクトルとする.

(3) 固有ベクトルからなる行列 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 & \boldsymbol{V}_2 & \boldsymbol{V}_3 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(4) 行列 $\boldsymbol{P}$ を用いて行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ.

(埼玉大 2013) (m20131405)

0.124 以下のベクトルの各組は一次独立か，もしくは一次従属か答えよ.

(1) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(2) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$

(3) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(埼玉大 2017) (m20171404)

0.125 行列 A が次式で与えられるものとして以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) 行列 A の固有ベクトルを求めよ．

(3) 行列 A は対角化可能かどうか判定せよ．可能であれば，対角化せよ．

(埼玉大 2017) (m20171405)

0.126 行列 A が次式で与えられるものとして以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) 各固有値に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ を求めよ．

(3) (2) で求めた固有ベクトルを列ベクトルとする行列 $V = [\, \boldsymbol{v}_1 \ \ \boldsymbol{v}_2 \ \ \boldsymbol{v}_3 \,]$ の逆行列 V^{-1} を求めよ．

(4) $\hat{A} = V^{-1}AV$ を求めよ．

(5) $\hat{A}^n$ を求めよ．ただし，n は任意の自然数 $(1,\ 2,\ \cdots)$ とする．

(6) (5) の結果を利用して A^n を求めよ．

(埼玉大 2018) (m20181405)

0.127 (1) 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{bmatrix}$ の行列式を求めよ（どのように計算したかも書くこと）．

(2) 次の四つのうちから一つを選び，それについて知っていることを説明せよ．

(i) 基本行列 (ii) 置換 (iii) 行列式 (iv) 線形空間

(茨城大 2001) (m20011705)

0.128 3次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ について，以下の各問に答えよ．

(1) A の固有値 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ および対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ を一組求めよ．

(2) ベクトル列 $\boldsymbol{u}_n$ を $\boldsymbol{u}_n = A^n \begin{bmatrix} \varepsilon \\ -1+2\varepsilon \\ 2+\varepsilon \end{bmatrix}$, $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ で定める．ただし，$\varepsilon = 2^{-100}$ とし，A^0 は単位行列を表す．このとき，$\boldsymbol{u}_n$ を (1) で求めた $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ の一次結合で表せ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，ユークリッドノルムを $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$ とする．(2) で与えた $\boldsymbol{u}_n$ について，以下を調べよ．

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ||\boldsymbol{u}_n||$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{||\boldsymbol{u}_{n+1}||}{||\boldsymbol{u}_n||}$ (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{u}_n}{||\boldsymbol{u}_n||}$

(d) $\left\| \boldsymbol{u}_n - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| \leq 2^{-10}$ なる n の存在の有無.

(茨城大 2007)　　(m20071707)

0.129 $f(t)$ を $[0,\infty)$ 上で連続かつ広義積分可能な関数とする．　また a,b は $a,b>0$ を満たす実数とし，$g(x,y)=f(a^2x^2+b^2y^2)$ とおく．以下の各問いに答えよ．

(1) $f(t)$ が $[0,\infty)$ 上で広義積分可能であることの定義を記述せよ．

(2) 変数変換

$$\begin{cases} x = \dfrac{r}{a}\cos\theta \\ y = \dfrac{r}{b}\sin\theta \end{cases}$$

によって，$r\theta$ 平面内の集合 $[\,0,\ 1\,]\times\left[\,0,\ \dfrac{\pi}{2}\,\right]$ は xy 平面内のどのような集合に写るか図示せよ．

(3) 等式

$$\iint_{[0,\infty)\ \times\ [0.\infty)} g(x,y)dxdy = \frac{\pi}{4ab}\int_0^\infty f(t)dt$$

が成り立つことを示せ．

(4)

$$I(a,b)=\iint_{[0,\infty)\ \times\ [0.\infty)} e^{-a^2(x^2+1)-b^2(y^2+1)}dxdy$$

とする．(3) の結果を用いて，条件 $a^2+b^2=1$ の下での $I(a,b)$ の最小値を求めよ．

(茨城大 2009)　　(m20091706)

0.130 実対称行列

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

について，以下の各問に答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A を直交行列を用いて対角化せよ．

(茨城大 2020)　　(m20201708)

0.131 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(山梨大 2011)　　(m20111803)

0.132 次の 4 つのベクトルの中から．一次独立なものは最大でいくつ取ることができるか答えなさい．

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_4=\begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(山梨大 2011)　　(m20111804)

0.133 $A=\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$ を対角化し，A^n を n で表せ．

(山梨大 2015)　　(m20151801)

0.134 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは互いに直交し，かつ大きさを 1 とする．

(山梨大 2016)　　(m20161802)

0.135 N 行 N 列の単位行列を E と表し，N 行 N 列の行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

と定義する．N は 1 以外の自然数であるとして，次の設問に答えよ．

(1) 行列 A^2 および $AA^\dagger$ の成分を，$(*)$ にならって示せ．ここで，$\dagger$ は転置行列を表す．

(2) $A^n = A$ を満たす 1 以外の最小の自然数 n を求めよ．

(3) e_n をその第 n 成分が 1，それ以外の成分は 0 である N 次元空間の基本ベクトルとする $(n = 1, 2, \cdots, N)$．このとき，Ae_n および $A^\dagger e_n$ を基本ベクトルを用いて表せ．

(4) 行列 A の固有値と固有ベクトルを全て求めよ．

(山梨大 2016)　　(m20161806)

0.136 $a > 0$ をパラメータとした行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは大きさを 1 とする．さらに $A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ を求めよ．ここで n は任意の自然数である．

(山梨大 2018)　　(m20181807)

0.137 a, b, c, d を互いに異なる実数として，次の小問に答えよ．

(1) 次に示す行列式の値を求めよ．

$$(a) \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}, \qquad (b) \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

(2) 4 つのベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$，$\boldsymbol{u}_4$ を

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} a^3 \\ b^3 \\ c^3 \end{bmatrix}$$

と定義する．また，x_1，x_2，x_3，x_4 を方程式

$$x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + x_3\boldsymbol{u}_3 + x_4\boldsymbol{u}_4 = \boldsymbol{0}$$

を満たす未知数とする． このとき，自明でない未知数 x_1，x_2，x_3，x_4 を求めよ． また，$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$，$\boldsymbol{u}_4$ の中で 1 次独立なベクトルの組をひとつ示せ． ただし，$\boldsymbol{0}$ は 3 次元のゼロベクトルである．

(山梨大 2019)　　(m20191802)

0.138　行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ -4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1)　行列 A が逆行列を持たないことを示せ.

(2)　行列 A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(山梨大 2019)　　(m20191807)

0.139　以下の式を考える.

$$AX = B$$

ここで, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}$, $X = [x_1,\ x_2,\ x_3]^T$, $B = [1,3,5]^T$ である.

(1)　行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2)　$x_1,\ x_2,\ x_3$ を求めよ;

(山梨大 2020)　　(m20201802)

0.140　以下の式を考える.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AX} + \mathbf{BU}$$

ここで, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$,

$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ とする.

(1)　行列 $\mathbf{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2)　行列 $\mathbf{A}$ の逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ を求めよ.

(3)　上式を満たす $\mathbf{X}$ を求めよ.

(山梨大 2023)　　(m20231801)

0.141　(1)　次の行列式の値を求めよ.　$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(2)　行列 A の行列式の定義は, 例えば,

$$|A| = \sum_{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{smallmatrix}\right] \in S_n} \mathrm{sgn} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

で与えられる. ここで, S_n は n 次の置換のすべての集合であり, sgn は置換の符号である. このとき次式を証明せよ.

$$\begin{vmatrix} a & 0 \cdots 0 \\ * & \\ \vdots & B \\ * & \end{vmatrix} = a|B|$$

ただし, B は $(n-1)$ 次の正方行列とする.

(新潟大 2006)　　(m20062011)

0.142 空間 (R^3) において，次の各問に答えよ.

(1) ベクトルの組 $\vec{b_1}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{b_2}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, $\vec{b_3}=\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}$ について，$\{\vec{b_1},\ \vec{b_2},\ \vec{b_3}\}$ は R^3 の基底を作ることを示せ.

(2) R^3 の基本ベクトルを $\{\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3}\}$ とし，線形変換 $f:\ R^3(\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3})\to R^3(\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3})$ の表現行列が $\begin{bmatrix}2&-1&2\\1/2&1/2&5/2\\3/2&-3/2&7/2\end{bmatrix}$ で与えられるとき，f を $f:R^3(\vec{b_1},\ \vec{b_2},\ \vec{b_3})\to R^3(\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3})$ なる線形変換と考えたときの表現行列を求めよ．ただし、$R^3(\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3})$ は $\{\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3}\}$ を基底とするベクトル空間 R^3 を意味する.

(新潟大 2006)　　(m20062012)

0.143 次の 3 次正方行列 A が直交行列であるとき, $\det A=|A|=1$ または -1 であることを示せ.

$$A=\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}$$

(新潟大 2010)　　(m20102015)

0.144 $\boldsymbol{R}^2$ 上のベクトル $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ から $\boldsymbol{R}^2$ 上のベクトル $\begin{bmatrix}x\\2x+y\end{bmatrix}$ への写像は線形写像か調べよ.

(新潟大 2012)　　(m20122006)

0.145 $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1+i\\x+iy\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$ とするとき，$\boldsymbol{a}$ のノルムが 3, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積の絶対値が $\sqrt{7}$ となるような x と y の値を求めよ．ただし i は虚数単位，x,y は実数とする.

(新潟大 2012)　　(m20122008)

0.146 次の正方行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&3&1\\5&0&1\end{bmatrix}$$

(新潟大 2014)　　(m20142003)

0.147 行列 $A=\begin{bmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{bmatrix}$ の固有値を α_1, α_2 とし，それぞれの固有値に対する固有ベクトルを ν_1, ν_2 とする．また，行列 $T=[\nu_1\quad\nu_2]$ とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) $T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\alpha_1&0\\0&\alpha_2\end{bmatrix}$ となることを示せ．ただし，ベクトル T^{-1} はベクトル T の逆行列である.

(2) ベクトル $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$ について，$\boldsymbol{c}=A\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}=T\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{c}=T\boldsymbol{q}$ とするとき，$\boldsymbol{q}=\begin{bmatrix}\alpha_1&0\\0&\alpha_2\end{bmatrix}\boldsymbol{p}$ となることを示せ.

(3) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ のとき，$\alpha_1 < \alpha_2$ の値を求めよ．また，$\nu_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\nu_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ となることを示せ.

(4) $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ のとき，ベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ の値を求め，$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{p}$ となっていることを確かめよ.

(新潟大 2014)　　(m20142005)

0.148 行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．つぎに，固有ベクトルを使って A を対角化せよ.

(新潟大 2015)　　(m20152003)

0.149 $m.\,n$ を未知数とする連立 1 次方程式 $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ が解をもつとき x, y, z はどのような関係を満たすか，以下の設問に答えなさい.

ただし，$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ ，$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}$ とおくとき，与式は $m\boldsymbol{p} + n\boldsymbol{q} = \boldsymbol{r}$ とかける.

(1) $\boldsymbol{r} = 0$ のとき連立 1 次方程式の解を答えなさい.

(2) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p}$ のとき連立 1 次方程式の解を答えなさい.

(3) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{q}$ のとき連立 1 次方程式の解を答えなさい.

(4) 点 (x, y, z) の存在する領域が空間内のどのような図形で表されるか推量し，次の 5 つの中から選択しなさい.

ア．3 つの点　　イ．直線　　ウ．円　　エ．双曲線　　オ．平面

(5) 点 (x, y, z) の存在する領域が表す図形を定める方程式を求めなさい,

(6) この図形を描きなさい.

(新潟大 2015)　　(m20152004)

0.150 2 次元デカルト座標系において，1 次変換 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ を考える．この変換をベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2)^T$ に作用させ，変換後に得られるベクトル $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ の方向が変換前のベクトル $\boldsymbol{x}$ の方向と一致し $\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{x}$ のように表せるとき，このベクトル $\boldsymbol{x}$ の成分を求めよ．ただし，ベクトルの長さは $||\boldsymbol{x}|| = 1$ であるものとする.

(新潟大 2017)　　(m20172007)

0.151 行列　$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　について，A^3　および　A^{-1}　を求めよ.

(長岡技科大 1991)　　(m19912106)

0.152 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ の値を求めなさい.

(2) 区間 $[a, b]$ における連続関数 $f(x)$ の定積分 $S = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の値を求めたい．$[a, b]$ を幅 $\dfrac{b-a}{n}$ の小区間に n 等分し，その分点を $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ とする．各小区間上

に作られる台形の面積の和　$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(a_{k-1}) + f(a_k)}{2} \cdot \frac{b-a}{n}$　を S の近似値とする．この近似法を台形公式という．区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ を 3 等分して，台形公式による $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ の近似値 S_3 を求めなさい．

(長岡技科大 2007)　　(m20072104)

0.153　$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$,　$B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}$ とするとき，$AX = B, YA = B$ を満たす行列 X, Y を求めなさい．

(福井大 2000)　　(m20002413)

0.154　次の行列について以下のことを答えなさい．

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(1)　ベクトル $v = (1, 2)$ としたときの，Av を求めなさい．

(2)　A の行列式 $|A|$ を計算しなさい．

(3)　A の逆行列 A^{-1} を求めなさい．

(4)　A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(福井大 2001)　　(m20012420)

0.155　次の行列 $\boldsymbol{B}$ とベクトル $\boldsymbol{x}$ がある．行列 $\boldsymbol{B}$ で定まる一次変換で，平面の図形　$2{x_1}^2 + {y_1}^2 = 4$　が異なる図形にうつされる．

(1)　変換後の図形の式を求めなさい．　　(2)　変換後の図形を描きなさい．

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

(福井大 2006)　　(m20062406)

0.156　次のような連立方程式がある．以下の問いに答えよ．　$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$

ここで，$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \\ 5 & -6 & 9 \end{bmatrix}$,　$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$,　$\boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする．

(1)　行列 $\boldsymbol{A}$ に対応する行列式の値を求めよ．　　(2)　行列 $\boldsymbol{A}$ の階数（ランク）を求めよ．

(3)　上の連立方程式の一般解を求めよ．

(福井大 2007)　　(m20072407)

0.157　(1)　次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は一次従属か一次独立であるか，理由を示して述べよ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

(2) 次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ は一次従属か一次独立であるか，理由を示して述べよ．

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(福井大 2007)　　(m20072408)

0.158 (1) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ のとき

(a) $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{PA}$ となる条件を求めよ．

(b) $\boldsymbol{AQ} = \boldsymbol{QA}$ となる条件を求めよ．

(2) 次の 3 つの列ベクトルがある．

(a) ベクトルは $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は 1 次独立か 1 次従属か．

(b) その理由も述べよ．

(c) もし 1 次従属なら，それらの関係式を書け．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

(3) $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を正則行列とするとき，$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ を証明せよ．

(4) 次の連立方程式がある．

(a) 連立方程式が解を持つように式中の a を決定せよ．

(b) 決定された a の値の連立方程式の一般解を求めよ．

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - 2y + 2z = a \\ 8x - 6y + 4z = 13 \end{cases}$$

(福井大 2009)　　(m20092403)

0.159 2 つの列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ に対して次のものを計算して求めよ．

(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$　　(2) 列ベクトル $\boldsymbol{a}$ と列ベクトル $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積

(福井大 2010)　　(m20102408)

0.160 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ がある．

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{A}^n \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ．n は整数とし，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 以外の $\boldsymbol{x}$ を求めること．

(福井大 2010)　　(m20102409)

0.161 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ とするとき，次を求めよ．

(1) $3A$

(2) A^2

(3) $|X-3A| \neq 0$ の条件で

$X^2 - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} X - 2X + \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 18 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ を満たす 2 次正方行列 X を求めよ.

(福井大 2012)　　(m20122410)

0.162　4 つの列ベクトルがある.

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 21 \\ 15 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) 4 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ が一次従属となるようにベクトル $\boldsymbol{d}$ の未知数 x を決定せよ.

(2) $\boldsymbol{d}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の一次結合として表せ, (すなわち, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ の関係式を求めよ)

(福井大 2012)　　(m20122412)

0.163　縦軸を y とし, 横軸を x とする座標系でベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ が $\dfrac{{x_1}^2}{4} + {y_1}^2 = 1$ 上の点であるとする.

$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ として, ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$ で一次変換する.

(1) 一次変換後の $\boldsymbol{y}$ の関係式を求めよ.

(2) 一次変換後の x_2 と y_2 の関係が表す形を描け.

(福井大 2012)　　(m20122413)

0.164　次の整数 a を含む行列 A がある. 次の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & -4 & 2a \\ 1 & 2 & -2 & a-1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の階数（ランク）が 2 になるために a の値を求めよ.

(2) $a = 5$ のとき行列 A の階数（ランク）を求めよ.

(福井大 2013)　　(m20132411)

0.165　次の問いに答えよ.

(1) 行列 $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{D}$ があるとき, $(\boldsymbol{BC})^T = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}^T$ が成り立つとして, 次の関係が成り立つことを証明せよ. ここで, $\boldsymbol{B}^T$ は $\boldsymbol{B}$ の転置行列である.

$$(\boldsymbol{BCD})^T = \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}^T$$

(2) $\boldsymbol{A}$ を二次正方行列とする. $\boldsymbol{A}$ を含む次の式を満たす $\boldsymbol{A}$ を求めよ.

