[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　| ::: |

0.1 複素数に関する以下の設問に答えよ．

(1) z を複素数，$\overline{z}$ を z の複素共役とするとき，次式が成り立つことを示せ．ただし，$Re[z]$ は z の実数部分を表す．

$$Re[z] = \frac{1}{2}\left(z + \overline{z}\right)$$

(2) 次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$|z| \geq |Re[z]| \geq Re[z]$$

(3) 複素数 z_1，z_2 に対して次の 2 式が成り立つことを，それぞれ証明せよ．

$$|z_1\overline{z}_2| = |z_1|\,|z_2|$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

(4) 複素数 $z = x + iy$　(x, y は実数，i は虚数単位) に対し，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\left|e^{2z+i} + e^{iz^2}\right| \leq e^{2x} + e^{-2xy}$$

(北海道大 2013)　　(m20130103)

0.2 n 次正方行列に関する以下の設問に答えよ．

(1) 1 つの行または列の全ての成分が 0 であるとき，その行列式の値は 0 であることを示せ．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

(2) 次の行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式を求めよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 12 & 12 \\ -1 & 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

(3) $\boldsymbol{B}$ を n 次正方行列，$\boldsymbol{x}$ を n 次列ベクトルとする．$\overline{\boldsymbol{B}}^T = -\boldsymbol{B}$ のとき，$\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ の値は 0 または純虚数であることを示せ．ここで，$\overline{\boldsymbol{B}}^T$ および $\overline{\boldsymbol{x}}^T$ はそれぞれ $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{x}$ の共役転置行列である．

(北海道大 2016)　　(m20160102)

0.3 次の行列式の値を求めよ．
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

(北見工業大 2006)　　(m20060205)

0.4 $\begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ となる a を求めよ．

(北見工業大 2010)　　(m20100205)

0.5 $D = \left\{(x, y)\,\middle|\,0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{1 - x^2}\right\}$ とする．

(1) 領域 D を図示せよ.

(2) 積分 $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy$ を計算せよ.

(北見工業大 2018)　　(m20180204)

0.6 平面の部分集合 D を次で定める.

$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 1,\ y \geqq x\right\}$

(1) D を図示せよ.

(2) 積分 $\displaystyle\iint_D x^2\,dxdy$ を計算せよ.

(北見工業大 2019)　　(m20190204)

0.7 平面の部分集合 D を次で定める:

$D = \{(x, y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 2x + y \leqq 2\}$

(1) D を図示せよ.

(2) 積分 $J = \displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ を計算せよ.

(北見工業大 2019)　　(m20190211)

0.8 (1) 次の行列の積を求めなさい.

(i) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$　　(ii) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ のとき, 次のものを求めなさい.

(i) A の行列式 $|A|$　　(ii) A の逆行列 A^{-1}

(3) 次の等式を証明しなさい. $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1$

(岩手大 2008)　　(m20080302)

0.9 次の $\boxed{}$ に当てはまる整数を入れよ.　行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ の値は $\boxed{}$ である.

(秋田大 2007)　　(m20070401)

0.10 関数 $f(x) = e^x$ の原点におけるテーラー展開の式

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + R_4$$

について以下の設問 (1),(2) に答えよ. ただし, $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$ は定数で, R_4 は剰余項である.

(1) 定数 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$ を求めよ.

(2) 設問 (1) の結果を用いて, このテーラー展開の式から e の値の範囲を求めよ. ただし, $|R_4| < \dfrac{1}{6}$ を用いてよい.

(秋田大 2011)　　(m20110404)

0.11 $\mathbb{R}^2$ 上で定義された 2 変数関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

について，以下の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で連続であることを示せ.

(2) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\leq x^2+y^2\leq 3 \text{ かつ } y\geq 0\right\}$ とするとき，積分 $\displaystyle\int_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ.

(東北大 2017)　　(m20170506)

0.12 $\mathbb{R}$ 内の閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数 $f(x)$ は $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=1$ をみたすとする．正の整数 n に対し

$$b_n=\int_0^1 f(x)\cos\frac{x}{\sqrt{n}}dx$$

とおくとき，

$$(*)\qquad \lim_{n\to\infty}(b_n)^n=\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f(x)dx\right)$$

が成り立つことを以下の設問に沿って証明せよ.

(1) 任意の $x\geq 0$ に対し

$$0\leq\cos x-1+\frac{x^2}{2}\leq\frac{x^3}{6}$$

が成り立つことを示せ.

(2) 任意の n に対し

$$\left|b_n-1+\frac{1}{2n}\int_0^1 x^2f(x)dx\right|\leq\frac{1}{6n\sqrt{n}}\int_0^1 x^3\left|f(x)\right|dx$$

が成り立つことを示せ.

(3) 任意の実数 α, β に対し

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n\sqrt{n}}\right)^n=e^{\alpha}$$

が成り立つことを示せ.

(4) (2) および (3) の結果を利用して $(*)$ を結論せよ.

(東北大 2018)　　(m20180511)

0.13 重積分

$$\iint_D(3x^2+y^2)dxdy\qquad\left(D=\left\{(x,y)\;\middle|\;x^2+y^2\leq 1,\ 0\leq y\leq x\right\}\right)$$

の値を求めよ.

(東北大 2019)　　(m20190510)

0.14 次の行列式を計算せよ.

$$\begin{vmatrix}4&3&3&3\\3&4&3&3\\3&3&4&3\\3&3&3&4\end{vmatrix}$$

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030611)

0.15 微分可能な関数 $f_{ij}(x)$ $(i,j=1,2,3)$ に対して

$$f(x)=\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix}$$

とおく．このとき，$f(x)$ の導関数は

$$f'(x)=\begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) & f'_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) & f'_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f'_{31}(x) & f'_{32}(x) & f'_{33}(x) \end{vmatrix}$$

と表されることを示せ．ただし，$|\quad|$ は行列式を表す．

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110607)

0.16 三角形 ABC の三つの角について，以下を示せ．

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix}=0$$

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130610)

0.17 以下ではすべての自然数 n に対して $\mathbb{R}^n$ の元は列ベクトル（縦ベクトル）で表されるものとする．以下の問いに答えよ．

(1) a,b,c を実数とし $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ とする．$\mathbb{R}^3$ の部分空間 H を

$$H=\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \middle| ax+by+cx=0\right\}$$

で定める．このとき H の次元とその基底を求めよ．

(2)

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

を実行列とする．A の階数が 2 であるための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}\neq 0\,,\quad 1\leq i\leq j\leq 3$$

となる自然数 i,j が存在することであることを示せ．

(3)

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

を階数 2 の実行列とし，線形写像 $f_A\ :\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ を $f_A(x)=Ax,\ x\in\mathbb{R}^3$，で定める．このとき f_A の核の次元と基底を求めよ．

(4)

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

を実行列とし、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

とする．線形写像 $f_B\ :\ \mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ を $f_B(x)=Bx,\ x\in\mathbb{R}^4$，で定める．このとき f_B の核の次元と基底を求めよ．

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160602)

0.18 (1) 上三角行列の積は上三角行列になることを示せ.

(2) 次の行列式を計算せよ.

$$A = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

(3) 次の行列を対角化せよ．また，各固有値の固有空間の次元を求めよ.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2018)　　(m20180602)

0.19 n 次行列式

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 \\ 0 & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

を計算し，x の整式の形で表せ,

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190605)

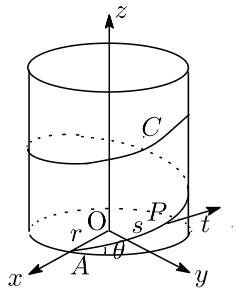
0.20 半径 r の円柱の表面に底面と一定の角度 θ をなすらせん（螺旋）曲線 C がある．直交座標系 O–xyz を図に示すようにとる．また，円柱の表面と x 軸との交点 A を曲線 C が通るとする．以下の各問に答えよ．

(1) 点 A からのらせん曲線の長さを s とするとき，らせん上の任意の点 P の直交座標系 O–xyz での位置 $\mathbf{r}_p$ を s の関数として表せ.

(2) $\mathbf{t}$ を点 P において曲線 C に接する長さ 1 の接線ベクトルとする．$\mathbf{t}$ を s の関数として表せ．ただし，$\mathbf{t}$ の方向は s が増加する向きを正ととることとする.

(3) $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$ と $\mathbf{t}$ とは直交することを示せ.

(4) 点 P における曲線 C の曲率 k は，$k = \left|\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}\right|$ によって表される．k を θ の関数としてグラフに表せ．ただし，$0 \le \theta \le \pi$ とする.



(東京大 1998)　　(m19980703)

0.21 複素数平面上で次の式を満たす点 $z = x + yi$ (x, y は実数) の軌跡の名称と概略図を示せ．また，この軌跡の特徴を説明せよ．軌跡の特徴については，特記しない限り，例えば軌跡が円の場合には中心点と半径について説明する程度でよい．

(1) $\left| z - \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \right| = 2$ (2) $\left| z - \sqrt{2}i \right| = \left| z - \sqrt{2} \right|$

(3) $\left| z - \sqrt{2}i \right| + \left| z - \sqrt{2} \right| = 4$ (4) $\left| z - \sqrt{2}i \right| - \left| z - \sqrt{2} \right| = 1$

この問 (4) の軌跡の特徴の説明については，軌跡の名称を明記するだけでよい．

(東京大 2006) (m20060704)

0.22 (1) 実数 α と β に対して，下記の等式を満たす複素数 z が複素平面上でどのような図形になるか示し，図示せよ．ただし，i を虚数単位とする．

$$\left| \frac{z + \alpha - \alpha i}{2z - \beta + \beta i} \right| = 2$$

(2) 複素関数

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

を考える．複素平面上において (p, q) を中心とする半径 $r(> 0)$ の円を C とするとき，C が f により変換された像がどのような図形になるかを示せ.

(3) (1) の等式を満たす複素数 z に対して，複素平面上での z の図形と $f(z)$ の図形が一致するときの α と β を求めよ.

(東京大 2011) (m20110704)

0.23 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき，下の (1)〜(5) を答えよ.

ただし，3 つのベクトル $\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_2$, $\boldsymbol{m}_3$ を $\boldsymbol{m}_1 = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{m}_2 = \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{m}_3 = \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \end{pmatrix}$ とするとき，$M = [\boldsymbol{m}_1,\ \boldsymbol{m}_2,\ \boldsymbol{m}_3]$ と表される行列 M は $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$ であるとする.

(1) 行列の 3 つの固有値を a_1, a_2, a_3 および固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ を求めよ．ただし，$|\boldsymbol{u}_1| = |\boldsymbol{u}_2| = |\boldsymbol{u}_3| = 1$ とすること.

(2) 固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ を用いて作られる行列 U を $U = [\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3]$ とする．$UV = I$ のように行列 U に右からかけると単位行列 I となる行列 V を求めよ.

(3) 固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ は互いにどのような関係にあるか説明せよ.

(4) 固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ と行列 U について, 下式を満たすような 3 つの行列 P_1, P_2, P_3 を求めよ．ただし，P_1, P_2, P_3 はそれぞれ 3 行 3 列の行列であり，$\boldsymbol{0}$ は零ベクトルである.

$$\begin{cases} P_1 U = [\ \boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0}\ ] \\ P_2 U = [\ \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \boldsymbol{0}\ ] \\ P_3 U = [\ \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{u}_3\ ] \end{cases}$$

(5) 行列 A の n 乗である A^n を求めよ．ただし，n は正の整数である.

(東京大 2011)　　(m20110705)

0.24　次のような n 次正方行列の行列式を Δ_n とする．

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

このとき次の問いに答えよ．

(1)　$\Delta_{n+2} = 2\Delta_{n+1} - \Delta_n$ が成り立つことを示せ．

(2)　Δ_n の値を求めよ．

(東京工業大 2003)　　(m20030803)

0.25　$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0\right\}$ とするとき，次の重積分を求めよ．

$$\iint_D (2x^2 + y^2)^2 y^2 dxdy$$

(東京工業大 2019)　　(m20190804)

0.26　n を自然数とする．次の n 次正方行列の行列式の値 D_n を求めよ．

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(東京工業大 2022)　　(m20220803)

0.27　次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

(東京農工大 1996)　　(m19960907)

0.28　C^1 級関数 $f(r)$ に対して，次の合成関数

$$u(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2})$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1)　xyz 空間内の曲面 $S : z = u(x, y)$ を考える．このとき，S 上の点 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ f(1))$ における S の接平面と z 軸との交点の z 座標 z_0 を $f(1),\ f'(1)$ を用いて表せ．ただし，α は定数とする．

(2)　$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ が r の関数として表されることを示せ．

(3)　$f(r) = r^2 e^{-r^2}$ のとき，次の重積分 I の値を求めよ．

$$I = \iint_D u(x, y)\, dxdy\,, \qquad D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 1\right\}$$

(電気通信大 2019)　　(m20191003)

0.29 (1) 次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(2) 次の行列のランクを求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

(3) 次の行列の逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(横浜国立大 2016)　　(m20161104)

0.30 次の行列式を計算しなさい．

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(筑波大 2000)　　(m20001307)

0.31 次の行列式の値を計算せよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

(筑波大 2001)　　(m20011309)

0.32 集合 $P = \left\{ p(x) \;\middle|\; p(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}, \quad a, b, c, d \text{ は実数} \right\}$ および $f(p(x)) = p(x-1)$ で定義される写像 $f \;:\; P \to P$ について，以下の設問に答えよ

(1) P は 3 次以下の実係数多項式の集合を表す．上記の $p(x)$ を，行列式を展開して x の多項式の形に表せ．

(2) f が線形写像であることを示せ．

(3) 基底 $\{x^3, x^2, x, 1\}$ に関する f の表現行列を求めよ．

(筑波大 2006)　　(m20061315)

0.33 (1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ を求めよ．　　(2) $\dfrac{\cos x}{x}$ の導関数を求めよ．

(3) 上記 (2) および $|\cos x| \leqq 1$ を利用し，不等式 $\left| \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leqq \dfrac{2}{x_1}$ が成り立つことを示せ．

ただし，$0 < x_1 < x_2$ とする．

(筑波大 2007)　　(m20071301)

0.34 区間 (a, b) 上の微分可能な関数 $a_{ij}(t),\ 1 \leq i,\ j \leq 3$, を $(i, j)-$成分とする3次正方行列を $A(t) = (a_{ij}(t))$ とする.

