[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　(::::)

0.1 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，

(1) 固有値を求めよ．

(2) 単位固有ベクトルを求めよ．

(3) $\exp(X)=E+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X^n}{n!}$ と定義されている時，$\exp(tA)$ を求めよ．ただし，t ： 定数

(北海道大 1997)　(m19970102)

0.2 ２次の正方行列 A を

$$A=\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix} \quad (0<p<1,\ 0<q<1)$$

とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) A の固有値をすべて求め，それぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(2) A を対角化せよ．

(3) A^n を求めよ．

(北海道大 2003)　(m20030103)

0.3 (1) 1 階微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ の一般解が $x=C\exp\left[\displaystyle\int^{y/x}\frac{du}{f(u)-u}\right]$ であることを示せ．ただし，C は任意定数，$u=\frac{y}{x}$ である．

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ．　$x\dfrac{dy}{dx}-y=xe^{y/x}$

(北海道大 2004)　(m20040101)

0.4 次の行列 A について以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} \quad (a\neq b,\ a,b\neq 0,\ a,b\in R)$$

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A のそれぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(3) A を対角化せよ．

(北海道大 2004)　(m20040103)

0.5 次の 2 階の微分方程式 ：

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=0 \ ,$$

は, $y_1=y$, $y_2=dy/dx$ の変数変換により,

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \ ,$$

と表せる．行列 ：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \ ,$$

の固有値・固有ベクトルを計算することにより，y_1 , y_2 の一般解を求めよ．

(北海道大 2005)　(m20050101)

0.6 2 階微分方程式 $2y\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 1$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $p = \dfrac{dy}{dx}$ とおくことにより，p と y についての 1 階微分方程式に変形しなさい．

(2) (1) で得られた 1 階微分方程式を利用して，一般解を求めなさい．

(北海道大 2006)　　(m20060101)

0.7 次の 3 次実正方行列 A について，以下の問いに答えなさい．　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(1) A の固有値を求めなさい．

(2) A のそれぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めなさい．

(3) A を対角化する行列 P を求め，A の対角化 $P^{-1}AP$ を求めなさい．

(北海道大 2006)　　(m20060102)

0.8 関数 f が (x, y, z) のスカラー関数であるとき，$\mathrm{grad}(f)$ という演算を以下のように定義します．

$$\mathrm{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}$$

ここで，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルです．以下の問に答えなさい．

(1) f, h が (x, y, z) のスカラー関数であるとき，h が 0 ではない領域で，
$\mathrm{grad}\left(\dfrac{f}{h}\right) = \dfrac{h \cdot \mathrm{grad}(f) - f \cdot \mathrm{grad}(h)}{h^2}$ であることを証明しなさい．

(2) (1) の結果を用いて，点 $(1, 1, 1)$ における $\mathrm{grad}\left(\dfrac{-x^2 + y^2 + z - 2}{x + y^2 - z + 1}\right)$ の値を計算しなさい．

(北海道大 2006)　　(m20060104)

0.9 次の微分方程式の解を求めたい．これに関して次の設問に答えよ．

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 4y$$
$$\frac{dy}{dt} = x - 2y$$

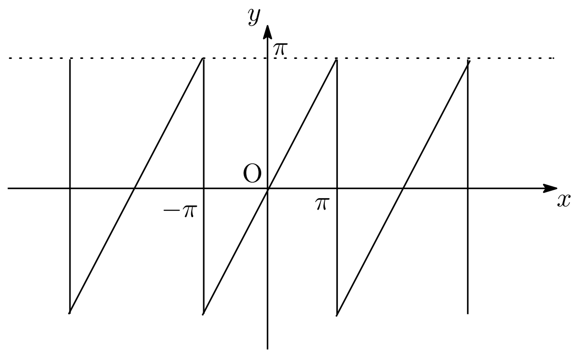
(1) この微分方程式の解の一つが，行列 $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ を用いて　$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp(\lambda t)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$
で表されるものとする．ただし，$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ はゼロ行列ではなく $u_1 + u_2 = 1$ を満たすものとする．
λ と $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ を求め（複数求まる場合は全て答えよ），一般解を示せ．

(2) $t = 0$ における $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ の初期値が $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ であるときの解を求めよ．

(北海道大 2007)　　(m20070101)

0.10 (1) 次の周期 2π の周期関数（下図参照）をフーリエ展開せよ．　$f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi)$

(2) $x = \dfrac{\pi}{2}$ とおいて，π を与える次の式を導出せよ．　$\pi = 4\left(1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \cdots\right)$



(北海道大 2007)　　(m20070104)

0.11　実数列 $a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$ が $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

を満たすとする．$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく時, 次の設問に答えなさい.

(1)　行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化する正則行列 $\boldsymbol{P}$ を求めなさい.

(2)　$\boldsymbol{A}^n$ を求めなさい.

(3)　$\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{a}_1$ が成り立つ（ただし，$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}$(単位行列) とする）ことに注意して，実数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めなさい.

(北海道大 2008)　　(m20080101)

0.12　z, w は複素数であり，$i = \sqrt{-1}$ である．また，x, y, r, θ は実数である.

(1)　複素数 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ が与えられたとき，$w^n = z$（n は正の整数）の根は n 個であり，

$$w_k = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1)$$

と表せることを示せ.

(2)　方程式 $w^5 = 1$ を満たす 1 つの解が，$w = \cos 72^\circ + i\sin 72^\circ$ と表せることを示せ　．また，$\cos 72^\circ$ の値を求めよ.

(3)　複素数 $z = x + iy$ が与えられたとき，関数 $w(z) = e^z$ が正則であることを証明せよ.

(北海道大 2009)　　(m20090101)

0.13　行列，$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ が与えられている．以下の問いに答えなさい.

(1)　$\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2)　$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^3 + \cdots + \boldsymbol{A}^{100}$ を計算しなさい．ここで，I は単位行列である.

(北海道大 2009)　　(m20090102)

0.14　区間 $[-\pi,\ \pi]$ で定義される関数を $f(x) = x^2$ とする. このとき, 以下の設問 (1), (2) に答えよ.

(1)　$f(x)$ をフーリエ級数展開せよ.

(2)　(1) の結果を利用して,

$$\pi^2 = 6 \times \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots\cdots\right)$$

を導出せよ.

(北海道大 2010)　　(m20100103)

0.15　次の行列 A について以下の設問 (1), (2) に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(1)　A の固有値とその固有ベクトルを求めよ.

(2)　A の対角化行列 $P^{-1}AP$ を求めよ. また, そのときの行列 P を示せ.

(北海道大 2010)　　(m20100104)

0.16　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1)　A の行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(2)　A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2005)　　(m20050205)

0.17　$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ とする.

(1)　行列式 $|A|$ の値を求めよ.　　(2)　逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2005)　　(m20050210)

0.18　次の行列 A の行列式の値 $\det A$ と逆行列 A^{-1} を求めよ.　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(北見工業大 2007)　　(m20070205)

0.19　$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とする. A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(北見工業大 2008)　　(m20080205)

0.20　平面の直交座標 (x, y) と極座標 (r, θ) の間には $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ の関係がある. ただし, $r > 0$ とする. $z = f(x, y)$ を平面上で定義された 1 回連続微分可能関数とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1)　$\dfrac{\partial z}{\partial r}$ および $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 等を用いて表せ.

(2)　$\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$ を示せ.

(北見工業大 2009)　　(m20090203)

0.21　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ につき以下の問いに答えよ.

(1)　行列 A の固有値をすべて求めよ.

(2)　各固有値に属する固有ベクトルをひとつ挙げよ.

(北見工業大 2009)　　(m20090205)

0.22 $f\ :\ R^2 \to R^3$ を線形写像とする．$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき，

$f(\boldsymbol{u}_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$，$f(\boldsymbol{u}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ であるとする．

任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる行列 A を求めよ．

(北見工業大 2010)　　(m20100204)

0.23 xyz 直交座標空間におけるある一次変換 f が，次のような行列 A で表されるとする．

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{6} & 3 \\ \sqrt{6} & -2 & -\sqrt{6} \\ 3 & \sqrt{6} & 1 \end{pmatrix}$$

また，x, y, z 方向を向く単位ベクトルをそれぞれ e_1, e_2, e_3 とする．次の各問に答えよ．

(1) A^2, A^3 を求めよ．

(2) 次のベクトル x_1 と x_2 は，1次変換 f により，どのようなベクトルに移されるか．

$$x_1 = e_1 + e_3, \qquad x_2 = \sqrt{3}e_1 - \sqrt{2}e_2 - \sqrt{3}e_3$$

(3) 次のような3つのベクトル $e_1{}', e_2{}', e_3{}'$ を考える．

$$e_1{}' = \frac{e_1 - e_3}{\sqrt{2}}, \qquad e_2{}' = e_2, \qquad e_3{}' = \frac{e_1 + e_3}{\sqrt{2}}$$

6つの内積 $e_1{}' \cdot e_1{}'$，$e_2{}' \cdot e_2{}'$，$e_3{}' \cdot e_3{}'$，$e_1{}' \cdot e_2{}'$，$e_2{}' \cdot e_3{}'$，$e_3{}' \cdot e_1{}'$ の値を求めよ．

(4) 基底のとりかたを e_1, e_2, e_3 から $e_1{}'$，$e_2{}'$，$e_3{}'$ に変えると，1次変換 f を表す行列は，どのような形になるか．

(5) 1次変換 f はどのような変換か，明確に述べよ．

(岩手大 1994)　　(m19940308)

0.24 t を実変数，x, y を未知関数とする次のような連立微分方程式を考える．

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 5y\,, \quad \frac{dy}{dt} = x - 2y \qquad (\mathbf{a})$$

この連立微分方程式は次のように書き表すことができる．

$$\frac{dr}{dt} = Ar \qquad (\mathbf{b})$$

ここで，行列 A と列ベクトル r は次のように与えられる．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

次の問に答えよ．

(1) 実定数を成分とする2行2列の正則行列 P を導入すると，上記の (**b**) が次のように書きかえられることを示しなさい．

$$\frac{dR}{dt} = BR \qquad (\mathbf{c})$$

ここで，B, R は P とその逆行列 P^{-1} を用いて次のように与えられる．

$$B = P^{-1}AP, \quad R = P^{-1}r$$

(2) P を次のようにとると，B が対角行列になることが分かった．

$$P = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

P の行列式 $det\, P$, P の逆行列 P^{-1}，および B を求めよ．

(3) 次式のように，列ベクトル R の成分を X, Y とする．

$$R = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

微分方程式 (**c**) を解き，X, Y のそれぞれを t の関数として表す一般解を求めよ．

(4) $t = 0$ において $x = x_0, y = y_0$ という初期条件を満足する連立微分方程式 (**a**) の解を求めよ．

(岩手大 1996)　　(m19960304)

0.25 x-y 平面上の半楕円

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \qquad (x \geqq 0) \cdots\cdots\cdots \text{(i)}$$

と x , y の関数

$$z = 2 + xy + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \qquad \cdots\cdots\cdots \text{(ii)}$$

を考える．ただし，半楕円上の点 (x, y) に対し，原点と点 $\left(\frac{x}{2} , \ y\right)$ を結ぶ線分が x 軸となす角を θ とする．次の問に答えよ．

(1) θ を媒介変数とする半楕円 (i) の媒介変数方程式を求めよ．θ のとる範囲も明示せよ．

(2) 条件 (i) のもとでの関数 (ii) の極値を求めるために，関数 (ii) を θ のみの関数として表せ．

(3) 前問で得られた θ の関数 $z = f(\theta)$ が極値をとる $\cos\theta$, $\sin\theta$ の値を求めよ．

(4) $z = f(\theta)$ の極値を求めよ．

(5) $f(0)$, $f\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．

(6) $z = f(\theta)$ のおよそのグラフを描け．

(7) 媒介変数 θ を用いずに，条件 (i) のもとでの関数 (ii) の極値を，ラグランジュの乗数法で求めたい．極値をとる (x, y) の値を求めるための条件式を書け．

(8) 極値をとる (x, y) の値を求めよ．

(岩手大 1998)　　(m19980308)

0.26 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ の和と積を求めよ．

(岩手大 1998)　　(m19980310)

0.27 次のような行列 A 考える．

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

ここで，a は実定数とする．次の問に答えよ．

(1) A^2, A^3 を求めよ．

(2) 一般の正の整数 n に対する A^n を求めよ．A^n の形を正しく推定し，数学的帰納法により証明すればよい．

(3) 行列 A に対し，A^0，指数関数 $\exp A$ を次のように定義する．

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

$\exp A$ を求めよ．なお，行列の無限級数の和を求めるためには，各成分ごとに無限級数の和を求めればよい．

(岩手大 1998)　　(m19980311)

0.28 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ. ただし, E は 2 次の単位行列である.

(1) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2) A^n を求めよ.

(3) $2A^2 - 3A + E = O$ を満たす, a の値をすべて求めよ.

(4) (3) で求めた a の値を代入して, $\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ.

（岩手大 2004）　　(m20040308)

0.29 3 つの行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

に関し, 次の問に答えよ.

(1) 行列の和 $A+B$ と差 $A-B$ および積 AB を求めなさい.

(2) 行列式 $|B|$ および $|C|$ の値を求めなさい.　　(3) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(岩手大 2006)　　(m20060302)

0.30 (1) 次の行列の積を求めなさい.

(i) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$　　(ii) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ のとき，次のものを求めなさい.

(i) A の行列式 $|A|$　　(ii) A の逆行列 A^{-1}

(3) 次の等式を証明しなさい.

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2+d^2+1$$

(岩手大 2008)　　(m20080302)

0.31 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に関して，次の問いに答えなさい.

(1) 次の式を計算しなさい.

(i) A の逆行列 A^{-1}　　(ii) $\left(A + 6A^{-1}\right)\left(A - 6A^{-1}\right)$

(2) 行列 A で表される一次変換を f とするとき，一次変換 f による直線 $y = 3x - 2$ の像の方程式を求めなさい.

(3) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(岩手大 2009)　　(m20090303)

0.32 関数 $z = \log\left(x^2 + 2y^2\right)$ について，次の問いに答えなさい．ただし，対数は自然対数である．

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めなさい．

(2) 変数 x, y が変数 r, θ の関数

$$x = r\cos\theta\ , \qquad y = r\sin\theta$$

で与えられるとき，$\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めなさい．

(3) (1) および (2) の結果を用いて，次の式が成り立つことを示しなさい．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(岩手大 2009)　　(m20090304)

0.33 1 階微分方程式

$$(x-1)\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

および 2 階微分方程式

$$(y-1)\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \cdots\cdots ②$$

について，次の問いに答えなさい．

(1) 微分方程式 ① の一般解を求めなさい．

(2) 微分方程式 ② に対して，$\dfrac{dy}{dx} = u$ と変数変換することにより，y の関数 u についての 1 階微分方程式を求めなさい．ただし，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{du}{dy}u$ である．

(3) (2) で求めた 1 階微分方程式の一般解を求めなさい．

(4) 微分方程式 ② の一般解を求めなさい．

(岩手大 2009)　　(m20090305)

0.34 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ に関して次の問いに答えなさい．

(1) 行列式 $|A|$ および逆行列 A^{-1} を求めなさい．

(2) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列であるような正則な 2 次正方行列 P をひとつ求めなさい．

(4) 任意の自然数 n に対し A^n を求めなさい．

(岩手大 2010)　　(m20100302)

0.35 次の行列の行列式を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(秋田大 2001)　　(m20010408)

0.36 次の $\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ．

行列 $\dfrac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ の逆行列は $\begin{pmatrix} \boxed{\text{(a)}} & \boxed{\text{(b)}} & \boxed{\text{(c)}} \\ \boxed{\text{(d)}} & \boxed{\text{(e)}} & \boxed{\text{(f)}} \\ \boxed{\text{(g)}} & \boxed{\text{(h)}} & \boxed{\text{(i)}} \end{pmatrix}$ である．

(秋田大 2002) (m20020404)

0.37 a を実数とし，$A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 3 \end{pmatrix}$ とする．

(1) A の固有値が，5 と 1 になるように，a の値を定めなさい．

(2) $a > 0$ であり，かつ，A の固有値が 5 と 1 であるとする．このとき，A の固有ベクトルで大きさ 1 のものを求めなさい．

(秋田大 2003) (m20030404)

0.38 行列 $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めなさい．

（秋田大 2004） (m20040404)

0.39 行列 $C = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ の階数を求めなさい．

（秋田大 2004） (m20040405)

0.40 $a,\ b$ を実数とし, $M = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & b \end{pmatrix}$ は, トレース（M の対角成分の総和のことで, $\mathrm{tr}(M)$ とも表記する）が 4 で, 行列式（ $\det(M)$ とか $|M|$ とか表記する）が -2 とする. そのとき次に答えなさい.

(1) a, b を求めなさい.

(2) 行列 M の固有値を全て求めなさい.

（秋田大 2004） (m20040406)

0.41 方程式 $x + y - z = 0$ を満たす 2 つのベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ で, 互いに一次独立になるものを一組挙げよ.

(秋田大 2005） (m20050402)

0.42 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ.

(2) 問題 (1) の行列 A に対して, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく. このとき,P の各列ベクトルが A の固有ベクトルであることを確かめ, $AP = PX$ となる行列 X を求めよ.

(3) 問題 (1) の行列 A の階数 (rank) と行列式 (determinant) を求めよ.

(秋田大 2005） (m20050403)

0.43 (1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ のとき, 行列 $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$ と, その行列式 (determinant) を計算せよ.

(2) 積分 $I = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy$ を計算せよ. ただし,R は正の定数で,D は領域 $x^2 + y^2 \leqq R^2$ を表す. 必要ならば問題 (1) の変数変換を用いよ.

(3) 半径 R の球の体積 V を, 上の問題 (2) の積分 I を用いて表せ. 理由も簡潔に述べること.

(秋田大 2005) (m20050406)

0.44 原点と点 $(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$ を頂点とする空間 $\boldsymbol{R}^3$ 内の立方体を，行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ で変換する．変換後の体積を求めよ．また，A は逆行列をもつか，簡潔な理由を添えて答えよ．

(秋田大 2006) (m20060402)

0.45 次の $\boxed{}$ に当てはまる整数を入れよ.

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ の階数は $\boxed{}$ である.

(2) 連立一次方程式 $\begin{cases} x + \ \ y - 3z = -9 \\ x - 2y + \ \ z = \ \ 0 \\ 3x + 2y + 2z = 34 \end{cases}$ の解は $x = \boxed{}$, $y = \boxed{}$, $z = \boxed{}$ である.

(秋田大 2007) (m20070402)

0.46 次の定積分を求め, $\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx = \frac{1}{\boxed{}}\left(\frac{\pi}{2} + \boxed{}\right)$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \cos x dx = \frac{\boxed{}}{12}$

(3) $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{4 - x^2}\, dx = \frac{\boxed{}}{3}$ (4) $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x-1}\, dx = \frac{\boxed{}}{15}$

(5) $\displaystyle\int_1^e \sqrt{x}\,\log x dx = \frac{2}{\boxed{}}\left(e^{\frac{3}{2}} + \boxed{}\right)$ (6) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx = 1 + \frac{\boxed{}}{e}$ (7) $\displaystyle\int_1^\infty x^2e^{-x}dx = \frac{\boxed{}}{e}$

(秋田大 2007) (m20070404)

0.47 a を実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ．また，A が正の値の固有値と負の値の固有値の両方を持つための a の値の範囲を求めよ.

(秋田大 2008) (m20080401)

0.48 (1) $x = u - w,\ y = u + w$ とおく．行列 $J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \end{pmatrix}$ と，その行列式を求めよ.

(2) D は平面内の領域で，次の 4 直線で囲まれているとする.

$y = x\ ,\quad y = -x\ .\quad y = x + 2\ ,\quad y = -x + 4$

このとき，積分 $\displaystyle\iint_D xy\, dxdy$ の値を求めよ.

(秋田大 2008) (m20080407)

0.49 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列を掃き出し法を用いて求めよ.

(秋田大 2009)　　(m20090405)

0.50 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値をすべて求めよ.

(秋田大 2009)　　(m20090406)

0.51 次のカッコ内に当てはまる整数を記入せよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の階数は $\boxed{(ア)}$ であり, A の固有値は, 小さい方から順に $\boxed{(イ)}$, $\boxed{(ウ)}$, $\boxed{(エ)}$ である.

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ の行列式の値は $\boxed{(オ)}$ である. B の逆行列について, B^{-1} の $(2,1)$ 成分は $\boxed{(カ)}$ である。

(秋田大 2010)　　(m20100401)

0.52 次の極限を求め，カッコ内に当てはまる整数を記入せよ.
以下の arcsin は逆正弦関数のことで, $\sin^{-1}$ と表されることもある.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \boxed{(キ)}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+1}\right) = \frac{1}{\boxed{(ク)}}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(2x)}{x} = \boxed{(ケ)}$

(秋田大 2010)　　(m20100402)

0.53 ２行２列の行列 $P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ と $Q = I - P$ について，次の問いに答えよ．ただし，I は２行２列の単位行列である．

(1) 点 P^{-1} が存在する条件を書き，そのとき P^{-1} を求めよ．

(2) 正の整数 n に対して，$Q^n = (p+q)^{n-1}Q$ を証明せよ．

(3) $|P+q-1| < 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} P^n$ を求めよ．

(東北大 1993)　　(m19930504)

0.54 ２行２列の行列 P と単位行列 E をそれぞれ

$$P = \begin{pmatrix} 1+\cos x & \sin x \\ \sin x & 1-\cos x \end{pmatrix} \quad , \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) P^2 を計算せよ．

(2)　正整数 n に対して P^n を求めよ．

(3)　正整数 n に対して $(P+E)^n$ を求めよ．

(東北大 1994)　　(m19940503)

0.55　2 行 2 列の行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ から 4 行 4 列の行列

$$C=\begin{pmatrix} ae & af & be & bf \\ ag & ah & bg & bh \\ ce & cf & de & df \\ cg & ch & dg & dh \end{pmatrix}$$

を作り，$C=A\otimes B$ と表わす．$X=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とおいて，次の問いに答えよ．

(1)　$X\otimes Y$, $Y\otimes X$ を求めよ．

(2)　$X^{-1}\otimes Y^{-1}$ を求めよ．ただし，A^{-1} は行列 A の逆行列を表わす．

(3)　(1) で求めた 4 行 4 列の行列 $X\otimes Y$ の固有値を求めよ．

(東北大 1995)　　(m19950503)

0.56　3 つの 1 次変換を f,g,h とし，これらを表す行列をそれぞれ A,B,C とおく，また，任意の点 $P(x,y)$ の 2 つの合成変換 $f\circ h$, $h\circ g$ を $f\circ h(P)=f(h(P)), h\circ g(P)=h(g(P))$ と定義し，$f\circ h=h\circ g$ が成立するとする．$A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ ，$C=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ であるとき，次の問いに答えよ．ただし，a は $a\neq 0$ の実定数とする．

(1)　点 P の変換 h により移される点を P' とする．P' の原点からの距離は，P の原点からの距離に等しいことを示せ．

(2)　g を表す行列 B を求めよ．

(3)　円 $x^2+y^2=1$ 上の点 Q の変換 $f\circ h$ により移される点を Q' とする．Q' の原点からの距離の最大値と最小値を求めよ．

(東北大 1996)　　(m19960503)

0.57　点 $X(x,y)$ を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる点を $X'(x',y')$ とする．

(1)　OX の長さは r であり，OX の方向は x 軸の正のむきを原点 O のまわりに α だけ回転した方向にあるとする．このとき，x,y,x',y' を r,α,θ により表わせ．ただし，角 θ と角 α の回転の方向は同一であるとする．

(2)　$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表わすとき，2×2 行列 T は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となることを示せ．

(3)　点 $A(x_1,y_1)$，点 $B(x_2,y_2)$ と原点 O からなる三角形 OAB を考える．三角形 OAB を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる三角形を $OA'B'$ とする．三角形 OAB の面積 S と三角形 $OA'B'$ の面積 S' を与える公式

$$S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|,\quad S'=\frac{1}{2}|x_1'y_2'-x_2'y_1'|$$

を用いて，$S=S'$ であることを示せ．

(4)　上記 (3) で定義した三角形 $OA'B'$ の辺 $A'B'$ が直線 $y'=1$ 上に位置し，$S'=\dfrac{1}{2}$ であるとする．この場合に，x_1,y_1,x_2,y_2 が満たすべき条件を示せ．

(5) 上記 (4) において，さらに，$x_1'=0,\ x_2'>0,\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$ とする．三角形 OAB を図示せよ．

(東北大 2001)　　(m20010503)

0.58 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は以下のように与えられる．

$$f(x)\sim f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\cdots$$

ただし，f' と f'' は，それぞれ f の導関数と第 2 次導関数を示す．

(1) 関数　$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$　をマクローリン展開し，x^2 の項まで示せ．

(2) 以下の関係が成り立つことを示せ．

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{Tan}^{-1}x\right)=\frac{1}{1+x^2}$$

ただし，関数 $y=\mathrm{Tan}^{-1}x$ は，関数 $y=\tan x$ の逆関数であり，原点を通る．

(3) 関数　$F(x)=\mathrm{Tan}^{-1}x$

について，$-\infty<x<\infty$ での増減・極値・グラフの凹凸・変曲点を調べよ．

(4) $y=F(x)$ のグラフの概形を描け．

(東北大 2003)　　(m20030501)

0.59 関数 $f(x)$ は，微分方程式

$$x^2\frac{d^2f(x)}{dx^2}-2x\frac{df(x)}{dx}+2f(x)=0\qquad(x\geqq\ 1)\tag{a}$$

および，初期条件

$$x=1\text{ のとき}\quad f=1\,,\ \frac{df}{dx}=0\tag{b}$$

を満たす．このとき，以下の問 (1)〜(5) に答えよ．

(1) 方程式 (a) は，変数変換 $t=\log x$ によって，以下の微分方程式に帰着することを示せ．

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}-3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=0\tag{c}$$

また，初期条件 (b) は，

$$t=0\text{ のとき}\quad y=1\,,\ \frac{dy}{dt}=0\tag{d}$$

となることを示せ．

(2) 方程式 (c) の一般解は

$$y(t)=C_1e^{\lambda_1t}+C_2e^{\lambda_2t}\tag{e}$$

で与えられる．方程式 (c) および初期条件 (d) を満たす実数 $\lambda_1,\lambda_2,C_1,C_2$ を求めよ．

(3) 初期条件 (b) のもとで方程式 (a) の解を求めよ．

(4) $z(t)=\dfrac{dy(t)}{dt}$ と定義する．いま，適切な $2\times\ 2$ 行列 A を定義すれば，方程式 (c) は

$$\begin{pmatrix}\dfrac{dy(t)}{dt}\\[2mm]\dfrac{dz(t)}{dt}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$$

と表される．行列 A を求めよ．

(5) 行列 A の固有値を求め，問 (2) で求めた λ_1,λ_2 と比較せよ．

(東北大 2003)　　(m20030502)

0.60 行列 A を $A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&4\end{pmatrix}$ で定義する．

(1) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 行列 A によって表される xy 平面上の線形変換を f とする．直線 $y=ax$ 上の任意の点の f による像が同じ直線 $y=ax$ 上にあるような a の値を求めよ．

(3) 行列 U を $U=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ で定義する．このとき，$U^n=\begin{pmatrix}\alpha^n & n\alpha^{n-1}\\ 0 & \alpha^n\end{pmatrix}$ が成り立つことを証明せよ．ただし，n は自然数，α は 0 でない実数とする．

(4) 行列 P を $P=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ で定義する．このとき，$P^{-1}AP$ を求めよ．また，その結果と問 (3) で証明した式を用いて A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(東北大 2003)　　(m20030503)

0.61 2 次曲線 C : $3x^2-2\sqrt{3}xy+5y^2-18=0$ は, 行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 5\end{pmatrix}$, ベクトル $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ を用いて, ${}^t\boldsymbol{pAp}-18=0$ と表すことができる. ただし, ${}^t\boldsymbol{p}=(x \quad y)$ である.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1, λ_2 を求め, それぞれに対応する大きさ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{p}'=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$ とし, ある行列 $\boldsymbol{U}$ を用いて, 線形変換 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{Up}'$ を行えば, 2 次曲線 C は標準形になる. 行列 $\boldsymbol{U}$ を求め, 2 次曲線 C の標準形を x', y' を用いて表せ.

(3) x 軸と x' 軸のなす角度を求め, x 軸 , y 軸と x' 軸 , y' 軸の関係を図示し，2 次曲線 C の概形を描け.

(東北大 2005)　　(m20050501)

0.62 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{x}\neq 0$ において関数 f を

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{|\boldsymbol{x}|},\quad |\boldsymbol{x}|=\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2}$$

で定義する. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $\nabla f=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\dfrac{\partial f}{\partial x_2},\dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right)$, および $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_3}^2}$ を求めよ.

(2) $\varepsilon>0$ に対して, $S_\varepsilon=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\ ;\ |\boldsymbol{x}|=\varepsilon\}$ とする. S_ε に沿う表面積分

$$\int_{S_\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S_ε 上の単位外向き法線ベクトルであり, $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}=\nabla f\cdot\boldsymbol{n}$ は f の $\boldsymbol{n}$ 方向への微分を表す.

(3) S を原点 O を内部に含む $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな閉曲面とするとき, S に沿う表面積分

$$\int_{S}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S 上の単位外向き法線ベクトルである.

(東北大 2005)　　(m20050505)

0.63 $\mathbb{R}^3$ において x, y の標準内積を (x,y) で表す. 3 次実対称行列 A を

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

で定める. このとき, 次の問に答えよ.

(1) A は相異なる正の固有値 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$ を持つ. λ_1, λ_2, λ_3, および それらに対する長さ 1 の固有ベクトル ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 をそれぞれ求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の一次変換 $f_j \quad (j=1,2,3)$ を

$$f_j \;:\; x \mapsto (x\,,\,\phi_j)\phi_j\,, \quad j=1,2,3$$

で定める. $\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する f_j の表現行列を P_j とするとき,

$$P_j^2 = P_j\,, \quad j=1,2,3$$

$$P_jP_k = O\,, \quad j \neq k \text{ のとき}$$

を示せ. ただし, O は零行列である.

(3) $m=1,2,\cdots$ に対して, 行列 B を

$$B = \lambda_1^{\frac{1}{m}}P_1 + \lambda_2^{\frac{1}{m}}P_2 + \lambda_3^{\frac{1}{m}}P_3$$

と定めるとき, $B^m = A$ が成り立つことを証明せよ.

(東北大 2005) (m20050506)

0.64 (1) a,b,c,p,q,r を実数とし,

$$D = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}\,, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく．任意の自然数 k に対し,

$$(D+N)^k = D^k + M\,, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表されることを示せ．ただし, α, β, γ は適当な実数である．

(2) ３次正方行列 A がある自然数 n に対して $A^n = O$ を満たすとき, $A^3 = O$ であることを示せ．ただし, O は零行列である．

(東北大 2006) (m20060504)

0.65 t を実数とし，２つの関数 $x=x(t)$, $y=y(t)$ により与えられる xy 平面上の点 $P\,(x(t),y(t))$ を考える．$x(t)$ および $y(t)$ が以下の連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \alpha y \end{cases}$$

および初期条件

$$(x(0),y(0)) = (1,1)$$

を満足するとする．ただし，α は実数の定数である．以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha = 0$ のとき，与えられた連立微分方程式の解 $x(t)$ および $y(t)$ を求めよ.

(2) $\alpha \neq 0$ のとき，与えられた連立微分方程式の解 $x(t)$ および $y(t)$ を求めよ.

(3) $t\ (t \geqq 0)$ が変化するとき，点 P が描く曲線の概形を $\alpha > 0,\ \alpha = 0,\ \alpha < 0$ の場合について描け.

(東北大 2008) (m20080502)

0.66　３行３列の行列 A と B を以下のように与える．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

このとき，行列 A と B の和 $(A+B)$，差 $(A-B)$，積 $(A*B)$ を計算せよ．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970607)

0.67　行列 $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ の成分について

$$a^2 + b^2 + c^2 = {a'}^2 + {b'}^2 + {c'}^2 = {a''}^2 + {b''}^2 + {c''}^2 = 1$$

$$aa' + bb' + cc' = aa'' + bb'' + cc'' = a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0$$

が成り立っている．このとき

(1)　M の行列式の値を求めよ．

(2)　$a^2 + {a'}^2 + {a''}^2 = b^2 + {b'}^2 + {b''}^2 = c^2 + {c'}^2 + {c''}^2 = 1$

$ab + a'b' + a''b'' = ac + a'c' + a''c'' = bc + b'c' + b''c'' = 0$

が成り立っていることを示せ．

ヒント：M と，M の転置行列との積を考えよ．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970608)

0.68　２行２列の行列 C と D を以下のように与える．

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(1)　行列 C の特性方程式 $\det(C - xI) = 0$ を書き下し，その根を求めよ．ただし，$\det(C - xI)$ は行列 $C - xI$ の行列式を表し，I は２行２列の単位行列である．すなわち $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$．

(2)　D の n 乗 (D^n) を求め，そのトレース $\mathrm{tr}(D^n)$ を計算せよ．ただし，$\mathrm{tr}D$ とは行列 D の対角成分の和を表す記号である．

(3)　C の n 乗 (C^n) のトレース $\mathrm{tr}(C^n)$ の値を $n = 1, 2, 3$ の場合に求めよ．

この結果を (2) と比較し，一般の n の場合のトレース $\mathrm{tr}(C^n)$ の値を予想せよ．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970609)

0.69　3 次対称行列 A を次で与える．　$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(1)　A の固有値を求めよ．

(2)　A の固有ベクトルから成る $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底を求めよ．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970610)

0.70　実 n 次元ベクトル空間を $\mathbf{R}^n$ で表す．$\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ への線形写像 f，$\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^4$ への線形写像 g は，それぞれ次の行列 A, B で表されるものとする．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) f と g の合成写像 $g \circ f$ によって $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ がうつされる $\mathbf{R}^4$ のベクトルを求めよ．

(2) $f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をみたす $x \in \mathbf{R}^3$ を求めよ．

(3) g による像空間 $\mathrm{Im}\ g$ の次元を求めよ．ここで $\mathrm{Im}\ g$ は

$$\mathrm{Im}\ g = \{g(x) \in \mathbf{R}^4 \mid x \in \mathbf{R}^3\}$$

で定義される．

(お茶の水女子大 1997)　(m19970611)

0.71 次の各問に答えよ．

(1) $\tan x \left(\dfrac{-\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \right)$ の逆関数を $\tan^{-1} x(-\infty < x < \infty)$ で表す．$\tan^{-1} x$ の導関数を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 - 6x + 13} dx$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+(n-1)^2} \right) = \frac{\pi}{4}$ となることを示せ．

（お茶の水女子大 1999）　(m19990606)

0.72 次の $\mathbf{R}^3$ の 3 つのベクトルについて以下の問に答えよ．

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ z \\ -1 \end{pmatrix}$$

(1) これらが一次従属であるための x, y, z についての必要十分条件を求めよ．

(2) (1) の条件が満たされるとき，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が，この 3 つのベクトルの一次結合で表されるための x, y, z についての必要十分条件を求めよ．

（お茶の水女子大 1999）　(m19990608)

0.73 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような $3\times\ 3$ 行列 P を一つ求めよ．

（お茶の水女子大 1999）　(m19990609)

0.74 (1) 関数 $\sin x$, $\sin^2 x$ および $x^2 - \sin^2 x$ の原点における Taylor 展開を 4 次の項まで示せ．ただし，$\sin^2 x$ は $(\sin x)^2$ の意味である．

(2) 必要なら上の計算を利用して，不定形の極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$ を計算せよ．

（お茶の水女子大 2000）　(m20000606)

0.75 (1) ４次元の実数ベクトル空間 R^4 のベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の中に一次独立なものは何本あるか？

(2) 上のベクトルが張る R^4 の線形部分空間に対する直交補空間を示せ．ただし，内積は通常のユークリッド内積とする．

（お茶の水女子大 2000） (m20000610)

0.76 a を $0 \leq a \leq 1$ なる実定数とする．２次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ に対して，A^n を計算し，その $n \to \infty$ における極限を示せ．

（お茶の水女子大 2000） (m20000611)

0.77 実数を成分とする 2×2 行列 A に対し，その転置行列 ${}^tA$ を右から掛けると，

$$A \cdot {}^tA$$

が単位行列になるという．

(1) A はどんな行列か．

(2) 平面上の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ はどんな点になるか，位置関係を図形的に説明せよ．

（お茶の水女子大 2000） (m20000612)

0.78 (1) 次の対称行列の固有値と固有ベクトルを全て求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

(2) n 行 n 列の実対称行列 A の，n 個の固有ベクトル $b_1, \cdots, b_n$ が，全て求まったとしよう．ベクトル $b_1, \cdots, b_n$ はそれぞれ列ベクトルとし，互いに直交するように取った．次に，列ベクトル $b_1, \cdots, b_n$ を横に並べて作った，n 行 n 列の行列を B としよう．即ち，$B = (b_1, \cdots, b_n)$．このとき，行列の積 B^TAB は対角行列であることを証明せよ．但し，B^T は B の転置行列を表すものとする．

（お茶の水女子大 2000） (m20000614)

0.79 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって表される線型写像 $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ を考える．

(1) 空間 $\mathbf{R}^3$ の中の平面 $x - 3y - 2z = 0$ をパラメーターを使って表せ．

(2) (1) の平面はこの線型写像で何に写されるか．

(3) この線型写像で $\mathbf{R}^2$ 内の直線 $2x + 5y = 0$ に写ってくるもとの空間 $\mathbf{R}^3$ の図形（すなわち原像）を求めよ．

（お茶の水女子大 2000） (m20000615)

0.80 A を与えられた実係数 n 次正方行列とするとき，以下の問に答えよ．

(1) 零ベクトル o ではないあるベクトル

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

とある自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して $A^m x = o$ が満たされるとき，A は正則行列ではないことを示せ．

(2) $A^n \neq O$（n は行列 A の次数）かつ $x \neq o$ であるが，$A^n x = o$ となるような行列 A とベクトル x の組の例を挙げよ．

(3) あるベクトル $x \neq o$ に対して (1) のような仮定が満たされているとする．

$$k = k(x) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid A^m x = o\}$$

とおくとき，k 個のベクトル $x, Ax, \cdots, A^{k-1}x$ は一次独立であることを証明せよ．

(4) $A^m = O$ がある自然数 m に対して満たされているならば，$k \leq n$ となる自然数 k で $A^k = O$ となるものが存在することを示せ．

（お茶の水女子大 2001）　(m20010607)

0.81 以下に与えられる 3 行 3 列の行列 A を考える．

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

また，xyz 座標系の基底ベクトルを $\overrightarrow{e_x}$，$\overrightarrow{e_y}$，および $\overrightarrow{e_z}$ と表す．

$$\overrightarrow{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) $A\overrightarrow{e_x}$，$A\overrightarrow{e_y}$，および $A\overrightarrow{e_z}$ を計算せよ．

(2) 行列式 $detA$ を計算せよ．

(3) 逆行列 A^{-1} を求めよ．

(4) 基底ベクトル $\overrightarrow{e_x}$，$\overrightarrow{e_y}$，および $\overrightarrow{e_z}$ を三辺とする立方体を考える．変換 A によって，その体積は何倍に変換されるか．

（お茶の水女子大 2001）　(m20010610)

0.82 (1) 2 変数関数 $g(x,y)$ が 2 回連続微分可能であるとき，それと $x = f_1(r,\theta) = r\cos\theta$, $y = f_2(r,\theta) = r\sin\theta$ の合成関数 $h(r,\theta) = g(r\cos\theta, r\sin\theta)$ について次の等式が成立することを示せ．ただし，$r \neq 0, (x,y) \neq (0,0)$ とする．

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

(2) 2 変数関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) の近傍 $V = \{(x,y) | \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r\}$ で 2 回連続微分可能であるとする．次の条件

$$\frac{\partial}{\partial x} f(a,b) = \frac{\partial}{\partial y} f(a,b) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(a,b) > 0\,,\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(a,b) \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(a,b) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(a,b)\right)^2 > 0$$

を満たすとき，$f(x,y)$ は (a,b) で極小であることを示せ．すなわち，
$U = \{(x,y) | \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r'\}$ $(r' \leq r)$ があって，$(x,y) \in U - \{(a,b)\}$ ならば $f(x,y) > f(a,b)$ が成り立つことを示せ．

(お茶の水女子大 2003)　(m20030607)

0.83 (1) 実対称行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値がすべて正である条件を書け．

(2) (1) の条件のもとで次の重積分を計算せよ．ただし，必要なら $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ を用いてよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}dxdy$$

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030608)

0.84 次の正方行列 A, B, C を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

(1) A, B, C の階数を求めよ．

(2) A, B, C に逆行列が存在すれば求めよ．

(3) n 次正方行列 A について，次の 2 つの命題を考える：

(a) A^{-1} が存在する．　　(b) A の階数が n である．

この 2 つの命題の関係は次の 1), 2), 3) のうちのどれか？理由とともに答えよ．

1) 同値

2) 一方が他方の十分条件であるが，必要条件でない．

3) 1),2) のいずれでもない．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030610)

0.85 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを計算せよ．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030612)

0.86 (1) 実対称行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値がすべて正である条件を書け．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030613)

0.87 行列 A の固有値 λ と固有ベクトル ψ は，

$$A\psi = \lambda\psi$$

という関係式を満足する．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{ab} \\ \sqrt{ab} & a-b \end{pmatrix}$$

ただし，a, b は正の実数とせよ．

(2) エルミート行列の固有値は，実数であることを証明せよ．ただし，エルミート行列 H とは，複素数の成分をもつ行列であり，転置して複素共役を取った（これをエルミート共役を取るという）行列が，もとの H と一致する行列である．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030614)

0.88 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，次のような複素 n 次正方行列 $N,\ J_\lambda(n)$ を考える．

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad J_\lambda(n) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

(1) 自然数 k に対して N の k 乗 N^k を求めよ．

(2) 自然数 k に対して $J_\lambda(n)^k$ を求めよ．

(3) 複素正方行列 A が対角化可能であることの定義を述べよ．

(4) 複素正方行列 A がある自然数 k に対して $A^k = E$ を満たすならば A は対角化可能であることを示せ．ただし E は単位行列である．必要ならば次の定理を用いてもよい．

定理 任意の複素 l 次正方行列 A に対して l 次正則行列 P，m 個の複素数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ および m 個の自然数 $n_1, \ldots, n_m$ で $\sum_{i=1}^m n_i = l$ を満たすものが存在して

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1}(n_1) & & & \\ & J_{\lambda_2}(n_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_m}(n_m) \end{pmatrix}$$ と書ける．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030615)

0.89 (1) 線形写像の定義を書きなさい．

(2) 次の写像 f が線形写像でないならば線形写像でないことを証明し，線形写像ならば f を表す行列と，f の核 (Ker$f$) と像 (Imf) を求め，それぞれの次元を調べなさい．

(a) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x-3y \end{pmatrix}$，　(b) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3 \\ 2y+z-4 \end{pmatrix}$

（注）ただし，線形空間 V から W への線形写像 $F: V \to W$ の核とは，$\mathrm{Ker}F = \{\boldsymbol{v} \in V | F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$ のことで，像とは $\mathrm{Im}F = \{F(\boldsymbol{v}) \in W \mid \boldsymbol{v} \in V\}$ のことである．また，$\boldsymbol{0}$ は零ベクトルを表す．

(お茶の水女子大 2007)　　(m20070603)

0.90 次の行列 A について，行列式，逆行列，固有値と固有ベクトル空間の基底を求めなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2007)　　(m20070604)

0.91 (1) $(-1,1)$ を定義域とする関数 f を，$f(x) = \arctan x + \arctan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ で定める．ただし，$\arctan x$ は，$\tan x \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数とする．

(a) $f'(x)$ を求めよ．

(b) $\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$ を示せ．

(2) g を $(-1,1)$ 上で定義された C^2級関数とする ．g のテイラー展開あるいはロピタルの定理を用いて

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h) + g(2h) + g(-3h) - 3g(0)}{h^2} = 7g''(0)$$

を示せ（ただし，ロピタルの定理を用いる際は，定理の仮定を満たしていると確認する事）．

(3) h を $(-2, 2)$ 上で定義された C級関数とする . $h(0) = 0$ であれば，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{h(x)}{x^{3/2}}\,dx$ が存在することを示せ．

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090601)

0.92 (1) 正方行列 A と B がともに上三角行列であるとき，積 AB もまた上三角行列となることを示せ．

(2) 次の行列 A について以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) A の固有値を求め，それぞれの固有値に対する A の固有空間の基底を一組求めよ．

(b) 適当な正則行列 P を求めて $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにせよ．

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090602)

0.93 $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f は，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} を \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} に，\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} を \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} に，\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} を \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} に，$$

それぞれ写すとする．

(1) ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の線形写像 f による像を求めなさい．

(2) 線形写像 f で $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ に写される $\mathbb{R}^3$ の元を求めなさい．

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090605)

0.94 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求め対角化しなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090606)

0.95 行列

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値，および，独立な固有ベクトルをすべて求めよ

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090607)

0.96 次の行列で定められる $\mathbb{R}^4$ の線形変換の核と像を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & 4 & 7 \\ -2 & -4 & -7 & -6 \\ -1 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(お茶の水女子大 2010)　　(m20100604)

0.97 (1) n を自然数とする. 複素数を成分とする n 次正方行列が n 個の相異なる固有値を持てば, 対角化可能であることを示せ.

(2) a, b, c, d を複素数とする. 2 次正方行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

が対角化できるための必要十分条件を a, b, c, d の関係を用いて表せ.

(お茶の水女子大 2010) (m20100605)

0.98 二次元平面上で x- y座標軸を反時計回りに θ だけ回転させた座標軸を x'- y' とする. ある点 P の位置 (x, y) はこの新しい座標軸では (x', y') と表されるが, 両者の間には次のような関係がある :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad ①$$

以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A とその転置行列 A^T の積 AA^T を求めよ.

(2) 行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad ②$$

とするとき, BB^T は前問の AA^T に等しいことを示せ. また, A が 2 次元平面上での座標軸の回転を表していたのに対し, B は何を表すかを説明せよ.

(3) A, B のような行列は直交行列と呼ばれる. 前問で見たような行列 A と B の違いは直交行列のどのような性質によるのか、答えよ.

(お茶の水女子大 2010) (m20100606)

0.99 3 次元の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \qquad ④$$

に対して, 以下の問いに答えよ. ここで $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルである。また $r = |\boldsymbol{r}|$ である.

(1) $\dfrac{\partial r}{\partial x}$, $\dfrac{\partial r}{\partial y}$, $\dfrac{\partial r}{\partial z}$ を求めよ.

(2) $\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ の発散, $\nabla \cdot \left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$ を求めよ $(r \neq 0)$. ただし, $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$ である.

(お茶の水女子大 2010) (m20100608)

0.100 次の行列 A で表される線形写像 f を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) f の核 $(\mathrm{Ker}\, f)$ の基底と次元を答えなさい.

(2) f の像 $(\mathrm{Im}\, f)$ の基底と次元を答えなさい.

(注) ここで, 線形空間 V から W への線形写像 $F : V \to W$ の核とは, $\mathrm{Ker}\, F = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$ のことで, 像とは $\mathrm{Im}\, F = \{f(\boldsymbol{v}) \in W \mid \boldsymbol{v} \in V\}$ のことである. また, $\boldsymbol{0}$ は零ベクトルを表す.

(お茶の水女子大 2010) (m20100611)

0.101　次の実対称行列 B の固有値, 固有ベクトルを求め, 直交行列により対角化しなさい.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(お茶に水女子大 2010)　　(m20100612)

0.102　数列 $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ がある．この数列の 隣接した 3 項の間には次のような関係式が成り立つ．

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

(1) $a_0 = a_1 = 1$ として，極限値

$$\tau = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

を求めよ．

(2) 上の漸化式をベクトルおよび行列の関係式を用いると

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

と書かれる．この行列を対角化し，またその時の固有ベクトルを求めることにより， $a_0 = a_1 = 1$ を初期値とした極限値

$$\tau = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

を求めよ．また a_n の一般項はどのように書けるか．

(東京大 1997)　　(m19970703)

0.103　x-y 平面上を，ある一つの点が移動している．

時刻 $t = i$ (i は整数) におけるこの点の位置を $\mathbf{p}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ と表すとき，

$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ ，$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \end{pmatrix}$ ，$\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 50 \\ 35 \end{pmatrix}$ であった．

また，$\mathbf{p}_{i+1} = A\mathbf{p}_i$ (A は行列) に従っているものとする．

(1) 行列 A を求めよ．

(2) A^n を求め，時刻 $t = n$ (n は整数) におけるこの点の位置 $\mathbf{p}_n$ を求めよ．

(東京大 1998)　　(m19980702)

0.104　$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ 　を満たす実数 λ と非零ベクトル $\boldsymbol{u}$ の組をすべて求めよ.

(2) 2 点 P, Q と原点 O を頂点とする三角形 OPQ の各頂点の位置ベクトルが A によって一次変換されるとき, その三角形の面積が何倍になるか答えよ.

(東京大 2001)　　(m20010701)

0.105　(1) 複素変数の指数関数 e^x の級数展開は次式で表される.

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

上式を利用して, $\cos z$, $\sin z$ の級数展開を求めよ.

(2) 次の複素関数を特異点 $z=0$ のまわりでローラン展開し $f(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ の形で表せ. また, 特異点の種類を答えよ.

$$f_1(z)=z\sin\left(\frac{1}{z}\right), \qquad f_2(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}, \qquad f_3(z)=\frac{1}{z^2(1-z)}$$

(3) 次の積分を求めよ.

$$I=\oint_C f_3(z)dz$$

ただし, 積分路 C は複素平面上で原点を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を反時計回りに一周するものとする.

(東京大 2001)　　(m20010703)

0.106 p,q を任意の実数とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) 行列 $A=\begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$ について，$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ を満たす実数 λ と非零ベクトル $\boldsymbol{x}$ の組をすべて求めよ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を，次の漸化式で与える. $\begin{cases} a_{n+1}=(1-p)a_n+qb_n \\ b_{n+1}=pa_n+(1-q)b_n \end{cases}$

ただし，$0<p<1$, $0<q<1$ とし，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の初項を，それぞれ , a_0, b_0 とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を p,q,a_0,b_0 を用いて示せ.

(東京大 2006)　　(m20060702)

0.107 x_i, y_i の各値がある線形系を介して，x_{i+1}, y_{i+1} をそれぞれ出力する際，入力値と出力値の関係は，

$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ で表現できる．ただし，i は自然数とし，A は行列とする.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 \\ -31 \end{pmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) 系を表す行列 A を求めよ.

(2) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．また，行列 A の表す一次変換の幾何学的意味を固有ベクトルを用いて述べよ.

(3) (2) の結果を用いて，A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする,

(4) x_n , y_n を求めよ．ただし，n は自然数とする,

(東京大 2007)　　(m20070702)

0.108 (1) 直交座標空間 (x,y,z) において，xy 平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{4a^2}=1$ $(a>0)$ が y 軸のまわりを回転してできる表面の方程式を求めよ.

(2) (1) の表面上の点 $(x.y,z)=(x_0,y_0,z_0)$ での接平面の方程式を求めよ．ただし，$z_0>0$ とする.

(3) (1) の表面上において，正の z 成分を持つ 2 点 P_1, P_2 は，それぞれ $\left(\dfrac{a}{2}, -a\right)$, $\left(-\dfrac{a}{3}, \dfrac{2a}{3}\right)$ の (x,y) 成分を持つとする．点 P_1, P_2 での接平面の交線を含み，かつ原点を通る平面の方程式を求めよ.

(東京大 2007)　　(m20070704)

0.109　2 つの媒介変数 s, θ によって表される曲面 S

$$S\ :\ x(s,\theta) = (s\cos\theta\,,\ s\sin\theta\,,\ \alpha\theta)\ ,\ (0 \leq s \leq 1)\ ,\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

について，以下の設問に答えよ．α は 0 以上の定数とする．

(1)　$x(s,\theta)$ の媒介変数 s を 1 と固定する事により，曲線 C

$$C\ :\ y(\theta) = x(1,\theta) = (\cos\theta\,,\ \sin\theta\,,\ \alpha\theta)\ ,\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

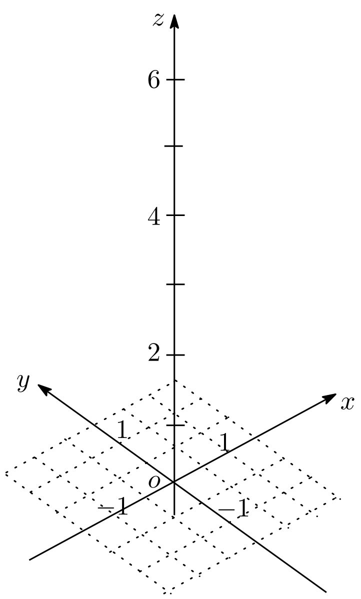
を得る．$\alpha = 1$ の場合について，下図の座標軸を参考にして曲線の概略を解答用紙に手描きせよ．

(2)　C 上の点を $P(= y(\theta))$ とする．P における接線の方程式を導出せよ．

(3)　(2) で求めた接線と xy 平面の交点を Q とする．θ が 0 から 2π まで連続的に変化するとき，Q が描く曲線の長さ ℓ を求めよ．

(4)　$\alpha = 0$ のとき，曲面 S は xy 平面上の単位円盤に一致する．$\alpha = 1$ としたとき，曲面 S の面積は，単位円盤の面積の何倍になるかを求めよ．ただし，次の不定積分の公式を使ってよい．

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2} + \log_e\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right\} + c \qquad (c\ \text{は積分定数})$$



(東京大 2009)　　(m20090703)

0.110　行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の設問に答えよ．

(1)　$\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1 , λ_2 とそれらに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ をそれぞれ求めよ．ただし，絶対値が大きい方の固有値を λ_1 とする．

(2)　xy 平面上の 3 点 $P(p_1,\,p_2)$, $Q(q_1,\,q_2)$, $R(r_1,\,r_2)$ を頂点とする三角形 PQR の面積 S の導出過程を示し，各頂点の座標 p_1 , p_2 , q_1 , q_2 , r_1 , r_2 により表せ．また，各頂点の位置ベクトルが $\boldsymbol{A}$ により一次変換された際，その三角形の面積は何倍になるかを求めよ．

(3)　ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ をとり，$\boldsymbol{a}$ に $\boldsymbol{A}$ を n 回かけたベクトルを $\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ とする．その成分 α_n , β_n および $\boldsymbol{A}^n$ を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(4)　極限値 $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n}$ が一定の値に収束することを示し，その値を求めよ．

(東京大 2009)　　(m20090704)

0.111 2 行 2 列の行列 $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $A^2,\ A^{-1},\ |A|$ を求めよ.

(2) A の全ての固有値を求めよ.

(3) $(A-I)^2 = 0$ が成り立つことを示せ. ただし, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(4) 任意の実数 t について, ある t の多項式 $g(t)$ と定数 a, b が存在して

$$t^{100} = g(t)(t-1)^2 + at + b$$

が成り立つ. a と b を求めよ.

(5) A^{100} を A と I を用いて表せ.

(6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ を自然対数の底 e を用いて表せ. ただし, $A^0 = I,\ 0! = 1$ である.

(東京大 2010) (m20100701)

0.112 関数 $f(x) = \dfrac{x^{m-1}}{1+x^n}$ について

$$\int_0^{\infty} f(x)\, dx$$

の値を求めたい. ただし, $m,\ n$ は自然数で, $m < n$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 複素数平面上で, 図 1 に示す $C = C_1 + C_2 + C_3$ の扇形 $\left(\text{半径 } R,\ \text{中心角} \dfrac{2\pi}{n}\right)$ の積分路が与えられている. この平面上の複素数を $z = x + iy$ (i は虚数単位) とするとき, 積分路 C の内部にある $f(z)$ の極を求めよ. ただし, $R > 1$ とする.

(2) C に沿っての複素積分

$$\int_C f(z)\, dz$$

の値を求めよ.

(3) $R \to \infty$ のとき, C_2 に沿っての複素積分

$$\int_{C_2} f(z)\, dz$$

の値を導出過程とともに示せ.

(4) 虚数単位 i を含まない形で

$$\int_0^{\infty} f(x)\, dx$$

の値を求めよ.

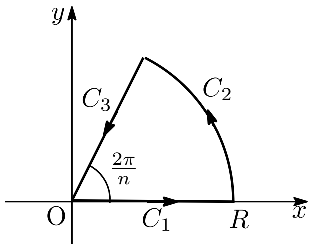


図 1

(東京大 2010) (m20100704)

0.113 (1) N 個の同じボールを n_1 個, n_2 個, n_3 個 $(n_1 + n_2 + n_3 = N)$ の組に分ける組み合わせの総数が以下の式で表されることを示せ.

$$\frac{N!}{n_1! n_2! n_3!}$$

(2) N 個の同じボールを n_1 個, n_2 個, $\cdots$, n_m 個 $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} n_i = N\right)$ の組に分ける組み合わせの総数 W はいくつになるか. 導出過程とともに示せ.

(3) (2) で得られた W を用いて, $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log_e W$ を計算することを考える.

(a) $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log_e N = 0$ となることを示せ.

(b) $N \to \infty \left(N = \sum_{i=1}^{m} n_i\right)$ としたとき, $\dfrac{n_i}{N}$ はそれぞれある値 p_i に収束する. すなわち $p_i = \lim_{N\to\infty} \dfrac{n_i}{N}$ $(i = 1, 2, \cdots m)$. このとき, $\lim_{N\to\infty} \dfrac{1}{N} \log_e W$ を p_i のみで表せ.
ただし以下に示す $k!$ (k は正の整数) に関する不等式を用いてよい.

$$\sqrt{2\pi}k^{k+1/2}e^{-k+1/(12k+1)} < k! < \sqrt{2\pi}k^{k+1/2}e^{-k+1/12k}$$

(東京大 2010)　　(m20100705)

0.114 $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) 行列Aの固有値および固有ベクトルを求めよ.

(2) $M_3(\mathbf{R})$ を 3 次正方実行列全体のなすベクトル空間とする.
$M_3(\mathbf{R})$ から $M_3(\mathbf{R})$ への線形写像 φ_A を

$$\varphi_A(X) = AX$$

と定義する. φ_A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(東京工業大 1996)　　(m19960804)

0.115 3× 3 行列 A が

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を満たすとき, 次の問に答えよ.

(1) A を求めよ.

(2) A^n を求めよ.

(東京工業大 1997)　　(m19970803)

0.116 $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき, 次の問に答えよ.

(1) $S_\theta = \cos\theta A + \sin\theta B$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする. θ を固定するとき, 2 次形式 ${}^t v S_\theta v = c$ (c は 0 でない定数, ${}^t v$ は v の転置) の表わす図形は何か?

(東京工業大 1997)　　(m19970804)

0.117 $A = \begin{pmatrix} -13 & 12 & 6 \\ -12 & 11 & 6 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P をみつけよ.

(2) 実直交行列 P で上の性質をもつものは存在するか? YES ならば 例をみつけよ. NO ならば その理由を記せ.

(東京工業大 1998)　　(m19980803)

0.118 $\mathbf{0}$ でない どんな実ベクトル (x, y, z) に対しても

$$(x, y, z)\begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ a & 1 & a \\ -a & a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} > 0$$

となるのは，a が どんな実数のときか．

(東京工業大 1998)　　(m19980804)

0.119 $A = \begin{pmatrix} -13 & 12 & 6 \\ -12 & 11 & 6 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ に対し $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を求めよ．

(東京工業大 2000)　　(m20000804)

0.120 $G(x, y, t)$ は次のように定義される関数である．

$$G(x, y, t) = \frac{1}{t}\exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4t}\right) \quad (t > 0)$$

(1) 偏微分 $\dfrac{\partial G}{\partial x}$, $\dfrac{\partial G}{\partial t}$ をそれぞれ求めよ．

(2) 各 $t > 0$ に対して，次の積分 $I(t)$ を計算せよ．

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t)\, dx\, dy$$

(東京工業大 2001)　　(m20010803)

0.121 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ に対して

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．

(東京工業大 2001)　　(m20010805)

0.122 次の行列の階数を求めよ．ただし，x は複素数とする．

$$\begin{pmatrix} x & x+1 & x^2 \\ 1 & x^2+1 & 1 \\ x & x^2+x & x^2 \end{pmatrix}$$

(東京工業大 2001)　　(m20010807)

0.123 a を実数とするとき，次の行列の階数を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(東京工業大 2002)　　(m20020805)

0.124 A は 3 次複素正方行列で，$A^2 \neq O$, $A^3 = O$ を満たすとする．このとき次の問いに答えよ．

(1) 3 次元の複素列ベクトル $\overrightarrow{x}$ を $A^2\overrightarrow{x} \neq O$ ととる．このとき，$\{\overrightarrow{x}, A\overrightarrow{x}, A^2\overrightarrow{x}\}$ は 1 次独立であることを示せ．

(2) 上で与えられた $\overrightarrow{x}$ に対して，3 次正方行列 P を $P = (A^2\overrightarrow{x} \quad A\overrightarrow{x} \quad \overrightarrow{x})$ とおく．このとき，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{であることを示せ．}$$

(東京工業大 2003)　　(m20030804)

0.125 定数 a に対し，方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1+a \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a+1 \\ 1 \\ a+1 \end{pmatrix}$$

が解をもつ a と一般解を求めよ．

(東京工業大 2004)　　(m20040803)

0.126 $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -5 & 4 & -8 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対し $P^{-1}CP$ が対角行列となるような正則行列 P をみつけよ．

(東京工業大 2004)　　(m20040804)

0.127 a, b を正の数とするとき, 次の積分を計算せよ.

$$\iint_{x^2+y^2 \leqq 1} \left(\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} \right) dxdy$$

(東京工業大 2005)　　(m20050802)

0.128 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

を対角化せよ. A を対角化する正則行列 P も求めよ.

(東京工業大 2005)　　(m20050803)

0.129 行列　$B = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$　について

(1) 行列式を求めよ.　　(2) 階数を求めよ.

(東京工業大 2005)　　(m20050804)

0.130 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -8 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ と定める．$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．

(東京工業大 2006)　　(m20060803)

0.131 定数 a, b, c に対し，行列 B を　$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & b \\ a & 2 & -2 \\ 4 & -2 & c \end{pmatrix}$　と定める．B の階数を求めよ．

(東京工業大 2006)　　(m20060804)

0.132 次の行列の階数を求めよ.　$\begin{pmatrix} 1 & y & 1 & x \\ y & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & y \\ x & 1 & y & 1 \end{pmatrix}$

(東京工業大 2007)　　(m20070803)

0.133 $u(x,y) = xy^2$, $v(x,y) = x + y$ とおく．次の積分 I の値を求めよ．

$$I = \iint_K \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy \ , \quad \left(K \ : \ \frac{x^2}{4} + y^2 \leq a^2 \right)$$

ただし，a は正の定数である．

(東京工業大 2008)　　(m20080802)

0.134 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) A の固有値を求めよ．また，各固有値に対する固有空間を求めよ．

(2) 次の条件をみたす実直交行列 T を用いて A を対角化せよ．T も具体的に求めよ．
条件：T の (i,j) 成分を t_{ij} とすると，$t_{12} = 2t_{22} > 0$ かつ t_{11}，t_{13} はともに正の数である．

(東京工業大 2008)　　(m20080803)

0.135 (1) a, b を実数とする．$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ x + y - 3z \\ 3x + ay + bz \end{pmatrix}$$

は線形写像であることを示せ．

(2) f の像が 2 次元となるとき，a，b はどのような条件をみたすか答えよ．

(東京工業大 2008)　　(m20080804)

0.136 実対称行列 A について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値がどれも零でないことと A が正則であることは同値であることを示せ．

(2) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$ に対し，適当な直交行列 P によって $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにせよ．

(東京工業大 2009)　　(m20090801)

0.137 $C := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & p & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ -3 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D := \begin{pmatrix} 3 & 4 & q \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．ただし，p，q は定数である．

(1) C の行列式を求めよ．

(2) D および CD の階数を求めよ．必要に応じ p，q の値で場合わけして答えよ．

(東京工業大 2009)　　(m20090802)

0.138 $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求め, A を対角化せよ．

(2) A^n を求めよ．

(東京工業大 2010)　　(m20100804)

0.139 次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(東京農工大 1996)　　(m19960906)

0.140 次の行列を A とする. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 6 & -8 & 4 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

(1) A^2 を求めなさい.

(2) E を 3 次単位行列とするとき, t の方程式 $|tE - A^2| = 0$ の解をすべて求めなさい.

(東京農工大 2007)　　(m20070904)

0.141 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2a \\ 10 \end{pmatrix}$ とおく. ただし, a は実数とする.

(1) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ が解を持つように a の値を定めなさい.

(2) a が (1) で定めた値であるとき, 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ を解きなさい.

(東京農工大 2008)　　(m20080901)

0.142 x の関数 y について, 次の問いに答えなさい.

(1) 微分方程式 $y' + y = 1$ を解きなさい.

(2) 微分方程式 $2y' - y = -y^3$ $\left(初期条件\ x = 0,\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を, $z = \dfrac{1}{y^2}$ と置いて, z の微分方程式に書き換えて解きなさい.

(東京農工大 2008)　　(m20080904)

0.143 $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の表す xy 平面上の曲線を C とする. 次の問いに答えなさい.

(1) $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{dy}{dx}$ を求め, t の式で表しなさい.

(2) $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求め, t の式で表しなさい.

(3) x の関数 $y = f(x)$ の極値を求めなさい. ただし, 極小値か極大値か, そのときの x の値も書きなさい.

(4) 曲線 C の全長 L を求めなさい.

(東京農工大 2009)　　(m20090902)

0.144 λ を実数とし $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ \lambda \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix}$ は 3 次の数ベクトルとする. 次の各問いに答えなさい.

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ をそれぞれ第 1 列, 第 2 列, 第 3 列とする行列を A とするとき, 行列式 $|A| = 0$ を満たす λ の値を求めなさい.

(2) λ は (1) で求めた値とする. このとき $\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の一次結合で表しなさい.

(東京農工大 2010)　　(m20100901)

0.145 領域 $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ における次の二重積分の値を求めなさい.

$$\iint_D \left(\sqrt{x^2+y^2}-x^3\right) dxdy$$

(東京農工大 2010)　　(m20100903)

0.146 今 $\mathbf{R}^4$ の要素を $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ と書くことにする．その二つの部分空間 W_1, W_2 を次のように定義する.

$W_1=\left\{X \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; x+2y+3z+4w=0\ ,\ \ 5x+5z+2w=0\right\}$

$W_2=\left\{X \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; 2x-y+z-w=0\ ,\ \ 3x+y+4z+3w=0\right\}$

(1) $\dim\,(W_1 \cap W_2)$ を求めよ．また，$W_1 \cap W_2$ の一組の基底を求めよ.

(2) (1) で求めた基底を含む $\mathbf{R}^4$ の基底を一組求めよ.

(電気通信大 1994)　　(m19941004)

0.147 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2}\,dx\right) dy$

(2) $\displaystyle\iint_D (x-y)\sin(x+y)\,dx\,dy, \quad D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : 0 \leqq x-y \leqq \pi,\ 0 \leqq x+y \leqq \pi\}$

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}, \quad D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4\}$

(電気通信大 1998)　　(m19981002)

0.148 行列

$$A=\begin{pmatrix} a & -a & a & -a \\ -a & 1 & -a & 1 \\ a & -1 & a^2 & -1 \\ -a & 1 & -a^2 & -a \end{pmatrix}$$

について次の問いに答えよ.

(1) $\det\, A$ を求めよ.

(2) A^{-1} が存在するための条件を求めよ.

(3) $\mathrm{rank}\, A=3$ である条件を述べよ.

(4) (3) の条件がなりたつとき A によってきまる線形変換の核の基底を示せ.

(電気通信大 1998)　　(m19981004)

0.149 次の行列 A で決まる $\mathbf{R}^4$ から $\mathbf{R}^3$ への線形写像について以下の問いに答えよ.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 核の基底を求めよ.

(2) 像の次元を求めよ.

(3) $\mathbf{R}^4$ をユークリッド内積で内積空間とするとき，核の直交補空間の基底を求めよ.

(電気通信大 1999)　　(m19991003)

0.150 $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$, とする．$\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ によって生成される $\mathbf{R}^3$ の部分空間を V とし，$\mathbf{a}_3$ と $\mathbf{a}_4$ によって生成されるの部分空間を $W(a)$ とするとき，$V \cap W(a)$ の次元と基底，$V + W(a)$ の次元と基底を求めよ．

(電気通信大 1999)　　(m19991004)

0.151 ３次の正方行列 A について次の条件が成り立つとする．$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ は固有値 1 の固有ベクトルである．$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は固有値 -1 の固有ベクトルである．$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 0 の固有ベクトルである．このとき以下の問に答えよ．

(1) A を求めよ．

(2) A を対角化する行列 P と対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ．

(電気通信大 2000)　　(m20001004)

0.152 R^4 内で $a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ によって生成される部分空間 $< a_1, a_2, a_3 >$ を V とし，通常のユークリット内積に関する $< a_1 >$ の直交補空間 $< a_1 >^{\perp}$ を W とする．以下の問いに答えよ．

(1) $xa_1 + ya_2 \in W$ となるための実数 x, y に対する条件を求めよ．

(2) V の次元 $\dim V$ を求めよ．

(3) $V \cap W$ の次元 $\dim V \cap W$ と $V \cap W$ の基底の 1 つを求めよ．

(電気通信大 2000)　　(m20001005)

0.153 定義域を $0 \leqq u \leqq 2\pi,\ 0 \leqq v \leqq 1$ とするベクトル関数

$$\overrightarrow{r}(u,v) = \left(\sqrt{1+v^2}\cos u, \sqrt{1+v^2}\sin u, v\right)$$

が表す曲面を S とする．曲面 S 上の (u,v) に対応する点における法線単位ベクトルを求めよ．また，曲面 S の面積を求めよ．

(電気通信大 2001)　　(m20011005)

0.154 次の 3 次正方行列 A に対して，その行列式 $|A|$ および，その逆行列 A^{-1} を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

(電気通信大 2001)　　(m20011006)

0.155 3×3 行列 M が

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

と与えられたとして，次の (a)〜(d) の計算を考える．

(1) M^{-1} を求める．

(2) M を下三角行列 L と上三角行列 U の積 $M = LU$ に分解する．
但し，L または U のいずれかは，対角要素がすべて 1 に等しい行列とする．

(3) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．
$Mx_1 = e_1, Mx_2 = e_2, Mx_3 = e_3$ を満たすベクトル x_1, x_2, x_3 を求める．

(4) 連立方程式

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 + 4z_3 = 3 \\ z_1 + z_2 + 3z_3 = 2 \\ 2z_1 + z_2 + 6z_3 = 2 \end{cases}$$

を満たす z_1, z_2, z_3 を求める．

(1) (a)〜(d) のすべての計算を行う場合の，適切な計算の順序を示し，手順を簡単に説明せよ．

(2) 前問の解答の手順に従って，(a)〜(d) の各々の解を求めよ．

(電気通信大 2001)　　(m20011007)

0.156 $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ とし，線形写像 $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ を，$f(x) = 6x - < v, x > v \quad (x \in \mathbf{R}^3)$ で定義するとき，次の問に答えよ．ただし，$<,>$ は，$\mathbf{R}^3$ の通常のユークリッド内積とする．

(1) $< f(x), v >= 0$ を示せ．

(2) $f(x) = Ax$ と表すとき，行列 A を求めよ．

(3) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元，および f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求めよ．

(4) $\mathrm{Im}\, f \ni x \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たし，$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と直交するベクトル $x \in \mathbf{R}^3$ が存在するならば，それを 1 つ求めよ．もしそのようなベクトルが存在しないならば，それを証明せよ．

(電気通信大 2001)　　(m20011008)

0.157 確率変数 X, Y, U が互いに独立で，各々正規分布 $N(\mu_1, {\sigma_1}^2), N(\mu_2, {\sigma_2}^2), N(\mu_3, {\sigma_3}^2)$ に従うとする．

(1) 任意の定数 a, b, c に対して，$W = aX + bY + cU$ の分布を求めよ．

(2) $V = \left(\dfrac{X - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 \Big/ \left(\dfrac{Y - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2$ の分布を求めよ．

(3) $P\left(-3 \leq \dfrac{X - \mu_1}{\sigma_1} \leq 3\right)$ を求めよ．

ただし，標準正規分布 $N(0,1)$ の分布関数を

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

とおくと，次表の値をとる．

z	0.0	1.0	2.0	3.0
$\Phi(z)$	0.5000	0.8413	0.9772	0.9987

(電気通信大 2001)　　(m20011011)

0.158 A は 3 次正方行列で, $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

を満たすとする. このとき, 行列 A および行列式 $|A|$ を求めよ.