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(福井大 2013)　　(m20132412)

0.166 2 次元平面で，整数 d を含む次の二次正方行列でベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ を一次変換するとベクトル $\boldsymbol{y}$ に移る．

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} d & 3/5 \\ 5 & 2d \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{x}$ がある直線を表すベクトルのとき，そのすべての点について，一次変換で位置が変わらなかったとする．整数 d とその直線の式を求めよ．

(福井大 2013)　　(m20132413)

0.167 2 つの 2 次正方行列がある．

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$　　　$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

これらが

$\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^T = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C}$

を満たすとき，2 次正方行列である行列 $\boldsymbol{X}$ と行列 $\boldsymbol{Y}$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{A}^T$ は行列の転置行列である．最終の答えだけでなく途中経過も記述せよ．

(福井大 2014)　　(m20142409)

0.168 次の 3 つの列ベクトルがある．

$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$,　$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$,　$\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ある行列 $\boldsymbol{A}$ は 3 次正方行列である．この行列 $\boldsymbol{A}$ と前述のベクトルは，次の関係を満たすものとする．

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = 2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = 2\boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_3$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_3$

ベクトル $\boldsymbol{y}$ が実数 s と t によって次のように $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$ の一次結合で表される．

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1 + s\boldsymbol{x}_2 + t\boldsymbol{x}_3$

また，行列 $\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$ からなり $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ である

以下の問に答えよ．最終の答えだけでなく途中経過も記述せよ．

(1) 行列 $\boldsymbol{B}$ の行列式の値を求めよ．

(2) そのベクトル $\boldsymbol{y}$ が行列 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルとなるとき，実数 s と t を求めよ．

(3) 行列 $\boldsymbol{A}$ とその固有ベクトル $\boldsymbol{y}$ に対応する固有値を求めよ．

(4) 行列 $\boldsymbol{AB}$ を求めよ．

(福井大 2014)　　(m20142410)

0.169 以下の問いに答えよ．

(1) 下記に示す行列の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化すること．

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -3 & 5 & 6 \\ 4 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

(2) (1) で求めた固有ベクトルが一次独立であることを示せ.

(3) (1) で与えられた行列を対角化せよ.（導出過程を示すこと）

(福井大 2014)　(m20142414)

0.170 次の式を満たす行列 A を求めよ．途中の過程も記載すること．

$$A\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

(福井大 2015)　(m20152407)

0.171 次の 3 つのベクトルがある．ただし，x は定数とする．以下の問に答えよ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} x \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(1) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次従属となるように定数 x を求めよ.

(2) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次独立で相互に直交するベクトルとなるように定数 x を求めよ.

(福井大 2015)　(m20152408)

0.172 次の式を行列の一次変換によって簡単な式に変換したい．以下の問に答えよ．

$$2x^2 + 6xy + 2y^2 = 1 \ \cdots\cdots ①$$

行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 3 \\ s & a_{22} \end{bmatrix}$ を用いると，式 ① を次式のように表現できる.

ここで，a_{11}，a_{22}，S は定数である.

$$1 = 2x^2 + 6xy + 2y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A を求めよ.

(2) 行列 A の固有値 λ_1 と λ_2 及びそれらに対応する単位長さの固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$（いずれも列ベクトル）を求めよ．ただし，$\lambda_1 > \lambda_2$ とする.

(3) 列ベクトル $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ からなる行列 $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{bmatrix}$ とおく．$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ によって式 ① を X と Y の方程式に変換せよ.

(福井大 2015)　(m20152409)

0.173 行列 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が直交行列となるように b, c, d を決めよ.

(福井大 2015)　(m20152428)

0.174 次の行列について，以下の問いに答えよ.

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) 固有値を求めよ

(2) 大きさが 1 となるように正規化した固有ベクトルを求めよ.

(3) (2) で求めた固有ベクトルを用いて対角化せよ.

(福井大 2016)　(m20162406)

0.175 次の行列について，以下の問いに答えよ．

$$[B] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) 行列式の値を求めよ．　(2) 余因子を求めよ．　(3) 逆行列を求めよ

(福井大 2016)　(m20162407)

0.176 次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(福井大 2016)　(m20162414)

0.177 次の行列の階数を求めよ．

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -6 \\ 2 & 4 & -2 & 10 \\ 2 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

(福井大 2016)　(m20162415)

0.178 次の行列の逆行列を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

(福井大 2016)　(m20162416)

0.179 行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) (1) で求めた全ての固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(福井大 2016)　(m20162417)

0.180 以下の (1)〜(3) に示した行列の逆行列を，それぞれ求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

(福井大 2018)　(m20182413)

0.181 次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $2\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$　(5) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

(福井大 2021)　(m20212423)

0.182 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$ とし，t が転置を表すとき，${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ が成り立つことを示せ.

(福井大 2021)　　(m20212424)

0.183 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ について，次の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値の中で，最小の値を持つ固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2021)　　(m20212425)

0.184 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ について，以下の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めよ.

(2) $\Phi_A(A) = 0$（ケーリー・ハミルトンの定理）が成り立つことを示せ.

(福井大 2021)　　(m20212426)

0.185 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(福井大 2021)　　(m20212428)

0.186 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ について，次の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値の中で，最小の値を持つ固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2022)　　(m20222408)

0.187 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ について　以下の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めよ.

(2) $\Phi_A(A) = 0$　（ケーリー・ハミルトンの定理）が成り立つことを示せ.

(福井大 2022)　　(m20222409)

0.188 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(福井大 2022)　　(m20222410)

0.189 以下の問いに答えよ．ただし，$\mathbf{0}$ は n 次元ゼロベクトルを表し，$\boldsymbol{v}^\top$ はベクトル $\boldsymbol{v}$ の転置を表す.

(1) 次の行列 A_1，A_2 の行列式をそれぞれ求めよ.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 問 (1) の A_1 を係数行列とする以下の連立一次方程式の解 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ を求めよ．ただし，x_1，x_2，x_3 は実数とする.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

(3) $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ を満たす n 次元実ベクトル $\boldsymbol{u}$，および n 次の実対称行列 A_3 を用いて

$$f(\boldsymbol{u}) = \frac{\boldsymbol{u}^\top A_3 \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{u}}$$

とおく．このとき，$f(\boldsymbol{u})$ の最大値は A_3 の最大固有値に一致し，そのときの $\boldsymbol{u}$ は A_3 の最大固有値に対応する固有ベクトルであることが知られている．A_3 が次の行列であるとき，この事実を使って $f(\boldsymbol{u})$ の最大値，および対応する $\boldsymbol{u}$ をひとつ求めよ.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

(4) $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ を満たす n 次元実ベクトル $\boldsymbol{c}$ に対し，行列 A_4 を次のように定める.

$$A_4 = \boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^\top$$

このとき，$\boldsymbol{c}$ は A_4 の固有ベクトルであることを示せ．また，$\boldsymbol{c}$ に対応する固有値を求めよ.

(福井大 2022)　　(m20222425)

0.190 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(岐阜大 2001)　　(m20012610)

0.191 行列 $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ の行列式の値，固有値および固有ベクトルを求めよ.

(岐阜大 2001)　　(m20012611)

0.192 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ のとき, $AX = O$, $YA = O$ を満足する $3\times$ 3 型の行列 X, Y を，全て求めよ.

（岐阜大 2004）　　(m20042606)

0.193 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ とするとき, A の逆行列 A^{-1} と行列式 $\det A$ を求めよ.

(岐阜大 2005)　　(m20052604)

0.194 行列 $\boldsymbol{A}$ が次のように与えられるとき，以下の問いに答えよ．　$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式 $|\boldsymbol{A}|$ を求めよ.　　(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めよ.

(3) 行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を使って次の連立方程式を解け. $\begin{cases} 3x+2y+5z=10 \\ 7x+3y+4z=3 \\ 2x+y+2z=3 \end{cases}$

(岐阜大 2006)　　(m20062610)

0.195 行列 $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

ただし，固有ベクトルは単位ベクトルとして表記せよ.

(岐阜大 2007)　　(m20072610)

0.196 (1) 行列 $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(2) 行列 $\begin{bmatrix} a-5 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & a-1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & a & 1 \\ -3 & 1 & 2 & a-1 \end{bmatrix}$ の階数を求めよ.

(3) 行列 $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 3 & 7 \\ 6 & 0 & 9 & 5 \end{bmatrix}$ の行列式の値を求めよ.

(岐阜大 2009)　　(m20092610)

0.197 次の行列 A, B に関して，以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の逆行列を求めよ.

(2) 行列 B の最小固有値およびそれに対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(3) 行列 B^2 の固有値をすべて求めよ.

(4) 行列 B^5 の固有値をすべて求めよ.

(豊橋技科大 2015)　　(m20152702)

0.198 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解いて, $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(2) 行列 A の 3 つの固有値 $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ と, 対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ を求めよ. ただし, 固有ベクトルは, 第 3 成分が 1 となるようにして示せ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ. そして, $P^{-1}A^nP$ を求めよ.

(名古屋大 2005)　　(m20052801)

0.199 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ とする.

(1) A の 2 つの固有値 α, β $(\alpha > \beta)$ を求めよ．

また，対応する固有ベクトルを $\begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}$ の形で求めよ（z の値のみで良い）．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる行列 P を求めよ．また，$P^{-1}AP$ も求めよ．

(3) $\gamma_n = \alpha^n - \beta^n$ とする．A^n を γ_{n-1}, γ_n, γ_{n+1} で表せ．

(名古屋大 2006)　　(m20062801)

0.200 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(名古屋大 2014)　　(m20142802)

0.201 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ に関して，以下の設問に答えよ．

(1) A の固有値 λ と固有ベクトルを求めよ．

(2) A^m（m は自然数）を求めよ．

(名古屋大 2015)　　(m20152801)

0.202 定数 a を含む行列 A と未知変数 x, y, z に関する次の方程式を考える．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

以下の設問に計算手順を示し解答せよ．

(1) 方程式がただひとつの解をもつための，定数 a が満たすべき条件を示せ．

(2) $a = 0$ とする．方程式の解を求めよ．

(3) $a = 4$ とする．このとき，A の固有値のひとつは 2 である．

(a) 固有値 2 に属する A の固有ベクトルをひとつ求めよ．なお固有ベクトルの大きさ（ノルム）は 1 とする．

(b) 残りの A の固有値をすべて求めよ．

(名古屋大 2017)　　(m20172801)

0.203 次の行列 A を考える．

$$A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) A の全ての固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ．なお固有ベクトルの大きさは 1 とする．

(2) 定数 $a,\ b,\ c,\ d$ に対して，$aA^4 + bA^3 + cA^2 + dA$ は単位行列となった．$a,\ b,\ c,\ d$ を一組求めよ．

(3) 大きさが 1 のベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ に A^k を乗じた $A^k\boldsymbol{v}$ を考える．ここで k は正の整数である．

(i) $A^k\boldsymbol{v}$ を v_1, v_2 を用いて表せ.

(ii) $k \to \infty$ としたとき, $A^k\boldsymbol{v}$ の大きさの最大値を示し, それを与える $\boldsymbol{v}$ をすべて求めよ.

(名古屋大 2018)　　(m20182805)

0.204 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ に関して, 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値のうち, 実数となる固有値およびその固有ベクトルを求めよ.

(2) $A^3 - 8E$ を求めよ. ただし, E は 3 次の単位行列である.

(3) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(名古屋大 2022)　　(m20222801)

0.205 3 次行列 X が方程式 $A^*X = A^{-1} + 2X$ を満たす. ただし,

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A^* = adjA$ は行列 A の余因子行列である. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 方程式 $\big(\,|A|I - 2A\,\big)X = I$ が成立することを証明せよ. ここで, $|A|$ は行列 A の行列式であり, I は 3 次単位行列である.

(2) 行列 X を求めよ,

(3) X の固有値を求めよ,

(名古屋工業大 2013)　　(m20132908)

0.206 以下のように行列表現された連立一次方程式がある. ただし, a は任意の実数である.

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ 1-a & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) a のすべての値について, 行列 $\boldsymbol{A}$ および行列 $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$（$\boldsymbol{A}$ の右側に $\boldsymbol{b}$ を並べたもの）のランク（階数）を求めなさい.

(2) (1) の結果を用いて, a のすべての値について解の存在性を答えなさい. また, 解が存在する場合は解を求めなさい.

(三重大 2004)　　(m20043112)

0.207 次の行列のランク（階数）を求めよ. また, 正則な場合は逆行列を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

(三重大 2005)　　(m20053117)

0.208 (1) 次の等式を証明しなさい.

$$\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix} = 8abc$$

(2) (1) を利用して, 次の行列の行列式の値と逆行列を求めなさい.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(三重大 2010)　　(m20103103)

0.209 以下で与えられる 3 次正方実数行列 A と可換な 3 次正方実数行列 X を下記 (1)〜(3) の手順により求めなさい. ここで λ および β は任意の実数とする.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & \beta & 0 \\ 0 & \lambda & \beta \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

(1) 3 次単位行列 E は, 任意の 3 次正方行列と可換であることを示しなさい.

(2) 行列 A を, E と以下に示す行列 F の線形結合の形で表しなさい.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) 上記の (1) および (2) の結果を用いて, 行列 A と可換な行列 X を求めなさい.

(三重大 2012)　　(m20123107)

0.210 行列に関する以下の問に答えよ.

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ のとき, 積 AB および BA を求めよ.

(2) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$ を満たす実数 λ とベクトル $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$ を求めよ. ただし, $x^2 + y^2 = 1$ とする.

(三重大 2013)　　(m20133112)

0.211 x_1, x_2, x_3 に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ \alpha x_1 + x_2 = \beta \quad (\alpha,\ \beta\text{は実定数}) \end{cases}$$

について, 以下の問に答えなさい.

(1) 連立方程式を行列 A, $\boldsymbol{b}$ を用いて $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と書くとき, 行列 A, $\boldsymbol{b}$ を求めなさい,

ただし, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ である.

(2) $\alpha = 1$, $\beta = 3$ のとき, A^{-1} を求め, それを利用して連立方程式の解 $\boldsymbol{x}$ を求めなさい.

(3) 任意の α, β について $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解が存在するかどうかを調べ, 存在する場合にはその解を求めなさい.

(三重大 2015)　　(m20153102)

0.212 以下の 3 次正方行列 A について，以下の問いに答えなさい．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \\ 3a & 3 & a \end{bmatrix}$$

(1) $\mathrm{rank} A$ を求めなさい．

(2) $\det A$ を求めなさい．

(3) $a = -1$ のとき，A^{-1} を求めなさい．

(4) 行列 A が 0 を固有値として持つとき，a の値と 0 以外の固有値を求めなさい．

(三重大 2016)　　(m20163108)

0.213 行列に関する以下の問いに答えよ．

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ，$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ のとき，積 AB および積 AB の逆行列 $(AB)^{-1}$ を求めよ．

(2) 上記の設問 (1) において，$C = xA + B$ とすれば，逆行列 C^{-1} が存在しない場合の x を求めよ．

(3) 次の連立方程式を満たす行列 X, Y を求めよ．

$$2X + Y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$
$$X + 2Y = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(三重大 2016)　　(m20163111)

0.214 3 次の実対称行列

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 P の固有値 λ_i $(i = 1, 2, 3)$ と対応する単位固有ベクトル v_i $(i = 1, 2, 3)$ を求めなさい．
ただし，$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3$ を満たすものとする．

(2) VV^T を求めなさい．ただし，

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

である．

(3) 行列 P は固有値・固有ベクトルに対して，$PV = VA$ が成り立つ．ここで，

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

である．このとき，$P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$ を満たす行列 P_1，P_2，P_3 が存在することが知られている．行列 P_1，P_2，P_3 を求めなさい．

(4) 0 以上の整数 n に対して P^n を求めなさい．

(三重大 2020)　　(m20203111)

0.215 2 次曲線 C : $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$ について，以下の問に答えなさい．

(1) ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とすると，与えられた 2 次曲線 C は 2 次の対称行列 $\boldsymbol{A}$ を用いて ${}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 4$ と表現可能である．行列 $\boldsymbol{A}$ を求めなさい．ただし，${}^t\boldsymbol{x}$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ の転置を表すこととする．

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ は 2 つの固有値を持つ．この固有値 λ_1，λ_2 とそれぞれの固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ を求めなさい．ただし，$\lambda_1 < \lambda_2$，$\boldsymbol{u}_1$ の第 1 成分は正，$\boldsymbol{u}_2$ の第 1 成分は負であるとする．

(3) 行列 $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2]$ およびベクトル $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ であるとき，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{X}$ で与えられる変換を考える．このとき，xy 平面上の 2 次曲線 C は，XY 平面上で 2 次曲線 C' に変換される．2 次曲線 C' の式を X, Y を用いて表しなさい．

(三重大 2022)　　(m20223103)

0.216　次のスカラー関数 $U(x, y, z)$ について以下の問いに答えよ．ただし，a は正の実定数とする．

$$U(x, y, z) = \exp\left[-a(x^2 + y^2 + z^2)\right]$$

(1) ベクトル $F = \nabla U$ を求めよ．

(2) $\nabla \cdot F = 0$ となるとき，x, y, z が満たす条件をすべて求めよ．

(3) $\nabla \times \ F$ を求めよ．

ここで，演算子 ∇ は次のように定義する．

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

(奈良女子大 2014)　　(m20143204)

0.217　以下の関数を微分せよ．ただし，m, σ は正の定数である．

(1) $y = \exp\left[-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$　　(2) $y = \tan^{-1} x^2$

(奈良女子大 2015)　　(m20153201)

0.218　与えられた条件の下で，以下の関数を微分せよ．

(1) $y = xe^x$

(2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$，　($\sigma$および m は正の定数)

(3) $y = \sin^{-1} x$　(x のとりうる値は $\left[-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right]$ を満たす範囲のみとする)

(奈良女子大 2018)　　(m20183204)

0.219　a を正の定数として，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)dx$ の値を以下の手順で求めよう．

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ay^2)dy$$

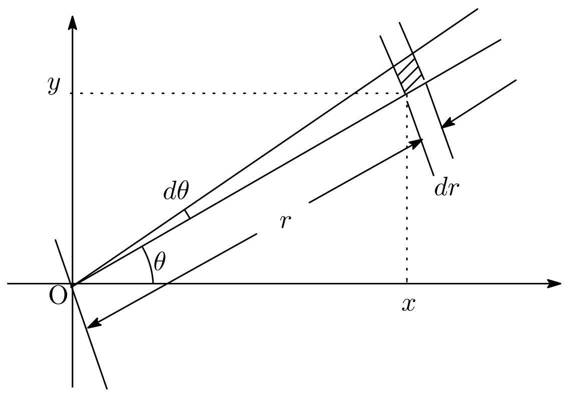
であるから，

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ay^2)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-a(x^2+y^2)\right] dxdy$$

という面積分を実行し，その結果の平方根をとればよい．このとき，点 (x, y) の位置ベクトルを $\overrightarrow{r}$ として，$r = |\overrightarrow{r}|$，$\overrightarrow{r}$ と x 軸のなす角を θ とおく．

(1) x および y を r と θ の式で表せ.