(1) 行列式 $|A(t)|$ の微分 $|A(t)|'$ に関する次の等式を示せ.

$$|A(t)|' = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & a'_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & a'_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a'_{31}(t) & a'_{32}(t) & a'_{33}(t) \end{vmatrix}$$

(2) $A(t)$ が正則であるとき, 上の等式の右辺の各項を行に関して余因子展開することにより,

$$|A(t)|' = \mathrm{Tr}\left(A'(t)A(t)^{-1}\right)|A(t)|$$

が成り立つことを示せ. ここで $A'(t) = \left(a'_{ij}(t)\right)$ であり, Tr はトレースを表す.

(筑波大 2012) (m20121325)

0.35 領域 $D = \left\{(x, y)\ \middle|\ (x+y)^2 + 4(x-y)^2 \leq 1\right\}$ における重積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{\left|x^2 - y^2\right|}{(x+y)^2 + 4(x-y)^2}dxdy$ の値を求めたい. 以下の問いに答えよ.

(1) $x + y = r\cos\theta,\ x - y = \dfrac{r}{2}\sin\theta$ とするとき, $x,\ y$ の $r,\ \theta$ に関するヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算せよ.

(2) I を (1) で与えられた変数変換を用いて求めよ.

(筑波大 2017) (m20171301)

0.36 $E = \left\{(x, y)\ \middle|\ 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}\right\}$ とする. $\mathbb{R}^2$ で定義された連続関数 $f(x, y)$ の E 上でのリーマン和は, それぞれの正整数 m に対して,

$$R_m(f) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-i} f\left(\frac{2i}{m},\ \frac{j}{m}\right)\frac{2}{m^2}$$

で与えられている. $f(x, y) = x + y$ であるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x, y)$ の E 上でのリーマン和 $R_m(f)$ を求めよ. ただし, $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$ である.

(2) (1) で得られたリーマン和を用いて, 関数 $f(x, y)$ の E 上での二重積分を求めよ.

(3) 関数 $f(x, y)$ の E 上での累次積分を求めよ.

(筑波大 2017) (m20171309)

0.37 Newton 法は方程式 $f(x) = 0$ を満たす解 x の近似解を数値的に求める手法の 1 つである. 具体的な手順は, 以下の通りである. まず, 漸化式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

を構成する. ここで, $f'(x_n) = \dfrac{d}{dx}f(x_n) \neq 0$ とする. 次に, この漸化式を適当な初期値 x_0 の下で解き, 数列 $x_1,\ x_2,\ \cdots$ を計算する. 解が存在する場合には, その収束値 x_∞ は $f(x_\infty) = 0$ を満たす.
上述の Newton 法に関して, 以下の設問に答えよ.

(1) Newton 法で x_0 から x_1 を求めることは, 点 $(x_0,\ f(x_0))$ における $y = f(x)$ の接線と x 軸の交点を求めることになっている. これを示せ.

(2) Newton 法の漸化式から得られる数列 $\{x_n\}$, $n=0,\ 1,\ \cdots$ は，初期値 x_0 が $f(x)=0$ の解の近傍にあるときに収束し，その収束値は $f(x)=0$ の解を与える．これを以下の＜定理＞を用いて示せ．ただし，$f'(x)\neq 0$ かつ $f''(x)=\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ は連続であるとする．

＜定理＞

関数 $\varphi(x)$ が閉区間 I で微分可能で，$\varphi(x)$ の値域は I に含まれ，I では

$$\left|\frac{d}{dx}\varphi(x)\right| \leq k < 1$$

であるとする．このとき，反復法 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ によって方程式 $x=\varphi(x)$ の

ただ 1 つの根 x_∞ が得られる．

(筑波大 2018)　　(m20181306)

0.38　次の二重積分について，以下の問いに答えなさい．

$$V=\iint_D (x^2+xy)dxdy \quad \cdots\cdots(*)$$

ただし，$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq 1\right\}$ とする．

(1) x と y を極座標変換し，式 $(*)$ の右辺を書き換えなさい．

(2) V の値を求めなさい．

(筑波大 2019)　　(m20191302)

0.39　下記の 2 重積分を変数変換によって求めることを考える．

$$I=\iint_D (4x^2-y^2)e^{8xy}dxdy, \qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leq 2x+y\leq 1\ ,\ \ 0\leq x-\frac{1}{2}y\leq 1\right\}$$

(1) $u=2x+y,\ v=x-\dfrac{1}{2}y$ と変数変換したとき，変数の組 (u,v) の積分領域 E を示せ．

(2) E から D への写像関数のヤコビアンを求めよ

(3) I を求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191311)

0.40　実数 a,b,c,d が

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & -3 & b \\ -1 & 0 & 1 & c \\ 0 & -1 & 1 & d \end{vmatrix}=0$$

を満たすための必要十分条件は $a+2b+3c+4d=0$ であることを示せ．

(埼玉大 2003)　　(m20031408)

0.41　(1) 変数 $x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,z_1,z_2$ の間に，$x_1=3y_1+y_2+2y_3$, $x_2=-y_1+2y_3$, $y_1=3z_1-2z_2$, $y_2=az_2$, $y_3=z_1+4z_2$ の関係があるとき，x_1, x_2 を z_1, z_2 で表す式を求め，さらに，任意の z_1, z_2 において，$x_1=kx_2$ となるための定数 a および k を求めよ．ただし，$k\neq 0$ とする．

(2) 次の行列式を求めよ．
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -6 & 3 \end{vmatrix}$$

(埼玉大 2006)　　(m20061403)

0.42 行列式 $f(x)$ について考える. $f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 5 & 10 \\ -1 & x+4 & 10 \\ -5 & 6 & x-6 \end{vmatrix}$

(1) 行列式 $f(x)$ を求めよ.

(2) 行列式 $f(x)$ が 0 となる時, x の値を求めよ.

(埼玉大 2007) (m20071403)

0.43 (1) つぎの行列式を計算せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & 0 \\ y & 1 & 0 & y \\ z & 0 & 1 & z \\ 0 & w & w & 1 \end{vmatrix}$$

(2) つぎの行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) つぎの行列の固有値, 固有ベクトルの組をすべて求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(埼玉大 2010) (m20101407)

0.44 次の行列式を求めよ. ただし, 解答は因数分解した形で表せ.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$$

(埼玉大 2012) (m20121405)

0.45 次の関数について以下の問いに答えよ. $f(x) = \dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$

(1) $f'(x)g(x) = 1$ を満たす $g(x)$ を求めよ.

(2) $f'(x)g(x) = 1$ に積の微分に関するライプニッツの公式を適用して, 次の漸化式が成り立つことを示せ.

$$(x^2-1)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0 \qquad (n \geqq 1)$$

(埼玉大 2019) (m20191401)

0.46 半径 a の円の面積を二重積分を用いて求めよ.

ただし, $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2+y^2 \leqq a^2\right\}$ とする.

(埼玉大 2019) (m20191404)

0.47 (1) 下記の方程式をみたす x の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 0 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$$

(2) 次の連立1次方程式をクラメルの公式を用いて解け.

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & & +2x_3 & = & -1 \end{cases}$$

（この公式を知らないときは，公式を用いないでよい.）

(茨城大 2002)　　(m20021705)

0.48 3次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ について，以下の各問に答えよ.

(1) A の固有値 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ および対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ を一組求めよ.

(2) ベクトル列 $\boldsymbol{u}_n$ を $\boldsymbol{u}_n = A^n \begin{bmatrix} \varepsilon \\ -1+2\varepsilon \\ 2+\varepsilon \end{bmatrix}$, $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ で定める．ただし，$\varepsilon = 2^{-100}$ とし，A^0 は単位行列を表す．このとき，$\boldsymbol{u}_n$ を (1) で求めた $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ の一次結合で表せ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，ユークリッドノルムを $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$ とする．(2) で与えた $\boldsymbol{u}_n$ について，以下を調べよ.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ||\boldsymbol{u}_n||$　(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{||\boldsymbol{u}_{n+1}||}{||\boldsymbol{u}_n||}$　(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{u}_n}{||\boldsymbol{u}_n||}$

(d) $\left\| \boldsymbol{u}_n - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| \leq 2^{-10}$ なる n の存在の有無.

(茨城大 2007)　　(m20071707)

0.49 $x > 0,\ y > 0$ とする．$a > 0,\ 0 < b < 1$ のとき，以下の各問に答えよ.

(1) 変数変換 $u = xy,\ v = \log \dfrac{y}{x}$ のヤコビ行列式 $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ．log は自然対数である.

(2) 直線 $y = ax,\ y = (a^2+1)x$，および曲線 $xy = b,\ xy = b^2$ で囲まれた領域 $D_{a,b}$ を xy–座標平面に図示せよ.

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_{D_{a,b}} dxdy$ に (1) の変数変換を用いて，領域 $D_{a,b}$ の面積 $S(a,b)$ を求めよ.

(4) $\dfrac{\partial S}{\partial a} = \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0$ となる点 (a,b) を求めよ．その点で $S(a,b)$ が極値をとるかどうか判定せよ.

(茨城大 2008)　　(m20081702)

0.50 次の行列式の値を求めなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

(山梨大 2012)　　(m20121803)

0.51 a, b, c, d を互いに異なる実数として，次の小問に答えよ.

(1) 次に示す行列式の値を求めよ.

$$(a)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}, \qquad (b)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

(2) 4 つのベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$ を

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} a^3 \\ b^3 \\ c^3 \end{bmatrix}$$

と定義する．また，x_1, x_2, x_3, x_4 を方程式

$$x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + x_3\boldsymbol{u}_3 + x_4\boldsymbol{u}_4 = \mathbf{0}$$

を満たす未知数とする． このとき，自明でない未知数 x_1, x_2, x_3, x_4 を求めよ． また，$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$ の中で 1 次独立なベクトルの組をひとつ示せ． ただし，$\mathbf{0}$ は 3 次元のゼロベクトルである．

(山梨大 2019) (m20191802)

0.52 (1) $|x| \leq \dfrac{1}{2}$ ならば，$|\log(1+x) - x| \leq 2x^2$ が成立することを証明せよ．

(2) 次の等式を証明せよ．

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{1}{n}\cos\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \cos x \, dx$$

(信州大 2012) (m20121903)

0.53 次の行列式に関する等式を示せ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

(信州大 2015) (m20151904)

0.54 実数 p は $0 < p \leqq 1$ を満たすとする．$D_n = \left\{(x, y) \,\middle|\, \dfrac{1}{n} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x - \dfrac{1}{n}\right\}$ $(n = 2, 3, \cdots)$ とおき，領域 D_n 上の 2 重積分

$$I_n(p) = \iint_{D_n} \frac{dxdy}{(x-y)^p}$$

を考える．このとき, 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n(p)$ を調べ．それが存在する場合は極限値を求めよ．

(信州大 2020) (m20201902)

0.55 $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq 1\right\}$ とする．関数 $f(x, y) = 2x - xy^2$ の D における最大値を求めよ．

(信州大 2021) (m20211901)

0.56 $D_n = \left\{(x, y) \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq y\ ,\ \dfrac{1}{n} \leqq y \leqq 1\right\}$ $(n = 2, 3, \cdots)$ とおき，領域 D_n 上の 2 重積分

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

を考える．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

(信州大 2022) (m20221903)

0.57 正方行列 X, Y に対して，$|XY| = |X||Y|$ が成り立つことは知っているものとする．ただし，$|*|$ は行列式を表す．A, B, C, D を n 次正方行列，I, O をそれぞれ n 次の単位行列，ゼロ行列とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 行列の積 $\begin{pmatrix} I & O \\ -C & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & B \\ C & D \end{pmatrix}$ を求めよ．

(2) $\begin{vmatrix} I & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D - CB|$ となることを示せ．

(3) A が正則（逆行列をもつこと）であるとき，次の各問いに答えよ．

(a) 次の式を満たす n 次正方行列 X を求めよ．

$$\begin{pmatrix} I & O \\ X & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

(b) さらに，$AC = CA$ ならば，

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$$

が成り立つことを示せ．

(新潟大 2000)　　(m20002003)

0.58 (1) 次の行列式の値を求めよ． $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(2) 行列 A の行列式の定義は，例えば，

$$|A| = \sum_{\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \in S_n} \operatorname{sgn}\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

で与えられる．ここで，S_n は n 次の置換のすべての集合であり，sgn は置換の符号である．このとき次式を証明せよ．

$$\begin{vmatrix} a & 0 \cdots 0 \\ * & \\ \vdots & B \\ * & \end{vmatrix} = a|B|$$

ただし，B は $(n-1)$ 次の正方行列とする．

(新潟大 2006)　　(m20062011)

0.59 (1) x, y, z に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y - 2z = a \\ 2x - y - z = b \\ 3x + 2y - 5z = c \end{cases}$$

が解を持つための必要十分条件は，$7a + b - 3c = 0$ が成り立つことである．このことを示せ．

(2) 実数 x, y, z に関する関数

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$$

の最小値を求めよ．ここで，$\|\boldsymbol{v}\|$ は標準内積に関するベクトル $\boldsymbol{v}$ の大きさである．

(新潟大 2009)　　(m20092008)

0.60 次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -5 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

(新潟大 2010) (m20102006)

0.61 次の行列式を計算しなさい．

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

(新潟大 2012) (m20122013)

0.62 $xyz-$ 空間において，3 点 $P_1(a_1,\ b_1,\ c_1)$，$P_2(a_2,\ b_2,\ c_2)$，$P_3(a_3,\ b_3,\ c_3)$ は，同一直線上にないとする．多項式 $f(x,y,z)$ を

$$f(x,y,z) = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix}$$

によって定める．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $f(x,y,z)$ の定数項を求めよ．

(2) $i=1,2,3$ に対して，$f(a_i,\ b_i,\ c_i)=0$ が成り立つことを説明せよ．

(3) $f(x,y,z)=0$ は，3 点 $P_!$，P_2，P_3 を通る平面の方程式であることを示せ．

(新潟大 2015) (m20152021)

0.63 行列式に関する，次の各問いに答えよ．

(1) $\begin{vmatrix} 103 & 103 & 101 \\ 98 & 100 & 101 \\ 99 & 97 & 98 \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

(2) $\begin{vmatrix} 1 & a & b^2 & 1 \\ 1 & a^2 & b^3 & c \\ 1 & a^3 & b^4 & c^2 \\ 1 & a^4 & b^5 & c^3 \end{vmatrix}$ を因数分解せよ．

(3) 方程式 $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 & a \\ x & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & x \\ a & 1 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$ を解け．ただし，a は実定数とする．

(新潟大 2016) (m20162012)

0.64 4 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分集合 W_1 を次のように定める．

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ \middle|\ \begin{array}{r} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1+2x_2-x_3-x_4=0 \end{array} \right\}$$

このとき，次の各問いに答えよ．

(1) W_1 は $\mathbb{R}^4$ の線形部分空間になることを示せ.