(電気通信大 2005) (m20051001)

0.159 $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W_1=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\;\middle|\;\begin{array}{l}x_1+\ \ x_2\qquad\ \ -x_4=0\\x_1+2x_2+x_3\qquad\ =0\end{array}\right\},\quad W_2=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

について以下の問に答えよ. ただし, $\langle\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\rangle$ はベクトル $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\in\mathbb{R}^4$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を表すものとする.

(1) 部分空間 W_1 , W_2 の基底および次元を求めよ.

(2) 部分空間 W_1+W_2 , $W_1\cap W_2$ の基底および次元を求めよ.

(電気通信大 2005) (m20051002)

0.160 $f(x)=\mathrm{Sin}^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}x}{x^2+1}\right)$ について，次の問に答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ の値を求めよ.

(2) $f'(x)$ を計算せよ.

(3) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ.

(電気通信大 2006) (m20061001)

0.161 4 次の単位行列を E とし，4 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix}3&-2&0&0\\1&0&0&0\\0&0&3&-2\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ を考える．さらに λ を実数とし，$W(\lambda)=\{x\in\mathbb{R}^4\mid Ax=\lambda x\}$ とおく．以下の問に答えよ.

(1) $\det(\lambda E-A)$ を求めよ.

(2) $W(\lambda)\neq\{0\}$ となるような λ をすべて求めよ.

(3) (2) で求めた各 λ に対し，$W(\lambda)$ の基底を求めよ.

(電気通信大 2006) (m20061003)

0.162 行列 A，ベクトル $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ および未知ベクトル $\boldsymbol{x}$ を次のようにおく.

$$A=\begin{pmatrix}6&8&12\\-1&0&2\\-1&-2&-4\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

(1) 3 つのベクトル $\boldsymbol{u},A\boldsymbol{u},A^2\boldsymbol{u}$ が一次独立かどうか判定せよ.

(2) 3 つのベクトル $\boldsymbol{v},A\boldsymbol{v},A^2\boldsymbol{v}$ が一次独立かどうか判定せよ.

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，3 つのベクトル $A\boldsymbol{x},A^2\boldsymbol{x},A^3\boldsymbol{x}$ は一次独立でないことを示せ.

(電気通信大 2006) (m20061004)

0.163 次の手順によって，任意の正数 X の平方根 $\sqrt{X}$ の近似値を求めることができる．

① $\sqrt{X}$ に近い数 x を選ぶ．

② x と $\dfrac{X}{x}$ の平均値 $x' = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{X}{x}\right)$ を計算する．

③ あらかじめ定めておいた小さい数 ℓ に対して，$|x - x'| < \ell$ となれば，x' を $\sqrt{X}$ の近似値とする．そうでない場合は，x' を新しい x として ② に戻り計算を繰り返す．

(1) この手順によって $\sqrt{X}$ の近似値が得られることを説明せよ．

(2) $X = 7$ として，その平方根 $\sqrt{X}$ の近似値を求めよ．ただし，$\ell = 0.001$, x の初期値を 3 とする．

(3) 区間 $[0, 7]$ において，関数 $f(x) = A\sqrt{x} + B$ を一次関数 $g(x) = ax + b$ で最小二乗近似する．この時，$g(x) = \dfrac{\sqrt{7}}{7}x$ になるとすると，元の関数 $f(x) = A\sqrt{x} + B$ の A, B の値はいくらであるか？小数点以下三桁まで求めよ．

(電気通信大 2006)　　(m20061006)

0.164 $f(x) = \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^{10}$ のとき，次の値をそれぞれ求めよ．但し，$f'(x)$ は $f(x)$ の x に関する 1 階の微分を表す．

(1) $f'(0)$　　(2) $\dfrac{f'(1)}{f(1)}$　　(3) $f'(1)f'(-1)$

(電気通信大 2006)　　(m20061010)

0.165 次の 3 次正方行列 A, E に対して下記の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $\det(xE - A) = (x - \lambda_1)^2(x - \lambda_2)$ と因数分解される．λ_1, λ_2 を求めよ．

(2) $V_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ (A - \lambda_1 E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$, $V_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ (A - \lambda_2 E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ とおく．V_1 の基底 $\boldsymbol{v}_1$ と V_2 の基底 $\boldsymbol{v}_2$ とを求めよ．

(3) $(A - \lambda_1 E)\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1$ となる $\boldsymbol{v}_3$をひとつ求めよ．

(4) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底となる．線形写像 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定めるとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ に関する T の表現行列を求めよ．

(電気通信大 2007)　　(m20071002)

0.166 関数 $f(x) = \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x \ \ (x > 0)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x)$ を求めよ．

(2) $g(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ とおく．$g(x)$ を求めよ．

(3) $g(x) > 0 \ \ (x > 0)$ であることを示せ．

(4) $f(x)$ の値域 $\{f(x) \mid x > 0\}$ を求めよ．

(電気通信大 2009)　　(m20091003)

0.167 複素関数

$$f(z) = \frac{z^3 + 3}{z - 2i}, \quad g(z) = \sin\left(f(z)\right)$$

について，以下の問いに答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする．

(1) $f(1)$, $f'(1)$, $g(0)$, $g'(0)$ のそれぞれの値の実部と虚部を求めよ.

(2) 次の積分値を求めよ.

$$\int_C \frac{f(z)}{z^2-1}dz$$

ただし, C は複素平面の原点を中心とし半径 $\dfrac{3}{2}$ の円を正の向きに 1 周する積分路である.

(電気通信大 2009) (m20091005)

0.168 関数 $f(r)$ から決まる 2 変数関数

$$u(x,y)=f(r)\ , \qquad r=\sqrt{x^2+y^2}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ を $f'(r)$ を用いて表せ.

(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)+\dfrac{1}{r}f'(r)$ が成り立つことを示せ.

(電気通信大 2010) (m20101003)

0.169 (1) 対称行列

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) 球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上における関数

$$f(x,y,z)=3x^2+3y^2+3z^2+2xy+2yz+2zx$$

の最大値と最小値を求めよ.

(横浜国立大 1995) (m19951102)

0.170 対称行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $\mathbf{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ -t \end{pmatrix}$ とするとき,

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

を満たすベクトル $\mathbf{x}$ が存在するような実数 t を求めよ.

(3) 3 変数関数

$$f(x,y,z)=2x^2+y^2+z^2+2xy+2xz$$

の球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上における最大値と最小値を求めよ.

(横浜国立大 1996) (m19961102)

0.171 (1) 対称行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルは長さ 1 となるように表せ

(2) 数ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ を，問 (1) で求めた固有ベクトルの一次結合で表せ．

(横浜国立大 1997）　(m19971102)

0.172 (1) 次の行列 A の固有値を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 上の行列 A の各固有値に対する固有空間の正規直交基底を求めよ．

(横浜国立大 1998）　(m19981102)

0.173 以下の行列 A の固有値と，その固有値に対する固有空間を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(横浜国立大 2000)　(m20001102)

0.174 次の行列 A の固有値と，その固有値に対する固有ベクトルをすべて求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(横浜国立大 2001)　(m20011102)

0.175 微分方程式 $$\frac{dy}{dx}\left(\frac{dy}{dx} - y\right) = x(x-y)$$
を満たし，かつ，$x = 0$ で $y = 0$ となる関数 $y(x)$（ただし，$x \geq 0$）を求めよ．

(横浜国立大 2003)　(m20031101)

0.176 次の行列 A の固有値と，その固有値に対する固有空間を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(横浜国立大 2003)　(m20031102)

0.177 以下の行列 A について，次の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) 次の条件を満たす 4 次正則行列 P を 1 つもとめよ:
「P の列ベクトルはそれぞれ A の固有ベクトルである.」

(横浜国立大 2008)　(m20081101)

0.178 (1) m, n を整数とするとき，以下の式が成り立つことを示せなさい．

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

(2) 次の周期関数について解答しなさい．

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} -k & (-\pi < x < 0) \\ k & (0 < x < \pi) \end{array} \right. \quad , \quad f(x+2\pi) = f(x) \qquad k > 0$$

この関数を以下のように無限級数で表すとき，その係数 a_0，a_n，b_n を求めなさい．さらに，求められる無限級数を $n = 7$ の項まで示しなさい．

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

(横浜国立大 2008)　　(m20081105)

0.179 以下の行列 A について, 次の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルは, 互いに直交するように定めよ.

(2) A の行列式を求めよ.

(3) n を 1 以上の整数とする. A^n を求めよ.

(4) A の逆行列を求めよ.

(横浜国立大 2010)　　(m20101101)

0.180 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)}{x^4}$$

(千葉大 1994)　　(m19941201)

0.181 次の行列 A の行列式を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(千葉大 1994)　　(m19941203)

0.182 次の行列 A の行列式の値を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2x & 2y & x+y+3z \\ 2x & x+3y+z & 2z \\ 3x+y+z & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

(千葉大 1995)　　(m19951204)

0.183 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき，行列 $B = A^4 - 3A^3 + 2A^2 + 4A + E$ を求めよ．ここで E は単位行列とする.

(千葉大 1996)　　(m19961204)

0.184 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1, λ_2 を求め，λ_1, λ_2 に対して，長さが 1 となるように正規化した固有ベクトル ν_1, ν_2 を求めよ．さらに，ν_1, ν_2 を相隣る 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ.

(千葉大 1997)　　(m19971203)

0.185 (1) 下記に与えられた行列 A に対して，行および列に関する基本変形を何回か施すことによって，次の標準形 I に変形されることを示せ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) (1) と関連して，次の関係式：$PAQ = I$ が成り立つような正則 3 次正方行列 P と正則 4 次正方行列 Q を求めよ．

（注）行に関する基本変形とは (I) 一つの行を k 倍する $(k \neq 0)$；(II) 一つの行に他の一つの行の k 倍を加える $(k \neq 0)$；(III) 一つの行と他の行とを交換する，という変形の総称．列についても同様．

(千葉大 1998）　(m19981204)

0.186 次の二重積分を求めよ．

$$\iint_D \left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{3}{2}} dx\, dy$$

ここで，$D = \{(x, y) :\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

(千葉大 1999）　(m19991202)

0.187 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とベクトル $\overrightarrow{y_0} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ が与えられている．この時，次の設問に答えよ．

(1) 行列 A の階数 (rank) を求めよ．

(2) $\mathrm{Im}(A)$ の表す空間図形を求めよ．

(3) $\overrightarrow{y_0}$ が $\mathrm{Ker}(A^T)$ の元と直交することを示せ．

(4) $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y_0}$ を満たす $\overrightarrow{x}$ を求めよ．

ここで，A^T は A の転置行列，$\mathrm{Im}(A) = \{A\overrightarrow{x} \ :\ \overrightarrow{x} \in R^3\}$，$\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{x} \in R^3 : A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}\}$ を表す．

(千葉大 1999）　(m19991204)

0.188 以下の設問に答えなさい．

(1) 次の対称行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) (1) で求めた固有値と固有ベクトルを用いて A^n を求めなさい．
ここで，A^n は $A^n = A \cdot A \cdot A \cdots A$ のように A を n 回掛け合わせることを意味する．
例えば，$A^2 = A \cdot A$，$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A \cdot A$ である．

(千葉大 2000）　(m20001204)

0.189 次の 2 次形式について，以下の問いに答えなさい．

$$f(x, y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2$$

(1) $f(x, y)$ は 2 次の実対称行列 A とベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いて，次のように書き直すことができる．

$$f(x, y) = F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

A を求めなさい．ここで，$\mathbf{x}^T$ は $\mathbf{x}$ の転置を表わす．

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．次に，２次曲線 $f(x, y) = 1$ を，固有ベクトルの方向を新しい座標軸とする座標系 $O-X, Y$ で表わし，その概形を示しなさい．

(千葉大 2002)　　(m20021204)

0.190　次の行列 A について答えなさい．

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式を，A の成分を用いて表しなさい．

(2) 行列 A の成分を用いて，原点を始点とする３つの位置ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$,$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^T$ を定義する．ここに，^{T} は行列の転置を示す．これらのベクトルを用いて，$\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \ \mathbf{c})$ が (1) で表した行列式に等しくなることを示しなさい．ここで，$\bullet$ は内積，$\times$ は外積を意味する．

(3) 行列式の絶対値が，これら３つのベクトルを３辺とする平行６面体の体積と等しいことを示しなさい．

(千葉大 2003)　　(m20031205)

0.191　$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $D = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leqq a^2\}$ として, 次の２重積分の値を求めなさい.

$$I = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dxdy$$

(千葉大 2005)　　(m20051203)

0.192　ある運動している点の時刻 t における座標 $(x(t)\, ,\ y(t))$ が微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha y(t) + b \\ \alpha x(t) + a \end{pmatrix}$$

を満たす. ここで, a , b 及び $\alpha(> 0)$ は定数である.

この微分方程式の解は

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}(t)\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} - (\boldsymbol{A}(t) - I)\,\boldsymbol{v}$$

と書ける. ただし, $\boldsymbol{A}(t)$ は時刻 t に依存する $2 \times \ 2$ の正方行列, I は $2 \times \ 2$ の単位行列, $\boldsymbol{v}$ は初期位置 $(x(0)\, ,\ y(0))$ に依らない定ベクトルである. 次の設問に答えなさい.

(1) $\dfrac{dy(t)}{dx(t)}$ を t を陽に含まない形で表しなさい.

(2) (1) の微分方程式を解きなさい.

(3) 行列 $\boldsymbol{A}(t)$ を決定しなさい.

(4) 点 $(x(t)\, ,\ y(t))$ はどのような運動をするか簡潔に説明しなさい.

(千葉大 2005)　　(m20051204)

0.193　次の極限値を求めなさい.　　$\displaystyle\lim_{x \to 1}\left(\frac{\log_{10} x}{x - 1}\right)$

(千葉大 2007)　　(m20071202)

0.194　次の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$　　　　(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

(千葉大 2007)　　(m20071206)

0.195 $\mathbb{R}^3$ で行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ が与えられている．次の問いに答えなさい．

(1) A の対称部分 $T_1=\dfrac{1}{2}(A+A^T)$ と，A の歪み対称部分 $T_2=\dfrac{1}{2}(A-A^T)$ の各行列を求めなさい．ここで，A^T は A の転置行列を表す．

(2) 対称部分の行列 T_1 の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(3) 歪み対称部分の行列 T_2 で定められる線形写像のゼロ空間 $\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \mid T_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$ を求めなさい．

(千葉大 2007)　　(m20071207)

0.196 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．　$A=\begin{pmatrix} -8 & -2 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \\ -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(千葉大 2008)　　(m20081202)

0.197 (1) $A,\ T$ が正則行列のとき，任意の整数 $m\geq 0$ において，

$$(T^{-1}AT)^m=T^{-1}A^mT$$

が成立することを示しなさい．（T^{-1} は T の逆行列）

(2) 行列 $A=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(3) A^5 を求めなさい．

(千葉大 2009)　　(m20091202)

0.198 次の行列の逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(筑波大 2000)　　(m20001306)

0.199 n 次行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \iddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ $((i,n-i+1)$ 成分のみ 1, 他の成分は 0) について，

A^{-1}, A^k (k : 自然数) を求めよ．

(筑波大 2003)　　(m20031315)

0.200 行列　$A=\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$　を考えよう．ここで，パラメータ p,q の変動範囲は $0<p<1$, $0<q<1$ であるとする．このとき次の (1),(2),(3) の各問いに答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルはノルムが 1 となるように規格化して示せ．

(2) 行列 A の n 乗，A^n を求めよ．

(3) 行列 A の n 乗の n が大きい場合の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}A^n$ を求めよ．

(筑波大 2003)　　(m20031316)

0.201 正方行列の固有値，固有ベクトルに関する以下の 2 つの問いに答えよ．

(1) 次の正方行列 A の固有値および固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) n 次の正方行列 B の固有値とその転置行列 ${}^tB$ の固有値とは同じであることを証明せよ．

(筑波大 2003) (m20031317)

0.202 次の行列の逆行列と固有値を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(筑波大 2003) (m20031318)

0.203 $2 \leq x \leq 2$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 2\left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right) & \left(\dfrac{1}{2} \leq x \leq 2\right) \\ \\ 0 & \left(0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

を y 軸の回りに 1 回転してできる曲面によって定義される容器がある. この容器に毎秒 π の割合で水を注入する. 注入開始から 5 秒経過した時点での状態について, 次の各問に答えなさい.

(1) 容器の底面から測った水面の位置 (h) を求めなさい.

(2) 水面の上昇速度 (v) を求めなさい.

(3) 水面の面積の増加速度 (w) を求めなさい.

（筑波大 2004） (m20041306)

0.204 $A(\lambda)$ は実数のパラメータ λ を含む次の正方行列である.

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \lambda \end{pmatrix}$$

また,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする. x, y, z もすべて実数である.

(1) x, y, z を未知変数とする連立一次方程式

$$A(\lambda)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

が自明でない解を持つための, パラメータ λ が満たすべき条件を求めよ. また, そのときの解を求めよ.

(2) 連立一次方程式

$$A(\lambda)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考える. パラメータ λ に応じた場合分けをして, 解が存在するか否かを調べよ. 存在する場合には, 一意性に注意して, その解を求めよ.

(筑波大 2004)　　(m20041319)

0.205 次の微分方程式を解くために，以下の設問に答えよ．

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_1 &= 2x_1 - 2x_2 \\ \dfrac{d}{dt}x_2 &= -x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

(1) 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ とおく．この行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるように行列 P を定め，行列 A を対角化せよ．

(3) ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とおく．$\mathbf{x}$ と A を用いて，上の微分方程式を表せ．

(4) ベクトル $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおく．$P\mathbf{y} = \mathbf{x}$ として，これを設問 (3) で求めた表現に代入せよ．また，この y_1, y_2 に関する微分方程式の一般解を求めよ．

(5) x_1, x_2 の一般解を求めよ．

(6) $t = 0$ における初期値 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に対応する解 x_1, x_2 の，$t \to \infty$ における振る舞いを調べよ．

(筑波大 2004)　　(m20041321)

0.206 ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} t+1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ をそれぞれ位置ベクトルとする 3 点 A, B, C を考える. ただし, t は実数である. 以下の設問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は, t の値によらず常に一次独立であることを示せ.

(2) 外積 $(\mathbf{b} - \boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})$ を計算せよ.

(3) 3 点 A, B, C を通る平面 Π の方程式を求めよ.

(4) 実数 t が変化するとき, 平面 Π が通らない点の集合を求めよ.

(筑波大 2005)　　(m20051307)

0.207 3 つのベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ．ただし，a 及び b は実数値パラメータとする．

(1) この 3 つのベクトルが $\mathbb{R}^3$ の基底になるための a と b の条件を求めよ．

(2) この 3 つのベクトルが $\mathbb{R}^3$ の直交基底になるように a と b の値を定めよ．

(3) (2) のとき，ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ をこの 3 つのベクトルの線形結合で表せ．

(筑波大 2006)　　(m20061307)

0.208 $z=f(x,y)$ が全微分可能で，$x=r\cdot\cos\theta$，$y=r\cdot\sin\theta$ であるとする．このとき，次式が成立することを証明せよ．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(筑波大 2006)　　(m20061309)

0.209 (1) $f(x)=\ln(1+x)$，$(-1<x\leq 1)$ のテイラー展開を x^n $(n=1,2,3,\cdots)$ の項まで求めよ（剰余項は含まない）．$\ln x$ は x の自然対数を示す。

(2) $g(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$，$(|x|<1)$ のテイラー展開を x^n の項まで求めよ（剰余項は含まない）．

(3) $\ln 2$ を近似する場合，少ない数の展開項で誤差をより小さくするには，上記のテイラー展開の内、どちらを用いればよいか．理由を記して答えよ．

(筑波大 2006)　　(m20061316)

0.210 空間（３次元のユークリッド空間）の中で，３つのベクトル $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ をそれぞれ $\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ に写す，つまり，

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

とするような線形写像（行列）A を考える．

(1) A を具体的な数行列の形で表せ．

(2) A の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．固有ベクトルは正規化（規格化）せよ．

(筑波大 2006)　　(m20061318)

0.211 平面（２次元のユークリッド空間）の中に，直交（デカルト）座標 x,y をとり，この座標を使って $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ の形でベクトルを表現することにする．

この平面の中で，直線 $\ell: y=ax$ に関して折り返すという線形写像を P としたとき，P の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．固有ベクトルは正規化（規格化）せよ．

(筑波大 2006)　　(m20061319)

0.212 $A=\begin{pmatrix}3&4\\6&8\end{pmatrix}$，　$B=\begin{pmatrix}2&5&3\\4&1&6\end{pmatrix}$，　$O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ とする．

(1) AB，B^TA を求めなさい．ただし，B^T は B の転置行列である．

(2) $X\neq O$，$AX=XA=O$ となる行列 X を求めなさい．要素が整数となる行列を１つだけ解答すればよい．

(筑波大 2006)　　(m20061320)

0.213 ４次の正方行列 A を　$A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$　と定める．

(1) A の固有値を全て求めよ．

(2) (1) で求めた各々の固有値に対する固有ベクトルを一つずつ求めよ．

(筑波大 2007)　(m20071305)

0.214 0 でない n 個の複素数 $\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_n$ をとり，Θ をその (i,j) 成分が $(\theta_i)^{j-1}$ で与えられる n 次正方行列とする．さらに $p_k=(\theta_1)^k+(\theta_2)^k+\cdots+(\theta_n)^k \quad (k\geq 0)$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) 行列 ${}^t\Theta\Theta$ は次の行列に等しいことを示せ．ただし，${}^t\Theta$ は行列 Θ の転置行列である．

$$A=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \\ p_2 & p_3 & p_4 & \cdots & p_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n-1} & p_n & p_{n+1} & \cdots & p_{2n-2} \end{pmatrix}$$

(2) Vandermonde の行列式　$\det\Theta=(-1)^{n(n-1)/2}\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n}(\theta_i-\theta_j)$

を用いて次の等式を示せ．　$\det\left({}^t\Theta\Theta\right)=\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n}(\theta_i-\theta_j)^2$

(3) $\theta_1,\cdots,\theta_n$ が n 次正方行列 A の固有値であるとき　$\mathrm{tr}\,(A^k)=p_k \quad (k\geq 0)$ となることを示せ．ただし，tr は行列のトレースである．

(筑波大 2007)　(m20071307)

0.215 (1) $g(x)$ が n 回微分可能であるとき
$\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n(xg(x))=xg^{(n)}(x)+ng^{(n-1)}(x)$　となることを示せ．

(2) $\boldsymbol{R}$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して
$u_n(x)=\dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^x(x-y)^{n-1}f(y)dy$　とおけば
$\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n u_n(x)=f(x),\quad n=1,2,\cdots$　をみたすことを示せ．

(筑波大 2007)　(m20071308)

0.216 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)=\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ の導関数を求めよ．

(筑波大 2007)　(m20071310)

0.217 (1) 原点に中心をもつ楕円 $x^2-xy+y^2=1$ の，長軸および短軸の長さをそれぞれ求めよ．また，この楕円の概形を，主軸の方向がわかるように描け．

(2) 楕円 $x^2-xy+y^2=1$ の長軸を x 軸に一致させる回転（ただし，回転角は $-\dfrac{\pi}{2}$ より大きく $\dfrac{\pi}{2}$ より小さいとする）による変換 g と，y 軸方向の拡大による変換 f を合成した変換 $f\circ g$ により，元の楕円は円に変換される．行列 A を用いて $f\circ g\ :\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\to A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すとき, A 及びその逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) 次の積分を求めよ．　$\displaystyle\iint_D e^{-(x^2-xy+y^2)}dxdy \quad \{(x,y)\mid -\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty\}$

(筑波大 2007)　(m20071312)

0.218 線形写像　$f\ :\ \boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$　$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} ax_1+ax_2+\ \ x_3 \\ ax_1+\ \ x_2+ax_3 \\ x_1+ax_2+ax_3 \end{bmatrix} \quad (a\in\boldsymbol{R})$

について，以下の問に答えなさい．

(1) f の標準基底に関する表現行列 F を求めよ.

(2) f が全単射（写像の表現行列が正則）となる条件を求めよ.

(3) f が全単射であるとき，逆写像 f^{-1} の標準基底に関する表現行列を求めよ.

(筑波大 2007)　(m20071315)

0.219 関数 $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy + 1$ について以下の問に答えよ.

(1) $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ.　(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(筑波大 2007)　(m20071318)

0.220 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ を計算せよ.

(筑波大 2007)　(m20071328)

0.221 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A の固有値と単位固有ベクトルを求めよ.　(2) A^n を求めよ（n は正の整数）.

(筑波大 2007)　(m20071336)

0.222 連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = b, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$ を考える（α, β は定数）.

(1) 行列 A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ.　(2) この方程式に複数の解が存在するための条件を示せ.

(3) そのときの一般解を示せ.

(筑波大 2007)　(m20071337)

0.223 自然対数の底 e は $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ と定義される．対数関数 $f(x) = \log x$ の x に関する微分が $1/x$ となることを微分の定義 $\displaystyle\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log(x+\Delta x) - \log x}{\Delta x}$ に基づき示しなさい.

(筑波大 2008)　(m20081303)

0.224 線形写像 $T : R^4 \to R^4$ の行列表示を $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ および T の像 $\mathrm{Im}(T)$ を求めよ.

(2) 行列 A^2 の階数 $\mathrm{rank}(A^2)$ および合成写像 $T\circ T$ の像 $\mathrm{Im}(T\circ T)$ を求めよ.

(3) 連立一次方程式 $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ を解け.

(筑波大 2008)　(m20081308)

0.225 定積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$ の値を，以下の 2 通りの方法で計算せよ.

(1) (a) $I = 2\int_0^{\pi} \dfrac{d\theta}{2+\cos\theta}$ を示せ.

(b) 積分変数を $x = \tan\dfrac{\theta}{2}$ に置換せよ $\left(\text{ヒント}:\cos\theta = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}\text{である}\right)$.

(c) 積分を実行して I を求めよ.

(2) (a) 複素数 $z = e^{i\theta}$ とおいたとき, $z + \dfrac{1}{z}$ を計算せよ.

(b) その結果を基に I を z に関する複素積分に変換せよ.

(c) 留数定理を用いて I を求めよ.

(筑波大 2008)　　(m20081311)

0.226 次の行列 A について問いに答えよ.　$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -5 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正則行列 P は存在するか, 理由をつけて答えよ.

(筑波大 2008)　　(m20081313)

0.227 積分 $\displaystyle\iiint_D dxdydz\, \ln\left(\alpha\sqrt{x^2+4y^2+9z^2}\right)$ を求めよ.

ただし, α は正の定数であり, $\ln x$ は x の自然対数を表している.

さらに積分領域 D は, $D = \{(x,y,z) \mid 1 < x^2+4y^2+9z^2 < 4\}$ とする.

(筑波大 2008)　　(m20081321)

0.228 行列 A について以下の設問に答えよ.

$$A \equiv (\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3) \equiv \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A を構成する 3 個の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ は, 1 次独立か 1 次従属か, 理由を示して答えよ.

(2) A が正則かどうかを調べ, 正則な場合は逆行列を求めよ.

(3) A の固有値と固有ベクトル（大きさを 1 に正規化したもの）をすべて求めよ.

(4) A を対角化する行列を与え, それを用いて対角化されることを示せ.

(筑波大 2008)　　(m20081323)

0.229 指数関数 e^x の性質に関する以下の問いに答えなさい.

(1) 自然数 n を用いて定義された以下の極限値を考える.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

(1a) 2 項展開の公式を用いて下の関係式を示しなさい.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

(1b) さらに $\dfrac{1}{n!} < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ を用いて $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$　$(n = 1, 2, \cdots)$ が有界であることを示しなさい.

(2) 有界なる単調数列は収束するので (1) で与えられた極限は極限値をとり，これを e と書くことにする．この e が自然数の底である．　このとき以下を示しなさい．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

(3) 上記の (2) を使って

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

が成立することをまず示し，その上で微分の定義に基づいて $\{e^x\}'=e^x$ を示しなさい．

(4) $f(x)=e^x$ を n 次のマクローリン展開（$x=0$ のまわりでのテイラー展開）し，その剰余項を求めなさい．

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0$ を示し，これを用いて $\displaystyle e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ を示しなさい．

(筑波大 2009)　　(m20091302)

0.230 変数 x,y の関数 $z=f(x,y)$ を変数変換 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ により新しい変数 $r,\ \theta$ で表す．このとき，関数 $z=f\left(x(r,\theta),\ y(r,\theta)\right)$ について以下の設問に答えよ．

(1) 1 階偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を $r,\ \theta,\ \dfrac{\partial z}{\partial r},\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を用いて表せ．

(2) 2 階偏導関数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ は

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\theta}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}$$

であることを示せ．

(筑波大 2009)　　(m20091308)

0.231 独立変数が 1 個 (t)，従属変数が 2 個 $(x=x(t),\ y=y(t))$ の連立微分方程式:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x+\sqrt{2}y \\ \dfrac{dy}{dt}=\sqrt{2}x+y \end{cases}$$

を考える．初期条件を $x(0)=x_0$，$y(0)=y_0$ としたときの解を次の設問に従って求めよ．

(1) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ とおいて，与えられた微分方程式を行列 A を使って，$\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}$ の形に書き換える．A を具体的な行列の形で表せ．

(2) A の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．固有ベクトルは正規化（規格化）し，それを $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$ とする．

(3) $\boldsymbol{x}(t)=c_1(t)\boldsymbol{p}_1+c_2(t)\boldsymbol{p}_2$ とおくことにする．$c_1(0),\ c_2(0)$ は x_0，y_0 を使ってどう書けるか．

(4) $c_1(t),\ c_2(t)$ が満たす（t に関する）微分方程式を求めよ．

(5) 前問 (4) で求めた微分方程式を解いて，$c_1(t),\ c_2(t)$ を求めよ．初期条件 $c_1(0),\ c_2(0)$ は，設問 (3) で得ていることに注意せよ．

(6) $x(t),\ y(t)$ を x_0，y_0 を使って表せ．

(筑波大 2009)　　(m20091310)

0.232 a を複素数とし，行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

によって定める．

(1) A の階数 $(= \mathrm{rank}A)$ を求めよ．

(2) $a = 1$ のとき A^{-1} を求めよ．

(筑波大 2009) (m20091311)

0.233 n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して，次の 2 条件を考える．

(a) 各成分 a_{ij} は 1 または -1 である．

(b) A の二つの異なる列ベクトルは必ず直交する．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) n が奇数のとき，条件 (a) と (b) を満たす行列は存在しないことを示せ．

(2) n 次正方行列 A が条件 (a) と (b) を満たすとき，

$$^tA\,A = nE$$

となることを示せ．ただし，E は n 次単位行列，^tA は A の転置行列とする．

(3) 正方行列 A が条件 (a) と (b) を満たすとき，

$$H = \begin{pmatrix} A & -A \\ A & A \end{pmatrix}$$

も条件 (a) と (b) を満たすことを示せ．

(筑波大 2009) (m20091312)

0.234 (1) 4 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して, A^2, A^3, A^4 を計算せよ．

(2) B が n 次正方行列とする. ある自然数 m に対して $B^m = O$ ならば B の固有値はすべて 0 であることを示せ．

(3) C が n 次正方行列とする. ある自然数 m に対して $C^m \neq O$, $C^{m+1} = O$ ならば $n \geq m + 1$ であることを示せ．

(筑波大 2010) (m20101301)

0.235 行列 A について以下の設問に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値 λ_1 , λ_2 , λ_3 を求めよ. ただし, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする．

(2) 前問で得た固有値 λ_1 , λ_2 , λ_3 に対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, $\boldsymbol{l}_3$ とする. $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, $\boldsymbol{l}_3$ を求めよ. ただし, 固有ベクトルの長さが 1 となるように選ぶものとする.

(3) A を対角化する行列 L とその逆行列 L^{-1} を求めよ.

(筑波大 2010) (m20101309)

0.236 n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{v}_n$ が線形独立とは,

$$t_1\boldsymbol{v}_1 + t_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + t_n\boldsymbol{v}_n = 0$$

が成り立つのが, 係数 $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$ の場合に限られることをいう. この定義に従って, 実数 a, b, c, d, e, f を要素とするベクトルについて, 以下に設問に答えよ.

(1) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が線形独立である必要十分条件は $ad - bc \neq 0$ であることを示せ.

(2) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ は線形独立とならないことを示せ.

(3) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ が, 線形独立となる必要十分条件を求めよ.

(筑波大 2010) (m20101321)

0.237 D を xy 平面上の領域とするとき，曲面 $z = f(x, y)$ $\big((x, y) \in D\big)$ の面積は

$$\iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\ dxdy$$

で表される．このことを用いて半径 R の球の表面積の公式を導け.

(埼玉大 1998) (m19981401)

0.238 (1) n 次正方行列 A について， A の固有値，固有ベクトルの定義を述べよ.

(2) B は 3 行 3 列の行列で，次の (a)(b)(c) を満たしている.

(a) B の固有値は 1 と 2 である.

(b) B の 1 に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ がとれる.

(c) B の 2 に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ がとれる.

上の条件 (a)(b)(c) を満たす行列 B を求めよ.

(埼玉大 1998) (m19981402)

0.239 $a, b, c > 0$ とする.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

をみたす (x, y, z) の組で

$$w = x + y + z$$

が極値をとる (x, y, z) を求めよ.

(埼玉大 1999) (m19991402)

0.240 A を $m \times n$ の実行列とする． $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を未知数とする一次方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{o} \qquad \text{(i)}$$

を考える．

(1) 方程式 (i) の解全体は， $\mathbf{R}^n$ の線形部分空間をなすことを示せ．

(2) (1) の線形部分空間の次元と，A の階数 (rank A) の関係式を記せ．(証明不要)

(3) B も $m \times n$ の実行列とし，一次方程式

$$B\mathbf{x} = \mathbf{o} \qquad \text{(ii)}$$

を考える．rank$A$+rank$B < n$ が成り立つとき，方程式 (i) と方程式 (ii) に $\mathbf{o}$ 以外の共有解が存在することを示せ．

(埼玉大 1999) (m19991405)

0.241 $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^2}$ とする．

(1) 正数 R に対し，次が成り立つことを示せ．

$$\int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)dx \right) dy \leqq \int_0^R \left(\int_0^R f(x,y)dx \right) dy \leqq \int_0^{\sqrt{2}R} \left(\int_0^{\sqrt{2R^2-y^2}} f(x,y)dx \right) dy$$

(2) $\displaystyle \lim_{R\to\infty} \int_0^R \left(\int_0^R f(x,y)dx \right) dy$ の値を求めよ．

(埼玉大 2000) (m20001402)

0.242 ３つの空間ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2a \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

が一次従属（線形従属）であるような a を求めよ．

(埼玉大 2000) (m20001403)

0.243 次の４つの行列 A, B, C, D を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A, B, AB の行列式を求めよ．

(2) 行列 $C + D$ の階数を求めよ．

（埼玉大 2001） (m20011408)

0.244 $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を考え，$a_i = f(e_i) \quad (1 \leq i \leq 3)$ とおく．

このとき，次の (1), (2) は互いに同値であることを示せ．

(1) ベクトル a_1, a_2, a_3 は一次独立である.

(2) f は逆写像 $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ をもつ.

（埼玉大 2001） (m20011409)

0.245 実数 θ に対して $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} x^n$ とおく.

(1) 右辺の級数は $|x| < 1$ で収束することを示せ.

(2) $f'(x) = \dfrac{\sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$ を示せ. $\left[\text{ヒント}:\sin t = \dfrac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)\right]$

(埼玉大 2002) (m20021401)

0.246 $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を次のように定義する.

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

さらに，$\boldsymbol{x}$ の長さを $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ と定義する.

次の (1),(2),(3) に答えよ.

(1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して不等式 $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq ||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}||$ が成り立つことを証明せよ.

(2) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して不等式 $||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|| \leq ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||$ が成り立つことを証明せよ.

(3) 上の (1),(2) において等号が成立するための必要十分条件を求めよ.

(埼玉大 2002) (m20021403)

0.247 n 次正方行列 A が次のように与えられているとする．ただし，$n \geq 2$ とする.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，$A = LU$ となる下三角行列 L，上三角行列 U は存在しないことを証明せよ.

(埼玉大 2002) (m20021404)

0.248 曲線 $y = \dfrac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の長さ L を求めなさい.

(埼玉大 2003) (m20031403)

0.249 E を 3 次単位行列とし，

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

とおく．整数 $n \geq 1$ に対し，$A^n = 3^{n-1}(nA - 3(n-1)E)$ であることを証明せよ.

(埼玉大 2003) (m20031407)

0.250 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の逆行列を求めなさい．

(2) 次の連立 1 次方程式の解 x, y, z を (1) の結果を用いて求めなさい．

$$\begin{cases} -x - y - z = 3 \\ 4x - 3y - 4z = 2 \\ -4x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

(3) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めなさい．

(埼玉大 2003)　　(m20031409)

0.251 (1) 次の関数を微分せよ．

$$\left[\ \sin^{-1}(2x)\ \right]^3 \qquad \left(\ |x| < \frac{1}{2}\ \right)$$

ただし, $\sin^{-1}()$ は逆正弦関数の主値をとるものとする．

(2) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^{2x}}{(a+b)x} \qquad (a > 0\,,\ b > 0\,,\ a \neq b)$$

（埼玉大 2004）　　(m20041401)

0.252 $\mathbb{R}^3$ の 3 つのベクトル　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　を考える．

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は 1 次独立（線形独立）であることを示せ．

(2) ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の 1 次結合（線形結合）として表せ．

（埼玉大 2004）　　(m20041406)

0.253 $a,\ b,\ c,\ d$ は実数とする．

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ の階数が 1 となるための $a,\ b$ の条件を求めよ．

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & c & 1 & c \\ d & 1 & d & 1 \\ c & d & c & d \end{pmatrix}$ の階数が 2 となるための $c,\ d$ の条件を求めよ．

（埼玉大 2004）　　(m20041407)

0.254 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値 λ_1 , λ_2 を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(3) $P = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,　$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ としたとき，$AP = PB$ となる a, b を定めよ.

(4) (3) の関係を用いて A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする.

(埼玉大 2004)　　(m20041408)

0.255 (1) 次の行列 A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(2) 行列 A を $P^{-1}AP$ により対角化せよ. 解答では, まず, 行列 P を求めてから A を対角化せよ.

(埼玉大 2005) (m20051402)

0.256 行列 $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & a & a & 1 \\ a & a & a & a \\ 1 & a & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ.

(1) 行列 A の行列式が 0 となるような実数 a の値を求めよ.

(2) 行列 A が直交行列となるような実数 a の値を求めよ.

(埼玉大 2005) (m20051404)

0.257 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値と階数を求めよ.

(2) 行列 A を対角化して得られる行列を書け（結果だけでよい）.

(3) 行列 A^3 のトレースを求めよ.

(埼玉大 2005) (m20051405)

0.258 $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ とし, Ω で定義された実数値関数 f を

$$f(x, y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

とする. ただし, $\tan^{-1}$ は正接関数 tan の定義域を $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ に制限したものの逆関数である.
また, $D = \{(x, y) \in \Omega \mid 2 \leqq x^2 + y^2 \leqq 3,\ 0 \leqq y \leqq x\}$ とおく. 次の問に答えよ.

(1) f の 1 階の偏導関数をすべて求めよ.

(2) f の 2 階の偏導関数をすべて求めよ.

(3) D を図示せよ.

(4) 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x, y)dxdy$ の値を求めよ.

(埼玉大 2005) (m20051406)

0.259 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x}}$ (2) $y = \sqrt{1 + \cos x}$

(3) $y = x^e e^x \quad (x > 0)$ (4) $y = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

(埼玉大 2006) (m20061401)

0.260 写像 $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x+4y+3z \\ x+2y+z \end{pmatrix}$ により定義する.

$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ と

$\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ.

(1) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

(2) $(T(\boldsymbol{a}_1), T(\boldsymbol{a}_2), T(\boldsymbol{a}_3)) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)A$ を満たす 2 行 3 列の行列 A を求めよ.

(埼玉大 2006) (m20061406)

0.261 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求め，A を対角化せよ. (2) 自然数 n に対して，A^n を求めよ.

(埼玉大 2006) (m20061407)

0.262 行列 A は以下のように対称行列 R と交代行列 S の和で表すことができる.

$A = R + S$, ただし, $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ とする. このとき, R および S を求めよ.

(埼玉大 2007) (m20071404)

0.263 以下の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ について考える.

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ で囲まれた平行四辺形の面積を求めよ.

(2) 3 つのベクトルでできる平行六面体の体積が 12 となる時, x の値を求めよ.

(埼玉大 2007) (m20071405)

0.264 a, b を実数とし, 正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & b \\ b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \end{pmatrix}$ を考える.

(1) A の階数を求めよ.

(2) 積 AB が単位行列になるような a, b の組をすべて求めよ.

(埼玉大 2007) (m20071408)

0.265 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を 1 つ求めよ．

(埼玉大 2007)　　(m20071409)

0.266 (1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の階数を求めよ．　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) 行列 $\boldsymbol{B}$ の逆行列を求めよ．　$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(3) 行列 $\boldsymbol{C}$ の行列式を求めよ．ただし，解答は因数分解した形で表せ．　$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 \end{pmatrix}$

(埼玉大 2008)　　(m20081403)

0.267 ベクトルの列　$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \cdots$　を次のように定める．

(1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) n が奇数のとき　$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_n \\ x_n \end{pmatrix}$

(3) n が偶数のとき　$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x_n+y_n \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$

自然数 k に対して，$\begin{pmatrix} x_{2k+1} \\ y_{2k+1} \end{pmatrix}$ を求めよ．

(埼玉大 2008)　　(m20081405)

0.268 $\boldsymbol{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ で表す．$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^2$ を長さ 1 のベクトルとして，直線

$$l=\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})=0\}$$

に関する折り返し写像を T とする．すなわち，$T(\boldsymbol{x})$ は直線 l に関して $\boldsymbol{x}$ と線対称の位置にあるベクトルである．

(1) $T(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ を用いて表せ．

(2) $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ とするとき，$T(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ となる行列 A を求めよ．

(埼玉大 2008)　　(m20081406)

0.269 (1) $\boldsymbol{R}^2$ における一次変換 f は，点 $(1,2)$ を点 $(0,3)$ に，点 $(2,0)$ を点 $(4,2)$ に移す．このとき，以下の問いに答えなさい．

(a) 一次変換 f を表す行列を求めなさい．

(b) 一次変換 f によって，$y=x-1$ は，どのような図形に移されるか．

(2) 次の 2 つのベクトルについて考える．

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(a) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は，一次従属か一次独立か調べなさい.

(b) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ とするとき，$\cos\theta$ を求めなさい.

(3) 次の行列 $\boldsymbol{A}$ について考える.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) 固有値をすべて求めなさい.

(b) 固有ベクトルをすべて求めなさい.

(埼玉大 2009)　　(m20091402)

0.270 次の行列の行列式の値が 0 となるような x を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 0 & x & 1 & 2 \\ -x & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 0 & 5 \\ -2 & -4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

(埼玉大 2009)　　(m20091404)

0.271 (1) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とする．ただし，θ は $0 < \theta < 2\pi$, $\theta \neq \pi$ を満たす実数とする.

次の条件 (a),(b),(c) をすべて満たすような α_1 , α_2 , $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ の組を 1 つ求めよ.

(a) α_1 , α_2 は相異なる複素数である.

(b) $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ は複素数を成分とする 2 次元ベクトルで，どちらも零ベクトルではなく，さらに $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)$ と $\dfrac{i}{2}(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)$ はともに実数を成分とするベクトルになる.

(c) $A\boldsymbol{p}_1 = \alpha_1\boldsymbol{p}_1$ かつ $A\boldsymbol{p}_2 = \alpha_2\boldsymbol{p}_2$ を満たす.

(2) B を 2 次の実正方行列とし，B のどの固有値も実数でないと仮定する.

(i) 次の (d),(e),(f) をすべて満たすような β_1 , β_2 , $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ の組が存在することを示せ.

(d) 正の実数 r と，$0 < \theta < 2\pi$, $\theta \neq \pi$ を満たす実数 θ を用いて，$\beta_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\beta_2 = r(\cos\theta - i\sin\theta)$ と表される.

(e) $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ は複素数を成分とする 2 次元ベクトルで，どちらも零ベクトルでなく，さらに $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2)$ と $\dfrac{i}{2}(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2)$ はともに実数を成分とするベクトルになる.

(f) $B\boldsymbol{q}_1 = \beta_1\boldsymbol{q}_1$ かつ $B\boldsymbol{q}_2 = \beta_2\boldsymbol{q}_2$ を満たす.

(ii) 2 次の実正則行列 M が存在して，

$$M^{-1}BM = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

となることを示せ.

(埼玉大 2009)　　(m20091405)

0.272 $f(x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ とする.

(1) $(1+x^2)f''(x) + xf'(x) = 0$ が成り立つことを示せ.

(2) 非負整数 n に対し，

$$(1+x^2)f^{(n+2)}(x) + (2n+1)xf^{(n+1)}(x) + n^2 f^{(n)}(x) = 0$$

が成り立つことを示せ.

(埼玉大 2009)　　(m20091406)

0.273　3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & -11 & 7 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1)　A の固有値を求めよ.

(2)　$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ.

(埼玉大 2010)　　(m20101401)

0.274　0 と 1 のみを成分とする 2×3 行列 A で,

$$A\,{}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\ ,\quad {}^tA\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たすものを求めよ. ここで, ${}^tA$ は A の転置行列を表す.

(埼玉大 2010)　　(m20101402)

0.275　(1)　つぎの関数を微分せよ.

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)$$

(2)　つぎの関数の第 n 次導関数を求めよ.

$$y = (x+1)^2 \log(x+1)$$

(埼玉大 2010)　　(m20101405)

0.276　(1)　つぎの行列式を計算せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & 0 \\ y & 1 & 0 & y \\ z & 0 & 1 & z \\ 0 & w & w & 1 \end{vmatrix}$$

(2)　つぎの行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(3)　つぎの行列の固有値, 固有ベクトルの組をすべて求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(埼玉大 2010)　　(m20101407)

0.277　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & c \end{pmatrix}$ が $A^2 = A + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を満たすとする. 以下の 2 問に答えよ.

(1)　A を求めよ.　　　　(2)　A^{10} を求めよ.

(群馬大 2003)　　(m20031504)

0.278　行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ がある. 以下の 3 問に答えよ.

(1) A の行列式が $|A| = 2$ となるときの a の値を求めよ.

(2) $|A| = 2$ かつ $|AB| = 6$ となるときの a と b の値を求めよ.

(3) (2) の a, b のときの B の逆行列を求めよ.

（群馬大 2004）　(m20041504)

0.279 $3\times\ 3$ の行列に関する積は, 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ と表すとき, ベクトル $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し,

$\boldsymbol{Ad} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}$ と定義し, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ に対して,

$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ を $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} \quad (i, j = 1, 2, 3)$ と定義する.

このとき以下の 2 問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 3 \\ -6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2} & -\frac{11}{2} \\ -\frac{19}{7} & 1 & b \\ \frac{41}{14} & c & \frac{19}{2} \end{pmatrix}$ とするとき, $\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ となるときの a, b, c の値を求めよ.

(2) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ とし, $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とするとき, $\boldsymbol{Cd} = -2\boldsymbol{d}$ となるときの x と z を, y を用いて示すと $x = py$, $z = qy$ になる. p, q の値を求めよ.

(群馬大 2005)　(m20051505)

0.280 点 (x, y) を点 (x', y') に対応づける xy 平面上の写像は，その対応づけが行列の計算として，下式のように書けるとき，1 次変換と呼ばれる（ここで a, b, c, d は定数であり，下式は「 $x' = ax + by$ かつ $y' = cx + dy$ 」と同値）.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2k & k \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 f について，以下の 2 問に答えよ.

(1) この 1 次変換 f が原点以外にも「変換の影響を受けない点」（すなわち，変換によって位置が変わらない点）をもつように k の値を定めよ.

(2) 前問 (1) の 1 次変換で「変換の影響を受けない点」の全体は，xy 平面上の直線を形成する．この直線の方程式を求めよ.

(群馬大 2006)　(m20061503)

0.281 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ がある．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列が存在するために必要な，$a \neq \pm\infty$ 以外の条件を求めよ.

(2) $a = 4$ のとき，行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列を求めよ.

(群馬大 2007)　(m20071501)

0.282　2つの方程式 $x+\dfrac{1}{2}y-5=0$ と $\dfrac{2}{3}x+y-5=0$ がある．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　この2つの方程式からなる連立方程式を解く際にこれらは，$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d \\ 15 \end{pmatrix}$ という行列の形式で表現できる．このときの a,b,c,d の値を求めよ．

(2)　(1) で求めた a,b,c,d の値のとき，$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるような e,f,g,h の値を求めよ．

(3)　このとき連立方程式の解は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ になる．i，j の値を求めよ．

(群馬大 2009)　　(m20091501)

0.283　以下の値を求めよ．

(1)　$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$　　(2)　$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

(図書館情報大 1994)　　(m19941604)

0.284　(1)　$\left(x-\frac{1}{3}\right)^3$ を展開せよ．

(2)　$1+2+\cdots+999+1000$ は次のどれに最も近いか．

(a) 100,000　(b) 500,000　(c) 1,000,000　(d) 5,000,000　(e) 10,000,000

(3)　$0,1,2,3,4$ の5個の数字の中から異なる3個の数字を用いて作られる3桁の整数のうち，奇数はいくつあるか．

(図書館情報大 1998)　　(m19981601)

0.285　次のような行列 A と B がある．

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

今，成分が整数からなる 2×2 の行列 C と次のような関係がある．

$$CAC^{-1}=B$$

(1)　行列 C の成分を

$$C=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とした場合，a,b,c,d の間にはどのような関係があるか．

(2)　その関係を満たす行列 C の一般形を求めよ．

(3)　C の逆行列 C^{-1} を求めよ．

(図書館情報大 1998)　　(m19981605)

0.286　$X=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ とする．X，X^{-1} を求めよ．

(図書館情報大 1999)　　(m19991609)

0.287　以下の値を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と，最小固有値に対する固有ベクトル．

(図書館情報大 2000)　　(m20001611)

0.288　関数 $g(x) = xe^{-\frac{x}{2}}\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)$ について以下の $\boxed{ア}$～$\boxed{ク}$にあてはまる値を求めよ．

(1) $g(x) = 0$ を満たす x の値は $\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$ である．

(2) $g(x)$ の傾きが 0 となる x の値は $\boxed{ウ}$, $\boxed{エ}$である．

(3) $\displaystyle\int_0^\infty g(x)dx = \boxed{オ}$ である．

(4) $g(x)$ のマクローリン展開の第 3 次までの項は

$$g(x) \approx \boxed{カ}\,x + \boxed{キ}\,x^2 + \boxed{ク}\,x^3$$

となる．ただし関数 $f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \cdots$$

である．

(図書館情報大 2002)　　(m20021607)

0.289　以下の (1)-(5) の行列の積が定義されるかどうか判断し，定義されない場合には×を，定義される場合には積の計算結果を，解答欄に記入せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(図書館情報大 2002)　　(m20021609)

0.290　$A = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$ とする．

(1) A の固有値と，対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) 実対称行列 X で，次の 2 つの条件（ア）,（イ）の両方を満たすものを求めよ．
（ア）$X^2 = A$　　（イ）固有値がすべて正

(図書館情報大 2002)　　(m20021610)

0.291　次に与える行列の固有値，および行列式の値を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(茨城大 1998）　　(m19981703)

0.292 $A=\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ x & 1 & y \\ z & y & 1 \end{pmatrix}$ について，

(1) A の階数が 1 となる数の組 (x, y, z) をすべて求めよ．

(2) $x=1$, $y=2$ のとき，

(a) $\det A = 0$ となる z を求めよ．

(b) $\det A \neq 0$ のとき，A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(茨城大 1999） (m19991707)

0.293 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ とする．次の各問に答えよ．

(1) A が正則であるための a の条件を求めよ．

(2) A が正則であるとき，A^{-1} の $(1,2)$ 成分を求めよ．

(茨城大 2000） (m20001703)

0.294 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．次の各問に答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A を対角化するユニタリー行列を求めよ．

(3) A^6 を求めよ．

(茨城大 2001) (m20011706)

0.295 (1) 関数 $f(x)=\sin x$ に対して，$f^{(n)}(0)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を求めよ．

(2) $\sin x$ のマクローリン展開（0 のまわりでのテイラー展開）をかけ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{1}{x^\alpha}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)=0$ となる正の定数 α の条件を求めよ．

(茨城大 2002) (m20021703)

0.296 行列 $A=\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$ について

(1) A の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(2) ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を A の固有ベクトルの 1 次結合で表せ．

(3) 自然数 n に対して，$A^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ．

(茨城大 2002) (m20021706)

0.297 連立方程式 $\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+2y+3z &= 0 \\ 2x+3y+az &= a-3 \end{cases}$ について

(1) 係数行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix}$ の行列式の値を求めよ.

(2) 拡大係数行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & a & a-3 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ.

(3) この方程式が解をもつか否かを判定し，解をもつ場合にはその解を求めよ.

(茨城大 2003)　　(m20031703)

0.298 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき,

(1) A の固有値を求めよ.

(2) T の逆行列 T^{-1} を求めよ.

(3) $T^{-1}AT$ を求めよ.

(茨城大 2004)　　(m20041703)

0.299 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 3 & -2 \\ 4 & -11 & 9 & -6 \end{pmatrix}$ の固有値をすべて求めよ.

(茨城大 2005)　　(m20051701)

0.300 複素数 z の共役複素数を $\overline{z}$ とするとき, 次の各問に答えよ.

(1) 実数 h を 0 に近づけるときの極限 $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\left(\overline{z+hi}\right)^3 - (\,\overline{z}\,)^3}{hi}$ を計算せよ.

(2) 0 から i までにいたる線分を積分路とする複素積分 $\displaystyle\int_0^i (\,\overline{z}\,)^2\,dz$ を求めよ.

(茨城大 2005)　　(m20051704)

0.301 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ.

(1) A の行列式 $|A|$ を求めよ.　　(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) $AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす行列 X を求めよ.

(茨城大 2006)　　(m20061701)

0.302 次の微分方程式の一般解を求めよ.　$(1+y^2)\dfrac{y}{x} + (1-y)^2\left(\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x}\right) = 0$

(茨城大 2006)　　(m20061703)

0.303 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は 1 次独立であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の 1 次結合で表せ.

(茨城大 2007)　　(m20071702)

0.304　複素数の数列 $z_n = \left(\dfrac{i}{2}\right)^n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$ について，次の各問に答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n$ を求めよ.　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ を求めよ.　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz_n$ を求めよ.

(茨城大 2007)　　(m20071704)

0.305　k を実数とし，3 次の正方行列 A，3 次元列ベクトル $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}$ をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -10 \\ -2 & k & 8 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

とする．以下の各問に答えよ.

(1) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつための k についての必要十分条件を求めよ.

(2) 3 次元実ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ 内の部分空間 $V = \{A\boldsymbol{u}\,;\ \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^3\}$ が 2 次元となるための k についての必要十分条件を求めよ．また，そのときの V の基底を一組求めよ.

(3) 前問 (2) の k に対し，行列 A の固有値および固有値に対応する固有空間の基底を一組求めよ.

(茨城大 2008)　　(m20081701)

0.306　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) 各固有値に対し，固有空間の 1 組の基底を求めよ.

ここで，固有値 λ の固有空間とは，λ の固有ベクトル全体と零ベクトルからなるベクトル空間のことである.

(茨城大 2008)　　(m20081705)

0.307　(1) 関数 $y = \cos(x^2)$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ と $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ.

(2) 次の連立不等式で表される範囲を xy 平面に図示せよ.

$$0 \leqq\ y \leqq \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad y \leqq\ x \leqq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(3) 次の累次積分の順序を交換し，値を計算せよ.

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \left(\int_y^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \cos(x^2)dx \right) dy$$

(茨城大 2009)　　(m20091701)

0.308 3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ （a は実数）について，次の各問いに答えよ.

(1) A の階数を求めよ.

(2) A の行列式の値を求めよ.

(茨城大 2009)　　(m20091702)

0.309 実数を成分にもつ n 次列ベクトル全体からなるベクトル空間を $\mathbb{R}^n$ で表す. すべての成分が実数である n 次正方行列 A に対して，$\mathbb{R}^n$ の部分空間 $\mathrm{Ker}A$ と $\mathrm{Im}A$ を次のように定める.

$$\mathrm{Ker}A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}, \quad \mathrm{Im}A = \{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

ただし, $\mathbf{0}$ は零ベクトルを表す.

以下の各行列 A について, $\mathrm{Ker}A$ および $\mathrm{Im}A$ の次元と 1 組の基底を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(茨城大 2010)　　(m20101702)

0.310 座標平面内の領域 $D = \{(x, y) \mid x,\ y$ は実数で $x^2 + y^2 \leqq 1$ をみたす $\}$ で定義された 2 変数の関数 $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ について, 以下の各問いに答えよ.

(1) $x = 0.01,\ y = 0.02$ のとき, $f(x, y)$ の値を小数点以下 4 桁まで正確に求めよ.

(2) 曲面 $z = f(x, y)$ 上の点 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ における接平面を H とする.

3 つの座標平面 $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ と H とで囲まれた立体の体積を求めよ.

(3) 二重積分

$$\iint_D x^n y^n f(x, y)\, dxdy$$

の値を, $n = 1,\ 2$ についてそれぞれ求めよ.

(茨城大 2010)　　(m20101705)

0.311 実数 $\alpha,\ \beta$ に対して, 2 次実正方行列 A で

$$A^2 - (\alpha + \beta)A + \alpha\beta I = O$$

(I は 2 次単位行列, O は 2 次零行列) を満たすものを考える. 但し, A は I の定数倍ではないとする. 以下に各問に答えよ.

(1) $A - \alpha I$ と $A - \beta I$ は, どちらも正則でないことを示せ.

(2) 実数を成分とする 2 次元列ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して, $\boldsymbol{y} = (A - \beta I)\boldsymbol{x}$ とおく. このとき任意の $\boldsymbol{x}$ に対して,

$$(A - \alpha I)\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$$

となることを示せ. また, α は A の固有値であることも示せ. さらに, $\boldsymbol{p}_1$ を α に対する固有ベクトルとするとき,

$$(A - \beta I)\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1$$

を満たす列ベクトル $\boldsymbol{p}_2$ で, $\{\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2\}$ が一次独立となるものが存在することを示せ.

(3) (2) の $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ を用いて, 2 次正方行列 P を

$$P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{p}_1\ , \quad P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{p}_2$$

であるように定める. $P^{-1}AP$ および $p^{-1}A^nP$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ を求めよ.

(茨城大 2010) (m20101706)

0.312 微分可能な関数を成分とする n 次正方行列 $A = (f_{ij}(x))$ の微分を, $\dfrac{dA}{dx} = \left(\dfrac{df_{ij}(x)}{dx}\right)$ となる n 次行列と決める. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 微分可能な関数を成分とする n 次正方行列 A, B に対し, $\dfrac{dAB}{dx} = \dfrac{dA}{dx}B + A\dfrac{dB}{dx}$ が成立することを示せ.

(2) $\dfrac{dA^{-1}}{dx} = -A^{-1}\dfrac{dA}{dx}A^{-1}$ が成立することを示せ.

(山梨大 2002) (m20021806)

0.313 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, A の行列式の値および逆行列を求めよ.

(山梨大 2002) (m20021807)

0.314 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, A の行列式の値および逆行列を求めよ.

（山梨大 2003） (m20031805)

0.315 2 次元の実座標平面上のベクトルを直線 $y = 5x$ に関して線対称移動する変換 f を考える. また, 基本単位ベクトルを $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) 基底となる 2 つの直交するベクトルを $\mathbf{a}_1 = 1\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$, $\mathbf{a}_2 = -5\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2$ とする. また, 直線 $y = 5x$ に関してベクトル $s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2$ と線対称なベクトルを $S\mathbf{a}_1 + T\mathbf{a}_2$ とする. 即ち, $f(s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2) = S\mathbf{a}_1 + T\mathbf{a}_2$ で, S, T, s, t は実数. このとき, S, T を s, t を用いた式で表せ.

(2) 基底であるベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ に対応する変換 f の行列 A を求めよ.

(3) $x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 = s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2$ とするとき, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ となる行列 B を求めよ.

(4) $f(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) = X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2$ とするとき, $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる行列 F を行列 A, B を用いて表し, 行列 F を求めよ.

(山梨大 2003) (m20031806)

0.316 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, A の行列式の値および逆行列を求めよ.

(山梨大 2004) (m20041804)

0.317 $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ のとき, A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(山梨大 2004) (m20041805)

0.318　下記に示す $4\times\ 4$ 行列 $\boldsymbol{A}$ が逆行列をもつための条件を導け.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

(山梨大 2005)　　(m20051801)

0.319　行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，A の行列式の値および逆行列を求めよ.

(山梨大 2005)　　(m20051802)

0.320　2 次の実行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とその転置行列（ A の行と列を入れ替えた行列 ）${}^tA$ について次の問いに答えよ.

(1)　$A={}^tA$ となる条件を，a,b,c,d を用いて表せ.

(2)　$A={}^tA$ となるとき，A の固有値は実数であることを示せ.

(山梨大 2005)　　(m20051803)

0.321　行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式の値および逆行列を求めなさい.

(山梨大 2006)　　(m20061801)

0.322　行列 $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$ と行列 $B=\begin{pmatrix} d & e \\ 1 & f \end{pmatrix}$ が $AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を満たしているとき, 次の問に答えなさい.

(1)　$b=c=0$ のとき, $CA=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる零行列でない 2 次の正方行列 C を一つ求めなさい.

(2)　ある零行列でない 2 次の正方行列 D で $DA=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となることを示しなさい.

(3)　行列 A の行列式の値を求めなさい.

(4)　A の固有値を求めなさい.

(山梨大 2006)　　(m20061802)

0.323　行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ca & ab \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix}$ を考えるとき，A が逆行列をもつために必要かつ十分な $a,\ b,\ c$ についての条件を求めなさい.

(山梨大 2007)　　(m20071802)

0.324　行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ が異なる固有値をもたないような k の値をすべて求めなさい.

(山梨大 2007)　　(m20071803)

0.325　次の行列　$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$　を考える.

(1) A の固有値を求めなさい. (2) A の固有ベクトルを求めなさい.

(山梨大 2007) (m20071808)

0.326 3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の各問 (1)(2) に答えなさい.

(1) A^2, A^3 を求め, さらに A^{10}を求めなさい.

(2) 行列 A の固有値をすべて求めなさい.

(山梨大 2008) (m20081802)

0.327 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} -\sin\dfrac{\theta}{2} \\ \cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ とを考える.

ただし, θ は任意の実数とする.

(1) A の固有値をすべて求めなさい.

(2) $\boldsymbol{V}$ は A の一つの固有ベクトルであることを示し, 固有ベクトル $\boldsymbol{V}$ に対する A の固有値を求めなさい.

(山梨大 2009) (m20091802)

0.328 次の行列 $A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 8 \\ -5 & -8 & -9 \end{pmatrix}$ を考える.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A の固有ベクトルを求めよ.

(山梨大 2009) (m20091805)

0.329 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ のとき, A の行列式の値および逆行列を求めよ.

(山梨大 2010) (m20101801)

0.330 (1) 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい. 固有ベクトルを求める際, 適当な定数を用いてもかまいません.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(2) 前問で求めた固有ベクトルを列として並べた行列を P とします. 逆行列 P^{-1} を求めなさい.

(3) 前問で求めた P^{-1} を用いて, $P^{-1}AP$ を計算しなさい.

(4) 前問で求めた $P^{-1}AP$ を計算することにより, A^N を求めたい. どのようにしたら求められるか方針を示し, そのあと具体的に計算しなさい.

(山梨大 2010) (m20101806)

0.331 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対し, 適当な正則行列 P を求めて $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにせよ.

(信州大 1998) (m19981906)

0.332　次の行列の固有値と固有空間を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(信州大 1999)　　(m19991905)

0.333　次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(信州大 2003)　　(m20031902)

0.334　α, β, γ を互いに異なる数とし, ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ を次で定める.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ \gamma^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \\ \delta^2 \end{pmatrix}$$

このとき, ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は 1 次独立であることを示し, ベクトル $\boldsymbol{d}$ を, ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の 1 次結合で表せ.

(信州大 2004)　　(m20041903)

0.335　次の行列が対角化可能かどうかを調べ, 可能ならば対角化せよ.

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(信州大 2004)　　(m20041904)

0.336　次の行列の固有値と固有ベクトルを求め, 対角化せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(信州大 2005)　　(m20051902)

0.337　次の行列の固有値と固有ベクトルを求め, 対角化せよ.　$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(信州大 2006)　　(m20061901)

0.338　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) A の行列式を求めよ.　　(2) A の逆行列を求めよ.

(3) A の固有値とその固有ベクトルを求めよ.

(信州大 2007)　　(m20071901)

0.339 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) A の階数を求めよ.

(2) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解全体のなす $\mathbb{R}^4$ の部分空間（すなわち解空間）W の次元を求めよ.

(3) W の基底を求めよ.

(信州大 2008) (m20081901)

0.340 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ. (2) A の固有ベクトルを求めよ. (3) A を対角化せよ.

(信州大 2008) (m20081902)

0.341 (1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x \log x = 0$ を示せ.

(2) $f(x)$ を区間 $[-1, 1]$ 上で定義された連続関数とする．このとき,

$$\lim_{n \to \infty} \left(\int_{-1/n}^{1/n} |f(x)|^n dx \right)^{1/n} = |f(0)|$$ となることを示せ.

(信州大 2008) (m20081904)

0.342 n を 2 以上の自然数として $n \times\ n$ 行列 $A_n = (a_{ij})$ を次で定める.

$$\begin{array}{rcll} a_{ii} & = & 1 & (i = 1, 2, \cdots, n) \\ a_{i,i+1} & = & 1 & (i = 1, 2, \cdots, n-1) \\ a_{i+1,i} & = & -1 & (i = 1, 2, \cdots, n-1) \\ a_{ij} & = & 0 & (|i - j| \geq 2) \end{array}$$

たとえば

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

である.

(1) $D_n = \det A_n$ とおく．A_n の第 n 列で余因子展開し，D_n に関する漸化式を求めよ.

(2) D_5 を求めよ.

(新潟大 1998) (m19982005)

0.343 (1) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ の階級 (rank) を計算せよ.

(2) 3 次元ユークリッド空間内の集合

$$\left\{ x_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_i\ (i = 1, 2, 3, 4) \text{ は実数} \right\}$$

の概形を描け．

(新潟大 1998)　　(m19982006)

0.344 行列 $A=\begin{pmatrix}1&0&2&-3\\0&1&2&5\\2&0&8&2\\1&1&4&2\end{pmatrix}$ で与えられる連立方程式 $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 行の基本変形を行うことにより，A の階級 (rank) を求めよ．

(2) 上の連立方程式を解け．

(新潟大 1999)　　(m19992004)

0.345 実数 a に対して，$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&a&1\\2&2&4\end{pmatrix}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x)=x^3-(a+5)x^2+(5a+4)x-6a+4=0$ は，a の値によらない解をもつことを示し，その解を求めよ．

(2) A の固有値を求めよ．

(3) ある a に対して，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ を満たす行列 P を 1 つ求めよ．

(新潟大 1999)　　(m19992005)

0.346 正方行列 X,Y に対して，$|XY|=|X||Y|$ が成り立つことは知っているものとする．ただし，$|*|$ は行列式を表す．A,B,C,D を n 次正方行列，I,O をそれぞれ n 次の単位行列，ゼロ行列とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 行列の積 $\begin{pmatrix}I&O\\-C&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&B\\C&D\end{pmatrix}$ を求めよ．

(2) $\begin{vmatrix}I&B\\C&D\end{vmatrix}=|D-CB|$ となることを示せ．

(3) A が正則（逆行列をもつこと）であるとき，次の各問いに答えよ．

(a) 次の式を満たす n 次正方行列 X を求めよ．

$$\begin{pmatrix}I&O\\X&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&B\\O&D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$$

(b) さらに，$AC=CA$ ならば，

$$\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=|AD-CB|$$

が成り立つことを示せ．

(新潟大 2000)　　(m20002003)

0.347 $A=\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}\\\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}$，　$P=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ (θ は実数) とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 行列 P の逆行列 P^{-1} 及び，行列 A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように θ $(0\leq\theta\leq\pi/2)$ の値を定めよ．

(3) 曲線 $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 2$ の概形を描け.