(2) 下図の斜線部の微小面積を, r, dr, θ, $d\theta$ のうち必要なものを用いて表せ.



(3) I^2 を xy 直交座標による面積分から r と θ で表される極座標での面積分に変換せよ.

(4) 前問の面積分を実行し, それにより I の値を求めよ.

(奈良女子大 2018)　　(m20183205)

0.220 行列 A が次のように定義されているとき, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \dots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \dots & {x_n}^{n-1} \end{bmatrix}$$

(1) i 列目の x_i と j 列目の x_j が等しい場合, 階数は n より 1 以上小さいことを示せ.

(2) A の行列式は $(x_i - x_j)$ で割りきれることを示せ. $(i \neq j)$

(3) 列の値がすべて同じ値である列数が m であるとすると, 階数は $(n-m)$ であることを示せ.

(京都大 1999)　　(m19993303)

0.221 以下の問に答えよ.

(1) $P(x)$ と $Q(x)$ は独立変数 x だけを含む関数とする. この時次のような 1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

の一般解は

$$y = e^{-\int P dx}\left[\int Q e^{\int P dx} dx + c\right]$$

になることを証明せよ.

(2) 上記の関係式を使って次の 2 つの微分方程式の一般解を求めよ.

(a) $\qquad 2x\dfrac{dy}{dx} + y = 2x^2$

(b) $\qquad (1+x^2)\dfrac{dy}{dx} = xy + 1$

(京都大 2004)　　(m20043302)

0.222 　スマートフォン業界のシェア争いを考える，A 社，B 社の 2 社が熾烈なシェア争いをしている．ある年 k 年（k は非負整数）の各社のシェアがそれぞれ a_k% ，b_k% 　$(a_k + b_k = 100)$ とする． 翌年（$k+1$ 年）の各社のシェアは,

$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}$， $\boldsymbol{x}_k = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{x}_k$ で与えられるものとする．

$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 90 \end{bmatrix}$ として，次の問 (1)〜(2) に答えよ．

(1) $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$ とする．

(a) $\boldsymbol{x}_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ を求めよ．

(b) $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix}$ を求めよ．

(c) $n \to \infty$ の場合の各社のシェアを求めよ．

(2) $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$ とする． $n \to \infty$ の場合の各社のシェアを求めよ．

(京都大 2013)　　(m20133302)

0.223 行列 $A = \begin{bmatrix} b & 1-a \\ a & b \end{bmatrix}$ として, 以下の設問に答えよ. ただし a, b は実数である.

(1) 行列 A の 2 つの固有値を求めよ. また, 固有値が異なる実数値となるための a と b に関する必要十分条件を示せ.

(2) 行列 A の 2 つの固有値が異なる実数値である場合に, それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ． また, 2 つの固有ベクトルが直交するための a と b に関する必要十分条件を示せ.

(3) 行列 A の 2 つの固有値が異なる実数値である場合に, $P^{-1}AP$ を対角行列とする正則行列 P, 対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ． また, A^n を求めよ． ただし n は正の整数である.

(4) 行列 A の 2 つの固有値が異なる実数値となり, かつ, 零ベクトルではない 2 次元ベクトル x に対して

$$^t x A x > 0$$

を満たすための a と b に関する必要十分条件を示せ. ここで $^t x$ は x の転置ベクトルを表す.

(大阪大 2005)　　(m20053506)

0.224 次の 2 階線形常微分方程式を考える：

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0. \qquad (*)$$

ここで，$a(t), b(t)$ は実軸上で定義された有界な連続関数とする．このとき次の問に答えなさい．

(1) x_1, x_2 を $(*)$ の解とし，これらに対して関数 J を

$$J(t) := \det \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ {x_1}'(t) & {x_2}'(t) \end{bmatrix}$$

と定める．このとき J は次の 1 階常微分方程式を満足することを示しなさい:

$$J'(t) = -a(t)J(t).$$

(2) 上記 (1) と同様に，x_1, x_2 を $(*)$ の解として，さらに

$$J(0) = \det \begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ {x_1}'(0) & {x_2}'(0) \end{bmatrix} \neq 0$$

と仮定する．このとき，任意の t において，２つのベクトル $(x_1(t), {x_1}'(t))$，$(x_2(t), {x_2}'(t))$ は１次独立となることを示しなさい．

(3) x_1, x_2, x_3 を $(*)$ の３つの解とする．このとき，任意の t で

$$\det \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \\ {x_1}'(t) & {x_2}'(t) & {x_3}'(t) \\ {x_1}''(t) & {x_2}''(t) & {x_3}''(t) \end{bmatrix} = 0$$

であることを示しなさい．また，ある３つの実数の組 $(c_1, c_2, c_3) \neq (0, 0, 0)$ があって，任意の t で

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + c_3x_3(t) = 0$$

が成り立つことを示しなさい．

(大阪大 2006)　　(m20063508)

0.225 X と Y を平均を 0 とする確率変数とし，その線形結合を $Z = aX + bY$ とおく．ただし，a と b は $a^2 + b^2 = 1$ を満たす定数である．X^2, Y^2, XY の期待値を $E[X^2] = 1$，$E[Y^2] = 1$，$E[XY] = \rho$ とおく．ただし $\rho > 0$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) Z^2 の期待値 $E[Z^2]$ を最大にする (a, b) の組み合わせ (a_1, b_1) と最小にする (a, b) の組み合わせ (a_2, b_2) を求めよ．

(2) 問 (1) で求めた (a_1, b_1) と (a_2, b_2) に対して期待値 $E\left[(a_1X + b_1Y)^2\right]$ と $E\left[(a_1X + b_1Y)(a_2X + b_2Y)\right]$ を求めよ．

(大阪大 2012)　　(m20123511)

0.226 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & c & 3 \end{bmatrix}$ について以下の問いに答えよ．ただし，c は実定数である．

(1) 行列 A の固有多項式 $f(\lambda) = |\ \lambda I - A\ |$ を変数 λ の関数とみなし，その極値を求めよ．ただし，I は単位行列を表すものとする．さらに，$c = 0$ のときの f のグラフの概形を図示せよ．

(2) 行列 A のすべての固有値が実数となる，c に関する必要十分条件を示せ．

(3) $c = 0$ のときの行列 A のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(大阪大 2018)　　(m20183501)

0.227 次の行列 A に対して，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A の各固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(3) A を対角化する行列 P を求めよ．

（大阪府立大 2001）　　(m20013604)

0.228 次の行列が逆行列を持つ場合は，逆行列を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & a \\ b & b+c & b+1 \end{bmatrix}$

(大阪府立大 2011) (m20113611)

0.229 3 行 3 列の行列

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -4 \\ -8 & 0 & -10 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

に関して以下の問いに答えなさい．

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(2) 行列 A に関する方程式
$A^3 + aA^2 + bA + cE = O$
の係数 a, b, c を求めなさい．ただし，E は 3 行 3 列の単位行列，O は零行列である．

(3) (2) の結果を用いて，下記の式で表される行列
$A^5 - 5A^4 + 6A^3 - A^2 + 8A - 8E$
を計算しなさい．

(大阪府立大 2013) (m20133603)

0.230 ℓ, m, n を自然数として，次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{\ell\to\infty}\left(1-\frac{1}{\ell}\right)^{2\ell}$

(2) x が有理数であるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty}\{\cos(m!\pi x)\}^{2n}\right]$

(3) x が無理数であるとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}\{\cos(m!\pi x)\}^{2n}\right]$

(大阪府立大 2019) (m20193605)

0.231 次の 4 次正方行列 A について，下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有多項式および固有値を求めよ．

(2) A は対角化可能（すなわち，ある正則行列 P をとると，$P^{-1}AP$ は対角成分以外はすべて 0 とできる）か否か，理由をつけて答えよ．

(関西大 2002) (m20023704)

0.232 行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ のとき，

(1) A の階数を求めよ．

(2) 連立一次方程式 $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{bmatrix}$ が解を持つように a を定めよ．

(3) 定めた a に対して，上の連立一次方程式を解け．

(神戸大 1998)　　(m19983808)

0.233 $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3$ を $\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とおく．

T を $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像とし，

$$T(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\,,\quad T(\boldsymbol{e}_2) = -2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\,,\quad T(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$$

を満たすとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) T を表す行列を求めよ．　　(2) $\mathrm{Ker}(T),\ \mathrm{Im}(T)$ の基底と次元を求めよ．

(神戸大 2007)　　(m20073810)

0.234 2次の正方行列 $A = \begin{bmatrix} 13 & -30 \\ 5 & -12 \end{bmatrix}$ に関する以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A の固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(3) A を対角化せよ．すなわち，$P^{-1}AP = B$ となるような正則行列 P と対角行列 B を1組求めよ．

(4) 自然数 n に対して，A^n を求めよ．

(神戸大 2007)　　(m20073811)

0.235 以下の行列 A について，固有値 λ と各 λ に対する固有空間 $W(\lambda, A)$ を求めよ．

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$　　(2) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

(神戸大 2008)　　(m20083804)

0.236 3次の正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $\det(A)$ を求めよ．

(2) A の余因子行列を求めよ．

(3) A^{-1} を求めよ．

(神戸大 2009)　　(m20093813)

0.237 線形写像 $T\ :\ \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ および $\boldsymbol{R}^4$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4\}$ と $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3\}$ が与えられているとする．このとき，$\big[T(\boldsymbol{u}_1)\quad T(\boldsymbol{u}_2)\quad T(\boldsymbol{u}_3)\quad T(\boldsymbol{u}_4)\big] = \big[\boldsymbol{v}_1\quad \boldsymbol{v}_2\quad \boldsymbol{v}_3\big]B$ を満たす $3\times\ 4$ 行列 B が一意に存在する．この B を $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4\}$, $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3\}$ に関する T の表現行列という．以下の問いに答えよ．

(1) $3\times\ 4$ 行列 A が与えられ，$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}\ \ (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4)$ であるとき，

$$\big[T(\boldsymbol{u}_1)\quad T(\boldsymbol{u}_2)\quad T(\boldsymbol{u}_3)\quad T(\boldsymbol{u}_4)\big] = A\big[\boldsymbol{u}_1\quad \boldsymbol{u}_2\quad \boldsymbol{u}_3\quad \boldsymbol{u}_4\big]$$

を示し，$P = \big[\boldsymbol{u}_1\quad \boldsymbol{u}_2\quad \boldsymbol{u}_3\quad \boldsymbol{u}_4\big]\quad Q = \big[\boldsymbol{v}_1\quad \boldsymbol{v}_2\quad \boldsymbol{v}_3\big]$ とおいて，$B = Q^{-1}AP$ を証明せよ．

(2) $T(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 & 4 \\ 3 & 6 & -7 & 8 \\ 6 & 2 & -3 & 9 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^4)$ であるとき,

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

に関する T の表現行列 B を求めよ.

(神戸大 2009)　　(m20093814)

0.238 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$ を計算せよ.

(2) 等式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}=(af-bc+cd)^2$ を示せ.

(3) $A=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} & a_{35} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 & a_{45} \\ -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & 0 \end{bmatrix}$ について,

${}^tA=-A$ を示し, これを用いて $\det(A)=0$ を証明せよ.

(神戸大 2010)　　(m20103806)

0.239 以下で定義される 3 次の正方行列 A, B について, 固有値と, 各固有値に対する固有空間を求めよ.

(1) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$　　(2) $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

(神戸大 2010)　　(m20103807)

0.240 線形変換 $T:R^4\to R^4$ を

$$T(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}\,,\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\quad (x_1,x_2,x_3,x_4\in R)$$

で定義する. 以下の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{Ker}(T)=\{\boldsymbol{x}\in R^4 \mid T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}$ の基 $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\}$ を 1 組求めよ.

(2) $\mathrm{Im}(T)=\{T(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x}\in R^4\}$ の基 $\{\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4\}$ を 1 組求めよ.

(3) (1), (2) で求めた $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ が 1 次独立であることを証明せよ.

(神戸大 2011)　　(m20113810)

0.241 次の行列で表される線形変換 T の固有値 λ と固有空間 $W(\lambda; T)$ をすべて求めよ．

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(神戸大 2012)　　(m20123803)

0.242 R^3 の基底 $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ を考える．

(1) 行列 $[\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3]$ の逆行列を求めよ．

$T : R^3 \to R^3$ を，以下で定める線形変換とする：

$$T(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$$
$$T(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3$$
$$T(\boldsymbol{u}_3) = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_3$$

(2) R^3 の基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3\}$ に対する T の表現行列を書け．

(3) T の核 $\mathrm{Ker}(T) = \{\boldsymbol{x} \in R^3\ :\ T(\boldsymbol{x}) = 0\}$ の基底の 1 つ B_1 を求め，$\mathrm{Ker}(T)$ の次元を求めよ．ただし，B_1 を構成するベクトルは $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ の線形結合として表せ．

(4) T の像 $\mathrm{Im}(T) = \{T(\boldsymbol{x})\ :\ \boldsymbol{x} \in R^3\}$ の基底の 1 つ B_2 を求め，$\mathrm{Im}(T)$ の次元を求めよ．ただし，B_2 を構成するベクトルは $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ の線形結合として表せ．

(5) T の標準基底に対する表現行列を求めよ．

(神戸大 2014)　　(m20143801)

0.243 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ に対し，R^2 でのベクトルを考えるとき，以下の問に答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) A は対角化可能かどうかを答えよ．またその理由も述べよ．

(3) A の固有ベクトルのうち長さが 1 のものの 1 つ $\boldsymbol{u}$ を求め，$\boldsymbol{u}$ と直交する長さ 1 のベクトルのうちの 1 つ $\boldsymbol{v}$ を求めよ．これらのベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ に対し，$[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}]^{-1}A[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}]$ を求めよ．

(4) 任意の自然数 n に対する A^n を求めよ．

(神戸大 2014)　　(m20143802)

0.244 (1) 行列

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -6 & -20 \\ -12 & 7 & 20 \\ 12 & -6 & -19 \end{bmatrix}$$

の固有値 λ と固有空間 $W(\lambda; A)$ をすべて求めよ．

(2) ベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

が一次独立であることを示し，これらをシュミットの方法により正規直交系になおせ．

(神戸大 2014)　　(m20143805)

0.245 正の整数 n と実数 $c, y_1, y_2, \cdots, y_n$ に対し，$D_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ を

$$D_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n) = \det \begin{bmatrix} y_1y_1 + c & y_2y_1 & \cdots & y_ny_1 \\ y_1y_2 & y_2y_2 + c & \cdots & y_ny_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1y_n & y_2y_n & \cdots & y_ny_n + c \end{bmatrix}$$

で定義し，また $n \geq 2$ のとき $d_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ を

$$d_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n) = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2y_1 & \cdots & y_ny_1 \\ y_2 & y_2y_2 + c & \cdots & y_ny_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & y_2y_n & \cdots & y_ny_n + c \end{bmatrix}$$

で定義する．ただし，$\det A$ は行列 A の行列式を表す．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $n \geq 2$ のとき次の等式が成り立つことを示せ．

$$D_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n) = cD_{n-1}(c, y_2, \cdots, y_n) + y_1d_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

(2) $n \geq 2$ のとき $d_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n) = c^{n-1}y_1$ であることを示せ．

(3) n についての数学的帰納法により次の等式が成り立つことを示せ．(ただし $0^0 = 1$ とする.)

$$D_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n) = c^n + c^{n-1}\sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

(神戸大 2014)　　(m20143806)

0.246 k を整数とし，

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & k & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & -k \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とおく．以下の各問に答えよ．

(1) A が正則であるための k の条件を求めよ．

(2) $k = 1$ のとき，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{j}$ の解を求めよ．

(3) A が正則行列であるとき，A の逆行列の成分がすべて整数となるための必要十分条件は $k = 1$ であることを示せ．

(神戸大 2016)　　(m20163806)

0.247 行列 $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$　$(a, b, c \in \mathbb{C})$ に対して，次の問に答えよ．

以下，I は 3 次の単位行列を表し，ω は 1 の 3 乗根 $\omega = \dfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$ を表す．

(1) Λ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) A が $A = aI + b\Lambda + c\Lambda^2$ と表されることを用いて，A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) 等式　$\det(A) = (a + b + c)(a + \omega b + \omega^2 c)(a + \omega^2 b + \omega c)$　を示せ．

(神戸大 2017)　　(m20173801)

0.248 (i, j) 成分 a_{ij} が "$i < j$ のとき $a_{ij} = 0$" を満たすとき，その行列を下三角行列といい，さらに逆行列を持つとき可逆な下三角行列という．2 つの行列 X, Y について $Y = GX$ となる可逆な下三角行列 G が存在するとき $X \sim Y$ と表す．次の問に答えよ．