(2) W_1 の基底を求めよ.

(3) 線形変換 $f\ :\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ の像 $\mathrm{Im}(f) = \left\{ f(\boldsymbol{x}) \ \middle|\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \right\}$ が W_1 であると仮定する．このとき，f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の次元を求めよ.

(4) W_2 は $\mathbb{R}^4$ の 2 次元線形部分空間で，$W_1 \cup W_2$ が $\mathbb{R}^4$ の線形部分空間であると仮定する．このとき，$W_1 = W_2$ となることを示せ.

(新潟大 2017)　　(m20172022)

0.65 $z = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \end{vmatrix}$ とするとき，$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ となる x, y を求めよ.

(長岡技科大 1996)　　(m19962105)

0.66 xy 平面において，D を不等式

$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \leqq 1$

で表される領域とする．下の問いに答えなさい.

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{x+y} dxdy$ を求めなさい.

(2) $s = x + y,\ t = x - y$ とおくとき，行列式 $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}$ を求めなさい.

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{(x+y)^2} dxdy$ を求めなさい.

(長岡技科大 2021)　　(m20212103)

0.67 (1) ある定数 $a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_n$ と正の定数 M が存在して

$\left| \log(1+x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right| \leqq Mx^{n+1} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ が成り立つとき，$a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_n$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2$ を示せ.

(金沢大 2007)　　(m20072208)

0.68 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して,

$$A\vec{p_i} = \lambda_i \vec{p_i}\,,\ |\vec{p_i}| = 1\ (i = 1, 2, 3)\,, \quad \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$$

とする．ここで，$|\vec{p}|$ はベクトル $\vec{p}$ の長さとする．次の問いに答えよ.

(1) $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ を求めよ.

(2) $\vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\ \vec{p}_3$ を求めよ.

(3) $\vec{x} = x_1\vec{p}_1 + x_2\vec{p}_2 + x_3\vec{p}_3$ とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} |A^n \vec{x}| = \infty$ となるための $x_1,\ x_2,\ x_3$ の条件を述べよ.

(金沢大 2012)　　(m20122201)

0.69 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$ に対して，$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$ とする．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^2$ に対して，次を示せ.

(1) 行列式

$$\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) \end{vmatrix}$$

が 0 でないならば，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ は 1 次独立である．

(2) 上の行列式が 0 ならば，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ は 1 次従属である．

(金沢大 2012)　　(m20122204)

0.70 行列

$$A=\begin{pmatrix} 1-2r & r & r \\ r & 1-2r & r \\ r & r & 1-2r \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．ただし $r>0$ とする．

(1) 行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$$

を因数分解した形で求めよ．

(2) A の固有値，および対応する固有空間を求めよ．

(3) $\boldsymbol{R}^3$ の点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ を

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_{n+1}=A\boldsymbol{x}_n\ (n \geqq 1)$$

により定める．$\{\boldsymbol{x}_n\}$ が収束するための r の条件，およびそのときの $\{\boldsymbol{x}_n\}$ の極限を求めよ．

(金沢大 2012)　　(m20122205)

0.71 a,b,c は正の定数とし，x,y は次で定義される R^2 の領域 D の点とする．

$$D=\left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, 0\le \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le c^2\right\}$$

(1) 変数 r,θ を用いて $x=ar\cos\theta,\ y=br\sin\theta$ と変数変換を行う．この時，
関数行列式（ヤコビアン）$\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|$ を求めよ．

(2) (1) の変数変換を用いて重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{c^2-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$ を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162223)

0.72 (1) 次の行列式を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

(2) 次の n 次正方行列（ 対角成分は 0，対角成分以外は 1 ）の行列式を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

(金沢大 2016)　　(m20162233)

0.73　関数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)$ を求めよ．

(2)　領域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqq y\leqq\sqrt{3}x,\ x^2+y^2\geqq 1,\ x\leqq 1\right\}$ を図示せよ．

(3)　(2) の領域 D 上の重積分

$$\iint_D \{f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)\}\,dxdy$$

を求めよ．

(金沢大 2017)　　(m20172208)

0.74　正接関数 $\tan x$ の逆関数を $\tan^{-1}x$ とし，$x\neq 0$ となる (x,y) に対して関数 $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ を定める．次の問いに答えよ．

(1)　偏導関数を計算して，$f_y(x,y)-f_x(x,y)$ と $f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)$ を求めよ．

(2)　$0<a<1$ に対し

$$D_a=\left\{(x,y)\ \middle|\ a^2\leqq x^2+y^2,\ 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq\sqrt{3}x\right\}$$

とするとき，重積分

$$I_a=\iint_{D_a}\{f_y(x,y)-f_x(x,y)\}\,dxdy$$

を計算し，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to+0}I_a$ を求めよ．

(金沢大 2019)　　(m20192203)

0.75　(1)　$A(0,\sqrt{3})$, $B(-1,0)$, $C(1,0)$ を座標平面上の 3 点とする．線分 AB, BC, CA 上にそれぞれ点 P, Q, R を，三角形 PQR における $\angle Q$ が直角になるようにとる．ただし，P, Q, R は A, B, C のいずれとも異なるとする．$Q(t,0)$, $\angle CQR=\theta$ とおくとき，直角三角形 PQR の面積 S を t と θ を用いて表せ．

(2)　(1) で求めた S を，集合

$$D=\left\{(t,\ \theta)\in\boldsymbol{R}^2\ \middle|-1<t<1,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right\}$$

を定義域とする関数と考える．このとき，$\dfrac{\partial S}{\partial t}=\dfrac{\partial S}{\partial\theta}=0$ を満たす $(t,\ \theta)$ を求めよ．

(3)　(2) で求めた $(t,\ \theta)$ において，関数 S が極値をとるかどうか調べよ．

(金沢大 2019)　　(m20192207)

0.76　次の問いに答えよ．

(1)　実数 α に対し，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty\frac{dx}{x^\alpha}$ が存在するような α の値の範囲を求めよ．

(2)　$L>1$ に対し，集合 D_L を

$$D_L=\left\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\ \middle|\ 1\leqq x^2+y^2\leqq L^2\right\}$$

と定める．実数 β に対し，極限値

$$\lim_{L\to\infty}\iint_{D_L}\frac{dxdy}{1+(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}$$

が存在するような β の値の範囲を求めよ．

(金沢大 2019)　　(m20192208)

0.77　領域 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; |y| \leq e^{-x^2}, x \geq 0\right\}$ に対して，重積分

$$\iint_D xy^2 dxdy$$

の値を求めよ．

(金沢大 2021)　　(m20212203)

0.78　(1)　$\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$,　$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$,　$\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　が $\boldsymbol{R}$ 上 1 次従属となるような実数 α の値を求めよ．

(2)　β を実数とする．$\boldsymbol{R}^3$ の部分空間

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} \beta & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

の次元が 2 となるときの β の値を求めよ．また，そのときの W の 1 組の基底を求めよ．

(3)　写像

$$f : \boldsymbol{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ 3x^2 - y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$$

が線形写像ではないことを示せ．

(金沢大 2021)　　(m20212207)

0.79　次の問いに答えよ．

(1)　正の数 A, B および実数 α に対して，$\boldsymbol{R}^2$ 内の集合

$$\left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; A(x - \alpha)^2 + By^2 \leqq 1\right\}$$

で表される図形の面積を求めよ．

(2)　$\boldsymbol{R}^3$ 内の集合

$$E = \left\{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{4} + 4y^2 + z^2 \leqq 1\right\}$$

と平面 $H = \left\{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x + z = 1\right\}$ の共通部分 $H \cap E$ で表される図形の面積 S を求めよ．

(金沢大 2021)　　(m20212210)

0.80　次の問に答えよ．

(1)　$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b)$　を示せ．

(2)　連立方程式　$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + az = 1 \\ x + 4y + a^2 z = 1 \end{cases}$　がただ 1 組の解 (x, y, z) を持つための a に関する必要十分条件を求め，そのときの解を求めよ．

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

(富山大 2000)　　(m20002306)

0.81 変数変換 $t = x - y,\ s = x + y - 2$ により，重積分

$$\iint_D (x+y)dxdy \quad D = \{(x,y) \mid 0 \leq y,\ y \leq x \leq 2-y\}$$

の値を求める．以下の問いに答えよ．

(1) x と y をそれぞれ，t と s で表し，$\dfrac{\partial x}{\partial t},\ \dfrac{\partial x}{\partial s},\ \dfrac{\partial y}{\partial t},\ \dfrac{\partial y}{\partial s}$ を求めよ．

(2) $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial x}{\partial s} \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix}$ を求めよ．

(3) (2) の結果を用いて，$\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy$ を t と s で変数変換し，その値を求めよ．

(4) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{2-y} (x+y)dxdy$ の値を求め，(3) の結果と一致することを確かめよ．

(富山大 2008)　　(m20082304)

0.82 半径 a の球の体積 V を求める．以下の問いに答えよ．

(1) 直交座標 (x,y,z) を用いて，V を積分表示せよ．

(2) (x,y,z) の極座標 (r,θ,φ) への変換

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$$

を用いて，$\dfrac{\partial x}{\partial r},\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta},\ \dfrac{\partial x}{\partial \varphi},\ \dfrac{\partial y}{\partial r},\ \dfrac{\partial y}{\partial \theta},\ \dfrac{\partial y}{\partial \varphi},\ \dfrac{\partial z}{\partial r},\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta},\ \dfrac{\partial z}{\partial \varphi}$ を求めよ．

(3) $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$ を求めよ．

(4) (1) および (3) の結果を用いて，V を (r,θ,φ) で積分表示せよ．

(5) (4) の積分を実行し，V を求めよ．

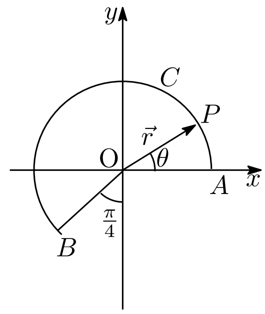
(富山大 2009)　　(m20092304)

0.83 図のように円 $x^2 + y^2 = 25,\ z = 0$ の x 軸上の点 A から B までの円弧を C, C 上の点 P の位置ベクトルを $\vec{r}, \vec{r}$ と x 軸とのなす角を θ とする．

(1) $\displaystyle\int_C \vec{r}\cdot d\vec{r}$ の値を求めよ．

(2) $\left|\displaystyle\int_C d\vec{r}\right|$ の値を求めよ．

(3) $\left|\displaystyle\int_C \vec{r}\times d\vec{r}\right|$ の値を求めよ．



(富山大 2010)　　(m20102303)

0.84　次の各行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \\ 8 & 5 & 7 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -1 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 4 & 7 \end{vmatrix}$　　(3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 5 & -7 & 8 & 9 & -6 \end{vmatrix}$

(富山大 2014)　　(m20142304)

0.85　次の問いに答えよ.

(1) $1 - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{5!}$ を循環小数で表せ.

(2) マクローリンの定理を用いて, $\left|\sin x - \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}\right)\right| \leqq \dfrac{|x|^7}{7!}$ $(x \in R)$ を示せ.

(3) $\dfrac{n}{1000} \leqq \sin 1 < \dfrac{n+1}{1000}$ を満たす自然数 n を求めよ.

(富山大 2014)　　(m20142310)

0.86　次の各問いに答えよ. ただし, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ は 2 行 2 列の正則な実数行列, $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{O}$ はそれぞれ 2 行 2 列の単位行列と零行列とする.

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I} \end{vmatrix}$ と $\begin{vmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{vmatrix}$ をそれぞれ求めよ.

(2) 次の等式が成立することを示せ.

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$$

(3) 次の分割行列（ブロック行列）の積を計算せよ. なお計算結果は, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{O}$ のうち必要なものを小行列とする一つの分割行列として示すこと.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

(4) 次の等式が成立することを (1),(2),(3) の結果を利用して示せ.

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}^{-1}|$$

(富山大 2018)　　(m20182306)

0.87　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ がある.

(1) 行列 A の固有値を λ とすると，λ は $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ を満たさなければならないことを示しなさい.

(2) 前問の行列 A の固有値を求めなさい.

(3) その行列 A の固有ベクトルを求めなさい.

(福井大 2000) (m20002416)

0.88 以下の行列式を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} a & a^2 & b+c \\ b & b^2 & c+a \\ c & c^2 & a+b \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & 5 \end{vmatrix}$

(福井大 2001) (m20012417)

0.89 次の行列式の値を, 因数分解した形で求めなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

（福井大 2004） (m20042416)

0.90 次の行列式を計算せよ. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

(福井大 2006) (m20062409)

0.91 (1) $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ y+z & z+x & x+y \\ z+x & x+y & y+z \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$ を証明せよ.

(2) $\begin{vmatrix} 11 & 3 & 12 \\ 3 & 12 & 11 \\ 12 & 11 & 3 \end{vmatrix}$ を求めよ.

(福井大 2011) (m20112409)

0.92 以下の設問に答えよ. ただし以下で i は虚数単位である.

(1) $\dfrac{5-i}{5+i}$ を $a+bi$ の形で表せ.

(2) $\left|\dfrac{1+i}{2+i}\right|$ の値を求めよ.

(3) 次の複素数を極形式で表せ.

1) $2+2\sqrt{3}i$ 2) $\dfrac{2}{1-i}$

(4) $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $y = \cos\beta + i\sin\beta$ とするとき, $xy = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$ であることを確かめよ.

(5) 上記 (4) の x について, $x^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$ が成り立つことを示せ. ただし n は自然数とする.