(新潟大 2000)　　(m20002004)

0.348 以下の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．ここで $i^2 = -1$ である.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

(新潟大 2001)　　(m20012007)

0.349 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & -10 & 14 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -6 & 7 \end{pmatrix}$ として，次の問に答えよ.

(1) 行の基本変形を行うことにより，A の階数 (rank) を求めよ.

(2) 連立方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ の全体のなすベクトル空間の基底を求めよ.

(新潟大 2001)　　(m20012008)

0.350 次の公式を示せ.

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} r) = 0$$

ここで，$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ であり，$\vec{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ である.

(新潟大 2001)　　(m20012009)

0.351 次の問いに答えよ.

(1) A を n 次正方行列とし，E, O をそれぞれ n 次単位行列，n 次零行列とする．このとき，次の (a),(b) を示せ.

(a) 正の整数 m に対して

$$E - A^m = (E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{m-1})$$

が成り立つ.

(b) ある正の整数 m に対して $A^m = O$ となるとき，$E - A$, $E + A$ は共に正則（逆行列を持つこと）である.

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$A^3 = O$ であることを示せ．さらに $(E - A)^{-1}$ および $(E + A)^{-1}$ を求めよ.

(新潟大 2002)　　(m20022004)

0.352 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値を λ_1 , λ_2 ($|\lambda_1| > |\lambda_2|$) とし，対応する固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ とする.

(1) λ_1 , λ_2 , $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ を求めよ.

(2) 正の実数 a, b をとり,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

と定める．このとき a, b の選び方によらずに極限値 $L = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ が定まることを示し，その値 L を求めよ.

(新潟大 2002)　　(m20022005)

0.353　行列 $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求めよ．

(3) 数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ を $x_0=1$，$y_0=0$ とし，$n \geqq 1$ に対して，

$$\begin{cases} x_n &=& 5x_{n-1}-2y_{n-1} \\ y_n &=& -2x_{n-1}+8y_{n-1} \end{cases}$$

と定義する．このとき，一般項 x_n と y_n を求めよ．

(新潟大 2003)　　(m20032004)

0.354　実数 a に対して，$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 行列 A の階数を求めよ.

(2) 同次連立一次方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の実数解を求めよ.

(新潟大 2004)　　(m20042004)

0.355　行列 $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (θは実数) について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるように $\theta\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の値を求めよ.

(3) 曲線 $5x^2+2xy+5y^2-12=0$ の概形を描け.

(新潟大 2004)　　(m20042005)

0.356　次の級数の和を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{a+1}\right)^n \quad (a>0)$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{3^n}$

(新潟大 2005)　　(m20052001)

0.357　実数 a に対して, 行列

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

は固有値 1 をもつとする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) a の値を求めよ.

(2) A のすべての固有値を求めよ.

(3) 正則行列 P で, $P^{-1}AP$ が対角行列となるものがあれば, そのような P を 1 つ求めよ.

(新潟大 2005)　　(m20052002)

0.358 (1) 整数 a に対して， $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & a & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．また，A の逆行列の成分がすべて整数であるとする．このとき，a の値と A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 実数 b, c に対して，行列 $B = \begin{pmatrix} 5 & b \\ c & 4 \end{pmatrix}$ は，異なる固有値をもつとする．さらに，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とする．このとき，b と c の値および B の固有値を求めよ．

(新潟大 2006) (m20062004)

0.359 $\mathbb{R}^3 = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ をユークリッド空間とする．このとき，以下の各問に答えよ．

(1) A を 3 次の実正則行列とする．$\mathbb{R}^3$ の線型変換 T を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ によって定義する．点 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$ を通り，零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{v}$ に直交する平面を W とする．このとき，$T(W)$ は点 $A\boldsymbol{p}$ を通り，ベクトル ${}^t(A^{-1})\boldsymbol{v}$ に直交する平面であることを示せ．ここで，${}^t(A^{-1})$ は，A の逆行列 A^{-1} の転置行列である．

(2) a, b, c を正の実数とし，楕円面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ を C とする．C 上の点 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ における C の接平面の方程式を求めよ．

(新潟大 2006) (m20062006)

0.360 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ について行列式と逆行列を求めよ．

(新潟大 2009) (m20092004)

0.361 (1) A を 3 次実正方行列とする．連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解を持つための必要十分条件は，A が正則（可逆）でないことである．このことを証明せよ．

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1-a & 2 & 2 \\ 1 & 2-a & -1 \\ -1 & 1 & 4-a \end{pmatrix}$ に対して，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解を持つとき，a の値を求めよ．更に，求めた a の値に対して，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解を求めよ．

(新潟大 2009) (m20092006)

0.362 (1) x, y, z に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y - 2z = a \\ 2x - y - z = b \\ 3x + 2y - 5z = c \end{cases}$$

が解を持つための必要十分条件は，$7a + b - 3c = 0$ が成り立つことである．このことを示せ．

(2) 実数 x, y, z に関する関数

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$$

の最小値を求めよ．ここで，$||\boldsymbol{v}||$ は標準内積に関するベクトル $\boldsymbol{v}$ の大きさである．

(新潟大 2009)　　(m20092008)

0.363　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det(A)$ と逆行列 A^{-1} を求めよ．

(新潟大 2010)　　(m20102002)

0.364　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(新潟大 2010)　　(m20102008)

0.365　(1) $a,\ b$ を複素数とするとき, $A = \dfrac{1}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}} \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ はユニタリ行列であることを示せ. ただし, $|a|$, $\bar{a}$ はそれぞれ a の絶対値および複素共役を表す.

(2) $U = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}$ のとき，$U^{-1}BU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ を満たす行列 B について, B^n を求めよ. ただし i は虚数単位である.

(新潟大 2010)　　(m20102012)

0.366　$A = \begin{pmatrix} a+2b & 2-3b \\ 3-4c & a+3c \end{pmatrix}$ とする．1 行 2 列の行列　$X = (x \quad y)$　に対して，　$X' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$　とおく．すべての　x , y　に対して，行列の積 XAX' がつねに O となるような a , b , c の値を求めよ．

(長岡技科大 1992)　　(m19922107)

0.367　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ ，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，行列　$xE-A$　の行列式 $|\,xE-A\,|$　を求めよ．(x の整式で表せ)．

(長岡技科大 1992)　　(m19922108)

0.368　以下の問いに答えよ．

(1) 平面上のベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ について，$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$ が成り立つとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角，$\vec{c}$ と $\vec{a}$ のなす角を求めよ．

(2) 一直線上にない 3 つの定点 $A(a_1,a_2), B(b_1,b_2), C(c_1,c_2)$ がある．A, B, C と異なる点 $P(x,y)$ に対して $z = |\overrightarrow{AP}| + |\overrightarrow{BP}| + |\overrightarrow{CP}|$ とおくとき，次の式を証明せよ．

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AP}|} + \frac{\overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{BP}|} + \frac{\overrightarrow{CP}}{|\overrightarrow{CP}|}$$

(3) ある点 P で z が極小となったとする．このとき前問 (1)(2) を利用して $\angle APB, \angle BPC, \angle CPA$ を求めよ．

(長岡技科大 1994)　　(m19942105)

0.369　$f(t) = e^{-t}\cos t$, $g(t) = e^{-t}\sin t$ とするとき，

(1) $\begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ となる，定数を成分とする 2×2 行列 A を求めよ．

(2) 4 階の導関数 $f^{(4)}(t)$, $g^{(4)}(t)$ を求めよ．

(長岡技科大 1994)　　(m19942106)

0.370 空間の点 (x, y, z) の平面 $z = \sqrt{3}x$ に関する対称点を (x', y', z') とする．$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と表すとき，行列 A を求めよ．

(長岡技科大 1994)　　(m19942107)

0.371 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって表される空間の 1 次変換を f とする．点 $P(x, y, z)$ が球面 : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上を動くとき，点 $f(P)$ と定点 $Q(0, 1, 0)$ との距離の最大値および最小値を求めよ．

(長岡技科大 1995）　　(m19952105)

0.372 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ.（n は自然数，E は単位行列とする.）

(1) $(A - E)(A + \frac{1}{2}E)$ を計算せよ．

(2) x^n を $(x - 1)(x + \frac{1}{2})$ で割った余りを $a_n x + b_n$ とする．a_n, b_n を n の式で表せ．

(3) $A^n = a_n A + b_n E$ と表せることを示せ．

(4) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} A^n$ を求めよ．

(長岡技科大 1996)　　(m19962104)

0.373 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(長岡技科大 1997)　　(m19972106)

0.374 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) A が正則であるための条件を求めよ．

(2) A が正則であるとき，その逆行列 A^{-1} を求めよ．

(長岡技科大 1998)　　(m19982105)

0.375 以下の問いに答えよ．

(1) 点 $P(x, y)$ から x 軸に下ろした垂線の足（P が x 軸上にあるときは P 自身）を $P'(x', y')$ とする．P を P' に移す一次変換を $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すとき，行列 A を求めよ．

(2) 点 $P(x, y)$ から直線 $y = kx$（k は定数）に下ろした垂線の足（P がこの直線上にあるときは P 自身）を $P'(x', y')$ とする．P を P' に移す一次変換を $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すとき，行列 B を求めよ．

(長岡技科大 1999)　　(m19992104)

0.376 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 AB を計算せよ．

(2) 行列式 $|A|$ を求めよ．

(3) $AX = E$ となる行列 X を求めよ．

(長岡技科大 2000)　　(m20002104)

0.377 xyz 空間において, 平面 $H : x + y + z = 0$ に関する対称移動を表す行列を A とする. 以下の各問いに答えよ.

(1) $s + t + u = 0$ を満たす s, t, u について，$A \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}$ を求めよ. また，$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(2) 等式 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$s+t+u = 0$ が成り立っているとき, k, s, t, u を x, y, z で表せ.

(3) 任意の x, y, z に対して, $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を求めよ.

(4) A を求めよ.

（長岡技科大 2004）　　(m20042103)

0.378 連続時間 $t[s]$ の関数 $f(t)$ のフーリエ変換は,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

により計算される．このことを利用して以下の問に答えよ．ただし，$j = \sqrt{-1}$ であり，ω [rad/s] は角周波数を表す．また，a は正の実数とする．

(1) 関数 $f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < t < a \\ 0 & , \quad t < 0,\ t > a \end{cases}$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，$f(t)$ と $|F(\omega)|$ をそれぞれ図示せよ．ただし，$|F(\omega)|$ は複素関数 $F(\omega)$ の絶対値を意味する．

(2) $f(t) = \begin{cases} \exp(-at) & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，$f(t)$ と $|F(\omega)|$ をそれぞれ図示せよ．

(3) $f(t-a)$ のフーリエ変換が $F(\omega)e^{-j\omega a}$ となることを証明せよ．

(4) $f(at)$ のフーリエ変換が $a > 0$ に対して $\dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$ となることを証明せよ．

(長岡技科大 2006)　　(m20062105)

0.379 実数 θ に対して $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とおく．以下の問いに答えなさい.

(1) $R(\theta)K = KR(-\theta)$ を示しなさい.

(2) 原点を通る傾き $\tan\theta$ の直線に関する対称移動を表す行列を $A(\theta)$ とするとき，$A(\theta) = R(2\theta)K$ を示しなさい.

(3) $A\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) A(\theta) = R\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ となる $A(\theta)$ を求めなさい.

(長岡技研大 2007)　　(m20072102)

0.380 2 次の正方行列 A の 4 つの成分は，それぞれ独立に 0 または 1 の値を確率 $\dfrac{1}{2}$ でとるものとする．以下の問いに答えなさい．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる確率を求めなさい．

(2) $A = {}^tA$ となる確率を求めなさい．ただし，${}^tA$ は A の転置行列を表す．

(3) $|A| = 1$ となる確率を求めなさい．ただし，$|A|$ は A の行列式を表す．

(4) 確率変数 $X = |A^2|$ の期待値を求めなさい．

(長岡技科大 2008)　　(m20082101)

0.381 (1) xy 平面上の点 (x, y) の y 軸に関する対称点を (x', y') とするとき，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる行列 A を求めなさい．

(2) xy 平面上の点 (x, y) の直線 $y = ax$ に関する対称点を (x', y') とするとき，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる行列 B を求めなさい．

(3) 行列の積 BA が角度 $\dfrac{\pi}{3}$ の反時計まわりの回転を表すとき，a の値を求めなさい．

(長岡技科大 2009)　　(m20092102)

0.382 大小 2 つのサイコロを投げて出た目をそれぞれ a, b とし, 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ b & 4 \end{pmatrix}$ を作る. 以下の問いに答えなさい.

(1) A が対称行列になる確率を求めなさい.

(2) A が正則行列になる確率を求めなさい.

(3) 行列式 $|A|$ の期待値を求めなさい.

(長岡技科大 2010)　　(m20102101)

0.383 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，次に答えよ．

(1) A の行列式 $|A|$ の値を，第 2 行に関して（余因子）展開することにより求めよ．

(2) A は正則か．正則ならば，その逆行列 A^{-1} を求めよ．

(金沢大 1999)　　(m19992207)

0.384 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ ，$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，次の問に答えよ．

(1) 行列式 $|\lambda I - A|$ が 0 となる λ の値を求めよ．

(2) (1) における λ の値に対して，$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ を満たすベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ をすべて求めよ．

(金沢大 1999)　　(m19992208)

0.385 V を実ベクトル空間とする．

(1) $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ が V の 1 つの基底であることの定義を述べよ.

(2) V を 3 次元列ベクトル空間とし,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおく. (1) の定義に基づき, $\{v_1, v_2, v_3\}$ は V の 1 つの基底であることを示せ.

(金沢大 1999) (m19992209)

0.386 (1) マクローリンの展開

$$\sqrt{1-x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

の係数 a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ.

(2) $\sqrt{1-x} \fallingdotseq a_0 + a_1x$ を用いて, 積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - c\sin^2\theta}\, d\theta \quad (0 < c < 1)$$

の値がおよそ $\dfrac{\pi}{2}\left(1 - \dfrac{c}{4}\right)$ であることを示せ.

(金沢大 2000) (m20002201)

0.387 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$, $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$ となる直交行列 P と α, β, γ を求めよ.

(金沢大 2000) (m20002203)

0.388 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ が成立するような行列 P と α, β, γ $(\alpha < \beta < \gamma)$ を求めよ.

(2) (1) で求めた行列 P とある対角行列 B に対し $X = PBP^{-1}$ とおく. $X^2 = A$ が成立するように行列 B を定めよ.

(金沢大 2001) (m20012203)

0.389 不等式 $\displaystyle\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy < \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ を利用して次の問いに答えよ.
ただし, $D_1 = \{(x, y) : 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$, $D_2 = \{(x, y) : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq 2\}$ とする.

(1) $\displaystyle\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy < \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$ を示せ.

(2) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx < \sqrt{\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)}$ を示せ．

(金沢大 2002)　　(m20022202)

0.390 (1) $y=\cos x$ の第 n 階導関数 $y^{(n)}$ は，

$$y^{(n)} = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\ n=1,2,3,\cdots$$

で与えられることを示せ．

(2) 次の関数の第 n 階導関数 $y^{(n)}$, $n=1,2,3,\cdots$ を求めよ．

(a) $y=(ax+b)\cos x$ $(a, b$ は定数$)$　　(b) $y=\cos^2 x$

(金沢大 2003)　　(m20032201)

0.391 行列 $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$, $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$ となる正則行列 P を 1 つ求めよ．さらに α, β, γ の値を求めよ．

(金沢大 2003)　　(m20032203)

0.392 $A = \begin{pmatrix} 16 & 7 & -29 \\ -12 & -4 & 22 \\ 6 & 3 & -11 \end{pmatrix}$, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ とする．

次の問いに答えよ．

(1) $v = au_1 + bu_2 + cu_3$ をみたす定数 a, b, c を求めよ．

(2) u_1, u_2, u_3 は A の固有ベクトルであることを示し, 対応する固有値を求めよ．

(3) 自然数 n に対して $A^n v$ を求めよ．

(金沢大 2004)　　(m20042203)

0.393 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 & 2 \\ -a & 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ．

(1) 行列 A が固有値 1 をもつときの a 値を求めよ．

(2) (1) で求めた a について, 行列 A の固有値 1 に対する固有ベクトルを求めよ．

(金沢大 2005)　　(m20052201)

0.394 $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ とするとき, 次の問に答えよ．

(1) $1+x-\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!} < f(x) < 1+x-\dfrac{x^2}{2!}$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{4}\right)$ を示せ．

(2) (1) を利用して $\cos(0.1)+\sin(0.1)$ の近似値を小数点以下第 2 位まで求めよ．

(金沢大 2005)　　(m20052202)

0.395 t を実数とし， $A=\begin{pmatrix} 1 & t & t \\ t & 1 & t \\ t & t & 1 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) A の行列式 $\det A$ の値を求めよ．

(2) A の階数を求めよ．

(金沢大 2005) (m20052204)

0.396 (1) 2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，ある数 k とある零行列と異なる 2 次正方行列 B が存在して， $AB=BA=k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ．

(2) t を実数とする．連立一次方程式

$$\begin{cases} 3x+5y+2z &= 0 \\ x+(t+2)y+z &= 0 \\ tx+y+(t-1)z &= 0 \end{cases}$$

が $(x,y,z)=(0,0,0)$ でない解を持つための t についての必要十分条件を求めよ．また，そのときの解を求めよ．

(金沢大 2005) (m20052205)

0.397 a, b は正の実数とする．

(1) $\dfrac{x}{a}=r\cos\theta$, $\dfrac{y}{b}=r\sin\theta$ $(0<r\,,\ 0<\theta<2\pi)$ とおくとき，ヤコビアン

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad \text{を求めよ．}$$

(2) 積分 $\displaystyle\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy$ を計算せよ．ただし， $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ y \geqq 0\,,\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1\right\}$ とする．

(金沢大 2005) (m20052207)

0.398 行列 L を

$$L=\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と定義します．行列 L の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(金沢大 2005) (m20052209)

0.399 行列 $A=\begin{pmatrix} k & \frac{1}{3} \\ 1-k & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ (k は定数， $0<k<1$) について，次の問に答えよ．

(1) A の固有値を求めよ． (2) A を対角化せよ．

(3) $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ $(n=1,2,\cdots)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n+d_n)$ を求めよ．

(金沢大 2006) (m20062201)

0.400 (1) 関数 e^{-x} にマクローリンの定理をあてはめた式を書け．

(2) 上を用いて, m を 2 以上の自然数とするとき, 不等式

$$0 < e^{-1} - \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots - \frac{1}{(2m-1)!}\right) < \frac{1}{(2m)!}$$

が成立することを示せ.

(3) m を 3 以上の自然数とするとき, 不等式

$$0 < e^{-1} - \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots - \frac{1}{(2m-1)!}\right) < \frac{1}{500}$$

が成立することを示せ.

(金沢大 2006) (m20062202)

0.401 A を任意ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して，$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ を満たす $3\times\ 3$ 行列とする.

(1) A を求めよ. (2) A^3 を求めよ.

(3) A の 3 つの固有値及び各固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(金沢大 2007) (m20072201)

0.402 $f(x)$ を $f'(x) = f(x)$, $f(0) = 1$ を満たす関数とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $(e^{-x}f(x))' = 0$ を示せ．また，これを用いて $f(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ.

(3) (2) の結果を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right)$ の値を求めよ.

(金沢大 2007) (m20072202)

0.403 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ とする．次に答えよ.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $n \to \infty$ のとき，$3^{-n}A^n$ はどのような行列に近づくか.

(金沢大 2007) (m20072204)

0.404 何回でも偏微分可能な関数 $u(x, y, z)$ が $\Delta u = 0$ $\left(\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$ をみたしているとする．このとき，$v = x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z}$ に対して，Δv を計算せよ.

(金沢大 2007) (m20072211)

0.405 (1) 自然数 n に対して，集合 $D_n = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq n^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ における関数 $e^{-x^2-y^2}$ の積分 $\displaystyle\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ.

(2) 集合 $R_n = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \leq x \leq n,\ 0 \leq y \leq n\}$ に対して，
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\iint_{R_n} e^{-x^2-y^2}dxdy - \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy\right) = 0$ となることを示せ.

(3) 次の積分の値を求めよ. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

(金沢大 2007) (m20072212)

0.406 連立方程式 $\left\{\begin{array}{r} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0 \\ 4x_1+3x_2+2x_3+\ \ x_4=0 \end{array}\right.$ を満たすベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4$ の全体を V とする.

(1) V は $\boldsymbol{R}^4$ の線形部分空間であることを示せ. (2) V の基底を一つ求めよ.

(3) $\boldsymbol{R}^4$ の基底で, (2) で求めた V の基底を含むものを一つ求めよ.

(金沢大 2007) (m20072213)

0.407 次の $4\times\ 4$ 行列 A とベクトル $\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^4$ について, 以下の問いに答えよ.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 10 & -8 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \\ a \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^4$ に対する連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持つように定数 a を定めよ.

(2) (1) で求めた a に対して, 連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解を求めよ.

(3) 像空間 $\mathrm{Im}A=\{A\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^4\}$ の基底と次元を求めよ.

(金沢大 2007) (m20072214)

0.408 $A=\begin{pmatrix} -5 & -4 & 4 \\ 16 & 15 & -16 \\ 10 & 10 & -11 \end{pmatrix}$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ. (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ.

(金沢大 2007) (m20072215)

0.409 実数を成分とする 2 次正方行列全体がつくるベクトル空間を M とする.
$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\in M$ に対し, 線形写像 $F\ :\ M\to M$ を

$$F(X)=AX-XA \qquad (X\in M)$$

によって定義するとき, M の部分空間

$$\mathrm{Ker}F=\{X\in M\mid F(X)=O\}\,, \quad \mathrm{Im}F=\{F(X)\mid X\in M\}$$

の次元を求めよ. ただし, O は零行列を表す.

(金沢大 2007) (m20072216)

0.410 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値を $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3(\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\lambda_3)$ とする. $i=1,2,3$ に対して, λ_i に対応する固有ベクトルで, その第 1 成分を 1 としたものを $\boldsymbol{u}_i$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $i=1,2,3$ に対して, λ_i および $\boldsymbol{u}_i$ を求めよ.

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 + c\boldsymbol{u}_3$ を満たす定数 a, b, c を求めよ．

(3) 自然数 n に対して，$A^n\boldsymbol{u}_1$ および $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を求めよ．

(金沢大 2008)　　(m20082201)

0.411 $A = \begin{pmatrix} a+b & a & b \\ b & b+c & c \\ a & c & a+c \end{pmatrix}$ とする．次に答えよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & a & c \end{pmatrix} B$ となる行列 B を一つ見つけよ．

(2) A の行列式 $\det A$ を求め，A の逆行列が存在する為の必要十分条件を a, b, c の条件として答えよ．

(金沢大 2008)　　(m20082204)

0.412 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする．次に答えよ．

(1) A の階数（ランク）を求めよ．

(2) ユークリット空間 $\boldsymbol{R}^4$ の線形変換 f を $f(x) = Ax$ で定める．このとき，f の像の正規直交基底を一組求めよ．

(金沢大 2008)　　(m20082205)

0.413 実数 x と正の整数 n に対して，$R_n(x)$ を

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} + R_n(x)$$

によって定める．ただし，$\arctan x$ は $y = \tan x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数である．このとき，次に答えよ．

(1) $1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-t^2)^{n-1} = \dfrac{1-(-t^2)^n}{1+t^2}$ を用いて，$R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-t^2)^n}{1+t^2}dt$ となることを示せ．

(2) $|x| \leq 1$ のとき $R_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ となることを示せ．

(金沢大 2008)　　(m20082208)

0.414 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 行列式 $\det A$ を求めよ．

(2) $\det A = 0$ のとき，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解け．

(3) $\det A \neq 0$ のとき，逆行列 A^{-1} を求めよ．

(金沢大 2009)　　(m20092201)

0.415　行列 $A = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考える．次の問いに答えよ．

(1)　A のすべての固有値を求め，それぞれの固有値に対する固有ベクトルを与えよ．

(2)　$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P をひとつ求めよ．

(金沢大 2009)　　(m20092204)

0.416　任意の x, y, z について，$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y \\ x+z \end{pmatrix}$ となる $3\times\ 3$ 行列 A を考える. 次の問いに答えよ.

(1)　A を求めよ.

(2)　A の固有値 λ_1, λ_2, λ_3 $(\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ と, それぞれに対応する長さ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ を求めよ.

(3)　${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ となる直交行列 P を求めよ. ただし, ${}^tP$ は P の転置行列である.

(金沢大 2010)　　(m20102201)

0.417　関数 $\tan x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ とする. 次の問いに答えよ.

(1)　公式 $\dfrac{d}{dy}\tan y = \tan^2 y + 1$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を利用して

$$(x^2+1)f'(x) = 1 \quad (-\infty < x < \infty)$$

となることを示せ.

(2)　$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$(x^2+1)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$$

が成立することを示せ.

(3)　$m = 1, 2, 3, \cdots$ に対して, 微分係数 $f^{(2m+1)}(0)$ の値を求めよ.

(金沢大 2010)　　(m20102202)

0.418　a, b, c を正の実数として, 行列

$$A = \begin{pmatrix} -(a+c) & a & c \\ a & -(a+b) & b \\ c & b & -(b+c) \end{pmatrix}$$

を考える. 次の問いに答えよ.

(1)　A の階数 (rank) を求めよ.

(2)　連立 1 次方程式

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

の解を求めよ.

(金沢大 2010)　　(m20102204)

0.419 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) 固有多項式 $\Phi_A(t) = \det(tE - A)$ を求めよ. ただし, E は 3 次の単位行列である.

(2) $(A-2E)^2$, $(A-2E)^3$ を求めよ.

(3) 自然数 n に対して A^n を求めよ.

(金沢大 2010)　　(m20102205)

0.420 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(金沢大 2010)　　(m20102213)

0.421 (1) 行列 $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，$M = A + B$ となるような対称行列 A，交代行列 B を求めよ.

註：A が対称行列であるとは ${}^tA = A$ であること（${}^tA$ は A の転置行列を表す），B が交代行列であるとは ${}^tB = -B$ であることを意味する.

(2) (1) で求めた対称行列 A を，適当な直交行列 P によって対角化せよ.（直交行列 P を求める計算の過程も明示すること）

(富山大 1994)　　(m19942302)

0.422 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}(x^x)$　　　(2) $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n x^3 e^x$

(富山大 2000)　　(m20002302)

0.423 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

(1) A の行列式を求めよ.

(2) A^2, A^3, A^4 を求めよ.

(3) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(富山大 2001)　　(m20012305)

0.424 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ．ただし，$\lambda_1 > \lambda_2$ とする.

(2) λ_1, λ_2 に対する固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ のうちで，長さが 1，第 1 成分が正のものを求めよ.

(3) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ は直交することを証明せよ.

(4) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ とするとき，$\mathbf{x} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2$ をみたす実数 k_1, k_2 を求めよ．

(富山大 2001)　　(m20012306)

0.425　次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2x+3}{\sqrt{2x+1}}\right)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\left(x^{\sin x}\right)$　　$(x > 0)$

(富山大 2003)　　(m20032301)

0.426　$2\times\ 2$ 行列 σ_1 が $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられるとき，次の問いに答えよ．

(1) σ_1 の固有値と大きさが 1 の直交固有ベクトルを求めよ．

(2) σ_1 を対角化する変換行列 P を求め，σ_1 を対角化せよ．

(3) 対角化した行列を σ_3 とするとき，$\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 = 2i\sigma_3$ および $\sigma_2\sigma_2 = I$ を満たす行列 σ_2 を求めよ．ここで，i は虚数単位，I は $2\times\ 2$ の単位行列である．

(富山大 2003)　　(m20032306)

0.427　行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) 行列 A は対角化可能か.

(3) 行列 A^3 は直交行列を用いて対角化可能か.

(富山大 2003)　　(m20032307)

0.428　微分方程式

$$y' = 36\left(\frac{x+y}{11x+y}\right)^2$$

を解け.

(富山大 2003)　　(m20032309)

0.429　集合 X から集合 Y への写像 $f : X \to Y$ を考える. X の部分集合 A に対して, $f^{-1}(f(A)) = A$ はつねに成り立つか.

(富山大 2003)　　(m20032310)

0.430　行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$，　$B = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ が，等式 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ を満たす実数 a, b の値を求めよ．また，逆行列 A^{-1}, B^{-1} をそれぞれ求めよ．

(富山大 2004)　　(m20042307)

0.431　行列 $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ および 2 次の正方行列 P について，P が逆行列 P^{-1} をもち，$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ が成り立つとき，α, β は行列 C の固有値であることを証明せよ．また，自然数 n に対して C^n を求めよ．

(富山大 2004)　　(m20042308)

0.432 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) 行列 A の行列式を求めよ.

(2) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(富山大 2004) (m20042311)

0.433 空間の 3 次元座標を $\vec{r} = (x, y, z)$ とし, $|\vec{r}| = r \neq 0$ とする. 微分演算子 $\vec{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ を用いた次の計算の結果を $\vec{r}$ と r または数値で表せ.

(a) $\vec{\nabla} r$ (b) $\vec{\nabla} \cdot \left(\dfrac{\vec{r}}{r^3}\right)$

(富山大 2004) (m20042313)

0.434 写像 $f : R^3 \longrightarrow R^3$ を

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

で定義する. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) f は線形写像であることを示せ.

(2) $V = \{\boldsymbol{x} \in R^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = 0\}$ とおくとき, V は R^3 の部分空間になることを示せ.

(3) V の次元と 1 つの基底を求めよ.

(富山大 2004) (m20042314)

0.435 関数 $f(x, y) = 2xy - x^2 - y^2$ を考える. 座標平面の点 $(1, 2)$ を P とする. 以下の問に答えよ.

(1) 点 P での, x および y に関する偏微分係数を求めよ.

(2) 点 P での, ベクトル $\vec{a} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ 方向の方向微分係数を求めよ.

(3) 点 P での, 曲面 $z = f(x, y)$ の接平面の方程式を求めよ.

(富山大 2005) (m20052303)

0.436 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) A の行列式を計算せよ.

(2) A の逆行列が存在する条件を示し, そのときの逆行列を求めよ.

(3) 連立 1 次方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を解け.

解が存在しない場合は, 解なしと答えよ.

(富山大 2005) (m20052304)

0.437 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(富山大 2005)　　(m20052308)

0.438 2 変数関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で連続であることを示せ.

(2) $f(x,y)$ の点 $(0,0)$ における 1 階偏微分係数を求めよ.

(3) $f(x,y)$ の点 $(0,0)$ における全微分可能性を調べよ.

(富山大 2005)　　(m20052309)

0.439 $f(x) = \log\left(\cos^2 x\right)$ を x で微分せよ.

(富山大 2005)　　(m20052311)

0.440 行列 $S = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と, S を対角化する行列を求めよ.

(富山大 2005)　　(m20052313)

0.441 2× 2 行列 $Z = aI + bJ$ を考える.

ただし, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ および $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ である. また, a と b は実数であり, a と b が同時に 0 になることはないとする.

(1) Z^T を計算し, a, b, I, J で表せ. ここで添字 T は行列の転置を表す.

(2) $Z + Z^T$ と $Z - Z^T$ をそれぞれ a, b, I, J で表せ.

(3) ZZ^T を a, b, I, J で表せ.

(4) Z の逆行列を求め, a, b, I, J で表せ.

(5) J と Z の固有値をそれぞれ求めよ.

(富山大 2006)　　(m20062305)

0.442 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1}(2x) \quad \left(-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}\right)$　　(2) $\dfrac{d}{dx} x e^{x^2}$　　(3) $\dfrac{d}{dx}(\log_e x)^x \quad (x > e)$

(富山大 2007)　　(m20072301)

0.443 2× 2 行列　$L = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-\beta^2} & -\beta/\sqrt{1-\beta^2} \\ -\beta/\sqrt{1-\beta^2} & 1/\sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix}$　とするとき（ただし, $0 < \beta < 1$ とする）, 以下の問いに答えよ.

(1) L による 1 次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を行ったとき, $x'^2 - y'2 = x^2 - y^2$ が成り立つことを示せ.

(2) L が行列の方程式 $L^2 - 2L/\sqrt{1-\beta^2} + I = O$ を満足することを示せ．ただし，I は $2\times\ 2$ の単位行列で，O は $2\times\ 2$ の零行列である．

(3) L の固有値を求めよ．

(4) L と別の $2\times\ 2$ 行列 $M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-\gamma^2} & -\gamma/\sqrt{1-\gamma^2} \\ -\gamma/\sqrt{1-\gamma^2} & 1/\sqrt{1-\gamma^2} \end{pmatrix}$ を用いた 1 次変換

$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = ML \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を行ったとき，$x''^2 - y''^2 = x^2 - y^2$ が成り立つことを示せ．ただし，$0 < \gamma < 1$ とする．

(5) L の逆行列を求めよ．

(富山大 2007)　　(m20072303)

0.444 (1) $f(\theta(t)) = \sqrt{1+\sin^2\theta(t)} + 3\cos\theta(t) + 2$ において，$\dfrac{df}{dt}$ を求めよ．

(2) $f(\theta_1(t)\,,\,\theta_2(t)) = 5 + \cos\theta_1(t) + 2\sin(\theta_1(t)+\theta_2(t))$ において，$\dfrac{df}{dt}$ を求めよ．

(富山大 2007)　　(m20072305)

0.445 次の二重積分を求めよ， $1024\displaystyle\iint_D xydxdy \qquad \left(D\,;\,x^2 \leq y \leq \frac{x}{2}\right)$

(富山大 2007)　　(m20072306)

0.446 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\log_e\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}x^{\frac{1}{x}}$

(3) $\displaystyle\int \sin^{-1}xdx$　　(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x}$

(富山大 2008)　　(m20082301)

0.447 関数 $f(x,y,z) = \exp\{-(x^2+2y^2+z^2)\}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f = c$（c は定数）よって与えられる曲面を等位面という．$f = \dfrac{1}{e}$（e は自然対数の底）となる等位面を S とし，等位面 S が xy 平面と交わる曲線を xy 平面上に図示せよ．

(2) $f = c$ の等位面上の点における法線ベクトルは grad $f(=\nabla f)$ で与えられる．等位面 S 上の点 $P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ における単位法線ベクトルを求めよ．

(3) 等位面 S 上の点 $P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ における接平面の方程式を求めよ．

(富山大 2008)　　(m20082302)

0.448 θ を任意の実数，I を単位行列，$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ として，行列 A が

$A = (\cos\theta)I + (i\sin\theta)\sigma_1$ で与えられるとき，以下の問いに答えよ．ここで i は虚数単位とする．

(1) ${\sigma_1}^2$ を計算せよ．

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) σ_2 の固有値 λ と固有ベクトル ν を求めよ．

(4) $A\sigma_2A^{-1}$ を計算して σ_2 を対角化するように θ を決定せよ．ただし，θ の範囲を $0 < \theta < \pi/2$ とする．また，このときの θ の値を用いた行列 A により，σ_2 の固有ベクトル ν を変換したベクトル $u = A\nu$ を求めよ．

(富山大 2008)　　(m20082303)

0.449 次の微分方程式の解を $y=f(x)$ の形で求めよ．ただし，(1)〜(3) については一般解，また，(4) については特殊解とする．

(1) $x^3\dfrac{dy}{dx}+y=0$　　(2) $x\dfrac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2+y^2}$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4x+2y}{2x+y-1}$　　(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}-10y=0$　$\left(x=0 \text{ の時}\quad y=0,\ \dfrac{dy}{dx}=7\right)$

(富山大 2008)　　(m20082305)

0.450 $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間 V を　$V=\left\{\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} x-y=0 \\ y-z=0 \\ x-z=0 \end{array}\right\}$　で定義するとき，V の次元を求めよ．

(富山大 2008)　　(m20082307)

0.451 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}e^{2\log x}$　　(2) $\dfrac{d}{dx}x^x$　　(3) $\dfrac{d^2}{dx^2}\sin\left(e^x\right)$

(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{4x^2+1}$　　(5) $\displaystyle\int x\log|x|\,dx$

(富山大 2009)　　(m20092301)

0.452 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) A^2 を求めよ．

(2) A の行列式を求めよ．

(3) 逆行列 A^{-1} を求めよ．

(4) 固有値と固有ベクトルを求めよ．

(富山大 2009)　　(m20092303)

0.453 次の微分方程式のついて，(1)〜(3) については一般解を，また，(4) については特殊解をそれぞれ求めよ。

(1) $(y+3x)dx+(x+1)dy=0$

(2) $x\dfrac{dy}{dx}=2x\left(1+x^2\right)-y$

(3) $y''-y=0$

(4) $xdx-e^xdy=0$　　$(x=0 \text{ のとき } y=1)$

(富山大 2009)　　(m20092305)

0.454 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}x^2e^{-2x}$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\log(\tan x)$　$\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$　　(3) $\dfrac{d}{dx}(\cos x)^x$　$\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

(富山大 2010)　　(m20102301)

0.455 (1) 正方行列 A,P,D の間に $P^{-1}AP=D$ の関係があるとき, A^n（n は自然数）を P, P^{-1}, D, n を用いて表せ. ただし, 帰納法などによる証明は不要とする.

(2) $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有ベクトルのうち, 大きさが 1 の二つを $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ とする. ただし, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq k \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ で, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が固有値の小さいほうに対応した固有ベクトルとする. このとき, $Q=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ とした場合の $Q^{-1}BQ$ を求めよ.

(3) (1), (2) の結果をもとに, B^{10} を求めよ. ただし, 帰納法などによる証明は不要とする. なお, 必要ならば $2^{10}=1024,\ 3^{10}=59049,\ 5^{10}=9765625$ の値を用いよ.

(富山大 2010)　　(m20102304)

0.456 ベクトル $a=\begin{pmatrix} 4 \\ 2+i \\ i \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1+0.5i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$

であるとき，$a+b, a-b,\ (a,b), (b,a), \|a+b\|,\ \|a-b\|, \|a\|, \|b\|$ を計算し，三角不等式 ($\|(a,b)\| \leqq\ \|a\|+\|b\|$) およびシュワルツの不等式 ($|(a,b)| \leqq\ \|a\| \cdot \|b\|$) が成り立つことを示せ.

(福井大 2000)　　(m20002410)

0.457 行列 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式の値および固有値を求めよ.

また，この行列の対角化は可能かどうか調べよ.

(福井大 2000)　　(m20002415)

0.458 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ がある.

(1) 行列 A の固有値を λ とすると，λ は $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ を満たさなければならないことを示しなさい.

(2) 前問の行列 A の固有値を求めなさい.

(3) その行列 A の固有ベクトルを求めなさい.

(福井大 2000)　　(m20002416)

0.459 次の 2 つのベクトルがある.

$$\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

外積 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ が $\begin{pmatrix} a_2b_3-b_2a_3 \\ a_3b_1-b_3a_1 \\ a_1b_2-b_1a_2 \end{pmatrix}$ となることを誘導しなさい.

(福井大 2000)　　(m20002417)

0.460 ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の長さおよび $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めなさい.

(福井大 2001)　　(m20012413)

0.461 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を，対称行列と交代行列の和として表しなさい．

(福井大 2001)　　(m20012416)

0.462 以下に二つの線型変換がある．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

(1) これらの行列による変換は平面上でどのような幾何学的意味を持つか説明せよ．

(2) A, B による合成変換の行列を求めよ．

(3) (2) で求めた合成変換の行列の逆変換行列を求めよ．

(4) (2) で求めた合成変換によって，直線 $y = 3x + 2$ はどのような図形に変換されるか．

(福井大 2001)　　(m20012418)

0.463 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(福井大 2001)　　(m20012419)

0.464 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき，$\mathbf{AX} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$ となる正方行列 $\mathbf{X}$ を求めなさい．

(福井大 2003)　　(m20032412)

0.465 次の行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ がある．

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) $4\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$ を計算しなさい．

(2) $\mathbf{CD}$ と $\mathbf{DC}$ の計算をしなさい．

(福井大 2003)　　(m20032413)

0.466 次の行列 $\mathbf{B}$，ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ がある．3 次元の空間でベクトル $\mathbf{a}$ は (x_1, y_1, z_1) の点を表し，ベクトル $\mathbf{b}$ は $(1, 0, 0)$ の点を表し，ベクトル $\mathbf{c}$ は直線を表す．

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \text{ ここで}t\text{は任意の実数}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & 0 & \sin\frac{\pi}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\frac{\pi}{6} & 0 & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

(1) 線形変換（一次変換）$\mathbf{y_1} = \mathbf{Bb}$ によって，ベクトル $\mathbf{b}$ は 3 次元座標でどこに移されるかわかるように図に描きなさい．

(2) 線形変換（一次変換）$\mathbf{y_2} = \mathbf{Bc}$ によって，ベクトル $\mathbf{c}$ は 3 次元座標でどこに移されるか．ベクトル $\mathbf{y_2} = \mathbf{Bc}$ を図に描き，どのような形か説明しなさい．

(福井大 2003)　　(m20032415)

0.467 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ の表わす 1 次変換によって，直線 $x - y + 1 = 0$ が直線 $x + 2y + 3 = 0$ に写されるとき，a, b の値を求めよ．

(福井大 2003)　　(m20032416)

0.468 (1) 次の定積分を示せ．m と n は整数とする．

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx dx = 0$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos nx dx = 0$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0\,(m \neq n) \\ \pi\,(m = n) \end{cases}$

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0\,(m \neq n) \\ \pi\,(m = n) \end{cases}$

(2) $x(t)$ を周期 T の周期関数とするとき，$x(t)$ を次のように書くことができる．

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2\pi k}{T}t + b_k \sin\frac{2\pi k}{T}t\right)$$

このとき，(1) の知見を活用し，$a_k\ (k \geq 0)$, $b_k\ (k \geq 1)$ を $x(t)$ を用いて表せ．

(福井大 2003) (m20032417)

0.469 次の関数の導関数を求めよ．

(1) $y = x^x \quad (x > 0)$ (2) $y = \dfrac{2x+3}{x^2+2}$

(2) $y = x^5 \log x$ (4) $y = \arcsin x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$

（福井大 2004） (m20042403)

0.470 方程式

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 6 & 3 \\ 5 & 3 & -10 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

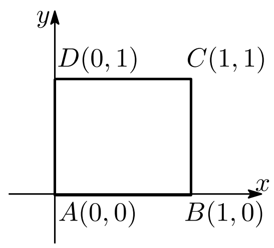
を解いて a, b, c, d を求めなさい．

(福井大 2004) (m20042417)

0.471 xy 平面上における同一平面上への一次変換が

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で与えられている．xy 平面上の図形 $ABCD$ が，どのような図形に変換されるか図示しなさい．



(福井大 2004) (m20042418)

0.472 次の 2 つの列ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ からなる行列 A がある．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A のランク（階数）はいくらか．

(2) 次のベクトルと行列の積を計算しなさい．

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(3) 行列 A から得られる 2 つの固有ベクトルを求めなさい.

(4) 正規化された固有ベクトルを書きなさい.

(5) 正規化された 2 つの固有ベクトル（列ベクトル）からなる 2 行 2 列の正方行列 $\boldsymbol{P}$ を求めなさい.

(6) 列ベクトルを $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ とする. ${}^t(\boldsymbol{Pb})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Pb})$ を計算しなさい. ただし, ${}^t(\boldsymbol{Pb})$ は $\boldsymbol{Pb}$ の転置を意味している.

(7) ${}^t(\boldsymbol{Pb})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Pb}) = \dfrac{3}{2}$ が表す図形を図 B に描きなさい. そして, その図形がどのような形状か詳しく説明しなさい.

(福井大 2004)　　(m20042419)

0.473 (1) 関数 x のマクローリン展開は次式で表される.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

これをもとに, 次の関係式を示せ.（注意： $f^{(n+1)}(\theta x)$ は 'θx' の $(n+1)$ 階導関数である）

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}\ ,$$

$$R_{n+1} = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^{n+1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

(2) (1) の関係式で $n = 1$ とした関数 x のマクローリン展開は次式で表される.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+\theta x)^2} \qquad (0 < \theta < 1)$$

これを用いて, $\log 1.01$ の近似値として 0.01 を採用したときの誤差は 0.00005 より小であることを示せ.

(福井大 2005)　　(m20052402)

0.474 次の行ベクトル $\boldsymbol{a}$ と行列 $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{D}$ がある. 以下の計算をせよ. ただし, 計算できない場合は, 計算できないと記せ.

$$\boldsymbol{a} = (3 \quad 4 \quad 5) \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 9 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{aB} =$

$\boldsymbol{Ba} =$

$\boldsymbol{CD} =$

$\boldsymbol{DC} =$

(福井大 2005)　　(m20052406)

0.475 次の行列に対応する固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(福井大 2005)　　(m20052408)

0.476 空中を速度の二乗に比例した空気抵抗を受けながら落下している質量が m $[kg]$ の物体の運動方程式は, 地表から鉛直上向きに x 座標をとれば,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - mg$$

で与えられる. ただし, g $[m/s^2]$ は重力加速度の大きさ, c $[kg/m]$ は比例定数とする.

十分高い上空から落下させたときの終端速度 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{dx}{dt}$ を求めよ.

(福井大 2005) (m20052410)

0.477 2 行 2 列の行列

$$\boldsymbol{A}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

(1) $\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{A}(y) = \boldsymbol{A}(x+y)$

(2) $\boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{B}(y) = \boldsymbol{A}(x-y)$

(3) $\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}(y) = \boldsymbol{B}(x+y)$

(4) $\big(\boldsymbol{A}(x)\big)^n = \boldsymbol{A}(nx)$

(福井大 2005) (m20052411)

0.478 次の行列 A について，以下の問いに答えよ． $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(1) A の固有値を求めよ． (2) A を対角化する正則行列 P を求めて，A を対角化せよ．

(福井大 2006) (m20062410)

0.479 次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2) $2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) ${}^T\!\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(福井大 2006) (m20062421)

0.480 行列 A の固有値 λ と固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ に関する設問である．

(1) A, λ, $\boldsymbol{x}$ の間に成り立つ関係を示せ． (2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ．

(3) (2) の解に対応する固有ベクトルを一つ示せ．

(福井大 2006) (m20062422)

0.481 $\left(2x^2 - \dfrac{1}{3x}\right)^8$ の展開式において，x^7 の係数を求めよ．

(福井大 2006) (m20062424)

0.482 次の計算を行え（途中経過も書くこと）．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{e^{2x^2}-1}=$ (2) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\tan x}\right)=$

(福井大 2007) (m20072401)

0.483 3 次元の列ベクトルのつくる線形空間（R^3）において，

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

をベクトルとする．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は一次従属であるか一次独立であるかを示せ．

(2) もし一次従属であるなら，ベクトル $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は，直線上にあるか，あるいは平面上にあるかを示せ．

(3) もし一次独立であるなら，ベクトル $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を正規直交化せよ．ただし，正規直交化とは $\vec{p}$ は $\vec{a}$ の一次結合，$\vec{q}$ は $\vec{a}$, $\vec{b}$ の一次結合，$\vec{r}$ は $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ の一次結合であるような正規直交系 $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ をいう．

(福井大 2007) (m20072412)

0.484 (1) 関数 $f(x)=\log(1+x)$（ただし $x>-1$）の 1〜4 階の導関数（つまり $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, および $f^{(4)}(x)$ ）をそれぞれ求めよ．

(2) (1) の結果にもとづき, 上で定義された関数 $f(x)$ の n 階の導関数を推測し，$f^{(n)}(x)$ が実際に推測された関数で表現されることを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) (2) の結果を使い，関数 $f(x)$ のマクローリン展開（$x=0$ でのテーラー展開）を，無限級数の和の形 $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\text{の形}\right)$ で求めよ,

(4) (3) の結果を用いて，関数 $g(x)=\log\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)$（ただし $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$）のマクローリン展開を，無限級数の和の形で求めよ（経過を書く必要はあるが，証明の必要はなし）．

(福井大 2008) (m20082401)

0.485 次の行列 $\boldsymbol{B}$ がある．以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{B}$ の固有値と固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{B}^3$ を計算せよ．

(3) $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{B}$ の絶対値の小さい方の固有値に対応する固有ベクトルとする時，$\boldsymbol{B}^{10}\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(福井大 2008) (m20082405)

0.486 次のような連立方程式がある．以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\qquad\text{ここで,}\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\4&6&3\\2&9&3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

行列 $\boldsymbol{A}$ は下の 3 つの列ベクトルを使って，次のように表現できる．

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3)\qquad\text{ここで,}\quad \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\6\\9\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の階数（ランク）を求めよ.

(2) 連立方程式の解を求めよ.

(3) 列ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は一次独立か一次従属か答えよ. もしそれらが一次従属なら, $\boldsymbol{a}_1$ を $\boldsymbol{a}_2$ と $\boldsymbol{a}_3$ の一次結合として表現せよ.

(福井大 2008)　(m20082406)

0.487 (1) 次の行列の逆行列を求めよ. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

(2) α を実数とする. このとき, 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(a) A の行列式を計算せよ.　(b) A の階数を求めよ.

(3) 三つのベクトル $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ x \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ が線形従属（一次従属）となるような x の値を求めよ.

(福井大 2008)　(m20082409)

0.488 次の値を求めよ.

(1) $\cos 55^\circ + \cos 65^\circ + \cos 175^\circ$　(2) $\log_3 9\sqrt{5} + \dfrac{1}{2}\log_3 \dfrac{1}{5}$　(3) $\left(\sqrt[3]{27^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(4^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$

(福井大 2008)　(m20082412)

0.489 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ について, 次の計算をしなさい.

(1) AB　(2) BA　(3) $2A + 3\,{}^tB$　（ただし, ${}^tB$ は B の転置行列を示す）

(福井大 2008)　(m20082419)

0.490 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を λ, 固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする時, 以下の問いに答えよ.

(1) $A, \lambda, \boldsymbol{x}$ の間に成立する関係を示せ.

(2) 固有値を求めよ.

(3) 各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2008)　(m20082420)

0.491 (1) 次の関数を微分せよ.

(a) $y = \sin^3 4x$

(b) $y = a^x$

(2) 極座標系 (r, θ) についての方程式 $r = 2a\cos\theta$ の $\theta = \alpha$ における接線の方程式を求める. 以下の各問に従って解答せよ.

なお, 必要に応じて右下の公式を利用せよ.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 2A = 2\sin A\cos A \\ \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A \\ \cos(A \pm B) = \cos A\cos A \mp \sin A\sin B \end{array} \right\}$$

(a) 極座標系 (r,θ) と直交座標系 (x,y) との関係を求めよ．

$x=$

$y=$

(b) $\theta=\alpha$ における接線の傾き dy/dx を求めよ．

$$\frac{dy}{dx}_{(\theta=\alpha)}=$$

(c) $\theta=\alpha$ における接線の方程式を求めよ．ただし，解答は途中の計算を示すとともに，$\boxed{}$ 内に記号または数字を入れて方程式を完成せよ．

$$\frac{1}{r}=\frac{\cos\left(\boxed{}\boxed{}-\boxed{}\right)}{\boxed{}a\cos^2\boxed{}}$$

(福井大 2009)　　(m20092401)

0.492 次の行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ について　積 $\boldsymbol{AB}$ および $\boldsymbol{BA}$ を計算せよ．

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&-1&7\end{pmatrix}\qquad\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5&1\\2&0\\-1&4\end{pmatrix}$$

(福井大 2009)　　(m20092412)

0.493 次の行列 C の固有値を求めよ．また，固有値の中で負の値をもつ固有値に対する固有ベクトルも求めよ．

$$C=\begin{pmatrix}6&0&-4\\0&-3&0\\6&6&4\end{pmatrix}$$

(福井大 2009)　　(m20092413)

0.494 次の行列 A について以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix}6&0&-4\\0&-3&0\\6&6&-4\end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) 行列 A は対角化可能か．可能ならば対角化せよ．

(福井大 2009)　　(m20092415)

0.495 (1) 次の関数の導関数を求めよ．

$$f(x)=x\sqrt{x^2+a}+a\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$$

(2) 次の関数の不定積分を求めよ．

$$f(x)=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

(福井大 2009)　　(m20092416)

0.496 z が変数 $x,\ y$ の関数であり，x と y がともに t の関数ならば，

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}$$

となることを示せ．

(福井大 2010)　　(m20102406)

0.497 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ がある.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{A}^n \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ．n は整数とし，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 以外の $\boldsymbol{x}$ を求めること.

(福井大 2010) (m20102409)

0.498 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin x - x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right)$ (3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n+2}{3n^2+4}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{9n^2+2n} - 3n\right)$ (5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

(福井大 2010) (m20102413)

0.499 $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ.

次に, 得られた固有値の中で負の固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2010) (m20102414)

0.500 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値および対応する固有ベクトルを求めよ．また，直交行列を用いて A を対角化せよ.

(静岡大 2004) (m20042506)

0.501 (1) ベクトルの組 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が 1 次独立であることの定義を述べよ.

(2) 次のベクトルの中から 1 次独立なベクトルの組を選び, 残りをそれらの 1 次結合で表せ.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ a_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(3) 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.

(静岡大 2005) (m20052503)

0.502 $3\times\ 3$ 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ とおく．次の問に答えよ.

(1) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2) 連立方程式 $\begin{cases} -5x + 10y = 5 \\ 2x - 3y - \dfrac{1}{2}z = 5 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$ を解け.

(静岡大 2006) (m20062506)

0.503 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする．次の問に答えなさい．

(1) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めなさい．　　(2) 行列 A の固有値を求めなさい．

(静岡大 2006)　　(m20062512)

0.504 (1) 関数 $f(x) = \sin x \cos x$ の原点を中心とするテイラー級数を求めよ.

(2) 複素数 $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{14}$ を $x + iy$ の形に改めよ. （i は虚数単位）

(3) 2 変数関数 $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$ の極値を求めよ.

(静岡大 2008)　　(m20082501)

0.505 (1) 常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = xe^{x+y}$ の一般解を求めよ.

(2) 常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\cos x}{\sin x} y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ の初期条件 $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$ を満たす解を求めよ.

(静岡大 2008)　　(m20082503)

0.506 次の行列は対角化できるか調べよ. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(静岡大 2008)　　(m20082510)

0.507 行列 $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ の固有値とその固有値に対する固有空間を求めよ.

(静岡大 2009)　　(m20092502)

0.508 次の行列の逆行列を求めなさい.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(静岡大 2009)　　(m20092511)

0.509 (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & s^2 & 0 \\ 1 & s & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$ とする. このとき, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ が一意に求められるための条件を与えなさい. （また; この条件を条件 C とする）.

(2) 条件 C を満たさない場合, つまり $\boldsymbol{x}$ が一意には求まらない場合の解 $\boldsymbol{x}$ を求めなさい.

(静岡大 2009)　　(m20092512)

0.510 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(2) A を直交行列で対角化せよ.

(3) n を自然数とするとき, A^n を求めよ.

(静岡大 2010)　　(m20102504)

0.511 変数 (r,θ) $(r \geq 0\ ,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ から変数 (x,y) への変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

を考える．また領域 D を

$$D = \{(x,y) \quad ;\ -x \leq y \leq x\}$$

によって定義する．

(1) (x,y) が領域 D を動くとき (r,θ) が動く範囲を求めよ．また，その対応が 1 対 1 であることを示せ．

(2) 次の積分の値を上記の変数変換を用いて求めよ．

$$\iint_D \exp(-x^2-y^2-xy)dxdy$$

ここで積分の範囲は領域 D である．

(岐阜大 1997)　　(m19972601)

0.512 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して $P^{-1}AP = D$ が成立するような正則行列 P および対角行列 D を求めよ．

(岐阜大 2003)　　(m20032607)

0.513 下表のデータに対する最小 2 乗近似 1 次式を求めよ.

K	1	2	3	4	5
x_k	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
f_k	0.25	1.2	2.0	3.1	4.4

近似 1 次式は, $p(x) = a + bx$ とする.　誤差 $G\left(=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=5}|f_k - p(x_k)|^2\right)$ を最小にするように, 係数 a , 係数 b を決定せよ.

(岐阜大 2004)　　(m20042607)

0.514 $f(x)$, $g(x)$ を微分可能な x の実関数とする. $(f(x)g(x))'$ は, $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ として表されることを示しなさい. ただし, $'$ は, x に関する導関数を表すものとする.

(岐阜大 2005)　　(m20052611)

0.515 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ による $R^2 \longrightarrow R^2$ の線形写像 $A : \boldsymbol{x} \longrightarrow A\boldsymbol{x}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 像 ImA を示しなさい.

(2) 核 Ker$A$ を示しなさい.

(3) $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ の解 $\boldsymbol{x}$ をすべて求めよ. 解が存在しない場合には, その理由を述べよ.

(4) $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の解 $\boldsymbol{x}$ をすべて求めよ. 解が存在しない場合には, その理由を述べよ.

(岐阜大 2005)　　(m20052612)

0.516 方程式 ${x_1}^2 + 2x_1x_2 + 3{x_2}^2 = 1$ によって表される R^2 内の図形を次のやり方にしたがって求めよ.

(1) 方程式 ${x_1}^2+2x_1x_2+3{x_2}^2=(x_1,x_2)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ となる対称行列 A を求めよ．

(2) A のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(3) ２次の直交行列 P を使って，PAP^T が対角行列（Λ とする）となるようにしたい．ただし，^{T} は, 転置行列を表す．直交行列 P とこの対角行列 Λ を求めよ．

(4) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ によって座標変換を行ない，(y_1,y_2) 座標で先の方程式で表される図形の概形を描きなさい．

(5) (4) の図形の中に，(x_1,x_2) 座標の座標軸を書き入れなさい．

(岐阜大 2005)　　(m20052613)

0.517 行列 A を対角化せよ．

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(岐阜大 2005)　　(m20052615)

0.518 ３行３列の行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} x-a & 2x & 2x \\ 2a & a-x & 2a \\ 0 & 0 & -a-x \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ．

(1) この行列の行列式 $|\boldsymbol{A}|$ を求めよ．

(2) この行列式の値がゼロとなる，すなわち $|\boldsymbol{A}|=0$ を満たす，x を求めよ．

(岐阜大 2006)　　(m20062601)

0.519 次の３つの行列について，以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $\det A$, $\det B$, $\det C$ を求めよ．

(2) 行列 A のすべての固有値，および，各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(3) 行列 C の階数 (rank C) を求めよ．

(岐阜大 2006)　　(m20062613)

0.520 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で表される１次変換によって，直線 $y=mx$ 上の点が，同じ直線 $y=mx$ 上の点に変換されるとき，m の値を求めよ．

(岐阜大 2006)　　(m20062619)

0.521 連立一次方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解け．

(岐阜大 2007)　　(m20072602)

0.522 n 次正方行列 A が　$A^3=O$　をみたしているとする．ただし，O は成分がすべて 0 の行列である．

(1) $|A| = 0$ であることを示せ．ただし，$|A|$ は A の行列式である．

(2) $n = 2$ とする．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくとき，$A^2 - (a+d)A = O$ であることを示せ．

(3) $n = 2$ ならば $A^2 = O$ であることを示せ．

(岐阜大 2007)　　(m20072603)

0.523 次の行列 A に対して以下の問いに答えよ．　$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(1) A の二つの固有値とそれぞれに対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) A を対角化する行列 P，つまり，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような P を求めよ．

(3) 次の連立微分方程式を解け．　$\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$，　$x_1(0) = 1$，$x_2(0) = 2$

(岐阜大 2007)　　(m20072612)

0.524 次の行列の固有値および固有ベクトルを求めよ．　$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(岐阜大 2007)　　(m20072622)

0.525 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(岐阜大 2007)　　(m20072625)

0.526 次の 2 行 2 列の行列 A　　$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$　　について，次の問いに答えよ．

(1) この行列 A の固有値 λ を求めよ．

(2) 上記 (1) の固有値 λ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{X}$ を求めよ．

(岐阜大 2008)　　(m20082601)

0.527 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) この行列の 2 つの固有値 λ_1 と λ_2 を求めよ．

(2) A^{100} を求めよ．

(岐阜大 2008)　　(m20082604)

0.528 次の 3 次元実ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が線形独立であるために x が満たすべき条件を答えなさい．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x-1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ x-1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} x-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(岐阜大 2008)　　(m20082606)

0.529 次の 3 次行列 A について (1)～(3) に答えなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値を求めなさい.

(2) A の各固有値に対応する固有ベクトルを求めなさい.

(3) A を対角化する正則行列 P と $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(岐阜大 2008) (m20082607)

0.530 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ がある.

(1) $|A|$ の値を求めよ. (2) A の逆行列を求めよ.

(3) A の固有値を求めよ. (4) A の固有ベクトルを求めよ.

(岐阜大 2008) (m20082610)

0.531 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_x^1 y^2 e^{xy} dy\right) dx$

(岐阜大 2008) (m20082614)

0.532 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

(岐阜大 2008) (m20082617)

0.533 2 行 2 列の行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ に対し，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ となるような 2 行 2 列の正則行列 P と a, b の組を 1 つ求めよ.

(岐阜大 2009) (m20092602)

0.534 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について

(1) $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = 0$ を示せ．ただし．E は単位行列とする.

(2) $A^2 = A$ となる A をすべて求めよ.

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ のとき，A^n を求めよ.

(岐阜大 2009) (m20092611)

0.535 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ がある．以下の問いに答えよ.

(1) 行列式 $\det A$ を求めよ.

(2) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) 連立方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を解け.

(岐阜大 2009)　　(m20092618)

0.536 (1) 次の行列 A の階数 (rank$A$) を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の連立方程式が解をもつような定数 a の値を求め, そのときの一般解を示せ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & a & 1 \\ a & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ a \end{pmatrix}$$

(岐阜大 2010)　　(m20102602)

0.537 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) 行列 $B = A^2 - 4A - 4E$ とするとき, 行列の積 BA が零行列になることを示せ. ただし, E は 3 次の単位行列とする.

(3) xyz 空間の点 $P = (x, y, z)$ から, XYZ 空間の点 $Q = (X, Y, Z)$ への一次変換 T を行列 A を用いて次のように定める.

$$T\ :\ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

xyz 空間上の任意の点 P は, 変換 T によって XYZ 空間内の同一の平面 H 上の点 Q にうつる. その平面 H の方程式を求めよ.

(岐阜大 2010)　　(m20102603)

0.538 ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のなす角 θ が $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{3\pi}{2}$ を満たすとき，点 (x, y) の存在する領域を x，y に関する不等式で表せ.

(豊橋技科大 1996)　　(m19962706)

0.539 以下の文章の空欄に適当な式を記入せよ.

(1) 連続関数 $f(x)$ の微分は次の公式で定義される.

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\boxed{\ 1\ } - f(x)}{h}$$

この公式に基づき e^x の微分を求めよう.

$$(e^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{\boxed{\ 2\ }}{h}$$

ここで, $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ と展開できることを利用すると,

$$\begin{aligned} (e^x)' &= e^x \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \cdots + \frac{\boxed{\ 3\ }}{n!} + \cdots \right) \\ &= e^x \lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \cdots + \frac{\boxed{\ 4\ }}{n!} + \cdots \right) \\ &= \boxed{\ 5\ } \end{aligned}$$

と求まる.

(2) x^x の微分を次の手順で求めよう．ただし，$x>0$ とし，また自然対数を log で表すものとする．

$y=x^x$ の両辺の対数をとると，

$$\log y = \boxed{6\qquad}$$

この式の両辺を x で微分すると，

$$\boxed{7\qquad} = \boxed{8\qquad} + x\cdot\frac{1}{x} = \boxed{9\qquad} + 1$$

この式から，y' を x で表すと，

$$y' = \boxed{10\qquad}$$

と求まる．

(豊橋技科大 1997)　　(m19972703)

0.540 $0 \leqq x \leqq \pi$ で定義された関数 $f(x)$ が以下のように与えられている．

$$f(x)=\begin{cases} +1 & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ -1 & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi\right) \end{cases}$$

$f(x)$ を $g(x)$ で近似するとき，近似誤差 I は以下の積分と考えるものとする．

$$I=\int_0^{\pi}\big(f(x)-g(x)\big)^2\,dx$$

(1) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}\cos x\,dx$ を計算せよ．

(2) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}(\cos x)^2\,dx$ を計算せよ．

(3) 定数 a を用いて，$g(x)=a\cdot\cos x$ で近似するとき，誤差 I を計算せよ．

(4) $g(x)=a\cdot\cos x$ で近似するとき，誤差 I を最小にする a を計算せよ．

公式 $\cos a\cdot\cos b=\dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$ を利用してもよい．

(豊橋技科大 1997)　　(m19972705)

0.541 行列 $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の (1) P^2 (2) P^{-1} を求めよ．

(豊橋技科大 1997)　　(m19972707)

0.542 $x>0$ であるとき，以下の不等式が成り立つことを示せ．ただし，log は自然対数を表す．

(1) $\log(x+1)<x$

(2) $\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-1<\displaystyle\int_0^x\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt$

(豊橋技科大 1998)　　(m19982708)

0.543 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ とするとき，

A の転置行列 ${}^tA$ と A^2 および逆行列 A^{-1} を求めよ．

(豊橋技科大 1998)　　(m19982711)

0.544 平面上で直線 $y=3x+2$ 上の点は，変換行列が $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ である一次変換により，どのような図形上に写像されるか答えよ．

(豊橋技科大 1998)　　(m19982712)

0.545 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする．次の関係を満たす行列 X, Y をそれぞれ求めよ．

$$AX=YA=B$$

(豊橋技科大 1999)　　(m19992707)

0.546 式（イ）,（ロ）,（ハ）に関して各問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{（イ）}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{（ロ）}$$

$$z=3x^2+2\sqrt{3}xy+5y^2-4\sqrt{3}x+4y \qquad \text{（ハ）}$$

(1) 式（イ）の A の行列式を求めよ．

(2) 式（ロ）の固有値 λ を求めよ．

(3) 式（ロ）の固有ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めよ．

(4) x, y, z で表される 2 次曲面（ハ）を x, y, z に関して座標変換し，標準形で表せ．標準形とは，楕円面, 一葉双曲面, 二葉双曲面, 楕円放物面, 二次すい面を指す．

(豊橋技科大 1999)　　(m19992708)

0.547 $\mathbf{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{d}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするとき，以下の二つの問いに答えよ．

(1) ベクトル $\mathbf{d}$ をベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の 1 次結合として表せ．

(2) 一次変換 f に対して，

$$f(\mathbf{a})=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad f(\mathbf{b})=\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f(\mathbf{c})=\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

であるとき，$f(\mathbf{d})$ を求めよ．

(豊橋技科大 2000)　　(m20002707)

0.548 次の対称行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．また，A を直交変換によって対角行列になおす直交行列を求めよ．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

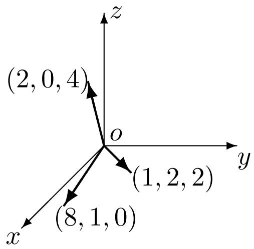
(豊橋技科大 2000)　　(m20002708)

0.549 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+4+6+\cdots+2n}{n^2}\right)$

(豊橋技科大 2001)　　(m20012707)

0.550 3 本のベクトル：

$$a = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

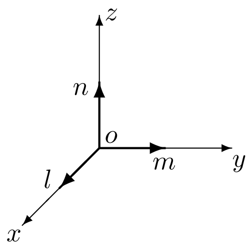


を 3 辺とする平行 6 面体を，これらを列ベクトルとする行列 A

$$A = (a, b, c) = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

で表すとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) この平行 6 面体と体積の等しい立方体を，下図に示す基底ベクトル (l, m, n) を用いて，上と同様に行列 $B = (l, m, n)$ で表せ．



(2) 平行 6 面体 A を，変数 $PA = B$ により体積の等しい立方体 B に変換する行列 P を求めよ．

(豊橋技科大 2001)　　(m20012709)

0.551 列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を用いて，列ベクトル $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ を表せ．

(豊橋技科大 2003)　　(m20032706)

0.552 列ベクトル $\mathcal{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が平面上の点の座標 (x, y) に対応するとき，次の行列 A を用いて $A\mathcal{X}$ で表される 1 次変換について，以下の問に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 平面上の点 $(1, 2)$ はどんな点に移るか．

(2) 平面上の直線 $x + 4y - 1 = 0$ はどのような直線に移るか．

(豊橋技科大 2003)　　(m20032708)

0.553 行列 F によって点 (x, y) を点 (x', y') に移す次の 1 次変換

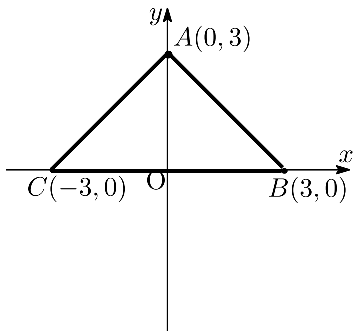
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

がある. この 1 次変換が, 点 $(2, -1)$ を点 $(4, 4)$ に, 点 $(-1, 3)$ を点 $(-2, -7)$ にそれぞれ移すとき, 以下の各問いに答えよ.

(1) 行列 F を求めよ.

(2) 行列 F の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(3) 下図の点 A, B, C に対して, 行列 F による 1 次変換を n 回行って移る点をそれぞれ A_n, B_n, C_n とする. $n = 1$ および $n = 2$ のとき, 三角形 $A_1B_1C_1$ と三角形 $A_2B_2C_2$ を各頂点の座標を入れて図示せよ.



(4) 三角形 $A_nB_nC_n$ の面積を S_n とするとき, S_n を n を用いて表せ.

(豊橋技科大 2004)　　(m20042707)

0.554 $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^8$ を計算すると，$A + Bi$ となる．A および B を求めよ. ただし，A と B は実数とする.

（豊橋技科大 2004）　　(m20042709)

0.555 $\left(\dfrac{i}{1-i} + \dfrac{1-i}{i}\right)^2$ を計算すると，$A + Bi$ となる. A および B を求めよ. ただし, i は虚数単位, A と B は実数とする.

(豊橋技科大 2005)　　(m20052701)

0.556 複素数 $z_1 = \sqrt{3} + i$，$z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ について，次の値を求めよ．ただし，$\mathrm{Re}(z)$ は z の実部を，$|z|$ は z の絶対値を表す.

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)|z_2|^2$$

(豊橋技科大 2006)　　(m20062701)

0.557 列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $(\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b})X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が 1 次独立であることを示せ.

(3) 列ベクトル $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の 1 次結合で表せ.

(4) 実数を成分とする 2 次元列ベクトル全体のなす集合 $\boldsymbol{R}^2$ の正規直交基底 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ を，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ から作れ.