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる x を求めよ．

(2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる $x_1,\ x_2,\ x_3$ を求めよ．

(3) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる $x_1,\ x_2,\ x_3$ を a_{ij} たちの有理式として表せ．

(神戸大 2017)　　(m20173804)

0.249 a を実数とする．自然数 n に対して，対角成分が全て a であり，それ以外の成分が全て 1 である n 次正方行列を A_n とする．以下の各問いに答えよ

$$A_n = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

(1) $|A_n| = (a + n - 1)(a - 1)^{n-1}$ であることを示せ．ただし $0^0 = 1$ とする．

(2) $a = 1$ とする．A_n の階数を求めよ．また，同次連立方程式 $A_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間の次元と基底を求めよ．

(3) $a = -n + 1$ とする．A_n の階数を求めよ．また，同次連立方程式 $A_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間の次元と基底を求めよ．

(神戸大 2017)　　(m20173807)

0.250 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ とする．また，$\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$ を $\mathbb{R}^3$ の基底とし，この基底についての表現行列が A である $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像を T とする．以下の各問いに答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) A^n を求めよ．

(3) T の核 $\mathrm{Ker}(T)$ と像 $\mathrm{Im}(T)$ の基底をそれぞれ求めよ．なお，基底を構成するベクトルは $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ の一次結合で表すこと．

(4) n を自然数とするとき，T の n 回の合成を T^n で表す．$T^n(\boldsymbol{a}_1),\ T^n(\boldsymbol{a}_2),\ T^n(\boldsymbol{a}_3)$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ の一次結合で表せ．

(神戸大 2017)　　(m20173808)

0.251 4 次の正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) A^2 を求めよ．

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$，$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とするとき，連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$ を解け．

(3) ベクトル $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3,\ \boldsymbol{x}_4 \in R^4$ を 1 次独立とする。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_1 &= \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 + x_4 \\
\boldsymbol{y}_2 &= \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 - x_4 \\
\boldsymbol{y}_3 &= \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 - x_4 \\
\boldsymbol{y}_4 &= \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 + x_4
\end{aligned}$$

とするとき，ベクトル $\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2,\ \boldsymbol{y}_3,\ \boldsymbol{y}_4$ も 1 次独立となることを示せ．

(神戸大 2018)　　(m20183806)

0.252 a を実数とする．3 次の正方行列 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5-a & 2 & a-4 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ に対し，以下の各問に答えよ．

(1) B の固有値をすべて求めよ．

(2) B の固有値に属する固有空間の各々について，基底を一組求めよ．

(3) B が対角化可能であるための a の条件を求めよ．

(神戸大 2018)　　(m20183807)

0.253 $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4 \in \mathbb{R}^3$ と $W_1,\ W_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ を次のように定める．

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

$$W_1 = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2 \rangle,\ W_2 = \langle \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4 \rangle$$

ただし，$\langle \boldsymbol{u}_i,\ \boldsymbol{u}_j \rangle$ は $\boldsymbol{u}_i,\ \boldsymbol{u}_j$ が生成する $\mathbb{R}^3$ の部分空間を表す．以下の各問に答えよ．

(1) 行列 $A = [\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2\ \ \boldsymbol{u}_3]$ の逆行列を求めよ．

(2) $W_1 \cap W_2$ の 1 組の基底と次元を求めよ．

(3) 3 次正方行列 B で，$B\boldsymbol{u}_3 = 0$，かつ，すべての $\boldsymbol{u} \in W_1$ に対して $B\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ となるものを求めよ．

(神戸大 2019)　　(m20193801)

0.254 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 5 \\ -5 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ とし，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x}),\ ||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

と定める．ただし，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積とする．また，$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ を A の固有値とする（ ただし $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ ）．以下の各問に答えよ．

(1) $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ と，各 $i = 1, 2, 3$ について固有値 λ_i に対する A の固有値ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ で $||\boldsymbol{u}_i|| = 1$ を満たすものを一つずつ求めよ．また，その $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ について $(\boldsymbol{u}_i,\ \boldsymbol{u}_j)$ (ただし $1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq j \leq 3$) を計算せよ．

(2) $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ を (1) で求めたベクトルとし，$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ とする．このとき，$f(c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3)$ を c_1, c_2, c_3 で表せ．

(3) $S = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; ||\boldsymbol{x}|| = 1 \right\}$ とする．S における $f(\boldsymbol{x})$ の最大値と最小値，および，それらを与える $\boldsymbol{x} \in S$ を求めよ．

(神戸大 2019)　　(m20193802)

0.255 正方行列 X の固有値 λ に対する固有空間を $V_X(\lambda)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) X, Y を $XY = YX$ となる正方行列とする．$x \in V_X(\lambda)$ のとき，$Yx \in V_X(\lambda)$ を示せ．

(2) X を対称行列とし，λ, μ を X の異なる固有値とする．$V_X(\lambda)$ の要素と $V_X(\mu)$ の要素は直交することを示せ．

(3) 行列

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

に対し，X, Y の固有値と固有空間をすべて求めよ．

(4) (3) の行列 X, Y に対し，$P^{-1}XP$ と $P^{-1}YP$ がともに対角行列になるような正則行列 P を 1 つ求めよ．

(神戸大 2020)　　(m20203802)

0.256 各成分が 1 か -1 のいずれかであるような 4 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & b \\ 1 & c & 1 & d \\ 1 & e & f & g \end{bmatrix}$$

について，

$$A^T A = 4E$$

が成り立つとする．ただし A^T は A の転置行列を，E は 4 次の単位行列を表す．このとき，次の問いに答えよ．

(1) a, b, c, d, e, f, g を求めよ．

(2) 連立一次方程式

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を解け．

(神戸大 2022)　　(m20223802)

0.257 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ のとき，$2(A+B) + X = A + 3B$ となる行列 X を求めよ．

(鳥取大 2005)　　(m20053908)

0.258 $A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ について, ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ を計算せよ.

(鳥取大 2005) (m20053909)

0.259 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ のとき, $X + Y = A$, $X - Y = B$ となる行列 X, Y を求めよ.

(鳥取大 2006) (m20063906)

0.260 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ について, ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ を計算せよ. なお ${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置行列を意味する.

(鳥取大 2006) (m20063907)

0.261 次の行列 A に対して $A = X + Y$ となる対称行列 X と交代行列 Y を求めなさい.

(行列 M の転置行列を M' で表すとき, 対称行列とは $M = M'$ となる行列で, 交代行列は $-M = M'$ となる行列である. 交代行列の対角成分は 0 である. 交代行列は歪対称行列とも呼ばれる)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

(鳥取大 2006) (m20063912)

0.262 次の連立方程式を解きなさい. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(鳥取大 2006) (m20063913)

0.263 次の行列 A に対して以下の設問 (1), (2) に答えよ. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ. 固有ベクトルは第一成分 (x 成分) が 1 のものを求めよ.

(2) 行列 A を用いて, 2 変数関数 $f(x, y)$ を以下の式で定義する.

$$f(x, y) = (x \ \ y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (x, y \text{ は実数})$$

この 2 変数関数 $f(x, y)$ に対して $f(x, y) = a(x + y)^2 + b(x - y)^2$ となるように a, b を求めよ.

(鳥取大 2006) (m20063914)

0.264 以下に示す行列 A の固有値 λ と対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ. 但し, 固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ は A を掛けたときに定数 λ を比例係数として元の $\boldsymbol{x}$ に比例するような (すなわち, $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ となるような) A に固有のベクトルである.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(鳥取大 2007) (m20073909)

0.265 次の行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(鳥取大 2007) (m20073911)

0.266 $R(\theta)=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ とおくとき，次の式が成り立つことを示せ.

(1) $R(\alpha)R(\beta)=R(\beta)R(\alpha)=R(\alpha+\beta)$ (2) $R(-\alpha)=R(\alpha)^{-1}$

(鳥取大 2007) (m20073914)

0.267 3 行 4 列の行列 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & -9 & 6 & 3 \\ -2 & 6 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ の階数を求めよ.

(鳥取大 2007) (m20073915)

0.268 2 次正方行列 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(鳥取大 2007) (m20073916)

0.269 次の 3 つのベクトルが 1 次従属となるように m の値を求めよ. $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} m \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$.

(鳥取大 2007) (m20073919)

0.270 行列 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値およびその固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(鳥取大 2007) (m20073920)

0.271 (1) 行列 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ の行列式の値を求めよ.

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列を求めよ.

(3) 次の連立一次方程式を解け. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 &= 0 \\ 2x_1-x_2+x_3 &= 1 \\ x_1-2x_2+x_3 &= 2 \end{cases}$

(鳥取大 2008) (m20083905)

0.272 行列 $\boldsymbol{B}$ について以下の問いに答えよ. $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(1) 行列 $\boldsymbol{B}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) 固有ベクトルを利用して行列 $\boldsymbol{B}$ を対角化せよ.

(鳥取大 2008) (m20083906)

0.273 行列 $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ とする.

(1) 行列 A の行列式の値を求めよ.

(2) 行列 A の逆行列を求めよ.

(3) 行列 A の固有値を求めよ.

(鳥取大 2009)　　(m20093908)

0.274　行列 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　行列式の値を求めよ．

(2)　逆行列を求めよ．

(3)　固有値を求めよ．

(鳥取大 2011)　　(m20113907)

0.275　行列 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　固有値を求めよ．

(2)　固有ベクトルを用いて，行列 A を対角化せよ．

(3)　A のべき乗 A^n（n は正の整数）を求めよ．

(鳥取大 2013)　　(m20133902)

0.276　$\mathbb{R}^3$ の部分集合 V を　$V=\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0\right\}$　と定める．次に答えよ．

(1)　V は $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間であることを示せ．

(2)　V の正規直交基底を一組求めよ．

(3)　写像 $f:V\to V$ を　$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} y \\ z \\ x \end{bmatrix}$　と定める．f が線形写像になることを示せ．

(4)　(2) で求めた V の一組の基底を e_1, e_2 とする．$f(e_1)$ と $f(e_2)$ をそれぞれ，e_1, e_2 を用いて表せ．

(広島大 2003)　　(m20034109)

0.277　$(m+n)$ 次正則行列 A が

$$A=\begin{bmatrix} P & Q \\ {}^tQ & R \end{bmatrix}$$

のように区分されているとする．ただし，P は m 次正方行列，Q は $m\times\ n$ 行列，R は対称な n 次正則行列，${}^tQ$ は Q の転置行列である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$(m+n)$ 次正方行列 M を

$$M=\begin{bmatrix} E_m & -QR^{-1} \\ O & E_n \end{bmatrix}$$

とおく．ただし，E_k は k 次単位行列，O はすべての成分が 0 である $n\times\ m$ 行列とする．このとき，行列 M は正則行列であることを示せ．

(2)　$MA\,{}^tM$ を $B=P-QR^{-1}\,{}^tQ$, O, ${}^tO$, R を用いて表せ．

(3)　$|A|=|B||R|$ となることを示せ．

(4)　$(MA\,{}^tM)^{-1}$ を求め，

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}QR^{-1} \\ -R^{-1}\,{}^tQB^{-1} & R^{-1}+R^{-1}\,{}^tQB^{-1}QR^{-1} \end{bmatrix}$$

であることを示せ．

(広島大 2010)　　(m20104105)

0.278　次の行列 A が定める $\mathbb{R}^4$ の線形変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を考える.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ.

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を一組求めよ.

(2) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の基底を一組求めよ.

(3) f を $\mathrm{Im}\, f$ に制限して得られる線形変換 $g : \mathrm{Im}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ について, (2) で求めた基底に関する行列表示を求めよ.

(4) A の固有値をすべて求めよ.

(広島大 2011)　　(m20114106)

0.279　標準内積の入った線形空間 $\mathbb{R}^4$ における次のベクトルを考える.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を W_1, ベクトル $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を W_2 とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 部分空間 $W_1 + W_2$ の直交補空間の次元を求めよ.

(2) $W_1 \cap W_2$ の基底を一組求めよ.

(3) W_1 の直交補空間を $W_1^{\perp}$ とする. ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

の直和分解 $\mathbb{R}^4 = W_1 \bigoplus W_1^{\perp}$ に伴う分解を

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \quad \left(\boldsymbol{y} \in W_1\, ,\ \boldsymbol{z} \in W_1^{\perp}\right)$$

とし, ベクトル $\boldsymbol{y}$ を $a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2$ と表す. 実数 a, b を x_1, x_2, x_3, x_4 を用いて表せ.

(広島大 2011)　　(m20114107)

0.280　λ を実定数とし, 3 次実正方行列 A, B を次で定める.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ. ただし, 3 次実正方行列 X, Y が可換であるとは, $XY = YX$ が成り立つことである.

(1) A と可換な 3 次実正方行列をすべて求めよ.

(2) B と可換な 3 次実正方行列をすべて求めよ.

(3) B と可換な 3 次実正方行列どうしは可換であることを示せ.

(広島大 2012)　　(m20124101)

0.281 標準内積の入った実線形空間 $\mathbb{R}^4$ における, 次の 4 点を考える.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^4$ の原点を O と書く. 線形変換 $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ は

$$T(P_1) = P_2, \ T(P_2) = P_3, \ T(P_3) = P_4, \ T(P_4) = P_1$$

を満たすとする. 以下の問いに答えよ.

(1) ベクトル $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}, \overrightarrow{OP_4}$ は 1 次独立であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}^4$ の標準基底に関する T の表現行列 A を求めよ.

(3) T の固有多項式およびすべての実固有値を求めよ.

(4) 原点 O と P_1, P_2 を含む 2 次元部分線形空間を W とする. W 上の点 Q で P_3 との距離が最小となるものを求めよ.

(広島大 2013)　　(m20134107)

0.282 $\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & m \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & n \end{bmatrix}$ が直交行列となるように, m, n を定めよ.

(広島大 2016)　　(m20164108)

0.283 行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & b \\ a & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{bmatrix}$ の固有ベクトルの一つは $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ である.

(1) 実数 a, b の値を求めよ.

(2) $\boldsymbol{A}$ の固有値をすべて求めよ.

(3) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^4 - 3\boldsymbol{A}^3 + 4\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ とする. $\boldsymbol{A}$ の対角化を利用して, $\boldsymbol{B}$ の行列式の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{E}$ は単位行列である.

(広島大 2022)　　(m20224105)

0.284 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A の固有ベクトルを求めよ.

(3) A を対角化する行列 P を求め, 対角化を利用して A^3 を計算せよ.

(広島大 2023)　　(m20234104)

0.285 $B=\begin{bmatrix} 2 & b \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ について，固有値が実数となるための b の条件を求めなさい.

(山口大 2009)　　(m20094311)

0.286 行列 $\begin{bmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$ の固有値を求めなさい．また，その固有値の中で絶対値の最も大きな固有値に対する固有ベクトルを求めなさい．ただし，i は虚数単位を表し，固有値と固有ベクトルは複素数の範囲で求めることとする..

(山口大 2011)　　(m20114302)

0.287 行列 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(山口大 2012)　　(m20124302)

0.288 x, y, z, w を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y + z + w = 2 \\ 3x - z = 0 \\ x + 2y + 3z + 2w = 2 \\ 2y - w = 0 \end{cases}$$

について，次の各問いに答えよ.

(1) この連立 1 次方程式の係数行列 A の行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(2) 以下の 4 次正方行列 A_x, A_y, A_z, A_w の行列式の値をそれぞれ求めよ.

$$A_x=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_y=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_z=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_w=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) クラーメルの公式を用いて，この連立 1 次方程式を解け.

(高知大 2015)　　(m20154506)

0.289 $f(x)$ は開区間 $(-1, 1)$ 上で連続な正値関数で,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1$$

を満たすとする．さらに，正の整数 n ごとに実数直線 $\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f_n(x)$ を,

$$f_n(x)=\begin{cases} nf(nx) & \left(x \in \left(-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right) \text{のとき}\right) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

で与える．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$ を求めよ.

(2) N を正の整数とし，ε を正の数とする．$\mathbb{R}$ 上で定義された連続関数 $g(x)$ が閉区間 $\left[-\dfrac{1}{N},\ \dfrac{1}{N}\right]$ 上で $\Bigl|g(x)\Bigr| < \varepsilon$ を満たせば，$n > N$ を満たす任意の整数 n に対して，

$$-\varepsilon \leqq \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x)dx \leqq \varepsilon$$

であることを示せ.

(3) $\mathbb{R}$ 上で定義された任意の連続関数 $h(x)$ に対して，$a_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)h(x)dx$ とおく.

このとき，$g(x) = h(x) - h(0)$ に対して (2) の結果を利用することにより，
数列 $\{a_n\}$ は $n \to \infty$ のとき $h(0)$ に収束することを示せ.

(高知大 2016)　　(m20164502)

0.290 E を 3 次単位行列とする．3 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{1}{2} & -1 & -\dfrac{3}{2} \end{bmatrix}$ および $B = E + A$ について，

次の問に答えよ.

(1) $B^2 \neq O$ であるが $B^3 = O$ であることを示せ.

(2) 3 次元数ベクトル $\boldsymbol{u}$ で，$B^2\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ であるものを一つ選べ.

(3) (2) で選んだベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して，$\boldsymbol{u}$, $B\boldsymbol{u}$, $B^2\boldsymbol{u}$ は 1 次独立であること，従って，ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ の基底をなすことを示せ.

(4) 線形変換 $f : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$

$$\boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3)$$

の (3) の基底 $\{\boldsymbol{u},\ B\boldsymbol{u},\ B^2\boldsymbol{u}\}$ に関する表現行列を求めよ.