(福井大 2013) (m20132417)

0.93 次の積分の値を計算せよ.

$$\iint_D \sin(x+y)\cos(x-y)dxdy\ , \qquad D = \left\{(x,\ y)\ \middle|\ 0 \leq x+y \leq \frac{\pi}{2}\ ,\ 0 \leq x-y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

(福井大 2022) (m20222416)

0.94 以下の行列式を計算せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(福井大 2022) (m20222419)

0.95 半径 a の球面の xyz 座標を媒介変数 $(\theta,\ \phi)$ で

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (a\sin\theta\cos\phi,\ a\sin\theta\sin\phi,\ a\cos\theta)$$

と表す. ただし, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ である. 以下の問いに答えよ.

(1) 以下のベクトル積

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\phi}$$

を求めよ. また, これは何を表すか答えよ.

(2) 次の積分を求め, 何を表すか答えよ.

$$\iint_D \left|\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\phi}\right|\right| d\theta d\phi$$

ただし, $||\cdot||$ はベクトルの長さを表し, 領域 D は θ, ϕ の動く範囲, すなわち $D = \{(\theta,\ \phi \mid 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi)\}$ である.

(3) 球面の x 座標 $x = a\sin\theta\cos\phi$ に対して, 次の積分を求めよ.

$$\iint_D x\left|\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\phi}\right|\right| d\theta d\phi$$

(福井大 2022) (m20222427)

0.96 次の行列式を求めよ. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 9 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & 8 & 8 \end{vmatrix}$

(静岡大 2008) (m20082509)

0.97 行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

(岐阜大 2009) (m20092621)

0.98 次の行列式 D の値を求めよ.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

(岐阜大 2012) (m20122603)

0.99　次の行列式 D の値を求めよ．

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

(岐阜大 2017)　　(m20172604)

0.100　次の行列式 D の値を求めよ．

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(岐阜大 2022)　　(m20222603)

0.101　(1)　次の関数の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$

(2)　次の関数を微分せよ．ただし，$x \neq 0$ とする．　$\exp\left(-\sin\dfrac{1}{x}\right)$

(3)　次の関数を微分せよ．ただし，$x \pm a \neq 0$ とする．　$\log\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$

(豊橋技科大 2009)　　(m20092701)

0.102　次の行列式の値を求めよ．

(1)　$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$

(2)　$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$　(n 次の行列式，対角成分は a でその他の成分は b である)

(豊橋技科大 2014)　　(m20142704)

0.103　次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

(豊橋技科大 2016)　　(m20162704)

0.104　次の重積分を計算せよ．

(1)　$\displaystyle\iint_D x^2 y\,dxdy$,　　$D = \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq x,\ 0 \leqq x \leqq 1\}$

(2)　$\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$,　　$D = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0\ \right\}$

(豊橋技科大 2022)　　(m20222703)

0.105　次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D y\sin(x+y)dxdy,\quad D=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ x+y\leqq\pi,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xydxdy,\quad D=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ \left|x-\frac{1}{\sqrt{3}}y\right|\leqq 1,\ \left|x+\frac{1}{\sqrt{3}}y\right|\leqq 2\right\}$

(豊橋技科大 2023)　　(m20232703)

0.106 次の行列式の値が 0 となる a の値を全て求めよ. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & a & 1 \\ a & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$

(名古屋工業大 2007)　　(m20072903)

0.107 次の行列式 D を因数分解せよ. $D=\begin{vmatrix} a^2+b^2 & 0 & 2ab & 0 \\ 0 & c^2+d^2 & 0 & 2cd \\ 2ab & 0 & a^2+b^2 & 0 \\ 0 & 2cd & 0 & c^2+d^2 \end{vmatrix}$

(名古屋工業大 2009)　　(m20092901)

0.108 (1) 次の行列式を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

(2) 次の行列が逆行列をもつときの x の条件を求めよ. また, そのときの逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & 1 \\ x^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2012)　　(m20122901)

0.109 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

(名古屋工業大 2015)　　(m20152906)

0.110 次の定積分と 2 重積分を求めよ.

(1) $\displaystyle I_1=\int_0^2\sqrt{|x^2-1|}dx$

(2) $\displaystyle I_2=\iint_D\frac{\sin y}{1+\sin^2 x}dxdy,\qquad D\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq\ x\leqq\ y\leqq\frac{\pi}{2}\right\}$

(名古屋工業大 2017)　　(m20172902)

0.111 a,b を定数とするとき, R^4 の部分集合

$$W=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\ \middle|\ \begin{array}{c} x+3y+5z-w=a \\ x-y-3z+3w=b \\ 2x-y-4z+5w=0 \end{array}\right\}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) W が R^4 の部分空間となるように $a,\ b$ の値を定めよ.

(2)　$a,\ b$ が (1) で定めた値のとき，W の次元と基底を求めよ．

(名古屋工業大 2017)　　(m20172904)

0.112　重積分 $I = \displaystyle\iint_D y^2\sqrt{1-x^2}\,dxdy,\qquad D = \left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0\right\}$ の値を求めよ．

(名古屋工業大 2018)　　(m20182904)

0.113　次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2-2y+4)^3}} \qquad \text{ただし}\quad D = \left\{(x,y)\ \middle|\ 2x^2-1 \leqq y \leqq x^2\right\}$$

(名古屋工業大 2020)　　(m20202904)

0.114　次の行列式を因数分解せよ．$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

(三重大 2006)　　(m20063103)

0.115　次の固有方程式の固有値を求めよ．$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

(三重大 2006)　　(m20063104)

0.116　(1)　行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ の値を求めなさい．

(2)　A, B が同じ次数の正方行列であるとき，行列式 $\begin{vmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{vmatrix}$ の値を，$|A+2B|$ と $|A-B|$ の式で表しなさい．

この導出には，n 次正方行列 P，m 次正方行列 S，$m\times\ n$ の行列 R，$n\times\ m$ の零行列 O に対して，$\begin{vmatrix} P & O \\ R & S \end{vmatrix} = |P||S|$ が成り立つことを使ってよい．

(3)　問 (2) の結果を利用して，行列 $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ のすべての固有値を求めなさい．

(三重大 2009)　　(m20093106)

0.117　(1)　次の等式を証明しなさい．

$$\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix} = 8abc$$

(2)　(1) を利用して, 次の行列の行列式の値と逆行列を求めなさい．

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(三重大 2010)　　(m20103103)

0.118 $x_1,\ x_2,\ x_3$ についての連立方程式 $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$ を考える. ただし

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

とする. このとき $|B| \neq 0$ であるとして, 連立方程式の解が

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} p_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & b_2 & c_2 \\ p_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} a_1 & p_1 & c_1 \\ a_2 & p_2 & c_2 \\ a_3 & p_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & p_3 \end{vmatrix}$$

とかけることを示せ.

(三重大 2010) (m20103111)

0.119 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$ (C は定数) を証明せよ.

(三重大 2016) (m20163104)

0.120 次の行列式の値を求めよ．但し，その導出過程も書くこと．

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \end{vmatrix}$$

(京都大 2000) (m20003301)

0.121 行列 A に対して, その行列式の値を $|A|$, その絶対値を $abs|A|$ と表記する. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 8 & 2 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix}$$

(2) 点 $P(x_1, y_1)$ と原点を通る直線の方程式を行列式を用いて表現せよ.

(3) 平面上の 3 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ を頂点とする三角形の面積 S は以下のように表現できることを示せ.

$$S = \frac{1}{2}abs\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

（京都大 2004） (m20043303)

0.122 3 次元ユークリッド空間の直交座標系を一つ定め，その x 軸，y 軸および z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ とする． 2 つのベクトル $\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{e}_x + u_y\boldsymbol{e}_y + u_z\boldsymbol{e}_z$ および $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{e}_x + v_y\boldsymbol{e}_y + v_z\boldsymbol{e}_z$ について，以下の (1)〜(4) に答えよ．ただし，$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は零ベクトルではないものとする．

(1) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$ を u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z を用いて表せ.

(2) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積 S を u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z を用いて表せ．ただし，平行四辺形の表裏や向きは考えないものとする.

(3) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ に対して，ベクトル $\boldsymbol{w}$ を，行列式を形式的に用いて

$$\boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

と定義する．ベクトル $\boldsymbol{w}$ は，$\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ に直交することを示せ．

(4) ベクトル $\boldsymbol{w}$ の長さは (2) の面積 S に等しいことを示せ．

(京都大 2009)　　(m20093304)

0.123 滑らかな曲線 C 上を動く点 P について，次の問 (1)〜(2) に答えよ．なお，図 4 − 1 に示すように，P における曲線の単位接線ベクトルを $\boldsymbol{m}$，単位主法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ と表すものとする．

(1) C 上の点 P とそれに非常に近い点 P_1，P_2 の 3 点を通る円を C_0 とし，C_0 の中心を点 O，半径を ρ，線分 P_1P の中点と線分 PP_2 の中点の間の距離を ds，直線 P_1P と直線 PP_2 のなす角を $d\varphi$，とする（図 4 − 1，4 − 2）．点 P_1，P_2 間の C に変曲点はないものとする．

(a) 直線 P_1P，直線 PP_2 上の単位ベクトル $\boldsymbol{m}_1$，$\boldsymbol{m}_2$ は近接する 2 つの単位接線ベクトルとみることができ $\boldsymbol{m}_2 - \boldsymbol{m}_1 = d\boldsymbol{m}$ である．このとき $\left|\dfrac{d\boldsymbol{m}}{ds}\right| = \dfrac{1}{\rho}$ となることを示せ．

(b) $\dfrac{d\boldsymbol{m}}{ds}$ は $\boldsymbol{m}$ と垂直であり，$\dfrac{d\boldsymbol{m}}{ds} = \dfrac{1}{\rho}\boldsymbol{n}$ となることを示せ．

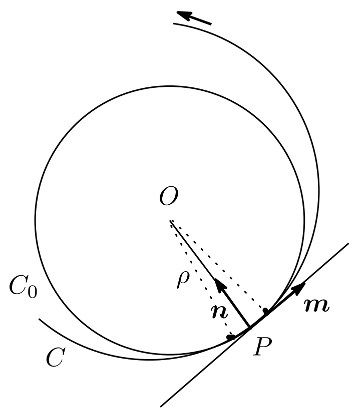


図 4 − 1

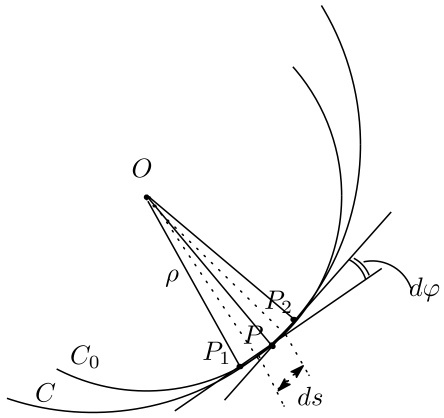


図 4 − 2

(2) 点 P の時刻 t における位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ が，

$\boldsymbol{r}(t) = [b\cos t \quad b\sin t \quad ct]$　（b，c は正の定数）

で表されるとき，P の速度 $\boldsymbol{v}(t)$，および，加速度 $\boldsymbol{a}(t)$ を，P の軌跡における，単位接線ベクトル $\boldsymbol{m}$ と単位主法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ で表せ．

(京都大 2013)　　(m20133304)

0.124 行列式 $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 1 & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & x & -1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 1998)　　(m19983405)

0.125 行列式を含む方程式 $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ を解け．

(京都工芸繊維大 2000)　　(m20003410)

0.126 行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ a & b & c & x \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2004)　　(m20043406)

0.127　行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z & -y \\ 1 & -z & 0 & x \\ 1 & y & -x & 0 \end{vmatrix}$ を計算せよ．

(京都工芸繊維大 2006)　　(m20063401)

0.128　実数 x が $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする．行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin x & \cos x & \tan x \\ -\sin x & 0 & 0 & \cos x \\ -\cos x & 0 & 0 & \sin x \\ -\tan x & -\cos x & -\sin x & 0 \end{vmatrix}$$

の値が $\dfrac{1}{4}$ となるような x をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2009)　　(m20093401)

0.129　a を実数とする．行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2018)　　(m20183401)

0.130　a, b を実数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & -1 & b \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ は固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を持つとする．

(1)　a, b を求めよ．

(2)　A の固有値をすべて求めよ．

(3)　行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & b & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2019)　　(m20193401)

0.131　２つの３次元空間ベクトル $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}$，$\overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + b_3\overrightarrow{k}$ に対して，外積 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ は次のように定義される．

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{k}$$

但し，$\overrightarrow{i}$，$\overrightarrow{j}$，$\overrightarrow{k}$ は空間の基本ベクトル（大きさ１，互いに垂直）を，また，$|\ \ |$ は行列式を表す．この時，以下の設問に答えよ．

(1)　$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ は $\overrightarrow{a}$ および $\overrightarrow{b}$ と垂直になることを証明せよ．

(2)　外積について $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$ という交換の法則が成り立つかどうかを確かめよ．また，成立しない場合は，$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$ の間にどのような関係が成り立つかを示せ．

(3)　$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 0$ ならば，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は平行となり，また逆に $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が平行ならば，$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 0$ となることを証明せよ．

(4) 3つの空間ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で定まる平行六面体の体積 V は $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ の絶対値で与えられることを証明せよ.（ $\cdot$ は，内積を表す.）

(大阪大 1996)　　(m19963501)

0.132 閉区間 $[-\pi,\pi]$ 上で定義された，1階連続微分可能（1階導関数が存在して連続）な奇関数 $f(t)$ が与えられている.

(1) 実数列 $\{a_k\}$ を次のように定める： $a_k := \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\ dt,\quad k=1,2,\cdots.$

このとき $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ を示しなさい．また $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2 < \infty$ であることを示しなさい.

(2) 上記 (1) で定めた実数列 $\{a_k\}$ に対して， $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2$ が成立したとすると，

$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t)-\sum_{k=1}^{N} a_k\sin kt\right|^2 dt = 0$ となることを示しなさい．また，この逆も成立することを示しなさい.

(大阪大 2006)　　(m20063510)

0.133 (1) 2つの複素数 a_1 と a_2 について，各々の和，積がいずれも実数であるとき，a_1 と a_2 が満たすべき条件をすべて示せ.

(2) 複素数 b について，$b+\dfrac{2}{b}$ の値が有限の実数であるとき，b が複素平面上で描く図形を示せ.