(豊橋技科大 2006)　　(m20062704)

0.558 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda_1 = -1$ と $\lambda_2 = 5$ である．以下の問に答えよ.

(1) A の固有値が $\lambda_1 = -1$ と $\lambda_2 = 5$ であることを示せ.

(2) 固有値 λ_1 に対する固有空間 W_1 の基底と次元を求めよ.

(豊橋技科大 2006)　　(m20062705)

0.559 xy 直交座標系の点列 (x_i, y_i), $i = 1, \cdots, N$ に対し，各点からの垂直距離の 2 乗和が最小となるような直線を求めたい．次の各問いに答えよ.

(1) 次の文章中の空欄 $\boxed{\quad ア \quad}$〜$\boxed{\quad コ \quad}$ に適当な数式を入れよ．

各点に単位質量を置いたときの重心を G とすると，その座標は

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\quad ア \quad} \\ \boxed{\quad イ \quad} \end{pmatrix} \tag{1}$$

となる．xy 座標系に対し，この重心 G を原点として，角度 θ で回転させた uv 座標系を考える．このとき

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \tag{2}$$

とおけば，(x_i, y_i) と (u_i, v_i) との関係は θ を用いて

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\quad ウ \quad} & \boxed{\quad エ \quad} \\ -\boxed{\quad エ \quad} & \boxed{\quad ウ \quad} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} \tag{3}$$

で与えられる．もし求めたい直線を u 軸にとれば，問題は

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^{N} v_i^2 \tag{4}$$

で定義される $J(\theta)$ を最小にする角度 θ を求めることに等しい．

式 (3) の v_i を θ で微分し，u_i を用いて表すと

$$\frac{\partial v_i}{\partial \theta} = \boxed{\quad オ \quad} \tag{5}$$

となるから，式 (4) を θ で微分して 0 とおけば

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = -2\sum_{i=1}^{N} u_i v_i = 0 \tag{6}$$

を得る．この式 (6) に，式 (3) を代入することにより，

$$\boxed{\quad カ \quad} \sum_{i=1}^{N} x'_i y'_i = \boxed{\quad キ \quad} \sum_{i=1}^{N} ({x'_i}^2 - {y'_i}^2) \tag{7}$$

となり，次式を得る．

$$\frac{2\boxed{\quad キ \quad}}{\boxed{\quad カ \quad}} = \frac{2\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x'_i y'_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} ({x'_i}^2 - {y'_i}^2)} \tag{8}$$

式 (8) の左辺は，倍角の公式により

$$\frac{2\boxed{\quad キ \quad}}{\boxed{\quad カ \quad}} = \boxed{\quad ク \quad} \tag{9}$$

と書けるから，式 (8) は

$$\boxed{\quad ク \quad} = \frac{2\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x'_i y'_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} ({x'_i}^2 - {y'_i}^2)} \tag{10}$$

となる．よって，式 (10) の右辺を計算して，式 (4) を最小化する θ を求めればよい．

式 (4) を最小化する θ を $\hat{\theta}$ とし，求めたい直線が重心 G を通ることを用いれば，直線の式は

$$y = \tan\hat{\theta}\left(x - \boxed{\quad ケ \quad}\right) + \boxed{\quad コ \quad} \tag{11}$$

として与えられる．

(2) 4 点 $(-1, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$ があるとする．

(a) これらの 4 点に単位質量を置いたときの重心 G の座標を求めよ．

(b) これらの 4 点に関し，$\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x'_i y'_i$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} {x'_i}^2$ および $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} {y'_i}^2$ を求めよ．

(c) これらの 4 点からの垂直距離の 2 乗和が最小となる直線の傾き θ を求めよ．ただし，分数は既約分数とし，三角関数およびその逆関数はそのままでよい（例：$\cos\dfrac{7}{4}\pi$や　$\sin^{-1}\dfrac{1}{3}$ など）．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062710)

0.560 次の行列について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & a & a \\ 0 & a & a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|A| = 6$ のとき，a の値を求めよ．

(2) $a = 1$ のとき，A の転置行列 ${}^tA$ と B の積 ${}^tA \cdot B$ を求めよ．

(3) B の逆行列 B^{-1} を求めよ．

(4) B の固有値をすべて求めよ．

(5) (4) で求めた固有値のうち最大のものに対する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは単位ベクトルとする．

(豊橋技科大 2007)　　(m20072701)

0.561 関数 $y = f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ に関する以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ が $0 < x < \sqrt{3}$ の範囲において上に凸であることを示せ．

(2) 関数 $f(x)$ の点 $(t, f(t))$ における接線 h の方程式を求めよ．

(3) 接線 h と直線 $x = 0$，$x = 1$，および $y = 0$ で囲まれる領域の面積 $S(t)$ を求めよ．ただし，t の範囲は $0 \leq t \leq 1$ とする．

(4) 面積 $S(t)$ が $t = \dfrac{1}{2}$ のときに最小となることを示せ．

(5) $t = \dfrac{1}{2}$ のとき，曲線 $y = f(x)$ と接線 h，および直線 $x = 0$，$x = 1$ で囲まれる領域の面積を求めよ．

(豊橋技科大 2007)　　(m20072703)

0.562 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -18 & -7 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1，λ_2 を求めよ，ただし，$\lambda_1 > \lambda_2$ とせよ．

(2) 各固有値 λ_1，λ_2 に対する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ とするとき，a と b を求めよ．

(3) (2) で求めた固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ を用いて，行列 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ を定義する． このとき，$\boldsymbol{PQ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる行列 $\boldsymbol{Q}$ を求めよ．

(4) 行列 $\boldsymbol{QAP}$ を求めよ．

(5) 自然数 n に対して，$\boldsymbol{QA}^n\boldsymbol{P}$ を求めよ．

(豊橋技科大 2008)　　(m20082702)

0.563 (1) 次の関数の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}\right)$

(2) 次の関数を微分せよ．ただし，$x \neq 0$ とする．　$\exp\left(-\sin\dfrac{1}{x}\right)$

(3) 次の関数を微分せよ．ただし，$x \pm a \neq 0$ とする．　$\log\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$

(豊橋技科大 2009)　(m20092701)

0.564 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & -b \end{pmatrix}$ で与えられる 1 次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ により，曲線 $y = x^2$ の上の点 (x, y) は，曲線 $x^2 + 2xy + y^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$ の上の点 (x', y') に移される．$a > 0$ であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) x, y を用いて x' および y' を表せ．

(2) a を用いて b を表せ．

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は，1 次変換 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}$ によりベクトル $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ に移される．$|\boldsymbol{q}| = |\boldsymbol{p}|$ であるとき，a の値を求めよ．

(4) $\boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる最小の正の整数 n を求めよ．

(豊橋技科大 2009)　(m20092703)

0.565 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ で与えられるとき, 以下の問いに答えよ．

(1) A^{-1} を求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ として, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 x_1 と x_2 を求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{pmatrix}$ として, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ の解が $x_1 = 0, x_2 = 0$ 以外の解を持つように，定数 k の値を求めよ．

(4) 行列 $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，$F = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ として, ADF を求めよ．

(豊橋技科大 2010)　(m20102702)

0.566 媒介変数 t を用いて表される次の曲線について, 以下の問いに答えよ．

$$x = \sqrt{3}\sin t$$
$$y = \sqrt{3}\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$$

ただし, $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{3}$ である．

(1) $t = 0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}$ のそれぞれに対応する x–y 座標上の点 A, B および C の座標を示せ．

(2) この曲線は点 A, B および C を通る楕円の一部を表している. この曲線と x 軸, y 軸の正の部分で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(豊橋技科大 2010)　(m20102704)

0.567 未知関数 $x(t)$，$y(t)$ に関する次の連立微分方程式 (E) を考える．

$$(E) \qquad \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) 連立微分方程式 (E) を解け.

(名古屋大 1999)　　(m19992803)

0.568 3 次元空間内の原点を O，点 A の位置ベクトルを $a = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ で表す.

点 A を通り，方向ベクトルが $\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$ $(\neq 0)$ である直線 l が与えられている.

(1) 直線 l を表す方程式を書け.

(2) 空間内に位置ベクトル $p = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ である点 P が任意に与えられたとき，点 P に最も近い直線 l 上の点を Q とする．点 Q の位置ベクトル $q = \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ を，$q = Lp + b$ の形で表せ.
ただし，L, b は直線 l だけで定まり，p, q には無関係な行列およびベクトルをそれぞれ表す.

(3) 行列 L の階数を求めよ.

(4) 行列 L のすべての固有値と固有ベクトルを求めよ.

(名古屋大 2002)　　(m20022802)

0.569 行列　$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$　について次の問いに答えよ.

(1) A を適当な正則行列 P によって対角化せよ.

(2) A^n を求めよ（ただし，n は正整数とする）.

(3) A によって 1 次変換　$f : \begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 2x + 4y \end{cases}$　を定める.
f は任意の直線を直線に，平行な直線を平行な直線に移すことを証明せよ.

(4) 頂点が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である正方形の写像 f による像を Z とする．Z の面積を求めよ.

(名古屋大 2003)　　(m20032802)

0.570 行列　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　について次の問いに答えよ.

(1) A の逆行列を求めよ.

(2) A の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化したもの（大きさが 1 のもの）を示せ.

(3) A を対称行列と交代行列の和で表せ．なお，行列 X の転置行列を X^t としたとき，$X^t = X$ を満たすものを対称行列，$X^t = -X$ を満たすものを交代行列という.

(名古屋大 2004)　　(m20042803)

0.571 関数 $y = e^{\sqrt{3}x}(\sin x + 1)$ の第 n 次導関数が $y^{(n)} = e^{\sqrt{3}x}\left\{2^n \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}n\right) + \left(\sqrt{3}\right)^n\right\}$ となることを証明せよ．

(名古屋大 2005)　　(m20052802)

0.572 赤, 黄, 青のランプがあり，各時刻において，いずれか一つのランプが点灯する．時刻 t に，赤のランプが点灯しているとき，時刻 $t+1$ には，赤が 0.75，黄が 0.25 の確率で点灯する．時刻 t に，黄のランプが点灯しているとき，時刻 $t+1$ には，黄が 0.5，赤が 0.25，青が 0.25 の確率で点灯する．時刻 t に，青のランプが点灯しているとき，時刻 $t+1$ には，青が 0.75，黄が 0.25 の確率で点灯する．時刻 t に赤, 黄, 青のランプが点灯している確率を，それぞれ $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$ で表し，時刻 $t+1$ に赤, 黄, 青のランプが点灯している確率を，それぞれ $X_1(t+1)$, $X_2(t+1)$, $X_3(t+1)$ で表す．以下の問いに答えよ．

(1) $\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ と表したときの行列 A を示せ．

(2) 行列 A の行列式を求めよ．

(3) 行列 A の逆行列を求めよ．

(4) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは第 3 成分が 1 となるようにして示せ．

(名古屋大 2007)　　(m20072801)

0.573 水 1ℓ を 2 つの瓶 A, B に適当に分け，瓶 A, 瓶 B に入っている水の量をそれぞれ x_0, y_0 とする．

「瓶 A 中の水の 1 割と，瓶 B 中の水の 2 割を，それぞれ小瓶 C, D へ抜き取り，小瓶 C の水を瓶 B に，小瓶 D の水を瓶 A へ入れる」という手続きを n 回繰り返した後，瓶 A, 瓶 B に入っている水の量をそれぞれ x_n, y_n とするとき, 以下の問いに答えよ．

(1) x_n, y_n を次のように行列を用いた漸化式で表すとき，行列 T を求めよ．

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

(2) 行列 T の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(3) x_n, y_n を，x_0, y_0 および n を用いて表せ．

(4) $n \to \infty$ としたときの，x_n/y_n の値を求めよ．

(名古屋大 2008)　　(m20082801)

0.574 (1) 次の行列 A の固有多項式 $|\,xE - A\,|$ を計算して，A の固有値を求めよ．但し，E は単位行列を表す．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 上で得られた固有値の固有ベクトルを求めよ．

(名古屋工業大 1997)　　(m19972903)

0.575 次の 2×2 の行列 A について以下の問に答えよ．本問題において，ベクトルは 2 次元の縦ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を意味する．

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値とそれぞれの固有値に対する一つの固有ベクトルを求めよ.

(2) (1) で求めた固有値と固有ベクトルを用いて行列 E と B を適当に定め，行列 A を

$$A = EBE^{-1}$$

の形で表せ．ここで，E^{-1} は E の逆行列で B は $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ のような形である.

(3) (2) で定めた E と B を用いて，A^n はどのように表すことができるか．ここで，A^n は n 個の A を掛け合わせたものである.
（ヒント）まず，$A = EBE^{-1}$ の表現を用いて A^2 がどのようになるかを調べよ.

(4) ベクトル全体の集合を V と書く．V の任意の二つの要素 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$，$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$，に対して，

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

とする．ベクトルの列 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \cdots$ が一つのベクトル $\mathbf{x}$ に対して，

$$\lim_{n \to \infty} d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) = 0$$

を満たすとき，この列は $\mathbf{x}$ に収束すると言う.
$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ を一つのベクトルとし，行列 A を用いて，
$\mathbf{a}, A\mathbf{a}, A^2\mathbf{a}, A^3\mathbf{a}, \cdots$ なる列をつっくたとき，この列が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に収束ことを示せ．(3) で求めた A^n の表現を用いよ.

(名古屋工業大 1997）　(m19972904)

0.576 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して，以下の各問に答えよ．ただし，$a \geq 0$ である.

(1) A の二つの固有値 λ_1 , λ_2 を求めよ.

(2) λ_1 , λ_2 にそれぞれ対応する固有ベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ のどちらにも直交するベクトルは 0 ベクトルのみであることを示せ.

(3) 上の問 (2) における固有ベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ が互いに直交するときの a の値を求めよ.

(名古屋工業大 1998）　(m19982907)

0.577 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) 行列 $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ.

(3) 二つの関数 $x(t)$, $y(t)$ が次の微分方程式を満たすとする.

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

この時，$P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$ とおくと $\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$ はどんな微分方程式を満たすか.

(4) (3) の $X(t)$, $Y(t)$ の微分方程式を解き $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ を求めよ.

(名古屋工業大 1998）　(m19982908)

0.578 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して次を求めよ．

(1) $|A|$ および A^{-1}

(2) A の固有値

(3) 上の (2) で求めた各固有値に対する固有ベクトル

(名古屋工業大 1999) (m19992906)

0.579 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{9}{8} & 1 \end{pmatrix}$$

について以下の問に答えよ．

(1) A の二つの固有値 λ_1 , λ_2 と，それぞれの固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトル $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ を求めよ．

(2) 一つのベクトル $\mathbf{x}$ は， $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ を用いて

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{p}_1 + \beta\mathbf{p}_2$$

と書ける．このことを用いると， $A^n\mathbf{x}$ は， λ_1 , λ_2 $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ を用いてどのように表すことができるか． α , β は，実数である．

(3) 一つのベクトル $\mathbf{x}$ に対して，

$$A\mathbf{x}\ ,\ A^2\mathbf{x}\ ,\ \cdots\ ,\ A^n\mathbf{x}\ ,\ \cdots$$

なるベクトルの列は，二次元平面上の点列を表すが，この点列の挙動は， $\mathbf{x}$ の取り方によって異なるものになる．このことを，(1) と (2) で求めたことを用いて論じよ．

(名古屋工業大 1999) (m19992907)

0.580 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．更に，行列 ${}^tTAT$ が対角行列になるような直交行列 T を求めよ．

(名古屋工業大 2000) (m20002905)

0.581 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ．

(1) A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) $A = PBP^{-1}$ となるように行列 $P,\ B$ を定めよ．ここで，行列 B はある実数 a, b について $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ の形となるように定めよ．

(3) A^n を求めよ．

(名古屋工業大 2000) (m20002906)

0.582 次の行列 A が対角化可能である必要十分条件は $a \neq b$ であることを示し，対角化可能な場合に $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2001) (m20012906)

0.583 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．ただし，a は実数とする．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の階数 (rank) を求めよ．

(2) $\overrightarrow{x}$ を列ベクトルとするとき，$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ となる $\overrightarrow{x}$ $(\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0})$ を求めよ．

(名古屋工業大 2001) (m20012907)

0.584 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とする．

(1) 方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつための必要十分条件は $a + b + c = 0$ であることを示せ．

(2) 任意のベクトル $\mathbf{x}$ に対して $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ となる非自明な 3 次元のベクトル $\mathbf{y}$ を求めよ．ただし，$(,)$ は空間ベクトルの内積である．

(名古屋工業大 2003) (m20032903)

0.585 4 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

について次の問い (1),(2),(3) に答えよ.

(1) A の行列式を求めよ.

(2) A の逆行列を求めよ.

(3) 次の列ベクトルを行列 A の列で与えられる 4 つの列ベクトルの 1 次結合で表せ.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2004) (m20042901)

0.586 N を正の数として, xyz 空間の部分集合

$$T_N = \{(x, y, z) \,|\, x + y + z = N\,,\ 0 < x, y, z < N\}$$

を考える. そして, 正の数 p, q, r を用いて関数

$$f_{p,q,r}(x, y, z) = \left(\frac{p}{x}\right)^x \cdot \left(\frac{q}{y}\right)^y \cdot \left(\frac{r}{z}\right)^z$$

を T_N 上で定義する.

(1) $f_{p,q,r}$ の自然対数として定義される関数

$$\log_e f_{p,q,r}(x, y, z)$$

の極値を, ラグランジュの未定乗数法を用いて求めよ.

(2) T_N 上で定義された関数 $f_{p,q,r}$ は, T_N 上のある点 (x, y, z) において最大値をとる事が知られている. この事を用いて, $f_{p,q,r}$ の最大値を求めよ.

(名古屋工業大 2005)　　(m20052901)

0.587 実数 a, b, c, d, e, f を用いて表される次の 4 次正方行列を考える.

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

(1) この行列の行列式を求めよ.

(2) $be = af + cd$ の時, この行列式の値を可能な限り簡単にせよ.

(名古屋工業大 2005)　　(m20052902)

0.588 自然な内積を持つ $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ k \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ p \\ -16 \\ q \end{pmatrix}$ は

i) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ とが成す角は $\dfrac{\pi}{3}$ であり,　　ii) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は 1 次従属である

という条件をみたす．このとき次の問に答えよ.

(1) k を求めよ.　　(2) p, q を求めよ.

(名古屋工業大 2006)　　(m20062901)

0.589 (1) $\mathbb{R}^2$ の原点 O を中心とする角 $\dfrac{\pi}{4}$ の回転移動 F_r を標準基底 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関して行列で表せ.

(2) 標準基底に関して行列 $A = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$ と表される線形写像 $F_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ がある. この線形写像 F_t に回転移動 F_r を合成してできる写像を F と表したとき，円 $C : x^2 + y^2 = 2$ の F による像 $F(C)$ を与える方程式を求めよ.

(名古屋工業大 2006)　　(m20062902)

0.590 (1) 級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n + 3}$ を求めよ.

(2) $\log(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{n} + \cdots$, $-1 < t \leq 1$ を利用して，関数 $f(x) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+x}{3-x}\right)$ を $x - 1$ のべき級数に展開せよ.

(名古屋工業大 2006)　　(m20062905)

0.591 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ.

(1) 直接計算で $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{I}$ を確かめよ．ここで，$\boldsymbol{I}$ は 3 次単位行列である.

(2) (1) の結果に基づき $n \geq 4$ に対して，帰納法で $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{A}^{n-2} + \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{I}$ を証明せよ.

(3) (2) の結果を用いて $\boldsymbol{A}^{50}$ を求めよ.

(名古屋工業大 2006)　　　(m20062907)

0.592 次の行列 A は対角化可能かどうか判定し，対角化可能なら $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求めよ．　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(名古屋工業大 2007)　　　(m20072904)

0.593 3 次の正方行列 A を $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

(1) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 $P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$ で各列ベクトル $\boldsymbol{p}_i$ の長さが 1 となる行列 P をひとつ求めよ．

(2) (1) で求めた P の転置行列を ${}^tP$ とする．この時 ${}^tPP = E_3$（E_3 は単位行列）を示し，さらに $P^{-1} = {}^tP$ となる事を示せ．

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して $({}^tP\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, P\boldsymbol{b})$ が成り立つ性質を用いて，$\boldsymbol{y} = {}^tP\boldsymbol{x}$ とした時に，次の等式を示せ．

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (({}^tPAP)\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}))$$

(4) $\boldsymbol{x}$ の成分を $x_i (i = 1, 2, 3)$ とした時，x_1, x_2, x_3 の 3 つの一次式 $f_i(x) = f_i(x_1, x_2.x_3) (i = 1, 2, 3)$ があり，$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = f_1(x)^2 - f_2(x)^2 + 2f_3(x)^2$ となる事を示せ．

(名古屋工業大 2008)　　　(m20082902)

0.594 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ とし，次の計算結果を最も簡明な形で示せ．　$\Delta \left(\tan^{-1} \dfrac{y}{x} \right)$

(名古屋工業大 2008)　　　(m20082903)

0.595 (1) 次の行列 A は対角化できないことを示せ．　$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) 行列 B を　$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　とおく．$B^{-1}AB$ を求めよ．

(3) 自然数 n に対して A^n を求めよ．

(名古屋工業大 2009)　　　(m20092902)

0.596 (1) 次の不定積分 I を求めよ．　$I = \displaystyle\int \frac{3x^2 - x + 1}{(x+1)(x^2 - 2x + 2)} \, dx$

(2) 次の 2 重積分 J の値を求めよ．　$J = \displaystyle\int_1^2 \left(\int_x^2 \frac{dy}{\sqrt{4 - y^2}} \right) dx$

(名古屋工業大 2009)　　　(m20092903)

0.597 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$ を $x - 3$ のべき級数に展開し，そのべき級数の収束範囲を求めよ．

(3) 次の重積分を求めよ．

$$V = \int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy$$

(名古屋工業大 2009)　　　(m20092905)

0.598 行列 A, 変数ベクトル $\boldsymbol{x}$, 定数ベクトル $\boldsymbol{c}$ を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ただし, a は定数である. 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) 方程式が解をもたないための a の値を求めよ.

(2) 方程式が無数の解をもつための a の値を求めよ.

(3) 方程式が唯一の解をもつための a の範囲を示せ. またこの範囲の a に対して解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(名古屋工業大 2009)　　(m20092906)

0.599 次の 4 次行列 A, 4 次単位行列 E, およびパラメータ t に対して, 行列式 $\left|tE - A\right|$ を t について因数分解しなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 4 & 0 \\ -5 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2010)　　(m20102901)

0.600 3 次元数ベクトル空間を $\mathbb{R}^3$ とする. 次の $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ から, グラム・シュミットの正規直交化法（シュミットの正規直交化法ともいう）により $\mathbb{R}^3$ の正規直交系 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ を構成しなさい.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2010)　　(m20102902)

0.601 関数 $f(x) = e^{\sin x}$ のマクローリン展開を次の指示に従って計算しなさい.

(1) $f'(x)$ と $f(x)$ との関係を導きなさい. その関係式に対してライプニッツの公式を適用し, $f^{(n+1)}(x)$ を $f^{(k)}(x)$ $(0 \leq k \leq n)$ を用いて表しなさい. ただし, n は任意の自然数とし, 等式 $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ を用いてもよい.

(2) $f(x)$ のマクローリン展開を x^5 の項まで求めなさい. ただし剰余項を求める必要はない.

(名古屋工業大 2010)　　(m20102903)

0.602 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 1 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について, 積 AB の逆行列 $(AB)^{-1}$ を求めよ.

(名古屋工業大 2010)　　(m20102907)

0.603 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

$c \neq 0$ に対して, 次の 3 種類の行列

$P_i(c) : I$ の第 i 行を c 倍した行列

$P_{ij}(c) : I$ の (i,j) 成分に c を加えた行列 $(i \neq j)$

$P_{ij} : I$ の第 i 行と第 j 行を入れ換えた行列 $(i \neq j)$

を基本行列という．

(1) $P_i(c)A,\ P_{ij}(c)A,\ P_{ij}A$ はそれぞれ行列 A にどのような操作を加えたものといえるか述べよ．

(2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) (2) の A^{-1} を基本行列の積として表せ．

(4) (2) の A を基本行列の積として表せ．

（愛知県立大 2000）　(m20003003)

0.604 次の 4 つのベクトルの中から，一次独立な 3 つのベクトルの組を全てあげ，その理由を示しなさい．

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(三重大 2002)　(m20023114)

0.605 m は実数とする．

$A = \begin{pmatrix} m & m+3 \\ 1-m & -m \end{pmatrix}$ について

(1) A が逆行列を持たないとき，A^2 を求めよ．

(2) A の逆行列が A 自身であるように，m の値を定めよ．

(三重大 2002)　(m20023115)

0.606 ベクトル $(1,2)$ に行列を掛けると

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

のように（一般には）向きと大きさが異なるベクトル $(-3,-3)$ が得られるが，他方

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のようにその方向を変えない特殊なベクトル (x,y) が存在することもある．後者のようなベクトルは，この行列の**固有ベクトル**と呼ばれ，その長さが何倍となったか（a の値）は**固有値**と呼ばれる．このような方向をもったベクトル (x,y) を求めよ．また，ベクトルの長さは何倍になっているか．

(三重大 2002)　(m20023117)

0.607 $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるとき，x, y, z および w を求めよ．

(三重大 2003)　(m20033110)

0.608 次の行列の行列式を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

(三重大 2003)　(m20033111)

0.609 (1) 次の行列の行列式を $\det A$ とする．

$$A = \begin{pmatrix} x-a & y-b & z-c \\ d-a & e-b & f-c \\ l & m & n \end{pmatrix}$$

ここで，$a, b, c, d, e, f, l, m, n$ は定数として，方程式 $\det A = 0$ が 3 次元空間（xyz 空間）上の平面の式を与えることを示せ．また，この平面の法線ベクトルを求めよ．

(2) この平面に直線 $\dfrac{x-d}{l} = \dfrac{y-e}{m} = \dfrac{z-f}{n}$ が含まれることを示せ．

(三重大 2003) (m20033112)

0.610 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 8 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ．

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めなさい．

(2) 行列 A のすべての固有値を求めなさい．

(三重大 2003) (m20033113)

0.611 ある 3×3 の行列 A とベクトル $\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ がある．これらの間に，$A\mathbf{a_1} = 2\mathbf{a_1}$, $A\mathbf{a_2} = \mathbf{a_2}$, $A\mathbf{a_3} = 3\mathbf{a_3}$ の関係が成り立つとして，以下の問に答えよ．

(1) $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ は互いに直交するベクトルであることを証明せよ．

(2) ベクトル $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ を，$\mathbf{r} = \alpha_1\mathbf{a_1} + \alpha_2\mathbf{a_2} + \alpha_3\mathbf{a_3}$ で分解した．定数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,$ を求めよ．

(3) $A\mathbf{r}$ および $A^2\mathbf{r}$ を求めよ．

(4) $A^n\mathbf{r}$ の一般形を求めよ．

(三重大 2003) (m20033114)

0.612 次の 2 つの行列 A, P について, P が逆行列をもち, $B = P^{-1}AP$ が対角行列 B となるように, 実数 x, y, α, β の値を求めなさい． ただし, $\alpha > \beta$ とする.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

（三重大 2004） (m20043113)

0.613 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) 行列式 $|A|$ を計算せよ.

(2) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(三重大 2005) (m20053104)

0.614 行列 $\begin{pmatrix} a & 1/\sqrt{5} \\ b & 2b \end{pmatrix}$ が直交行列であるとき, 実数 a , b の値を求めよ.

(三重大 2005) (m20053105)

0.615 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えなさい.

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めなさい.

(2) 行列 A のすべての固有値と, 各固有値に対する固有ベクトルを求めなさい.

(3) 正則行列 P によって行列 A を対角化したい. このような正則行列 P と, その逆行列 P^{-1}, および対角化された行列 $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(4) 行列 $P^{-1}A^nP$ を求めなさい. ただし, n は自然数とする.

(三重大 2005) (m20053107)

0.616 (1) 複素行列 $\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1 , λ_2 を求めよ.
ここで, a, b, c, d は実数であり (ただし, $c \neq 0$), $i^2 = -1$ である.

(2) λ_1 , λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を求め, エルミート内積 $(\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2) = \displaystyle\sum_{j=1}^{2} x_{1j}{}^* x_{2j}$ を計算せよ. ただし, x_{ij} は $\boldsymbol{x}_i$ の j 成分であり $(i, j = 1, 2)$, α^* は α の複素共役を表す.

(三重大 2005) (m20053110)

0.617 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ に対して, 連立一次方程式 $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が $x = y = 0$ 以外の解をもつように k の値を定めよ.

(三重大 2005) (m20053113)

0.618 次の不定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \left(x^2 + 2x + 3 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} \right) dx$

(2) $\displaystyle\int \{\sin(\omega t + a) + \cos(\omega t + b)\}\, dt$ ただし, ω, a, b は定数である.

(3) $\displaystyle\int \sin^3\theta\ d\theta$

(三重大 2006) (m20063101)

0.619 行列 $A = \begin{pmatrix} m & m+5 \\ 2-m & -m \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えなさい. ただし、m は実数とする.

(1) A が逆行列を持たないとき, A^2 を求めなさい.

(2) $A^{-1} = A$ となるような m の値を求めなさい.

(三重大 2006) (m20063107)

0.620 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(三重大 2006) (m20063113)

0.621 (1) 複素行列 $\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1 , λ_2 を求めよ. ここで, a, b, c, d は実数であり (ただし, $c \neq 0$), $i^2 = -1$ である.

(2) λ_1 , λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を求め, エルミート内積 $(\boldsymbol{x}_1\ \ \boldsymbol{x}_2) = \displaystyle\sum_{j=1}^{2} x_{1j}^*\, x_{2j}$ を計算せよ. ただし, x_{ij} は $\boldsymbol{x}_i$ の j 成分であり $(i, j = 1, 2)$, α^* は α の複素共役を表す.

(三重大 2006) (m20063118)

0.622 $\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ x-3y & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4y+6z & 0 \\ z & 2z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ を満たす全ての λ と，それぞれの λ について $x,\ y,\ z$ の比 $x:y:z$ を求めよ．ただし，$x,\ y,\ z$ は全ては 0 でないとする．

(三重大 2007) (m20073102)

0.623 (1) 定数 $k_1,\ k_2$ を含む次の行列 A の階数 (rank) を，$k_1,\ k_2$ の値で場合分けして求めなさい．

$$A = \begin{pmatrix} k_1 & 1 & 1 \\ 1 & k_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を考え，その $\boldsymbol{v}$ が表す点の集合が x, y, z を軸とする直交座標系でどのような形状となるかを，行列 A の階数 (rank) ごとに説明しなさい．

(三重大 2007) (m20073106)

0.624 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ として，以下の設問に答えよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，$A^2 - 5A + 6E$ および A^5 を求めよ．

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2 - 2A - 8E = O$ を満たすとき，$(a+d\,,\ ad-bc)$ の値の組を全て求めよ．

(三重大 2007) (m20073111)

0.625 次の関数 $f(x) = \begin{cases} c\cos x & \left(|x| \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \left(|x| > \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ について, 以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ が確率密度になるような定数 c の値を求めよ． (2) その分布の分布関数を求めよ．

(3) その分布の平均を求めよ． (4) その分布の分散を求めよ．

(三重大 2007) (m20073116)

0.626 対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ （ a, b, c は実数 ）は適当な直交行列 T（直交行列とは ${}^tT\,T = T\ {}^tT = I$ [単位行列] を満たす行列，${}^tT$ は T の転置行列）を使って，${}^tTAT = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ のような対角形に変形できる．

(1) 自然数 n に対して $A^n = T\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}{}^tT$ となることを示せ．

(2) $a+b = \alpha+\beta\,,\ ab - c^2 = \alpha\beta$ の関係があることを示せ．

(3) $a = b = 2\,,\ c = -1$ のとき，$\alpha,\ \beta$ の値を求めよ．また，直交行列 T も求めよ．

(三重大 2007) (m20073117)

0.627 次の行列 A に対して

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 固有値方程式をたて，固有値をすべて求めよ．ただし，固有値はすべて整数値とする．

(2) 固有ベクトルをすべて求め，それを用いてこの行列を対角化（$P^tAP = E$ ： E は単位行列）する行列 P を求めよ．ただし，P は直交行列である．

(三重大 2008)　　(m20083101)

0.628 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ が，$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ かつ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす時，(1)〜(3) の設問に答えなさい．ただし，k, x, y は実数である．

(1) k の値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた k の値に対して $A\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たす x をすべて求めよ．

(3) (2) で求めた結果を用いて A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(三重大 2009)　　(m20093103)

0.629 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ の値を求めなさい．

(2) A, B が同じ次数の正方行列であるとき，行列式 $\begin{vmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{vmatrix}$ の値を，$|A + 2B|$ と $|A - B|$ の式で表しなさい．

この導出には，n 次正方行列 P，m 次正方行列 S，$m \times n$ の行列 R，$n \times m$ の零行列 O に対して，$\begin{vmatrix} P & O \\ R & S \end{vmatrix} = |P||S|$ が成り立つことを使ってよい．

(3) 問 (2) の結果を利用して，行列 $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ のすべての固有値を求めなさい．

(三重大 2009)　　(m20093106)

0.630 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ に関する以下の問いについて答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) A を対角化せよ．

(3) A^{23} を求めよ．

(三重大 2009)　　(m20093107)

0.631 以下の積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^2 6x^5 - \frac{2}{x}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty 9x^2e^{-3x}dx$

(三重大 2009)　　(m20093108)

0.632 (1) 次の対称行列 A の固有値, 固有ベクトルをすべて求めよ.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) 一般の実対称行列 B について, その固有値はすべて実数で, 異なる固有値に属する固有ベクトルは互いに直交することを示せ.

(三重大 2009)　　(m20093110)

0.633 次の行列 A の行列式 $|A|$ 及び逆行列 A^{-1} を求めよ.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

(三重大 2010)　　(m20103110)

0.634 $x_1,\ x_2,\ x_3$ についての連立方程式 $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}$ を考える. ただし

$$B=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

とする. このとき $|B|\neq 0$ であるとして, 連立方程式の解が

$$\boldsymbol{x}_1=\frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} p_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & b_2 & c_2 \\ p_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2=\frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} a_1 & p_1 & c_1 \\ a_2 & p_2 & c_2 \\ a_3 & p_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \boldsymbol{x}_3=\frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & p_3 \end{vmatrix}$$

とかけることを示せ.

(三重大 2010)　　(m20103111)

0.635 $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ として, 以下の (1),(2) に答えよ.

(1) $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $A^2-5A+6E$ および A^5 を求めよ.

(2) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2-2A-8E=O$ を満たすとき, $a+d$ および $ad-bc$ を求めよ.

(三重大 2010)　　(m20103117)

0.636 $\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx\ (s>0)$ に対して以下の等式を証明せよ.

(1) $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$　　(2) $\Gamma(n)=(n-1)!$　（n は正の整数）

(2) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$　（必要ならば $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi}$を使ってもよい）

(奈良女子大 2001)　　(m20013205)

0.637 ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d}$ を次のように定めます.

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{d}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は一次独立ですか.

(2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は一次独立ですか.

(3) x と y の間にどのような関係があれば $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}$ は一次従属ですか.

(奈良女子大 2001)　　(m20013209)

0.638　2次行列 A, B を次のように定めます.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) $AB = BA$ が成り立つことを確かめなさい.

(2) $AC = CA$ を満たすような行列 C をすべて求めなさい.

(奈良女子大 2001)　　(m20013210)

0.639　次の行列が逆行列を持つかどうか調べなさい．持つ場合にはその逆行列を求めなさい.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2001)　　(m20013211)

0.640　n 行 n 列の正方行列 A の転置をとり，さらに全ての成分の複素共役をとった行列を行列 A のエルミート共役といい，$A^\dagger$ と書く．つまり，

$$(A^\dagger)_{ij} = A^*_{ji} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

また，$A^\dagger = A$ であるとき，行列 A をエルミート行列と言う．エルミート行列に関して以下の問いに答えよ.

(1) エルミート行列の固有値は実数であることを証明せよ.

(2) エルミート行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交することを示せ.

(3) 下に示す行列 A はエルミート行列である．行列 A の固有値と固有ベクトルを求め，上記 (1)，(2) が成り立つことを確かめよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2001)　　(m20013212)

0.641　2次行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ.

(1) $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めよ.

(2) 零行列でない2次行列 B で $AB = O$ を満たすものを求めよ.

(3) 零行列でない2次行列 C で $AC = CA = O$ を満たすものを求めよ.

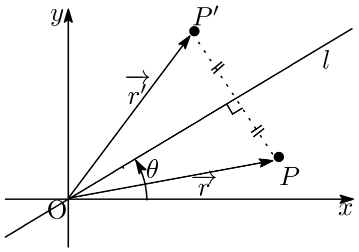
(奈良女子大 2002)　　(m20023207)

0.642　原点 O を通る角度 θ 方向の直線 l に関して，空間の点 P（位置ベクトルを $\overrightarrow{r}$）を点 P'（位置ベクトルを $\overrightarrow{r'}$）へ反転させる作用（R_θ と記す）を考える.

$$\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \overrightarrow{r'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\theta \overrightarrow{r}$$

このとき，反転の作用は次のように表わせることを示せ．

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$



(奈良女子大 2002)　　(m20023208)

0.643　次の行列について以下の問いに答えよ．

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(1)　固有値を求めよ．

(2)　得られた各々の固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(奈良女子大 2002)　　(m20023209)

0.644　$\mathbf{R}^3$ のベクトル a, b, c を次のように定める．

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1)　a, b は一次独立であることを示せ．

(2)　a, b, c は一次従属であることを示せ．

(3)　$\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^2$ への線形写像 f で

$$f(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(c) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を満たすものが存在しないことを示せ．

(奈良女子大 2002)　　(m20023210)

0.645　次の関数　$y = e^x \sin x$　について以下の問に答えよ．

(1)　第 1 次導関数 $y^{(1)}$ が　$y^{(1)} = \sqrt{2} e^x \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$　となることを示せ．

(2)　第 n 次導関数 $y^{(n)}$ が　$y^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{4}\right)$　となることを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(奈良女子大 2003)　　(m20033202)

0.646　$\mathbf{R^3}$ のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ を次のように定める．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

(1)　$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ は一次独立であることを示せ．また，$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}\}$ は一次従属であることを示せ．

(2) $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}\}$ が一次独立になるための x, y についての条件を求めよ．

(奈良女子大 2003)　　(m20033206)

0.647　２次行列　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$

に対して，$AB \neq BA$ となるための a, b, c の条件を求めよ．

(奈良女子大 2003)　　(m20033208)

0.648　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ．ただし，ε は実数で，$\varepsilon \neq \pm 1$, $\varepsilon \neq 0$ であるとする．

(1) 逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 行列 A の固有値を求めよ．

(3) 各固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(奈良女子大 2003)　　(m20033209)

0.649　実ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$ を次のように定める.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{d}$ および $\boldsymbol{e}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の一次結合で示せ.

(2) どのような実ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ も $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の一次結合で表せることを示せ.

（奈良女子大 2004）　　(m20043206)

0.650　実ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の長さを $|\boldsymbol{x}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ とする．実ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$,
$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対して，$|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2$ となるための条件を求めよ.

（奈良女子大 2004）　　(m20043207)

0.651　３次の正方行列 A, S を次のように定める.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) AS を求めよ.　　　(2) AS^2 を求めよ.

（奈良女子大 2004）　　(m20043208)

0.652　3 次行列 $A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -9 \\ 5 & -4 & 6 \\ 7 & 8 & -12 \end{pmatrix}$ と三つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$
に対して次の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は 1 次独立か.　　(2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ は 1 次独立か.　　(3) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は 1 次独立か.

(4) A の行列式の値を求めよ． (5) A は逆行列をもつか．

(奈良女子大 2005) (m20053201)

0.653 次の 2 行 2 列の行列 $F(\theta)$ について以下の問に答えよ．

$$F(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) $F(\theta)$ について次の関係が成立することを示せ．

$$F(\theta_1)F(\theta_2) = F(\theta_1 + \theta_2)$$

(2) 行列 A を次の 2 行 2 列の行列であるとする．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，$F(-\theta)AF(\theta)$ が対角行列 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ の形になる θ の値と，そのときの対角要素 λ_1，λ_2 を求めよ．

(奈良女子大 2005) (m20053204)

0.654 3 次行列と $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ と 4 つのベクトル

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ， $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ， $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ， $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ に対して次の問に答えよ．

(1) A の行列式の値を求めよ． (2) A の逆行列を求めよ．

(1) $\boldsymbol{d}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{c}$ の一次結合として $\boldsymbol{d} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$ (x, y, z は実数) の形で表せ．

(奈良女子大 2006) (m20063201)

0.655 実数 θ に対して $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とおく．また，2 次の単位行列を E とおく．次の問に答えよ．

(1) ${}^tA(\theta)A(\theta) = E$ となることを示せ．ただしここで，${}^tA(\theta)$ は $A(\theta)$ の転置行列である．

(2) $A(-\theta)$ が $A(\theta)$ の逆行列であることを示せ．

(3) 実数 θ, θ' に対し，$A(\theta)A(\theta') = A(\theta + \theta')$ が成り立つことを示せ．

(奈良女子大 2006) (m20063204)

0.656 3 次行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と，ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ （c は実数）に対して次の問いに答えよ．

(1) A^2, A^3 を求めよ． (2) $A\boldsymbol{a}$, $A^2\boldsymbol{a}$, $A^3\boldsymbol{a}$ を求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$ が二つのベクトル $A\boldsymbol{a}$, $A^2\boldsymbol{a}$ の一次結合として表されるときの c の値を求めよ．

(奈良女子大 2007) (m20073201)

0.657 次の行列の行列式を求めよ．また，この行列の逆行列が存在するか否か判定せよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2007)　　(m20073204)

0.658 次の行列の全ての固有値とそれに属する規格化された固有ベクトルを求めよ． $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

(奈良女子大 2007)　　(m20073205)

0.659 3 次行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & k & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ と，ベクトル　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$　$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$　$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

に対して次の問いに答えよ．ただし k は実数である．

(1) $A\boldsymbol{a}$, $A\boldsymbol{b}$ を求めよ．　(2) $A\boldsymbol{a}$, $A\boldsymbol{b}$ は一次独立であることを示せ．

(3) $A\boldsymbol{c}$ が $A\boldsymbol{a}$, $A\boldsymbol{b}$ の一次結合として表されるとき，k の値を求めよ．

(奈良女子大 2008)　　(m20083201)

0.660 次の行列の逆行列を求めよ．ただし，a, b, c, d は実数であり，$ad - bc \neq 0$ である．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2008)　　(m20083204)

0.661 次の行列の固有値と規格化された固有ベクトルを求めよ． $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(奈良女子大 2008)　　(m20083205)

0.662 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と，ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して次の問いに答えよ．ただし，a は実数である．

(1) 行列 A^2 および B^2 を求めよ．

(2) 2 つのベクトル $A^2\boldsymbol{v}$ と $B^2\boldsymbol{v}$ は一次独立であることを示せ．

(3) 2 つのベクトル $A\boldsymbol{v}$ と $B\boldsymbol{v}$ が一次従属となるときの a の値を求めよ．

(奈良女子大 2009)　　(m20093201)

0.663 次の微分を求めよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{-ax}\cos(bx)\right)$　（a, b は定数）

(2) $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(奈良女子大 2009)　　(m20093204)

0.664 次ののような 2 つの行列 A と B があるとき，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

(1) 積 AB を求めよ．

(2) 行列 A の逆行列を求めよ．

(3) 2 次元ベクトル $\boldsymbol{X}$ に行列 A をかけて，$\boldsymbol{Y} = A\boldsymbol{X}$ を作った．このとき，2 つのベクトル $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ はどのような関係になるか述べよ．

(奈良女子大 2009)　　(m20093207)

0.665 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と定数ベクトル $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ からベクトル積（外積）$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}$ を作った．このベクトル $\boldsymbol{A}$ について以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル A の成分 A_x , A_y , A_z を求めよ．

(2) $\mathrm{div}\, A = \nabla A$ を求めよ．

(3) $\mathrm{rot}\, A = \nabla \times A$ を求めよ．

ただし，$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z} \right)$ である．

(奈良女子大 2009)　　(m20093208)

0.666 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と, ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$ （k は実数）に対して次の問に答えよ．

(1) 行列 A^2, A^3 を求めよ．

(2) 2 つのベクトル $A\boldsymbol{a}$ と $A^2\boldsymbol{a}$ は一次独立であることを示せ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$ が 2 つのベクトル $A\boldsymbol{a}$, $A^2\boldsymbol{a}$ の一次結合として表されるとき, k の値を求めよ．

(奈良女子大 2010)　　(m20103201)

0.667 (1) $|x| < 1$ として，次式を証明せよ．

$$\log_e \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots\cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \right)$$

(2) $\log_e \dfrac{3}{2}$, $\log_e 2$, $\log_e 3$ を小数第 3 位まで求めよ．

(京都大 1995)　　(m19953301)

0.668 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような適当な P を選べ．

(京都大 1995)　　(m19953304)

0.669 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　$T^T \cdot A \cdot T = D$

とするとき，直交行列 T と対角行列 D を一組求めよ．また，$A = B^2$ となる正方行列 B を一組求めよ．

(京都大 1996)　　(m19963304)

0.670 次の微分方程式に関する問いに答えよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ を解け．

(2) 上の解で $x = 0$ で $y = 0$, $\dfrac{dy}{dx} = 0$ (or 0.5) のとき，曲線の概形を描け．

(京都大 1998) (m19983303)

0.671 行列 A が次のように定義されている．以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) A を対角化する正則行列 P を求めよ．

(京都大 1998) (m19983304)

0.672 (1) 行列 A , 固有値 λ , それに対応する固有ベクトル x の間の関係式を書け．

(2) 行列 A , 固有値 λ が満たすべき方程式を固有方程式という．固有方程式を書け．

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，A の固有値を求めよ．

(4) (3) の固有値に対する固有ベクトルの中で，互いに直交な単位ベクトルを求めよ．

(京都大 2000) (m20003302)

0.673 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = 7\cos 3x$ を $\left(\dfrac{d}{dx} + 3i\right)\left(\dfrac{d}{dx} - 3i\right) y = 7\cos 3x$ と書く．
$z = \left(\dfrac{d}{dx} - 3i\right) y$ と置くことにより，上の微分方程式は $\left(\dfrac{d}{dx} + 3i\right) z = 7\cos 3x$ となる．これを用いて，上の微分方程式の一般解を以下の問いに従って求めよ．

(1) $\dfrac{dz}{dx} + 3iz = 7\cos 3x$ の解 z を求めよ．

(2) 上の解 z を使って，$\dfrac{dy}{dx} - 3iy = z$ の解 y を求めよ．

(京都大 2002) (m20023302)

0.674 n 行 n 列の行列 A が対角化可能とは，ある正則行列 P とその逆行列 P^{-1}，および，ある対角行列 Λ を用いて

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

と表現できることである．

(1) 対角化可能な行列 A があるとき，これを対角化する手順について説明せよ．

(2) 次で与えられる 3 行 3 列の行列 A を実際に対角化し，行列 P と対角行列 Λ を与えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(京都大 2002) (m20023303)

0.675 任意の関数 $y=f(x)$ がある区間 I で微分可能であるとき，I の各点に対して次式で定義される y' を関数 y の導関数と呼び, 導関数を求めることを関数 y を微分するという.

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(1) 上の定義式を用いて, 次の関数の導関数を求めよ.

$$y = \log x \qquad (x>0)$$

(2) 今関数 $f(x)$ と $g(x)$ は微分可能であるとする. この時, 上の導関数の定義式を用いて, 次の事を示せ.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

但し, $g(x) \neq 0$ とする.

（京都大 2004）　(m20043301)

0.676 (1) 複素数 w に対して，級数

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=1}^{\infty}(-w)^{n-1}\ , \quad (|w|<1)\ \cdots ①$$

の両辺を $w=0$ から $w=z$ まで積分することで，複素関数 $\mathrm{Log}(1+z)$ を $z=0$ において，テイラー展開せよ．ただし，$\mathrm{Log}(1+z)$ は $-\pi <\mathrm{Im}\log(1+z) \leqq \pi$ なる $\log(1+z)$ の主値を表す．級数 ① の項別積分可能性は明らかとしてよい．

(2) 任意の複素数 z について

$$\lim_{n\to\infty} n\mathrm{Log}\left(1+\frac{z}{n}\right) = z\ \cdots ②$$

を示せ．

(3) ② を用いて　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$　を示せ．

(京都大 2006)　(m20063307)

0.677 $x>0$ に対して $\displaystyle\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ と定義して，$\log x$ の性質を定積分の性質から導きたい．(1)〜(2) に答えよ．

(1) 定積分の性質を用いて，等式 (a)〜(d) を示せ．

(a) $\log x_1x_2 = \log x_1 + \log x_2 \qquad (x_1, x_2 > 0)$

(b) $\log x^{\frac{n}{m}} = \dfrac{n}{m}\log x \qquad (m, n$ は正整数$)$

(c) $\log e = 1 \qquad \left(e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$

(d) $\dfrac{d}{dx}\log x = \dfrac{1}{x}$

(2) 上で定義した $\log x$ の逆関数を $\exp(x)$ とするとき，以下の等式 (e)〜(h) を示せ.

(e) $\exp(x_1+x_2) = \exp(x_1)\exp(x_2)$

(f) $\exp(1) = e$

(g) $\exp\left(\dfrac{n}{m}\right) = e^{\frac{n}{m}} \qquad (m, n$ は正整数$)$

(h) $\dfrac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x)$

(京都大 2008)　(m20083301)

0.678 次の行列 A に対して，(1)〜(3) に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ただし，I は 3 次の単位行列，$\mathbf{0}$ は 3 次元の零ベクトルを表す．

(1) 行列 A の固有値とその固有ベクトルの組 $(\lambda, \boldsymbol{p})$ の中で

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{q} \neq \mathbf{0}$$

が成立するベクトル $\boldsymbol{q}$ が存在するような組を 1 つ求めよ．

(2) (1) の結果を用いて，$AP = PB$ が成立するような上三角行列 B と正則行列 P を求めよ．

(3) (2) の結果を用いて，A^n の各成分を n の式で表せ．

(京都大 2008)　　(m20083304)

0.679 関数

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - a - ibx}$$

について，以下の設問に答えよ．ただし，x は実変数，a と b は正の実定数，$i = \sqrt{-1}$ である．

(1) $f(x)$ を変形して

$$f(x) = A\left(\frac{1}{x - z_1} - \frac{1}{x - z_2}\right)$$

としたとき，z_1 および z_2 を求め，複素平面上に図示せよ．ただし，A，z_1，z_2 は複素数の定数である．

(2) ζ を実数とし，積分

$$I(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - \zeta}\, dx$$

のコーシーの主値，すなわち

$$I(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{-\infty}^{\zeta-\varepsilon} \frac{f(x)}{x - \zeta}\, dx + \int_{\zeta+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x - \zeta}\, dx\right) \qquad ①$$

を考える．式 ① の積分路は実数軸上にあるが，図 1 で示した複素平面内における積分路 C_1, C_2, C_3 に沿った複素積分を利用することにより，$I(\zeta)$ を求めることができる．ここで，C_1 は原点を中心とした半径 R の下半円周，C_2 は ζ を中心とした半径 ε の下半円周，C_3 はこれらの半円周とそれらを結ぶ実数軸の線分で構成される閉曲線であり，いずれも図中の矢印に沿って積分するものとする．

(a) C_1 に沿った積分路の $R \to \infty$ での極限値を求めよ．

(b) ε が十分小さいとき，C_2 に沿った積分値を求めよ．

(c) C_3 に沿った積分値を求めよ．

(d) 以上の結果から，$I(\zeta)$ を求めよ．

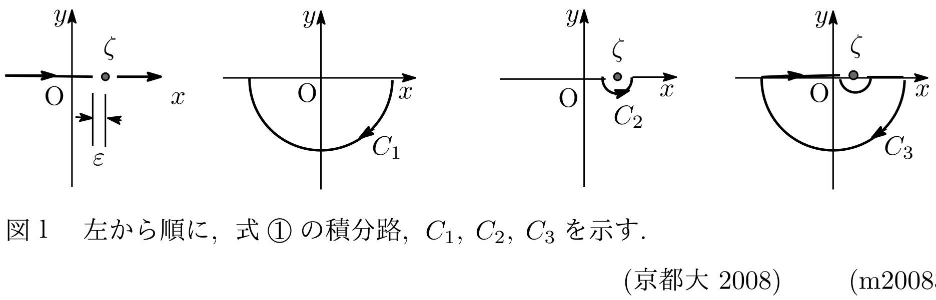


図 1　左から順に，式 ① の積分路，C_1，C_2，C_3 を示す．

(京都大 2008)　　(m20083305)

0.680 ２次元ユークリッド空間の直交座標系を一つ定め，その x 軸および y 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ とする．また，x 軸および y 軸をそれぞれ反時計方向に θ だけ回転して得られる座標軸を x' 軸，y' 軸とし，x' 軸と y' 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e'}_x$ および $\boldsymbol{e'}_y$ とする．このとき，以下の (1)〜(5) に答えよ．

(1) 条件 $(\boldsymbol{e'}_x\ \ \boldsymbol{e'}_y) = (\boldsymbol{e}_x\ \ \boldsymbol{e}_y)P$ を満足する２次の正方行列 P を θ を用いて表せ．

(2) 行列 P に対して $P^T P = P P^T = I$ が成り立つことを示し，この等式の幾何的な意味を，４つのベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e'}_x$, $\boldsymbol{e'}_y$ を用いて説明せよ．なお，P^T は P の転置行列を，また，I は２次の単位行列をそれぞれ表す．

(3) このユークリッド空間における任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y = x'\boldsymbol{e'}_x + y'\boldsymbol{e'}_y$ のように，２通りの座標を用いて表すことができる．これら２通りの座標間の関係を行列 P を用いて表せ．さらに，$x^2 + y^2 = \left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2$ が成り立つことを示せ．

(4) このユークリッド空間におけるベクトル全体をそれ自身に写す変換 f が

$$f(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{u}) + \beta f(\boldsymbol{v})$$

なる関係を満たすとき，f を一次変換という．ここに α と β は任意の実数，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は任意のベクトルである．一次変換 f と $\boldsymbol{e}_x$ $\boldsymbol{e}_y$ に対して，

$$\left\{\begin{array}{l} f(\boldsymbol{e}_x) = a_{xx}\boldsymbol{e}_x + a_{yx}\boldsymbol{e}_y \\ f(\boldsymbol{e}_y) = a_{xy}\boldsymbol{e}_x + a_{yy}\boldsymbol{e}_y \end{array}\right. \qquad ④$$

が成り立つとし，ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $f(\boldsymbol{u})$ をそれぞれ $\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y$, $f(\boldsymbol{u}) = X\boldsymbol{e}_x + Y\boldsymbol{e}_y$ と表すとき，これら２組の座標間の関係を

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の形で表現する行列 A を求めよ．

(5) 一次変換 f に対して，(4) の条件④に加えて．

$$\left\{\begin{array}{l} f(\boldsymbol{e'}_x) = a'_{xx}\boldsymbol{e'}_x + a'_{yx}\boldsymbol{e'}_y \\ f(\boldsymbol{e'}_y) = a'_{xy}\boldsymbol{e'}_x + a'_{yy}\boldsymbol{e'}_y \end{array}\right.$$

が成り立つとする．ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $f(\boldsymbol{u})$ をそれぞれ $\boldsymbol{u} = x'\boldsymbol{e'}_x + y'\boldsymbol{e'}_y$, $f(\boldsymbol{u}) = X'\boldsymbol{e'}_x + Y'\boldsymbol{e'}_y$ と表せば，２組の座標間の関係は (4) と同様に

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

と表現される．このとき，行列 A と A' の関係を P を用いて表せ．

(京都大 2009)　　(m20093303)

0.681 確率密度 X の確率密度関数が $f(x)$ で与えられているとき, 積率母関数 $M_X(t)$ を $M_X(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$ で定義する．また, 2 つの関数 $p(x)$, $q(x)$ の合成積 $p * q(x)$ を $p * q(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p(u)q(x-u)du$ で定義する. 以下の (1)〜(3) に答えよ. ただし, 計算に必要となる確率密度関数の積分に関する仮定は適宜用いてよい.

(1) 確率変数 X, Y は互いに独立で, 同時確率密度関数が $f(x)g(y)$ で与えられているとする. このとき, 確率変数 $Z = X + Y$ の確率密度関数 $h(z)$ が $h(z) = f * g(z)$ で与えられることを示せ.

(2) 独立な確率変数 X, Y に対し, $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$ がなりたつことを示せ.

(3) 確率変数 X の平均 m_X と分散 σ_X^2 は, それぞれ次のように与えられることを示せ.

$$m_X = \left.\frac{dM_X}{dt}\right|_{t=0}, \ \sigma_X^2 = \left.\frac{d^2M_X}{dt^2}\right|_{t=0} - \left(\left.\frac{dM_X}{dt}\right|_{t=0}\right)^2$$

(京都大 2010) (m20103303)

0.682 (1) 複素数 z が以下の式で表されるとき, 以下の問いに答えよ. ただし, $i = \sqrt{-1}$ とする.

$$z = \left(\frac{4+3i}{1+2i}\right)^2 - \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$$

(a) z を極形式で表せ.

(b) z^n が実数となる最小の正の整数 n と, そのときの z^n を求めよ.

(c) $\sqrt[3]{z}$ を求めよ.

(2) 次の関数 $f(z)$ の極を求め, それらの点における留数を求めよ.

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^4 - z^2}$$

(京都大 2010) (m20103305)

0.683 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 1998) (m19983404)

0.684 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 4 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & 10 & 15 & 6 \\ 4 & 10 & 20 & 4 \end{pmatrix}$ の階数（rank）を求めよ.

(京都工芸繊維大 1999) (m19993405)

0.685 3次元ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対して，行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

を用いて，$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{y}$ と定める．ここで ${}^t\mathbf{x}$ は $\mathbf{x}$ の転置を表す.

(1) A の逆行列 B を求めよ.

(2) 任意の3次元ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ に対して，$f(\mathbf{x}, B\mathbf{y}) = f(C\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を満たす3次正方行列 C を求めよ.

(京都工芸繊維大 2000) (m20003409)

0.686 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2k & 3 \end{pmatrix}$ について以下の各問に答えよ.

(1) 行列 A が2を固有値として持ち，かつ正則行列となるように k を定めよ.

(2) (1) で求めた k に対して，A の固有値2に対応する固有ベクトルを求めよ.

(京都工芸繊維大 2000) (m20003411)

0.687 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(京都工芸繊維大 2001)　　(m20013408)

0.688 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 1 & 0 & a & 3 \\ 1 & 2 & a+2 & a \end{pmatrix}$ を考える．ただし，a は定数である．

(1) 行列 A の階数を求めよ．

(2) 次の連立 1 次方程式が解をもつように a の値を定め，その解を求めよ．

$$\begin{cases} x + y + (a+1)z = 2 \\ x + az = 3 \\ x + 2y + (a+2)z = a \end{cases}$$

(京都工芸繊維大 2001)　　(m20013409)

0.689 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ 2 & 1 & -1 \\ a^2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ が固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ を持つような a の値を求めよ．また，このとき行列 A のすべての固有値及びの行列式を求めよ．

(京都工芸繊維大 2001)　　(m20013410)

0.690 極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right)$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2002)　　(m20023402)

0.691 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないような実数 x の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2002)　　(m20023408)

0.692 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，A^2, A^3 および，$E - A$ の逆行列 $(E-A)^{-1}$ を求めよ．ただし，E は 3 次の単位行列である．

(京都工芸繊維大 2002)　　(m20023409)

0.693 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の各問いに答えよ．ただし，a は定数である．

(1) A の行列式の値が -2 となるように定数 a を定めよ．

(2) (1) で得られた定数 a の値に対して，A の固有値とその固有ベクトルをすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2002)　　(m20023410)

0.694 極限 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^2 \left\{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right\}$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2003)　　(m20033401)

0.695 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -x & 3 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ x & -x & 4 \end{pmatrix}$ に対して，行列の積 AB を求め，次に AB の行ベクトルが 1 次従属となるように x を定めよ．

(京都工芸繊維大 2003)　　(m20033409)

0.696 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ a & 2 & b \\ -1 & b & 2 \end{pmatrix}$ が固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ をもつとする.

(1) 成分 a, b の値を求めよ.　　(2) A の固有値をすべて求めよ.

(京都工芸繊維大 2003)　　(m20033410)

0.697 行列　$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　の固有値をすべて求めよ.

(京都工芸繊維大 2003)　　(m20033411)

0.698 (1) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)}{x^3}$$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ の第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$（n は自然数）を求めよ.

（京都工芸繊維大 2004）　　(m20043401)

0.699 2 変数 x, y の関数 z が

$$z=x^{\alpha}f\left(\frac{y}{x}\right)$$

で与えられている. ただし, α は定数で, f は微分可能な 1 変数関数である.

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を f および f の導関数 f' を用いて表せ.

(2) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\alpha z$ が成り立つことを示せ.

（京都工芸繊維大 2004）　　(m20043402)

0.700 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ の行列式の値が 1 となるように a の値を定めよ.

また, そのように a の値を定めたとき, A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

（京都工芸繊維大 2004）　　(m20043404)

0.701 行列 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値とその固有ベクトルをすべて求めよ.

(京都工芸繊維大 2004)　　(m20043405)

0.702 (1) 次の極限値を求めよ.　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left\{\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-2x\right\}$

(2) 次の不定積分を求めよ.　$\displaystyle\int\frac{x}{x^2+2x+2}dx$

(京都工芸繊維大 2005)　　(m20053401)

0.703 行列 $A=\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ p & q & r \end{pmatrix}$ が直交行列となり, その行列式が 1 となるように p, q, r を定めよ.

(京都工芸繊維大 2005)　　(m20053404)

0.704 行列 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 9 & -2 & 9 \\ 5 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ. ただし, E は 3 次の単位行列を表す.

(1) A の固有多項式 $f_A(x)$ および A の固有値をすべて求めよ. ただし, $f_A(x)$ は行列 $xE-A$ の行列式のことである.

(2) 自然数 $n \geqq 1$ に対して, 多項式 $(x-1)^{n+2}$ を $f_A(x)$ で割った余りを求め, 行列 $(A-E)^{n+2}$ を求めよ.

(京都工芸繊維大 2005) (m20053405)

0.705 a, b を異なる定数とするとき, 行列

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & -b & a \\ b & a & x & -a \\ a & a & b & x \end{pmatrix}$$

が逆行列を持たないような x の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2005) (m20053406)

0.706 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2005) (m20053407)

0.707 行列 $A=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値とその固有ベクトルをすべて求めよ.

さらに，A^n(n は自然数) の行列式の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2006) (m20063411)

0.708 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 行列 $xE-A$ の行列式を求めよ．ただし，x はスカラー，E は 4 次の単位行列を表す.

(2) A の固有値とその固有ベクトルをすべて求めよ.

(京都工芸繊維大 2007) (m20073401)

0.709 行列 $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の固有方程式の重解を λ_0 とする．固有値 λ_0 に対応する 2 つの固有ベクトルで，正規直交系をなすものを 1 組求めよ.

(京都工芸繊維大 2008) (m20083401)

0.710 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ．

(2) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(京都工芸繊維大 2010)　　(m20103401)

0.711　xy 平面の領域

$$D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; \frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq x^2 \right\}$$

に対して，重積分 $\displaystyle\iint_D \sin\left(\frac{y}{x}\right) dxdy$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2010)　　(m20103404)

0.712　行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，

(1) 固有値と単位固有ベクトルを求めよ．

(2) 対角化するための直交行列 P とその逆行列 P^{-1} を求めよ．

(3) $B = A^9 + 3A$ を求めよ．

(大阪大 1997)　　(m19973505)

0.713　２次曲線 $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 3$ を標準化して，そのグラフを書くことを考える．以下の問に順次答えよ．

(1) ２次形式 $F = 2x^2 - 4xy + 5y^2$ の行列 A を求めよ．

(2) 対称行列 A の固有値 α , β を求めると共に，それぞれに対応した大きさ 1 の固有ベクトル $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ を計算せよ．

(3) 直交行列の定義を述べよ．また，(2) で求めた列ベクトル $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ より 2 次の正方行列 $P = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ を作成した場合， P が直交行列となっていることを示せ．

(4) P を用いて，行列 A を対角化せよ．

(5) (3) で求めた P を用いて，次式のようにもとの (x, y) 座標系から (x', y') 座標系に変換した場合，新しい座標系ともとの座標系の関係はどのようになっているか示せ．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

(6) ２次曲線 $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 3$ に対して，(5) の座標変換を行い，新しい座標系 (x', y') で表現したときの式を求めよ．

(7) 与えられた 2 次曲線 $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 3$ の図形を描け．

(大阪大 1999)　　(m19993503)

0.714　行列 $A = \begin{pmatrix} -t & t+1 \\ -t+1 & t \end{pmatrix}$ とする．

(1) A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) $C^{-1}AC$ が対角行列となるような正則行列 C，および，そのときの対角行列 $C^{-1}AC$ を求めよ．

(3) A^n を求めよ．ただし，n は正の整数である．

(大阪大 2001)　　(m20013505)

0.715 X_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ は 3 次の正方行列で，$X_{k+1} = AX_k + E$ が成り立つとする．

ここに，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$， $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$， $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．

このとき，X_n を求めよ．

(大阪大 2001) (m20013506)

0.716 行列 $\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}$ が表す平面上の一次変換を f とする．点 P, Q, R, S をそれぞれ $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$，さらに円 $C : x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}$ とし，円 C が f によって移される図形を C' とおく．次の問いに答えよ．

(1) $t = \dfrac{1}{2}$ のとき f によって四辺形 $PQRS$ はどのような図形に移されるか．

(2) (1) で求めた図形との位置関係に留意して，$t = \dfrac{1}{2}$ のときの図形 C' の概形を描け．

(3) t がすべての実数を動くとき C' が通過しうる点 (x, y) の集合を求めよ．

(大阪大 2002) (m20023504)

0.717 次のような 4 つの未知変数 x_1，x_2，x_3，x_4 をもつ連立一次方程式を考える．

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 & = & 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \end{cases}$$

次の (1), (2) に答えよ．

(1) 上述の連立一次方程式の係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の列ベクトルのうちで，なるべく少ない個数の列ベクトルを用いて，それらの一次結合（線形結合）によって，その他の列ベクトルを表現せよ．

(2) 上述の連立 1 次方程式の解 x_1, x_2, x_3, x_4 のうちで，

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2$$

を最小にするものを求めよ．

(大阪大 2003) (m20033502)

0.718 以下の設問に答えよ.

(1) $x > 0$ の範囲で 3 つの関数 $f(x) = x - 1$, $g(x) = \log x$, $h(x) = -\dfrac{1}{ex}$ を考える. ただし, $\log x$ は自然対数, e は自然対数の底である. すべての $x > 0$ について, $f(x) \geqq g(x) \geqq h(x)$ を示せ. また, $f(x) \geqq g(x)$, $g(x) \geqq h(x)$ の二つの不等式それぞれについて, 等式の成立する x の値を求めよ.

(2) $a_i > -1\ (i = 1, 2, 3, \cdots)$ をみたす任意の数列 $\{a_i\}$ と任意の n に対して,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) > -\frac{1}{e}$$

を示せ. ただし, $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i)$ は n 個の実数 $1 + a_1, \cdots, 1 + a_n$ をかけた数を表す.

(3) $a_i = t\ (i = 1, \cdots, n,\ t > -1)$ のとき, $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i)$ を最小にする t の値と最小値を n を用いて表せ.

(4) 設問 (2) の不等式で, 右辺の $-\dfrac{1}{e}$ をより大きな数（n によらない）に変えても, $a_i > -1\ (i = 1, 2, 3, \cdots)$ をみたす任意の数列 $\{a_i\}$ と任意の n に対して, この不等式が成立するか. 理由を付けて答えよ.

（大阪大 2004） (m20043505)

0.719 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2)

$$(A^8 + 3A - 4I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

を満足する点 (x, y, z) の集合はどのような図形となるか．図形の方程式を導出せよ．ただし，I は 3 次の単位行列である．

（大阪大 2004） (m20043507)

0.720 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問に答えよ.

(1) λ を実数とするとき, 行列式 $|\lambda A - B|$ を極大ないし極小とする λ の値をすべて求めよ.

(2) 方程式 $\lambda A\overrightarrow{x} = B\overrightarrow{x}$ が $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{o}$ 以外のベクトルを解に持つときの λ の値と対応する解 $\overrightarrow{x}$ をすべて求めよ. ただし, $\overrightarrow{o}$ は零ベクトルである.

(大阪大 2005) (m20053501)

0.721 n 枚のコインを 1 列に並べる. 各コインは表, 裏のどちらを上にして置くかの 2 通りの置き方があるものとする. ただし, コインは区別できないものとする. このとき, 以下の設問に答えよ.

(1) n 枚のコインを置く場合の数を $f(n)$ とする. 例えば, 表を H, 裏を T で表すと, $n = 1$ のときは $(H), (T)$ の 2 通り置き方があるので $f(1) = 2$ であり, $n = 2$ のときは (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) の 4 通りの置き方があるので $f(2) = 4$ である. $f(n)$ を n の関数として表せ.

(2) 裏のコインを 2 枚以上続けて置くことを許さない場合の, n 枚のコインを置く場合の数を $g(n)$ とする. 例えば, $n=1$ のときは $(H),(T)$ の 2 通りの置き方があるので $g(1)=2$ であり, $n=2$ のときは $(H,H),(H,T),(T,H)$ の 3 通りの置き方があるので $g(2)=3$ である（ここで, (T,T) の置き方は裏が 2 枚続いているので許されないことに注意）. このとき, 以下の設問に答えよ.

(a) すべての並べ方を列挙することによって, $g(3),\ g(4)$ を求めよ.

(b) n を 3 以上の整数とする. このとき, $g(n)$ を $g(n-1),\ g(n-2)$ を用いて表せ.

(c) (b) の漸化式より,

$$g(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}$$

となることを, 数学的帰納法を用いて証明せよ.

(大阪大 2005) (m20053507)

0.722 関数 $f(x)$ を近似する三角多項式

$$P_N(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

の中で誤差

$$E_N=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(P_N(x)-f(x))^2\,dx$$

を最小にする

$$\{a_0\,,\ a_1\,,\cdots,\ a_N\,,\ b_1\,,\cdots,\ b_N\}$$

は $f(x)$ のフーリエ係数であることを示せ.