(愛媛大 2006)　　(m20064614)

0.291 a, b, c を実数とし，行列

$$A = \begin{bmatrix} a & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ b & 0 \\ 0 & b \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c & 1 & 2 \\ 3 & -c & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 17 & 5 \end{bmatrix}$$

について次の問いに答えよ.

(1) 行列 AB を求めよ.

(2) 行列 $C\,{}^tD$ を求めよ．ただし，${}^tD$ は D の転置行列を表す.

(3) $AB = C\,{}^tD + F$ が成り立つとき，a, b, c の値を求めよ.

(愛媛大 2007)　　(m20074607)

0.292 a を実数とする．行列　$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & a \end{bmatrix}$ 　について次の問いに答えよ.

(1) A の行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) A の逆行列 A^{-1} が存在するための必要十分条件を a を用いて表せ．また，a がその条件をみたすとき A^{-1} を求めよ．

(3) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{4}$ が成り立つとき，a の値を求めよ．ただし，$|A^{-1}|$ は A^{-1} の行列式を表す．

(愛媛大 2007)　　(m20074612)

0.293 3 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 1 & 9 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

について次の問に答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A の階数を求めよ．

(3) A の各固有値に対する固有空間をそれぞれ求めよ．

(4) 適当な正則行列 P によって A を対角化せよ．

(愛媛大 2011)　　(m20114601)

0.294 c を実数とする．4 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & c & 0 \\ 1 & c & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

について次の問に答えよ．

(1) 方程式

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

が解をもつための c の条件を述べよ．またそのときの解を（複数あるならばそのうち一つを）求めよ．

(2) 方程式

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

が解をもつための c の条件を述べよ．またそのときの解を（複数あるならばそのうち一つを）求めよ．

(愛媛大 2011)　　(m20114602)

0.295 x を実数とする．3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の 3 つのベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}$$

に対して，以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ が 1 次独立であることを示せ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ が 1 次従属であるとき，x の値を求めよ.

(3) $x = 5$ のとき，ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ が $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

(愛媛大 2016)　　(m20164601)

0.296 (1) 行列 A を $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -10 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ で定める.

(a) A のすべての固有値を求めよ.

(b) 適当な正則行列 P を用いて，A を対角化せよ.

(2) B を正方行列とし，B^2 が零行列になるとする．このとき，B は 0 を固有値にもつこと，および 0 以外には固有値をもたないことを示せ.

(愛媛大 2016)　　(m20164602)

0.297 (1) 次の不定積分を求めよ.　$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

(2) 次の定積分を求めよ.　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^{-1} 2x \ dx$

(3) 曲線 $y = \sin^{-1} 2x \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\right)$，直線 $y = \dfrac{\pi}{2}$ および y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ.

ただし，$\sin^{-1} x$ の値域は $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \ \dfrac{\pi}{2}\right]$ とする.

(愛媛大 2017)　　(m20174602)

0.298 3 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ において，3 つのベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

で生成される部分空間

$$V = \{c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 \mid c_1, \ c_2, \ c_3 \in \mathbb{R}\}$$

を考える．以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ が 1 次従属であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ が V の基底となることを示せ.

(3) $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \right\}$ を満たす実数 α, β, γ を 1 組求めよ.

(4) $\begin{bmatrix} a \\ a+1 \\ a+2 \end{bmatrix} \in V$ となるような実数 a を求めよ.

(愛媛大 2017)　　(m20174606)

0.299 (1) 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

について考える.

(a) A の固有値を全て求め，各固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(b) 適当な正則行列 P を用いて，行列 A を対角化せよ．

(2) a を実数とし，行列

$$B = \begin{bmatrix} 1+a & a & 0 & 0 \\ -a & 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

を考える．B の固有値を全て求め，各固有値に対する固有空間の次元を求めよ．

(愛媛大 2017)　　(m20174607)

0.300 行列 P, Q, R, S を次のように定める．

$$P = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 6 & -4 & 6 \\ 3 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

以下の問いに答えよ．

(1) 次のうち，計算可能なものについてその計算をせよ．

(i) $S^2 - RQ$　(ii) ${}^tPRS$　(iii) $R\,{}^tQ + {}^t(Q\,{}^tR)$　(iv) $SP - 2P$

(2) 行列 P, Q, R, S のうち，正則行列であるものに対してその逆行列を求めよ．

(3) x を実数とする．行列 $T = S + \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$ の行列式を求めよ．また，T が正則でないとき，x の値を求めよ．

(愛媛大 2017)　　(m20174612)

0.301 a を実数とし，行列 A を次のように定める．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & -1 & a \\ a & a & -1 \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の階数 $\mathrm{rank}\,A$ を求めよ．

(2) $a = 1$ のとき，実数 x, y, z を未知数とする連立 1 次方程式　$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ の解を求めよ．

(3) 実数 x, y, z を未知数とする連立 1 次方程式　$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix}$ が唯一つでない解を持つとき，a の値を求めよ．また，このとき，この連立 1 次方程式の解を求めよ．

(愛媛大 2017)　　(m20174613)

0.302 2 つの 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{a}$ の転置により得られる 3 次実行

ベクトル ${}^t\boldsymbol{a} = [a_1 \ \ a_2 \ \ a_3]$ と $\boldsymbol{b}$ の（行列としての）積 ${}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ により得られる実数を $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ とおく.

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

また，$\boldsymbol{o} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とおく.

(1) (a) 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対し，$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}) = 0$ であることは $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ であるための必要十分条件であることを示せ.

(b) $\boldsymbol{o}$ でない 2 つの 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ に対し，$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = 0$ ならば $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ は 1 次独立であることを示せ.

(c) $\boldsymbol{o}$ でない 3 つの 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ に対し，$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) = 0$ ならば $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ は 1 次独立であることを示せ.

(2) 3 つの 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ を用いて表される 3 次正方行列 $A = [\boldsymbol{a} \ \ \boldsymbol{b} \ \ \boldsymbol{c}]$ に対し，${}^tA = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{a} \\ {}^t\boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{c} \end{bmatrix}$ を 3 つの 3 次実行ベクルトル ${}^t\boldsymbol{a},\ {}^t\boldsymbol{b},\ {}^t\boldsymbol{c}$ を用いて表される A の転置行列とする．A が

$${}^tAA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

を満たすとき，$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ は 1 次独立であることを示せ.

(愛媛大 2022)　　(m20224601)

0.303 a を実数とする．4 次実列ベクトル $\boldsymbol{x}$ を未知ベクトル，4 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 5 & a^2+3 & a^2-1 & 1 \\ a+1 & a & 1 & 2a-2 \\ -a+1 & a^2-a & a^2-1 & -2a+2 \\ 0 & a^2-1 & a^2-1 & 0 \end{bmatrix}$$

を係数行列とする連立 1 次方程式

$$(\#) \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

を考える．ただし，$\boldsymbol{o}$ は 4 次零ベクトルとする.

(1) $a = 1$ とする．このとき，方程式 (#) の解をすべて求めよ.

(2) (i) 任意の a に対し，方程式 (#) は少なくとも 1 つの解をもつことを示せ.

(ii) 実列ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ がともに 方程式 (#) の解であるとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の 1 次結合 $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$（ $\alpha,\ \beta$ は実数 ）も (#) の解であることを示せ.

(3) 方程式 (#) が以下の条件 (♭1), (♭2) の両方をみたすような a の値をすべて求めよ.

(♭1) 少なくとも 2 つの異なる解をもつ.

(♭2) 実列ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ がともに (#) の解であるとき，$\boldsymbol{a} = c\boldsymbol{b}$ または $\boldsymbol{b} = c\boldsymbol{a}$ をみたす実数 c が存在する.

(愛媛大 2022)　　(m20224602)

0.304 正則行列 $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & b \end{bmatrix}$ について以下の各問いに答えよ.

(1) 行列 A の逆行列 A^{-1} の $(2,3)$ 要素を求めよ．

(2) 行列 A の固有値を求めよ．

(3) $A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \\ 0 & 2i & 0 \end{bmatrix}$ を満たす a, b, c の各値を求めよ．ただし，i は虚数単位を表す．

(4) $A^n(2,2) + A^n(3,2)$ を n, b, c を用いて表せ．ただし，$A^n(i,j)$ は行列 A^n の (i,j) 要素を表し，n は 1 以上の整数とする．

(九州大 1998)　　(m19984707)

0.305 行列 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & a & 0 \\ a & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ について以下の各問いに答えよ．ただし，a は正の実数であるとする．

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) 行列の列 $A,\ A^2,\ A^3, \ldots$ が零行列でない定数行列 C に収束したとする．このとき，次の問いに答えよ．

(a) a の値を求めよ．

(b) 最大固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(c) 行列 C を求めよ．

(九州大 2001)　　(m20014705)

0.306 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ を n 個のベクトル，$A = [a_{ij}]$ を n 次正方行列とする

(1) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が一次独立（線形独立）であるということの定義を書きなさい．

(2) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が一次独立であると仮定し，$\boldsymbol{y}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{x}_i \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$ とおく，このとき，$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ が一次独立であるための必要十分条件は A が正則行列であることを示しなさい．

(3) ４つの一次独立なベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ と 4 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

を用い (2) のように $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3, \boldsymbol{y}_4$ を定める．これらが一次従属となる a の値を求めなさい．

(九州大 2006)　　(m20064707)

0.307 行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

に対し，以下の各問いに答えよ．

(1) A の逆行列を求めよ．

(2) A の固有値を求めよ．

(九州大 2014)　　(m20144708)

0.308 行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

に対し，以下の各問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を一つ求めよ．

(九州大 2014)　　(m20144709)

0.309 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) A のすべての固有値を求めよ．

(2) A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(3) $AC = A^2 + \alpha E$ を満たす行列 C の行列式 $|C|$ が，$|C| = 0$ を満たす定数 α の値をすべて求めよ．ただし，E は単位行列である．

(九州大 2018)　　(m20184702)

0.310 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A を対角化する正則行列 P，および逆行列 P^{-1} を求めよ．

(3) (2) の結果を用いて $P^{-1}AP$ を計算せよ．

(九州大 2021)　　(m20214701)

0.311 (1) 3 次正方行列 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(2) a を実数とする. このとき, 3 次正方行列 $\begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$ が逆行列を持つための条件を求めよ．

(九州芸術工科大 2005)　　(m20054803)

0.312 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ について以下の問に答えよ．

(1) A の行列式を求めよ．

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) A の固有多項式 $g_A(t)$ を求めよ．

(4) A の固有値 λ を求めよ．

(5) A の各固有値の固有ベクトル $\boldsymbol{p}$ を求めよ.

(佐賀大 2005)　　(m20054928)

0.313 $\boldsymbol{\nu}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ のときに以下の問に答えよ.

(1) 内積 $(\boldsymbol{\nu}_1\,,\,\boldsymbol{\nu}_2)$ を計算せよ.

(2) ベクトルの長さ $||\boldsymbol{\nu}_2||$ を計算せよ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{\nu}_1$ と $\boldsymbol{\nu}_3$ のなす角を求めよ.

(佐賀大 2005)　　(m20054929)

0.314 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ とするとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{AB}$ および $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}$ を求めよ.

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(佐賀大 2005)　　(m20054937)

0.315 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ とする．積 AB, BA が定義できるならば，それを計算せよ.

(佐賀大 2006)　　(m20064919)

0.316 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ のランク $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ.

(佐賀大 2006)　　(m20064920)

0.317 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ の行列式 $\det A$ および逆行列 A^{-1} を求めよ.

(佐賀大 2006)　　(m20064921)

0.318 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ とするとき，次の問いに答えよ.

(1) A の固有値，固有ベクトルを求めよ.　　(2) 適当な直交行列 P を求め，A を対角化せよ.

(佐賀大 2006)　　(m20064923)

0.319 次の行列の固有値，固有ベクトルを求めよ．ただし，i は虚数単位である.　$\begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{bmatrix}$

(佐賀大 2006)　　(m20064929)

0.320 3 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ の行列式 $|A|$ と逆行列 A^{-1} を求めよ.

(佐賀大 2007)　　(m20074912)

0.321 3 次正方行列 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値と，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ．

(佐賀大 2007)　　(m20074914)

0.322 2 つのベクトルを $\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする．2 次元列ベクトル空間 V^2 から V^2 への線形写像 $y = f(x)$ が $f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ と $f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ を満たすとき，任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ はどのようなベクトルへ写像されるか $f(\boldsymbol{x})$ の形を行列・ベクトル表示で求めよ．

(佐賀大 2007)　　(m20074919)

0.323 3 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，　$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $PAP^{-1} = B$ となる 3 次正則行列 P を求めよ．

(2) A の固有値を求めよ，

(3) 自然数 $n \geq 1$ について，B^n を求めよ．

(4) 自然数 $n \geq 1$ について，A^n を求めよ．

(佐賀大 2009)　　(m20094909)

0.324 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & m \\ m & 3 \end{bmatrix}$ で表される 1 次変換 f について，次の問いに答えよ．ただし，$m > 0$ とする．

(1) $y = ax + 3$ で表される直線 ℓ が 1 次変換 f によってそれ自身に写されるとき，a と m の値を求めよ．

(2) 直線 ℓ 上にあって 1 次変換 f で不変な点を (1) の結果を使って求めよ．

(3) 平面上のすべての点が 1 次変換 f によって原点を通るある直線に写されるとき，m の値を求め，なぜそうなるのかを説明せよ．

(佐賀大 2009)　　(m20094911)

0.325 $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$，　$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ とするとき，AB および B^TB を求めよ．

(佐賀大 2009)　　(m20094926)

0.326 $C = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを全て求めよ．

(佐賀大 2009)　　(m20094927)

0.327 次の行列 M と列ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\mathbf{0}$ について, 以下の問いに答えよ．

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 8 \\ -2 & -3 & 2 & -6 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} \qquad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 M の階数を求めよ．

(2) 連立方程式 $M\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の一般解を求めよ．

(佐賀大 2010)　　(m20104911)

0.328 行列 $A = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有方程式を求めよ.

(2) A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ を求めよ.

(3) A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ に対する各々の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ を求めよ.

(4) A を対角化したときの対角行列 $B(= P^{-1}AP)$ および正則行列 P を求めよ.

(5) A^n（n：自然数）を求めよ.

(佐賀大 2010)　　(m20104921)

0.329 行列 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

(1) $|A|$（A の行列式）を求めよ.

(2) A^{-1}（A の逆行列）を求めよ.

(3) $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_3$ の内積を求めよ.

(4) $\boldsymbol{a}_2$ と $\boldsymbol{a}_3$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$ を求めよ.

(5) $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ を用いて表せ.

(佐賀大 2010)　　(m20104922)

0.330 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする.

(1) 行列 A の階数を求めよ.

(2) 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の一般解を求めよ.

(佐賀大 2012)　　(m20124904)

0.331 3 次正方行列 $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) B の固有値と，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ.

(2) PBP^{-1} が対角行列となるような 3 次正則行列 P を求めよ.

(佐賀大 2012)　　(m20124906)

0.332 次の問いに答えよ.

(1) 平面上の点の x 軸への正射影となる線形変換 f_A を定める行列 A を示せ.

(2) 原点の周りに $\theta = 45^\circ$ 回転する線形変換　f_B を定める行列 B を示せ.

(3) $f_A,\ f_B$ の順番で変換する合成変換を求め，その変換により直線 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ が移された後の直線を求めよ.

(佐賀大 2013)　　(m20134903)

0.333　3 次元正方行列 A を $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする.

(1) A^2, A^3 を計算し，一般に $n \geq 1$ について A^n の形を推定せよ.

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(佐賀大 2013)　　(m20134913)

0.334　3 次正方行列 $B = \begin{bmatrix} 1 & c & -c \\ 0 & c & 1-c \\ c & 0 & -c \end{bmatrix}$ の固有値と，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ.

ただし，c は定数とする.

(佐賀大 2013)　　(m20134915)

0.335　$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$,　$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ とするとき AB および B^TB を求めよ.

(佐賀大 2013)　　(m20134921)

0.336　$C = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(佐賀大 2013)　　(m20134922)

0.337　n 次の正方行列 A について，以下の問いに答えよ.

(1) A が次のように与えられたとき，すべての固有値と対応する大きさ 1 となる固有ベクトルをすべて求めよ.

$A = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

(2) (1) で求めた固有ベクトルを列ベクトルとして並べて作られる行列を P とするとき，行列 P の転置行列 P^T と逆行列 P^{-1} をそれぞれ求めよ．また，求めた P^T と P^{-1} の関係を満足する n 次正方行列の名称を答えよ.

(佐賀大 2014)　　(m20144911)

0.338　3 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求め，A^3，A^4 を計算せよ.

(佐賀大 2014)　　(m20144916)

0.339　3 次正方行列 $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ の固有値と それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ.

(佐賀大 2014)　　(m20144918)

0.340　次の行列 M と列ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ について，以下の問いに答えよ.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 7 & -3 & 15 \\ 2 & -4 & 11 & 8 \\ 1 & 7 & -8 & 4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$$

(1) 行列 M の階数を求めよ.

(2) 連立方程式 $M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつように a の値を定めよ.

(3) (2) の条件のもとで，連立方程式 $M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を求めよ.

(佐賀大 2015)　　(m20154917)

0.341　行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -5 & -4 & 2 \\ -3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 行列式 $\det A$ を求めよ.

(2) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(4) 行列 A は対角化可能かどうか理由を述べて答えよ.

(佐賀大 2015)　　(m20154918)

0.342　行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) A の行列式を求めよ.

(2) A の逆行列を求めよ.

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(佐賀大 2016)　　(m20164905)

0.343　行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ \alpha & 2 \end{bmatrix}$ について，固有値の 1 つが $\lambda = 1$ であるとき，次の問いに答えよ.