(3) 2つの複素数 c_1 と c_2 について，各々の和，積がいずれも純虚数であり，かつ $\left|\dfrac{c_1}{c_2}\right| = k$ であるとき，$\dfrac{c_1}{c_2}$ を k を用いて表せ，ただし $k\neq 0$ とする.

(大阪大 2013)　　(m20133504)

0.134 $\{f_k(x)\}_{k=1.2.\cdots}$ を閉区間 $I(\subset\mathbb{R})$ で定義された実数値連続関数の列とする．二つの条件を考える.

条件1： $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\Big|f_k(x)\Big| < \infty,\qquad x\in I$

条件2： $\displaystyle\max_{x\in I}\left|\sum_{k=1}^{m} f_k(x)-\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right|\to 0\qquad (m,n\to\infty)$

条件1が満たされるとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は I において絶対収束するという．条件2が満たされるとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は I において一様収束するという．以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)=|x|\quad (x\in[-\pi,\ \pi])$ のフーリエ級数

$$s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\quad x\in[-\pi,\pi]$$

を求めよ.

(2) (1) で求めた級数 $s(x)$ が $[-\pi,\pi]$ において絶対収束することを示せ.

(3) (1) で求めた級数 $s(x)$ が $[-\pi,\pi]$ において一様収束することを示せ.

(大阪大 2014)　　(m20143506)

0.135 $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & -6 & -3 \\ -2 & -2 & -2 & -4 & 4 \\ 5 & -6 & -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$ であるとき，以下の問いに答えよ.

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -2 & -2 & -2 \\ 5 & -6 & -3 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(2) 行列 A の階数 (rank) を求めよ.

(大阪府立大 2003)　　(m20033602)

0.136 (1) $z = (1+i)^n - (1-i)^n$ とするとき, $|z|$ を求めよ. ただし, i を虚数単位 ($i^2 = -1$), n は自然数とする.

(2) i を虚数単位 ($i^2 = -1$), $z_m = e^{-imx}$ とするとき $\left|\sum_{m=0}^{n-1} z_m\right|^2 = \dfrac{\sin^2 \dfrac{nx}{2}}{\sin^2 \dfrac{x}{2}}$ となることを示せ.

ただし, m, n は整数, x は実数である.

(大阪府立大 2005)　　(m20053603)

0.137 (1) 次の方程式を解け. なお, $|\cdot|$ は行列式を表す. $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & -2 & x+3 \\ 3 & x+4 & x-4 & x+5 \\ 0 & x+1 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & x-8 \end{vmatrix} = 0$

(2) 以下の行列 A が逆行列を持つ条件を示せ. また, 行列 A の逆行列を求めよ. なお, a は実数とする. $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

(大阪府立大 2008)　　(m20083601)

0.138 3 次元空間の原点 O と 3 点 A, B, C を, $(0,0,0)$, $(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $(b_1,\ b_2,\ b_3)$, $(c_1,\ c_2,\ c_3)$, とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 線分 OA と線分 OB を 2 辺とする平行四辺形の面積を $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ を用いて示せ.

(2) 線分 OA, OB, OC を 3 辺とする平行六面体の体積を $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ を用いて示せ.

(大阪府立大 2008)　　(m20083604)

0.139 次の問いに答えよ.

(1) 行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

を求めよ.

(2) $A = (a_{ij})$ を $n \times\ n$ 行列とし,

$$a_{ij} = |i - j| \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

とする. このとき, A の行列式 $|A|$ を求めよ.

(大阪府立大 2011)　　(m20113605)

0.140 領域 D を $D = \left\{(x, y) \in R^2 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \leqq 1\right\}$ とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) D を図示せよ.　　　(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ の値を求めよ.

(大阪府立大 2016)　　(m20163609)

0.141 3 次元空間内の単位球を B とおく. すなわち,

$$B = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 \leqq 1\right\}$$

とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ とおく. この変数変換のヤコビ行列式を計算せよ.

(2) 定積分

$$\iiint_B (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}dxdydz$$

の値を求めよ.

(大阪府立大 2019)　　(m20193607)

0.142 $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(神戸大 1994)　　(m19943803)

0.143 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(神戸大 1998)　　(m19983806)

0.144 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ -1 & -5 & -3 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 9 & -2 & 8 \\ 2 & -4 & 6 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 7 & 9 & 4 \end{vmatrix}$$

(神戸大 1998)　　(m19983807)

0.145 次のような変数変換について以下の問いに答えよ.

$$x = u^2 - v^2 \quad y = 2uv$$

ただし, $D = \{(x,y) | x^2+y^2 \leq 1\}$　$E = \{(u,v) | u^2+v^2 \leq 1\}$ とする.

(1) $u^2+v^2 \leq 1$ が $x^2+y^2 \leq 1$ に移ることを証明せよ.

(2) ヤコビアンを求めよ.

(3) $\displaystyle\int_D dxdy$, $\displaystyle\int_E \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_D dxdy = \int_E \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$ は成立しない. 何故か.

(神戸大 1999)　　(m19993804)

0.146 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

(神戸大 1999)　(m19993806)

0.147 以下の問に答えよ.

(1) n を自然数とし，$0 < i < n$ とするとき，${}_nC_i = {}_{n-1}C_i + {}_{n-1}C_{i-1}$ が成り立つことを示せ.

(2) 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} {}_0C_0 & {}_1C_1 & {}_2C_2 & {}_3C_3 & {}_4C_4 & {}_5C_5 & {}_6C_6 \\ {}_1C_0 & {}_2C_1 & {}_3C_2 & {}_4C_3 & {}_5C_4 & {}_6C_5 & {}_7C_6 \\ {}_2C_0 & {}_3C_1 & {}_4C_2 & {}_5C_3 & {}_6C_4 & {}_7C_5 & {}_8C_6 \\ {}_3C_0 & {}_4C_1 & {}_5C_2 & {}_6C_3 & {}_7C_4 & {}_8C_5 & {}_9C_6 \\ {}_4C_0 & {}_5C_1 & {}_6C_2 & {}_7C_3 & {}_8C_4 & {}_9C_5 & {}_{10}C_6 \\ {}_5C_0 & {}_6C_1 & {}_7C_2 & {}_8C_3 & {}_9C_4 & {}_{10}C_5 & {}_{11}C_6 \\ {}_6C_0 & {}_7C_1 & {}_8C_2 & {}_9C_3 & {}_{10}C_4 & {}_{11}C_5 & {}_{12}C_6 \end{vmatrix}$$

(神戸大 1999)　(m19993807)

0.148 行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}$ のうち，a_{24}，a_{42}，a_{63} を含む項の合計を求めよ.

(神戸大 1999)　(m19993808)

0.149 次の等式を示せ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ {x_0}^2 & {x_1}^2 & {x_2}^2 & \dots & {x_n}^2 \\ {x_0}^3 & {x_1}^3 & {x_2}^3 & \dots & {x_n}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_0}^{n-1} & {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \dots & {x_n}^{n-1} \\ {x_0}^n & {x_1}^n & {x_2}^n & \dots & {x_n}^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

(神戸大 2001)　(m20013809)

0.150 (1) 次の行列式を因数分解しなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

(2) 次の連立一次方程式の解を全部求めよ. 解全体を解空間と呼ぶ. この解空間の次元はいくらか？

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(神戸大 2005)　　(m20053801)

0.151　次の行列式を一次式の積に分解せよ. $\begin{vmatrix} a^2 & (b+c)^2 & 1 \\ b^2 & (c+a)^2 & 1 \\ c^2 & (a+b)^2 & 1 \end{vmatrix}$

(神戸大 2007)　　(m20073802)

0.152　$x_1,\ x_2,\ x_3$ を未知変数とする連立方程式 (A)

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j + a_{i4} = 0\ , \quad i = 1, 2, 3, 4$$

を考える. ここで $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

(1)　$a_{ij} = (-1)^{i+j}$ の時, この連立方程式 (A) の解をすべて求めよ.

(2)　$a_{i1} = 1,\ a_{i2} = (-1)^i,\ a_{i3} = u^{i-1}\ (1 \leq i \leq 4)$ および $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 1,\ a_{44} = u$ の時, この連立方程式 (A) が解をもつような実数 u の値をすべて決定せよ.

(3)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

の時, 連立方程式 (A) が解をもつ必要十分条件を a_{ij} を用いて表せ.

(神戸大 2010)　　(m20103802)

0.153　(1)　行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$ を計算せよ.

(2)　等式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (af - bc + cd)^2$ を示せ.

(3)　$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} & a_{35} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 & a_{45} \\ -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & 0 \end{bmatrix}$ について,

${}^tA = -A$ を示し, これを用いて $\det(A) = 0$ を証明せよ.

(神戸大 2010)　　(m20103806)

0.154　次の $(a), (b)$ の行列式の値をそれぞれ求めよ.

(a) $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 11 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$　　(b) $\begin{vmatrix} 1 & -0.2 & -0.04 & -0.008 \\ -0.2 & 1.04 & 0.008 & 0.0016 \\ -0.04 & 0.008 & 1.0016 & 0.00032 \\ -0.008 & 0.0016 & 0.00032 & 0 \end{vmatrix}$

(神戸大 2012)　　(m20123801)

0.155　以下の問いに答えよ.

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ の値を求めよ.

(2) 自然数 n に対して $f_n(x) = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-x^2)^n$ とおく．次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\int_0^1 \left| f_n(x) - \frac{1}{1+x^2} \right| dx \leqq \frac{1}{2n+3}$$

(3) 級数の和

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

を求めよ.

(神戸大 2013)　　(m20133802)

0.156 z は $|z| = 1$, $z \neq 1$ を満たす複素数とする．このとき，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n} + \cdots \qquad (*)$$

が（ある複素数に）収束することを示したい．以下の問いに答えよ．非負整数 n に対し $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k$ とおく.

(1) 非負整数 n に対し $|S_n| \leq \dfrac{2}{|1-z|}$ であることを示せ.

(2) $m > n$ であるような正の整数 m, n に対し次が成り立つことを示せ.

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{z^k}{k} = \sum_{k=n}^{m-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{S_m}{m} - \frac{S_{n-1}}{n}$$

(3) (1),(2) を用いて，以下の条件 (C) が成り立つことを示せ.

任意の正の実数 ε に対し，正の整数 N が存在して，
$m > n \geq N$ であるような任意の整数 m, n に対して
$\left| \displaystyle\sum_{k=n}^{m-1} \frac{z^k}{k} \right| < \varepsilon$ が成り立つ.　　(C)

（コーシーの収束条件定理によれば，条件 (C) は級数 $(*)$ の収束と同値であるため，(3) より級数 $(*)$ の収束が証明できることになる.）

(神戸大 2014)　　(m20143810)

0.157 実数 $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$f_n(x) = \min_{k \in \mathbb{Z}} \left| x - \frac{k}{2^n} \right|$$

と定義する．$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合である．次の問に答えよ.

(1) 関数 f_0, f_1, f_2 のグラフの概形を書け.

(2) 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して級数

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \qquad (*)$$

は収束することを示せ.

(3) $(*)$ で与えられる $x \in \mathbb{R}$ の関数 $S(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを示せ.

(神戸大 2015)　　(m20153807)

0.158　$a,b,c>0,\ V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leq 1\right\}$ とするとき，積分　$I=\displaystyle\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz$ の値を求めよ．

(神戸大 2017)　　(m20173802)

0.159　n を正整数とする．積分

$$\iint_A (x+y)^2(x-y)^n dxdy\ ,\qquad A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ -\frac{1}{2}\leq y\leq x\leq\frac{1}{2}\right\}$$

を求めよ．

(神戸大 2022)　　(m20223808)

0.160　次の行列式を因数分解せよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

(鳥取大 2005)　　(m20053912)

0.161　次の行列式を因数分解せよ．$\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$

(鳥取大 2006)　　(m20063910)

0.162　次の行列式を計算せよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

(鳥取大 2006)　　(m20063911)

0.163　以下の行列式 u,v をそれぞれ計算せよ．

(1) $u=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$　　(2) $v=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

(鳥取大 2007)　　(m20073908)

0.164　次の行列式の値を求めよ．$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

(鳥取大 2007)　　(m20073910)

0.165　次の行列式を計算せよ．$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 8 \\ 9 & 7 & 9 & 3 \end{vmatrix}$

(鳥取大 2007)　　(m20073918)

0.166　直交座標系に関して，3 つのベクトルを $\overrightarrow{OA}=(1,-1,2)$，$\overrightarrow{OB}=(k,4,1)$，$\overrightarrow{OC}=(2,1,3)$ とする．

(1) $\overrightarrow{OA}$ の長さ $\left|\overrightarrow{OA}\right|$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ が直交するとき，k の値を求めよ．

(3) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ の外積 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}$ を求めよ.

(鳥取大 2009)　　(m20093907)

0.167 行列と行列式に関する以下の問いに答えなさい.

(1) 次の行列式の値を計算せよ.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(2) (1) の行列 A の逆行列を求めよ.

(鳥取大 2012)　　(m20123902)

0.168 関数 $f(x)$, $f_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ を，閉区間 $[a,b]$ 上で微分可能であり，それらの導関数は $[a,b]$ 上で連続とし，

(i) すべての n について　$f_n(a) = f(a)$,

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n'(x) - f'(x)|\,dx = 0$,

を満たすものとする．このとき次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ を $f(a)$ と $f'(x)$ を使って表せ.

(2) $f_n(x)$ は $f(x)$ に各点収束することを示せ.

(3) $f_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束することを示せ.

(岡山大 2012)　　(m20124001)

0.169 開区間 $(-1,1)$ 上で定義されたなめらかな関数 $f(x)$ を考える．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $f(x) = f(0) + f'(0)x + \displaystyle\int_0^x (x-t)f''(t)dt$ を示せ.

(2) $f(x) = (1+x)^{1/3}$ のとき，

$$\left|\int_0^x (x-t)f''(t)dt\right| \leqq \frac{x^2}{9} \qquad (x \geqq 0)$$

が成り立つことを示せ.

(3) $7^3 = 343$ に注意して，$(345)^{1/3}$ の値を小数第 3 位まで求めよ.

(岡山大 2015)　　(m20154001)

0.170 次の問に答えよ. ただし, 被積分関数が連続になる範囲のみを考えればよい.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$（$C$ は積分定数）を示せ.

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} x + C$（$C$ は積分定数）を示せ.
ただし, $y = \tan^{-1} x$ $\left(|y| < \dfrac{\pi}{2}\right)$ は $x = \tan y$ の逆関数を表す.