(大阪大 2005) (m20053510)

0.723 行列 $A=\begin{pmatrix}7&4&-16\\-6&1&12\\2&2&-5\end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値，単位固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) 行列 A の表す 1 次変換によって，直線 $x=3y=3z$ が写される直線を示せ.

(3) 行列 A の表す 1 次変換によって自分自身に写される直線の中で，どの 2 組も平行でないものを 3 つ求めよ.

(大阪大 2006) (m20063501)

0.724 行列 $A=\begin{pmatrix}1&2\\5&4\end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(2) 適当な変換行列（対角化するための正則行列）P を求め, 行列 A を対角化せよ.

(3) 行列 A の n 乗を求めよ.

(大阪大 2007) (m20073503)

0.725 (1) 空間上の直交座標 (x,y,z) を極座標 (r,θ,φ) ：

$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta\quad(r>0,\ 0\leq\theta\leq\pi,\ 0\leq\varphi<2\pi)$

に変換するとき, そのヤコビアン（関数行列式）を計算しなさい.

(2) 広義積分 $\quad I(\alpha)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}}dx\,dy\,dz$

について，$\alpha=\dfrac{1}{2}$ のときの値 $I\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めなさい．

(3) $I(\alpha)$ が収束する α の範囲を求めなさい．

(4) 広義積分 $\quad J(\alpha,\ \beta)=\displaystyle\iiint_B \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}\mid\log(x^2+y^2+z^2)\mid^{\beta}}dx\,dy\,dz$

が収束するような $\alpha,\ \beta$ の満たすべき条件を求めなさい．

ただし，$B=\left\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2<\dfrac{1}{4}\right\}$.

(大阪大 2007) (m20073506)

0.726 行列 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{pmatrix}$ について，以下の設問に答えよ．ただし，a は実数とする．

(1) A の行列式の値を求めよ．

(2) $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a^2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ が 1 次独立となるときの a の条件を求めよ．

(3) A の固有値の一つが 0 であるとき，a の値を求めよ．

また，その場合のすべての固有値と固有ベクトルを求めよ．

(4) A の固有値の一つが 1 であるとき，A^n を求めよ．ただし，$a<0$ とする．

(大阪大 2007) (m20073507)

0.727 行列 $A=\begin{pmatrix} a & 0.5 \\ 1 & a+0.5 \end{pmatrix}$ について，以下の設問に答えよ．ただし，a は実数とする．

(1) $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ が $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 以外の解をもつために，a が満たすべき条件を示せ．

(2) x_1,x_2,b_1,b_2 を実数とする．$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ が存在するために，a,b_1,b_2 が満たすべき条件をすべて述べよ．また，それぞれの場合の解あるいは解集合を求めよ．

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めて，A を対角化せよ．

(4) A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(5) 任意の 2 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}$ について，$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}A^n\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ となるための a の範囲を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}A^n\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ はベクトル $A^n\boldsymbol{x}$ の各成分が 0 に収束することをいう．

(大阪大 2008) (m20083502)

0.728 対称行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．ただし，$a,\ b$ および c は実数であり，また，$b\neq 0$ である．

(1) 実数の固有値が 2 個存在することを示せ．

(2) 相異なる固有値に属する固有ベクトルが互いに直交することを示せ．

(3) 行列 A は対称行列であるので，適当な直交行列 U によって対角化される．この直交行列 U を使った $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=U\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ という一次変換によって，$(x\quad y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が $\lambda_1 v^2+\lambda_2 w^2$ となることを示せ．ただし，λ_1 および λ_2 は行列 A の相異なる固有値である．

(4) (3) の関係を利用して $2x^2 - 2xy + 2y^2$ を $\lambda_1 v^2 + \lambda_2 w^2$ の形にしたい．このときの λ_1 および λ_2 を求めよ．

(大阪大 2008)　　(m20083508)

0.729 (1) A および B を n 次実対称行列とする．n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ についての方程式 $\lambda A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}$ が実数 $\lambda = \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3, \cdots,\ \lambda_n$ のときに $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ である解をもつとする．$\lambda_i\ (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$ に対応する解を $\boldsymbol{x}_i$ とする．$\lambda_i \neq \lambda_j$ のとき，${}^t\boldsymbol{x}_i A \boldsymbol{x}_j = 0$ となることを示せ。 ただし，${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す．

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるとき，上の方程式が $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ であるような解をもつ $\lambda_1,\ \lambda_2$ と，それに対応する解 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ を一つずつ求めよ．

(大阪大 2009)　　(m20093501)

0.730 自然数 n に対して

$$I_n(t) = \frac{1}{\pi^n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\dfrac{t}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + {x_k}^2\right)}\, dx_1 \cdots dx_n \quad (t \in \mathbb{R})$$

とおく．

(1) 留数定理を用いて $I_1(t)$ を求めよ．

(2) $I_n(t)$ を求めよ．

(大阪大 2009)　　(m20093506)

0.731 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ の指数関数 $\exp(A)$ を求める. ただし, a, b および c は実数ある. また, E を単位行列として, 行列 A の指数関数 $\exp(A)$ を

$$\exp(A) = E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

のように定義する．

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ．

(2) 行列 A は対称行列であるので, 適当な直交行列によって対角化される．行列 A を対角化する直交行列の中で対称行列となる直交行列 P を 1 つ求めよ．

(3) 行列 A の指数関数 $\exp(A)$ を求めよ．

(4) $\exp(A)$ の行列式 $|\exp(A)|$ を求めよ．

(大阪大 2010)　　(m20103501)

0.732 自然数 n に対し, 以下のように定義される数列 $\{a_n\}$ について, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ．

ただし, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ ($|r| < 1$) を用いてもよい．

(1) $a_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$　　　(2) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} (k-2) \left(\frac{1}{2}\right)^k$

(大阪大 2010)　　(m20103502)

0.733 $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & -6 & -3 \\ -2 & -2 & -2 & -4 & 4 \\ 5 & -6 & -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$ であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -2 & -2 & -2 \\ 5 & -6 & -3 \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

(2) 行列 A の階数 (rank) を求めよ．

(大阪府立大 2003)　　(m20033602)

0.734 次のような行列 A について, 以下の問に答えよ.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $(aI-A)$ が正則でないための必要条件を求めよ. ここで, a はスカラー数, I は $3\times\ 3$ の単位行列とする.

(大阪府立大 2005)　　(m20053601)

0.735 次の形に書ける微分方程式を同次形という．　$\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

(1) 同次形の微分方程式は，変数分離型に変換して解くことができる．この変換を示して，解を得るプロセスについて説明せよ．

(2) (1) を利用して　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$　の一般解を求めよ．

(大阪府立大 2006)　　(m20063602)

0.736 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{a}{x+y}\right)^2$　$(a>0)$　　　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+4y=6e^{2x}$

(大阪府立大 2007)　　(m20073602)

0.737 (1) 次の方程式を解け．なお，$|\cdot|$ は行列式を表す．　$\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & -2 & x+3 \\ 3 & x+4 & x-4 & x+5 \\ 0 & x+1 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & x-8 \end{vmatrix}=0$

(2) 以下の行列 A が逆行列を持つ条件を示せ．また，行列 A の逆行列を求めよ．なお，a は実数とする．　$A=\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

(大阪府立大 2008)　　(m20083601)

0.738 累次積分

$$I=\int_0^1\left(\int_y^1 y^2e^{x^4}dx\right)dy$$

の計算を実行しよう. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) I を二重積分とみたとき, 積分する領域（ただし, 境界を含む）を xy 平面上に図示せよ.

(2) 積分順序を交換することにより, I の値を求めよ.

(大阪府立大 2010)　　(m20103601)

0.739 行列 A をつぎのように定義する：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき, つぎの各問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) 問い (1) で求めた固有値に対応する行列 A の長さ 1 の固有ベクトルを, それぞれ求めよ.

(3) 問い (1) と問い (2) の結果を使って, 行列 A を対角化せよ.

(4) 行列 A の n 乗, A^n を求めよ. ただし n は自然数とする.

(大阪府立大 2010)　　(m20103604)

0.740 行列 A, B を $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする. ここで, a, b, c, d は実数である.

このとき, 実数 a, b, c, d がどのような条件を満たせば, $AB = BA$ が成立するか.

(大阪府立大 2010)　　(m20103605)

0.741 3 次元実数空間 $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合 U が, 実数 a, b を用いて以下のように与えられているとする. このとき, 実数 a, b がどのような条件を満たせば, U は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間になるか.

$$U = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| ax_1 + x_2 + x_3 = b \right\}$$

(大阪府立大 2010)　　(m20103606)

0.742 次の条件を満たす点 $z = x + iy$ の存在範囲を図示せよ.

$\boldsymbol{Re}\left(z^2\right) < 1$

(大阪府立大 2010)　　(m20103608)

0.743 次の各行列が逆行列をもつかどうかを判定しなさい. また, 逆行列をもつ場合, それを求めなさい.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(大阪府立大 2010)　　(m20103610)

0.744 次の関数の導関数を求めなさい.

(1) $\tanh x$　　(2) $\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$　$(-1 < x < 1)$　　(3) $\log_e(\cos x)$　$\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

(大阪府立大 2010)　　(m20103611)

0.745 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) B の階数 (= rank) r を求めよ．

(2) B の 4 個の列ベクトルから r 個の 1 次独立ベクトルの取り出し方は何通りあるか求めよ．ただし，r は (1) で求めた r である．

(関西大 2003) (m20033703)

0.746

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 3 & 7 & 11 & 15 & 19 \\ 2 & 6 & 10 & 14 & 18 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

とする. 次の問に答えよ.

(1) 連立方程式 $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ が解をもつための b の条件を求めよ.

(2) $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ が解をもつとき, その解を求めよ.

(関西大 2005) (m20053701)

0.747 サイコロを 4 回投げて, 出た目の数を順に a_1 , a_2 , a_3 , a_4 とする.

(1) a_1 , a_2 の最大値が 1 となる確率 p_1 を求めよ.

(2) a_1 , a_2 の最大値が 2 となる確率 p_2 を求めよ.

(3) a_1 , a_2 の最大値が 3 となる確率 p_3 を求めよ.

(4) 2 次元ベクトル $\begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ のすカラー倍となる確率 p_4 を求めよ.

(5) 2 次正方行列 $\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}$ が正則となる（すなわち, 逆行列をもつ）確率 p_5 を求めよ.

(関西大 2005) (m20053703)

0.748 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を余因子を使って求めよ.

(神戸大 1994) (m19943804)

0.749 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を対角化せよ.（変換行列も示せ）

(神戸大 1994) (m19943805)

0.750 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に Gram-Schmidt の正規直交化法を用い，正規直交基底を求めよ.

(神戸大 1994) (m19943806)

0.751 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ，ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix}$ ， $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

について，次の問に答えよ．

(1) 行列 A は正則であるか．

(2) 連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ に解があれば，その解を求めよ．

(神戸大 1996） (m19963805)

0.752 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値及び固有ベクトルを求めよ．

(神戸大 1996） (m19963806)

0.753 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ とする．

(1) P は正則であることを示し，P^{-1} を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ を計算せよ．

(3) A の固有値と固有ベクトルを計算せよ．

(神戸大 1996) (m19963807)

0.754 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{2}{a_n}\right)$ で定められた数列 $\{a_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ について，次の各問に答えよ．

(1) $a_n \geq a_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$ であることを示せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示し，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(神戸大 1997） (m19973804)

0.755 次のベクトルの組は一次独立かそれとも一次従属であるか調べよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(神戸大 1997） (m19973808)

0.756 次の行列 A の固有値及び固有ベクトルを求めよ．

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(神戸大 1997） (m19973811)

0.757 $A=\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$，$T=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$S=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき，次の (1)～(4) に答えよ．

(1) $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ （ n は任意の整数）を示せ．

(2) $AT^n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ とするとき， $0 < d_1 < |\, c_1\, |$ をみたす n を求めよ．

（以下の (3)，(4) ではこの n を使う）

(3) $AT^nST^m = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ とするとき， $d_2 = 0$ となる m を求めよ．

(4) A を S と T を用いて表せ．

(神戸大 1998) (m19983805)

0.758 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$ の値を求めよ．

(神戸大 1999) (m19993801)

0.759 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

また $T^{-1}AT$ が対角行列になるような正則行列 T は存在するか．存在するならそれを求め，存在しないならその理由を述べよ．

(神戸大 2000) (m20003804)

0.760 次の関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ を求め，それらが原点で連続かどうか調べよ．

$$f(x,y) = xy\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

(神戸大 2001) (m20013804)

0.761 次の行列 A の余因子行列 $\tilde{A}$ を求めよ．また A が正則であれば，その逆行列 A^{-1} を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(神戸大 2001) (m20013808)

0.762 行列 A を次のようにするとき，次の各問に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) A^n $(n \geq 2)$ を求めよ．

(神戸大 2001) (m20013811)

0.763 a, b を実数とするとき，以下の等式を示せ．

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\log\left(e^{\frac{a}{\varepsilon}}+e^{\frac{b}{\varepsilon}}\right) = \max\{a,b\}$$

(神戸大 2002) (m20023801)

0.764 n を 2 以上の自然数とするとき，次の行列の行列式を求めよ．ただし，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ は実数とする．

$$\begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{pmatrix}$$

(神戸大 2002)　　(m20023805)

0.765 $f(x), g(x)$ を何回でも微分可能な関数とする．このとき

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

を証明せよ．ここで，$h^{(l)}(x)$ は関数 $h(x)$ の l 階導関数を表す．

(神戸大 2003)　　(m20033802)

0.766 次の積分を計算せよ．

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad \left(D = \{(x,y) \in \mathbf{R^2} \ : \ x^2+y^2 \leq 1\} \right)$$

(神戸大 2003)　　(m20033805)

0.767 $a_1, \cdots, a_n$ を実数とするとき，次の $n \times n$ 行列の行列式を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{pmatrix}$$

(神戸大 2003)　　(m20033809)

0.768 行列 A を次のように定めるとき，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) A^n を求めよ．

(神戸大 2003)　　(m20033810)

0.769 $\mathbf{R^3}$ の基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$，行列 B を次のように定める．

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

φ を基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ に関して B で表現される $\mathbf{R^3}$ 上の線形変換とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 基底 $\{e_1+e_2, e_2, e_3\}$ に関する φ の表現行列を求めよ．

(2) どの基底に関しても φ が B で表現されているときの a, b, c の値を求めよ．

(神戸大 2003)　　(m20033811)

0.770 x を 0 でない実数とする．このとき，次の等式を示せ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left\{ 1 + \cos\left(\frac{1}{n}x\right) + \cos\left(\frac{2}{n}x\right) + \cdots + \cos\left(\frac{n-1}{n}x\right) \right\} = \frac{\sin x}{x}$$

(神戸大 2004)　　(m20043802)

0.771 次の n 次正方行列の行列式を求めよ.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ a_1 & b_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ a_1 & b_2 & b_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ a_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & a_n \\ a_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

(神戸大 2004)　　(m20043807)

0.772 次の各問に答えよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の余因子行列 $\widetilde{A}$ を求めよ.

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} x & 1 & a & b \\ y^2 & y & 1 & c \\ yz^2 & z^2 & z & 1 \\ yzt & zt & t & 1 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det(B)$ を求めよ.

（神戸大 2004）　　(m20043808)

0.773 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき, 次の問に答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A が対角可能か否か, 理由を述べて答えよ. また対角可能ならば, 対角化せよ.

(神戸大 2004)　　(m20043809)

0.774 (1) 次の行列式を因数分解しなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

(2) 次の連立一次方程式の解を全部求めよ. 解全体を解空間と呼ぶ. この解空間の次元はいくらか？

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(神戸大 2005)　　(m20053801)

0.775 a, b, c, d を $ad - bc = 1$, $0 < |c| < 1$ を満たす実数とし, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える. 次の漸化式で定義される行列の列を考える.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = A,$$

$$A_{n+1} = A_n A_0 A_n^{-1} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

とおく. $M = \dfrac{1}{1-|c|}$ とおいて, 以下 $|a| < M$ を仮定する.

(1) $a_n d_n - b_n c_n = 1 \ (n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示せ.

(2) c_n を計算しなさい.

(3) $|a_n| < M$ を証明せよ.

(神戸大 2005) (m20053804)

0.776 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を行列式が 1 の行列とする : $ad - bc = 1$. A のトレース $a + d$ を t とする : $t = a + d$. このとき

$$A^2 = f(t)A + g(t)I$$

を満たす関数 $f(t)$, $g(t)$ を求めよ. ここで, I は単位行列を表す. ただし, $A \neq \pm I$ と仮定しておく. さらに, $t = 0$ または $t = \sqrt{2}$ のとき, それぞれ $A^4 = I$ または $A^4 = -I$ となることを示せ.

(神戸大 2006) (m20063801)

0.777 関数 $g_{a,b,c,d}(t)$ を $g_{a,b,c,d}(t) = \dfrac{at+b}{ct+d}$ で定義する. ここで a, b, c, d は $ad - bc \neq 0$ を満たす任意の実定数. このとき $g = g_{a,b,c,d}(t)$ は

$$(*) \qquad \left(\frac{g''}{g'}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2$$

を満たすことを示せ. ここで, $' = d/dt$.

さらに任意の $a, b, c, d, \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$ $(ad - bc \neq 0,\ \hat{a}\hat{d} - \hat{b}\hat{c} \neq 0)$ に対して

$$g = g_{a,b,c,d}(g_{\hat{a},\hat{b},\hat{c},\hat{d}}(t)) = g_{a,b,c,d} \circ g_{\hat{a},\hat{b},\hat{c},\hat{d}}(t)$$

も $(*)$ を満たす理由を説明せよ.

(神戸大 2006) (m20063802)

0.778 次の 2 次対称行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$ を直交行列 P を用いて対角化せよ.

(神戸大 2006) (m20063806)

0.779 次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の極限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ について次の問いに答えよ. $a_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{a_n}$

(1) $a_1 = 2$ または $a_1 = 4$ のとき, $a_n = a_1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を確認せよ.

(2) $a_1 < 2$ のとき, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ を示せ.

(3) $a_1 > 4$ のとき, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ を示せ.

(4) $4 > a_1 > 2$ のとき, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ を示せ.

(神戸大 2007) (m20073807)

0.780 (1) 関数 $z = \dfrac{1}{\sqrt{y}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{4y}\right)$ $(y > 0)$ が, 関係式 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を満たすことを示せ.

(2) f, g を C^2 級の関数, $c > 0$ を定数とするとき, 関数 $z = f(x + cy) + g(x - cy)$ が, 関係式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を満たすことを示せ.

(神戸大 2008) (m20083802)

0.781 (1) $\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$ の行列式を因数分解せよ.

(2) n 次の正方行列 A が ${}^tA = -A$ を満たしているとする. ただし, ${}^tA$ は A の転置行列である. このとき, n が奇数ならば, A の行列式は 0 であることを示せ.

(神戸大 2008)　　(m20083806)

0.782 $0 < a < 1$ を満たす実数 a に対して, $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 自然数 n に対して A^n を求めよ.

(2) 自然数 n に対して $S_n = E + A + A^2 + \cdots + A^n$ とおく. ただし, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である. このとき, $\lim_{n\to\infty} S_n$ が存在し, $(E - A)^{-1}$ に等しいことを示せ.

(神戸大 2008)　　(m20083807)

0.783 次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}} \quad (D = \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 | x^2+y^2+z^2 \leq 1\})$

(2) $\displaystyle\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tan^{-1}\frac{y}{x}$

(神戸大 2008)　　(m20083808)

0.784 (1) 次の行列 A の行列式 $|A|$ は, x に関する高々 4 次の多項式で表される. このとき, x^2 の係数を A の成分を用いて表せ. ただし, A の $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ 成分以外の成分は x に無関係な定数とする.

$$A = \begin{pmatrix} x & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & x & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & x^2 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

(2) $\{a,\ b,\ c\}$ を 3 次元ベクトル空間 V の基底とし, f を次のような V の線形変換とする. このとき, 以下の各問に答えよ.

$$\begin{cases} f(a) = -a - c \\ f(b) = a \\ f(c) = a + b + 2c \end{cases}$$

(a) $\{a+b+c,\ a+b,\ a\}$ は V の基底であることを示せ.

(b) V の基底 $\{a+b+c,\ a+b,\ a\}$ に関する f の表現行列 A を求めよ.

(神戸大 2009)　　(m20093801)

0.785 a, b を実数, $a \neq 0$ とする. 行列 A を $A = \begin{pmatrix} a-b & a & a \\ a & a-b & a \\ a & a & a-b \end{pmatrix}$ と定める.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) A を対角化する直交行列 P を求めて A を対角化せよ.

(3) $A^{20} = E_3$ を満たす a, b の値を求めよ. ただし, E_3 は 3 次の単位行列とする.

(神戸大 2009)　(m20093802)

0.786 (1) 行列式 $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の値を求めよ.

(2) 次を満たす $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{v}$ を 1 つあげよ.

$\boldsymbol{v} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であり，$\boldsymbol{v}$ は 3 つのベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のいずれとも直交する.

(神戸大 2009)　(m20093805)

0.787 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく．このとき，次の各問に答えよ.

(1) $n = 1, 2, \cdots$ に対して，A^n を求めよ.（答えのみでよい）.

(2) $S_n = I + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^k A^k}{k!}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ.

(神戸大 2009)　(m20093806)

0.788 実対称行列　$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　について次の問に答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) 各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を求めよ. なお ${}^tPP = E$（単位行列）をみたす実正方行列を直交行列という.

(神戸大 2010)　(m20103801)

0.789 $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ の微分係数 $\dfrac{dy}{dx}$ が次式で与えられることを証明せよ．ただし，a は定数で $a > 0$ である.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{a^2 + x^2}$$

(鳥取大 1997)　(m19973901)

0.790 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

(鳥取大 2000)　(m20003902)

0.791 $z = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, f は C^1 級なるとき，次式を証明せよ.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(鳥取大 2000)　(m20003904)

0.792 微分可能な関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は次式で与えられる.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

このことを用いて, 次の問いに答えなさい.

(1) $y=\log_e x$ の導関数を求めなさい. ただし, $e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ とする.

(2) $y=x^n$ の導関数を求めなさい. ただし, n は正の整数とする.

（鳥取大 2004） (m20043901)

0.793 次の積分を計算しなさい.

(1) $\displaystyle\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx$ ただし, L は正で, n,m は正の整数をとるものとする.

(2) $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-ax+b}dx$ ただし, a は正とする.

（鳥取大 2004） (m20043902)

0.794 $x=0$, $y=0$, $2x+y=2$ の 3 つの直線に囲まれた領域で次の積分を計算しなさい.

$$\iint\left(x^2-xy\right)dxdy$$

(鳥取大 2004) (m20043903)

0.795 次の計算をせよ.

$$\iint_D(1-x^2-y^2)dxdy \quad \left(\text{ただし } D=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}\right)$$

(鳥取大 2005) (m20053903)

0.796 次の行列 A に対して以下の設問 (1), (2) に答えよ. $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ. 固有ベクトルは第一成分（x 成分）が 1 のものを求めよ.

(2) 行列 A を用いて, 2 変数関数 $f(x,y)$ を以下の式で定義する.

$$f(x,y)=(x\ \ y)\,A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \quad (x,y \text{ は実数})$$

この 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して $f(x,y)=a(x+y)^2+b(x-y)^2$ となるように a,b を求めよ.

(鳥取大 2006) (m20063914)

0.797 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{x}'\in\boldsymbol{R}^2$ への線形写像（1 次変換）が次のように与えられた. ただし, $\boldsymbol{R}^n$ は実数 $\boldsymbol{R}$ 上の n 次元ベクトル空間を表す.

$$\boldsymbol{x}'=f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1 & -4\\ -1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}\,.$$

(1) 表現行列 A の行列式 $|A|$ の値を求めなさい.

(2) 1 次変換 f の逆変換 f^{-1} における表現行列 A^{-1} を求めなさい.

(3) 1 次変換 f について, $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ を満たす $\lambda(\in\boldsymbol{R})$ をすべて求めなさい.

(鳥取大 2008) (m20083908)

0.798 ５つ行列の積 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ で与えられる行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化すること．

(鳥取大 2009)　　(m20093904)

0.799 次を求めよ．ただし，$\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}i + \dfrac{\partial}{\partial y}j + \dfrac{\partial}{\partial z}k$ である．

(1) $\nabla(x^2+y+z^3)$

(2) $\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right)$　（ただし，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）

(3) $\nabla\times\ (x^2i+xy^2j)$

(鳥取大 2009)　　(m20093906)

0.800 正の数 a,b,c が $a+b+c=1$ を満たすとき，行列

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

に対し，次の問に答えよ．

(1) １は A の固有値であることを示せ．

(2) １以外の A の固有値を求め，それらの絶対値は１より小さいことを示せ．

(3) $\mathbf{x}$ を３次元のベクトルとするとき，n を限りなく大きくすれば，$A^n\mathbf{x}$ はある３次元ベクトルに限りなく近づくことを示せ．

(岡山大 2001)　　(m20014003)

0.801 (1) n を正の整数とする．このとき，

$$\sin^{2n+1}x \leqq \sin^{2n}x \leqq \sin^{2n-1}x \qquad (0\leqq\ x\leqq\pi/2)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\sin^0 x=1$ $(0\leqq\ x\leqq\pi/2)$ と定め，$n=0,1,2,\cdots$ に対して　$I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx$　とおく．このとき，　$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ $(n\geqq\ 2)$　が成り立つことを示せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\right)^2$ を求めよ．

(岡山大 2003)　　(m20034001)

0.802 (1) 行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 10 & 7 & 10 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して, $A^2-5A+6E$ を計算せよ. ただし E は単位行列を表す.

(2) 整式 $f(x)=x^8$ を２次式 $g(x)=x^2-5x+6$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $R(x)$ とおく. このとき $f(x)$, $g(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ たちが満たす関係式を述べよ. また $Q(x)$ と $R(x)$ の次数はいくつか？

(3) (1) の行列 A に対して A^8 を求めよ.

(岡山大 2005)　　(m20054001)

0.803 (1) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ のすべての固有値および固有ベクトルを求めよ．

(2) 一次方程式

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

が解をもつのは，a, b, c の間にどのような関係が成り立つときか答えよ．

(岡山大 2006)　　(m20064001)

0.804 (1) 次の行列 A に対して，その階数 $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ． $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $m \geqq 2$, $n \geqq 1$ のとき，$m \times n$ 行列 A に対して，A の第 1 行を取り除いた $(m-1) \times n$ 行列を A' と書くことにする．$\mathrm{rank}(A) - \mathrm{rank}(A')$ は 0 または 1 であることを示せ．

(3) $m \geqq 2$, $n \geqq 2$ のとき，$m \times n$ 行列 A に対して，A の第 1 行と第 1 列を取り除いた $(m-1) \times (n-1)$ 行列を A'' と書くことにする．A をさまざまな行列を動かしたときの $\mathrm{rank}(A) - \mathrm{rank}(A'')$ の最小値と最大値を求めよ．

(岡山大 2007)　　(m20074001)

0.805 (1) 関数 $f(t)$ を $f(t) = \dfrac{1+at}{1+bt}$ によって定義する（a, b は定数）．このとき，$f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ を計算せよ．

(2) 次の極限値が存在するように定数 a, b を定め，その極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^6} \left(\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} \right)$$

(岡山大 2008)　　(m20084001)

0.806 行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ．

(1) 行列 A の 3 つの列ベクトルが生成する $\boldsymbol{R}^3$ の部分ベクトル空間の次元を求めよ．

(2) 連立一次方程式

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

が解をもつための a, b, c に関する条件を求めよ．

(3) 行列 A の固有値および固有空間をすべて求めよ．

(岡山大 2008)　　(m20084004)

0.807 数直線 $(-\infty, \infty)$ 上の関数 $F(x)$ と $f(x)$ を

$$F(x) = x^2 \log(1+x^2)\ , \quad f(x) = F'(x)$$

によって定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $g(x) = \displaystyle\int_0^x (tf'(t) - f(t))\, dt$ を求めよ．

(2) $f'(x) > \dfrac{f(x)}{x} > \dfrac{2F(x)}{x^2} > 0 \quad (x \neq 0)$ が成り立つことを示せ．

(3) $g(x)$ は下に凸な関数であることを示せ．

(岡山大 2009)　　(m20094001)

0.808　2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有方程式 $x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0$ が相異なる 2 つの実数解 α, β をもつとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $(A - \alpha E)(A - \beta E) = O$，$A \neq \alpha E$，$A \neq \beta E$ が成り立つことを示せ．ただし，E は単位行列，O は零行列とする．

(2) $A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$ と $A\boldsymbol{y} = \beta\boldsymbol{y}$ をそれぞれ満たす零でない列ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が存在することを示せ．また，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は一次独立であることを示せ．

(3) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ を満たす 2 次正則行列 P が存在することを示せ.

(岡山大 2009)　　(m20094003)

0.809　(1) 3 次正方行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ の行列式を計算し，その逆行列を求めよ（答のみでよい）．

(2) (x_1, x_2, x_3, x_4) に関する次の連立一次方程式が $(0, 0, 0, 0)$ 以外にも解をもつとき，a の値を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & a & 2 & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(岡山大 2009)　　(m20094004)

0.810　(1) n を整数とするとき, $\dfrac{x}{(1+x^2)^n}$ の原始関数を求めよ.

(2) n が 2 以上の整数のとき, 次の不等式を示せ.

$$\frac{1}{2(n-1)}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leqq \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx \leqq \frac{\pi}{4}$$

(岡山大 2010)　　(m20104002)

0.811　行列 P の転置を ${}^tP$ と表す．n 次正方行列 P が ${}^tP = P$ を満たすとき対称行列といい，${}^tP = -P$ を満たすとき交代行列という．次の問いに答えよ．

(1) n 次正方行列 A に対して，次を示せ．

$$B = \frac{1}{2}(A + {}^tA), \quad C = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$$

とおくとき，B は対称行列，C は交代行列である．

(2) 次の正方行列 A を対称行列と交代行列の和で表せ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \\ 10 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

(広島大 2001)　　(m20014109)

0.812　(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqq 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}dt$ を示せ.

(2) 正の実数 x に対し，無限級数　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right)$　が収束することを示せ.

(3) 正の実数 x に対し　$f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n}\right)$　とおく．r を正の整数とするとき

$f(r)=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{r-1}+\dfrac{1}{r}$　を示せ．

(広島大 2003)　　(m20034105)

0.813　次の定積分を導け（計算せよ）．ただし，$a>0$ とする．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

ヒント：$\displaystyle\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx\right)^2=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ay^2}dy$ であるから，
x,y の 2 重積分を求めればよい．

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-ax^2}dx$

(広島大 2003)　　(m20034106)

0.814　行列と複素数に関する次の問いに答えよ．

(1) 実数成分をもつ次の行列　$A=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$

は $a=b=0$ でない限り正則である（逆行列をもつ）ことを示せ．

(2) A にその $(1,1)(2,1)$ 成分から構成された複素数 $a+ib$ $(i^2=-1)$ を対応させる．このとき，行列の積，逆行列には複素数の積，逆数がそれぞれ対応することを示せ．

(広島大 2003)　　(m20034107)

0.815　行列 A を　$A=\begin{pmatrix}3&2&-1\\2&0&2\\-1&2&3\end{pmatrix}$　と定める．次に答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) A を正則行列で対角化せよ．

(広島大 2003)　　(m20034108)

0.816　$\mathbb{R}^3$ の部分集合 V を　$V=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;x+y+z=0\right\}$　と定める．次に答えよ．

(1) V は $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間であることを示せ．

(2) V の正規直交基底を一組求めよ．

(3) 写像 $f:V\to V$ を　$f\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}y\\z\\x\end{bmatrix}$　と定める．f が線形写像になることを示せ．

(4) (2) で求めた V の一組の基底を e_1,e_2 とする．$f(e_1)$ と $f(e_2)$ をそれぞれ，e_1,e_2 を用いて表せ．

(広島大 2003)　　(m20034109)

0.817　次の問に答えよ. ただし, 被積分関数が連続になる範囲のみを考えればよい.

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$（$C$ は積分定数）を示せ.

(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+1}=\tan^{-1}x+C$（$C$ は積分定数）を示せ.

ただし, $y=\tan^{-1}x$ $\left(|y|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ は $x=\tan y$ の逆関数を表す.

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2}$ を求めよ.

(4) $\alpha < \beta$ のとき $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ を求めよ.

(5) $a > 0$, $D = b^2 - 4ac < 0$ のとき $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ を求めよ.

(広島大 2005)　　(m20054101)

0.818 (1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が一次独立であるための必要十分条件は, $ad - bc \neq 0$ であることを示せ.

(3) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ によって定まる線形写像

$$A \,:\, \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

に対し, 核空間 $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\boldsymbol{x} = 0\}$ の次元と, 像空間 $W = \{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\}$ の次元を求めよ.

(広島大 2005)　　(m20054104)

0.819 正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値と対応する固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を一つ求めよ.

(3) 零ベクトルではないベクトル $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ に対して, 次のように帰納的に $\boldsymbol{x}_n$ を定義する.

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \frac{1}{||A\boldsymbol{x}_n||} A\boldsymbol{x}_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$n \to \infty$ とするとき, $\boldsymbol{x}_n$ が A の絶対値が一番大きな固有値に対する固有ベクトルに収束するならば, $\boldsymbol{x}_0$ は絶対値が一番大きな固有値に対する固有ベクトルと直交しないことを示せ. ただし, $||\cdot||$ は, ベクトルの大きさを表すものとする.

(広島大 2005)　　(m20054105)

0.820 (1) P は $P^2 = P$ を満たす $n\times\ n$ 実行列とする. $Q = I - P$ とおくと, 次を満たすことを示せ.

$$PQ = QP = O \qquad Q^2 = Q$$

(2) (1) の P, Q に対して $V = \{P\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$, $W = \{Q\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$ とおく. このとき, $\mathbb{R}^n$ は V と W の直和に分解される, すなわち, 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \qquad \boldsymbol{v} \in V\,, \quad \boldsymbol{w} \in W$$

と一意的に表されることを示せ.

(3) (2) における V と W の任意の元は $\mathbb{R}^n$ の内積

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

に関して互いに直交しているとする. このとき, P は対称行列であることを示せ.

(広島大 2005) (m20054106)

0.821 3 次元ベクトル $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$ に関する次の公式を証明せよ.

$$\left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) \times \overrightarrow{C} = \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C}\right) \overrightarrow{B} - \left(\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{C}\right) \overrightarrow{A}$$

ここで $\times$は外積 , $\cdot$ は内積である.

(広島大 2005) (m20054107)

0.822 $n \times n$ 複素行列に対し,

$$(AB)^{\dagger} = B^{\dagger} A^{\dagger}$$

を証明せよ. ただし, $A^{\dagger} = ({}^t A)^*$（A の転置かつ複素共役）である.

(広島大 2005) (m20054108)

0.823 $\mathbb{R}^n$ に属する m 個のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ に対して，次の命題 $(*)$ が真であるとき $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ は 1 次独立であるといい，偽であるとき $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ は 1 次従属であるという。

$(*)$「 $c_1, \cdots, c_m \in \mathbb{R}$ が $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{0}$ を満たせば $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ となる」

(1) 命題 $(*)$ の否定命題を述べよ.

(2) 次で与えられるベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ が 1 次独立であるか，1 次従属であるかを判定せよ.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(3) A は相異なる実数の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ をもつ 3 次の実正方行列で，$\boldsymbol{e}_j \neq \boldsymbol{0}$ $(j = 1, 2, 3)$ は λ_j に対応する固有ベクトルとする．このとき，$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

(広島大 2006) (m20064102)

0.824 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ．ただし，a は実数とする.

(1) 行列 A の階数を求めよ.

(2) 三つの平面

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \quad x - y + z = 0 \\ \pi_2 &: \quad 2x + y - 4z = 0 \\ \pi_3 &: \quad x + 2y + az = 0 \end{aligned}$$

の交点全体はどのような図形になるかを述べ，その理由を説明せよ.

(3) $a = -5$ のとき，A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(広島大 2006) (m20064104)

0.825 次の $3\times\ 3$ 行列の固有値を求めよ． $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(広島大 2006) (m20064109)

0.826 (1) 実数 t に対して， $t=\tan\theta$ かつ $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

を満たす θ として，関数 $\theta=\arctan t$ を定める．このとき，$\dfrac{d}{dt}(\arctan t)$ を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n dx$ を $x=\sinh t$ と変数変換することにより求めよ．

ただし，n は 2 以上の自然数とし，$\sinh t$ は $\sinh t=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ とする．

(3) α と R を実数とし，$R\geqq\ 1$ と仮定する． 領域 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ R^2\}$ における重積分 $\displaystyle\iint_D x^2(x^2+y^2)^\alpha dxdy$ の値を求めよ．

(広島大 2008) (m20084101)

0.827 実数 a に対して行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & -1 & a & -2 \\ 2 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) A の行列式 $\det A$ を求めよ．

(2) $\det A=0$ となるような非負の実数 a を求め，その時の A の階数を計算せよ．

(3) 前問における a に対して，$A\boldsymbol{v}\neq 0$ かつ $A^2\boldsymbol{v}=0$ となるようなベクトル $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^4$ を 1 つ求めよ．

(広島大 2008) (m20084103)

0.828 実数を成分とする 3 次正方行列全体のなすベクトル空間を V とする．また，行列 A を

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と定義し，線形写像 $f\ :\ V\to V$ を $f(X)=AX-XA\quad(X\in V)$ で定義する．

(1) 線形写像 f に関して，

$$E_{13}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が固有ベクトルであることを示せ．また，その固有値を求めよ．

(2) 線形写像 f に関して，X が固有値 k を持つ固有ベクトルであるとき，転置行列 ${}^tX$ が固有値 $-k$ を持つ固有ベクトルであることを示せ．

(3) 線形写像 f に関して，固有値と対応する固有空間をすべて求めよ．

(広島大 2008) (m20084105)

0.829 次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4x=0$, 初期条件 $\left(t=0\text{ のとき, } x=1\text{ かつ}\dfrac{dx}{dt}=0\right)$

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4x=\sin 3t$, 初期条件 $\left(t=0\text{ のとき, } x=0\text{ かつ}\dfrac{dx}{dt}=0\right)$

(広島大 2008)　　(m20084107)

0.830 次の $4\times\ 4$ 行列の逆行列が存在しないための条件を求めよ．ただし，x は実数とする．

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 0 & x \\ x & 1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 & x \\ x & 0 & x & 1 \end{pmatrix}$$

(広島大 2008)　　(m20084108)

0.831 2 次の実正方行列全体のなすベクトル空間を V とし，その任意の元 A, B に対して

$$(A, B) = \mathrm{tr}\,({}^tAB)\,,$$

とおく．ただし，${}^tA$ は A の転置行列とし，$\mathrm{tr}\,C$ は行列 C のトレースとする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) (A, B) は内積であることを示せ．

(2) A と B が

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\ ,\quad B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

で与えられているとき，(A, B) を求め，さらに A と B のなす角 θ を求めよ．

ただし，$0 \leqq \alpha - \beta \leqq \pi$ とする．

(3) (2) で定義した A に対して，線形写像 $f\ :\ V \to \mathbb{R}$ を $f(X) = (A, X)\ \ (X \in V)$ で定義する．このとき $\mathrm{Ker}\,f$ の次元を求め，$\mathrm{Ker}\,f$ の正規直交基底を 1 組求めよ．

(広島大 2009)　　(m20094104)

0.832 次の行列 A について，以下の問い答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & x \\ -5 & a & -2 \\ x & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) すべての実数 x に対して，A が正則であるための実数 a の範囲を求めよ．

(3) $a = 3,\ x = -2$ のときの A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(広島市立大 2001)　　(m20014205)

0.833 $g(t)$ は t について 1 回微分可能な 1 変数関数とし，x, y についての 2 変数関数を $z = x\cdot g\left(\dfrac{y}{x}\right)$ とする．このとき，　$x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} - z$　を計算せよ．

(広島市立大 2002)　　(m20024202)

0.834 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & a \\ 3 & 3 & a \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値の 1 つが 3 であるとき，a を求めよ．

(2) (1) で求めた a に対し，A の固有値をすべて求めよ．

(3) (2) で求めた A のそれぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(広島市立大 2002) (m20024207)

0.835 次の対称行列について以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) (1) で求めた各固有値に対する A の正規化された固有ベクトルを求めよ.

(3) ${}^tPAP$ が対角行列となる直交行列 P を求め対角化せよ.（ ${}^tP$ は P の転置行列を表す ）

(広島市立大 2005) (m20054203)

0.836 行列 $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ に対して、次の問に答えよ.

(1) 固有値，固有ベクトルの組を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値に対する大きさ 1 の固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ とおく. 列ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ を並べてできる行列 $P = (\boldsymbol{u}_1\ ,\ \boldsymbol{u}_2)$ が直交行列であることを示せ.

(3) (2) の P に対して，P^tAP が対角行列であることを示せ.（ただし，P^t は P の転置行列を表すものとする.）

(広島市立大 2006) (m20064205)

0.837 次の行列に対し，P が正則ならば Q も正則であることを示せ.

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ c & 0 & d & 0 \end{pmatrix}$$

(広島市立大 2007) (m20074203)

0.838 空間内の原点を通り方向ベクトル $\boldsymbol{\ell} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ をもつ直線を ℓ とする. ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}$ を ℓ と平行なベクトル $\boldsymbol{b}$ と，ℓ と直交するベクトル $\boldsymbol{c}$ により，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ と表すとき，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ を求めよ.

(広島市立大 2007) (m20074204)

0.839 次の行列 A に対し，以下の問いに答えよ. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

(1) 固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) 正則行列 P で，$P^{-1}AP$ が対角行列となるものを求めよ. なお，P^{-1} も求めること.

(3) n を正の整数とするとき，A^n を求めよ.

(広島市立大 2007) (m20074205)

0.840 次の行列 A に対して，以下の問いに答えよ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(1) A の固有値の 1 つが 2 であるとき，a を求めよ．

(1) で求めた a に対して，以下の (2),(3),(4) の問いに答えよ．

(2) A の固有値をすべて求めよ．

(3) (2) で求めた各固有値に対する，A の固有ベクトルを求めよ．

(4) 正則行列 P で，$P^{-1}AP$ が対角行列となる P を求めよ．

(広島市立大 2008)　　(m20084203)

0.841 (1) 次の 3 次正方行列 A の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) 上の正則行列 A を対角化する正方行列 P を求めよ．また，対角化された行列 $P^{-1}AP$ も答えよ．

(3) n 次正方行列 B の固有値の一つが $b(b \neq 0)$ であるとき，b^2 および b^{-1} がそれぞれ行列 B^2 および B^{-1} の固有値となることを証明せよ．ただし，B は正則であるとする．

(広島市立大 2009)　　(m20094203)

0.842 2 次実正方行列 A, B, C, D

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

に対して，4 次実正方行列 M, N を次で与える．

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} B & A \\ C & D \end{pmatrix}$$

ここで，O は 2 次の零行列である．

実正方行列 X に対して行列式を $|X|$ で表す．以下の問いに答えよ．

(1) $|M| = |A||C|$ であることを示せ．

(2) $B = sA$，$D = tC$　（s, t は実数）のとき，$k = \dfrac{|N|}{|M|}$ を求めよ．ただし，$|M| \neq 0$ とする．

(広島市立大 2009)　　(m20094204)

0.843 次の 3 次正方行列 A に対し, 以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P, およびその逆行列 P^{-1} を求めよ．

(広島市立大 2010)　　(m20104205)

0.844 転置行列が逆行列となる正方行列を直交行列という. 以下の問いに答えよ．

(1) 直交行列の行列式は 1 または -1 であることを示せ．

(2) A, B を n 次正方行列とｓる. このとき $2n$ 次正方行列 $T = \begin{pmatrix} A & O \\ B & A \end{pmatrix}$ が直交行列であれば, A は直交行列であり，かつ B は正則行列でないことを示せ. ただし, O は n 次の零行列を表す．

(広島市立大 2010)　　(m20104206)

0.845 次の行列の固有値，固有ベクトルを求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(山口大 1999)　　(m19994304)

0.846 次の行列の固有値，固有ベクトルを求めよ．

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(山口大 2000)　　(m20004304)

0.847 (1) $y = \log\left(x + (x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)$ で $\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい．

(2) $x = 1 - t^2,\ y = t^3$ の関係が成り立っているとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい．

（山口大 2001）　　(m20014307)

0.848 次の行列の固有値，固有ベクトルを求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(山口大 2001)　　(m20014317)

0.849 次の行列の固有値，固有ベクトルを求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(山口大 2001)　　(m20014318)

0.850 行列 $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ について

(1) 逆行列 $A(\theta)^{-1}$ を求めなさい．

(2) $A(\theta_1 + \theta_2) = A(\theta_1)A(\theta_2)$ を示しなさい．

(3) $A(\theta)A(-\theta) = I$（I は単位行列）を示しなさい．

(山口大 2002)　　(m20024303)

0.851 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ に対する固有値 λ および固有ベクトル $\overrightarrow{v}$ を求めよ．ただし，固有ベクトル $\overrightarrow{v}$ は 1 つ示せばよい．

(山口大 2003)　　(m20034311)

0.852 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ の逆行列を求めなさい.

（山口大 2004）　　(m20044308)

0.853 行列 $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対する固有値および固有ベクトルを求めよ. 固有ベクトルはひとつの固有値に対してひとつ求めればよい.

(山口大 2004)　　(m20044310)

0.854 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい. ただし, 固有ベクトルはひとつの固有値に対してひとつ求めればよい.

(山口大 2005)　　(m20054304)

0.855 $f(x) = \tan^{-1} x$ のとき, 次の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の導関数を求めよ.

(2) 次の等式を数学的帰納法により証明せよ. ただし, $y = f(x)$ とする.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (n-1)!\cos^n y \sin\left(ny + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(3) $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ とすると, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$f^{(2m)}(0) = 0\,, \quad f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m (2m)! \qquad (m = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

(4) 関数 $f(x)$ をマクローリン展開せよ.

(5) 次の等式を証明せよ.

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1}$$

(山口大 2005)　　(m20054311)

0.856 行列 $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．固有ベクトルは一つの固有値に対して一つ求めればよい．

(山口大 2006)　　(m20064304)

0.857 $y = \tan x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $x = \arctan y$ または $\tan^{-1} y$ と書く．$x = \arctan y$ の導関数を求めよ．

(山口大 2006)　　(m20064305)

0.858 行列 $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．なお，固有ベクトルは，一つの固有値に対して一つ求めること．

(山口大 2008)　　(m20084306)

0.859 関数 $y = \left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^3$ を微分しなさい.

(山口大 2009)　　(m20094304)

0.860 次の定積分の値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt{x}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\,dx$

(山口大 2009)　　(m20094305)

0.861 次の行列の固有値を求めなさい.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(山口大 2009)　　(m20094307)

0.862 $y = \dfrac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)$ に関する次の問いに答えなさい.

(1) $\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ を求めなさい.

(2) 区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ における曲線 y の長さを求めなさい.

(山口大 2009)　　(m20094312)

0.863 $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい. 固有ベクトルは, いずれか一つの固有値に対して求めればよい.

(山口大 2010)　　(m20104302)

0.864 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトル（ただし，長さ 1 のもの）を求めよ.

(徳島大 1999)　　(m19994404)

0.865 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ と行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ.

(1) 行列式 $|A - \lambda E|$ の値を求めよ．ただし，λ は定数とする.

(2) $|A - \lambda E| = 0$ を満たす λ の値をすべて求めよ.

(3) (2) で求めたそれぞれの λ に対して，$Ax = \lambda x$ を満たす 3 次元列ベクトル x のうち長さ 1 であるものを求めよ.

(徳島大 2000)　　(m20004404)

0.866 (1) 次の行列の固有値を求めよ.

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(2) 最小な固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(徳島大 2001)　　(m20014404)

0.867 $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 1 - \cos\theta & 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$ とする.

(1) $A(\theta)$ が正則であることを示せ.

(2) 1 が $A(\theta)$ の固有値であることを示せ.

(3) $A^2(\theta)(= A(\theta)A(\theta))$ に対して，$A^2(\theta) = A(m\theta)$ となる自然数 m を求めよ.

(徳島大 2003)　　(m20034404)

0.868 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問に答えよ.

(1) A の固有値 λ と, それに対応する長さが 1 の固有ベクトル $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(2) 上で求めた λ と x に対して, $Ay = \lambda y + x$ となるベクトル $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ で x と直交するものを求めよ.

(3) このとき $P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ とおいて, $\Lambda = P^{-1}AP$ を求めよ.

(徳島大 2004) (m20044404)

0.869 次の問に答えよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 10 \\ 15 & 42 & 46 \\ 21 & 66 & 85 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ とする. $A = BC$ となる 3 次正方行列 C を求めよ. また行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(2) 次の方程式を解け. ここで左辺は行列式を表す.

$$\begin{vmatrix} x^2 & 1-x & x^2-2x & x^3 \\ 0 & x-2 & 1-x & x^2-2x \\ x^2 & 1-x & 1-2x & 1-x+x^3 \\ -x^2 & x-1 & 2x-x^2 & 2-x^3 \end{vmatrix} = 0$$

(徳島大 2005) (m20054401)

0.870 累次積分 $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 y^2 e^{x^2} dx \right) dy$ について, 次の問に答えよ.

(1) 2 重積分を用いると $I = \displaystyle\iint_D y^2 e^{x^2} dxdy$ と書ける. このときの積分領域 D を図示せよ.

(2) I を求めよ.

(徳島大 2005) (m20054403)

0.871 $y = y(x)$ が微分方程式 $y'' + 2y' + 5y = 0$ を満たす. 次の問に答えよ.

(1) 微分方程式の一般解を求めよ. ただし, 最終結果に複素数が現れてはならない. (必要ならオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いてもよい.)

(2) 初期条件 $y(0) = y'(0) = -e^{\frac{3}{4}\pi}$ を満たす微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた $y(x)$ に対し, $y\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)$ と $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x)$ を求めよ.

(徳島大 2005) (m20054404)

0.872 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ について答えよ.

(1) 固有値を求めよ.

(2) 各固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(3) 直交行列 P を求めて ${}^tPAP$ を対角行列にせよ. ここで, ${}^tP$ は P の転置行列を表す.

(徳島大 2006) (m20064401)

0.873 a を実数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ 1-2a & 2a \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $a = 3$ のとき, A の固有値を求めよ.

(2) A の固有値が重複するように, a の値を定めよ.

(3) (2) で求めた a の値に対して，A の固有ベクトルで大きさが 1 であるものをひとつ求めよ.

(徳島大 2007) (m20074401)

0.874 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & a & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) A が逆行列を持たないような a の値を求めよ.

(2) 2 が A の固有値となるような a の値を求めよ.

(3) 1 が A の重複した固有値となるような a の値を求めよ.

(徳島大 2008) (m20084401)

0.875 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) 固有値を求めよ.

(2) 最大である固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(徳島大 2010) (m20104401)

0.876 ３次元数ベクトル e_1, e_2, e_3（基本ベクトル）および a, b, c を

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

できめる．このとき，次の各問いに答えなさい.

(1) 実数を成分にもつ３次正方行列 A が,

$$Aa = e_1, \quad Ab = e_2, \quad Ac = e_3$$

を満たすとする．このとき，A, A^{-1} を求めなさい.

(2) 実数を成分にもつ３次正方行列 B が,

$$Ba = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Bb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Bc = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を満たすとする．このとき，B を求めなさい.

（高知大 2001） (m20014504)

0.877 以下の問に答えよ．ただし，計算過程は書かなくともよい.

(1) ２次行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めよ.

(2) ２次行列 $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めよ.

(3) ４次行列 $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めよ.

（高知大 2001 ） (m20014505)

0.878 A を複素数を成分とする 2 次正方行列とし，ω を 1 の 3 乗根の一つとする．さらに

$$Ax_1 = \omega x_1, \quad Ax_2 = \omega^2 x_2$$

を満たすベクトル $x_1, x_2 (\neq 0)$ があったとする．このとき，次の各問いに答えなさい．

(1) $AP = P \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$ を満たす行列 P があることを示しなさい．

(2) $\omega \neq 1$ のとき，x_1, x_2 は一次独立であることを示しなさい．

(3) $\omega \neq 1$ のとき，A^3 を求めなさい．

（高知大 2001）　(m20014506)

0.879 $f(x)$ を閉区間 $I = [a, b]$ 上の連続関数とする. I 上に $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$ を

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

となるように選び, I の分割と呼び Δ で表す. また

$$|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

とする. さらに $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ を満たす ξ_i をとり, $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ をこの分割の代表系と呼び, $\xi(\Delta)$ で表す. このとき

$$S(f, \xi(\Delta)) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

を分割 Δ とその代表系 $\xi(\Delta)$ に関するリーマン和と呼ぶ. 任意の分割の列と任意の代表系に対して

$$\lim_{|\Delta| \to 0} S(f, \xi(\Delta))$$

が一意に存在する. その極限 S を $f(x)$ の I における積分といい

$$\int_a^b f(x)dx = S$$

とかく. この定義を用いて次の問に答えよ. ただし, 以下において $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で正値連続な関数とし

$$f_{in} = f(a + i\delta_n), \qquad \delta_n = \frac{b-a}{n}$$

とする.

(1) 次の式を示せ.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_{1n} + f_{2n} + \cdots f_{nn}}{n} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

(2) 次の式を示せ.

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{f_{1n} f_{2n} \cdots f_{nn}} = \boldsymbol{e}^{\frac{1}{b-a} \int_a^b \log f(x)dx}$$

(3) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1^2}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right)}$$

(高知大 2005)　(m20054501)

0.880 4 次行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 1 & y \\ x & 1 & y & 1 \\ 1 & y & 1 & x \\ y & 1 & x & 1 \end{pmatrix}$$

の行列式を計算し, その結果を因数分解せよ.

(高知大 2005) (m20054502)

0.881 次の問に答えよ. ただし, I は n 次単位行列, O は n 次零行列である.

(1) n 次正方行列 A に対して, $(I-A)B = I - A^4$ を満たす B を一つ求めよ.

(2) $A^4 = O$ を満たす n 次正方行列 A に対して, $I - A$ の逆行列を求めよ.

(3) $X = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対して, X^k $(k \geq 2)$ を求めよ.

(4) $\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(高知大 2005) (m20054504)

0.882 実数を成分とする 2× 2 行列全体の集合を V とする．さらに V から $\boldsymbol{R}$ への写像 f_1 と f_2 を次のように定義する．V の元 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$f_1(M) = ad - bc \qquad\qquad f_2(M) = a + d$$

このとき，f_1 と f_2 が線形写像であるか否かを調べよ．線形写像である場合には，その核の一組の基底を求めよ．ただし，V と $\boldsymbol{R}$ はそれぞれ $\boldsymbol{R}$ 上の自然なベクトル空間とし，線形写像の核が V の部分空間になることは証明しなくてもよい．

(高知大 2006) (m20064504)

0.883 関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で連続であるとは

『任意の正の数 ε に対し，正の数 δ で $|x - x_0| < \delta$ であるならば $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ をみたすものがとれる』$\cdots$ (★)

ときをいう．このとき，次の問いに答えよ．

まず $f(x) = x^2$ として，(1) と (2) に答えよ．

(1) $x_0 = 0,\ \varepsilon = \dfrac{1}{100}$ としたときに (★) が成立する δ を求めよ.

(2) $x_0 = 0$ とし，任意の $\varepsilon > 0$ に対して (★) が成立する δ を求めることにより，$f(x) = x^2$ が $x = 0$ で連続であることを示せ.

次に

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{m} & (x \text{ が } 0 \text{ でない有理数で，その既約分数表示が } m > 0 \text{ として } \dfrac{n}{m} \text{ と表せるとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき, または } x \text{ が無理数のとき}) \end{cases}$$

と定義された関数について，以下の (3)〜(5) に答えよ.

(3) 次の値を求めよ.

(a) $f\left(\dfrac{2}{3}\right)$　　(b) $f\left(\sqrt{2}\right)$　　(c) $f\left(\dfrac{4}{8}\right)$

(4) M を自然数とする．$|x| < \dfrac{1}{M}$ をみたす有理数 x $(x \neq 0)$ の既約分数表示の分母を m とすれば $|m| > M$ となることを示せ.

(5) $f(x)$ が $x = 0$ で連続となることを示せ.

(高知大 2007)　　(m20074502)

0.884 $M_3(\mathbb{R})$ を実数を成分とする 3 次正方行列全体のなす集合とし，$A \in M_3(\mathbb{R})$ とする．また,

$$\mathfrak{L}_A = \{B \in M_3(\mathbb{R}) \mid B \neq O,\ AB = O\}$$

$$\mathfrak{R}_A = \{C \in M_3(\mathbb{R}) \mid C \neq O,\ CA = O\}$$

と定義する．ただし，O は 3 次零行列を表す．今，$\mathfrak{L}_A$ は空集合でないと仮定する．このとき，次の問いに答えよ.

(1) A は正則でないことを示せ.

さらに，　$A = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 6-a \\ a+12 & 7 & 2 \\ 8 & -a & -2 \end{pmatrix}$　としたときに，次の (2)〜(4) に答えよ,

(2) a の値を求めよ.

(3) $P \in \mathfrak{L}_A$ となる 3 次正方行列 P をひとつ与えよ.

(4) $\mathfrak{R}_A = \{{}^tQ \mid Q \in \mathfrak{L}_A\}$ を示せ．ただし，${}^tQ$ は Q の転置行列を表す.

(高知大 2007)　　(m20074504)

0.885 実数を成分とする 2 次正方行列全体のなす集合 $M_2(\mathbb{R})$ は行列の和，行列の実数倍をそれぞれ，線形和，スカラー倍とみなすと実ベクトル空間になる．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ は $M_2(\mathbb{R})$ の基底であることを示せ.

(2) $\mathrm{tr} : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を $\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + d$ で定義するとき，tr は線形写像であることを示せ.

(3) $\mathrm{Ker\ tr} = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$ は $M_2(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間であることを示せ.

(4) Ker tr の次元を求めよ.

(高知大 2007)　　(m20074505)

0.886 $\det(A)$, $\mathrm{rank}(A)$ はそれぞれ行列 A の行列式，階数を表す．次の問いに答えよ.

(1) 3 次正方行列 A と 3 次単位行列 I を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき，$\det(\lambda I - A) = 0$ を満たす λ をすべて求めよ.

(2) (1) で求めたそれぞれの λ について，$\mathrm{rank}(\lambda I - A)$ を求めよ.

(3) A を n 次正方行列，I を n 次単位行列とし，$f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ とおく．λ_0 が方程式 $f(\lambda) = 0$ の単根であるとき，$\mathrm{rank}(\lambda_0 I - A) = n - 1$ であることを示せ.

(高知大 2008)　　(m20084503)

0.887 次は，ロピタルの定理の使用例である．

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ は $\dfrac{0}{0}$ の不定形であるから，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

これらにならって極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right)$ を求めてみる．以下の問いに答えよ．

(1) ロピタルの定理が使える様に，$\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right)$ を式変形せよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right)$ を求めよ．

(高知大 2008)　　(m20084505)

0.888 3 次行列　$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$　のすべての固有値・固有ベクトルを求めよ．

(高知大 2008)　　(m20084506)

0.889 関数 $y = \sin x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $y = \sin^{-1} x$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 開区間 $(-1, 1)$ 上で関数 $y = \sin^{-1} x$ を微分せよ．

(2) $y = \sin^{-1} x$　$(-1 < x < 1)$ の接線の傾きは 1 以上であることを示せ．

(3) 直線 $y = 2x$ と平行な，曲線 $y = \sin^{-1} x$ の接線の方程式をすべて求めよ．

(高知大 2009)　　(m20094501)

0.890 $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像 f は，$\boldsymbol{R}^2$ の元 $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{R}^3$ の元 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して，

$$f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2\,, \quad f(\boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$$

を満たしている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ は $\boldsymbol{R}^2$ の基底，$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ と $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ に関する f の表現行列 A を求めよ．

(3) $\boldsymbol{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ に関する f の表現行列 B を求めよ．また，B と (2) における行列 A との関係を述べよ．

(高知大 2009)　　(m20094503)

0.891 $n\times\ n$ 行列 A が n 個の 1 次独立な固有ベクトルをもてば，A は対角化可能であることを示せ．また，

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求め，A を対角化せよ．

(高知大 2009)　　(m20094504)

0.892 3 次行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ の階数が 2 となるときの a の値を求めよ.

(高知大 2009)　　(m20094505)

0.893 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を次で定義する.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 2x\,,\ x \leq 2y\,,\ x + y \leq 3\}$$

D における重積分

$$\iint_D x\,dxdy \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ①$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) 累次積分を用いて①の値を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への変換 Φ を

$$u = \varphi(x, y) = \frac{2x - y}{3}\ , \qquad v = \psi(x, y) = \frac{-x + 2y}{3}$$

としたときに $\Phi(x, y) = (\varphi(x, y),\ \psi(x, y))$ で定義する. xy 平面上の集合 D を変換 Φ によりうつした uv 平面上の像 D' を図示せよ.

(3) (2) の変換 Φ を用いて①を

$$\iint_{D'} f(u, v)\,dudv$$

と表したときの f を求めよ.

(4) (3) の重積分の値を求めよ.

(高知大 2010)　　(m20104502)

0.894 $3\times\ 3$ 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) 次の関数式を満たす直交行列 T をひとつ求めよ.

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) α と β を定数とし, $3\times\ 3$ 行列 B を次で定義する.

$$B = T \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}$$

このとき, B と B^2 を計算せよ.

(4) $C^2 = A$ を満たす行列 C をひとつ求めよ.

(高知大 2010)　　(m20104504)

0.895　$0 < a < 1$ とする．

(1)　$\displaystyle\int_a^1 \log x dx$ を求めよ．

(2)　$\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_a^1 \log x dx$ を求めよ．ただし，計算途中で不定形の極限ができた場合，その計算過程も明記すること．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log k - \log n\right)$ を求めよ．

(愛媛大 2000)　　(m20004602)

0.896　行列 A を $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ とする．

(1)　A の行列式を計算せよ．

(2)　A の逆行列の成分がすべて整数となるような整数 k の値を求めよ．

(愛媛大 2000)　　(m20004605)

0.897　$\tan^{-1} x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．

(1)　$y = \tan^{-1} x$ のグラフをかけ．

(2)　$x > 0$ のとき，$\tan^{-1} x > x - \dfrac{1}{3}x^3$ が成り立つことを示せ．

（愛媛大 2004）　　(m20044601)

0.898　$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ が定数で，$f(x)$ が微分可能のとき，$g(s,t) = \gamma + (t-\alpha)f\left(\dfrac{s-\beta}{t-\alpha}\right)$ によって定義される関数 $g(s,t)$ は次の関係式を満たすことを示せ．

$$g(s,t) = \gamma + (t-\alpha)\frac{\partial g}{\partial t}(s,t) + (s-\beta)\frac{\partial g}{\partial s}(s,t)$$

(愛媛大 2004)　　(m20044605)

0.899　(1)　行列 $\begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(2)　次の連立方程式を解け．

$$\begin{cases} 10x + 4y + z = 10 \\ 10x + 6y + 3z = 0 \\ 5x + 4y + 3z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

(愛媛大 2004)　　(m20044609)

0.900　零ベクトルを $\vec{0}$ と記す．

(1)　A を n 次正方行列とする．実数 λ に対して，n 次元数ベクトル $\vec{u},\ \vec{v}$ が条件

$$\vec{u} \neq \vec{0},\ A\vec{u} = \lambda\vec{u},\ A\vec{v} = \vec{u} + \lambda\vec{v} \qquad (*)$$

を満足していると仮定する．このとき，$\vec{u},\ \vec{v}$ は 1 次独立であることを示せ．

(2)　$a,\ b,\ c,\ d$ を実数とする．2 次方程式 $x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$ が，a とは異なる実数 λ を 2 重解としてもつと仮定する．2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，(1) の条件 (*) を満足する 2 次元数ベクトル $\vec{u},\ \vec{v}$ が存在することを示せ．

(3) (2) における $\vec{u}$, $\vec{v}$ を $\vec{u}=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ とおく．行列 $P=\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ は正則であることを示し，$P^{-1}AP$ を求めよ．

(愛媛大 2004)　　(m20044610)

0.901 (1) 次の関数を微分せよ.

(a) $\log(1+x^4)$　　(b) $\sin^{-1} x^2$

(2) α, β を定数とし，

$$f(x)=\begin{cases} \tan^{-1} x & (x>1) \\ \beta & (x=1) \\ \alpha x-\alpha+\beta & (x<1) \end{cases}$$

とおく. ただし $\tan^{-1} x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする. 次の問いに答えよ.

(a) $f(x)$ が $x=1$ で連続になるように β を定めよ.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f'(x)=\lim_{x\to 1-0} f'(x)$ となるように α を定めよ.

(愛媛大 2005)　　(m20054601)

0.902 行列 $A=\begin{pmatrix} -2 & a & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は 0 を固有値として持つとする. ただし, a は定数とする.

(1) 定数 a を求めよ.

(2) A の 0 でない固有値をすべて求めよ.

(3) 固有値 0 に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

(愛媛大 2005)　　(m20054604)

0.903 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\tan^{-1} x$ について，次の各問に答えよ．

(1) $f(x)$ は区間 $(0,\infty)$ 上単調減少であることを示せ．

(2) 次の定積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} x^3 f\left(\frac{1}{2}x^2\right) dx$

(愛媛大 2006)　　(m20064606)

0.904 $a>0$ とし，$x_n=\left(\dfrac{a}{1+a}\right)^n$, $n=1,2,\cdots$ とする．

(1) $\{x_n\}$ は有界な単調減少数列であることを示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ の値を求めよ．　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x_n$ の値を求めよ．

(愛媛大 2006)　　(m20064608)

0.905 (1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次独立なベクトルであるとき　$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,　$2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$,　$\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}$　は 1 次独立か？

(2) 次式で定義される W, U は $\boldsymbol{R}^3$ の部分ベクトル空間か？

部分ベクトル空間であれば次元と基底を求め，そうでないときはその理由を述べよ.

$$W=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x+2y-z=0\right\},\ U=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x+y=0,\ z=1\right\}$$

(愛媛大 2006)　　(m20064612)

0.906 C^2 級の 2 変数関数 $z = f(x,y)$ と 2 次元の極座標変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ の合成は，r と θ の関数 $z = f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ になる．

(1) 次の等式を示せ．$\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を z の r と θ についての偏導関数および r と θ のみを用いて表せ．

(愛媛大 2006)　　(m20064615)

0.907 (1) $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$ となる実数 λ をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた λ の中で最大のものを λ_0 とするとき，連立方程式

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda_0-1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda_0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ をすべて求めよ．

(愛媛大 2007)　　(m20074605)

0.908 a,b,c を実数とし，行列 A,B,C を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & a+b & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a-2b & 0 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ で定める．

(1) $AB+C$ を求めよ．　(2) $AB+C$ が対称行列となるとき，a,b,c の値を求めよ．

(3) $({}^tB)C = ({}^tC)B$ が成り立つとき，a,b,c の値を求めよ．ただし，${}^tB$ は B の転置行列を表し，${}^tC$ は C の転置行列を表す．

(愛媛大 2008)　　(m20084601)

0.909 a を実数とし，行列 A およびベクトル $\boldsymbol{b}$ を $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ で定める．さらに，$\boldsymbol{b},\ A\boldsymbol{b},\ A^2\boldsymbol{b}$ を列ベクトルにもつ 3 次正方行列を B とする．すなわち $B = \left(\boldsymbol{b},\ A\boldsymbol{b},\ A^2\boldsymbol{b}\right)$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $A\boldsymbol{b},\ A^2\boldsymbol{b}$ を求めよ．　(2) B の行列式 $|B|$ を求めよ．

(3) B の逆行列 B^{-1} が存在するための必要十分条件を，a を用いて表せ．

(愛媛大 2008)　　(m20084602)

0.910 次の行列を，行の基本変形を使って上 3 角行列に変形せよ．また，これらの行列の階数（ランク）と行列式を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

ただし，上 3 角行列とは $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ という形の行列である．

(愛媛大 2008)　　(m20084605)

0.911 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ， $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ とする．

(1) $AB = C$ となる行列 B を求めよ．

(2) 行列 C の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(愛媛大 2008)　　(m20084611)

0.912 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{a}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{a}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{a}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$ とする．（ただし，$a > 0$）

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) 逆行列 A^{-1} が存在しないときの a の値を求めよ．

(3) 行列 A の固有値をすべて求めよ．

(4) 行列 A の最大の固有値に対する固有ベクトルをすべて求めよ．

(愛媛大 2009)　　(m20094604)

0.913 (1) 次の曲線上の与えられた点 (a, b) における接線の方程式を求めよ．

(a) $y = x \log x$,　$(a, b) = (e, e)$　　(b) $y = \dfrac{e^{2x} - e^{-x}}{e^{3x} + e^{-2x}}$,　$(a, b) = (0, 0)$

(2) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{3 - \sqrt{2x+1}}{\sqrt{x} - 2}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan^{-1} x - x}{x^3}$　ただし, $\tan^{-1} x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．

(3) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義を述べよ．さらに, $f(x) = c$（定数関数）ならば $f'(x) = 0$ であることを定義に従って示せ．

(愛媛大 2010)　　(m20104601)

0.914 (1) $x = \sin t \left(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおいて, 次の不定積分を求めよ．ただし, 最終的な答えは x の関数で表わすこと．

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

(2) $S(x) = \displaystyle\int_1^x \log t\, dt$ とする．次の値を求めよ．

(a) $S'(e)$　　(b) $S(e)$　　(c) $\displaystyle\int_1^e e^{S(x)} \log x\, dx$　　(d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{S(x)}}{x^x}\, dx$

(愛媛大 2010)　　(m20104602)

0.915 関数 $z = f(x, y)$ は偏微分可能であるとする．$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と極座標変換するとき, 次の 2 つの式が成立することを示せ．

(a) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = r\cos 2\theta \dfrac{\partial z}{\partial r} - \sin 2\theta \dfrac{\partial z}{\partial \theta}$　　(b) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$

(愛媛大 2010)　　(m20104603)

0.916 次の累次積分の値を求めよ. $$\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2}\, dx \right) dy$$

(愛媛大 2010) (m20104604)

0.917 行列 A を

$A = \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A^2 を計算せよ.

(2) 次の行列式の値をゼロにする $a,\ b,\ c$ をすべて求めよ.

$$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

(愛媛大 2010) (m20104605)

0.918 a , b , c を実定数とするとき

$$Q = Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \ , \quad -\infty < x, y < +\infty$$

について，次の問に答えよ.

(1) $Q = (x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる実対称行列 A を求めよ.