(1) α の値を求めよ.

(2) 残りの固有値を求めよ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるように，行列 P とその逆行列 P^{-1} をそれぞれ求めよ.

(佐賀大 2016)　　(m20164913)

0.344　行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ a & 5 & 1 \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えよ．ただし $a > 0$ とする.

(1) 行列 A の行列式が 0 となる a の値を求めよ.

(2) (1) で求めた a を用いて行列 A のランク（階数）を求めよ.

(3) $a = 2$ のとき，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ の解をはき出し法（ガウスの消去法）を用いて求めよ.

(佐賀大 2016)　　(m20164923)

0.345　行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 行列式 det$A$ を求めよ.

(2) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(4) 行列 A を対角化して得られる行列 B を求めよ．また，$B = PAP^{-1}$ を満たす正則行列 P とその逆行列 P^{-1} を求めよ.

(佐賀大 2016)　　(m20164929)

0.346　行列 $A = \begin{bmatrix} k & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 行列 A の行列式の値が 0 になる k を求めよ.

(2) $k = 4$ であるとき，行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ,

(3) $k = -3$ であるとき，行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ,

(4) (3) の条件において，行列 A を対角化せよ.

(佐賀大 2017)　　(m20174909)

0.347　$\boldsymbol{R}$ を実数全体の集合とする．次の $\boldsymbol{R}^4$ のベクトルについて，以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ k \end{bmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次独立であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}$ が一次従属となるように k の値を定めよ.

(佐賀大 2017)　　(m20174919)

0.348　行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 行列式 det A を求めよ.

(2) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(4) 行列 A を対角化して得られる行列 B を求めよ．また，$B = PAP^{-1}$ を満たす正則行列 P とその逆行列 P^{-1} を求めよ.

(佐賀大 2017)　　(m20174920)

0.349　$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるとき，以下の問いに答えなさい.

(1) A の行列式を求めなさい.

(2) A の逆行列 A^{-1} の $(4, 4)$ 成分を求めなさい.

(佐賀大 2018)　　(m20184905)

0.350 (1) 2 次式 $5x^2+4xy+5y^2$ を対称行列 A を用いて，以下のように表す．行列 A を求めなさい．

$$5x^2+4xy+5y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(2) 行列 A の固有値を求めなさい．

(3) 固有値に対する大きさ 1 の固有ベクトルを求めなさい．

(4) 固有値の小さい順に，その固有ベクトルを第 1 列，第 2 列とする正方行列を P とおく．変換

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

により，方程式 $5x^2+4xy+5y^2-1=0$ を X, Y を用いて表すとともに，この図形がどんな図形を表すか答えなさい．

(佐賀大 2018) (m20184906)

0.351 次の行列 A と列ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -5 & -4 & 2 \\ -3 & -3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式を求めよ．

(2) 行列 A の逆行列を求めよ．

(3) 連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解を求めよ．

(4) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(佐賀大 2018) (m20184919)

0.352 次に示す行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

による一次変換を考える．次の楕円 C

$$C \ : \ \frac{x^2}{4}+y^2=1$$

が A による一次変換によって写った先の図形の方程式を求めよ．またその概形を $-4<x<4$ の範囲で図示せよ．

(佐賀大 2021) (m20214913)

0.353 次の行列 A と列ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式 $\det(A)$ を求めよ．

(2) 方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(3) 行列 A は固有値 1 をもつ．1 以外の A の固有値をすべて求めよ．また，求めた固有値に対応する固有ベクトルを 1 つ求めよ．

(4) A が対角化可能か否かを示し，もし対角化可能であれば対角化せよ．

(5) 外積 $\boldsymbol{b}\times\ \boldsymbol{c}$ と，その $\boldsymbol{b}$ との内積 $\boldsymbol{b}^t(\boldsymbol{b}\times\ \boldsymbol{c})$ をそれぞれ求めよ．ただし $\boldsymbol{b}^t$ は $\boldsymbol{b}$ の転置を表す．

(佐賀大 2021) (m20214919)

0.354 $\begin{cases} x_n = 3x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ y_n = x_{n-1} + 4y_{n-1} \end{cases}$ （ ただし，$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ）で表される数列について，

x_n，y_n を n で表しなさい．

(佐賀大 2021) (m20214925)

0.355 (1) 平面上のベクトル $a = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$，$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ が作る平行四辺形の面積を求めよ．

(2) 行列 A を n 次正方行列，行列 I を n 次単位行列とするとき，つぎを求めよ．

$$\begin{bmatrix} I-A & A \\ -A & I+A \end{bmatrix}^3$$

(佐賀大 2022) (m20224903)

0.356 (1) 次の行列 A と列ベクトル $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{b}$ について，問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(a) 行列 A の行列式 $\det(A)$ を求めよ．

(b) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(c) 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(d) 行列 A は固有値 1 をもつ．1 以外の A の固有値をすべて求めよ．また，A の固有値を 1 つ選び，その固有値に対応する固有ベクトルを 1 つ求めよ．

(e) 行列 A が対角化可能か否かを示し，もし対角化可能であれば $P\Lambda = AP$ となる正則行列 P と対角行列 Λ の組を 1 つ求めよ．

(2) A を $n \times n$ 実対称行列，$\boldsymbol{x}$ を n 次実ベクトルとする．$\boldsymbol{x}^t$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表すとする．A が相異なる n 個の固有値を持ち，全ての固有値が非負であるとき，$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} \geq 0$ を示せ．

(佐賀大 2022) (m20224918)

0.357 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -1 & b \end{bmatrix}$ について 以下の問に答えなさい．答えだけでなく途中経過も記載すること．

(1) 固有値が，2，3 のとき，a，b を求めなさい．

(2) (1) のとき，固有ベクトルを全て求めなさい．

(3) (1) のとき，A^n を求めなさい．

(佐賀大 2022) (m20224928)

0.358 行列 A, T を $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$，$T = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ とし，ベクトル $\boldsymbol{s}$ を $\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする．また，t を $t \geq 0$ の実数とし，指数関数 e^{-3x}，e^{-t} を用いて行列 $E(t)$ を $E(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$ とする．これらの行列やベクトルに関して以下の問いに答えなさい．

(1) $\boldsymbol{x}(t) = TE(t)T^{-1}\boldsymbol{s}$ とする．この $\boldsymbol{x}(t)$ を求めなさい．

(2) $y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t)$ とする．このとき

$$J = \int_0^\infty y(t)^2 dt$$

を求めなさい．

(3) 行列 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とする. また, 未知数 p, q, r を用いて未知の対称行列を $P = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$ とする. この P を

$$PA + A^T P = -Q$$

を満足するように決定し, $W = \boldsymbol{s}^T P \boldsymbol{s}$ を求めなさい. ただし, A^T は行列 A の転置行列を表し, $\boldsymbol{s}^T$ はベクトル $\boldsymbol{s}$ を転置したものを表す.　（長崎大 2004）　(m20045011)

0.359 図 1 に示すように, xy 平面上に原点 $O(0,0)$ および点 $A(1,1)$, 点 $B(x,y)$ を考える. また, $2\times\ 2$ 行列を $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{bmatrix}$ とする. また, ベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ の長さを $|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{OB}|$ で表し, ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積を $< \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} >$ で表す.

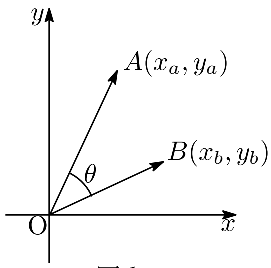


図 1

(1) $< \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} >$ を $|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{OB}|$ および図中の θ を用いて表しなさい.

(2) $|\overrightarrow{OB}|$ と $< \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} >$ を x, y で表しなさい。

(3) $\triangle OAB$ の面積を S とすると, $S = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta$ で表される. このことを用いて,

$$4S^2 = |M|^2$$

が成り立つことを示しなさい. ただし $|M|$ は, 行列 M の行列式の値を表す.

(4) $\triangle OAB$ が正三角形となるとき, 点 B の座標を求めよ.

(長崎大 2005)　(m20055004)

0.360 次式で与えられる行列 A について以下の小問に答えよ.　$A = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}$

ただし, 各小問は互いに無関係である.

(1) 行列 A に左から $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ を乗じて得られる行列 BA の行列式の値が 2 であった. このときの a と b の関係を求めよ.

(2) 行列 A が固有値 1 を持つとき, a と b の関係を求めよ.

(3) 行列 A が固有ベクトル $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ を持つとき, a と b の関係を求めよ.

(長崎大 2007)　(m20075005)

0.361 2 行 2 列の行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ と $f(x) = (x-1)(x-5) = x^2 - 6x + 5$ について考える. また $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする.

ある多項式 $g(x)$ を与えられた $f(x)$ で割ったときの商を $q(x)$, 余りを $r(x)$ とする. このとき, $f(x)$ が 2 次式であることより, 余り $r(x)$ は, 未定の係数 a, b を用いて $r(x) = ax + b$ とおくことができ, さらに, $g(x)$ について

$$g(x) = f(x)q(x) + ax + b \qquad ①$$

が成立する. 以下の問いに答えなさい.

(1) $f(x)$ の x に行列 A を代入した $f(A) = A^2 - 6A + 5I$ を求めなさい.

(2) n を正の整数とし, $g(x) = x^n$ とする. このとき, ① 式を満足する a, b を n で表しなさい.

(3) (2) の a, b および ① 式を利用して，正の整数 n に対して A^n を求めなさい．（A^n の各要素を n で表しなさい．）

(長崎大 2008) (m20085003)

0.362 行列 A, B が与えられている．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) $C = A + B$ における，行列 C の $(1,1)$ 要素の値

(2) $C = A \times\ B$ における，行列 C の $(1,1)$ 要素の値

(3) 行列 A の行列式 $|A|$

(4) 行列 A の逆行列

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

(長崎大 2009) (m20095004)

0.363 次の行列 A の固有値, 固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(長崎大 2010) (m20105006)

0.364 次の行列について考える. 以下の設問に答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めよ．

(2) $A^2 = A \times\ A$ を求めよ．

(3) A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(4) A の固有値を求めよ．

(長崎大 2010) (m20105008)

0.365 次の行列に対して，固有値および固有ベクトルを求め，対角化しなさい．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

(大分大 2011) (m20115106)

0.366 $\boldsymbol{R}^3$ において, ベクトル $\overrightarrow{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{a_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{a_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ と $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ に対して,

(1) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ は線形独立（一次独立）かどうかを調べなさい．

(2) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底かどうかを調べなさい．

(3) $\overrightarrow{b}$ は $\overrightarrow{a_1}$ と $\overrightarrow{a_2}$ と $\overrightarrow{a_3}$ の線形結合（一次結合）で表されるかどうか調べなさい．表される場合にはその線形結合を求め, 表されない場合にはその理由を説明しなさい．

(熊本大 2010)　　(m20105202)

0.367 ベクトル $\boldsymbol{x}(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$ に，次の関係があるとする．

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n)$$

ただし，$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ である．

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(2) $\boldsymbol{x}(n)$ を求めなさい．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}(n)$ を求めなさい．

(熊本大 2015)　　(m20155201)

0.368 次に示す 3 つの 3 次元ベクトル，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，および $\boldsymbol{a}_3$ について以下の問いに答えなさい．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，および $\boldsymbol{a}_3$ は線形独立（1 次独立）であることを示しなさい．

(2) $\boldsymbol{a}_1$ を正規化しなさい．

(3) グラム・シュミットの直交化を用いて，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，および $\boldsymbol{a}_3$ を正規直交化しなさい． ただし，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，および $\boldsymbol{a}_3$ の順に正規直交基底を求めなさい．

(熊本大 2016)　　(m20165201)

0.369 xy 平面上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を同じ平面上の点 $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ に移す写像

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) この写像の表す固有値 λ_1，λ_2 と固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ の組を求めなさい．なお，固有ベクトルの大きさは $\sqrt{2}$ とすること．

(2) xy 平面上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ により以下のように表せる．

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$$

α，β を x，y を用いて表しなさい．

(3) $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ を α，β，$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ を用いて表しなさい．

(熊本大 2019)　　(m20195203)

0.370 行列 $[A] = \begin{bmatrix} a & 10 & 2 \\ b & 5 & 1 \\ 15 & c & 5 \end{bmatrix}$ $(a, b, c$ は実数$)$ に関して以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $[A]$ が正則となる条件を，a, b, c を用いて表せ．

(2) 行列 $[A]$ が正則でないのは，平面上の三直線

$$l_1 : ax + 10y = 2 \qquad l_2 : bx + 5y = 1 \qquad l_3 : 15x + cy = 5$$

に対して，どのような場合か．この場合の a, b, c の値を求めよ．

（鹿児島大 2001） (m20015415)

0.371 次の行列 $[A]$ とベクトル $\{C\}$ が次のように与えられているとき，$[A][A], [A]\{C\}$ を求めよ．

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \{C\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

（鹿児島大 2001） (m20015416)

0.372 行列 $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ が $[A]^2 - 4[A] + 5[I] = [O]$ を満たすとき，

$[A]^5$ および $[A]^{-1}$ をそれぞれ求めよ．

ただし，$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$， $[O] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とする．

（鹿児島大 2001） (m20015418)

0.373 行列 $K = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ について.

固有値方程式 : $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ を解いて.

行列 K の固有値 λ_1 , λ_2 と対応する規格化された固有ベクトル $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ を求めなさい.

$*$ 規格化とは, ベクトルの大きさを 1 にとることである.

(鹿児島大 2005) (m20055415)

0.374 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ のとき，

次の行列をそれぞれ求めなさい．ただし右肩の T は転置記号，-1 は逆行列記号である．

(1) $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{AB})^T$, (2) $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{BA})^T$, (3) $\boldsymbol{X}^{-1}$, (4) $\boldsymbol{Y}^{-1}$

(鹿児島大 2006) (m20065408)

0.375 (1) 2 点 $P_1(1, -1, 1)$, $P_2(3, 1, 2)$ を通る直線の式を求めよ.

(2) x 軸, y 軸, z 軸との切片が, それぞれ, 3, -5, 4 である平面の方程式を求めよ.

(3) 座標の原点を $O(0, 0, 0)$, 2 点 P_1, P_2 の座標を, それぞれ $(2, 1, 3)$, $(4, 0, 1)$ とする.
$\overline{OP_1}$ と $\overline{OP_2}$ のなす角を求めよ.

(4) 2 つの行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ について,
$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ が成立するか調べよ.

(5) 行列 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(鹿児島大 2007) (m20075415)

0.376 行列 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ は以下の値とする.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad , \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

(1) 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ を求めよ.　(2) 積 $\boldsymbol{AB}$ を求めよ.　(3) 行列式 $|\boldsymbol{A}|$ を求めよ.

(鹿児島大 2008)　(m20085411)

0.377 (1) $|B| = \begin{vmatrix} 7 & 3 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & -5 & 2 \\ 8 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(2) $U = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & a \\ \dfrac{1}{2} & b \end{bmatrix}$ が直交行列になるように a, b を求めなさい.

(3) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ を対角化せよ.

(鹿児島大 2008)　(m20085413)

0.378 未知の二次元ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ に関する方程式, $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ の解を次の手順に従って求めよ. ただし, λ は未知のスカラーであり, また A は $2\times\ 2$ 行列で, $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ とする.

(1) $\boldsymbol{x}$ が自明な解, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ 以外の解を持つように λ の値を決定せよ. (注 : λ の値は二つある.)

(2) 各 λ の値に対し, $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ の解, (x_1, x_2) を決定せよ.

(鹿児島大 2009)　(m20095404)

0.379 未知の二次元ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ に関する方程式, $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ の解を次の手順に従って求めよ. ただし, λ は未知のスカラーであり, また A は $2\times\ 2$ 行列で, $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ とする.

(1) $\boldsymbol{x}$ が自明な解, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ 以外の解を持つように λ の値を決定せよ. (注 : λ の値は二つある.)

(2) 各 λ の値に対し, $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ の解, (x_1, x_2) を決定せよ.

(鹿児島大 2009)　(m20095416)

0.380 R^2 の以下の基底 $\{a_i\}$ から $\{b_i\}$ への基底変換の行列を求めよ.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(鹿児島大 2009)　(m20095422)

0.381 次の行列の逆行列を求めなさい.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(鹿児島大 2011)　(m20115406)

0.382 行列 $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(鹿児島大 2011)　　(m20115416)

0.383 下記の X, Y の連立方程式において，X, Y ともに 0 以外の解が存在するための ω の値を求めなさい.

$$\begin{bmatrix} 500-\omega & -200 \\ -200 & 200-\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(鹿児島大 2012)　　(m20125423)

0.384 以下に示す行列 A の逆行列 A^{-1} を求め，つぎに，AA^{-1} が単位行列となることを計算で示しなさい.

$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(鹿児島大 2012)　　(m20125431)

0.385 行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(鹿児島大 2012)　　(m20125436)

0.386 次の微分を求めなさい.

$\dfrac{d}{dx}\left[\, \tan^{-1}\sqrt{x}\,\right]$　　(ただし，$\tan^{-1}$ は arctan とする.)

(鹿児島大 2013)　　(m20135406)

0.387 行列 $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ の固有値を求めなさい.

(鹿児島大 2013)　　(m20135414)

0.388 次の設問に答えなさい.

(1) 列ベクトル $A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ と行ベクトル $B = \begin{bmatrix} d & e & f \end{bmatrix}$ を用いて，次の行列積を計算しなさい.

① AB　　② BA

(2) 次の行列の階数を求めなさい.

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 3 & 16 \end{pmatrix}$

(3) 次の行列の逆行列を求めなさい.

$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$

ただし，ω は $x^3 = 1$ の 1 つの虚数解とする.