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2}$ を求めよ.

(4) $\alpha < \beta$ のとき $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ を求めよ.

(5) $a > 0$, $D = b^2 - 4ac < 0$ のとき $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ を求めよ.

(広島大 2005)　　(m20054101)

0.171 (1) n を自然数として，$\sin x$ の n 次導関数が $\sin(x+a_n)$ となるような実数 a_n を一つ求めよ．

(2) 数列 $\left\{b_k\right\}_{k=0}^{\infty}$ が存在して，任意の実数 x と任意の自然数 n に対して

$$\left|\sin x - \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k\right| \leqq \frac{|x|^n}{n!}$$ が成り立つ．b_k を求めよ．

(3) $0.841 < \sin 1 < 0.842$ であることを示せ．

(4) $\sin 1$ は無理数であることを示せ．

(広島大 2017)　　(m20174104)

0.172 $0<r<1$ とする．座標空間において，原点を中心とし半径が 1 である球体 B から，領域 $\left\{(x,y,z)\in B \;\middle|\; x^2+y^2<r^2\right\}$ を取り除いて得られる物体を $B(r)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $B(r)$ の体積を求めよ．

(2) $B(r)$ の体積が B の体積の $\dfrac{1}{8}$ であるとする．このとき，r の値と $B(r)$ の表面積を求めよ．

(3) $B(r)$ の表面積の最大値と，最大値を与える r の値を求めよ．

(広島大 2018)　　(m20184104)

0.173 行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ を計算せよ．

(広島大 2018)　　(m20184106)

0.174 複素数を成分とする 2 次正方行列全体のなす集合を $M(2,\mathbb{C})$ で表す．E_2 を 2 次の単位行列とする．$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M(2,\mathbb{C})$ に対し，A の随伴行列 A^* を

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}$$

により定める．ただし，複素数 z に対し $\overline{z}$ は z の複素共役を表す．また

$$H(2)=\{A\in M(2,\mathbb{C}) \mid A^*=A\}$$
$$U(2)=\left\{A\in M(2,\mathbb{C}) \;\middle|\; P \text{ は正則で } \quad P^{-1}=P^*\right\}$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $A\in H(2)$ とする．A の固有値は実数であることを示せ．

(2) $A\in H(2)$ とする．A がただ一つの固有値をもつならば，ある実数 λ が存在して $A=\lambda E_2$ となることを示せ．

(3) $A\in H(2)$ は異なる二つの固有値をもつとする．$\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ をそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルとするとき，

$$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=0$$

が成り立つことを示せ．ただし，$(\ ,\ )$ は $\mathbb{C}^2$ の標準エルミート内積である．

(4) $A\in H(2)$ に対し，ある $P\in U(2)$ が存在して P^*AP が対角行列となることを示せ．

(広島大 2021)　　(m20214104)

0.175 $f_i(x)$, $g_i(x)$, $h_i(x)$ を微分可能な関数とし，

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix}$$ とするとき，

$$\frac{dF(x)}{dx} = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) & g_3'(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1'(x) & h_2'(x) & h_3'(x) \end{vmatrix}$$

を示しなさい．ただし，$f_i'(x)$, $g_i'(x)$, $h_i'(x)$ はそれぞれの関数の微分である．

(山口大 1998）　　(m19984301)

0.176 (1) 次の行列式を展開して因数分解しなさい．

$$\begin{vmatrix} 1 & y+z & yz \\ 1 & z+x & zx \\ 1 & x+y & xy \end{vmatrix}$$

(2) 次の行列式の値を計算しなさい．

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 8 & 11 \\ 5 & 6 & 7 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{vmatrix}$$

(山口大 2001)　　(m20014315)

0.177 $f_i(x)$, $g_i(x)$, $h_i(x)$ を微分可能な関数とし，

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix}$$ とするとき，

$$\frac{dF(x)}{dx} = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) & g_3'(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1'(x) & h_2'(x) & h_3'(x) \end{vmatrix}$$

を示しなさい．ただし，$f_i'(x)$, $g_i'(x)$, $h_i'(x)$ はそれぞれの関数の微分である．

(山口大 2002）　　(m20024304)

0.178 行列式 A の値を求めなさい．

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 8 & 11 \\ 5 & 6 & 7 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{vmatrix}$$

(山口大 2003)　　(m20034309)

0.179 行列式の計算において, 行列式の 1 つの行（または列）の全ての要素に同一の数をかけて得られる行列式の値はもとの行列式の値にその数をかけたものと等しいことを行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ を例として使って説明しなさい.

（山口大 2004）　　(m20044309)

0.180 次の行列式の値を計算しなさい.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 5 & 8 \\ -5 & 4 & -7 & 9 \\ 6 & 3 & -2 & 13 \end{vmatrix}$$

(山口大 2005)　　(m20054305)

0.181　次の行列式の値を求めなさい．

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

(山口大 2009)　　(m20094306)

0.182　次の行列式の値を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

(徳島大 1998)　　(m19984404)

0.183　次の問に答えよ．

(1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とする．このとき，行列式 $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を r, θ で表せ．

(2) (1) で求めた J に対して，$I = \displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty f(r\cos\theta, r\sin\theta)Jdr$ であることを用いて，$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ のとき I の値を求めよ．

(徳島大 1999)　　(m19994402)

0.184　次の問に答えよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 10 \\ 15 & 42 & 46 \\ 21 & 66 & 85 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ とする．$A = BC$ となる 3 次正方行列 C を求めよ．また行列式 $|A|$ の値を求めよ．

(2) 次の方程式を解け．ここで左辺は行列式を表す．

$$\begin{vmatrix} x^2 & 1-x & x^2-2x & x^3 \\ 0 & x-2 & 1-x & x^2-2x \\ x^2 & 1-x & 1-2x & 1-x+x^3 \\ -x^2 & x-1 & 2x-x^2 & 2-x^3 \end{vmatrix} = 0$$

(徳島大 2005)　　(m20054401)

0.185　$0 < a < 1,\ D_a = \left\{(x,y)\ ;\ a^2 \leqq\ x^2+y^2 \leqq \dfrac{1}{a^2}\right\}$ とする．

(1) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とする．行列式 $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を $r,\ \theta$ で表せ．

(2) $I(a) = \displaystyle\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{a\to 0} I(a)$ を求めよ．

(徳島大 2010)　　(m20104404)

0.186 $D = \{(x, y)\,;\, 1 \leqq\ x + y \leqq\ 2,\ x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0\}$ とする． 二重積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{x^2 + y^2}{(x+y)^2}\,dxdy$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $u = x - y,\ v = x + y$ とおく．x, y を $u,\ v$ で表せ．

(2) 行列式 $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ．

(3) (1) の変換で D に対応する uv 平面の集合を D' とする．D' を図示せよ．

(4) I を求めよ．

(徳島大 2011) (m20114403)

0.187 $D = \{(x, y)\ :\ x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0,\ x + y \geqq\ 1\}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $u = x + y,\ v = \dfrac{y}{x+y}$ とおく．x, y を u, v の式で表せ．また，行列式 $J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 v\sin(\pi v)dv$ を求めよ．

(3) $f(x, y) = \dfrac{y}{x+y}e^{-(x+y)}\sin\left(\dfrac{\pi y}{x+y}\right)$ に対して，$I = \displaystyle\iint_D f(x, y)dxdy$ を求めよ． ここで，(1) の変換により $\displaystyle\iint_D f(x, y)dxdy = \int_0^1 dv\int_1^\infty f\big(x(u, v),\ y(u, v)\big)|J(u, v)|du$ となることを用いてよい．

(徳島大 2015) (m20154403)

0.188 $\mathbb{R}^2$ の領域 $D_1,\ D_2$ を

$$D_1 = \left\{(x, y)\ \middle|\ 0 < x < 1 \text{ かつ } x^2 + y^2 < 1\right\}$$
$$D_2 = \{(x, y)\ |\ 0 < x < 1 \text{ かつ } |y| < 1\}$$

により定義する．次の問いに答えよ．

(1) D_1 上の C^1 級関数 $f(x, y)$ が $x^2 + y^2$ のみに依存するとき，すなわち，

$$f(x, y) = h(x^2 + y^2)$$

が任意の $(x, y) \in D_1$ に対して成り立つような一変数関数 h が存在するとき，D_1 上で

$$(*) \qquad y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

が成り立つことを示せ．

(2) 逆に，D_1 上の C^1 級関数 $f(x, y)$ が D_1 上で $(*)$ を満たすとき，f は $x^2 + y^2$ のみに依存する関数であることを示せ．

(3) D_2 上の関数 $g(x, y)$ を

$$g(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)^2 & (x^2 + y^2 > 1 \text{ かつ } y > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

で定義する．g は $(*)$ の f を g で置き換えた方程式を D_2 上で満たすことを示せ．

(4) 小問 (1)，(2) の D_1 を D_2 に置き換えると，それぞれ正しいと言えるだろうか．理由を挙げて述べよ．

(高知大 2017)　　(m20174503)

0.189　次の行列式を計算せよ. (2) は因数分解せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$

(愛媛大 2005)　　(m20054607)

0.190　(1) $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$　となる実数 λ をすべて求めよ.

(2) (1) で求めた λ の中で最大のものを λ_0 とするとき，連立方程式

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda_0-1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda_0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ をすべて求めよ.

(愛媛大 2007)　　(m20074605)

0.191　(1) 4 次の行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & x \\ -2 & 0 & x & -1 \\ -1 & x & -1 & 0 \\ x & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ を $f(x)$ とおく．$f(x)$ を求めよ.

(2) $f(x) = 0$ の実数解を全て求めよ.

(愛媛大 2007)　　(m20074609)

0.192　行列 A を

$A = \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A^2 を計算せよ.

(2) 次の行列式の値をゼロにする $a,\ b,\ c$ をすべて求めよ.

$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$

(愛媛大 2010)　　(m20104605)

0.193　(1) 行列式 $\begin{vmatrix} 56 & 4 & -2 \\ 6 & 54 & -2 \\ 180 & 120 & -10 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 106 & 4 & -2 \\ 6 & 104 & -2 \\ 180 & 120 & 40 \end{pmatrix}$ の固有値をすべて求めよ.

(愛媛大 2013)　　(m20134604)

0.194 $D = \left\{(x,\ y) \;\middle|\; 0 \leqq y \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}\right\}$ とする.

(1) D を図示せよ.

(2) 次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D \sin(x+y)dxdy$$

(愛媛大 2018)　　(m20184604)

0.195 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq y\right\}$ とする.

(1) D を図示せよ.

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$ を求めよ.

(愛媛大 2021)　　(m20214604)

0.196 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

(愛媛大 2021)　　(m20214606)

0.197 2 つの 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ に対し, $\boldsymbol{a}$ の転置により得られる 3 次実行ベクトル ${}^t\boldsymbol{a} = [a_1\ \ a_2\ \ a_3]$ と $\boldsymbol{b}$ の（行列としての）積 ${}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ により得られる実数を $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ とおく.

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

また, $\boldsymbol{o} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とおく.

(1) (a) 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対し, $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}) = 0$ であることは $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ であるための必要十分条件であることを示せ.

(b) $\boldsymbol{o}$ でない 2 つの 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ に対し, $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = 0$ ならば $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ は 1 次独立であることを示せ.

(c) $\boldsymbol{o}$ でない 3 つの 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ に対し, $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) = 0$ ならば $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ は 1 次独立であることを示せ.

(2) 3 つの 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ を用いて表される 3 次正方行列 $A = [\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}]$ に対し, ${}^tA = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{a} \\ {}^t\boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{c} \end{bmatrix}$ を 3 つの 3 次実行ベクルトル ${}^t\boldsymbol{a},\ {}^t\boldsymbol{b},\ {}^t\boldsymbol{c}$ を用いて表される A の転置行列とする. A が

$${}^tAA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

を満たすとき, $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ は 1 次独立であることを示せ.

(愛媛大 2022)　　(m20224601)

0.198 つぶれていない四面体には 4 個の頂点がある．各頂点の座標を (x_i, y_i, z_i) $(1 \leqq i \leqq 4)$ とする．四面体内（表面を含む）の任意の点 P の座標を (x, y, z) で表すとき，

$$u(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \qquad (*)$$

で表せる関数 $u(x, y, z)$ を考える．ただし，α_i $(1 \leqq i \leqq 4)$ は定数である．このとき次の各問いに答えよ．

(1) 4 個に頂点における関数値 u_i $(1 \leqq i \leqq 4)$ を既知とするとき，α_i $(1 \leqq i \leqq 4)$ を決定する連立 1 次方程式を求めよ．

(2) 直前に求めた連立 1 次方程式で α_i $(1 \leqq i \leqq 4)$ を求め，それを $(*)$ 式に代入した結果を

$$u(x, y, z) = \sum L_i(x, y, z) u_i \qquad (**)$$

と表す．ただし，$\sum$ は $i = 1$ から 4 までの総和を表し，$L_i(x, y, z)$ は次式で与えられる．

$$L_i(x, y, z) = a_i + b_i x + c_i y + d_i z \qquad (***)$$

(a) $L_i(x, y, z)$ $(1 \leqq i \leqq 4)$ の各頂点における関数値を求めよ．

(b) $L_i(x, y, z)$ $(1 \leqq i \leqq 4)$ の四面体の 6 個の辺の各中点における関数値を求めよ．

(c) $(***)$ 式の a_i, b_i, c_i, d_i を以下の 5 個の行列式 (A, B, C, D, E) を用いて表現せよ．その際，i が 1 から 4 まで動いたときの j, k, l のとる値を明示せよ．

$$A = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix}, \quad E = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

（九州大 1999）　　(m19994705)

0.199 3 次元空間内で

$$S \ : \ (x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)), \quad (u, v) \in D$$

の形で表される曲面を考える．ただし，D はパラメータ (u, v) の動く 2 次元平面の領域である．このとき，S の面積 $\mu(S)$ は

$$\mu(S) = \int_D \sqrt{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}^2} \ dudv$$

で与えられる．ただし，$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ は行列式を表す．これを用いて以下の問いに答えよ．

(1) 曲面 S が $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ で与えられるときは

$$\mu(S) = \int_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} \ dxdy$$

であることを示せ．

(2) 半径 1 の球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の面積は 4π であることを (1) の公式を用いて確かめよ．

(九州大 2007)　　(m20074707)

0.200　関数 $f(x)$ を $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$ により定める，ただし，$|\cdot|$ は行列式を表す．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ は実数 β, a, b, c を用いて $f(x)=\beta(x-a)(x-b)(x-c)$ と表せる．β, a, b, c を求めよ．ただし，$a>b>c$ とする．

(2) $g(x)=-x(2x-3)(x-3)$ とするとき，方程式 $f(x)+g(x)=0$ の解はすべて実数で，$-1<x<3$ の範囲に存在することを示せ.