(2) $(x,y) \neq (0,0)$ ならば $Q < 0$ となる a , b , c の条件を求めよ.

(3) (2) で求めた条件のもとで A の固有値がすべて負になることを示せ.

(九州大 1997) (m19974704)

0.919 線形写像 $T : R^4 \to R^2$ について

$$\mathrm{Ker}\ T = \{\ x \in R^4 \mid T(x) = 0\ \}$$

$$\mathrm{Im}\ T = \{\ T(x) \mid x \in R^4\ \}$$

と定義する. T が条件

$$\mathrm{Ker}\ T = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \ x_1 + 2x_3 = x_2 - x_4 = 0 \right\}$$

$$\mathrm{Im}\ T = R^2$$

を満足するとき，次の問に答えよ.

(1) Ker T の基底を 1 組求めよ.

(2) 上で求めた Ker T の基底を含む R^4 の基底を 1 組求めよ.

(3) $T(x) = Ax$ となる 2 行 4 列の行列 A を一個求めよ.

(4) 上の A について rank A を求めよ.

(九州大 1997) (m19974705)

0.920 次の 4×4 型行列 A と, $\mathbf{R}^4$ のベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{0}$ について，以下の問に答えよ．ただし，行列 A の成分 a は実数の定数である．

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) A の行列式を求めよ．

(2) x_1 , x_2 , x_3 , x_4 を未知数とする方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が自明でない解を持つための a の条件を求めよ．

(3) 次の集合は $\mathbf{R}^4$ の部分線形空間となることを証明せよ．

$$V = \{ \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \} , \quad W = \{ A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 \}$$

(九州大 1998)　　(m19984709)

0.921 $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) 導関数 $f'(x)$ は連続であるか調べ，また，導関数 $f'(x)$ が微分可能な関数か調べよ．

(九州大 1999)　　(m19994701)

0.922 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

(1) A の固有値と重複度を求めよ．

(2) 直交行列を使って A を対角化せよ．

(九州大 1999)　　(m19994706)

0.923 $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 3x_2 + x_3 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 \end{pmatrix} , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

について次の問に答えなさい．

(1) $\varphi(x) = Ax$ となる 3 次平方行列 A を求めなさい．

(2) A の行列式 $\det A$ を求めなさい．

(3) $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．$\varphi(e)$ を求めなさい．

(4) $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる $x \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めなさい．

(5) $V = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_3 = 0\}$ とする．$\varphi(V) = \{\varphi(x) \,|\, x \in V\}$ は部分空間であることを示し，さらにその次元を求めなさい．

(九州大 2001)　　(m20014706)

0.924 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

が与えられている．次の問に答えなさい．

(1) 4次元複素ベクトル $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$ に対し，

$$z^*Az = |z_1|^2 + |z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_4|^2 + |z_4|^2$$

となることを示しなさい．ただし，$\overline{z_i}$ を z_i の共役複素数とするとき，$z^* = (\overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{z_3}, \overline{z_4})$.

(2) 行列 A は正定値行列であることを示しなさい．

（九州大 2001）　(m20014707)

0.925 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を2つの空間ベクトルとする．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を隣り合う2辺とする平行四辺形の面積を S とする．

(1) S は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の長さ $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$ と内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を用いて
$$S = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2}$$
と表されることを示せ．

(2) 以下の設問では，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，S を求めよ．

(3) $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を含む平面上にあるベクトル $\boldsymbol{d}$ で，$\boldsymbol{c} - \boldsymbol{d}$ がその平面と直交するものを求めよ．

(4) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を隣り合う3辺とする平行六面体の体積を求めよ．

(九州大 2003)　(m20034705)

0.926 次の問に答えよ．

(1) 行列 A の階数の定義について，以下の下線部に適切な単語を記入せよ．

(a) A の0でない小行列式の _________.

(b) A の _________ な列ベクトルのの最大個数.

(c) A の _________ な行ベクトルのの最大個数.

(d) A で定まる線形変換の値域の _________.

(2) 行列　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$　の階数を求めよ．

(3) 次の連立方程式に解があれば，そのすべてを求めよ．

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

(九州大 2003)　(m20034706)

0.927 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，正則行列 $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ で,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

を満たすものが存在すると仮定する．次の各設問に答えよ．

(1) λ, μ は A の固有値でなければならないことを示せ．

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して上の条件を満たす P を直交行列で求めよ．

(九州大 2003) (m20034707)

0.928 (1) 次の線形非同次微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

の一般解は

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right)$$

で与えられることを示せ. ただし, $P(x), Q(x)$ は x の連続関数であり, c は任意の定数である.

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$x\frac{dy}{dx} - y = x(1 + 2x^2)$$

(3) 適切な変数変換を利用して, 次の微分方程式の一般解を求めよ. さらに, $x = 1$ のとき $y = 1$ となるような解を求めよ.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} = \frac{\log x}{2x}y^3$$

(九州大 2004) (m20044702)

0.929 次の連立 1 次方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ を考える. ただし,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 6 & 14 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix}$$

である. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 上三角行列 $\boldsymbol{U}$ と, 対角成分が 1 の下三角行列 $\boldsymbol{L}$ を用いて, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$ と書くとき, $\boldsymbol{L}$ と $\boldsymbol{U}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の解は以下の 2 つの問題を解くことで求まることを説明せよ.

$$\begin{cases} \boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y} \end{cases}$$

(3) (2) の方法で $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ を解け.

(九州大 2004) (m20044704)

0.930 3 変数 x, y, z の 2 次形式 $f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy - 2yz + 2zx$ は，適当な直交行列 P で変換変数

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

すれば,$f(x, y, z) = aX^2 + bY^2 + cZ^2$ (a, b, c は実数) になるという，ただし ${}^tP$ は行列 P の転置行列である. 次の問に答えよ.

(1)　等式 $f(x,y,z)=(x,y,z)A\ {}^t(x,y,z)$ を満たす実対称行列 A を求めよ.

(2)　上の直交行列 P と実数 a,b,c を求めよ.

（九州大 2004）　(m20044705)

0.931　複素平面上の中心 a, 半径 r の半円 $C_r(a)$ を $C_r(a)=\{z=a+re^{i\theta}\ ;\ 0\le\theta\le\pi\}$ で定める. ただし, $i=\sqrt{-1}$ である.

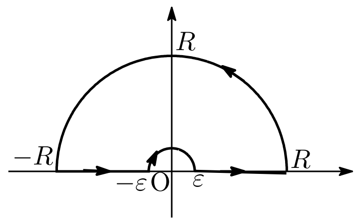
(1)　正則関数 $f(z)$ に対して次式を示せ. $z=a+\varepsilon e^{i\theta}$ とおいて考えよ.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon(a)}\frac{f(z)}{z-a}dz=i\pi f(a)$$

(2)　不等式 $\dfrac{2}{\pi}\theta\le\sin\theta\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ が成立つことを示せ.

(3)　(2) の結果を用いて次式を証明せよ.

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R(0)}\frac{e^{iz}}{z}dz=0$$



(4)　関数 $\dfrac{e^{iz}}{z}$ の積分を図の矢印に示す道に沿って考えることにより, 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx$ の値を計算せよ.

（九州大 2004）　(m20044708)

0.932　ベクトル y がベクトル x と行列 A によって次のように関係づけられる.

$$y=Ax\quad ここで,\ y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

(1)　次の 3 つのベクトルが行列 A の固有ベクトルであることを示せ.

$$p_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix}1\\z_0\\{z_0}^2\end{pmatrix},\ p_3=\begin{pmatrix}1\\{z_0}^2\\z_0\end{pmatrix},$$

ここで, $z_0=e^{i2\pi/3}$ である.
（　i : 虚数単位　）
（ ヒント : ${z_0}^3=1$ ）

(2)　行列 A の固有値 λ_k $(k=1,2,3)$ を求めよ.

(3)　a,b,c を行列 A の固有値 λ_k と z_0 を用いて表せ. （ヒント : $1+z_0+{z_0}^2=0$）

(4)　$a=c=0$, $b=1$ となる場合の, 行列 A の（イ）固有値, （ロ）固有ベクトル　を求めよ.

(5)　（イ）ベクトル $p=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ を固有ベクトル p_1, p_2, p_3 の線形和で表せ.

（ロ）上記のベクトル p を x とするとき, ベクトル y を求めよ.

(九州大 2005)　(m20054701)

0.933　次の連立定数係数線形同次微分方程式

$$\frac{dy_1(x)}{dx}+2y_1(x)-y_2(x)=0$$

$$\frac{dy_2(x)}{dx}-y_1(x)+2y_2(x)=0$$

を , 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ を用いて ,

$$\frac{dy(x)}{dx} + Ay(x) = 0 \quad \text{ただし}, \ y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

のように表現する. 解 $y(x)$ を行列 A の対角化を利用して以下の設問に沿って求めよ.

(1) 行列 A の固有値 λ_1 , λ_2 と固有ベクトル c_1 , c_2 を求めよ.

(2) c_1 , c_2 を列ベクトルとする行列を $P = (c_1\ ,\ c_2)$ とする. $P^{-1}AP$ を求めよ.

(3) $z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} = P^{-1}y(x)$ とするとき, $z(x)$ に関する微分方程式を導き, $z(x)$ の一般解を求めよ.

(4) $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき, $y(x)$ を求めよ.

(九州大 2005) (m20054702)

0.934 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & c & c \\ c & 1 & c \\ c & c & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ.

(1) 行列 A の行列式の値を求めよ.

(2) A が逆行列を持たないときの c の値は

(a) $c = \boxed{}$ のときと

(b) $c = \boxed{}$ のときである.

(3) (2) の 2 つの場合 (a),(b) それぞれについて，行列 A の階数（ランク）を求めよ.

(4) (2) の 2 つの場合 (a),(b) それぞれについて，行列 A の固有値をすべてを求めよ.

(九州大 2006) (m20064701)

0.935 複素平面上の原点を中心とする半径 a の円 C に沿った積分（方向は C の正方向，範囲は一周）について，次の問に答えよ.

(1) ある複素数 z_0 ($|z_0| \neq a$) に対して，(a) $|z_0| > a$ の場合 および (b) $|z_0| < a$ の場合における $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z - z_0)^n} dz$ を求めよ．ただし，n は正の整数である.

(2) 複素関数 $f(z) = \log(z-b) + \log\left(z - \dfrac{a^2}{b}\right) - \log z$ （b は実数で，$b > a$）に対して，$\displaystyle\int_C \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz$ を求めよ.

(九州大 2006) (m20064703)

0.936 有名な公式 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0)$
の両辺を a に関して微分して,「形式的に微分と積分の順序を交換」すれば

$$-\frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}} = \frac{d}{da}\left(\int_0^\infty e^{-ax^2} dx\right) = \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial a} e^{-ax^2}\right) dx = -\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx\ ,$$

すなわち

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}} \qquad (*)$$

となる．この問題の目的は，$(*)$ が実際に成立することを上の手順で示すことである.

(1) 任意の $h>0$ に対して，不等式　$0 \leqq \dfrac{e^{-hx^2}-1}{h}+x^2 \leqq \dfrac{hx^4}{2}$ ，　$x \in \mathbb{R}$　を示しなさい．

(2) $\displaystyle\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2}dx < \infty$ を示しなさい．

(3) (1), (2) を用いて $(*)$ を示しなさい．

(九州大 2006)　　(m20064705)

0.937 a, b, c を実数とし，$3\times\ 3$ 行列 A を

$$A=\begin{pmatrix} a+b+c & -a-c & a+b-c \\ -a-c & a+c & -a+c \\ a+b-c & -a+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1) $abc \neq 0$ のとき　$|A| \neq 0$ となることを示せ．ただし，$|A|$ は行列 A の行列式を表すものとする．

(2) $a=b=c=1$ のとき，行列 A の逆行列を求めよ．

(九州大 2006)　　(m20064710)

0.938 $0 \leqq\ x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ で定義された二つの関数

$$f(x)=-\log(\cos x)\,,\quad g(x)=\log\left(\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right)$$

に対して，以下の問に答えよ．

(1) $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を $\cos x$ を用いて表せ．

(2) 曲線 $y=f(x)$　$(0 \leqq\ x \leqq \frac{\pi}{3})$ の長さを求めよ．

(九州大 2006)　　(m20064712)

0.939 連続型の確率変数を X とする．X が a 以下の値をとる確率を $P_X(a)$ とし，$P_X(a)$ が以下で与えられているものとする．以下の設問に答えよ．

$$P_X(a)=\begin{cases} 0 & (-\infty \leq a < -T) \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi a}{2T}\right) & (-T \leq a \leq T) \\ 1 & (T \leq a \leq \infty) \end{cases}$$

(1) X が値 X_0～X_1（ただし，$X_0 < X_1$　とする）のいずれかをとる確率を求めよ．

(2) X が任意の定数 B となる確率を求めよ．　(3) X の確率密度関数 $p(X)$ を求めよ．

(4) X の平均を求めよ．　(5) X の標準偏差を求めよ．

(九州大 2007)　　(m20074704)

0.940 $A=(a_{ij})$　$(i, j=1, 2)$ を $2\times\ 2$ 実行列とする．A^T で A の転置行列を表すとする．ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ に対して内積を $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=x_1y_1+x_2y_2$ で定める．

(1) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ が成立する時，$A^TA=AA^T=E$ が成り立つことを示せ．ただし，E は単位行列とする．

(2) (1) の行列 A の行列式は 1 もしくは -1 であることを示せ．さらに行列 A の固有値は絶対値が 1 であることを示せ．

(3) (2) において A の行列式が -1 であるとき，ある実数 θ が存在して

$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ と書けることを示せ．

(九州大 2007) (m20074708)

0.941 次の 4 次正方行列 A の逆行列を求めよ． $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(九州大 2007) (m20074712)

0.942 xy 平面上の任意の点の 1 秒ごとの移動の様子が，次の行列 A で表される一次変換によって与えられるとする．

$$A = \begin{pmatrix} 5/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

xy 平面上の点 (x_0, y_0) が n 秒後に到達する点 (x_n, y_n) は，次の漸化式によって与えられる．ただし，n は $n \geq 1$ の整数．

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

(1) 原点から見たいくつかの方向では，時間と共に向きが変化しない．すなわち，ゼロベクトルでない $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し，次の関係式が成り立つ．

$$A\boldsymbol{X} = \lambda\boldsymbol{X}$$

上式を満たす固有値 λ の値 a, b と，それぞれに対する固有ベクトル $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ を求めよ．ただし，$a < b$ とし，(p, q)，(r, s) はそれぞれ整数の組で，$p > 0$，$r > 0$ とする．

(2) 前問の結果を用いて，$P = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ．

(3) 座標 (x_n, y_n) を (x_0, y_0) と n を用いて表せ．

（ヒント）$(P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) = p^{-1}A^nP$

(4) 前問の (x_0, y_0) が，媒介変数 s を用いて $(x_0, y_0) = (s, s)$ で表される直線上の任意の点であるとする．s が実数全体を動くとき，(x_n, y_n) の描く図形の方程式を求めよ．また，$n \to \infty$ のとき，この図形はどのような図形に近づくか答えよ．

(九州大 2008) (m20084701)

0.943 次の時間 t と位置 x に関する波動方程式 ① と環境条件 ② を満足する関数 $y(x, t)$ を以下の手順に従って求めよ．

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (c > 0) \qquad ① \qquad \text{ただし環境条件は} \quad y(0, t) = y(L, t) = 0 \qquad ②$$

(1) 関数 $y(x, t)$ を位置の関数 $A(x)$ と時間の関数 $B(t)$ の積として $y(x, t) = A(x) \cdot B(t)$ と表すと，次式が成立することを証明せよ．

$$\frac{1}{A(x)} \frac{d^2 A(x)}{dx^2} = \frac{1}{c^2 B(t)} \frac{d^2 B(t)}{dt^2} \qquad ③$$

(2) 式 ③ の左辺は位置 x，右辺は時間 t だけの関数であるので式 ③ の両辺はある定数に等しい．これを $-\lambda$ とおくと $A(x)$ と $B(t)$ に関する次の 2 階の常微分方程式が成立する．

$$\frac{d^2 A(x)}{dx^2} + \lambda A(x) = 0 \qquad ④ \qquad \frac{d^2 B(t)}{dt^2} + \lambda c^2 B(t) = 0 \qquad ⑤$$

$\lambda > 0$ の場合の $A(x)$ と $B(t)$ の一般解を求めよ．

(3) $\lambda > 0$ の場合，式 ② の環境条件より

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 1, 2, 3, \cdots \qquad ⑥$$

が成立することを証明せよ．

(九州大 2008)　　(m20084702)

0.944 積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a\cos\theta}\, d\theta$ を複素平面の積分に変換して計算する．ただし，a は $0 < a < 1$ の実数である．

(1) 単位円上の任意の点，$z = e^{i\theta}$ に対して，$d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ であることを示せ．

(2) $\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ であることから，I を積分経路を単位円 $|z| = 1$ とする複素積分へ変換せよ．

(3) (2) で得られた複素積分の被積分関数の特異点のうち，単位円内部に含まれる点を書け．

(4) 留数計算によって，$I = \dfrac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$ となることを示せ．

(九州大 2008)　　(m20084703)

0.945 あるセルフサービスのカフェテリアでは，昼に 3 種類のランチメニューがある．客は順番に並んで，メニュー 1, メニュー 2, メニュー 3 のどれか一つのメニューを選ぶとする．N 番目の客がメニュー j を選んだとき $N+1$ 番目の客がメニュー i を選ぶ確率は a_{ij} であるとする．($i, j = 1, 2, 3$,　a_{ij} は N に依存しない.) 一方，N 番目の客がメニュー j を選ぶ確率を $p_j(N)$ と置く．

(1) N 番目の客がメニュー j を選んだとき $N + 2$ 番目の客がメニュー i を選ぶ確率を a_{ij} を使って表せ.

(2) $i \neq j$ である時 $a_{ij} = q$ (q は i, j によらない正の数, $q > 0$)　$a_{ii} = p$ (p は i によらない正の数 , $p > 0$) とする．このとき q と p が満たすべき関係式を述べよ．

(3) (2) の仮定をする．3 行 3 列の行列 A を ij 成分が a_{ij} となる 3 行 3 列の行列とする．A^2 を単位行列と F で表せ．ただし，F は次で定まる行列とする．

$$F = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) (2) の仮定のもとで行列 A のべき乗 A^N を求めよ．これを使い N 番目の客がメニュー 1 を選ぶ確率 $p_1(N)$ を $p_i(1)$ $(i = 1, 2, 3)$ と q で表す公式を求めよ．

(5) (2) の仮定のもとで $\displaystyle\lim_{N\to\infty} p_j(N)$ を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084704)

0.946 (1) 実数からなる行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(a) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^2$ および $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^3$ を求めよ．

(b) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n$ を求めよ．ただし，n は自然数である．

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(a) ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ について $B\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{v}_1$ が成り立つ.

$\boldsymbol{v}_1$ と一次独立な大きさ 1 のベクトル $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$ を用いて, $B\boldsymbol{v}_2$ を $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の一次結合

$$B\boldsymbol{v}_2 = \alpha\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2$$

と表したい. $\boldsymbol{v}_2$ と α の組み合わせを 1 つ, 具体的な数値で求めよ.

(b) $P = \begin{pmatrix} 1 & v_{21} \\ -1 & v_{22} \end{pmatrix}$ とすると, $BP = PC$ と表すことができる. 行列 C を記せ.

(c) B^n を求めよ.

(九州大 2008)　　(m20084709)

0.947 $G(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{4t}\right)$ とおく. ただし, $\exp z = e^z$ である.

(1) $t > 0$ のとき

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0$$

であることを示せ.

(2) $t > 0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x,t)\,dx = 1$$

であることを示せ. ただし, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ を用いてよい.

(3) f を $\boldsymbol{R} = (-\infty,\ \infty)$ 上の有界な連続関数とするとき, すべての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して,

$$\lim_{t \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t) f(y)\,dy = f(x)$$

であることを証明せよ.

(九州大 2008)　　(m20084712)

0.948 A を $n \times\ n$ 実行列とする. V を n 実ベクトル $\boldsymbol{v}$ で

$$\lim_{m \to \infty} A^m \boldsymbol{v} = 0 \quad (m \text{ は自然数})$$

となるものの全体とする.

(1) V は $\boldsymbol{R}^n$ の線形部分空間であることを示せ.

(2) $n = 3$ で

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -9/4 & 1/2 \\ -3/2 & 1 & 1/2 \\ 3/2 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

とするとき, A の固有値は $-1,\ 2 \pm \sqrt{2}$ であることを示せ.

(3) A が (2) で与えられるとき V を求めよ.

(九州大 2008)　　(m20084713)

0.949 $n_1,\ n_2$ を自然数, $n = n_1 + n_2$ とする. $n \times\ n$ 実対称行列 A が

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}^T \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & O_{12} \\ L_{21} & I_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & O_{12} \\ O_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{11} & L_{21}^T \\ O_{21} & I_{22} \end{pmatrix}$$

と表されているとする．ただし，一般に，C_{ij} は $n_i\times\ n_j$ 行列，O_{ij} は零行列，I_{ii} は単位行列で，添え字の T は転置をとることを意味する．

A_{11} は正則行列であるとして，次の問いに答えよ．

(1) 行列 L_{21} と行列 B_{22} を A の小行列 A_{ij} を用いて表せ．

(2) A が正定値なら A_{11}，B_{22} も正定値であることを示せ．

(九州大 2008)　　(m20084714)

0.950 次の連立 1 次方程式について，各問いに答えよ．

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(1) 係数行列の逆行列を求めよ．

(2) 上で求めた逆行列を用いて方程式の解を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084715)

0.951 次の行列 A の行列式を求めよ．　$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(九州大 2008)　　(m20084716)

0.952 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を $2\times\ 2$ 行列とする．以下の問いに答えよ．なお，行列やベクトルの要素は全て実数とする．

(1) 全ての 2 次元ベクトル $\boldsymbol{p}$ にたいし $|A\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{p}|$ となるための A の条件を a,b,c,d で表せ．

(2) A が (1) の条件を満たすとき，$(ad-bc)^2=1$ であることを示せ．

(3) $A\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}$ となる 0 ではない 2 次元ベクトル $\boldsymbol{q}$ が存在するための A の条件を a,b,c,d で表せ．

(4) A が (1) と (3) の条件を満たし，かつ $ad-bc=1$ のとき，A を求めよ．

(5) A が (1) の条件を満たし，かつ直線 $y=\sqrt{3}x$ 上の点が A による変換で移動しないとき，A を求めよ．

(九州大 2009)　　(m20094701)

0.953 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$，　$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx$，　$b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx$，

$g(x)=\dfrac{1}{2}a_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ とおく．ただし，n を自然数とする．

(1) フーリエ係数 a_n，b_n を計算せよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ は発散することを示せ．

(3) フーリエ級数 $g(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ で収束することを示せ．

(4) $x=\pm\pi$ で $f(x)$ と $g(x)$ がどのような関係にあるか述べよ．

(九州大 2009)　　(m20094703)

0.954 $4\times\ 4$ 実行列 A を

$$A=\begin{pmatrix}1&a&1&0\\a&1&a&0\\1&a&1&a\\0&0&a&1\end{pmatrix}$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) A の行列式が 0 となる a の値を求めよ．

(2) 行列 A の階数を求めよ．

(九州大 2009)　　(m20094707)

0.955 行列 V_2, V_3, V_4 を次のように定義する：

$$V_2=\begin{pmatrix}1&1\\x&y\end{pmatrix},\quad V_3=\begin{pmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^2&y^2&z^2\end{pmatrix},\quad V_4=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\x&y&z&w\\x^2&y^2&z^2&w^2\\x^3&y^3&z^3&w^3\end{pmatrix}$$

(1) V_2, V_3, V_4 の行列式を求めよ．

(2) V_2, V_3, V_4 の逆行列が存在する条件を述べ，その条件下で逆行列を求めよ．

(九州大 2009)　　(m20094709)

0.956 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ を実数とするとき，次の n 次正方行列 A を考える：

$$A=\begin{pmatrix}x_0&x_1&x_2&\cdots&x_{n-1}\\x_{n-1}&x_0&x_1&\cdots&x_{n-2}\\\vdots&&&&\vdots\\x_1&x_2&\cdots&x_{n-1}&x_0\end{pmatrix}$$

ζ を $\zeta^n=1$ を満たす複素数とするとき，ベクトル $\boldsymbol{u}_\zeta=\begin{pmatrix}1\\\zeta\\\zeta^2\\\vdots\\\zeta^{n-1}\end{pmatrix}$ を考える．

(1) $A\boldsymbol{u}_\zeta$ を求めよ．

(2) $A\boldsymbol{u}_\zeta=\alpha\boldsymbol{u}_\zeta$ となる複素数 α が存在することを示せ．

(3) A の固有値を全て求めよ．

(4) A の行列式を因数分解された形で求めよ．

(九州大 2009)　　(m20094711)

0.957 以下の (1)〜(3) の問いに答えよ．ただし，$D=\dfrac{d}{dx}$ を表している．

(1) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ．

$(D-1)y=x$

(2) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の境界値問題を解け．

$\left(D^2-6D+13\right)y=0$　　　$y(0)=1,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$

(3) 次の関数 $f(x),\ g(x)$ に関する連立微分方程式

$$(D-2)\,f+g=0$$
$$-4f+(D+3)\,g=0$$

を条件 $f(0)=3,\ g(0)=6$ のもとで解け.

(九州大 2010) (m20104701)

0.958 $x \neq 0$ に対して,

$$f(x)=-\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{x}$$

とおく. ただし, $\mathrm{Tan}^{-1}y \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ は, $y=\tan x$ の逆関数である.

(1) $x \neq 0$ で

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

であることを示せ.

(2) 次の計算には誤りがある. 誤りの原因を指摘し, 正しい積分値を求めよ.

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\Big[f(x)\Big]_{-1}^{1}=f(1)-f(-1)=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$$

(九州大 2010) (m20104707)

0.959 線形写像 $T\ :\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+ay-az-w \\ ax+y-z-w \\ -x+y+az+2w \end{pmatrix}$$

を考える. ただし, a は実数である.

(1) ベクトル空間

$$R(T)=\left\{T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\quad;\quad\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4\right\}$$

の次元と一組の基底を求めよ.

(2) ベクトル空間

$$N(T)=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\quad;\quad T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=0\,,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4\right\}$$

の次元と一組の基底を求めよ.

(九州大 2010) (m20104708)

0.960 以下に答えよ.

(1) 次の行列が直交行列になるような a,b,c の値を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & a \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ b & c & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列の行列式と逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

また，次式を満たす x, y, z を求めよ．

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

（九州芸術工科大 2000） (m20004806)

0.961 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ を求めよ．

(2) 以下に順に答えよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を示せ．

(b) $1+\cos x = 2\left(\sin\dfrac{\pi - x}{2}\right)^2$ を示せ．

(c) 上の (a) と (b) を使って，$\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}$ を求めよ．

(3) $\dfrac{d}{dx}e^{x^x}$ を求めよ．

（九州芸術工科大 2001） (m20014801)

0.962 E を 4 次単位行列とし，A を $A^2 = O$ (O は零行列) なる 4 次正方行列とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 行列 $E+A$ が逆行列を持つことを示し，その逆行列が $E-A$ で与えられることを示せ．

(2) 上の問 (1) を利用して，次の行列 B の逆行列を求めよ．

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ただし，a,b,c　は定数とする．

(九州芸術工科大 2001) (m20014805)

0.963 以下が成り立つことを示せ．

(1) A が正則のとき，$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$.

(2) 正方行列 A が正則行列 P によって対角化され，$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ となるとき，自然数 n に対して，$P^{-1}A^nP = D^n$.

(3) 正方行列 A, B に対し $AB = A, BA = B$ のとき自然数 n に対して，$A^n = A$.

（九州芸術工科大 2001） (m20014806)

0.964 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して固有値と固有ベクトルを求め，A を対角化せよ．また，A^n を求めよ．

（九州芸術工科大 2001） (m20014809)

0.965 (1) $e = \displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ を使って以下を求めよ．

(a) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$ (b) $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

(2) (a) $a>0, x>0$ のとき，$e^{ax} \geqq 1+ax+\dfrac{a^2x^2}{2}$ であることを使って $\lim_{x\to\infty} xe^{-ax}$ を求めよ．

(b) 上の結果を使って $\lim_{x\to\infty} x^5e^{-x}$ を求めよ．

(c) 同じく (a) の結果を使って $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}$ を求めよ．

(九州芸術工科大 2003) (m20034801)

0.966 $a>b>0$ のとき，線形変換 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ によって円 $x^2+y^2=1$ がどのような図形に写像されるか式と図で示せ．また，それに続けて線形変換 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ をほどこすとき，どのような図形に写像されるか式と図で示せ．

(九州芸術工科大 2003) (m20034807)

0.967 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(九州芸術工科大 2005) (m20054810)

0.968 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を原点を中心とし半径 2 の円に写像する線形変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の定数 a, b を求めよ．

(九州芸術工科大 2005) (m20054811)

0.969 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，次のものを計算せよ．

(1) $A+B$ (2) $B\ {}^tA$

(佐賀大 2003) (m20034924)

0.970 次の行列 $A=(0,1)$, $B=(2,3)$, $C=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ に関して，行列の計算を行え．

ただし，^{t} は転置，C^{-1} は逆行列を表す．

また，行列の演算が約束されていないものについては ‘ 不能 ’ とかくこと．

(1) $A+B$ (2) AB (3) $(A^t)B$ (4) $A(B^t)$ (5) C^{-1}

(佐賀大 2003) (m20034925)

0.971 次の行列の行列式を求めよ．

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2003) (m20034926)

0.972 次の行列 B について，以下の問いに答えよ．

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|B|$ を計算せよ．

(2) 2つのベクトル $(1,-2,4),(-2,4,-3)$ が1次独立であることを示せ.

(3) B の階数 $\mathrm{rank}B$ を求めよ.

(佐賀大 2003)　　(m20034927)

0.973 次の行列 A について，以下の問いに答えよ.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) A^2 および A^3 を計算せよ.

(2) 上の計算結果より，逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) 次の連立方程式を解け.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2003)　　(m20034928)

0.974 F の直交行列 P を求めて，$P^{-1}FP$ を対角行列にする.

$$F=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

以下の手順に従って求めよ.

(1) F の固有値を求め，

(2) 長さ1の固有ベクトルを求め，

(3) 直交行列 P を求め，

(4) 対角行列 $P^{-1}FP$ を求めよ.

(佐賀大 2003)　　(m20034930)

0.975 次の問いに答えよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ のすべての固有値と，各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.

(2) 複素数 λ が実正方行列（すなわち実数を成分とする正方行列）A の固有値ならば，λ の共役複素数 $\overline{\lambda}$ も A の固有値になることを証明せよ.

(3) 実対称行列のすべての固有値は実数になることを証明せよ.

(4) n を偶数とするとき，すべての固有値が0でない純虚数になるような n 次実正方行列の例を与えよ．また n が奇数ならばそのような例が存在しないことを証明せよ.

(佐賀大 2003)　　(m20034931)

0.976 実数を成分とする n 次縦ベクトルのなす線形空間を $\mathbf{R^n}$ とし，$\mathbf{R^4}$ から $\mathbf{R^3}$ への写像 f を

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix})=\begin{pmatrix} x_1+x_2-x_3+x_4 \\ -3x_1-x_2+x_3-x_4 \\ 11x_1+5x_2-5x_3+5x_4 \end{pmatrix}$$

で定義するとき，次の問いに答えよ.

(1) $\mathbf{R^4}$ の任意のベクトル x に対して $f(x)=Ax$ を満たす行列 A を求めよ.

(2) 写像 f が線形写像になることを証明せよ.

(3)
$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in \mathbf{R^4} \mid f(x) = \mathbf{0}\},$$
$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid \ x \in \mathbf{R^4}\}$$
がそれぞれ $\mathbf{R^4}, \mathbf{R^3}$ の線形部分空間になることを証明せよ．ただし，$\mathbf{0}$ は $\mathbf{R^3}$ の零ベクトルを表す.

(4) $\mathrm{Ker}(f)$ と $\mathrm{Im}(f)$ の次元と基底をそれぞれ求めよ.

(佐賀大 2003) (m20034932)

0.977 次の問に答えよ.

(1) $\sqrt{1+2\log x}$ を x について微分せよ.

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\tan x - \frac{1}{\cos x}\right)$ を求めよ.

（佐賀大 2004） (m20044902)

0.978 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx \quad \left(\text{ヒント : } \tan\frac{x}{2} = t \text{ とおく}\right)$

(2) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx \quad (m, n \ : \ 0 \text{ 以上の整数})$

（佐賀大 2004） (m20044911)

0.979 $f(x,y) = x\exp(8xy)$ について, 次の 1 次偏微分及び 2 次偏微分を求めなさい. ただし, $\exp(z)$ は $\exp(z) = e^z$ を意味する.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$$

（佐賀大 2004） (m20044917)

0.980 関数 $f(x,y) = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ を x と y でそれぞれ偏微分せよ.

（佐賀大 2004） (m20044918)

0.981 次に示す 3 つのベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ について各問に答えよ.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ のベクトルの一次結合により零ベクトルをつくり, これらのベクトルが一次従属であることを示しなさい.

(2) $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ の各ベクトルを他の 2 つのベクトルの一次結合で表しなさい. また, この 3 つのベクトル系の階数が 2 であることを説明しなさい.

（佐賀大 2004） (m20044926)

0.982 正則行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

の逆行列を A^{-1} とするとき, A と A^{-1} の関係式を書け. また A^{-1} を求めよ.

（佐賀大 2004） (m20044927)

0.983 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を A^{-1} を求めよ.

（佐賀大 2004）　(m20044928)

0.984 以下の各問に答えよ. ただし, $\mathrm{adj}\,A$ は行列 A の余因子行列, E は単位行列, $\det A$ は行列 A の行列式を表すものとする.

(1) n 次行列 A について

$$(\mathrm{adj}\,A)A = A(\mathrm{adj}\,A) = (\det A)E$$

となることを利用して

$$\det(\mathrm{adj}\,A) = (\det A)^{n-1}$$

が成り立つことを示しなさい.

(2) 次の 3 次行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

について, $\det A$, $\mathrm{adj}\,A$, $\det(\mathrm{adj}\,A)$, A^{-1} を求めなさい.

（佐賀大 2004）　(m20044929)

0.985 次の問に答えよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & a \end{pmatrix}$ が正則であるための条件を求めよ.

(2) a は $|A|$ を満たす整数であるとき, 次の連立方程式を逆行列を用いて解け.

$$\begin{cases} (a+2)x + y & = & 1 \\ 3x + ay & = & -3 \end{cases}$$

(佐賀大 2004)　(m20044930)

0.986 次の対称行列の階数および行列式を求め, この行列が正則であるかどうか判断せよ. 正則な場合は, 逆行列を求めよ. さらに, 固有値と対応する固有ベクトルを求めて, この行列を対角化せよ.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2004)　(m20044932)

0.987 R^3 を実の 3 次列ベクトル全体のなすベクトル空間とする. 3 次正方実行列 A と 3 次列ベクトル $a \in R^3$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

とする. さらに, $f : R^3 \to R^3$ を $f(x) = Ax\ (x \in R^3)$ で定義された R^3 の線形変換とする.

(1) A^2 および逆行列 A^{-1} を計算せよ.

(2) ベクトル $f(f(\boldsymbol{a}))$ を計算せよ.

(3) $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{a}$ となるベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in R^3$ を求めよ.

(4) $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ となるベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3$ を求めよ.

(5) A の固有値とそれぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ.

(佐賀大 2004)　　(m20044933)

0.988 実数体 R 上の線形空間 V の空でない部分集合 S が V の部分空間であるとは, 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ と任意のスカラー $\alpha \in R$ に対して,

$$(イ)\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in S, \qquad (ロ)\ \alpha\boldsymbol{x} \in S$$

を満たすことである. 次の $V = R^3$ の部分集合が部分空間になるかどうかを調べ, 部分空間になるものについては, その次元と基底 1 組を求めよ.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3\ ;\ x + y - z = 0 \right\},$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3\ ;\ x + y - z \text{ は整数} \right\},$$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3\ ;\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \right\}.$$

(佐賀大 2004)　　(m20044934)

0.989 次の (1),(2) に答えよ.

(1) 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ のなす角は鋭角であるか鈍角であるかを判定せよ.

(2) 2 つのベクトル

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \\ x \\ -1 \end{pmatrix}$$

が直交するときの x の値を求めよ.

(佐賀大 2005)　　(m20054902)

0.990 行列の基本変形（掃き出し法）を用いて, 連立方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

を解け.

(佐賀大 2005) (m20054903)

0.991 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & c \end{pmatrix}$ について，次の (1),(2),(3) に答えよ．ただし, $a \neq 0$ または $c \neq 0$ とする.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) ベクトル

$$\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x_3} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$$

は A の固有ベクトルであることを示し, それぞれのベクトルに対する固有値を答えよ.

(3) $a + c \neq 0$ のとき, A は対角化可能であることを示せ.

(佐賀大 2005) (m20054907)

0.992 次の問に答えよ.

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(3) (2) の行列を直交行列によって対角化せよ.

(佐賀大 2005) (m20054909)

0.993 以下の問に答えよ.

(1) 次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列式を計算せよ．答えはなるべく簡単に因数分解した形で書け.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

(佐賀大 2005) (m20054918)

0.994 平面上の直線 l を $l\ :\ y = (\tan\theta)x\ \ (-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ とし，f を平面上の与えられたベクトル $\boldsymbol{a}$ を l と線対称な位置に移すという線形写像とする．このとき以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするとき, $f(\boldsymbol{e}_1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)$ を求めよ.

(2) 線形写像 f を表す行列を求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054919)

0.995 x と y の関数 $z = \log x - 3x^2y + 6$ について, 1 次偏微分 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ および 2 次偏微分 $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$ と $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ を求めよ.

(佐賀大 2005)　(m20054921)

0.996 次の問に答えよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(2) 行列 A を対角化せよ.

(3) (2) で得られた対角行列を B とすると $P^{-1}AP = B$（ただし P は正則行列）の関係が成り立つ. この関係を利用して A^n を求めよ.

(佐賀大 2005)　(m20054926)

0.997 $\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおく. 以下の問に答えよ.

(1) $\dfrac{dx}{dt}$ を求めよ. ただし, 答えは t の関数として表せ.

(2) $\cos x$ を t で表せ.

(3) 変数変換 $\tan\dfrac{x}{2} = t$ を行って, 積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx$ を求めよ.

(4) 曲線 $y = -\log|\cos x|$, $\left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}\right)$ の長さを求めよ.

(佐賀大 2005)　(m20054932)

0.998 実数を成分とする 4 次縦（列）ベクトル全体のなす線形空間を $\boldsymbol{R}^4$ とし，4 つのベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

で生成される $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間を V とするとき，次の問に答えよ.

(1) V の次元と（1 組の）基底を求めよ.

(2) 次のベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ が V に属するかどうかをそれぞれ判定せよ.

(3) $\boldsymbol{R}^4$ の 2 つの部分空間の共通部分は，$\boldsymbol{R}^4$ の部分空間になることを証明せよ.

(4) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ で生成される $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間と，$\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ で生成される $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間との共通部分の次元と基底を求めよ.

(佐賀大 2006)　(m20064902)

0.999 行列　$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$　について，次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を a, b, c を用いて表せ.

(2) a, b, c が実数のとき，A の固有値も実数になることを証明せよ．また，A が対角化できることを証明せよ.

(3) $a = 1 + i,\ b = 1 - i,\ c = 0$ のとき，A を対角化せよ．ただし，i は虚数単位とする．

(4) $a = 1,\ b = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2},\ c = \dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ のとき，A の固有値がすべて 0 になること，および A は対角化できないことを証明せよ．ただし，i は虚数単位とする．

(佐賀大 2006)　　(m20064904)

0.1000　次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．　$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

(佐賀大 2006)　　(m20064912)

0.1001　$x^2 \cos 3x$ の n 次導関数を求めよ．ただし，$g(x) = \cos ax\ \ (a > 0)$ のとき，$g^{(n)}(x) = a^n \cos\left(ax + \dfrac{n}{2}\pi\right)$ となることを証明せずに使用してもよい．

(佐賀大 2006)　　(m20064914)

0.1002　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ のとき

(1) $2A - B$ の値を求めよ．

(2) ${}^t\!A\,{}^t\!B$ の値を求めよ．

(3) 行列 A の逆行列 A^{-1} の値を求めよ．

(4) ${}^t\!B$ の行列式 $\det({}^t\!B)$ の値を求めよ．

${}^t\!A, {}^t\!B$ はそれぞれ行列 A の転置行列，行列 B の転置行列を表す．

(佐賀大 2006)　　(m20064932)

0.1003　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ について，

(1) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ．

(2) 固有値 λ_1, λ_2 に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めよ．

(3) 行列 A を対角化する行列を示し，対角化せよ．

(佐賀大 2006)　　(m20064934)

0.1004　(1) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) (1) の行列を対角化する直交行列を求め，対角化せよ．

(佐賀大 2007)　　(m20074905)

0.1005　次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x \log x\, dx$　（ 不定積分．積分定数を C とせよ．）

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3x^2}\, dx$　　　(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$

(4) $\displaystyle\iint_D x^2 y\, dxdy$　（但し，$D = \left\{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ x \leqq y \leqq \sqrt{x}\ \right\}$）

(佐賀大 2007)　　(m20074907)

0.1006 3 次元空間のベクトル場 $\boldsymbol{A}(x) = (A_x(x,y,z),\ A_y(x,y,z),\ A_z(x,y,z))$ について次の等式を証明せよ.

$$\boldsymbol{A}(x) \times\ (\nabla \times\ \boldsymbol{A}(x)) = \frac{1}{2}\nabla\left(\boldsymbol{A}(x)^2\right) - (\boldsymbol{A}(x)\cdot\nabla)\,\boldsymbol{A}(x)$$

(佐賀大 2007) (m20074908)

0.1007 次の関数の極限を求めよ．ただし，log は自然対数とする.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

(佐賀大 2007) (m20074909)

0.1008 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ について,

(1) $\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A} - 8\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$ を示せ.　　(2) (1) を利用して，$\boldsymbol{A}^{-1}$ および $\boldsymbol{A}^{-2}$ を求めよ.

ここで，$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{A}^{-1}$ は，それぞれ単位行列，零行列，$\boldsymbol{A}$ の逆行列である．また，$\boldsymbol{A}^{-2} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^2$ である.

(佐賀大 2007) (m20074920)

0.1009 次の関数を x について，微分せよ．但し，log の底は e とする.

(1) $y = \sin 3x\cos 3x$　(2) $y = (x\sin x)^3$　(3) $y = (\log x)^2$　(4) $y = 10^x$

(佐賀大 2007) (m20074922)

0.1010 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$ を x 軸の周りで回転させてできる体積 V を求めよ．ただし，a, b は，正の定数である.

(佐賀大 2007) (m20074925)

0.1011 (1) $x-y$ 平面上の直線 $x+y-1=0$ は次の行列 A で表される 1 次変換によってどのように移されるか.　$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $x-y$ 平面上のすべての点は次の行列 B で表される 1 次変換によってどのように移されるか.

$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) 一般に，平面上のすべての点は 1 次変換によって平面内の別の点に移される．しかし (2) の場合はそうはならない．この理由を一つ示せ.

(4) 次の行列 C が対角化できない場合の t の値を求めよ．ただし t は実数とする.

$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$

(佐賀大 2008) (m20084902)

0.1012 a, b を実数とし，次の問いに答えよ.

(1) 次の等式を証明せよ.

$$\int_0^{2\pi} f(a\sin x + b\cos x)dx = \int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\,\sin x\right)dx$$

(2) 前問の結果を用いて，次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{2\pi}(a\sin x + b\cos x)^2 dx$$

(佐賀大 2009)　　(m20094901)

0.1013 $0 < a < b$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 区間 $[a, b]$ で連続な実関数 $f(x)$，$g(x)$ について以下の不等式を証明せよ．

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2 \leqq \int_a^b f(x)^2dx \cdot \int_a^b g(x)^2dx$$

(2) 前問の結果を用いて，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\log\frac{b}{a}\right)^2 \leqq \frac{(a-b)^2}{ab}$$

(佐賀大 2009)　　(m20094902)

0.1014 $x > 0$ で次の定積分で定義された関数 $f(x)$ について，以下の問いに答えよ．

$$f(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

(1) 次の等式を証明せよ．ただし，$x > 1$ とする．

$$f(x) = (x-1)f(x-1)$$

(2) x が自然数 n のとき，次式を示せ．

$$f(n) = (n-1)!$$

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ を示し，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ．

(佐賀大 2009)　　(m20094903)

0.1015 N 次元複素数ベクトルと N 次元複素数正方行列 A を考える．今，A の行列要素 a_{kl} が

$$a_{kl} = e^{\frac{2\pi}{N}(k-1)(l-1)i}$$

で与えられるとき，次の問いに答えよ．ただし，i は虚数を表す．

(1) $N = 4$ のとき，行列 A を書き下せ．

(2) 4 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ が

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

であるとき，$\boldsymbol{x}$ に前問の行列 A をかけて作られるベクトル $\boldsymbol{y}$ を求めよ．また，

$$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = 4(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$$

であることを示せ．ここで，(　,　) は複素数ベクトルの内積を表す．

(3) 行列 A の随伴行列（共役転置行列）を B とするとき，その行列要素 b_{kl} を書き下し，

$$A \cdot B = B \cdot A = NE$$

であることを示せ．ここで行列 E は N 次元単位行列である．

(4) $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ のとき，

$$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})=N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$$

が成立することを示せ．ただし，$\boldsymbol{x}$ は任意の N 次元複素数ベクトルとする．

(佐賀大 2009)　　(m20094904)

0.1016 (1) 導関数の定義 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ を利用して $\left(\sqrt{2x}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ であることを示せ．

(2) $x=3\sin t$ として $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算せよ．

(佐賀大 2009)　　(m20094910)

0.1017 次の関数の x に関する偏微分を求めよ．

(1) $f(x,y)=x\cos(2y)+y\sin(2x)+x\cos(3x)+y\sin(2y)$

(2) $f(x,y)=(\ln(xy))^2 \quad (x>0,\ y>0)$ （ただし $\ln(x)$ は底を e とする自然対数）

(佐賀大 2009)　　(m20094915)

0.1018 行列 $A=\begin{pmatrix} 13 & -30 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$ に対して，A^n を計算せよ．

(佐賀大 2009)　　(m20094919)

0.1019 連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 - 6x_4 = 0 \\ x_1+2x_2+3x_3+x_4=0 \\ 3x_1+x_2+4x_3-7x_4=0 \end{cases}$$

の解 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$ の全体を W で表す. 以下の問いに答えよ.

(1) W の次元と W の一組の正規直交基 $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\}$ を求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は，W に含まれないことを示せ．

(3) $\boldsymbol{a}$ との距離 $||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}||$ がもっとも近い W のベクトル $\boldsymbol{x}$ は，

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2$$

で与えられることを示せ．ただし，一般に 4 次ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix}$ に対して

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{4} x_i y_i \qquad ||\boldsymbol{x}||=\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$$

である．

(佐賀大 2009)　　(m20094920)

0.1020 次の行列の逆行列を求めよ．

(1) $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

(佐賀大 2010)　　(m20104905)

0.1021 次の行列は対角化可能か. 対角化が可能ならば対角化し, 不可能ならばその理由を述べよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (a \neq 0)$

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -6 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(佐賀大 2010)　　(m20104906)

0.1022 次の関数の極限を求めよ. ただし, $a > 0$ とし, log は自然対数とする.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{\sin x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x \log\left(1 + \frac{2}{x}\right)$

(佐賀大 2010)　　(m20104908)

0.1023 積分に関する, 以下の問いに答えよ. ただし, $\sin^{-1} x$ は $\sin x$ の逆関数とする.

(1) $\left(x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x\right)' = 2\sqrt{1-x^2}$ を示せ.

(2) $f(x) = x^2 \sin^{-1} x$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(3) 不定積分 $\displaystyle\int x \sin^{-1} x \, dx$ を求めよ.

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{1/2} x \sin^{-1} x \, dx$ を計算せよ.

(佐賀大 2010)　　(m20104910)

0.1024 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 行列 P の行列式 $\det P$ を求めよ.

(2) 行列 P の逆行列 P^{-1} を求めよ.

(3) PAP^{-1} を計算せよ.

(4) 行列 A の固有値を求めよ.

(5) 行列 A が対角化可能かどうか理由を述べて答えよ.

(佐賀大 2010)　　(m20104912)

0.1025 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x - 2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x\right)$

(佐賀大 2010)　　(m20104917)

0.1026 次のベクトルに関して以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が一次従属系であることを示せ.

(2) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つためには, a, b, c にはどのような条件が必要か.
但し, 行列 A は $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ を, それぞれ第 $1, 2, 3$ 列とする行列である.

(3) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{x}$ を全て求めよ.

（長崎大 2004） (m20045012)

0.1027 x を $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$ の実数とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ を用いて, 次の公式

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

を導きなさい.

(2) $y = \tan^{-1} x$ に対して, 逆関数の微分の公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)}$$

を用いて, $\dfrac{dy}{dx}$ を x を用いて表しなさい.

(3) n を自然数とし,

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$$

とおく. この I_n に対して, $n = 1$ のときの I_1 を求めなさい.

(4) (3) で与えられた I_n を

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = \int 1 \times \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$$

と考え, 部分積分法を用いて

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) I_n$$

が成り立つことを示しなさい.

(5) (3) で与えられた I_n に対して, $n = 3$ のときの I_3 を求めなさい.

(長崎大 2005) (m20055001)

0.1028 次の行列 A について, 以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) 行列 A の固有ベクトルを求めよ.

(3) 行列 A を以下のように

$$B = P^{-1}AP$$

対角化する行列 P と対角行列 B を求めよ.

(長崎大 2005)　　(m20055009)

0.1029 次の行列 $\boldsymbol{A}$ について以下の問に答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ.

(2) 固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) 大きさを 1 に規格化した固有ベクトルを列ベクトルとして並べてできる行列 $\boldsymbol{P}$ の逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ を求めよ.

(4) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ を計算せよ.

(長崎大 2005)　　(m20055013)

0.1030 次の行列の逆行列を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(長崎大 2005)　　(m20055021)

0.1031 a, b を任意の実数とする次の対称行列 A について，以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & b & 2 \\ a & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A が逆行列を持たないとき，$b > 0$ であるような a の範囲を示せ.

(2) 行列 A の固有値の一つが 1 であるとき b の値を求めよ．また，1 以外の固有値を a を用いて表せ．ただし，$a \neq 0$ とする.

(長崎大 2007)　　(m20075001)

0.1032 太さを無視できる糸を巻き付けた半径 R の円柱がある．糸を張りながら円柱から外すとき以下の問いに答えよ.

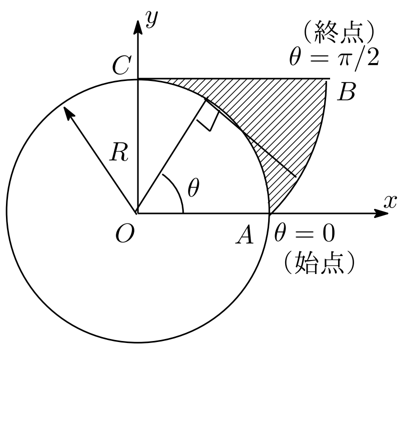
(1) 図のように $\theta = 0$ の位置からはじめて $\theta = \pi/2$ まで糸が外れた．円柱から外れた糸の長さ BC はいくらか.

(2) θ の位置まで糸が外れたとき，糸の先端の x および y 座標を R と θ を用いて表せ.

(3) $\theta = \pi/2$ まで糸を外す間に，糸の先端が描く曲線の長さ AB は次式で計算できる.

$$AB = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

上式を計算して曲線 AB の長さを求めよ.



(4) 図中の斜線部分の面積 $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = R^2 \left\{ \int_0^{\pi/2} \left(\theta\sin\theta\cos\theta + \theta^2\sin^2\theta\right) d\theta - \frac{\pi}{4} \right\}$$

で与えられる．右辺に含まれる定積分 $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \theta\sin\theta\cos\theta\, d\theta$ の値を求めよ.

(長崎大 2007)　　(m20075002)

0.1033 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r,\ f(x,y,z)=\dfrac{1}{r}=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ とするとき.

(1) $f_x(x,y,z),\ f_y(x,y,z),\ f_z(x,y,z)$ を求めよ.

(2) $f_{xx}(x,y,z)+f_{yy}(x,y,z)+f_{zz}(x,y,z)$ を求めよ.

ここで，$f_x(x,y,z)=\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x},\cdots,f_{xx}(x,y,z)=\dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2},\cdots$ とする.

(長崎大 2007)　　(m20075003)

0.1034 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\,\sin x\,dx$ を求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{x^2}\,dx$ を求めよ.

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2 y\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid 0\le x\le y\le 1\}$ を計算せよ.

(4) 平面曲線が $\begin{cases} x=e^t\sin t \\ y=e^t\cos t \end{cases}$ ，　$\left(0\le t\le \frac{\pi}{2}\right)$ で与えられるとき，曲線の長さ L を求めよ.

(長崎大 2007)　　(m20075004)

0.1035 次の行列の固有値および固有ベクトルを求めよ.　$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$

(長崎大 2007)　　(m20075008)

0.1036 次のベクトルについて以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ が一次独立であることを示せ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ の一次結合（線形結合）で表せ.

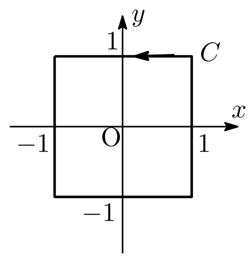
(長崎大 2008)　　(m20085004)

0.1037 点 (x,y,z) での位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ とし，$r=|\boldsymbol{r}|=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ とするとき，以下の問いに答えよ．ここで，$\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ は，それぞれ，$x,y.z$ 方向の単位ベクトルを表す.

(1) $\nabla\cdot\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$ を計算せよ.

(2) 右図の閉曲線 $C(z=0)$ に沿って，次の線積分を計算せよ.

$$\oint_C \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}$$



(長崎大 2008)　　(m20085007)

0.1038 行列 $A=\begin{pmatrix} \alpha & 4 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ の固有値が 1 と 6 であるとき，実数 α 及び β の値を求めよ．なお，$\alpha\ge\beta$ とする．求める過程も記述すること.

(長崎大 2008)　　(m20085010)

0.1039 2 行 2 列の行列 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ とする. 0 以上の整数 n に対して, A のべき乗 A^n を考える. このとき以下の問いに答えなさい. ただし, a は $0 < a < 1$ の実数とする. また, $n = 0$ に対して, $A^0 = I$ とする.

(1) $n = 2, 3, 4$ のそれぞれについて A^n を求めなさい.

(2) 行列 $I - A$ の逆行列を求めなさい.

(3) 行列 T_n を次式で定義する. このとき, $(I - A)T_n = I - A^n$ が成り立つことを示しなさい.

$$T_n = I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} A^k$$

(4) (3) の行列 T_n の各要素を a, n を用いて表しなさい.

(長崎大 2009) (m20095002)

0.1040 (1) $N \times\ M$ の行列 A と $P \times\ Q$ の行列 B があるとき, 行列の積 AB が定義できる条件を述べよ.

(2) 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解を持つための条件を述べよ. ただし, A は $N \times\ N$ の正方行列, $\boldsymbol{x}$ は N 次元の列ベクトル, $\boldsymbol{0}$ は N 次元の 0 ベクトルである.

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & z & 1 \\ x & 1 & z & 2 \\ 1 & 0 & b & c \\ 2 & 0 & b & c \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(4) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2a & 1-2a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ. また, A^n が $n \to \infty$ のとき収束するための条件および $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ. ただし, $a \neq 1$ である.

(長崎大 2009) (m20095010)

0.1041 2 つの実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ が $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$, $b_n = 3a_{n-1} - b_{n-1}$ を満たすとき, 以下の手順に従って $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ. ただし, $a_0 = 1$, $b_0 = -1$ である.

(1) $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$ を満たす行列 A を求めよ,

(2) 行列 A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(3) A を対角化する行列 P を求めよ.

(4) A^n を求めよ. ただし, n は正の整数である.

(5) 実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(長崎大 2009) (m20095014)

0.1042 (1) $e^{a\sqrt{x}}$ の微分を求めよ. ただし, a は実定数である.

(2) $x^k \sin ax$ の微分を求めよ. ただし, k は整数, a は実定数である.

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(a^x + b^x) - \log 2}{x}$ を計算せよ. ただし, a, b は正定数である.

(長崎大 2010) (m20105011)

0.1043 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルが $\lambda_1 = -1$, $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 2$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} d \\ 1 \end{pmatrix}$ となるように, a, b, c, d を求めよ.

(長崎大 2010) (m20105018)

0.1044 平面上の線型変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

について次の問いに答えよ．

(1) この変換により点 $(3, 0)$ にうつされる点を求めよ．

(2) この変換により直線 $x - 3y + 2 = 0$ がどのような図形にうつされるかを述べよ．

(大分大 2002)　　(m20025104)

0.1045 平面上の線形変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい.

(1) この変換は点 $(1,\ -1)$, $(1,\ 2)$ をそれぞれ点 $(3,\ -7)$, $(-3,\ 5)$ に移すとする．a, b, c, d を求めなさい.

(2) この変換により，直線 $x + y = 0$ がどのような図形に移されるかを述べなさい．ただし，a, b, c, d は (1) で求めた値とする.

(大分大 2007)　　(m20075101)

0.1046 関数 $f(x)$ を $f(x) = \sqrt{1 + 2x}$　$\left(|x| < \dfrac{1}{2}\right)$ と定義するとき，次の問いに答えよ.

(1) $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ を求めよ.

(2) n 次導関数 $f^{(n)}(x)$　$(n \geqq 2)$ を答え，それが成り立つことを数学的帰納法で証明せよ.

(3) (1), (2) の結果を使って，関数 $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ..

(大分大 2008)　　(m20085103)

0.1047 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 行列 A が逆行列をもつための $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ の条件を求めよ．

(2) A の逆行列を求めよ．

(3) A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(熊本大 2001)　　(m20015205)

0.1048 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して，

$$V_i = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i) = 0\}\ (i = 1, 2), \qquad V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2,\ (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})\}$$

とするとき，次のことを示せ．ここに，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の内積を表す．

(1) V_1, V_2 は $\mathbb{R}^3$ のベクトル部分空間である．

(2) $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0\ ({}^\forall \boldsymbol{y} \in V_1 \cap V_2)\}$

（熊本大 2001）　　(m20015206)

0.1049 n 次の実正方行列 A について，${}^tAA = E$ が成り立つとき，A は n 次の直交行列であるという. ここで，${}^tA$ は A の転置行列，E は n 次の単位行列だある．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A, B が共に n 次の直交行列であれば，AB, A^{-1} も n 次の直交行列であることを示せ．

(2) 2 次の直交行列 A は次の 2 つの行列のいずれかの形をしていることを示せ．

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

(熊本大 2004)　　(m20045203)

0.1050　3 次の実正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる 3 次の正則行列 P を 1 つ求めよ．

(熊本大 2004)　　(m20045204)

0.1051　$\mu \neq \lambda > 0$ として，3 つの行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$$

が，$AP = PB$ を満たすような λ, μ, x, y を求めよ．

(熊本大 2006)　　(m20065204)

0.1052　行列 $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ．　(熊本大 2007)　　(m20075203)

0.1053　線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が　$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$　で与えられているとき，次の問いに答えよ．

(1) f の核の基底を求めよ．　　(2) f の像の次元を求めよ．

(熊本大 2007)　　(m20075204)

0.1054　$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$．$B = \lambda I_2 - A$ とする．ただし，λ は定数で，I_2 は 2 次の単位行列である．次の問いに答えなさい．

(1) B を求めなさい．

(2) $B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に自明でない解（$x = y = 0$ ではない解）が存在するような λ を全て求め，それぞれの λ に対して，$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の自明でない解を求めなさい．

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(4) A の対角化により,A^n を求めなさい．ただし，n は自然数とする．

(熊本大 2008)　　(m20085201)

0.1055　次の行列は対角化可能かどうか判定しなさい．ただし，α, β, γ はいずれも 0 でない実数であり，かつ，$\alpha \neq \beta$ とする．

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

(熊本大 2009)　　(m20095202)

0.1056 $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\quad((x,y,z)\neq(0,0,0))$ において，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ を計算せよ．

(宮崎大 2001) (m20015301)

0.1057 2 変数関数 $z=f(x,y)=e^{-x}\sin y$ について, 次の各問に答えよ.

(1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を求めよ.

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ の上の点 $P\left(0,\dfrac{\pi}{2},1\right)$ における接平面の方程式を求めよ.

（宮崎大 2004） (m20045301)

0.1058 行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ について, 次の各問に答えよ.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$ を 2 つの固有ベクトルの和で表せ.

(3) (2) の結果と固有ベクトルの性質を用いて, $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 8\end{pmatrix}$ を示せ.

(宮崎大 2004) (m20045305)

0.1059 変数 x, y, z から, 変数 u, v, w への変数変換を

$$u=x\cos z-y\sin z\,,\qquad v=x\sin z+y\cos z\,,\qquad w=z$$

と定めたとき, 以下の各問に答えよ.

(1) 次の恒等式が成立することを示せ.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)=1$$

(2) 関数 $f=e^{-\sqrt{u^2+v^2}}\cos w$ に対して, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ を x, y, z の関数として求めよ.

(宮崎大 2005) (m20055303)

0.1060 行列 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) A の固有値 λ_1 と λ_2 を求めよ.

(2) λ_1 と λ_2 に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ をそれぞれ求めよ.

(宮崎大 2006) (m20065301)

0.1061 $x>0,\ y>0$ に対して $u(x,y)=x^y$, $v(x,y)=x^2+y^2$ とおく.
このとき，ヤコビ行列 $J=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$ とその行列式 $|J|$ の値を求めよ.

(宮崎大 2006) (m20065302)

0.1062 空間内の集合 $W=\left\{\begin{pmatrix}-a+b\\ -a\\ 2b\end{pmatrix}\ \middle|\ a,b \text{ は実数}\right\}$ と点 $P\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ について，次の各問いに答えよ.

(1) 点 P が W 内の点でないことを示せ.

(2) W 内の点の中で点 P との距離が最短であるような点 Q を求めよ.

(宮崎大 2007)　(m20075301)

0.1063 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値を全て求めよ.　(2) 行列 A の固有ベクトルを全て求めよ.

(宮崎大 2008)　(m20085301)

0.1064 次の各問いに答えよ．ただし，i を虚数単位とする.

(1) 次の複素数を計算せよ.

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$$

(2) 次の式を満足する A および θ の値を求めよ．ただし，$A > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi$ とする.

$$1 + \sqrt{3}\,i = Ae^{i\theta}$$

(宮崎大 2008)　(m20085305)

0.1065 3 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 W を

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 2a-2b \\ a+b \\ 3a+b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

とする．このとき，$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ が W の要素にならないための，c が満たすべき条件を求めよ.

(宮崎大 2009)　(m20095301)

0.1066 次の連立一次方程式について, 次の各問に答えよ.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 - 2x_3 = 2 \\ x_2 + 3x_3 = -7 \end{cases}$$

(1) この連立一次方程式を, 行列 A とベクトル $\boldsymbol{b}$ を用いて $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とあらわしたときの, 係数行列 A を記せ. ただし，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とする.

(2) 係数行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) 上の連立一次方程式を解け.

(宮崎大 2010)　(m20105301)

0.1067 次の各問に答えよ. ただし, i を虚数単位とする.

(1) 複素数 $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ を極形式 $re^{i\theta}$ で表せ. ただし, $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする.

(2) 複素数

$$\left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{3} + i}\right)^{12}$$

を計算せよ. ただし, $x + iy$（$x,\ y$ は実数）という形で答えよ.

(宮崎大 2010)　　(m20105302)

0.1068　関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$ の x に関する 3 次の導関数 $f^{(3)}(x)$ を示し，$f^{(3)}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ．

（鹿児島大 2001）　　(m20015406)

0.1069　$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$，　$B=\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & 4 \end{pmatrix}$　のとき，A と B が可換（すなわち $AB=BA$）であるように a,b の値を定めよ．このとき $C=(AB)^2-A^2B^2$ の値を求めよ．

（鹿児島大 2001）　　(m20015417)

0.1070　次の微分, 積分を求めなさい.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\log x}{\sqrt{x^2+2}}\right)$

(2) $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\sin^3 x\right)$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x^4-2\sin x\right)dx$

(4) $\displaystyle\int xe^{-x}dx$

(鹿児島大 2005)　　(m20055405)

0.1071　(1) ベクトル $\boldsymbol{a}\ (3,-1,-2)$ とベクトル $\boldsymbol{b}\ (2,4,1)$ があるとき, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は直交しているかどうかを説明しなさい. また, $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ を求めなさい.

(2) 行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, 行列 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ があるとき, $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$ と $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ を求めなさい.

(鹿児島大 2005)　　(m20055408)

0.1072　次の定積分を実施しなさい.

(1) $\displaystyle\int_0^1\left(4x^3-6x^2+1\right)dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{x+1}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx$

(鹿児島大 2005)　　(m20055410)

0.1073　平面内にある直交直線座標系で規定したベクトルの変換行列 $\boldsymbol{A}$ において, 次の問に答えなさい.

(1) 原点の周りに反時計回りに $\dfrac{\pi}{6}$ ラジアン回転させるベクトルの変換行列 $\boldsymbol{A}$（直交行列）は次のように与えられる.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

行列 $\boldsymbol{A}$ を用いてベクトル $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を回転変換させるには, $\boldsymbol{Ar}$ の演算をすればよい. 回転変換によって得られるベクトルを求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ をベクトル $\boldsymbol{s}=\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$ に変換する 2 行 2 列の変換行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ. ただし, a,b は実数とする.

(鹿児島大 2005)　　(m20055411)

0.1074　次の級数について, 収束・発散を調べよ. 収束する場合, その値を求めよ.

(1) $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

(鹿児島大 2005)　　(m20055412)

0.1075　直交座標系における二つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ に対して，これらの外積とよばれるベクトル $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ は

$$\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}=\left(\ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\ \right) \tag{1}$$

で定義される．以下の問に答えよ．

(1) 三つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$ に対して以下の式 (2) を証明せよ．

$$(\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b})\cdot c=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2}$$

(2) 式 (2) を利用し、外積 $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とで張られる平面に垂直なベクトルであることを示せ.

(鹿児島大 2006)　　(m20065403)

0.1076　次の関数を微分せよ.

(1) $y=\sin x\cos 2x$　　(2) $y=\sin^{-1}x\quad\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$

(鹿児島大 2006)　　(m20065413)

0.1077　ベクトル $\boldsymbol{A_1},\boldsymbol{A_2},\boldsymbol{A_3}$ は互いに直交していることを示せ.

$$\boldsymbol{A_1}=\begin{pmatrix}\cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A_2}=\begin{pmatrix}\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A_3}=\begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2006)　　(m20065415)

0.1078　(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(a) $\left(x^2+2xy\right)dx+xydy=0$　　(b) $\left(xy^2+\sin x\right)dx+\left(x^2y+\cos y\right)dy=0$

(2) 次の微分方程式の完全解を求めよ.

$y''+4y'+3y=3e^{-x}$

(鹿児島大 2007)　　(m20075402)

0.1079　次の行列式と行列に関する問いに答えよ.

(1) 次の行列式の値を求めよ.　$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 1 & 2\end{pmatrix}$ とする．A^2, A^3, A^4, A^5 を求め，A^n を一般形で表せ.

(鹿児島大 2007)　　(m20075404)

0.1080　$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&-4\\5&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ のとき，AC, BC, BA を求めなさい．

(鹿児島大 2007)　　(m20075405)

0.1081　次の行列を計算しなさい．

(1) $\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&9\\2&7\end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}^{-1}$

(鹿児島大 2007)　　(m20075411)

0.1082　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+4x+3}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int\left(\cos^2x-\sin^2x\right)dx$

(4) $\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$　$(a>0,\ -a<x<a)$

(鹿児島大 2008)　　(m20085401)

0.1083　次の微分・積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\log\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|\right)$　　(2) $\displaystyle\int e^x\cdot\sin x\,dx$

(鹿児島大 2008)　　(m20085405)

0.1084　2 行 2 列の行列　$J=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$　$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$　がある．

(1) J の逆行列を求めなさい．

(2) $A^TJA=J$ を満たすとき，AJA^T を求めなさい．但し，A^T は A の転置行列である．

(鹿児島大 2008)　　(m20085408)

0.1085　(1) $\displaystyle\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)$ を x で微分せよ．　　(2) x^x を x で微分せよ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{3x}{x^2-x-2}\,dx$ を求めよ．　　(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin^2x}\,dx$ を求めよ．

(鹿児島大 2008)　　(m20085414)

0.1086　次の微分・積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\tan\frac{1}{x}\right)$　　(2) $\displaystyle\int_1^2\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx$

(鹿児島大 2009)　　(m20095405)

0.1087　行列 A, P を次の様にする時，以下の問いに答えなさい．

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1&3\\1&-1\end{pmatrix}$$

(1) $P^{-1}AP$ を計算しなさい．

(2) (1) の結果を用いて，A^n を求めなさい．（n は正の整数.）

(鹿児島大 2009)　　(m20095406)

0.1088　$y=\sin^{-1}x$　$\left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の導関数を求め，$y=\sin^{-1}\dfrac{1}{x}$ を微分せよ（$x>1$）．

(鹿児島大 2009)　　(m20095409)

0.1089 微積分に関する以下の問に答えよ.

(1) 次の微分を計算し，簡単な式で表せ.

(a) $\dfrac{d}{dx}\sin(\tan x)$ (b) $\dfrac{d}{dx}\left(\log 2x\cdot\tan x^2\right)$

(2) 次の不定積分を求めよ．ただし，a, b は任意定数とする.

(c) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+(a-b)x-ab}\,dx$ (d) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+a^2}$

(鹿児島大 2009) (m20095413)

0.1090 行列 $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ が,

$$A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\quad（\lambda：定数）\quad\cdots\cdots(a)$$

を満たす時，以下の問いに答えなさい.

(1) (a) 式を満たす 2 つの定数 λ（固有値）と 2 つのベクトル (x,y)（固有ベクトル）を求めなさい.

(2) (1) で求めた固有ベクトルを用いて，行列 A を対角化しなさい.

(鹿児島大 2009) (m20095418)

0.1091 次の微分を計算し, 簡単な式で表せ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\log(\cos x)$ (2) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}\right)$

(鹿児島大 2010) (m20105401)

0.1092 次の微分を求めよ.