(鹿児島大 2014)　　(m20145403)

0.389 次の行列 A について，以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

(1) A の行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) A の二つの固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ を求めよ.

(鹿児島大 2014)　　(m20145410)

0.390　$[A],\ [B],\ [C]$ を n 次正方行列とし,

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},\ [B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix},\ [C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

とする. 次の問いに答えなさい.

(1) n を 3 とするとき, $[A]$ と $[B]$ の積 $[A][B]$ の 1 行 1 列の成分を計算しなさい.

(2) n を任意の自然数とするとき, $[A]$ と $[B]$ の積 $[A][B]$ の i 行 j 列の成分を $\sum$ 記号で表しなさい. ただし, $i,\ j$ は, n 以下の自然数とする.

(3) n を任意の自然数とするとき, $[A]\big([B]+[C]\big) = [A][B]+[A][C]$ が成り立つことを証明しなさい.

(鹿児島大 2014)　　(m20145419)

0.391　直交座標系で $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},\ \overrightarrow{OQ} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ とする. ただし, $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ は互いに平行ではない. $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ はいずれも零ベクトルではない.

(1) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角を θ とするとき, $\cos\theta$ を求めなさい.

(2) $\triangle OPQ$ の面積 S を求めなさい.

(鹿児島大 2015)　　(m20155408)

0.392　次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求め, 行列 A を対角化しなさい.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

(鹿児島大 2015)　　(m20155420)

0.393　O を原点とする直交座標系の 2 点 $P,\ Q$ の位置ベクトルを $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} 3 \\ a \end{bmatrix},\ \overrightarrow{OQ} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ とする.

(1) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ が直交するような a を求めなさい.

(2) 前問で求めた a の値を用いて, $\triangle OPQ$ の面積 S を求めなさい.

(鹿児島大 2016)　　(m20165408)

0.394　次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求め, 行列 A を対角化しなさい.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(鹿児島大 2016)　　(m20165416)

0.395 O を原点とする直交座標系の 2 点 P, Q の位置ベクトルを $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{OQ} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ とする.

(1) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ が直交するような x_1 と y_1 の関係を求めなさい.

(2) (1) で求めた関係において, x_1 が整数であり, かつ, y_1 が 1 桁の自然数のなる解 x_1, y_1 を求めなさい.

(鹿児島大 2017) (m20175408)

0.396 係数行列の逆行列を求めることにより, x, y を求めなさい.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \end{bmatrix}$$

(鹿児島大 2017) (m20175410)

0.397 次の 2 次行列 $\boldsymbol{U}$ が直交行列になるように, 正規直交基底 a, b を求めなさい.

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & a \\ \dfrac{1}{2} & b \end{bmatrix}$$

(鹿児島大 2017) (m20175419)

0.398 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) 行列 A の固有値を λ とするとき, 固有方程式ならびに固有値を求めよ.

(鹿児島大 2018) (m20185405)

0.399 次の 2 次行列 $\boldsymbol{U}$ が直交行列になるように, 正規直交基底 a, b を求めなさい.

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & a \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & b \end{bmatrix}$$

(鹿児島大 2018) (m20185418)

0.400 (1) 次の行列の計算を求めよ.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

(3) 次の行列の余因子行列を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

(4) 次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

(鹿児島大 2021)　　(m20215412)

0.401 次の微分を計算せよ. $\dfrac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2-3x}\right)\right]$

(室蘭工業大 2006)　　(m20065510)

0.402 行列 A および I を, $A = \begin{bmatrix} a & 2a \\ b & b+1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とするとき, $A^2 - 5A - 2I = 0$ を満足する実数 a および b の組み合わせを求めよ.

(室蘭工業大 2007)　　(m20075512)

0.403 行列 $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ と与えられているものとする. このとき, 以下の問題に答えなさい.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の 2 つの固有値とそれらに対応する固有ベクトルを求めなさい.

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化しなさい. すなわち, 下の関係を満たす正則行列 P と対角行列 $\boldsymbol{\Lambda}$ を求めなさい. もし, 対角化が不可能な場合はその理由を述べなさい.

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$$

(3) $\boldsymbol{A}^{10}$（すなわち $\boldsymbol{A}$ の 10 乗）を求めなさい.

(室蘭工業大 2008)　　(m20085506)

0.404 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A の固有ベクトルを求めよ.

(3) A を対角化せよ.

(室蘭工業大 2014)　　(m20145501)

0.405 2 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ について以下を答えよ.

(1) A の固有多項式と固有値を求めよ.

(2) A の各々の固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(室蘭工業大 2018)　　(m20185501)

0.406 2 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ について以下を答えよ.

(1) A が正則であるための条件を示せ.

(2) またそのときの逆行列を求めよ.

(室蘭工業大 2021)　　(m20215505)

0.407 下記の連立 1 次方程式について，以下の問に答えよ。

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x+5y-4z &=& 7 \\ 3x+\ y-3z &=& -6 \\ -5x+4y-\ z &=& 21 \end{array}\right. \tag{1}$$

(1) 連立 1 次方程式 (1) の係数行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ が正則であることを示せ.

(2) 連立 1 次方程式 (1) の係数行列 A の第 2 行第 3 列成分 a_{23} の余因子 A_{23} を求めよ.

(3) クラメルの公式を用いて，連立 1 次方程式 (1) を解け.

(香川大 2006)　　(m20065702)

0.408 行列 $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$，ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ のとき，$\boldsymbol{x}^T S\boldsymbol{x}$ を計算せよ.
ただし，記号 T は転置を表す.

(香川大 2008)　　(m20085701)

0.409 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，ベクトル $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ とするとき，A の逆行列を求めよ. また，$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(香川大 2008)　　(m20085702)

0.410 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ に対して，ある $2\times\ 1$ ベクトル $\boldsymbol{x}$ $(\neq \boldsymbol{0})$ を右からかけたところ，$\boldsymbol{x}$ のスカラー倍となった. このようなベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(香川大 2008)　　(m20085703)

0.411 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) P の逆行列を求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ を求めよ.

(3) (2) の結果を用いて，A^n（ n は自然数 ）を求めよ.

(香川大 2011)　　(m20115702)

0.412 2 次の正方行列 $U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ を考える. 2 つの列ベクトル $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ が互いに直交する単位ベクトルであるとする. このとき，2 つの行ベクトル $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$ も互いに直交する単位ベクトルであることを示せ.

(香川大 2012)　　(m20125702)

0.413 以下に示す行列 A について次の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式を求めよ.

(2) 行列 A の逆行列を求めよ.

(3) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(香川大 2013)　(m20135703)

0.414 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$　(2) $A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 3 & -7 & 5 \end{bmatrix}$

(香川大 2014)　(m20145703)

0.415 以下に表す対称行列 $\boldsymbol{A}$ について, 次の各問に答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ.

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルを求めよ.

(3) 直交行列 $\boldsymbol{P}$ を求めよ.

(4) 直交行列 $\boldsymbol{P}$ を用いて, 行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ.

(香川大 2015)　(m20155702)

0.416 以下に示すベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が線形従属になる m を求めよ.

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} m \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}$$

(香川大 2017)　(m20175704)

0.417 以下に示す対称行列 $\boldsymbol{A}$ について各設問に答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ.

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルを求めよ.

(3) 直交行列 $\boldsymbol{P}$ を求めよ.

(4) 直交行列 $\boldsymbol{P}$ を用いて行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ.

(香川大 2017)　(m20175705)

0.418 以下の行列 U の階数（ランク）を求めよ.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -7 \\ -1 & 0 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

(香川大 2018)　(m20185704)

0.419 以下の行列 V に関して，次の問いに答えよ．

$$V = \begin{bmatrix} \dfrac{2\sqrt{2}}{3} & a \\ \dfrac{1}{3} & b \end{bmatrix}$$

(1) 行列 V の固有値が $1,\ \sqrt{2}$ となる $a,\ b$ を求めよ．

(2) 行列 V が直交行列になるための $a,\ b$ を求めよ．

(香川大 2018)　　(m20185705)

0.420 以下に示すベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ の両方と直交する単位ベクトルを求めよ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(香川大 2019)　　(m20195704)

0.421 以下に示す行列 $\boldsymbol{A}$ について各設問に答えよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ．

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルを求めよ．

(3) 行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ．

(香川大 2019)　　(m20195705)

0.422 ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ に垂直で $x = 3,\ y = 6$ を通る直線を求めよ．

(香川大 2020)　　(m20205704)

0.423 以下に示す行列 $\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{V}$ について各設問に答えよ．

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & -8 \\ -1 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{U}$ の階数（ランク）を求めよ．

(2) 直交行列を求め，行列 $\boldsymbol{V}$ を対角化せよ．

(香川大 2020)　　(m20205705)

0.424 ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$ を $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ の線形結合（1 次結合）で表せ．

(香川大 2021)　　(m20215705)

0.425 次に示す $\boldsymbol{R}^3$ の基底をグラム・シュミットの正規直交化法（シュミットの正規直交化法）を用いて正規直交化せよ．

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(香川大 2021)　　(m20215706)

0.426 (1) 次の行列の階数（ランク）を求めよ.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

(2) 次の行列の固有値を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

(香川大 2021) (m20215707)

0.427 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) 行列式 $|A|$ を第 1 列について余因数展開して, 2 行 2 列の行列式にして計算せよ.

(2) 行列 A の逆行列を求めよ.

(3) 行列 A の固有値 λ_i とその固有ベクトル x_i $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ.

(4) 適当な行列 P と相似変換 $(P^{-1}AP)$ を利用して, A を対角化せよ.

(島根大 2005) (m20055801)

0.428 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ に対して次の (a)〜(e) を求めよ.

(a) A^T, (b) AA, (c) $|A|$, (d) A の階数, (e) A^{-1}

ただし，A^T は A の転置行列を表す．$|A|$ は A の行列式である.

(島根大 2006) (m20065811)

0.429 次の線形方程式の解 $\boldsymbol{x}$ 全体の集合を求めよ. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

(島根大 2006) (m20065812)

0.430 次の行列の固有ベクトルを求め，この行列を対角化せよ。 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & i \end{bmatrix}$

ただし，i は虚数単位である.

(島根大 2006) (m20065813)

0.431 $A = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ とおく．このとき,

(1) A の行列式を求めよ. (2) $x = y = z = 1$ のとき, A の逆行列を求めよ.

(島根大 2007) (m20075801)

0.432 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の 4 つのベクトルを

$\boldsymbol{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ とする．このとき,

(1) $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_3}$ は 1 次独立であることを示せ. (2) $\boldsymbol{a_4}$ を $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_3}$ の 1 次結合で表せ.

(島根大 2007) (m20075802)

0.433 4 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分集合 W を次のように定める：

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ x - y - 3z + 2w = 0 \text{ であり，かつ } \quad 2x - y + z + w = 0 \text{ である．} \right\}$$

(1) W は $\mathbb{R}^4$ の部分空間であることを示せ. (2) W の基底を一組求めよ.

(島根大 2007) (m20075803)

0.434 任意定数 a を含む行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & a \end{bmatrix}$ について，以下の設問に答えよ.

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) 逆行列 A^{-1} を求めよ. さらに，$A^{-1}A$ が単位行列となることを示せ.

(3) 行列 A の階数 rank$A$ を求めよ.

(4) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ において，解 $\boldsymbol{x}$ がただ一つ求められる条件を示せ．さらに，その条件を満たす場合，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解いて，$\boldsymbol{x}$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ である.

(5) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ において，$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{0}$ 以外の解を持つ条件を示せ．さらに，その条件を満たす a の値を用いて $\boldsymbol{x}$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{x}$ の大きさは 1，すなわち $|\boldsymbol{x}| = 1$ とせよ.

(島根大 2007) (m20075809)

0.435 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 行列式 $|A|$ を第 1 列について余因数展開して，2 行 2 列の行列式にして計算せよ.

(2) 行列 A の逆行列を求めよ.

(3) 行列 A の固有値 λ_i とその固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ.

(4) 行列 A の階数を求めよ.

(島根大 2007) (m20075812)

0.436 次の微分方程式について，以下の設問に答えよ.

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

ただし，$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$， $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$， $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ である.

(1) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ.

(2) 行列 A の固有ベクトル ν_1, ν_2 を求めよ.

(3) 行列 $T = [\nu_1, \nu_2]$ とする $x(t) = Ty(t)$ の変換によって，① を $y(t)$ に関する微分方程式に変形せよ. ただし，$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$ である.

(4) 設問 (3) で求めた $y(t)$ に関する微分方程式を解け.

(5) 設問 (4) で求めた解 $y(t)$ を用いて，① の解 $x(t)$ を求めよ.

(島根大 2007) (m20075815)

0.437 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) 行列 A の階数を求めよ.

(3) 行列 A の逆行列を求めよ.

(4) 行列 A の固有値 λ_i とその固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ.

(島根大 2008) (m20085806)

0.438 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) 行列 A の行列式を 1 列について余因子展開して求めよ.

(2) 行列 A の 3 つの列ベクトルは線形独立といえるか. その根拠と共に示せ.

(3) 行列 A の逆行列を求めよ.

(4) 行列 A の固有値 λ_i とその固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ.

(島根大 2010) (m20105809)

0.439 3 次正方行列 X を以下のように定義する.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & -\sqrt{6} & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

以下の設問に答えよ．ただし，${}^tX$ は X の転置行列を表す.

(1) $x_{11} = 1$ とする．積 $X\,{}^tX$ を計算せよ.

(2) $x_{11} = 1$ とする．$(X\,{}^tX)^{-1}$ の行列式の値を求めよ.

(3) $x_{11} = 1$ とする．X の階数を求めよ.

(4) $x_{11} = 1$ とする．X^2 の行列式の値を求めよ.

(5) $x_{11} = -7$ とする．以下の命題が真か偽かを示せ.
命題「任意の $\boldsymbol{a}$ に対して，方程式 $X\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}$ の解 $\boldsymbol{y}$ が存在する.」
ただし，以下のように，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{y}$ は 3 次列ベクトルとする.

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

(島根大 2012) (m20125802)

0.440 次の (1), (2), (3) に答えよ．$\mathbb{R}^n$ は n 次列ベクトルのなす実ベクトル空間を表すことにする.

(1) (a) 「実ベクトル空間 V の n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底である」ことの定義を述べよ.

(b) 実ベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立であるとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ が 1 次従属であるならば，$\boldsymbol{v}_4$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合で表せることを示せ．

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，写像 $f_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ を $f_A(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}\ \ (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^5)$ と定める．このとき，

(a) 写像 f_A は線形写像であることを示せ．

(b) f_A の核 $\mathrm{ker} f_A$ の基底を求めよ．

(c) $\mathbb{R}^5$ の標準基底と $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{ w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ に関する f_A の表現行列を求めよ．

(3) n 次実正方行列 B に対して，線形写像 $f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $f_B(\boldsymbol{v}) = B\boldsymbol{v}\ \ (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$ と定める．このとき，f_B が全射であれば，B は正則行列であることを証明せよ．

(島根大 2013)　　(m20135801)

0.441　次に示す連立方程式が与えられている時，以下の設問に答えよ．ただし，c は定数である．

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_2 + cx_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 \quad + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

(1) 上の方程式を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ のように表現する場合に，行列 A と $\boldsymbol{b}$ を示せ．ただし，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ とする．

(2) 行列式 $|A|$ を求めよ．

(3) $c = 0$ の時，以下の問いに答えよ．

(a) 行列 A の固有値をすべて求めよ．

(b) 問い (a) で求めた固有値の最大なものに関する固有ベクトルを求めよ．

(島根大 2015)　　(m20155802)

0.442　行列 $B = \begin{bmatrix} 2 & b & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 行列 B の余因子行列を求めよ．

(2) B が正則であるための b の条件を求めよ．さらに B が正則であるとき，B の逆行列を求めよ．

(島根大 2015)　　(m20155804)

0.443　(1) 3 次実列ベクトル全体からなるベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の 4 つのベクトルを

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

とする．このとき，

（ア）$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立であることを示せ．

(イ) $\boldsymbol{a}_4$ を $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表せ.

(2) 実数上のベクトル空間 V の基底を $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ とする．線形写像 $f : V \to V$ が次を満たすとき,

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 \\ f(\boldsymbol{v}_2) = 2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 \\ f(\boldsymbol{v}_3) = 4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3 \end{cases}$$

このとき,

(ウ) f の像 $f(V)$ の次元を求めよ.

(エ) $f(W) = W$ を満たす V の 1 次元の部分空間 W をすべて求めよ.

(島根大 2016) (m20165801)

0.444 次の 3 次の正方行列 A について，以下の設問に答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.

(2) 設問 (1) で求めた固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ．ただし，固有ベクトルは大きさが 1 となるように正規化（規格化）すること.

(3) 設問 (2) で求めた固有ベクトルを用いて，行列 A を対角化せよ.

(4) A^{12} を計算せよ.

(島根大 2016) (m20165805)

0.445 以下の設問に答えよ．ただし，T $(T > 0)$ および ϕ は定数である.

(1) 次の定積分を計算せよ. $\displaystyle \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt$

(2) 次の定積分を計算せよ. $\displaystyle \frac{1}{T}\int_0^{T} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right)\right]^2 dt$

(3) 次式が成り立つことを示せ. $\displaystyle \int_0^{T} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right) dt = 0$

(4) 次の定積分を計算せよ. $\displaystyle \frac{1}{T}\int_0^{T} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{3}\right)\right]^2 dt$

(島根大 2017) (m20175801)

0.446 次の微分方程式について，以下の設問に答えよ.

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A\boldsymbol{x}(t)$$

ただし，$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ である.

(1) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 と固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ を求めよ．ただし，固有ベクトルは単位ベクトルとして求めること.