(九州大 2012)　　(m20124708)

0.201　$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; -x-1\leq y\leq -x+1,\ x-1\leq y\leq x+1\right\}$ とおく.

(1) 1 次変換 $u=x+y$, $v=x-y$ によって D が移される uv平面上の集合を図示せよ　.

(2) (1) の変数変換において，ヤコビ行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

を求めよ.

(3) 重積分

$$\iint_D (x+y)^2 e^{x-y}\,dxdy$$

を求めよ.

(九州大 2012)　　(m20124710)

0.202　2 次元実平面上の閉区間 $D,\ D_+$ を

$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2-4\leqq y^2\leqq x^2-1 \text{ かつ } 4\leqq x^2+y^2\leqq 9\right\}$

$D_+=D\cap\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geqq 0 \text{ かつ } y\geqq 0\right\}$

とするとき，次の重積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_{D_+} xy\,dxdy$　　(2) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$

(九州大 2019)　　(m20194706)

0.203　$x>0,\ y>0$ において，2 変数関数 $f(x,y)$ および $g(x,y)$ を次の式で定義する.

$$f(x,y)=\log\left(x^2+y^2\right)\ ,\qquad g(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^{1/3}$$

このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の x に関する 2 次偏導関数 $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)$ を求めよ.

(2) 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\lim_{t\to+0} t\log t=0$$

(3) 領域 $D=\left\{(x,y) \;\middle|\; 0<x^2+y^2<1,\ 0<y<x\right\}$ における次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D \frac{f(x,y)}{g(x,y)}\,dxdy$$

(九州大 2019)　　(m20194712)

0.204 $0 < A < B \leq 1$ とするとき，領域 D を $D = \left\{(x, y) \mid A \leq x \leq B,\ x^2 \leq y \leq x\right\}$ とし，

$f(x, y) = \dfrac{y + y^2}{x^2 + y^2}$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

ただし，逆正接関数 $\arctan(x)$ が $\dfrac{1}{x^2+1}$ の原始関数であることは既知として用いてよい．

(1) 関数 $g(x, y) = y - x\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ を y で偏微分した偏導関数を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x, y)dx$ を求めよ．ただし，$x > 0,\ y > 0$ とする．

(3) 関数 $h(x) = 2\ \arctan(x) - 2x + x\log(x^2 + 1)$ の微分を求めよ．

(4) $\displaystyle\int_D f(x, y)dxdy = H(B) - H(A)$ を満たす関数 $H(x)$ を求めよ．

(九州大 2021)　　(m20214708)

0.205 次の行列式を x について因数分解した形で求めよ．ただし，a, b, c は定数とする．

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 1 \\ a & x & b & 1 \\ a & b & x & 1 \\ a & b & c & 1 \end{vmatrix}$$

(九州芸術工科大 2001)　　(m20014807)

0.206 行列式 $\begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix}$ を 2 乗して，$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$ を示せ．

(九州芸術工科大 2003)　　(m20034806)

0.207 次の行列式を因数分解せよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} b+c & a & a^2 \\ c+a & b & b^2 \\ a+b & c & c^2 \end{vmatrix}$

(九州芸術工科大 2005)　　(m20054809)

0.208 次の行列式に関する等式を示せ．

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2 & bc & ac \\ bc & a^2+c^2 & ab \\ ac & ab & b^2+c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}^2$$

(佐賀大 2005)　　(m20054906)

0.209 以下の問に答えよ．

(1) 次の行列の逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列式を計算せよ．答えはなるべく簡単に因数分解した形で書け．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

(佐賀大 2005)　　(m20054918)

0.210 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{4x^2+3x-7}{2x^2-5x+3}$ を求めよ．

(2) $y=\log\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$ を微分せよ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int x^2e^{2x}\,dx$ を計算せよ．

(4) 二変数関数 $f(x,y)=x^2-5xy^2+3y^2$ に関して，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．また，点 $(3,2)$ における x 方向，y 方向の偏微分係数を求めよ．

(佐賀大 2007)　　(m20074926)

0.211 次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

(佐賀大 2009)　　(m20094918)

0.212 次の行列式の値を求めなさい．

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 13 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

(佐賀大 2012)　　(m20124918)

0.213 次の関数 y の導関数 dy/dx を求めなさい．

(1) $y=x\log_e x-x$　　(2) $y=\dfrac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}$　　(3) $y=\dfrac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}$

(4) $y=3^{-x}$　　(5) $y=\log_e\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|$

(佐賀大 2013)　　(m20134924)

0.214 次の行列式の値を計算せよ

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

(佐賀大 2014)　　(m20144905)

0.215 次の行列式の値を計算せよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(佐賀大 2015)　　(m20154922)

0.216 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

(佐賀大 2016) (m20164919)

0.217 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ -4 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

(佐賀大 2017) (m20174905)

0.218 関数 $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ について，次の問いに答えよ.

(1) 偏微分 f_x，f_y，f_{xx}，f_{xy}，f_{yy} を計算せよ.

(2) ヘッシアン $H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$ を計算せよ.

(3) (1) と (2) を用いて，$f(x,y)$ の極値を求めよ.

(佐賀大 2021) (m20214901)

0.219 次の重積分を計算せよ.

$$\iint_D x^2 dxdy\ , \qquad D = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1,\ y \geq 0 \right\}$$

(佐賀大 2021) (m20214902)

0.220 重積分 $\displaystyle\iint_D \sin 2x\ dxdy \qquad D = \left\{ (x,y) \;\middle|\; 0 \leq x+y \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq x-y \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ を求めなさい.

答えだけでなく途中経過も記載すること.

(佐賀大 2022) (m20224929)

0.221 $f(x) = e^{-x}\sin x$ について以下の問いに答えなさい. ただし, $0 \leq x \leq 2\pi$ とする.

(1) 曲線 $y = f(x)$ の増減, 凹凸を調べ, その概形を描きなさい.

(2) f の最大値を $f_{\max}$ とし, そのときの x を $x_{\max}$ とする. また,f の最小値を $f_{\min}$ とし, そのときの x を $x_{\min}$ とする. このとき, $x_{\max}$, $x_{\min}$ および $\left|\dfrac{f_{\max}}{f_{\min}}\right|$ を求めなさい. ただし, $\left|\dfrac{f_{\max}}{f_{\min}}\right|$ は $\dfrac{f_{\max}}{f_{\min}}$ の絶対値を表す.

（長崎大 2004） (m20045001)

0.222 次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

(長崎大 2005) (m20055015)

0.223 次の (a),(b) の行列式の値をそれぞれ求めよ.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}$　　(b) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{vmatrix}$　ただし，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$

(長崎大 2008)　(m20085017)

0.224 (1) $N\times\ M$ の行列 A と $P\times\ Q$ の行列 B があるとき，行列の積 AB が定義できる条件を述べよ.

(2) 連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ が $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 以外の解を持つための条件を述べよ．ただし，A は $N\times\ N$ の正方行列，$\boldsymbol{x}$ は N 次元の列ベクトル，$\mathbf{0}$ は N 次元の 0 ベクトルである.

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & z & 1 \\ x & 1 & z & 2 \\ 1 & 0 & b & c \\ 2 & 0 & b & c \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(4) 行列 $A=\begin{pmatrix} 2a & 1-2a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．また，A^n が $n\to\infty$ のとき収束するための条件および $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．ただし，$a\neq 1$ である.

(長崎大 2009)　(m20095010)

0.225 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

(長崎大 2011)　(m20115022)

0.226 $x=r\cos\theta$，$y=2r\sin\theta$ のとき，行列式 $J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(熊本大 2006)　(m20065201)

0.227 次の重積分の値を求めるために，以下の小問 (1) と (2) について答えなさい.

$$\iint_{4\leq x^2+y^2\leq 9} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \qquad ①$$

(1) 変数 x,y を $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ のように変数 r, θ を用いて変数変換をする，この変数変換のヤコビアン $J=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$ を求めなさい.

(2) 変数 r, θ とヤコビアン J を用いて，式 ① の重積分の値を求めなさい.

(熊本大 2014)　(m20145203)

0.228 以下の問に答えなさい．ただし，a,b,c,d は定数とし，かつ，a,b,c は相異なるものとする．なお，結果は因数分解した形で示しなさい.

(1) 次の行列式を計算しなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

(2) 次の連立一次方程式を解きなさい.

$$
\begin{aligned}
&x+y+z=1\\
&ax+by+cz=d\\
&a^2x+b^2y+c^2z=d^2
\end{aligned}
$$

(熊本大 2021)　　(m20215201)

0.229 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}$ ， D : $1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2$ の値を，次の指示に従って求めよ.

(1) 積分領域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) (x,y) を極座標 (r,θ) で表し，積分領域 D に対する (r,θ) の範囲を求めよ.

(3) ヤコビアン $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|$ を求めよ.

(4) (3) で求めたヤコビアンを用いて，重積分の値を求めよ.

(宮崎大 2004)　　(m20045303)

0.230 重積分

$$I=\iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqq 1\}$$

について，次の各問いに答えよ.

(1) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とおいたときのヤコビアン $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(2) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2011)　　(m20115304)

0.231 重積分

$$I=\iint_D \sin\frac{2x+y}{9}dxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leqq y \leqq x,\ x+\frac{y}{2} \leqq 3\pi\right\}$$

について，次の各問に答えよ.

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) 等式 $I=\displaystyle\int_{\boxed{\text{ア}}}^{\boxed{\text{イ}}}\left(\int_{\boxed{\text{ウ}}}^{\boxed{\text{エ}}}\sin\frac{2x+y}{9}dx\right)dy$ の空欄 $\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまる数値あるいは数式を答えよ.

(3) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2016)　　(m20165305)

0.232 重積分

$$I=\iint_D xdxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \frac{1}{4}x^2 \leqq y \leqq \frac{1}{2}x\right\}$$

について，次の各問に答えよ.

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2017)　　(m20175305)

0.233 重積分

$$I = \iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy, \qquad D = \left\{ (x,y) \;\middle|\; x^2+y^2 \leqq 2 \right\}$$

について，次の各問に答えよ．

(1) 領域 D を，xy 平面上に図示せよ．

(2) 重積分 I の値を求めよ．

(宮崎大 2020)　　(m20205304)

0.234 a, b, c をそれぞれ任意の数とするとき，次の行列式に関して

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)$$

となることを示せ．

（鹿児島大 2001）　　(m20015419)

0.235 直交座標系における二つのベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対して，これらの外積とよばれるベクトル $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \tag{1}$$

で定義される．以下の問に答えよ．

(1) 三つのベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ に対して以下の式 (2) を証明せよ．

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot c = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2}$$

(2) 式 (2) を利用し、外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とで張られる平面に垂直なベクトルであることを示せ．

(鹿児島大 2006)　　(m20065403)

0.236 次の行列式と行列に関する問いに答えよ．

(1) 次の行列式の値を求めよ．
$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする．A^2, A^3, A^4, A^5 を求め，A^n を一般形で表せ．

(鹿児島大 2007)　　(m20075404)

0.237 次のベクトルと行列式に関する問いに答えよ．

(1) 次のベクトル $\boldsymbol{a}$ がベクトル $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ の一次結合で表すことができるための α, β の条件を求めよ．

$$\boldsymbol{a} = (0 \quad \alpha \quad \beta)\,, \qquad \boldsymbol{b}_1 = (2 \quad -1 \quad 1)\,, \qquad \boldsymbol{b}_2 = (2 \quad 1 \quad 3)$$

(2) 次の関係式を証明せよ．

$$\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix} = 2(b+c)(c+a)(a+b)$$

(鹿児島大 2008)　　(m20085404)

0.238 次の微分・積分を求めなさい.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\log\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|\right)$　　(2) $\displaystyle\int e^x\cdot\sin x\,dx$

(鹿児島大 2008)　　(m20085405)

0.239 行列 $\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}$ は以下の値とする.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{bmatrix}\quad,\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}6 & -5\\ 3 & -4\end{bmatrix}$$

(1) 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ を求めよ.　(2) 積 $\boldsymbol{AB}$ を求めよ.　(3) 行列式 $|\boldsymbol{A}|$ を求めよ.

(鹿児島大 2008)　　(m20085411)

0.240 (1) $|B|=\begin{vmatrix}7 & 3 & -5 & 4\\ 3 & 1 & -2 & 0\\ 5 & 4 & -5 & 2\\ 8 & 2 & 2 & 3\end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(2) $U=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & a\\ \frac{1}{2} & b\end{bmatrix}$ が直交行列になるように a,b を求めなさい.

(3) $A=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ を対角化せよ.

(鹿児島大 2008)　　(m20085413)

0.241 空間に直交座標系 (x,y,z) をとる. 点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ を含む平面の方程式は,

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ と書くことができる. 以下の設問に答えなさい.

(1) ベクトル (a,b,c) はこの平面に垂直であることを示せ.

(2) 点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ を含み, 異なる二方向ベクトル (u_1,v_1,w_1), (u_2,v_2,w_2) に平行な平面の方程式は

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ u_1 & v_1 & w_1\\ u_2 & v_2 & w_2\end{vmatrix}=0$$

で与えられることを示せ.

(鹿児島大 2009)　　(m20095403)

0.242 原点 $O(0,0)$, 点 $A(2,1)$ がある時, 以下の問いに答えなさい.

(1) 点 A に対して x 軸に関して線対称な点 B を求めなさい.

(2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$, $\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|$ を求めなさい. それらを使い $\angle AOB=\theta$ とした時の $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めなさい.

(3) 点 A を原点の周りに反時計回りに 45°回転させた点　C の座標を求めなさい.