$\dfrac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\right)$

(鹿児島大 2010) (m20105406)

0.1093 2 つの行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ がある時, 以下の問いに答えなさい.

(1) 行列 $\boldsymbol{P}$ の逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ を求めなさい.

(2) $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^n$（$n$：整数）を求めなさい.

(3) (2) の結果を用いて $\boldsymbol{A}^n$ を求めなさい.

(鹿児島大 2010) (m20105408)

0.1094 $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 4 & 9 & 14\\ 8 & 16 & 33\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}92\\ 209\\ 449\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$,

$L=\begin{pmatrix}l_{11} & 0 & 0\\ l_{21} & l_{22} & 0\\ l_{31} & l_{32} & l_{33}\end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix}1 & u_{12} & u_{13}\\ 0 & 1 & u_{23}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ とする.

方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を次の手順に従って解け.

(1) $A=LU$ を満たすような行列 L および U を求めよ.

(2) $L\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$ を満たすような $\boldsymbol{y}$ を求めよ.

(3) $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ を満たすような $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(室蘭工業大 2005)　　(m20055505)

0.1095 行列 E および J を以下のように定義する.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき, 行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$ および $B = \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix}$ として, 以下が成り立つことを示しなさい.

(1) $J^2 = -E$

(2) $AB = (a_1b_1 - a_2b_2)E + (a_1b_2 + a_2b_1)J$

(3) $A^tA = \left({a_1}^2 + {a_2}^2\right)E$ （ただし, A^t は, A の転置行列を表す）

(室蘭工業大 2005)　　(m20055511)

0.1096 行列 $C = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 10 & a \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) C が正則であるための条件を求めよ.

(2) C が正則のとき C の逆行列を求めよ.

(室蘭工業大 2005)　　(m20055515)

0.1097 $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ のとき AB, BA を求めよ.

(室蘭工業大 2005)　　(m20055516)

0.1098 以下のような行列 A, B が与えられている. AA^t および BB^t を求めなさい.
ただし, A^t は行列 A の転置行列, B^t は行列 B の転置行列を表す.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2006)　　(m20065503)

0.1099 行列 C の固有値とその固有ベクトルを求めなさい. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(室蘭工業大 2006)　　(m20065504)

0.1100 次の微分を計算せよ. $\dfrac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2-3x}\right)\right]$

(室蘭工業大 2006)　　(m20065510)

0.1101 つぎの行列 A に関し, 以下の問に答えよ. $A = \begin{pmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}$

(1) 次式が成り立つことを示せ. $\begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix}^2 = A$

(2) A の行列式を求めよ.

(室蘭工業大 2006) (m20065512)

0.1102 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $2A + 3B$ を計算しなさい. (2) AB , BA を求めなさい.

(室蘭工業大 2006) (m20065516)

0.1103 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ $(a > 1)$.

(室蘭工業大 2007) (m20075501)

0.1104 (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ のとき, BA を求めなさい.

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ のとき, $AX = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ を満たす行列 X を求めなさい.

(室蘭工業大 2007) (m20075503)

0.1105 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ 3 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するように x を求めなさい.

(2) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ が直交するように x を求めなさい.

(室蘭工業大 2007) (m20075504)

0.1106 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1, λ_2 と固有ベクトル u_1, u_2 を求めなさい.

(室蘭工業大 2007) (m20075505)

0.1107 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が直交行列であることを示しなさい.

(室蘭工業大 2007) (m20075506)

0.1108 次の複素数を実部と虚部に分け, $a + jb$（a, b は実数）の形で表せ. ただし, $j = \sqrt{-1}$ である.

(1) $\dfrac{5(1-j2)}{(1+j2)(1+j3)(2+j)}$ (2) $2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + j\dfrac{1}{2}\right)^8$

(室蘭工業大 2007) (m20075509)

0.1109 次の関数の導関数を求めなさい.

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

(室蘭工業大 2008) (m20085503)

0.1110 (1) 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と各々の固有値に対応する固有ベクトルを求めなさい.

(2) $\boldsymbol{P}$ を正則な正方行列として $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ のときに $\boldsymbol{A}$ の固有値と $\boldsymbol{B}$ の固有値は一致することを示しなさい.

(3) $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ として $\boldsymbol{B}$ の固有値と各々の固有値に対応する固有ベクトルを求めなさい．

(室蘭工業大 2008)　　(m20085509)

0.1111 括弧の中を埋めよ．全部で 8 箇所ある．

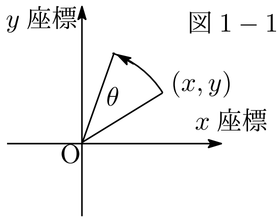


図 1 − 1

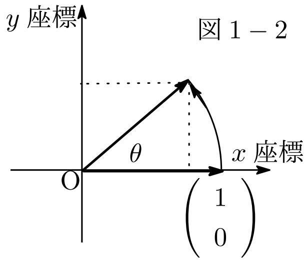


図 1 − 2

2 次元平面上の任意の点を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で表す（図 1-1 を参照する事）．

点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を原点 O の周りに角度 θ だけ回転（反時計回りを正とする，図 1-2 を参照）した点は $\begin{pmatrix} [ア\quad] \\ [イ\quad] \end{pmatrix}$ となる．

同様に考えると，点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ はは $\begin{pmatrix} [ウ\quad] \\ [エ\quad] \end{pmatrix}$ に移る．

よって任意の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を原点の周りに角度 θ だけ回転した点は，

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ なので，

$\begin{pmatrix} [オ\quad] & [キ\quad] \\ [カ\quad] & [ク\quad] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で与えられる．

(室蘭工業大 2008)　　(m20085511)

0.1112 次の微分，不定積分を計算せよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(xe^{-2x}\right)$

(2) $\displaystyle\int (\log x)^2\, dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x(x^2+12)}{x^4-16}\, dx$

(室蘭工業大 2009)　　(m20095501)

0.1113 行列に関する以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A, B, C, D を，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

として，行列の積 AB, CD, DC を計算せよ．

(2) 行列 X を，

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

として，その転置行列 ${}^tX$，および，固有和（トレース）$\mathrm{tr}(X)$ を，

$${}^tX = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{tr}(X) = x_{11} + x_{22}$$

と定義する．このとき，$\mathrm{tr}({}^tXX)$ を求めよ．

(室蘭工業大 2009)　　(m20095502)

0.1114　3 行 3 列の正方行列 A を以下のように定める．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ a & b & 3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

(1) 以下の 3 つの基本変形に関連して，行列式は以下の性質をもつ．

(a) 2 つの行を入れ換えると，行列式の値は -1 倍される．

(b) ある行の定数倍をほかの行に加えても，行列式の値は変わらない．

(c) ある行を c 倍すると，行列式の値も c 倍される．

上記の基本変形を利用して，A を上三角行列に変形せよ．ここで，上三角行列とは，行列の i 行 j 列成分（ただし，$i > j$）がゼロである行列のことである．

(2) A の行列式を求めよ．

(室蘭工業大 2009)　　(m20095503)

0.1115　(1) 次の微分を計算せよ．

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

(2) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(3) $f(x) = 3x^3 + 1$, $g(x) = x^4 - 5$ に対する合成関数 $h(x) = f(g(x))$ および $k(x) = g(f(x))$ の導関数 $h'(x), k'(x)$ をそれぞれ求めよ．

(室蘭工業大 2010)　　(m20105501)

0.1116　行列 A を $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ としたとき, 次の問いに答えよ．

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めよ．

(2) 逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) 行列 A の 2 乗 A^2 を求めよ．

(4) 行列 A の N 乗 A^N を求めよ．

(室蘭工業大 2010)　　(m20105502)

0.1117　直交座標の点 $P(x, y, z)$ の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$$

とする. また, スカラー関数 $f(x, y, z)$ を

$$f(x, y, z) = 2x + y + 3z$$

とする. このとき以下の問の答えよ. ただし, ∇ は次のベクトル演算子を表す.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{n}$ を $\boldsymbol{n} = \nabla f$ で定義するとき, $\boldsymbol{n} = (n_x,\ x_y,\ n_z)$ の形で表せ.

(2) 関数 $f(x, y, z)$ をベクトル $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{r}$ を用いて表せ.

(3) $f(x,y,z) = 2x + y + 3z = 5$ は平面を表す方程式である．この平面上にある 2 点 $P_1(x_1,\, y_1,\, z_1)$, $P_2(x_2,\, y_2,\, z_2)$ における位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_1 = (x_1,\, y_1,\, z_1)$, $\boldsymbol{r}_2 = (x_2,\, y_2,\, z_2)$ とするとき，ベクトル $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ の内積が $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}_2$ となることを示せ.

(4) ベクトル $\boldsymbol{n}$ が平面 $f(x,y,z) = 2x + y + 3z = 5$ と垂直になることを示せ.

(室蘭工業大 2010)　　(m20105503)

0.1118 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O$ が成り立つことを証明しなさい. ただし, a, b, c, d は実数であり, E を 2 次単位行列, O を 2 次零行列とする.

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ に対して B^5 を求めよ.

(3) 実数 x の n 次式を $x^n = (x^2 - x - 2)Q(x) + ax + b$ と表したときの係数 a および b を求めよ。ただし, $Q(x)$ は多項式であり, n は自然数とする.

(4) 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ に対して B^n を求めよ. なお, (1) の証明および (3) の答えを利用すること.

(室蘭工業大 2010)　　(m20105505)

0.1119 次の関数を x で微分せよ.

(1) $x^2 \sin x$　　　(2) $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^3$

(室蘭工業大 2010)　　(m20105508)

0.1120 2 次元ベクトル空間 R^2 上の線形変換 f は, ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ に移し, ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ をベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$ に移すとする. ただし, t は定数である. このとき, f を表す行列を求めよ. また, その行列が逆行列をもたないような t の値を求めよ.

(岡山県立大 2005)　　(m20055602)

0.1121 (1) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)$ を求めよ.　　(2) $f(x) = e^{\sin^{-1} x}$ を微分せよ.

(3) $\displaystyle\int \log(1 + x^2)dx$ を求めよ.

(岡山県立大 2006)　　(m20065601)

0.1122 行列 $\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$ の階数を求めよ．ただし，a, b は実数とする.

(岡山県立大 2006)　　(m20065602)

0.1123 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値の 1 つが 0 とする.

(1) a を求めよ.　　　(2) 0 以外の固有値を求めよ.

(岡山県立大 2008)　　(m20085602)

0.1124 行列 A について, 以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) $|A|$ の値を求めよ.

(2) A の逆行列を求めよ.

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(香川大 2005) (m20055702)

0.1125 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) P の逆行列を求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ を求めよ.

(3) (2) の結果を用いて, A^n（n は自然数）を求めよ.

(香川大 2010) (m20105702)

0.1126 行列 $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$ の階数が 1 となる (a, b, c) の組を, すべて求めよ.

(島根大 2005) (m20055803)

0.1127 逆正弦関数 $\sin^{-1} x$ と逆余弦関数 $\cos^{-1} x$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 次の値を求めよ.

(i) $\sin^{-1}(-1)$, (ii) $\cos^{-1} 0$, (iii) $\sin^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (iv) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

(2) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ.

(3) $y = \sin^{-1} x$ の微分と不定積分を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}$ の値を求めよ.

(島根大 2005) (m20055806)

0.1128 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ について, 以下の設問に答えよ.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルの第 1 成分の大きさが 1 となるように定めよ.

(2) 設問 (1) で求めた固有ベクトルと, それらを行列 $\boldsymbol{A}$ によって 1 次変換したベクトルを, 直交座標系 $O - xy$ 上に原点 O を始点として描け.

(3) ある四辺形を行列 $\boldsymbol{A}$ によって 1 次変換した像が, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1. -1)$ を頂点とする正方形になった. 変換前の四辺形のすべての頂点を求め, その四辺形を直交座標系 $O - xy$ 上に描け.

(4) 設問 (3) で求めた四辺形の面積を求めよ.

(島根大 2005) (m20055809)

0.1129 次の問に答えよ.

(1) 次の連立 1 次方程式が解をもつような a, b の値を求めよ. また, その時の解も求めよ.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 1 \\ -4x_1 + 2x_2 - 10x_3 + 12x_4 = a - 7 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = b + 2 \end{cases}$$

(2) 次の連立 1 次方程式が自明でない解をもつような a の値を求めよ.

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + (a+2)x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + ax_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 2ax_4 = 0 \end{cases}$$

(3) 次の解空間の次元と 1 組の基を求めよ.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 0 \end{array} \right\}$$

(島根大 2005)　　(m20055810)

0.1130 関数 $f(x) = (ax+b)e^{cx} \quad (c \neq 0)$ を考える. 以下の問に答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$, 2 階導関数 $f''(x)$, さらに n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を求めよ.

(3) $0 < c < 1$ のとき , $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nc^n = 0$ を証明せよ.

$\left(\text{ヒント : } c = \dfrac{1}{1+\alpha} \quad (\alpha > 0) \quad \text{とおいて } (1+\alpha)^n \text{ の 2 項展開を考えよ.} \right)$

(4) $0 < c < 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} \left(f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(n)}(x) \right)$$

を求めよ.

(島根大 2005)　　(m20055811)

0.1131 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ について, 以下の設問に答えよ.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1 , λ_2 を求めよ.

(2) 固有値 λ_1 , λ_2 それぞれに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ を, 長さ 1 となるように求めよ.

(3) 設問 (2) で求めた $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ を列ベクトルとみなして構成された行列 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1 \ \ \boldsymbol{p}_2)$ と, その逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ を求めよ.

(4) $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}^{-1}$ を用いて $\boldsymbol{A}$ を対角行列に変換せよ.

(島根大 2005)　　(m20055815)

0.1132 a, b, c を 0 でない実数とする．このとき，行列 $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ の階数が 2 となるための必要十分条件を求めよ．

(島根大 2006)　　(m20065804)

0.1133 4 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ に対して，これらの 1 次結合の全体を $\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ で表すことにする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ は $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ の 1 次結合であるなら， $\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ であることを示せ．

(3) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

とするとき，$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5 \rangle$ の基底を 1 組求めよ．

(島根大 2006) (m20065805)

0.1134 (1) $f(x) = Ae^{-kx^2}$ について $\dfrac{d}{dx}f(x)$ および $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ を求めよ．

(2) $f(x) = Ae^{-kx^2}$ が微分方程式 $\left(\frac{d^2}{dx^2} - 4k^2x^2\right) f(x) = Cf(x)$ を満たすとき，C を求めよ．

(島根大 2006) (m20065814)

0.1135 (1) $\phi(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2} + xy - z$ について $\nabla\phi = \left(\dfrac{\partial}{\partial x},\ \dfrac{\partial}{\partial y},\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right)\phi$ を求めよ．

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = (\boldsymbol{A}_x,\ \boldsymbol{A}_y,\ \boldsymbol{A}_z) = (-y^3,\ x^3,\ 0)$ について，

$$\nabla \times\ \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \boldsymbol{A}_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \boldsymbol{A}_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \boldsymbol{A}_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルを表す．

(島根大 2006) (m20065815)

0.1136 (1) 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ -5 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

(2) a を実数とし,

$$A = \begin{pmatrix} a & -3 & 1 & 1 \\ 5 & -8 & 3 & a \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(a) A の階数が 2 となるような a の値を求めよ.

(b) $V = \{v \in \boldsymbol{R}^4 \mid Av = 0\}$, $W = \{Av \mid v \in \boldsymbol{R}^4\}$ とおく. このとき, V は $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間, W は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間であることを示せ.

(c) (a) のとき, V, W の基底を一組ずつ求めよ.

(d) (a) のとき, $\{v_1,\ v_2\}$ を V の任意の基底とする. また, W の任意の基底 $\{w_1,\ w_2\}$ に対して, $v_3,\ v_4\ (\in \boldsymbol{R}^4)$ を

$$w_1 = Av_3\ , \quad w_2 = Av_4$$

となるような任意のベクトルとする. このとき, $\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\}$ は $\boldsymbol{R}^4$ の基底であることを示せ.

(島根大 2008) (m20085801)

0.1137 次の重積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^3 \int_1^2 \left(2xy - x^2\right)\, dydx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{2y} y^2 e^{xy}\, dxdy$

(島根大 2008) (m20085808)

0.1138 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ.

(1) R^3 から R^3 への写像 f_A を

$$f_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

と定義する．f_A は線形写像であることを示せ.

(2) f_A が単射とならないような a の値を求めよ.

(3) f_A の像の次元は 2 以上であることを示せ.

(4) A は 2 を固有値としてもつことを示せ.

(5) A が 1 を固有値としてもつとき，次の (a),(b) に答えよ.

(a) a の値を求めよ.

(b) A は対角化可能であることを示せ.

(島根大 2009) (m20095801)

0.1139 (1) 関数 $f(x) = (x+1)e^{-2x}$ について，$f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ．また，3 以上の整数 n に対して第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $y = x^x \ (x > 0)$ の極値を求めよ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \sin x\, dx$ の値を求めよ.

(4) 曲線 $y = x \cos x \ \left(0 \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2}\right)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ.

(島根大 2009) (m20095802)

0.1140 3 次縦ベクトル全体のなすベクトル空間を R^3 とする,

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

とする. 線形写像 $f : R^3 \to R^3$ は, 次を満たすものとする.

$$f(\boldsymbol{v_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{v_2}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{v_3}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

このとき, 次の問に答えよ.

(1) $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ は R^3 の基底であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}$ の 1 次結合で表せ.

(3) $f(\boldsymbol{x})$ を求めよ.

(4) f の像の 1 組の基底を求めよ.

(5) f の核の次元を求めよ.

(6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ は 0 を固有値としてもつことを示せ.

(島根大 2010)　　(m20105801)

0.1141 (1) 次の行列 A の固有値と, それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルを大きさが 1 になるように規格化すること.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 設問 (1) の行列 A に対し, ${}^tPAP$ が対角行列となるような直交行列 P を求めよ. ただし, ${}^tP$ は P の転置行列を表す.

(島根大 2010)　　(m20105807)

0.1142 次の行列 A について以下の設問に答えよ. ただし, $0 < a < 1/2$ とする.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$

(1) A^2 を計算せよ.

(2) $|A|$ を計算せよ.

(3) A^{-1} を求めよ.

(4) A の固有値と, それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルを大きさが 1 になるように規格化すること.

(5) A^{-1}, A^2 および A^n の固有値を求めよ. ただし, n は自然数とする.

(6) A^n を求めよ.

(7) $\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ.

(島根大 2010)　　(m20105812)

0.1143 行列 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき.

(1) 行列式 $\det \boldsymbol{A}$ を求めよ.

(2) 逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めよ.

(3) 平面 $-3x + 2y + 2z = 1$ は，一次変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

によって，どのような図形に移るか．その方程式を示せ.

(首都大 2003)　　(m20035901)

0.1144 行列 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値及び固有ベクトルを求めよ.

(2) 行列 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ が対角行列となるような，行列 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ を求めよ．

(3) $\boldsymbol{A}^k$ を求めよ．

(首都大 2003)　　(m20035903)

0.1145 $m \times\ n$ 行列のランク（階数）はその行列の線形独立（一次独立）な列ベクトルの最大個数等しい．
このとき

行列 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ のランクを求めよ．解答には，その理由も述べよ．

(首都大 2004)　　(m20045902)

0.1146 $n \times\ n$ 正方行列 A の特性多項式は

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

である.（ただし，係数 $a_{n-1}, \cdots, a_0$ は定数であり，I は単位行列である.）
ここでこの多項式の λ に行列 A を代入した行列多項式は

$$f_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0$$

となる.（これをケイリーハミルトンの定理という）

<u>この定理を用いて</u>

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ のときに, 次の行列をそれぞれ求めよ.

(1) A^3

(2) A^{-1}

<u>注意：この定理を用いたことがわかるように解答すること</u>

(首都大 2004)　　(m20045903)

0.1147 (1) 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式の値を求めよ.

(2) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ が与えられたとき，$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ を満たす行列 $\boldsymbol{B}$ を求めよ.
ただし，$\boldsymbol{I}$ は単位行列である.

(首都大 2005)　　(m20055901)

0.1148 $\boldsymbol{V}$ が $2 \times\ 2$ 行列のベクトル空間であるとき, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，
$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \boldsymbol{V}$ が線形従属であるか, または線形独立であるかを判定せよ（その理由も記述せよ）.

(首都大 2005)　　(m20055902)

0.1149 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ が与えられているとき，次の問に答えよ.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を全て求めよ.

(2) その全ての固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) 二次形式 $\Phi = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ の標準形が $\Phi = a{\xi_1}^2 + b{\xi_2}^2$ で与えられるとき，係数比 $\dfrac{b}{a}$ を求めよ．
ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^T$ は直交行列 $\boldsymbol{U}$ を用いて $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\xi}$ で表されるベクトルとする．

(首都大 2005)　　(m20055903)

0.1150 次の行列が逆行列をもつかどうか判定し，もつ場合はそれを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(滋賀県立大 2005)　　(m20056003)

0.1151 (1) $y = e^{x^x}\ (= \exp(x^x))$ の導関数を求めよ．

(2) $f(x) = \tan x$ の逆関数 $f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$ の導関数を求めよ．

(滋賀県立大 2007)　　(m20076001)

0.1152 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 4 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ が正則か否かを行列式の値を計算して判定し，正則であればその逆行列を求めよ．

(滋賀県立大 2007)　　(m20076003)

0.1153 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ．　(滋賀県立大 2008)　　(m20086003)

0.1154 次の形の微分方程式を同次形という．

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

(1) このような同次形の微分方程式は，$u = \dfrac{y}{x}$ とおくことによって，変数が x，未知関数が $u = u(x)$ の微分方程式としたとき，変数分離形になることを示せ．

(2) $y' = \dfrac{x - y}{x + y}$ の解のうち $(x, y) = (2, 3)$ を通るものを求めよ．

(滋賀県立大 2009)　　(m20096002)

0.1155 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(滋賀県立大 2009)　　(m20096003)

0.1156 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(x,\ y)$ と点 $(x + dx,\ y + dy)$ の間の無限小長さ ds は

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

によって与えられる. さらに, 曲線に沿って $a \leq x \leq b$ の長さ L_1 は, 次の式で与えられる.

$$L_1 = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx$$

(1) 曲線がパラメータ t によって

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

のように表されるとき、パラメータ $\alpha \leq t \leq \beta$ に対応する曲線の長さ L_2 が

$$L_2 = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

で与えられることを示せ.

(2) 次のパラメータ t によって表される曲線 $C : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \dfrac{1}{3}t^3 \end{cases}$ $(0 \leq t \leq 2)$ の長さを求めよ.

(滋賀県立大 2010) (m20106001)

0.1157 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & k \end{pmatrix}$ が正則行列となるための k に対する条件を求めよ．また, $k = 0$ としたときの A の逆行列を求めよ.

(滋賀県立大 2010) (m20106003)

0.1158 以下の問に答えよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ とする．A が正則行列かどうか調べ，正則ならば A^{-1} を求めよ.

(2) $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ -3 & 9 & -3 \end{pmatrix}$ とする.

(a) B の固有値および固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルの第 1 成分が 1 となるようにせよ.

(b) $P^{-1}BP$ が対角行列となるような P，およびそのときの $P^{-1}BP$ を求めよ.

(宇都宮大 2004) (m20046101)

0.1159 (1) 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．A の階数（ランク）を求めよ.

(2) 行列 B を $B = \begin{pmatrix} \alpha & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ とする.

(a) $\det B = 0$ となるように α を求めよ.

(b) この α に対する B の固有値および対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルの第 1 成分が 1 となるようにせよ.

(宇都宮大 2005) (m20056101)

0.1160 (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ a & a & 1 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$ としたとき, $|A| = -2$ となった. この時の a の値を求めよ.

(2) a が (1) の条件を満たすとき, A の固有値および固有ベクトルを求めよ. ただし, a が 2 つ以上の値を取るときは最も小さい値を採用する. また, 固有ベクトルの第 1 成分が 1 となるようにせよ.

(3) (2) で求めた固有値および固有ベクトルを用いて, A を対角化せよ. その時の対角化行列も求めよ.

(宇都宮大 2010) (m20106102)

0.1161 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-3x-4}\,dx$ を求めよ.

(2) 次の定積分の値を求めよ. ただし, a は正の定数である. $\displaystyle\int_0^a x\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}dx$

(宇都宮大 2010) (m20106106)

0.1162 図 1 のように，点 A, B, C, D が xy 軸平面上にある．原点 O とし，

各座標を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と示すとき，$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

また，$\overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OA}$ を原点を中心として，反時計方向に角度 θ 回転させたものである．$\overrightarrow{OD}$ は $\overrightarrow{OC}$ を同様に角度 θ 回転させた点である．

以下の問に答えよ．

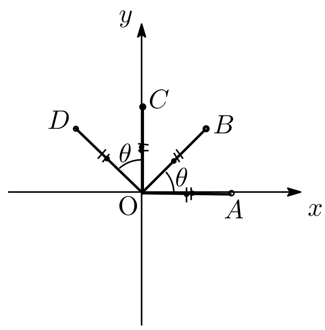


図 1:xy 軸平面

(1) 点 B, D の座標を求めよ．

(2) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$ を計算せよ．

(3) 原点を中心とした長さ 1 である任意のベクトル $\overrightarrow{OE}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ は，

$\overrightarrow{OA}$ を角度 α 回転させることによって得られる．角度 α 回転させる一次変換を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

と表すとき，a, b, c, d を求めよ．

(4) $\cos(\alpha+\beta)$ を $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta$ を用いて表せ．

(工学院大 2003) (m20036206)

0.1163 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ と $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ において以下の値をそれぞれ求めよ．

(1) A^2+B^2

(2) $(A+B)(A-B)$

(工学院大 2004) (m20046206)

0.1164 (1) 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 求められた逆行列 A^{-1} を用いて，次の連立方程式を解け．

$$\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ x+2y+z=1 \\ x+y+2z=5 \end{cases}$$

(工学院大 2005) (m20056205)

0.1165 行列 $A=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ において次の計算を行え．

(1) AB

(2) BA

(3) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(工学院大 2005)　　(m20056207)

0.1166 2 次実行列 $A = \begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.　　(2) $p = q = \dfrac{1}{2}$ のとき, A^n $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ を求めよ

(はこだて未来大 2007)　　(m20076301)

0.1167 実ベクトルを空間 $\boldsymbol{R}^3$ において,$\boldsymbol{R}^3$ の部分集合　$V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ -a \\ b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \boldsymbol{R} \right\}$　を考える.

(1) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ ならば $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$ となることを示せ.

(2) V が $\boldsymbol{R}^3$ の部分ベクトル空間であることを示せ.　　(3) V の直交補空間を求めよ.

(はこだて未来大 2007)　　(m20076302)

0.1168 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{(\log x)^3}{\sqrt{x}}$

(はこだて未来大 2007)　　(m20076303)

0.1169 2 次の正方行列　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$　に対して，以下の問いに答えよ.

(1) A の対角成分の和と A の固有値の和は等しいことを示せ.

(2) A をその固有値と固有ベクトルを用いて対角化せよ.

(はこだて未来大 2008)　　(m20086301)

0.1170 n を自然数とし，関数 $f_n(x) = \dfrac{1}{n} \sin(nx)$ を考える．以下の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} f_n(x)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{df_n}{dx}(x) = \frac{d}{dx} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right)$ が成立する x の値を，区間 $[0,\ \pi]$ から求めよ.

(はこだて未来大 2008)　　(m20086303)

0.1171 次の行列 A について，以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の階数 $\mathrm{rank} A$ を求めよ.

(3) $\{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\}$ が平面となることを示せ.

(はこだて未来大 2009)　　(m20096301)

0.1172 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) A^4 を求めよ．

(2) A^{-1} を求めよ．

(はこだて未来大 2009)　　(m20096302)

0.1173 $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対する正接関数 $\tan y$ の逆関数を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ とする．すなわち，

$$y = \mathrm{Tan}^{-1}x \iff x = \tan y \qquad \left(x \in (-\infty,\ \infty),\ y \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Tan}^{-1}1$ の値を求めよ．

(2) $\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{3\sqrt{3}}{7}$ の値を求めよ．
ただし，必要であれば，次の正接関数に対する加法定理は既知として用いてよい．

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

(はこだて未来大 2009)　　(m20096303)

0.1174 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) (1) で求めた固有値に対応する固有ベクトルのうち, 成分がすべて整数であるものをそれぞれ一つ求めよ.

(はこだて未来大 2010)　　(m20106301)

0.1175 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 1 & b^2 & (c+a)^2 \\ 1 & c^2 & (a+b)^2 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) $a + b + c = 0$ のとき, A の行列式の値を求めよ.

(2) A の行列式を因数分解せよ.

(はこだて未来大 2010)　　(m20106302)

0.1176 行列 $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \\ 9 & 10 & 8 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(東京海洋大 2007)　　(m20076402)

0.1177 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(東京海洋大 2007)　　(m20076403)

0.1178 行列 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(東京海洋大 2008)　　(m20086402)

0.1179 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(東京海洋大 2009)　　(m20096402)

0.1180 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2x-1}{x^2+1}\,dx$ を計算せよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^x \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2009)　　(m20096403)

0.1181 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 7 & 5 \\ 5 & 8 & 16 & 1 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(東京海洋大 2010)　　(m20106401)

0.1182 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(東京海洋大 2010)　　(m20106402)

0.1183 行列 $\begin{pmatrix} 17 & -15 \\ -15 & 17 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(和歌山大 2007)　　(m20076501)

0.1184 線形変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって，直線 $x+2y=1$ がどのような図形に移されるか，その図形の表す式を求めなさい.

(和歌山大 2007)　　(m20076502)

0.1185 次の行列 A について，以下の各問いに答えなさい．ただし，k は実数である.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & k & 5 \end{pmatrix}$$

(1) 逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(2) 行列 A のすべての固有値と，絶対値が最大の固有値に対する固有ベクトルを求めなさい.

(3) 行列 A の第 2 列，第 3 列をそれぞれ $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ とするとき，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ となるような k の値を求めなさい.

(和歌山大 2008)　　(m20086501)

0.1186 $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ とするとき, 次の問いに答えよ．ただし, $a \neq b$ である.

(1) P の行列式の値と逆行列とを求めなさい.

(2) PQP^{-1} の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(和歌山大 2010)　　(m20106501)

0.1187 次の微分方程式の一般解を求め, さらに, 与えられた初期条件を満たす特殊解を求めなさい.

(1) $y\dfrac{dy}{dx} = x^3$,　$y(1) = 1$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \cos 3x$,　$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$,　$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

(和歌山大 2010)　　(m20106503)

0.1188 関数 $f_n(x,y) = \sin\sqrt{x^n + y^n}$（$n$：自然数）について，次の問いに答えよ,

(1) 1 階偏導関数 $\dfrac{\partial f_n}{\partial x}$ を求めよ.

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{f_1(x,0)}{\sqrt{x}}\,dx$ を求めよ.

(3) 自然数 m に対して $I_m = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{(f_1(x,0))^m}{\sqrt{x}}\,dx$ とするとき，I_m と I_{m-2} の関係式を求めよ．また m は奇数として I_m を求めよ.

(4) $D = \left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq \dfrac{\pi^2}{4}\right\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D f_2(x,y)\,dxdy$ を求めよ.

(京都府立大 2008)　　(m20086702)

0.1189 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，次の問いに答えよ．$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A の固有値，固有ベクトルを求めよ.

(2) $A^4 + 3A^3 - 6A^2 - 26A - 12I$ を求めよ.

(3) $(A^4 + 3A^3 - 6A^2 - 26A - 12I)^{-1}$ を求めよ.

(京都府立大 2008)　　(m20086703)

0.1190 xy 平面上において, 原点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と, 放物線 $C_2 : y = \dfrac{2}{3}x^2 - a\ (a > 1)$ を考える. C_2 の接線のうち, 傾きが $\tan\theta$ となるものを l とし, C_2 との接点を P とする. ただし, θ は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする. また, 原点 O を通り, l と直交する直線を m とし, m と円 C_1 との交点のうち第 4 象限の点を Q とする.

(1) 直線 l の傾きが $\sqrt{3}$ であるとき, θ の値を求めよ. また, このときの点 P の座標が $\left(\dfrac{3}{4}\sqrt{3},\ \dfrac{9}{8} - a\right)$ となることを示せ.

(2) 直線 l の傾きが $\sqrt{3}$ であるとき, 直線 m を表わす方程式を求めよ. また, 点 Q の座標を求めよ.

(3) 3 点 $O,\ P,\ Q$ が同一直線上に並ぶための必要十分条件は $\tan\theta = \sqrt{\dfrac{8}{3}a - 2}$ であることを示せ.

(4) $a = \dfrac{9}{8}$ のとき, C_1 上の点と C_2 上の点を結ぶ線分の長さの最小値を求めよ.

(東京工科大 2010)　　(m20106907)

0.1191 次の連立微分方程式の一般解を求めよ. 途中の計算手順を詳しく記述すること.

$$x\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(北海道大 2011)　　(m20110101)

0.1192 以下に示す行列 P と A について各設問に答えよ. 途中の計算手順を詳しく記述すること.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

(1) 行列 P の固有値を求めよ.

(2) 行列 A を, P, a, b, c, d および単位行列 E を用いて表せ.

(3) 行列 A の固有値を求めよ.

(4) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(北海道大 2011)　　(m20110104)

0.1193 次の対称行列について, 以下の設問に答えよ.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ は $\mathbf{A}$ の固有ベクトルの一つであることを示し, 対応する固有値を求めよ.

(2) $\mathbf{A}$ の固有ベクトルのうち, (1) で与えられた $\boldsymbol{x}_1$ を除くもの 2 つ $(= \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3)$ を挙げよ. ただし, それらの大きさを $|\boldsymbol{x}_2| = |\boldsymbol{x}_3| = 1$ とし, 3 つの固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3$ が互いに直交するものを選ぶこと.

(3) $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \boldsymbol{\Lambda}$ ($\boldsymbol{\Lambda}$: 対角行列) となるような直交行列 $\mathbf{P}$ を求め, これを用いて $\mathbf{A}^n$ を計算せよ.

(北海道大 2013)　　(m20130101)

0.1194 微分方程式と周期関数について, 以下の設問に答えよ. 途中の計算手順も, 詳しく記述すること.

(1) 次の微分方程式を解き, 一般解 $y(x)$ を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 10y = 0$$

(2) 次の微分方程式を解き, 一般解 $y(x)$ を求めよ. なお, n は 1 以上の整数である.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 10y = \cos nx$$

(3) 関数 $g(x)$ は，周期 2π の周期関数であり，原点を含む 1 周期は次式で表される．
この関数をフーリエ級数に展開せよ．

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi^2}{8}\left(1+\dfrac{2x}{\pi}\right) & (-\pi\leq x<0)\\ \dfrac{\pi^2}{8}\left(1-\dfrac{2x}{\pi}\right) & (0\leq x<\pi)\end{cases}$$

(4) 次の微分方程式を解き，一般解 $y(x)$ を求めよ．なお，右辺は (3) の周期関数 $g(x)$ である．

$$\frac{d^2y}{dx^2}+10y=g(x)$$

(北海道大 2013)　　(m20130102)

0.1195 複素数に関する以下の設問に答えよ．

(1) z を複素数，$\overline{z}$ を z の複素共役とするとき，次式が成り立つことを示せ．ただし，$Re[z]$ は z の実数部分を表す．

$$Re[z]=\frac{1}{2}\left(z+\overline{z}\right)$$

(2) 次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$|z|\geq|Re[z]|\geq Re[z]$$

(3) 複素数 z_1 , z_2 に対して次の 2 式が成り立つことを，それぞれ証明せよ．

$$|z_1\overline{z}_2|=|z_1|\,|z_2|$$

$$|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$$

(4) 複素数 $z=x+iy$　(x,y は実数，i は虚数単位) に対し，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\left|e^{2z+i}+e^{iz^2}\right|\leq e^{2x}+e^{-2xy}$$

(北海道大 2013)　　(m20130103)

0.1196 2 次の正方行列 A による 1 次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を考える．ただし, A, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の要素はすべて実数である．このとき，以下の設問に答えよ．なお，途中の計算手順を詳しく記述すること．

(1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ で表される 4 つの点の像を求めよ．また，この 4 つの点を頂点とする四角形の面積が，1 次変換前と比較して 1 次変換後に何倍になるかを求めよ．ただし，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ を頂点とする平行四辺形の面積は $|ad-bc|$ で与えられる．

(2) A を直交行列 $\begin{pmatrix} r & -s \\ s & r \end{pmatrix}$(ただし，$r^2+s^2=1$) とする．このとき，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ で表される 4 つの点の像を求めよ. また，この 4 つの点を頂点とする四角形の面積が, 1 次変換前と比較して 1 次変換後に何倍になるかを求めよ．

(3) $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，A は対称行列である．A を直交行列を用いて対角化せよ．

(4) (3) と同じく，$A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表される 4 つの点の像を考える．この 4 つの点を頂点とする四角形の面積が，1 次変換前と比較して 1 次変換後に何倍になるかを求めよ．

(北海道大 2014)　　(m20140102)

0.1197 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ で定める．

(1) A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) n は自然数とする．A^n を求めよ．

(北海道大 2017)　　(m20170105)

0.1198 変数 x, y, z の連立 1 次方程式

$$(*)\qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -a & 1-a & 0 \\ 1+2a & 1+a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a-2 \end{pmatrix}$$

に対して，以下の問いに答えよ．

(1) 連立 1 次方程式 $(*)$ が一意的な解を有するための a に関する必要十分条件を求めよ．

(2) 連立 1 次方程式 $(*)$ が解をもたないための a に関する必要十分条件を求めよ．

(3) 連立 1 次方程式 $(*)$ が無限に多くの解を有するための a に関する必要十分条件を求めよ．

(北海道大 2017)　　(m20170106)

0.1199 次の三つの 3 次元ベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ に関して以下の設問に答えなさい．

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) これらのベクトルが一次独立となるとき，a が満たすべき条件を求めなさい．ただし，a は実数とする．

(2) $a = -1$ のとき，次の等式を満たす行列 $\boldsymbol{A}$ を求めなさい．

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(北海道大 2017)　　(m20170108)

0.1200 次の行列 $\boldsymbol{A}$ に関して以下の設問に答えなさい．ただし，a と b は実数とする．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -b^2 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ が異なる二つの固有値をもつための条件を示しなさい．

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値が 2 と 4 のとき，a と b を求めなさい．

(3) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値が 2 と 4 のとき，A^n を求めなさい．ただし，n は自然数とする．

(北海道大 2017)　　(m20170109)

0.1201 $I_n = \displaystyle\int_0^\infty x^n \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx$　（n は 0 または自然数，a は正の定数）とする．

以下の問いに答えなさい．

(1) $I_0 = \displaystyle\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx$ の値を a を用いて表しなさい．

(2) $I_n = \displaystyle\int_0^\infty x^n \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx$ の値を a と n を用いて表しなさい．

(北海道大 2017)　　(m20170110)

0.1202 次の級数の収束，発散を調べ，収束する場合はその値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{3^{n-1}} + 3\left(-\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3(n+2)}$

(北海道大 2018)　　(m20180104)

0.1203 次の行列 A について，以下の設問に答えなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値を求めなさい．

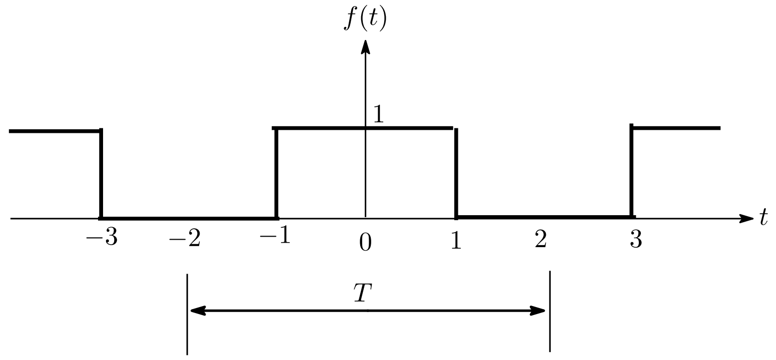
(2) 各固有値に属する固有ベクトル（ただし大きさが 1）を求めなさい．

(北海道大 2020)　　(m20200103)

0.1204 次の図のような矩形パルス（周期 $T = 4$）をフーリエ級数展開するとき，

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos\left(2\pi\frac{n}{T}t\right) + b_n \sin\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)\right\}$$

で表すことができる．以下の設問に答えなさい．



(1) a_0，a_n および b_n を T を用いた式で表しなさい．

(2) $T = 4$ のときの a_0，a_n および b_n を求めなさい．

(北海道大 2022)　　(m20220104)

0.1205 $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, $D: 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4$ を求めよ.

$\left(\quad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \text{とおくとよい.} \quad \right)$

(北見工業大 2011)　　(m20110205)

0.1206 次の行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(北見工業大 2011)　　(m20110206)

0.1207 次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が一次従属であるとき a の値を求めよ.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

(北見工業大 2012)　　(m20120208)

0.1208 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ.

(1) 行列式 $|A| = 0$ となる x を求めよ.

(2) $x = 2$ とするとき逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2013)　　(m20130206)

0.1209 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 3 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $|A| = 0$ となる x を求めよ.

(2) $x = -1$ のとき，A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2014)　　(m20140204)

0.1210 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする．ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の 1 次結合で表せ.

(北見工業大 2014)　　(m20140205)

0.1211 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \tan x dx \quad \left(\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\text{である.}\right)$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx$

(北見工業大 2015)　　(m20150204)

0.1212 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする.

等式 $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b}$ が成り立つような係数 x_1, x_2, x_3 を求めよ.

(北見工業大 2015)　　(m20150205)

0.1213 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ とする. ベクトル $\boldsymbol{a}$ をベクトル $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の一次結合 $h\boldsymbol{b} + k\boldsymbol{c}$ で表すとき, 係数 h, k を求めよ

(北見工業大 2016)　　(m20160204)

0.1214 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ とする. 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2016)　　(m20160205)

0.1215 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2017)　　(m20170206)

0.1216 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2018)　　(m20180205)

0.1217 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする. 等式 $x\boldsymbol{v}_1 + y\boldsymbol{v}_2 + z\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{c}$ をみたす x, y, z を求めよ.

(北見工業大 2018)　　(m20180206)

0.1218 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2019)　　(m20190205)

0.1219 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする.

等式 $x\boldsymbol{v}_1 + y\boldsymbol{v}_2 + z\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{c}$ をみたす x, y, z を求めよ.

(北見工業大 2019)　　(m20190206)

0.1220 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det A$ と逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2019)　　(m20190212)

0.1221 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2022) (m20220206)

0.1222 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det B$ を求めよ.

(北見工業大 2022) (m20220207)

0.1223 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ で表される xyz 空間内の線形変換を f とする．次の問いに答えなさい.

(1) 線形変換 f によって直線 $\ell : x-1 = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z+1}{3}$ がどのような図形に移されるか答えなさい.

(2) 線形変換 f によって平面 $\alpha : x+y+z=1$ がどのような図形に移されるか答えなさい.

(3) 逆変換 f^{-1} を表す行列を求めなさい.

(4) 線形変換 f によって平面 $\beta : x+y=1$ に移されるもとの図形を求めなさい

(岩手大 2011) (m20110302)

0.1224 $a^2+b^2=5\,,\, a>0\,,\, b<0$ であるとき， 次の微分方程式について以下の問いに答えなさい.

$$(axy - e^x \cos y)\; dy = \left(e^x \sin y + by^2\right)\; dx$$

(1) この微分方程式が完全微分方程式であるときの a および b の値を求めなさい.

(2) (1) の結果を用いて，この微分方程式を解きなさい.

(岩手大 2011) (m20110304)

0.1225 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$， $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ に関して，次の問いに答えなさい.

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めなさい.

(2) 行列 B, C と 2 次の単位行列 E に関して $BC = E$ が成り立つとき，行列 C を求めなさい.

(3) 行列 B の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(4) 行列 B を対角化しなさい.

(岩手大 2012) (m20120302)

0.1226 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & b & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい．ただし，a, b は定数とする.

(1) 定数 a, b を求めなさい.

(2) 行列 A の固有値を求めなさい.

(3) 行列 A の固有ベクトルを求めなさい.

(岩手大 2013) (m20130302)

0.1227 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 固有値を求めなさい.

(2) 行列 A を直交行列により対角化しなさい.

(3) $X^2 - E = A$ を満たす行列 X をひとつ求めなさい.

(岩手大 2014) (m20140302)

0.1228 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 固有値を求めなさい.

(2) 固有ベクトルを求めなさい.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような行列 P を求め，A を対角化しなさい.

(4) A^n を求めなさい．ただし，n は自然数とする.

(岩手大 2015) (m20150302)

0.1229 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$ を考える．$B' = AB = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$，$C = AC$ であるとき，次の問いに答えなさい

(1) a, b, c, d の値をそれぞれ求めなさい.

(2) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(3) $D = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ に対し $D' = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = AD$ であるとき，逆行列 A^{-1} を用いて u, v の値をそれぞれ求めなさい.

(4) 行列 A の固有値，および，それに属す固有ベクトルを求めなさい．ただし，固有ベクトルの大きさは 1 とする.

(岩手大 2016) (m20160302)

0.1230 行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい.

(1) A の行列式を求めなさい.

(2) A の各成分の余因子を求めなさい.

(3) A は正則であるかどうかを述べなさい，また，正則ならば，A の逆行列を求めなさい.

(岩手大 2017) (m20170302)

0.1231 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$， $B = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$， $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(2) $AB = C$ であるとき，逆行列 A^{-1} を用いて u, v, w の値をそれぞれ求めなさい.

(3) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めなさい.

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように行列 P を求め，A を対角化しなさい.

(岩手大 2018)　　(m20180302)

0.1232 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，ベクトル $\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 行列 A のランク（階数）rank (A) が 3 であることを示しなさい.

(2) $\boldsymbol{e}_x{}' = A\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y{}' = A\boldsymbol{e}_y$ であるとき，2 つのベクトル $\boldsymbol{e}_x{}'$, $\boldsymbol{e}_y{}'$ を二辺とする平行四辺形の面積を求めなさい.

(3) 行列 A の固有値，および，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めなさい.

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように行列 P を求め，A を対角化しなさい.

(岩手大 2019)　　(m20190302)

0.1233 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について 次の問に答えなさい.

(1) 次の等式を満たすことを示しなさい.

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$

ただし，E は単位行列，O は零行列である.

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ のとき，$A^4 - 5A^3 + 10A^2 + 7A + 3E$ を求めなさい.

(岩手大 2020)　　(m20200302)

0.1234 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 39 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 行列 A のランク（階数）rank(A) が 3 であることを示しなさい.

(2) $AB = C$ であるとき，行列を用いて x, y, z の値をそれぞれ求めなさい.

(3) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めなさい.

(岩手大 2021)　　(m20210302)

0.1235 3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \\ 10 & 2 & b \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 行列 A が固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ をもつとき，a と b の値を求めなさい.

(2) 行列 A の固有値をすべて求めなさい.

(岩手大 2022)　　(m20220302)

0.1236 行列 $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，以下の設問 (1),(2) に答えよ.

(1) P の逆行列が $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ になることを確かめよ.

(2) P の第 1 列ベクトルを $\boldsymbol{p}_1$，第 2 列ベクトルを $\boldsymbol{p}_2$ とする． $\boldsymbol{p}_1$ が，ある $2\times\ 2$ 行列 A の固有値 1 の固有ベクトルであり，$\boldsymbol{p}_2$ が，同じ行列 A の固有値 -1 の固有ベクトルであるとき，A を求めよ．

(秋田大 2011)　　(m20110402)

0.1237 $x=\tan t$ と置き換えて，次の定積分を求めよ．

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

(秋田大 2011)　　(m20110403)

0.1238 下記の行列 A について，次の問いに答えなさい．

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&5&0\\3&3&8\end{pmatrix}$$

(1) A の行列式を求めなさい．

(2) A の逆行列を求めなさい．

(秋田大 2012)　　(m20120401)

0.1239 以下の四角内に当てはまる値を計算し，解答欄の指定した箇所に記入せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x+1\right)=\boxed{\text{（ア）}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\boxed{\text{（イ）}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\boxed{\text{（ウ）}}$

(秋田大 2013)　　(m20130401)

0.1240 以下の四角内に当てはまる式を計算し，解答欄の指定した箇所に記入せよ．ここで，$\mathrm{arcsin}x$ は $\sin x$ の逆関数を表し，$\sin^{-1}x$ と表されることもある．

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\boxed{\text{（エ）}}$

(2) $0<x<1$ とするとき，$\displaystyle\frac{d}{dx}x^{\mathrm{arcsin}x}=\boxed{\text{（オ）}}$

(秋田大 2013)　　(m20130402)

0.1241 次の定積分を求めよ．

$$\int_0^1\log\left(x^2+1\right)dx$$

(秋田大 2013)　　(m20130403)

0.1242 以下の問いに答えよ．

(1) 以下の四角内に当てはまる値を計算し，解答欄の指定した箇所に記入せよ．

行列 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ に対し，A の 2 つの固有値をそれぞれ α, β とする（ただし，$\alpha<\beta$ とする）．また，α と β に対応する固有ベクトルをそれぞれ v_α, v_β とする．このとき

$$\alpha=\boxed{\text{（カ）}},\ \beta=\boxed{\text{（キ）}},\ v_\alpha=\begin{pmatrix}\boxed{\text{（ク）}}\\1\end{pmatrix},\ v_\beta=\begin{pmatrix}\boxed{\text{（ケ）}}\\1\end{pmatrix}$$

となる,

<u>注意</u> $\boxed{（ク）}$と$\boxed{（ケ）}$は，それぞれ v_αと v_β のベクトルの第一成分である．

(2) 2 つのベクトル v_αと v_β が直交するかどうか答え，その理由を述べよ．

(秋田大 2013)　　(m20130404)

0.1243 次の行列 A の行列式を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & a \\ x & y & b & b \\ x & y & z & c \end{pmatrix}$$

(秋田大 2013)　　(m20130405)

0.1244 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ とする．また $\boldsymbol{c}$ を 3 次元ベクトルとする．このとき以下の設問 (1),(2) に答えなさい．なお，解答はいずれも設問 (2) の下の空白部分に記入しなさい．

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が正規直交基底をなすように $\boldsymbol{c}$ を定めなさい．

(2) ベクトル $\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ を満たすとする．このとき，ベクトル $\boldsymbol{c}$ とベクトル $\boldsymbol{a}$ のなす角を求めなさい．

(秋田大 2014)　　(m20140403)

0.1245 次の不定形の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x^2 - x}\right)$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - x - 1}{x^2}\right)$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\Big(\tan x - \sec x\Big)$

(秋田大 2015)　　(m20150402)

0.1246 (1) 2 つのベクトル $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ がある．ベクトル $s\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$ が直交するとき，スカラー s と t の関係式を求めよ．

(2) a, b を実数とするとき; 行列 $C = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ の固有ベクトルと固有値を求めよ．

(秋田大 2015)　　(m20150403)

0.1247 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の原点を通る直線で，次の性質を持つものを考える．

(性質) この直線上の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を，行列 A で変換した点 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ も，この直線上にある．

例えば,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (k \text{ は任意の実数})$$

と表される直線 l_1 は，このような直線の一つである．この性質を持つ，l_1 と異なる直線を全てあげなさい．

(秋田大 2016)　　(m20160404)

0.1248　次の極限を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{e^{2x}-1}$ （e は自然対数の底である.）

(秋田大 2017)　　(m20170402)

0.1249　a, b を実数とし，$ab\neq 0$ とする．行列 A を，

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

とする．以下の問いに答えなさい．

(1) 行列 A の固有値を求めなさい．

(2) (1) で求めた固有値の固有ベクトルを，ひとつずつ求めなさい．

(3) (2) で求めた固有ベクトルの図形的関係を答えなさい．

(秋田大 2017)　　(m20170404)

0.1250　3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{a}$ を法線ベクトルに持つ原点を通る $\mathbb{R}^3$ 内の平面を π とする．$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，平面 π に関して対称なベクトルを対応させる写像を f とすると，f は線形写像になっている．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，$f(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{a}$ を用いて表せ（内積を用いよ）．

(2) $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ となる 3×3 行列を A とするとき，行列 A を求めよ．

(3) A の固有値と，それぞれの固有値に対応する固有空間を求めよ．

(秋田大 2019)　　(m20190404)

0.1251　2 つの行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}$ (a, b, c は定数）について，以下の問いに答えよ．

(1) 等式 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ が成立するとき，a, b, c の間の関係を求めよ．

(2) (1) が成立するとき，B による 1 次変換は，直線 $2x-y=3$ を直線 $x-y=-3$ にうつすという．このとき，a, b, c の値を求めよ．

(3) 行列 A, B の固有値をそれぞれ求めよ．

(秋田大 2020)　　(m20200404)

0.1252　2 次方程式 $4x^2-2\sqrt{2}x-1=0$ の解を α, β とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 和 $\alpha+\beta$，積 $\alpha\beta$ を求め，$\alpha^2+\beta^2$ の値を答えよ．

(2) $|\,\alpha-\beta\,|$ および $|\,\alpha^4-\beta^4\,|$ の値を求めよ．

(3) 行列 $A=\begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta^2 \\ \beta^2 & \alpha^2 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換によって，双曲線 $x^2-y^2=1$ を移したときの関数を求めよ．

(秋田大 2021)　　(m20210402)

0.1253 行列 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 等式 $\boldsymbol{Bx} = \lambda \boldsymbol{x}$ を満たすとき，固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ と固有値 λ を求めよ.

(2) (1) が成立するとき，未知ベクトル $\boldsymbol{y}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{x}$ は，微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{By}$$

の解であることを示せ.

(3) t $(0 \leq t \leq +\infty)$ を時間とすると，未知ベクトル $\boldsymbol{y}(t)$ の終端はどのような軌跡となるか，答えよ.

(秋田大 2021)　　(m20210404)

0.1254 (1) 区間 $0 \leqq y \leqq \pi$ において，$\cos(4y) = 0$ を満たす y をすべて求めなさい.

(2) $x = \cos(y)$ として，$\cos(4y)$ を x の多項式で表したものを $p(x)$ とする．$p(x)$ を求めなさい.

(3) (2) で求めた $p(x)$ に対して，$p(x) = 0$ を満たす x をすべて求めなさい.

(4) (1) および (3) の結果より，$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ の値を求めなさい.

(秋田大 2022)　　(m20220403)

0.1255 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ のすべての固有値を求め，各固有値に対する固有ベクトルを求めなさい.

(2) 2 次正方行列 B が，1 と 2 を固有値として持つとする．さらに，

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

は，それぞれ，固有値 1 に対する固有ベクトル，固有値 2 に対する固有ベクトルであるとする．行列 B を求めなさい.

(秋田大 2022)　　(m20220404)

0.1256 x を実数とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = e^{-x}\cos x$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の第 n 次導関数を $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ とするとき，

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \left(-\sqrt{2}\right)^n e^{-x}\cos\left(x - \frac{n\pi}{4}\right)$$

であることを数学的帰納法を用いて証明せよ.

(2) 関数 $y = f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べ，増減表を書き，グラフの概略を描け.

(3) 曲線 $y = f(x)$ $\left(区間\ 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ.

(東北大 2011)　　(m20110502)

0.1257 $\mathbb{R}^3$ を実数を成分とする 3 次元ベクトルよりなる実ベクトル空間,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とする.

(1) A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) $v \in \mathbb{R}^3$ に対し, $\left(\dfrac{1}{2}A\right)^n v \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ が $n \longrightarrow \infty$ で収束するとき, その極限を

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}A\right)^n v = \begin{pmatrix} x_\infty \\ y_\infty \\ z_\infty \end{pmatrix}$$

とあらわす. この極限が存在し 0 でないとき, 成分の比 $x_\infty : y_\infty : z_\infty$ を求めよ.

(東北大 2011) (m20110503)

0.1258 $\mathbb{R}^4$ における 4 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ について,

以下の問いに答えよ.

(1) $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$ は $\mathbb{R}^4$ の基底となることを示せ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ を基底 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$ の一次結合で表せ.

(東北大 2011) (m20110504)

0.1259 $\boldsymbol{R}$ は実数全体のなす集合を表す. $\boldsymbol{R}^N$ は N 次元実ベクトル全体のなす集合を表す.

$\boldsymbol{R}^4$ の 3 つのベクトルを $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ で定め, これらを列にもつ行列

$$A = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

を考える. 以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一次独立であることを示せ.

(2) A によって定まる線形写像の像を $\mathrm{Im}(A)$ とする. つまり

$\mathrm{Im}(A) = \left\{ A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \middle| \ \alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{R} \right\}$ である. $\boldsymbol{R}^4$ のベクトル $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im}(A)$ の元であると

き, p を q, r, s で表せ.

(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4$ の内積を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = xx' + yy' + zz' + ww'$$

とする.

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4$ が $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) = 0$ をみたし，4 次行列 $\tilde{A} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x})$ の行列式が 1 であるとき $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(東北大 2012)　　(m20120505)

0.1260 実変数 x, y の関数 $f(x, y) = x^3 - y^2$ について以下の問に答えよ.

(1) (x, y) が実平面全体をうごくとき，$f(x, y)$ の臨界点 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ となる点}\right)$ をすべて求めよ.

(2) 各臨界点について，それが f の極値を与えるか調べよ.

(3) 点 (x, y) が円 $x^2 + y^2 = 1$ の上をうごくとき，関数 $f(x, y)$ の最大，最小とそのときの x, y の値を求めよ.

(東北大 2012)　　(m20120507)

0.1261 行列 A と行列 B を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の問に答えよ.

(1) AB を求めよ.

(2) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(3) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(4) A の固有値を求めよ.

(東北大 2013)　　(m20130503)

0.1262 $\dfrac{2x}{\pi} \leqq \sin x \leqq x \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が成り立つことを示せ.

(東北大 2015)　　(m20150502)

0.1263 x を実数とする．$n \times n$ 正方行列である $\boldsymbol{A}_n(x)$ と $\boldsymbol{B}_n$ を以下のように与える.

$$\boldsymbol{A}_n(x) = \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -x & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -x \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}_n = \boldsymbol{A}_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

すなわち，$\boldsymbol{A}_n(x)$ は対角要素がすべて $-x$，その両側の斜めの要素が 1，それ以外の要素がすべて 0 の 3 重対角行列である．$\boldsymbol{B}_n$ は $\boldsymbol{A}_n(x)$ において $x = 0$ としたときの行列である.

(1) $\boldsymbol{B}_2$ の固有値をすべて求めよ.

(2) $\boldsymbol{B}_3$ の固有値をすべて求めよ.

(3) $\boldsymbol{B}_n$ の固有値のひとつを λ とする．この λ は $|\boldsymbol{A}_n(\lambda)| = 0$ を満たすことを示せ.

(4) λ が $\boldsymbol{B}_n$ の固有値であるとき，$|\boldsymbol{A}_n(\lambda)|$ は漸化式 $|\boldsymbol{A}_n(\lambda)| = -\lambda|\boldsymbol{A}_{n-1}(\lambda)| - |\boldsymbol{A}_{n-2}(\lambda)|$ を満たすことを示せ．ただし，$|\boldsymbol{A}_0(\lambda)| = 1$, $|\boldsymbol{A}_1(\lambda)| = -\lambda$ とする.

(5) $\lambda = -2\cos\theta$, $|\boldsymbol{A}_n(\lambda)| = \dfrac{\sin[\,(n+1)\theta\,]}{\sin\theta}$ とおくとき，これらが (4) の漸化式を満たすことを示せ．ただし，$\sin\theta \neq 0$ である.

(6) $\dfrac{\sin[\,(n+1)\theta\,]}{\sin\theta} = 0$ を満たす θ を求めよ．これを使って，$\boldsymbol{B}_n$ の固有値 $\lambda = -2\cos\theta$ を求めよ．また，求めた固有値は，$n = 2$, $n = 3$ の場合，それぞれ (1) および (2) で求めた固有値と一致することを示せ.

(東北大 2015)　　(m20150505)

0.1264 3 次実対称行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問いに答えよ.

(1) A のすべての固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値のそれぞれに対して，固有空間の次元を求めよ.

(3) 3 次直交行列 P で，${}^tPAP$ が対角行列となるものを一つ求めよ．ただし，${}^tP$ で P の転置行列を表す.

(東北大 2015)　　(m20150506)

0.1265 a は負，b は正の定数とする．3 次実正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}$$

と定める．以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の階数が 2 であるための必要十分条件を求めよ.

(2) A が正則行列のとき，A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(東北大 2015)　　(m20150507)

0.1266 領域 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 1,\ \sqrt{2}x^2 \leqq y\right\}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 領域 D の面積 S を求めよ.

(2) 領域 D の重心の座標を求めよ．ここで，領域 D の重心の座標 $(\overline{x},\ \overline{y})$ は以下の式で表される.

$$(\overline{x},\ \overline{y}) = \left(\frac{1}{S}\iint_D x\,dxdy\,,\ \frac{1}{S}\iint_D y\,dxdy\right) \qquad S : \text{領域 } D \text{ の面積}$$

(東北大 2016)　　(m20160502)

0.1267 (1) 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ を求めよ．ただし，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とする.

$$a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = -a_n + S_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(2) 次の数列が収束するとき，実数 x の範囲と数列の極限を求めよ．

$$\frac{(2x-1)^n}{3^n} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(3) ロピタルの定理を用いて，以下の極限を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

(東北大 2016)　　(m20160503)

0.1268 (1) 実正方行列が直交行列であることの定義を述べよ．

(2) 2 次の直交行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{または} \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \qquad (\theta : \text{実数})$$

の形であることを示せ．

(3) A を n 次直交行列とする．2 つのベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して， $A\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{w}$ の間の距離は，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ の間の距離に等しいことを示せ． ただし，距離はユークリット空間における標準的な距離とする．

(東北大 2016)　　(m20160506)

0.1269 実数 x を含む次の行列 $\boldsymbol{A}$ について以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} x & -x-1 & 0 \\ x-1 & -x & 0 \\ 1-x & x+1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値をすべて求めよ．

(2) $\boldsymbol{A}^2$ と逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めよ．

(3) 行列 $\boldsymbol{B}$ を次式で定義する．n が 3 以上の整数であるとき，$\boldsymbol{B}$ を n と x を用いて表せ．

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^n + n\boldsymbol{A}^{n-1} - \boldsymbol{A}^{n-2} \qquad (n=3,4,5,\cdots)$$

(東北大 2017)　　(m20170501)

0.1270 3 次実正方行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値と各固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(2) x, y, z の連立方程式

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は解を持つか，その理由も答えよ．

(東北大 2017)　　(m20170504)

0.1271 実数を成分とする 4 次元列ベクトル全体のなす実ベクトル空間を $\mathbb{R}^4$ で表す．$\mathbb{R}^4$ のベクトル

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

を考える．a_1 と a_2 が生成する部分空間を W_1 とし，a_3 と a_4 が生成する部分空間を W_2 とする．以下の問いに答えよ．

(1) W_1 および W_2 の次元を求めよ．

(2) $W_1 \cap W_2$ の次元を求めよ．

(3) $W_1 \cap W_2$ の基底を求めよ．

(東北大 2017)　　(m20170505)

0.1272 $\mathbb{R}^2$ 上で定義された 2 変数関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ で連続であることを示せ．

(2) $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x^2 + y^2 \leq 3 \text{ かつ } y \geq 0 \right\}$ とするとき，積分 $\displaystyle\int_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ．

(東北大 2017)　　(m20170506)

0.1273 $0 \leq t < 1$ とする．各 t について，次の関数の極大値をとる点と極小値をとる点を求めよ．極値を求める必要はないが，極大か極小であるかは明記すること．

$$f(x,y) = \left(x^2 + y^2 - 1\right)(x - t) \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

(東北大 2017)　　(m20170507)

0.1274 次の行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 9 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(東北大 2018)　　(m20180504)

0.1275 次の行列 $\boldsymbol{B}$ の行列式 $|\boldsymbol{B}|$ を求めよ．

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -4 & -8 \\ 5 & -7 & -6 & 9 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(東北大 2018)　　(m20180505)

0.1276 次の行列 $\boldsymbol{C}$ について，以下の問に答えよ．

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{C}$ の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさを 1 とする．

(2) $\boldsymbol{P}^t\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$ が対角行列となるような直交行列 $\boldsymbol{P}$ を求め，$\boldsymbol{P}^t\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$ を計算せよ．ただし，$\boldsymbol{P}^t$ は行列 $\boldsymbol{P}$ の転置行列を表す．

(東北大 2018)　　(m20180506)

0.1277 (1) n 次正方行列 $A,\ B$ を用いて $2n$ 次正方行列 C を

$$C = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

で定めるとき，等式

$$\det C = \det(A+B) \times \det(A-B)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\det C$ は C の行列式を表す．

(2) 4 次正方行列

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のすべての固有値を求め，それぞれの固有値に対応する固有空間の基底を求めよ．

(東北大 2018)　　(m20180508)

0.1278 $\mathbb{R}^2$ 上の 2 変数関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y) = (0,0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において連続であることを示せ．

(2) $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において全微分可能であるか，理由とともに答えよ．
なお，$\mathbb{R}^2$ 内の点 (a,b) の近傍で定義された実数値関数 $g(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ において全微分可能であるとは，ある定数 $\alpha,\ \beta$ が存在して

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{g(a+h,\ b+k) - g(a,b) - (\alpha h + \beta k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

が成り立つことをいう．

(東北大 2018)　　(m20180510)

0.1279 $\mathbb{R}$ 内の閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数 $f(x)$ は $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 1$ をみたすとする．正の整数 n に対し

$$b_n = \int_0^1 f(x) \cos\frac{x}{\sqrt{n}} dx$$

とおくとき，

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} (b_n)^n = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f(x) dx \right)$$

が成り立つことを以下の設問に沿って証明せよ．

(1) 任意の $x \geq 0$ に対し

$$0 \leq \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^3}{6}$$

が成り立つことを示せ.

(2) 任意の n に対し

$$\left| b_n - 1 + \frac{1}{2n}\int_0^1 x^2 f(x)dx \right| \leq \frac{1}{6n\sqrt{n}}\int_0^1 x^3 |f(x)|\, dx$$

が成り立つことを示せ.

(3) 任意の実数 $\alpha,\ \beta$ に対し

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n\sqrt{n}}\right)^n = e^\alpha$$

が成り立つことを示せ.

(4) (2) および (3) の結果を利用して $(*)$ を結論せよ.

(東北大 2018)　　(m20180511)

0.1280 次の行列 $\boldsymbol{A}$ について，以下の問に答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値をすべて求めよ.

(2) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ が対角行列となるような正則行列 $\boldsymbol{P}$ を求め，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ を計算せよ．ただし，$\boldsymbol{P}^{-1}$ は $\boldsymbol{P}$ の逆行列を表す.

(3) n が 1 以上の整数であるとき，n を用いて $\boldsymbol{A}^n$ を表せ.

(東北大 2019)　　(m20190503)

0.1281 次の行列 $\boldsymbol{B}$ について，以下の問に答えよ.

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{B}^2$ と $\boldsymbol{B}^3$ を求めよ.

(2) n が 1 以上の整数であるとき，n を用いて $\boldsymbol{B}^n$ を表せ.

(東北大 2019)　　(m20190504)

0.1282 t を実数とする．$3\times\ 4$ 行列 A を次で定義する．　$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 & t \\ -2 & 5 & 6 & -5 \\ 2 & -3 & -10 & 3 \end{pmatrix}$

(1) A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ.

(2) 4 次元実縦ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \middle|\ a, b, c, d \text{ は実数で } A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

の次元を求めよ．また，W の基底を一組求めよ.

(東北大 2019)　　(m20190505)

0.1283 次の正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の固有値それぞれに対して，その固有空間の基底を求めよ．

(3) 実 3 変数 x, y, z の関数 $f(x, y, z)$ を次で定義する．

$$f(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 2xy - 4yz - 4zx$$

このとき $f(x, y, z)$ の，条件

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = x + y + z = 0$$

のもとでの最大値と最小値を求めよ．

(東北大 2019)　　(m20190507)

0.1284 (1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は収束しないことを示せ．

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n} \right) \right)$ は収束することを示せ．

(東北大 2019)　　(m20190508)

0.1285 重積分

$$\iint_D (3x^2 + y^2)dxdy \qquad \left(D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq x \right\} \right)$$

の値を求めよ．

(東北大 2019)　　(m20190510)

0.1286 (1) 次の行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列 B について，以下の問に答えよ．

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) 行列 B の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさを 1 とする．

(b) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ とする．n が 1 以上の整数であるとき，ベクトル $B^n\boldsymbol{u}$ を求めよ．

(3) 次の行列 C について，以下の問に答えよ．

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) $P^{-1}CP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．ただし，P^{-1} は P の逆行列を表す．

(b) n が 1 以上の整数であるとき，行列 C^n を求めよ．

(東北大 2020)　　(m20200503)

0.1287　次の行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式 $|\boldsymbol{A}|$ を求めよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 \\ 3 & 8 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

(東北大 2021)　　(m20210501)

0.1288　次の行列 $\boldsymbol{B}$ の逆行列 $\boldsymbol{B}^{-1}$ を求めよ．

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(東北大 2021)　　(m20210502)

0.1289　次の行列 $\boldsymbol{C}$ について，以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) すべての固有値と固有ベクトルを求めよ．

(b) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$ が対角行列となるような正則行列 $\boldsymbol{P}$ を求め，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$ を計算せよ．ただし，$\boldsymbol{P}^{-1}$ は $\boldsymbol{P}$ の逆行列を示す．

(c) n が 1 以上の整数であるとき，n を用いて $\boldsymbol{C}^n$ を表せ．

(東北大 2021)　　(m20210503)

0.1290　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ を 3 次正方行列とする．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．さらに，求めた固有値それぞれに対して固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ．

(3) n を 2 以上の整数とする．A^n を求めよ．

(4) 次の式で定義される数列 $\left\{a_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ の一般項 a_n を求めよ．

$$a_0 = a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad (n = 3, 4, 5, \cdots)$$

(東北大 2021)　　(m20210508)

0.1291　次の行列 $\boldsymbol{X}$ と数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ について，以下の問に答えよ．ただし，x は実数とする．

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 1 & x & x \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{X}^3$ を求めよ．

(2) n が 1 以上の整数であるとき，$\boldsymbol{X}^n$ が次の形式で表されることを，数学帰納法を用いて証明せよ;

$$\boldsymbol{X}^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n & c_n \\ 0 & 1 & a_n & b_n \\ 0 & 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) n が 2 以上の整数であるとき, (2) の a_n, b_n, c_n で構成される数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(東北大 2022)　　(m20220502)

0.1292　次の極限値をそれぞれ求めよ

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x-2}-x+1\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

(東北大 2022)　　(m20220503)

0.1293　n を 2 以上の整数とする．n 次元実列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ は，

それらの内積 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ について $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \neq 0$ を満たすとする．n 次正方行列 A を $A = \boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{b}$ と定める．ここで，${}^t\boldsymbol{a}$, ${}^t\boldsymbol{b}$ はそれぞれ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の転置を表す．以下の問に答えよ．

(1) A の階数と行列式をそれぞれ求めよ．また，A の固有値をすべて求めよ．

(2) k を正の整数とする．${}^t\boldsymbol{b}A^k\boldsymbol{a}$ を $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ と k を用いてできるだけ簡潔に表せ．

(東北大 2022)　　(m20220508)

0.1294　3 次以下の実数係数多項式全体のなす集合

$$V = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \;\middle|\; a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

を考え，V の元を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数と考える．V の二つの元 f, g と実数 s に対して，和 $f+g \in V$ とスカラー倍 $sf \in V$ を

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (sf)(x) = s(f(x))$$

で定めると，V は $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間となる．V から 4 次元実列ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ への線形写像 $\phi : V \to \mathbb{R}^4$ を

$$\phi(f) = \begin{pmatrix} f(-1) \\ f'(-1) \\ f(1) \\ f'(1) \end{pmatrix}$$

で定める．ただし f' は f の導関数である．以下の問いに答えよ．

(1) V と $\mathbb{R}^4$ の基底に関する ϕ の表現行列を求めよ．ただし V の基底は $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$, $\mathbb{R}^4$ の基底は $\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4\}$ とし，

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする．

(2) 3 次以下の実数係数多項式 f で,

$$f(-1) = 3, \qquad f'(-1) = 2, \qquad f(1) = -1, \qquad f'(1) = 2$$

を満たすものが存在するかどうか答えよ．存在する場合はそのような多項式をすべて求め，存在しない場合はそれを証明せよ.