(2) 設問 (1) で求めた固有ベクトルが互いに直交していることを示せ.

(3) 固有ベクトルからなる行列 $T = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ の逆行列 T^{-1} を求めよ.

(4) $\boldsymbol{x}(t) = T\boldsymbol{y}(t)$ の変数変換を行い，$\boldsymbol{y}(t)$ に関する微分方程式を導け.

(5) 設問 (4) で求めた $\boldsymbol{y}(t)$ に関する微分方程式を解け.

(6) 設問 (5) で求めた解 $\boldsymbol{y}(t)$ を用い，微分方程式の解 $\boldsymbol{x}(t)$ を求めよ．

(島根大 2017)　　(m20175802)

0.447 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ とするとき，次の設問に答えよ．

(1) AB, BA を計算し，$AB = BA$ が成立しないことを示せ．

(2) 行列 A, B が正則であるかどうかを調べ，正則ならば逆行列を求めよ．

(3) 行列 A と 2 行 2 列の零行列 O に対して．$AX = XA = O$ をみたす O でない行列 X を一つ見つけよ．

(4) 次の条件をみたすような行列 $C = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ を求めよ．

$$C \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad C \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(5) 点 (x, y) が直線 $x - y = 1$ 上を動くとき，$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ により定義される点 (X, Y) の軌跡を求めよ．

(島根大 2018)　　(m20185802)

0.448 正則行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(島根大 2018)　　(m20185803)

0.449 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ とする．線形写像 $f_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ を $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と定める．また，$A = [\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5]$ を A の列ベクトルへの分割とする．すなわち，

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とする．$W = \langle\, \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5 \,\rangle$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5$ で張られる $\mathbb{R}^4$ の部分空間とする．次の問いに答えよ．

(1) $f_A(\mathbb{R}^5) = W = \langle\, \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5 \,\rangle$ となることを示せ．

(2) $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5$ の中から，W を生成する最小個数のベクトルの組を 1 組求めよ．また，W の次元を述べよ．

(3) f_A の核 $\mathrm{Ker}\, f_A$ の基底を 1 組求めよ．

(島根大 2018)　　(m20185804)

0.450 次の 3 行 3 列の正方行列 A について，以下の設問に答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の対角成分の和（トレース）を求めよ．

(2) $\vec{a}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ が行列 A の固有ベクトルであることを確認し，対応する固有値を求めよ．

(3) 行列 A の他の 2 つの固有ベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ ，およびそれらに対応する固有値を求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化（規格化）し，固有値の小さい方の固有ベクトルを $\vec{b}$ とすること．

(4) 行列 A の 3 つの固有値の和を求めよ．

(5) 行列 A の 3 つの固有ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ と $\vec{c}$ から 3 行 3 列の正方行列 $P=[\,\vec{a}\quad\vec{b}\quad\vec{c}\,]$ を作り，その逆行列 P^{-1} を求めよ．

(6) 3 行 3 列の正方行列 $L=P^{-1}AP$ を求めよ．

(7) 行列 L のトレースを求めよ．

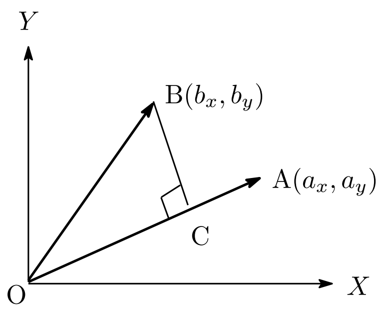
(8) 行列 P と行列 L を用いて，行列 A^4 を求めよ．

(9) 行列 A^5 のトレースを求めよ．

(島根大 2019)　　(m20195802)

0.451 下図に示すように，XY 平面上の座標 (a_x, a_y) に点 A が， 座標 (b_x, b_y) に点 B がある． 点 B から線分 $\overline{\mathrm{OA}}$ に対して垂線を引き， 垂線と線分 $\overline{\mathrm{OA}}$ との交点を点 C とする． 原点 O から点 A までのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と， 原点 O から点 B までのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は， X, Y 軸方向の単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ を用いてそれぞれ次式のように表すことができる． 以下の設問に答えよ．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}\ ,\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}$$



(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積を求めよ．

(2) 線分 $\overline{\mathrm{OC}}$ の長さ l を求めよ．

(3) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を求めよ．

(4) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ を求めよ．

(5) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が直交していることを計算により示せ．

(6) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=A\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 P がある． ここで，行列 A は以下で与えられるものとする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を用いて表せ．

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$$

(7) 設問 (6) において，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を満たす定数 k が存在するとき，その k を求めよ． ただし，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\neq\mathbf{0}$ とする．

(島根大 2020)　　(m20205802)

0.452 次の問に答えよ．

(1) 行列 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ について行列式の値を求めよ，さらに，全ての固有値を求めよ.

(2) 行列 $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ について行列式の値を求めよ.

(首都大 2004)　　(m20045901)

0.453 行列 $\boldsymbol{C}$ を $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{C}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(2) 行列 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$ が対角行列となるような行列 $\boldsymbol{P}$ を求めよ.

(3) 行列 $\boldsymbol{C}^n$ を求めよ.

(首都大 2007)　　(m20075902)

0.454 行列 A を $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(2) A^n を求めよ. 但し n は正の整数とする.

(首都大 2010)　　(m20105903)

0.455 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ を対角化する直交行列 P を求め，行列 A を対角化しなさい.

(首都大 2011)　　(m20115903)

0.456 行列 A を $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えなさい.

(1) A^2 を求めなさい.

(2) 逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(3) 転置行列 ${}^tA$ を求めなさい.

(首都大 2012)　　(m20125901)

0.457 直交座標系における 2 つのベクトルを $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ k \\ -2 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えなさい.

(1) 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するための k を求めなさい.

(2) この k を用いて $\boldsymbol{a}$ のノルム（大きさ）$||\boldsymbol{a}||$ を求めなさい.

(首都大 2012)　　(m20125902)

0.458 行列 A を $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えなさい.

(1) A の固有値をすべて求めなさい.

(2) A の各固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めなさい.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P と $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(首都大 2012) (m20125903)

0.459 行列 A を $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えなさい.

(1) A の行列式 $|A|$ を求めなさい.

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ には $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ の関係があった．このときの，x_1 と x_2 を求めなさい.

(首都大 2013) (m20135901)

0.460 行列 $A = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ と行列 $B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) AB と BA を求めなさい.

(2) A の固有値と大きさ 1 の固有ベクトルをすべて求めなさい.

(3) A, B, AB を同一の正則行列を用いてそれぞれ対角化しなさい.

(首都大 2013) (m20135903)

0.461 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$， $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$， $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ k \\ 3 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times \ \boldsymbol{b})$ を求めなさい．ただし，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ は内積，$\boldsymbol{a} \times \ \boldsymbol{b}$ は外積である.

(2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が線形従属（1 次従属）となるとき，k の値を求めなさい.

(3) 点 $(0,0,0)$ を通り，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ で張られる平面の方程式を求めなさい.

(首都大 2014) (m20145901)

0.462 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ， $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ のとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x}$ を満たす対称行列 Q を求めなさい．ただし，$\boldsymbol{x}^T$ は $\boldsymbol{x}$ の転置である.

(2) A の行列式 $|A|$ を求めなさい.

(3) A の逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(首都大 2014) (m20145902)

0.463 $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ のとき，以下の問いに答えなさい.

(1) A の固有値，および各固有値に対する固有ベクトルを求めなさい.

(2) A を対角化する正則行列 P を求めて，A を対角化しなさい.

(3) A^n の各成分を n を用いた式で表しなさい．ただし，n は自然数である.

(首都大 2014) (m20145903)

0.464 行列 A について以下の (1),(2) に答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式 $|A|$ を求めなさい.

(2) 行列 A の逆行列を求めなさい.

(首都大 2015) (m20155901)

0.465 ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ について以下の (1),(2) に答えよ.

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6-k \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6+k \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するための k の条件を求めなさい.

(2) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が線形独立であるための k の条件を求めなさい.

(首都大 2015) (m20155902)

0.466 行列 A について以下の (1),(2) に答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) 行列 A を対角化しなさい.

(首都大 2015) (m20155903)

0.467 下を満たす x, y, z の値をそれぞれ求めなさい.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(首都大 2016) (m20165901)

0.468 行列 A について下記の (1),(2),(3) に答えなさい.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(1) すべての固有値とそれぞれの固有値の固有ベクトルをすべて求めなさい.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P と $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(3) A^5 を求めなさい.

(首都大 2016) (m20165902)

0.469 ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ について,

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} u \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

で定める. 下記の (1), (2), (3) に答えなさい. ただし, u は正の実数である.

(1) 内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ とベクトルの長さ $||\boldsymbol{a}||$, $||\boldsymbol{b}||$ をそれぞれ求めなさい.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ としたときの $\cos\theta$ を求めなさい.

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するための u を求めなさい.

(首都大 2016) (m20165903)

0.470 次の 4 次正方行列 A について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}$$

(1) ${}^tA$ を A の転置行列とするとき, 積 ${}^tAA$ を計算せよ.

(2) (1) の結果を用いて, A の行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(首都大 2016) (m20165909)

0.471 (1) 次の 2 次正方行列 A の固有値および長さが 1 であるすべての固有ベクトルを求めよ. ただし, 実数の範囲で扱うものとする.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) 次の 3 次正方行列 P が直交行列であるとき, a, b, c の値をすべて求めよ.

$$P = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & a \\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} & \dfrac{-1}{\sqrt{3}} & b \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & c \end{bmatrix}$$

(首都大 2016) (m20165910)

0.472 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ につて, 以下の問いに答えなさい.

(1) A のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めなさい.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P とその逆行列を求め, 行列 A を対角化しなさい.

(3) A^n を求めなさい. ただし, n は任意の自然数とする.

(首都大 2019) (m20195902)

0.473 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ について, 以下の問いに答えなさい.

(1) A のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めなさい.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P をひとつ示し, A を対角化しなさい.

(3) A^n を求めなさい. ただし, n は任意の自然数とする.

(東京都立大 2020) (m20205902)

0.474 2 行 2 列の行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ が与えられているとする．

このとき，以下の問いに答えよ．ただし，^{T} は，行列の転置を表す．

(1) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) P^TAP が対角行列となる直交行列 P を求めよ．

(3) 行列 A の固有値を λ_1, λ_2 とするとき，以下のすべての条件を満たす 2 行 2 列の行列 B, C を求め，以下の条件を満足していることを示せ．

(a) $A = \lambda_1 B + \lambda_2 C$

(b) $B = B^T$, $C = C^T$

(c) $BC = CB = \boldsymbol{O}_{2\times 2}$，なお，$\boldsymbol{O}_{2\times 2}$ は，すべてのの要素が 0 の 2 行 2 列の行列を表す．

(d) $B^2 = B$, $C^2 = C$

(東京都立大 2020)　　(m20205908)

0.475 (1) 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ は正則行列であることを示し，逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) $\overrightarrow{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ とする．

$\overrightarrow{b} = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} w_j \overrightarrow{a}_j$ と定めたとき，$w_j \geqq 0 \quad (j = 1, 2, 3)$ となるための必要十分条件を x, y, z を用いて表せ．

(東京都立大 2021)　　(m20215901)

0.476 (1) 以下の行列 A に関して行列式 $\det A$ を求めよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) 前問 (1) の行列 A に関して余因子行列 $\mathrm{adj}A$ および逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) 以下の行列 B に関して 余因子行列 $\mathrm{adj}B$ の行列式 $\det(\mathrm{adj}B)$ を求めよ．

$$B = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & a & b \\ c & a & 0 & b & c \\ a & b & c & a & b \\ c & a & 0 & b & 0 \end{bmatrix}$$

(東京都立大 2022)　　(m20225901)

0.477 $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}x$ について，次を求めよ．ただし，$\mathrm{Sin}^{-1}x$ の値域は $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

(滋賀県立大 2016)　　(m20166001)

0.478 次のベクトル $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}$

に関して以下の問いに答えよ．ただし，a は実数とする．

(1) $a = 1$ のとき $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ は線形独立か線形従属かを調べよ．

(2) $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ が線形従属になるための実数 a の条件を求めよ．

(宇都宮大 2007) (m20076104)]

0.479 次の行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ に関して，以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトル λ_i , $\boldsymbol{u}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ．ただし，各固有ベクトルの最大の成分が 1 となるようにせよ．

(2) A の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ が，数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ の基底となることを示せ．

(宇都宮大 2007) (m20076105)

0.480 次の行列 A について下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．計算経過も記入せよ．

(2) 行列 A が対角化可能か調べよ．対角化可能であるときは適当な正則行列を求め，行列 A を対角化せよ．計算経過も記入せよ．

(3) $A = B^3$ を満たす行列 B を 1 つ求めよ．計算経過も記入せよ．

(宇都宮大 2015) (m20156102)

0.481 下の問いに答えよ．なお，計算過程も記入せよ．

(1) 次の行列の階数を求めよ．

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

(2) 次の連立 1 次方程式が解を持つときの a の値を求めよ．

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = a \\ 2x + 3y - z = 2a \\ 2x + 5y + 9z = 6 \end{cases} \qquad (*)$$

(3) (2) で求めた a の値に対する連立 1 次方程式 $(*)$ の解を求めよ．

(宇都宮大 2016) (m20166101)

0.482 次の行列 A について下の問いに答えよ．なお，計算過程も記入せよ．

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) 行列 A が対角化可能かどうか調べ，対角化可能であるときは適当な正則行列を求めて対角化せよ．

(宇都宮大 2016)　　(m20166102)

0.483 次の行列 A について，下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と，その固有値に対する固有ベクトルを求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(2) 行列 A が対角化可能であるかを調べ，対角化可能であるときは行列 A を適当な正則行列で対角化せよ．なお，計算過程も記入せよ．

(3) A^n を求めよ．ここで，n は自然数とする．なお，計算過程も記入せよ．

(宇都宮大 2019)　　(m20196101)

0.484 次の行列 A について，下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式の値が 1 となるときの a の値を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(2) (1) で求めた a の値に対する，行列 A の逆行列を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(宇都宮大 2020)　　(m20206101)

0.485 次の行列 B について，下の問いに答えよ．

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 B の固有値と固有ベクトルを求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(2) 行列 B は対角化が可能であるか調べよ，対角化が可能であるならば適当な正則行列を求めて行列 B を対角化せよ．なお，計算過程も記入せよ．

(宇都宮大 2020)　　(m20206102)

0.486 (1) 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 行列の演算，$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 70 \end{bmatrix}$ が成立するとき，(1) で求めた逆行列 A^{-1} を用いて，x と y の値を求めよ．

(工学院大 2003)　　(m20036205)

0.487 (1) 行列 $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ の固有値が実数となることを証明せよ．

(2) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求め，$AA^{-1} = E$ となることを証明せよ．ただし，E は単位行列である．

(工学院大 2004)　　(m20046205)

0.488 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\left(\frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}\right)$ を求めよ．

(2) $0 < x < \pi$ のおいて，$\dfrac{d}{dx}\log\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)$ を求めよ．

(3) $\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{3}{5} + \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{4}{5}$ を求めよ．

ただし．$\sin x$ の逆関数 $\mathrm{Sin}^{-1}x$ の値域は，$\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ とする．

(はこだて未来大 2015)　　(m20156302)

0.489 (1) $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ のとき，A の行列式と，トレースを求めなさい．

(2) $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ として，以下の問いに答えなさい．

(a) B の行列式を求めなさい．

(b) B の固有値 λ_1 , λ_2 を求めなさい．ただし $\lambda_1 \geq \lambda_2$ とする．

(c) 固有値 λ_1 , λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}$ を求めなさい．ただし，各成分は $x_{11} \geq x_{21}$, $x_{12} \geq x_{22}$ を満たし，絶対値の最も小さい整数とする．

(d) 行列 P が $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ で定義されるとき，$BP = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ となることを示しなさい．

(e) 行列 P の逆行列を求めなさい．

(f) B^n を求めなさい．

(和歌山大 2009)　　(m20096501)

0.490 行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ を対角化する正則行列 P を求め，対角化しなさい．

(和歌山大 2012)　　(m20126501)

0.491 行列 $B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ が正則かどうか調べ，正則のときはその逆行列を求めなさい．

(和歌山大 2012)　　(m20126502)

0.492 3 次の正方行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ につて，次の (1)〜(3) に答えなさい．

(1) 固有値をすべて求めなさい．

(2) 各固有値に対応する固有ベクトルを 1 つずつ求めなさい．

(3) $P^{-1}AP$ により A を対角化する正則行列 P を一つ求め，A を対角化しなさい．

(和歌山大 20221)　　(m20216501)

0.493 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ の固有値を α, β とし，α と β に対する固有ベクトルをそれぞれ

$\boldsymbol{x} = k\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$ $(k \neq 0)$,　$\boldsymbol{y} = h\begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}$ $(h \neq 0)$ とするとき，次の問 1〜問 4 に答えよ．

ただし，$\alpha > \beta$ とする．

問 1 $\alpha,\ \beta$ を求めよ.

問 2 $a,\ b$ を求めよ.

問 3 $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P をひとつ求めよ.

問 4 次式が成り立つように a_n を求めよ.

$$A^n = \begin{bmatrix} 2a_n - 1 & -a_n + 1 \\ 2a_n - 2 & -a_n + 2 \end{bmatrix}$$

(和歌山大 2022) (m20226501)

0.494 以下の行列の逆行列を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

(琉球大 2009) (m20096804)

0.495 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ を考える.

(1) A の行列式の値と逆行列を求めよ.

(2) A の 2 つの固有値と, 各々の固有値に属する固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有値の 1 つにつき固有ベクトル 1 つを求めればよい.

(東京工科大 2010) (m20106908)