(鹿児島大 2010)　　(m20105409)

0.243 直交座標系 $O-XYZ$ におけるベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ と $\boldsymbol{c}=(c_1,\ c_2,\ c_3)$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ により作られる三角形に余弦定理を適用して，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積について，$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ が成り立つことを示せ．ただし，θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角であり，また $|\boldsymbol{a}|$ と $|\boldsymbol{b}|$ はそれぞれ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の大きさを表し，$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$，$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2}$ である．

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積は $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$ と定義される．これより，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\ \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\ \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b})$ が成り立つことを示せ．

(鹿児島大 2011)　　(m20115403)

0.244 次の微分を求めなさい．

$$\frac{d}{dx}\left(\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right) \quad \text{（ただし，対数は自然対数とする.）}$$

(鹿児島大 2011)　　(m20115409)

0.245 直交座標系 $O-XYZ$ におけるベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$, $\boldsymbol{c}=(c_1,\ c_2,\ c_3)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは互いに直交になり，$|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$ であるとき，$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\ (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$ を求めよ．ただし，“×”はベクトルの外積を表し，$\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\ \boldsymbol{a}$, $|\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta$ である．$|\boldsymbol{a}|$ と $|\boldsymbol{b}|$ はそれぞれ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の大きさを表す．また，θ は $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へのなす角である．

(2) $\boldsymbol{a}=(2,\ -3,\ 1)$, $\boldsymbol{b}=(1,\ -2,\ 3)$, $\boldsymbol{c}=(1,\ 2,\ -7)$ であるとき，$\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{c}=10$ を満たすベクトル $\boldsymbol{A}$ を求めよ．ただし，“・”はベクトルの内積を表し，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ である．また，外積について $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$ にもなる．

(鹿児島大 2012)　　(m20125409)

0.246 次の行列式の値を求めなさい．

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 9 & 7 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

(鹿児島大 2015)　　(m20155409)

0.247 (1) 次の行列式の値を求めなさい．

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

(2) 次の行列 A に対して $A=A^{-1}$ が成り立つとする．このときの x と y を求めよ．ただし，x は自然数であり，y は整数であるとする．

$$A = \begin{pmatrix} x & -3 \\ 8 & y \end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2016)　　(m20165409)

0.248 次の行列式の値が 0 であるときの a を求めなさい．

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ a & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(鹿児島大 2017)　　(m20175409)

0.249 O を原点とする座標平面上に点 $P(1,2)$，点 $Q(3,3)$，点 $R(a,b)$ があるとき，以下の問いに答えなさい．

(1) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OR}$ を 2 辺とする四角形 $OPQR$ が平行四辺形となるときの a と b の値を求めなさい.

(2) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OR}$ が直交し $\left|\overrightarrow{OR}\right| = 1$ であるときの a と b の値を求めなさい. ただし, $a > 0$ とする.

(鹿児島大 2018) (m20185408)

0.250 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ の値を求めなさい.

(鹿児島大 2018) (m20185409)

0.251 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

(鹿児島大 2018) (m20185435)

0.252 (1) 次の行列の計算を求めよ.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

(3) 次の行列の余因子行列を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

(4) 次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

(鹿児島大 2021) (m20215412)

0.253 次の行列式の値を求めなさい. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

(室蘭工業大 2006) (m20065515)

0.254 次の等式が成り立つような k の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} k+1 & 6 \\ 2 & k-3 \end{vmatrix} = 0$

(2) $\begin{vmatrix} k+3 & -1 & 1 \\ 7 & k-5 & 1 \\ 6 & -6 & k+2 \end{vmatrix} = 0$

(室蘭工業大 2009) (m20095505)

0.255 以下の (1),(2),(3) に答えよ．

(1) 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ としたとき，行列の積 AB を求めなさい．

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & 8 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の階数を求めなさい．

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -x \\ 1 & -6 & 11 & 6 \end{vmatrix}$ が正となる実数 x の条件を求めなさい．

(室蘭工業大 2011) (m20115511)

0.256 3 つのベクトルが，以下のように与えられているとする．

$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

このとき，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ を求めよ．さらに，次の行列式を計算せよ．

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

(室蘭工業大 2015) (m20155509)

0.257 以下の行列式の値を求めなさい．

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

(室蘭工業大 2018) (m20185512)

0.258 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ を因数分解せよ．

(岡山県立大 2007) (m20075603)

0.259 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x^2)}{\sin x}$ を求めよ． (2) $f(x)=\log\left|\dfrac{x}{x+1}\right|$ を微分せよ． (3) $\displaystyle\int x\log x\,dx$ を求めよ．

(岡山県立大 2008) (m20085601)

0.260 以下の設問に答えよ. なお, 解答には導出過程を含むこと.

領域 $D: |x-2y|\leq 1,\ |x+3y|\leq 1$ のとき, 次の手順にしたがって, $\displaystyle\iint_D (x+y)^2 dxdy$ を求めよ.

(1) $x-2y=u,\ x+3y=v$ とし, $x,\ y$ を, u と v を用いて表せ.

(2) $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J|dudv$ の関係を用いて, $\displaystyle\iint_D (x+y)^2 dxdy$ を求めよ.

(香川大 2005)　　(m20055701)

0.261　以下のベクトル $\vec{v}$ の集合 V は，線形空間（ベクトル空間とも呼ぶ）である．V の次元と基底を求めよ．

$$V = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \;\middle|\; x,y,z,u \text{ は } \left\{ \begin{array}{c} x+2y+3z+u=0 \\ 2x+3y+z+2u=0 \\ 3x+5y+4z+3u=0 \\ x+y-2z+u=0 \end{array} \right. \text{ の解} \right\}$$

(香川大 2022)　　(m20225705)

0.262　次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & b & c \\ a & b & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}$$

(島根大 2005)　　(m20055804)

0.263　次の問に答えよ．

(1) 次の連立 1 次方程式が解をもつような a, b の値を求めよ. また, その時の解も求めよ.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 1 \\ -4x_1 + 2x_2 - 10x_3 + 12x_4 = a - 7 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = b + 2 \end{array} \right.$$

(2) 次の連立 1 次方程式が自明でない解をもつような a の値を求めよ.

$$\left\{ \begin{array}{l} ax_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + (a+2)x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + ax_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 2ax_4 = 0 \end{array} \right.$$

(3) 次の解空間の次元と 1 組の基を求めよ.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 0 \end{array} \right\}$$

(島根大 2005)　　(m20055810)

0.264　$u = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ について，次の問に答えよ．

(1) 行列式の値 u を求めよ．　(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ を求めよ．　(3) $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ を求めよ．

(4) $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ を求めよ．　(5) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ を求めよ．

(島根大 2006)　　(m20065802)

0.265 次の行列式の値を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 12 & 123 \\ 12 & 123 & 1234 \\ 123 & 1234 & 12345 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 4 & 10 \end{vmatrix}$

(島根大 2006)　　(m20065803)

0.266 次の関数 u は方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ を満たすことを示せ．

(1) $u=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$　　(2) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(島根大 2007)　　(m20075810)

0.267 (1) 次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ -5 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

(2) a を実数とし，

$$A=\begin{pmatrix} a & -3 & 1 & 1 \\ 5 & -8 & 3 & a \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，次の問いに答えよ．

(a) A の階数が 2 となるような a の値を求めよ．

(b) $V=\{v\in \boldsymbol{R}^4 \mid Av=0\}$,　$W=\{Av \mid v\in \boldsymbol{R}^4\}$ とおく．このとき，V は $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間，W は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間であることを示せ．

(c) (a) のとき，V, W の基底を一組ずつ求めよ．

(d) (a) のとき，$\{v_1,\ v_2\}$ を V の任意の基底とする．また，W の任意の基底 $\{w_1,\ w_2\}$ に対して，$v_3,\ v_4\ (\in \boldsymbol{R}^4)$ を

$$w_1=Av_3\ ,\quad w_2=Av_4$$

となるような任意のベクトルとする．このとき，$\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\}$ は $\boldsymbol{R}^4$ の基底であることを示せ．

(島根大 2008)　　(m20085801)

0.268 次の関数 $u=u(x,y,z)$ について $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ の値を求めよ．

(1) $u=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{vmatrix}$　　(2) $\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(島根大 2008)　　(m20085807)

0.269　次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

(島根大 2010)　　(m20105805)

0.270　次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 7 \\ 6 & 4 & 6 & 13 \\ 10 & 5 & 7 & 21 \end{vmatrix}$$

(島根大 2012)　　(m20125803)

0.271　$g(x)$ は $0 < \alpha \leqq x \leqq \beta$ で連続であり，

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ \alpha \leqq x + y \leqq \beta\}$$

とする．このとき，

$$\iint_D g(x+y)dxdy = \int_\alpha^\beta xg(x)dx$$

となることを証明せよ．

(島根大 2019)　　(m20195808)

0.272　次の行列式を因数分解せよ．

(1) $\begin{vmatrix} 2a+b+c & b & c \\ a & a+2b+c & c \\ a & b & a+b+2c \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$

(首都大 2003)　　(m20035902)

0.273　次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

(滋賀県立大 2022)　　(m20226004)

0.274　以下の問に答えよ．

(1) $f : (x, y) \longrightarrow (2x, -x+y)$ において線形変換 f が与えられているとき，f をあらわす行列 A を求めよ．

(2) $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & f(x) & f'(x) & f''(x) \\ 1 & g(x) & g'(x) & g''(x) \\ 1 & h(x) & h'(x) & h''(x) \\ 1 & k(x) & k'(x) & k''(x) \end{vmatrix}$ について，$\dfrac{dD(x)}{dx}$ を求めよ。

（ただし，$f(x)$ は x の関数，$f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}, f''(x) = \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$，$g(x), h(x), k(x)$ についても同様）

(宇都宮大 2004)　　(m20046102)

0.275　$\log x$ は自然対数を表すものとして，下の問いに答えよ．

問 1　C を積分定数とするとき，積分公式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C \quad (A \neq 0)$$

を証明せよ．

問 2　問 1 の公式を用いて関数 $y = y(x)$ に関する 1 階の微分方程式

$$y' = \sqrt{1+y^2}$$

の一般解を求め，さらに $x = 0$ のとき $y = 0$ となるもの（特殊解）を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

問 3　問 2 の特殊解を積分して

$$f(x) = \int_0^x y\,dx$$

を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(宇都宮大 2022)　　(m20226104)

0.276　複素数 x に関する次の方程式を解け．

$$\begin{vmatrix} x^2+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^2+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x^2+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x^2+1 \end{vmatrix} = 0$$

(はこだて未来大 2013)　　(m20136304)

0.277　行列式 $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & 8 \\ 8 & 4 & 7 & 10 \\ 11 & 6 & 9 & 19 \\ 10 & 6 & 8 & 18 \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2007)　　(m20076401)

0.278　(1)　行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

(2)　連立方程式 $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 3x + 4y + 3z - w = 2 \\ 6x + 7y + 5z + w = 1 \end{cases}$ を解け．

(東京海洋大 2008)　　(m20086401)

0.279　(1)　行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

(2) 連立方程式 $\begin{cases} 3x+4y+5z+7w = 6 \\ -x+4y+5z-\ w = -6 \\ 3x+3y-5z-2w = -2 \end{cases}$ を解け.

(東京海洋大 2009) (m20096401)

0.280 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 7 & 5 \\ 5 & 8 & 16 & 1 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(東京海洋大 2010) (m20106401)

0.281 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & 11 & 8 & 13 \\ 2 & 8 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ の値を求めよ

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(東京海洋大 2011) (m20116401)

0.282 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2012) (m20126401)

0.283 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(2) x, y, z に対する連立方程式 $\begin{cases} x\ -\ y+2z = 0 \\ ax-2y-7z = 0 \\ 3x-3y+az = 0 \end{cases}$ が非自明解を持つときの a の値を求め，そのとき連立方程式を解け.

(東京海洋大 2016) (m20166405)

0.284 $\begin{vmatrix} a & 2 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2 & a \end{vmatrix} = 0$ を満たす実数 a をすべて求めよ.

(東京海洋大 2021) (m20216405)

0.285 (1) $D = \left\{(x, y)\ \middle|\ 1 \leqq x \leqq 2,\ \sqrt{x} \leqq y \leqq x\right\}$ に対し，重積分 $\displaystyle\iint_D 2y\log x\ dxdy$ の値を求めよ.

(2) $E = \{(x, y) \mid 0 \leqq x + y \leqq 2,\ 0 \leqq x - y \leqq 1\}$ に対し，重積分 $\displaystyle\iint_E (x^2 - y^2)\, dxdy$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2021)　　(m20216410)

0.286 $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & 0 \\ a & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ となる a を全て求めよ．

(東京海洋大 2022)　　(m20226401)

0.287 次の各問いに答えなさい．ただし，i を虚数単位とする．

(1) $\dfrac{3-i}{4+3i}$ の実部の値を求めなさい．

(2) 複素数 $-1 + i\sqrt{3}$ の偏角の値を求めなさい．

(3) 複素関数 $f(z) = \dfrac{z^2 - \frac{1}{3}}{z^3 - z}$ について次の問いに答えなさい．

(a) $z^3 - z = 0$ の根を全て求めなさい．

(b) 円周 $\left| z - \dfrac{1}{2} \right| = 1$ に反時計回りの向きを与えた経路を C とする．複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)dz$ の値を求めなさい．

(和歌山大 2012)　　(m20126508)

0.288 関数 $f(x)$ に対する次式の積分をフーリエ変換と定義する．ただし，i は虚数単位，e は自然対数の基底である．

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx$$

また，2 つの関数 $g(x)$, $h(x)$ に対する次式の積分をたたみこみと定義する．

$$g(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-\alpha) h(\alpha) d\alpha$$

フーリエ変換およびたたみこみに関する次の (1)〜(3) に答えなさい．

(1) 次式で与えられる関数 $f_1(x)$ のフーリエ変換 $F_1(u)$ を求めなさい．

$$f_1(x) = \begin{cases} 1\,, & \left(x \leq \left| \dfrac{1}{2} \right| \text{の場合} \right) \\ 0\,, & \left(x > \left| \dfrac{1}{2} \right| \text{の場合} \right) \end{cases}$$

(2) 関数 $f_1(x)$ 同士のたたみこみによって得られる関数を $f_2(x)$ とする．関数 $f_2(x)$ を求め，その概略図を描きなさい．

(3) 関数 $f_2(x)$ のフーリエ変換 $F_2(u)$ を求めなさい．

(和歌山大 2017)　　(m20176509)

0.289 以下の行列式を計算せよ．

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(琉球大 2009)　　(m20096803)