(東北大 2022)　　(m20220509)

0.1295 任意の実 2× 2 行列を無限回作用させることにより，平面上の点はどこに行き着くかについて考察せよ．以下の (1) から (5) の手順に従ってもよいし，または別の手順で解答してもよい.

(1) 上三角行列

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

の固有値を求める.

(2) 行列 T の n 乗を計算する.

(3) 行列 T のすべての固有値の絶対値が 1 より小さい場合，実平面上の点

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

は行列 T を無限回作用するとどのような点に近づくか考える．ただし，$\alpha, \beta, \gamma, x_1, x_2$ はすべて実数であるとする.

(4) 2× 2 行列 M に対し

$$Me = \lambda e$$

を満たす単位固有ベクトルを

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

とし．この成分 a, b を用いて正則行列

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

を定義する．行列 $P^{-1}MP$ の (2,1) 成分（左下の要素）がゼロになることを確かめ，任意の 2× 2 行列が上三角行列に変換されることを示す．　さらに．$T_0 = P^{-1}MP$ とするとき n を自然数として

$$M^n = P(T_0)^n P^{-1}$$

が成立することを示す.

(5) 行列 B の要素がすべて実数で，固有値の絶対値が 1 より小さいとする．　このとき行列 B を無限回作用すると，実平面上の点はどのような点に近づくか考えてみる.

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110604)

0.1296 $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f が

$$f : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

を満たすとき，以下の各問に答えよ.

(1) f の表現行列 A を求めよ．

(2) A の固有値およびそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110608)

0.1297 以下の各問いに答えよ．

(1) t を実数とする．行列

$$A = \begin{pmatrix} t & -t-1 & -1 \\ t-1 & -t & -1 \\ 3-2t & 2t+3 & 4 \end{pmatrix}$$

の固有値を求め，各固有値に対する固有空間の次元が t の値によってどのように変わるかを答えよ．また，この行列が対角化可能となるような t の値を求め，そのとき $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正方行列 P を一つ求めよ．

(2) n を自然数，A を n 次実正方行列とする． 以下では i は自然数，$r(X)$ は行列 X の階数を表すものとする．

(a) $r(A^i) \geq r(A^{i+1})$ となることを示せ．

(b) $r(A^i) = r(A^{i+1})$ のとき，$r(A^{i+1}) = r(A^{i+2})$ となることを示せ．

(c) $r(A^n) = r(A^{n+1})$ となることを示せ．

(お茶に水女子大 2012)　　(m20120602)

0.1298 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ を次式で定義する．

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\ ,\quad \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

ここで e^x は指数関数を表す．

(1) 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ の微分を求めよ．

(2) 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ の無限級数展開の最初の 3 項目までを求めよ．

(3) 次の関係式（加法定理）を示せ．

$$\sinh(\alpha+\beta) = \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta$$

(4) 上の関係式（加法定理）から，正弦関数 $(\sin\theta)$ の加法定理を導け．ただし，次のオイラーの関係式は仮定して良い．

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

(お茶の水女子大 2012)　　(m20120603)

0.1299 次の写像 f が線形写像でないならば線形写像でないことを証明し， 線形写像ならば f を表す行列と，f の核 (Ker f) と像 (Im f) を求め，それぞれの次元を調べなさい．

(1)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x+y+z \end{pmatrix}$$

(2)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y+z \\ -3x+2z \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2012)　　(m20120607)

0.1300 次の行列 A, B, C について，固有値と固有ベクトル空間の基底を求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2012)　　(m20120608)

0.1301 $f(x)$ を微分可能関数とし $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \beta$ とする．このとき任意の実数 h に対して

$$\lim_{x\to\infty} (f(x+h) - f(x))$$

が収束することを示し，その極限の値を β と h を用いて表せ.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130603)

0.1302 (1) S を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする．S の階数（ランク）rank$S$ の定義を述べよ.

(2) S, T を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする．このとき，不等式

$$\mathrm{rank}(S+T) \leqq \mathrm{rank}S + \mathrm{rank}T$$

が成立することを示せ.

(3) 上記問題 (2) で $\mathrm{rank}(S+T) = \mathrm{rank}S + \mathrm{rank}T$ が成立するような線形写像 S, T の例をあげよ.

(4) T を $\mathbb{R}^l$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像とし，S を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする．　このとき，

$$\mathrm{rank}S\circ T \leqq \mathrm{rank}S\,, \quad \mathrm{rank}S\circ T \leqq \mathrm{rank}T$$

が成立することを示せ.

(5) 次の行列で定められる線形写像 $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ の階数を求めよ．ただし，a は実数である.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \end{pmatrix}$$

(6) 上記 (5) で与えられた線形写像 F の核（核空間）$F^{-1}(\mathbf{0})$ の次元が最も大きくなるときの a を求めよ．またそのときの核の基底を 1 組求めよ.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130604)

0.1303 行列に関する次の問に答えよ.

(1) 次の 2 行 2 列の実対称行列 A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

の固有値 λ_1 λ_2 と規格化された固有ベクトル v_1, v_2 を求めなさい.

(2) 前問で求めた固有ベクトルを並べて作った行列と，その転置行列を用いて A を対角化しなさい.

一般に，n 行 n 列の実対称行列 B は，ある直交行列 O およびその転置行列 O^T を用いて
O^TBO とすれば対角化されることが知られている.

(3) 直交行列 O の定義を書きなさい.

(4) 一般の 2 行 2 列の実対称行列 C の行列式がその 2 つの固有値 c_1, c_2 の積に等しいこと

$$\det C = c_1 c_2$$

を証明し，C が $(*)$ で与えられるとき（すなわち $C = A$）にそれが成り立っていることを示しなさい．

(5) 一般の 2 行 2 列の実対称行列 C の対角和がその 2 つの固有値 c_1, c_2 の和に等しいこと

$$\mathrm{T_r}\, C = c_1 + c_2$$

を証明し，C が $(*)$ で与えられるとき（すなわち $C = A$）にそれが成り立っていることを示しなさい．

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130605)

0.1304 次の方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(\boldsymbol{r}) = a\delta(\boldsymbol{r}), \tag{a}$$

に関する以下の問いに答えなさい．ここで右辺の a は正の実数，$\delta(\boldsymbol{r})$ は 3 次元のデルタ関数

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{b}$$

である．

(1) 関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ のフーリエ変換を

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k}) \tag{c}$$

とした時，これが方程式 (a) を満たすということから関数 $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$ を求めなさい．

(2) 積分要素 $d\boldsymbol{k}$ の直交座標系 (k_x, k_y, k_z) から極座標系 (k, θ, ϕ) への変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k} = \int_0^{\infty} dk \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi |J| \tag{d}$$

で与えられる．このときのヤコビアン J を書きなさい．ここで $k = |\boldsymbol{k}|$ である．また (d) の右辺が

$$\int_0^{\infty} k^2 dk \int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \tag{e}$$

と書けることを示しなさい．

(3) 問 (1) で求めた $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$ を使って，(c) から $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めなさい．必要があれば，公式

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2} \tag{f}$$

を用いてもよい．

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130606)

0.1305 ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^4$ 上の一次変換 f を表現する行列を

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とするとき，以下の問に答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im} f$ の次元と基底を求めよ．

(2) f の核 $\mathrm{Ker} f$ の次元と基底を求めよ．

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130609)

0.1306 (1) n 次正則行列 A の逆行列 A^{-1} を A の行列式 $|A|$ 及び A の余因子行列 $\widetilde{A}$ を用いて表せ.

(2) A を成分が全て整数である n 次正則行列とする．さらに，A の行列式は 1 であると仮定する．このとき，A の逆行列 A^{-1} の成分も全て整数となることを示せ.

(3) 次の行列 B の行列式を求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & c_1 & 3 & 6 & 7 \\ b_2 & c_2 & 0 & 4 & 6 \\ b_3 & c_3 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

(お茶の水女子大 2014) (m20140602)

0.1307 5 次正方行列 A を次で与える：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値は，-2 と 8 であることを示せ.

(2) A の固有値 -2, 8 の固有空間をそれぞれ $V(-2)$, $V(8)$ で表す．$\boldsymbol{a}$ を $V(-2)$ の 0 でないベクトルとし，$\boldsymbol{b}$ を $V(8)$ の 0 でないベクトルとする． このとき，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は 1 次独立（線形独立）であることを示せ.

(3) 各固有空間 $V(-2)$, $V(8)$ の基底を求めよ.

(4) 行列 A が対角化可能であることを示し，$P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求めよ.

(お茶の水女子大 2014) (m20140603)

0.1308 以下の問いに答えよ.

(1) (a) 線形空間 $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への写像 f が線形写像であることの定義を述べよ.

(b) $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f で，$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に，$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ に，それぞれ移す線形写像が存在するかどうか答え，存在するならば，この条件を満たした像（像空間）の次元が最大，最小となる線形写像の例をそれぞれあげ，それらの核（核空間）の次元と基底を求めよ.

(c) $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f で，$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ に，$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に，それぞれ移す線形写像が存在するかどうか答え，存在するならば，この条件を満たした像（像空間）の次元が最大，最小となる線形写像の例をそれぞれあげ，それらの核（核空間）の次元と基底を求めよ.

(2) 次の行列 A の固有値と，各固有値に対する固有ベクトル空間の基底と次元を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2015)　　(m20150602)

0.1309　次の行列 A について，A^2, A^3, A^4 を求めなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160603)

0.1310　ある対称行列 F が直交行列 P によって対角行列 $F' = P^T F P$ へと変換された．ここで T は行列の転置を表す．以下の問に答えなさい．

(1) F のトレース（対角成分の和）はこの変換により不変であること，つまり $T_r\, F = T_r\, F'$ を証明しなさい．

(2) 行列 F が以下のように与えられたとき，P と F' を求めなさい．

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(3) 行列 F と F' のトレースを求めなさい．

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160604)

0.1311　3 次元微分演算子 $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z} \right)$ に対して ∇r を求めなさい．

ただし $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である．

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160607)

0.1312　逆正接関数について以下の問に答えよ. ただし値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right)$ とする．

(1) $\tan^{-1} x + \tan^{-1}(a - x) = \dfrac{\pi}{4}$ が実数解をもつ a の範囲を求めよ．

(2) $\left(\tan^{-1} x\right)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$ を示せ．

(3) $\displaystyle\int \tan^{-1} x dx$ を求めよ．

(4) $\tan^{-1} x$ を x^{10} の項までマクローリン展開せよ．

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160609)

0.1313　次の連立 1 次方程式が

(1) 解を持たない

(2) 無数に多くの解をもつ

ように，それぞれ実数 a の値を定めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -2 \\ a & -1 & 4 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160610)

0.1314　次の行列 A, B について，それぞれ固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160611)

0.1315　以下の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{e^x}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\left(\frac{\log x}{x-1}\right)$

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160614)

0.1316　以下の 2 次正方行列について，固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

ただし，$a \neq 0,\ b \neq 0,\ a \neq b$ とし，a, b は実数とする．

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160615)

0.1317　$m \times n$ 型実行列 $A(t) = (a_{ij}(t))$ の各成分 $a_{ij}(t)$ が t に関して微分可能な関数であるとき，$a_{ij}(t)$ の導関数 $a_{ij}^{'}(t)$ を成分にもつ $m \times n$ 型行列を $A'(t)$ で表す．

(1) 各成分が t に関して微分可能な関数である $m \times n$ 型，$n \times l$ 型実行列をそれぞれ $F(t) = (f_{ij}(t))$, $G(t) = (g_{jk}(t))$ で表す．このとき，行列の積 $F(t)G(t)$ の各成分も t に関して微分可能な関数となり，$(FG)'(t) = F'(t)G(t) + F(t)G'(t)$ が成り立つことを示せ．

(2) $F(t) = (f_{ij}(t))$ は，各成分が t に関して微分可能な関数である n 次実正方行列とする．$F(t)$ の行列式 $|F(t)|$ は t に関して微分可能な関数となることを示せ．すべての t について $F(t) = (f_{ij}(t))$ は正則であるとき，$F(t)$ の逆行列 $F^{-1}(t)$ の各成分も微分可能な関数で，$\left(F^{-1}\right)'(t) = -F^{-1}(t)F'(t)F^{-1}(t)$ が成り立つことを示せ．

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170603)

0.1318　(1) $m \times n$ 型実行列 $A = (a_{ij})$ の階数 (rank) の定義を述べよ．

(2) t を実数とする．次の行列の階数を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2t-2 & t & 1 \\ 1 & 0 & 1 & t \\ t & t-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) t を実数とする．4 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の 4 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2t-2 \\ 0 \\ t-1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を $V(t)$ で表す． t が実数全体を動くとき， $V(t)$ の次元の最小値をとるような t の値を求めよ．また，そのときの $V(t)$ の基底を求めよ．

(4) t を実数とする．未知数 x, y, z に関する次の連立 1 次方程式が解をもつような t をすべて求めよ．

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + (2t-2)y + tz = 1 \\ x + z = t \\ tx + (t-1)y + z = 1 \end{cases}$$

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170604)

0.1319 逆三角関数 $f(x) = \sin^{-1} x$ （ただし，$-\pi/2 \leq f(x) \leq \pi/2$) について，以下の問いに答えよ．

(1) $y = f(x)$ のグラフを描け．

(2) $\cos\left(\sin^{-1} x\right)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ を x で微分せよ．

(4) $f(x)$ の不定積分を求めよ．

(5) $y = f(x)$ として $y''(1-x^2) = y'x$ がり立つことを示せ．

(6) $f(x)$ をマクローリン展開せよ．

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170605)

0.1320 $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f が

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} を \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix} に, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} を \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix} に, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} を \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} に,$$

それぞれ写すとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 線形写像 f を表す行列 A を求めよ．

(2) 線形写像 f の核 ($\mathrm{Ker}\, f$) と像 ($\mathrm{Im}\, f$) の次元と基底をそれぞれ求めよ．

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170606)

0.1321 実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ を直交行列により対角化せよ．変換に用いた直交行列も答えること．

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170607)

0.1322 以下の 2 次正方行列 A について答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) 固有値を求めよ．

(2) それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170611)

0.1323 整数 n に対して，$x \neq 0$ のとき $f_n(x) = x^n \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f_n(0) = 0$ として $\mathbb{R}$ を定義域とする関数 f_n を定める．

(1) f_n の $x \neq 0$ における微分係数 $f_n'(x)$ を求めよ．また f_1 は $x = 0$ で微分可能でないことを確かめよ．

(2) 自然数 m に対して $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上定義された f_n の m 階導関数 $f_n^{(m)}$ が存在する．適当な多項式 P_m，Q_m に対して，$x \neq 0$ で

$$f_n^{(m)}(x) = x^{n-2m}\left(P_m(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) + Q_m(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

が成り立ち，$P_m(0)$，$Q_m(0)$ のうち一方だけが 0 でないことを示せ．また $n > 1$ のとき，$f_n^{(m)}$ が $\mathbb{R}$ 全体で定義されるための m の条件を求めよ．

(3) $n \leq 0$ のとき，広義積分

$$\int_0^1 f_n(x)dx$$

の収束，発散を調べよ．

(お茶の水女子大 2018)　　(m20180601)

0.1324 (1) 上三角行列の積は上三角行列になることを示せ．

(2) 次の行列式を計算せよ．

$$A = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

(3) 次の行列を対角化せよ．また，各固有値の固有空間の次元を求めよ．

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2018)　　(m20180602)

0.1325 行列 $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ について．

(1) 固有値を求めよ．

(2) 固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(お茶の水女子大 2018)　　(m20180605)

0.1326 以下の (1)〜(3) に答えよ．

(1) 以下の微分方程式の一般解を求めよ．

$$x^2\frac{dy}{dx} - xy - y^2 = 0$$

(2) 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 2x + 3$$

(3) 以下の微分方程式を ( ) 内の初期条件のもとで解け.

$$(a)\ \cos x \cos^2 y + \frac{dy}{dx} \sin^2 x \sin y = 0 \qquad \left(x = \frac{\pi}{2},\ y = 0\right)$$

$$(b)\ \frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0 \qquad \left(x = 0,\ y = 1\ \ and\ \ x = \frac{\pi}{4},\ y = 0\right)$$

(お茶の水女子大 2019) (m20190601)

0.1327 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ について,

(1) 固有値を求めよ.

(2) 固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(お茶の水女子大 2019) (m20190602)

0.1328 次の行列 A を考える.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$T(x) = Ax$ で与えられる $\mathbb{R}^4$ の線形変換 T の像と核それぞれについて, 一組の基底と次元を求めよ.

(お茶の水女子大 2019) (m20190606)

0.1329 行列

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ. i は虚数単位である.

(お茶の水女子大 2019) (m20190612)

0.1330 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする. A^n を求めよ. ただし, n は自然数とする.

(お茶の水女子大 2020) (m20200602)

0.1331 次の行列の行列式を計算し, それが 0 となる x の値をすべて求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega & 1 & x \\ \omega & 1 & 2 & x^2 \\ \omega^2 & \omega^2 & 4 & x^3 \\ 1 & \omega & 8 & x^4 \end{pmatrix}$$

ただし, $\omega = \dfrac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ である.

(お茶の水女子大 2020) (m20200603)

0.1332 t を実数として, 4 つの $\mathbb{R}^4$ のベクトル

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をとる．V を $v_1,\ v_2$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の線形部分空間，V' を $v_1',\ v_2'$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の線形部分空間とする．さらに V と V' の和空間 $V+V'$ が $\mathbb{R}^4$ と異なるとする．

(i) t の値を求めよ．

(ii) $V+V'$ の基底を一組求めよ．

(iii) $V\cap V'$ の基底を一組求めよ．

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200604)

0.1333　次の式で定義される実対称行列 A を考える．

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを全て求めよ．

(2) 任意の 3 次元ベクトルが行列 A の固有ベクトルの線形結合で表されることを示せ．

(3) 行列 $\sin\left(\dfrac{1}{2}\pi A\right)$ とその固有値を求めよ．

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200605)

0.1334　行列 $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の各問いに答えよ．

(1) 行列式 $\det(M)$ を求めよ．

(2) 行列 M は可逆か否かを述べ，可逆ならばその逆行列 M^{-1} を求めよ．

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200616)

0.1335　行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200617)

0.1336　N を自然数とする．このとき，次の各問に答えよ;

(1) $y\geq 0$ に対して，次が成り立つことを示せ．

$$e^y \geq \frac{y^N}{N!}$$

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}(1+x)^N dx$ の収束・発散を調べよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ を $\displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} t\left(1+\log\frac{1}{t}\right)^N dt \quad (n=1,2,\cdots)$ で定める．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210604)

0.1337　次の行列 A について，$f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ で与えられる $\mathbb{R}^4$ の線形変換 f を考える．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & a & b \\ -1 & 2 & c & d \end{pmatrix}$$

(1) 線形変換 f の像が $\mathbb{R}^4$ の 2 次元部分空間となるときの a,b,c,d の値を求めよ.

(2) a,b,c,d が (1) の値のときの $f(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$ の解空間の次元と 1 組の基底を求めよ.

(3) f を a,b,c,d が (1) の値のときの $\mathbb{R}^4$ の線形変換とし, g を $\mathbb{R}^4$ の線形変換で, 像が $\mathbb{R}^4$ の 2 次元部分空間であるものとする. このとき, g と f との合成写像 $f\circ g$ の像空間の次元のとり得る値の範囲を答え, その範囲のそれぞれの次元となる g の例をあげよ.

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210605)

0.1338 $A=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 7 & 5 \\ -6 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ の三つの行列に対し, 以下の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{rank}(A)$, $\mathrm{rank}(B)$, $\mathrm{rank}(C)$ を求めよ.

(2) A^{-1}, B^{-1}, C^{-1} が存在するならばそれを求め, 存在しないならばその理由を示せ.

(3) B^n を求めよ.

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210608)

0.1339 $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^2$ への線形写像 $f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+2b-2c+d \\ a-b-5c-2d \end{pmatrix}$ の核 $(\mathrm{Ker}f)$ と像 $(\mathrm{Im}f)$ の次元と基底をそれぞれ求めよ.

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210609)

0.1340 以下の問いに答えよ. ただし, 行列はすべて複素行列とする.

(1) X をベクトル空間, U,V,W を X の部分ベクトル空間とする. W が U,V の和集合 $U\cup V$ に含まれるとき, W は U に含まれるか, V に含まれるかのどちらかであることを示せ.

(2) A を 3 次正方行列で, $A^3=O$, $A^2\neq O$ となるものとする. ただし, O は零行列とする. A の階数を求めよ.

(3) 次の行列 A を考える. ただし, a は複素数とする.

$$A=\begin{pmatrix} 1-a & -1 & a-2 \\ 2a & 2 & 2-2a \\ -a & -1 & a-1 \end{pmatrix}$$

(a) $a=0$ のとき, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ.

(b) $a\neq 0$ のとき, A は対角化可能でないことを示せ.

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220604)

0.1341 任意の行列 A に対してそのエルミート共役を $A^\dagger$ と表す.

(1) 行列の積 $A^\dagger A$ が負の固有値を持たないことを示せ.

(2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき, 行列 $A^\dagger A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(3) (2) の行列 A に対して行列 $(A^\dagger A)^n$ と $e^{A^\dagger A}$ を求めよ. ただし, n は正の整数である.

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220608)

0.1342 行列 A を $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき，下の (1)〜(5) を答えよ．

ただし，3 つのベクトル $\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_2$, $\boldsymbol{m}_3$ を $\boldsymbol{m}_1=\begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{m}_2=\begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{m}_3=\begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \end{pmatrix}$ と

するとき，$M=[\boldsymbol{m}_1,\ \boldsymbol{m}_2,\ \boldsymbol{m}_3]$ と表される行列 M は $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$ であるとする．

(1) 行列の 3 つの固有値を a_1, a_2, a_3 および固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ を求めよ．ただし，$|\boldsymbol{u}_1|=|\boldsymbol{u}_2|=|\boldsymbol{u}_3|=1$ とすること．

(2) 固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ を用いて作られる行列 U を $U=[\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3]$ とする．$UV=I$ のように行列 U に右からかけると単位行列 I となる行列 V を求めよ．

(3) 固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ は互いにどのような関係にあるか説明せよ．

(4) 固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ と行列 U について, 下式を満たすような 3 つの行列 P_1, P_2, P_3 を求めよ．ただし，P_1, P_2, P_3 はそれぞれ 3 行 3 列の行列であり，$\boldsymbol{0}$ は零ベクトルである．

$$\begin{cases} P_1U=[\ \boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0}\ ] \\ P_2U=[\ \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \boldsymbol{0}\ ] \\ P_3U=[\ \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{u}_3\ ] \end{cases}$$

(5) 行列 A の n 乗である A^n を求めよ．ただし，n は正の整数である．

(東京大 2011)　　(m20110705)

0.1343 $f(x)$ を $-l \leqq x \leqq l$ で定義された関数とする．このとき，

$$a_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx \quad (m=0,1,2,\cdots)$$

$$b_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx \quad (m=1,2,\cdots)$$

とすると，$f(x)$ は,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi}{l}x+b_m\sin\frac{m\pi}{l}x\right) \quad \cdots \quad ①$$

と展開できる．以下の問に答えよ．

(1) 次式で定義された関数 $f(x)$ の a_m, b_m を求め，① 式で $l=1$ とした式に従い $f(x)$ を展開せよ．

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (-1 \leqq x \leqq 0) \\ 1-x & (0<x \leqq 1) \end{cases}$$

(2) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で定義される関数 $f(x)=\cos x$ を ① 式で $l=\dfrac{\pi}{2}$ とした式に従い展開し，その展開式を利用し，以下の無限級数

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{15}+\frac{1}{35}-\frac{1}{63}+\cdots+\frac{(-1)^{m-1}}{4m^2-1}+\cdots$$

の値を求めよ．

(東京大 2013)　　(m20130701)

0.1344 以下の問いに答えよ．i は虚数単位とする．

(1) 複素数の範囲で -4 の 4 乗根をすべて求めよ．

(2) 複素関数 $f(z)=z^2$ を複素平面上の点 $1+i$ から点 $2+2i$ にいたる線分に沿って積分した結果を示せ．

(3) 実関数の定積分

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}\qquad(a>1)$$

を求めたい．$z=\exp(i\theta)$ とし，I を複素積分の形で表せ．積分路も示すこと．

(4) 留数定理を用いて (3) の I の値を計算せよ．

(5) 複素関数 $f(z)=f(x+iy)=\left(x^2-y^2\right)+ibxy$ が正則となるように係数 b を定めよ．また，そのときの $f(z)$ の導関数を求めよ．

(東京大 2013)　　(m20130704)

0.1345 3 個の一次独立な実数ベクトル $\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ \overrightarrow{a_3}$ に対して，3 次の正方行列 A の (i,j) 成分を $\overrightarrow{a_i}\cdot\overrightarrow{a_j}$ で定義する．ここで $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ は，ベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の内積を表すものとする．ただし，$\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_3}=0$ であるする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の行列式を求めよ．さらに，その値が正であることを示せ．

(2) 実数 x に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & x\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1\\1\\x\end{pmatrix}$$

で定義する．$f(x)$ を定めよ．

(3) $f(x)$ を最小にする x を求めよ．さらに，$f(x)$ の最小値を求めよ．

(4) 設問 (3) で求めた x に対して，ベクトル $\overrightarrow{b}$ を $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+x\overrightarrow{a_3}$ とおく．このとき，$\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{a_3}$ は直交することを示せ．

(5) 任意の実数 $x_1,\ x_2,\ x_3$ に対して，

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\geq 0$$

であることを証明せよ．さらに，等号が成立するための必要十分条件を示せ．

(東京大 2015)　　(m20150705)

0.1346 3 次の正方行列 A の固有値が $-1,\ 1,\ 2$ であるとする．また，I を 3 次の単位行列とする．

(1) A の特性多項式 $\phi(x)$ を求めよ．

(2) A^3 および A^4 を，A^2 と A と I の線形和で表せ．

(3) $A^n=a_nA^2+b_nA+c_nI$ と表せる．$a_{n+1},\ b_{n+1},\ C_{n+1}$ を $a_n,\ b_n,\ c_n$ を用いて表せ．ただし，n は 1 以上の整数である．

(4) $a_n,\ b_n,\ c_n$ を求めよ．逆行列を求める以下の公式を用いてもよい．

公式：

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \text{ について，} \det P \neq 0 \text{ のとき}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} p_{22}p_{33} - p_{23}p_{32} & p_{13}p_{32} - p_{12}p_{33} & p_{12}p_{23} - p_{13}p_{22} \\ p_{23}p_{31} - p_{21}p_{33} & p_{11}p_{33} - p_{13}p_{31} & p_{13}p_{21} - p_{11}p_{23} \\ p_{21}p_{32} - p_{22}p_{31} & p_{12}p_{31} - p_{11}p_{32} & p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21} \end{pmatrix}$$

(東京大 2016)　　(m20160705)

0.1347 確率変数 X の累積分布関数 $F(x)$ が以下の微分方程式で表されるとする．

$$\frac{dF}{dx} = \frac{F(1-F)}{s}$$

今，$F(m) = 1/2$ である．ただし，m, s は実数である．このとき，設問 (1)〜(5) について答えよ．

(1) 累積分布関数 F，および F の密度関数 f をそれぞれ求めよ．

(2) f が偶関数となる m を求めよ．ただし，その導出過程，または理由を示すこと．

(3) 期待値 $E = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f dx$ を求めよ．ただし，その導出過程を示すこと．

次に，入力信号の値 x に応じた確率で信号を出力したりしなかったりするシステムを考える．今，n 種類の入力信号の値 $x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ に対して，信号が出力された頻度を調べたところ $r_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ を得た．以下の問いに答えよ．

(4) 関数 $\varphi(F(x)) = \log\left(\dfrac{F(x)}{1-F(x)}\right)$ を，x の一次式で表せ．

(5) $y_i = \varphi(r_i)$ としたとき，

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \{y_i - \varphi(F(x_i))\}^2$$

を最小にする m と s を求め，それぞれ下記の統計量を用いて表せ．

平均：　$\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j$,　　$\overline{y} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j$

分散：　$\mathrm{var}(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2$,　　$\mathrm{var}(y) = \overline{y^2} - \overline{y}^2$

共分散：　$\mathrm{cov}(x, y) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j y_j - \overline{x} \cdot \overline{y}$

(東京大 2017)　　(m20170702)

0.1348 微分方程式に関する以下の問いに答えよ．

(1) 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^x$$

を境界条件 $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ のもとで解け．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．

(2) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = (1-y)y$$

を解け．ただし，$y(0) = \dfrac{1}{2}$ とする．

(3) $x > 0$ の範囲で定義された関数 $u(x)$ に関する微分方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{A}{x}\frac{du}{dx} - u = 0 \cdots (*)$$

に関して，以下の問いに答えよ．ただし，A は定数で $A \leq 1$ とする．

(a) 以下の微分方程式

$$\frac{d^2 f_\alpha}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d f_\alpha}{dx} - \left(1 + \frac{\alpha^2}{x^2}\right) f_\alpha = 0$$

を満たす関数 $f_\alpha(x) \neq 0$ があるとする．ただし，α は非負の定数とする．ここで，式 $(*)$ の解が，関数 $g(x)$ を用いて $u(x) = f_\alpha(x)g(x)$ と表せると仮定すると，

$$\Big[\quad (\text{ア}) \quad\Big]\frac{d f_\alpha}{dx} + \Big[\quad (\text{イ}) \quad\Big] f_\alpha = 0$$

が成り立つ．空欄 (ア), (イ) に入る数式を，$g(x)$, A, α を用いて表せ．

(b) (a) の空欄 (ア), (イ) に入る数式が常にゼロとなるよう，$g(x)$ および定数 α を A を用いて表せ．また，必要であれば，積分定数の記号としては C を用いよ．

(東京大 2018) (m20180701)

0.1349 3 つのベクトル場 $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ を考える．各ベクトル場は次のように定義する．

$$\overrightarrow{A} = rf(r,z)\overrightarrow{e}_\theta$$
$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}$$
$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{\nabla}\{zf(r,z)\}$$

ただし，$f(r,z)$ は

$$f(r,z) = (r^2 + z^2)^{-3/2}$$

とする．円柱座標系 (r, θ, z) における基底ベクトルを $(\overrightarrow{e}_r,\ \overrightarrow{e}_\theta,\ \overrightarrow{e}_z)$ とし，以下の問いに答えよ．必要であればスカラー場 ϕ およびベクトル場 $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r V_r + \overrightarrow{e}_\theta V_\theta + \overrightarrow{e}_z V_z$ に対する以下の勾配，発散，回転の式を用いてよい．

$$\overrightarrow{\nabla}\phi = \overrightarrow{e}_r\frac{\partial\phi}{\partial r} + \overrightarrow{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \overrightarrow{e}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}$$
$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$
$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial\theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right) + \overrightarrow{e}_\theta\left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \overrightarrow{e}_z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)$$

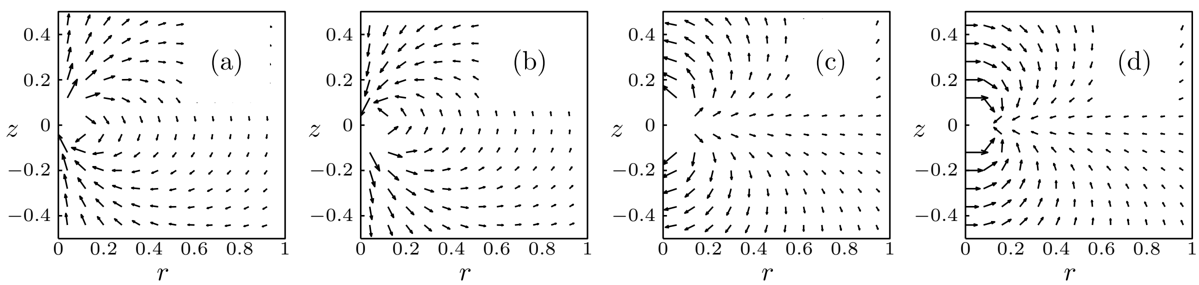
(1) $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{B}$ を求めよ．

(2) $r \leq r_0$ および $z = z_0$ により定義される円板面 S_0 を考える $(z_0 > 0)$．面の法線方向を $\overrightarrow{e}_z$ とするとき，この円板面における次の面積分 Φ を，必要があれば r_0, z_0 用いて，表わせ．

$$\Phi = \int_{S_0}\overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}$$

(3) $\overrightarrow{B}$ および $\overrightarrow{C}$ を求めよ．

(4) ベクトル場 $\overrightarrow{B}$ および $\overrightarrow{C}$ の分布の概略として正しい図を下の (a)-(d) からそれぞれ選べ．



(5) $r \leq r_0$ および $z_1 \leq z \leq z_2$ により定義される円柱 $(z_1 > 0)$ に対し，側面と両底面からなる閉曲面 S_1 を考える．面の法線方向を円柱外向きとする．この閉曲面における次の面積分 Q を，必要であれば r_0, z_1, z_2 を用いて，表わせ．

$$Q = \int_{S_1} \overrightarrow{C} \cdot d\overrightarrow{S}$$

(東京大 2018)　　(m20180703)

0.1350　2 つの正方行列 A, B を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}+1 & \frac{1}{\sqrt{2}}-1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}-1 & \frac{1}{\sqrt{2}}+1 & 1 \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

とし，行列 C を $C = BAB^{-1}$ とする．以下の問いに答えよ．なお，以下では任意のベクトル $\overrightarrow{x}$ に対し $\overrightarrow{x}^T$ はその転置を表すものとする． また，行列 I を単位行列とし， ある正方行列 X に対して $\exp(X)$ を

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots$$

と定義する．

(1) 行列 A の固有値を複素数の範囲で求めよ．

(2) 行列 C の固有値を複素数の範囲で求めよ．

(3) あるスカラー変数 t に対して $\exp(At)$ を求めよ．

(4) 3 次元ベクトル $\overrightarrow{x}$ に対してスカラー関数 $f(\overrightarrow{x})$ を

$$f(\overrightarrow{x}) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \exp\left(C\frac{2\pi k}{n}\right)\overrightarrow{a} - \overrightarrow{x} \right\}^T \left\{ \exp\left(C\frac{2\pi k}{n}\right)\overrightarrow{a} - \overrightarrow{x} \right\}$$

とおく．ただし，n は $n > 1$ を満たす整数，$\overrightarrow{a}$ は以下のような 3 次元ベクトルである．

$$\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

関数 $f(\overrightarrow{x})$ を最小にする $\overrightarrow{x}$ は，ある単位ベクトル $\overrightarrow{b}$ を用いて以下のような形式で表せる．

$$\overrightarrow{x} = \boxed{\text{(ア)}} \left(\sum_{k=1}^{n} \boxed{\text{(イ)}} \right) \overrightarrow{b}$$

(a) (ア) と (イ) に入る数式を書け．必要であれば a_1, a_2, a_3, n, k を用いてよい．なお，行列を含まない形式で解答すること．

(b) $\overrightarrow{b}$ を求めよ．

(5) (4) で求めた $\overrightarrow{x}$ に対して，$n \to \infty$ としたときの $\overrightarrow{x}$ を a_1, a_2, a_3 を用いて表せ．

(東京大 2018)　　(m20180705)

0.1351　微分方程式に関する以下の問いに答えよ．

(1) 微分方程式

$$\frac{dv}{dt} = -a(v^2 - b^2)$$

を $t \geq 0$ の範囲で考える．ただし，a, b は定数で $a > 0$, $b > 0$ とする．

(a) v の一般解を求めよ．

(b) $v(0) = 0$ のとき，v を求めよ．

(c) (b) で求めた解のグラフの概形を描け．

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ．ただし，$x > 0$ とする．

$$6x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 5x\frac{dy}{dx} + 5y = x$$

(3) 次の連立微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(東京大 2020)　　(m20200701)

0.1352 i を虚数単位とし，z は複素数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 次の複素数を $x + iy$（x, y は実数）の形ですべて求めよ．ただし，x, y の表式に三角関数を含んではならない．

(a) $\left(1 - \sqrt{3}i\right)^3$　　(b) $i^{1/2}$　　(c) $\dfrac{(1-i)^6}{(1+i)^8}$

(2) 関数 $z = \tan\omega = \dfrac{\sin\omega}{\cos\omega}$ の逆関数を $\omega = \tan^{-1} z$ で表す．

(a) 次の式が成り立つことを示せ．　$\tan^{-1} z = \dfrac{i}{2}\log\left(\dfrac{i+z}{i-z}\right)$

ただし，log は複素対数関数である．

(b) $\tan^{-1} z$ の z に関する微分を求めよ．

(3) 複素平面において，曲線 C を $z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とする．

(a) 次の積分 $I(k)$ を求めよ．ここで，k は $0 < k < 1$ の定数とする．　$I(k) = \displaystyle\int_C \frac{1}{k^2z^2+1}dz$

(b) $k = 2 - \sqrt{3}$ のとき，I の値を求めよ．

(4) 実積分 J の値を留数定理により求めることを考える．　$J = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx$

(a) J の積分範囲を $[-\infty, \infty]$ と変形して，被積分関数に e^{ix} を用いて J を表せ．

(b) 関数 $f(z) = 1/(z^2+1)^2$ とする．複素平面において，図 1 の半径 Γ（円弧 ADB）の半径 R が十分に大きい時，次のことが成り立つことを示せ．　$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz = 0$

(c) 図 1 の C に関する周回積分を考えることにより，J の値を求めよ．

このとき，複素平面の上半平面において，

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)e^{iz}dz = 0$$

であることを用いてよい．

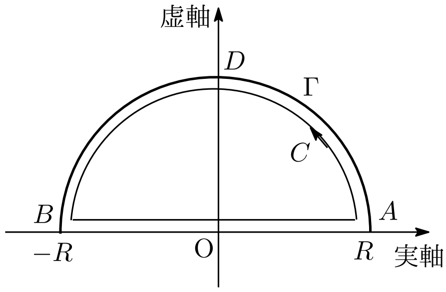


図 1

(東京大 2020)　　(m20200703)

0.1353 数列 x_n, y_n, z_n $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を，次の漸化式で定義する．

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \qquad (n \geq 0)$$

ただし,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，初期値 $x_0,\ y_0,\ z_0$ は実数で与えられているものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の全ての固有値と，それに対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) A^n を求めよ．

(3) $x_0 > 0,\ y_0 > 0,\ z_0 > 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n}$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{{x_n}^2 + {y_n}^2 + {z_n}^2} < C$ となる定数 C $(C > 0)$ が存在するための，初期値 $x_0,\ y_0,\ z_0$ に関する必要十分条件を示せ．

(東京大 2020)　　(m20200704)

0.1354　実数 a, b, c, d に対し，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad+bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) $\det B$ を $\det A$ で表せ．

(2) $\mathrm{rank}A = 0$ のとき $\mathrm{rank}B$ を求めよ．

(3) $\mathrm{rank}A = 1$ のとき $\mathrm{rank}B$ を求めよ．

(4) $\mathrm{rank}A = 2$ のとき $\mathrm{rank}B$ を求めよ．

(東京工業大 2011)　　(m20110802)

0.1355　$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を求めよ．

(東京工業大 2012)　　(m20120803)

0.1356　$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ とおく．A が逆行列を持つための条件を求め，更にその場合に逆行列を求めよ．

(東京工業大 2012)　　(m20120804)

0.1357　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$ が対角化可能であるための必要十分条件を求めよ．ただし，a, b, c は複素数とする．

(東京工業大 2013)　　(m20130801)

0.1358　3 次の正方行列 M を次で定義する:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -a^2+2a+3 & 2 & a^2-6a+7 \\ a^2-3a & 0 & a \end{pmatrix}$$

このとき以下の問に答えよ．

(1) $a=1$ のとき $P^{-1}MP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ．

(2) $a=2$ のとき $Q^{-1}MQ$ が対角行列となるような正則行列 Q が存在するか否かを理由をつけて述べよ．またそのような Q が存在する場合は $Q^{-1}MQ$ を求めよ．

(3) $a=3$ のとき $R^{-1}MR$ が対角行列となるような正則行列 R が存在するか否かを理由をつけて述べよ．またそのような R が存在する場合は $R^{-1}MR$ を求めよ．

(東京工業大 2014)　　(m20140803)

0.1359 実数 a, b に対して

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & a \\ ab & b^2 & b \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

とおく．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P をみつけよ．

(東京工業大 2015)　　(m20150803)

0.1360

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく．

(1) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を一つ求めよ．

(2) 正の整数 n に対して A^n を求めよ．

(東京工業大 2017)　　(m20170802)

0.1361 c を正の実数とする．次の重積分を計算せよ．

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} dxdy \qquad D \ :\ x^2+y^2 \leqq cx$$

(東京工業大 2017)　　(m20170804)

0.1362 次の条件 (i), (ii) をみたす 3 次正方行列 A を求めよ．

(i) A の固有値はすべて正の実数である．

(ii) $A^2 = \begin{pmatrix} 27 & -26 & -10 \\ 13 & -12 & -5 \\ 10 & -10 & -1 \end{pmatrix}$

(東京工業大 2018)　　(m20180802)

0.1363 行列

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ -4 & 0 & 1 & 4 \\ 10 & 2 & 1 & -10 \end{pmatrix}$$

に対して，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．

(東京工業大 2019)　　(m20190802)

0.1364 $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & 16 & -2 \\ -3 & -5 & 1 \\ -3 & -8 & 4 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 3 次正則行列 P で，$P^{-1}AP$ が対角行列になるものを求めよ．

(2) 3 次正則行列 Q で，$Q^{-1}AQ$ と $Q^{-1}BQ$ が対角行列になるものを求めよ．

(東京工業大 2020)　　(m20200802)

0.1365 (1) xyz 空間内の xz 平面上の曲線 $x = e^z \cos z$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq z \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $x = 0$ で囲まれる領域を，z 軸のまわりに回転してできる回転体 A の体積を求めよ．

(2) 球 $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 3$ と円柱 $x^2 - 2x + y^2 \leqq 0$ の共通部分を B とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iiint_B |z|\, dxdydz$$

(東京工業大 2022)　　(m20220802)

0.1366 a は実数とする．次の行列を A とし，3 次単位行列を E とする．

$$\begin{pmatrix} -10a-11 & 13a-23 & -30a-30 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4a+4 & -7a+17 & 12a+11 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|E - A|$ を展開して a の式で表しなさい．

(2) t の方程式 $|tE - A| = 0$ の解がすべて負の実数となるような a の範囲を求めなさい．

(東京農工大 2011)　　(m20110904)

0.1367 a を実数とし $A = \begin{pmatrix} 1 & 2-a & a \\ 0 & 2-a & -2+a \\ 2 & 4-a^2 & a^2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2-a \\ 10+3a-a^2 \end{pmatrix}$ とする．

(1) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつような a の値を求めなさい．

(2) a を (1) で求めた値とするとき，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解きなさい．

(東京農工大 2012)　　(m20120903)

0.1368 以下の広義積分の値を求めなさい．

$$\int_0^\infty \left(xe^{-x} + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

(東京農工大 2013)　　(m20130902)

0.1369 4×4 行列 $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えなさい．

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めなさい．

(2) t の方程式 $|tE - A| = 0$ を満たす t の値をすべて求めなさい．ただし E は 4 次単位行列とする．

(3) $B = A - E$ とし，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．このとき，連立 1 次方程式 $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{O}$ の解をすべて求めなさい．

(東京農工大 2013)　　(m20130904)

0.1370 x の関数 $y=y(x)$ について以下の問いに答えなさい.

(1) 微分方程式 $y'=y(1-y)$ の解のうち, $y(0)=\dfrac{1}{3}$ を満たすものを求めなさい.

(2) 微分方程式 $y''+4y=e^x$ の解のうち, $y(0)=\dfrac{6}{5}$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{6}{5}e^{\frac{\pi}{4}}$ を満たすものを求めなさい.

(東京農工大 2013)　　(m20130905)

0.1371 A は 3 行 3 列の行列で, その (i,j) 成分が $\sin\left(\dfrac{7i+5j-1}{6}\pi\right)$ となるものとする.

(1) A の行列式を計算しなさい.

(2) 連立 1 次方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解のうちで $x^2+y^2+z^2=1$ を満たすものをすべて求めなさい.

(東京農工大 2014)　　(m20140904)

0.1372 c を定数とする. 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & c \end{pmatrix}$ が 1 を固有値としてもつとき, 次の問いに答えなさい.

(1) c の値を求めなさい.

(2) A の固有値 1 に属する固有ベクトルで $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ の形のものを求めなさい.

(東京農工大 2015)　　(m20150903)

0.1373 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 7 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -5 \\ t \\ u \end{pmatrix}$ とする. ただし, t,u は定数とする.

(1) 未知数 x_1,x_2,x_3 に関する連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解をもつとき, u を t の式で表しなさい.

(2) u が (1) で求めた t の式で表されるとする. $t=9$ とした場合の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を解きなさい;

(東京農工大 2016)　　(m20160903)

0.1374 r は実数とする. 行列 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & r & 1 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えなさい.

(1) $A\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が成り立つとき, r の値を求めなさい.

(2) r は (1) で求めた値とする. そのときの A の固有値を λ_1, λ_2, λ_3 とする. ただし $\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3$ とする. A の固有値 λ_1 に属する固有ベクトルで $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ の形のものを求めなさい.

(東京農工大 2017)　　(m20170903)

0.1375 x を定数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & x+1 & -3x+1 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8-x \\ 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい．

(1) $A\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{v}$ が成り立つような x の値を求めなさい．

(2) $x = -5$ のとき，ベクトル $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ と実数 c に対して，$A\boldsymbol{w} = c\boldsymbol{w}$ が成り立つような 3 つの実数の組 (a, b, c) をすべて求めなさい．

(東京農工大 2018)　　(m20180903)

0.1376 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -5 & -4 & 2 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい．

(1) A の固有値をすべて求めなさい．

(2) A の最小の固有値に属する固有ベクトルで $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ の形のものを求めなさい．

(東京農工大 2019)　　(m20190903)

0.1377 累次積分 $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3} dx \right) dy$ の値を求めなさい．

(東京農工大 2020)　　(m20200902)

0.1378 等式

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

が成り立つような実数 a, b, c, d の値を求めなさい．

(東京農工大 2020)　　(m20200903)

0.1379 t は実数とする．3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & t & 0 \end{pmatrix}$ について　$A \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$ が成り立つとき，以下の問いに答えなさい．

(1) t の値を求めなさい．

(2) A の逆行列を求めなさい．

(3) A の固有値のうち最小のものを p とする．p に属する固有ベクトルで $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ の形のものを求めなさい．

(東京農工大 2022)　　(m20220904)

0.1380 全微分可能な関数 $z = f(x, y)$ に対して，極座標による変数変換

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \quad (r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$$

を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\left[\dfrac{\partial z}{\partial r}\,,\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right] = \left[\dfrac{\partial z}{\partial x}\,,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}\right] A$ を満たす行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ を求めよ.

(2) x, y の r, θ に関するヤコビアン（ヤコビの行列式）$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を計算せよ.

(3) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ を r, $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を使って表せ.

(電気通信大 2012)　　(m20121003)

0.1381 複素関数 $f(z) = \dfrac{z^2}{z^4+1}$ について以下の問いに答えよ.

(1) $f(z)$ のすべての極を極形式 $\left(re^{i\theta}\text{の形}\right)$ で表せ.

(2) α を $f(z)$ の極とするとき，$f(z)$ の α における留数が $\dfrac{1}{4\alpha}$ であることを示せ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ を求めよ.

(電気通信大 2012)　　(m20121005)

0.1382 線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}, \quad p\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad q\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

で定義する．以下の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{Ker}\, p \subset \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$ を示せ.
ここで，$\mathrm{Ker}\, p$ は，p の核，$\mathrm{Ker}\,(g \circ f)$ は合成写像 $g \circ f$ の核である.

(2) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, を条件 $g \circ p = q \circ f$ を満たす線形写像とする．$g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$ を求め，$\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する g の表現行列 A を求めよ.

(3) A の固有値をすべて求めよ.

(電気通信大 2015)　　(m20151002)

0.1383 (1) $z = f(x,y)$ を C^2 級関数とし，$x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ であるとする.

(a) z_u を z_x, z_y, u, v を用いて表せ.

(b) z_{uu} を z_x, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, u, v を用いて表せ.

(2) 関数 $f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$ $\quad \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2},\ 0 < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の極値を求めよ.

(電気通信大 2016)　　(m20161003)

0.1384 C^1 級関数 $f(r)$ に対して，次の合成関数

$$u(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2}) \qquad (r = \sqrt{x^2+y^2})$$

を考える．以下の問いに答えよ.

(1) xyz 空間内の曲面 $S : z = u(x,y)$ を考える．このとき，S 上の点 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ f(1))$ における S の接平面と z 軸との交点の z 座標 z_0 を $f(1)$, $f'(1)$ を用いて表せ．ただし，α は定数とする.

(2) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ が r の関数として表されることを示せ.

(3) $f(r)=r^2e^{-r^2}$ のとき，次の重積分 I の値を求めよ.

$$I=\iint_D u(x,y)\,dxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq 1\right\}$$

(電気通信大 2019)　　(m20191003)

0.1385 関数

$$f(x,y)=\frac{\pi}{4}-\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{x^2+y^2}$$

に対して，xyz 空間内の曲面 $S\ :\ z=f(x,y)$ を考える．以下の問いに答えよ.

ただし，$y=\mathrm{Tan}^{-1}x$ は $x=\tan y$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を表す

(1) $(x,y)\neq(0,0)$ に対して，偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ をそれぞれ求めよ.

(2) 曲面 S 上の点 $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ f\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)\right)$ における S の接平面の方程式を求めよ.

(3) 曲面 S と平面 $z=0$ で囲まれる立体の体積 V を求めよ.

(電気通信大 2020)　　(m20201003)

0.1386 (1) $z^4+1=0$ となる複素数 z を求めよ.

(2) $x=\sqrt{\tan\theta}$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して，導関数 $\dfrac{dx}{d\theta}$ を x の式で表せ.

(3) 広義積分 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan\theta}\,d\theta$ を求めよ.

(電気通信大 2020)　　(m20201005)

0.1387 線形写像 $f\ :\ \mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ を以下で定義する.

$$f\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x-3y+6z+4w\\-3x+3y-8z-4w\\2x+3y-3z-4w\\-5x+6y-15z-8w\end{bmatrix}$$

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\,f$ の次元と基底を求めよ.

次に，4 次正方行列 $A=\begin{bmatrix}2&3&4&-1\\1&-2&-3&-3\\-2&-3&-4&1\\5&4&5&-5\end{bmatrix}$ を用いて，線形写像 $g\ :\ \mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ を

$g(x)=Ax\quad(x\in\mathbb{R}^4)$ で定義する.

(2) g の像 $\mathrm{Im}\,g$ の次元と基底を求めよ.

(3) 共通部分 $\mathrm{Ker}\,f\cap\mathrm{Im}\,g$ の基底を求めよ.

(電気通信大 2022)　　(m20221001)

0.1388 xy 平面上の曲線 $C\ :\ \begin{cases}x=\sin t\\y=t\cos t\end{cases}$ $\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ について考える．C 上で y は x の関数となるが,

これを $y=f(x)$ $(0\leqq x\leqq 1)$ と表す．このとき以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ $(0<x<1)$ を t の関数として表せ.

(2)　$f(x)$ の $x=\dfrac{1}{2}$ におけるテイラー展開

$$f(x)=a_0+a_1\left(x-\frac{1}{2}\right)+a_2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots$$

の係数 a_0，a_1，a_2 を求めよ．

(3)　曲線 C と x 軸で囲まれた部分を D とするとき，重積分　$\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ の値を求めよ．

(電気通信大 2022)　　(m20221003)

0.1389　以下の行列 A について，次の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

(1)　A の固有値を求めよ．

(2)　A の固有ベクトルを求めよ．

(3)　$A^n\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$　$(n=1,2,3,\cdots)$ を求めよ．

(横浜国立大 2012)　　(m20121101)

0.1390　次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1)　$\left(xy^3+3x^3y\right)\dfrac{dy}{dx}-\left(y^4+4x^2y^2+x^4\right)=0$

(2)　$xy\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{4-y^2}$

(横浜国立大 2012)　　(m20121102)

0.1391　以下の行列 A について，次の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(1)　A の固有値を求めよ．

(2)　A の固有ベクトルを求めよ．

(3)　互いに直交する 3 本の A の固有ベクトルを 1 組求めよ．

(横浜国立大 2013)　　(m20131101)

0.1392　$0<x<1$ とし, $A=\begin{pmatrix} 1-x & x \\ x & 1-x \end{pmatrix}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1)　A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2)　$P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を 1 つ求めよ．

(3)　n を 1 以上の整数とする，A^n を求めよ．

(4)　A^n の各成分は，$n\to\infty$ のとき極限をもつことを示せ．

(横浜国立大 2014)　　(m20141101)

0.1393 (1) 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(2) 次の行列のランクを求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

(3) 次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(横浜国立大 2016)　　(m20161104)

0.1394 (1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + Kx = 1$ が区間 $[0, L]$ で与えられている. 一般解を求め, $y(0) = y(L) = 0$ を境界条件とする解を求めよ.

(2) $\dfrac{d^3y}{dx^3} = xe^x$ を解け.

(3) $(1 + \exp(x))\dfrac{dy}{dx} = y$ が与えられている. 　$y(0) = 1$ を境界条件とする解を求めよ.

(横浜国立大 2017)　　(m20171101)

0.1395 次の関数をフーリエ級数 $y = a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ に展開せよ.

(1) 区間 $x = [-\pi,\ \pi]$ で定義される関数 $y = \begin{cases} a \ : \ x \geq 0\,, & a \text{ は実定数} \\ 0 \ : \ x < 0 \end{cases}$

(2) 区間 $x = [0,\ \pi]$ で定義される三角関数 $y = a\sin(nx)\cos(nx)$　ここで n は整数

(3) 区間 $x = [0,\ \pi]$ で定義される一次関数 $y = x$

(横浜国立大 2017)　　(m20171102)

0.1396 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = (y - x)^2$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} = (y + \cos x)\sin x$

(横浜国立大 2017)　　(m20171104)

0.1397 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y^2\left(\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right) = 1$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y}{x + y}$

(横浜国立大 2018)　　(m20181102)

0.1398 行列 A が以下で与えられている.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値とその固有ベクトルを求めよ.

(2) 行列 A を対角化せよ．

(3) A^n を計算せよ．ただし，n は正の整数とする．

(横浜国立大 2020) (m20201101)

0.1399 次の行列 A について以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を一つ求めよ．

(3) n を 1 以上の整数とする．$\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．

(横浜国立大 2022) (m20221101)

0.1400 次の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x \sin x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(3x - \sqrt{9x^2 - 3x - 1}\right)$

(千葉大 2011) (m20111201)

0.1401 次の行列 A, ベクトル $\boldsymbol{b}$ に関する以下の設問に答えなさい．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(1) $A^T A$ を求めなさい．ただし，A^T は A の転置行列である．

(2) $A^T A$ が逆行列を持つことを示しなさい．

(3) $||A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}||^2$ が最小となるような変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ を，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ と置いたとき，p, q の値を求めなさい．ただし，$||\boldsymbol{a}||$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ の長さを表す．

(千葉大 2011) (m20111202)

0.1402 対称行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 行列 A の固有値を全て求めなさい．

(2) (1) で求めた固有値に対応する大きさ (長さ)1 の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ をそれぞれ求めなさい．

(3) $P = (\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2)$ としたとき．$PP^{-1} = P^{-1}P = I$ を計算することによって，P が直交行列であることを確認しなさい．ただし，I は単位行列とする．

(4) $P^{-1}AP$ を計算して，行列 A を対角化しなさい．

(千葉大 2012) (m20121202)

0.1403 下記の重積分について以下の問いに答えなさい．

$$I = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy \qquad D = \left\{(x, y) \;\middle|\; \left(x^2 + y^2\right)^2 \leq y^2 - x^2 ,\ y \geq 0\right\}$$

(1) 極座標に変換して D を図示しなさい．

(2) I で示される積分領域の立体の外形を図示しなさい．

(3) I を極座標で書きなさい.

(4) I を求めなさい.

(千葉大 2012)　　(m20121204)

0.1404 次の数列，または，関数の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ 　ここで，$a_n = 2 + \dfrac{2}{a_{n-1}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$，$a_0 = 2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x - 3} - x + 1\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$

(千葉大 2013)　　(m20131201)

0.1405 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ $(n \geq 1)$ を満たす数列 $\{x_n\}$ は，始めの二項 x_1, x_2 が与えられれば定まる. そこで，$(x_1, x_2) = (0, 1)$ で定まる数列を $\boldsymbol{e}_1$，$(x_1, x_2) = (1, 0)$ で定まる数列を $\boldsymbol{e}_2$ とする，$\{x_n\}$ の一般項を求めるため，数列の番号を一つずらす線形変換 T を考えれば，基底 $\langle \boldsymbol{e}_1\, ,\, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ に関する T の表現行列が A になることを示しなさい.

(3) A^n の固有値を用いて数列 $\{x_n\}$ の一般項を表し，$(x_1, x_2) = (1, 1)$ で定まる数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めなさい. ただし，A^n は $A \times\ A \times\ \cdots \times\ A$ を表す.

(千葉大 2013)　　(m20131202)

0.1406 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = 8e^{2x}$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - y}{x - 2y}$ 　$\left(\text{ヒント：未知関数を } u(x) = \dfrac{y}{x} \text{ に変換すると変数分離になる}\right)$

(千葉大 2013)　　(m20131204)

0.1407 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えなさい.

(1) 行列 A の固有値 λ_1，λ_2 とそれぞれに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$ を求めなさい.

(2) 固有ベクトルを縦ベクトルとして，横に並べた行列 $P = [\ \boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2\ ]$ の逆行列 P^{-1} を求めなさい.

(3) $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(4) $(P^{-1})^T = [\ \boldsymbol{q}_1,\ \boldsymbol{q}_2\ ]$ で定義されるベクトル $\boldsymbol{q}_1$，$\boldsymbol{q}_2$ が A^T の固有ベクトルであることを示しなさい. ここで A^T は A の転置行列を表す.

(千葉大 2014)　　(m20141202)

0.1408 三次元ユークリッド空間の中でデカルト直交座標系 $O-XYZ$ が定義され，次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ が与えられている. このとき，以下の問に答えなさい.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ に直交するベクトルを求めなさい.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を列ベクトルとする行列を $A = \begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ として，行列 A^TA を求めなさい．ここで，A^T は A の転置行列である．

(3) 行列 A^TA の逆行列 $\left(A^TA\right)^{-1}$ を求めなさい．

(4) ベクトル $\boldsymbol{c}$ に行列 $\left(A^TA\right)^{-1}A^T$ を乗じたベクトル $\boldsymbol{x}_0 = \left(A^TA\right)^{-1}A^T\boldsymbol{c}$ を求めなさい．

(5) $A\boldsymbol{x}_0$ を求め，このベクトルを位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$，及び，ベクトル $\boldsymbol{c}$ を位置ベクトル $\overrightarrow{OC}$ と見なしたとき，点 P がベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の定める平面上にあり，かつ $\overrightarrow{PC}$ と $\overrightarrow{OP}$ が直交することを示し，行列 $A\left(A^TA\right)^{-1}A^T$ の持つ幾何学的な意味を述べなさい．

(千葉大 2015)　　(m20151202)

0.1409 三次元空間の中にデカルト直交座標系 $O-XYZ$ 座標系が定義されている．

$y=0$ 平面（$z-x$ 平面）上の点 $A=(x_0, 0, z_0)$ を始点とし，一定方向で $y=0$ 平面から遠ざかる点 B がある．線分 AB の長さは λ で，線分 AB の方向ベクトルは，球座標系にならって，水平角（緯度）θ，方位角（経度）φ とする．ただし，$-90^\circ < \theta < 90^\circ$，$0^\circ < \varphi < 180^\circ$．点 B の座標は，$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ から，

$$B = (\lambda\cos\theta\cos\varphi + x_0\ ,\ \lambda\cos\theta\sin\varphi\ ,\ \lambda\sin\theta + z_0)$$

で与えられる．定点 E を $E=(0, -a, h)$, $a>0$ として，点 E と点 B を結ぶ直線が $y=0$ 平面（$z-x$ 平面）と交わる点を P とする．$\lambda \to \infty$ の時の P の座標を求めなさい．

（ヒント：$\lambda \to \infty$ の時の点 P を透視画法では消点 (Vanishing Point) と呼んでいる）

(千葉大 2015)　　(m20151205)

0.1410 次の行列 A, B について，以下の問に答えなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) 行列の基本変形を用いて，行列 A および行列 B の階数を求めなさい．

(2) 行列 A および行列 B が正則であるならば，逆行列を求めなさい．

(3) 行列 A を係数行列とした連立方程式 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 33 \\ 10 \end{pmatrix}$ を解きなさい．

(4) 行列 B を係数行列とした連立方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解きなさい．

(千葉大 2016)　　(m20161202)

0.1411 以下の微分方程式を解き，x の関数 $f(x)$ を求めなさい．ただし，$f(0)=1$, $f'(0)=0$ とする．

$$\left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)^2 + 3\left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right) - 4 = 0$$

(千葉大 2016)　　(m20161205)

0.1412 次の問に答えなさい．ただし，$\log x$ の底は，自然対数の底 (e) とする．

(1) (a) 関数 $\log(1+x)$ と $x\cos x$ を，それぞれ 3 次の項までマクローリン展開しなさい．

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x\cos x}\right)$ を求めなさい.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n+3^n}$ を求めなさい.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\log x+\sqrt{\log x}}-\sqrt{\log x-\sqrt{\log x}}\right)$ を求めなさい.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}(1-\tanh x)^{\frac{1}{\sin x}}$ を求めなさい.

(千葉大 2017)　　(m20171201)

0.1413 (1) 行列 $A=\begin{pmatrix} t+4 & -3 \\ 1 & t \end{pmatrix}$ （ただし，t は実数）が正則であるための条件を示しなさい.

(2) 行列 $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列 B^{-1} を求めなさい.

(千葉大 2017)　　(m20171205)

0.1414 (1) 行列 $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めなさい.

(2) 設問 (1) で求めた固有値に対する大きさ 1 の固有ベクトルを求めなさい.

(千葉大 2017)　　(m20171206)

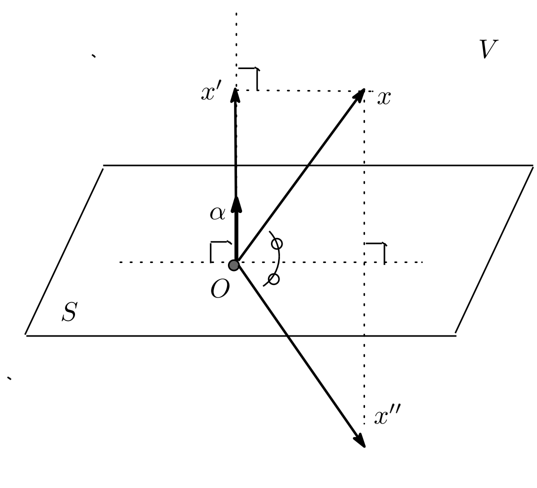
0.1415 3 次元空間において，下図に示す平面 S とベクトル $\boldsymbol{x}$ を考える．平面 S は原点 O を通り，その法線ベクトルは $\boldsymbol{a}(\neq 0)$ である．また $\boldsymbol{x}$ は原点 O を始点とする任意のベクトルである．以下の問いに答えよ．ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の内積を $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ と表すこと.

(1) $\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影を $\boldsymbol{x}'$ とする，$\boldsymbol{x}'$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$ を用いて表せ.

(2) $\boldsymbol{x}$ の平面 S に関する折り返しを表すベクトルを $\boldsymbol{x}''$ とする．$\boldsymbol{x}''$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$ を用いて表せ.

(3) (2) において，$\boldsymbol{x}$ に $\boldsymbol{x}''$ を対応させる写像は線形写像である．いま，$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{x}''=\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ とおいた場合に，この線形写像を表す行列を求めよ.



(筑波大 2011)　　(m20111304)

0.1416 実数を成分とする 2 × 2 行列全体を V として，以下の問題に答えなさい.

(1) 以下のような $\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4\}$ は V のひとつの基底であることを示しなさい.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) V から V への一次変換 A が以下を満たしているとき，基底 $\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4\}$ による A の行列表現を求めなさい.

$$A(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) A の固有値を全て求めなさい.

(筑波大 2011)　　(m20111311)

0.1417 正弦関数 $\sin x$ の逆関数 $\mathrm{Sin}^{-1}x$ を用いた関数の導関数について以下の問いに答えよ．ただし，$\mathrm{Sin}^{-1}x$ は値域を閉区間 $[-\pi/2, \pi/2]$ に制限した主値を表す関数である.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\mathrm{Sin}^{-1}x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ であることを示せ.

(2) 定義域 $-1 < x < 0$ および $0 < x < 1$ において $\dfrac{d}{dx}\left(\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{1-x^2}\right)$ を求めよ.

(筑波大 2011)　　(m20111316)

0.1418 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値，固有空間を求めよ.　　(2) A^n を求めよ．ただし，n は正の整数とする.

(筑波大 2011)　　(m20111317)

0.1419 次数が 2 以下の実係数多項式全体で構成される実線形空間 $P_2(R)$ において

内積　$(f,g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$　$(f, g \in P_2(R))$

ノルム　$||f|| = \sqrt{(f,f)}$

を定義する．以下の問いに答えよ.

(1) $f(x) = 1$ のとき，ノルム $||f||$ を求めよ.

(2) $f(x) = 1,\ g(x) = x$ のとき，内積 (f,g) を求めよ.

(3) 基底 $\{1, x, x^2\}$ からグラム・シュミットの直交化法により正規直交基底を求めよ.

(筑波大 2011)　　(m20111318)

0.1420 2 次実正方行列の全体を $M(2;R)$ とする．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2;R)$ と $M(2;R)$ の 2 つの部分集合 $T = \{X \in M(2;R) \mid Tr\,X = 0\}$，$S = \{Y \in M(2;R) \mid {}^tY = Y\}$ について以下を示せ.
ただし; $Tr\,X$ は X のトレース，${}^tY$ は Y の転置行列とする.

(1) $ad - bc \neq 0$ のとき $X \in T$ ならば $AXA^{-1} \in T$ が成り立つ.

(2) $Y \in S$ ならば $AY\,{}^tA \in S$ が成り立つ.

(3) 写像 $\Phi : T \to S$ を $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \in T$ に対して $\Phi(X) = \begin{pmatrix} y & -x \\ -x & -z \end{pmatrix}$ で定める．
$ad - bc = 1$ のとき任意の $X \in T$ に対して

$$\Phi(AXA^{-1}) = A\,\Phi(X)\,{}^t\!A$$

が成り立つ．

(筑波大 2011)　　(m20111319)

0.1421　4 次正方行列　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　について．以下の問いに答えよ．

(1) A の行列式を計算せよ．　(2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 4 次正則行列 P を求めよ．

(筑波大 2011)　　(m20111320)

0.1422　実関数

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 逆関数が存在することを示せ．

(2) 逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ．導出過程も示せ．

(3) 逆関数 $f^{-1}(x)$ の導関数を求めよ．導出過程も示せ．

(筑波大 2012)　　(m20121303)

0.1423　方程式 $\sin x = 0$ の解は $x = m\pi(0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots)$ であることから，多項式

$$g_n(x) = Cx\left[\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\right]\left[\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\right]\cdots\left[\left(1 - \frac{x}{n\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{n\pi}\right)\right]$$

は，定数 C を適切に選べば $x = 0$ のまわりで $\sin x$ の良い近似であることがわかっている．
ここで，n は正の大きな整数である．この多項式と $x = 0$ のまわりでのベキ級数展開
$\sin x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ を比較する．ここで，$a_k(k = 0, 1, 2, \cdots)$ は定数である．

(1) $\sin x$ のベキ級数展開の 3 次の項まで，すなわち a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ．

(2) 多項式 $g_n(x)$ と (1) で求めたベキ級数展開との 1 次の項の係数が一致するように C の値を決めよ

(3) 多項式 $g_n(x)$ と (1) で求めたベキ級数展開との 3 次の項の係数は $n \to \infty$ の極限で一致する．
このことを使って，無限級数 $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} + \cdots$ の和 S を求めよ．

(筑波大 2012)　　(m20121310)

0.1424　2 次曲線 $13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 - 4x - 4\sqrt{3}y - 12 = 0$ を ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} + 2\,{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} - 12 = 0$ と表すことにする．
ここで，$A = \begin{pmatrix} 13 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$，${}^t\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，${}^t\boldsymbol{x} = (x \quad y)$
である．この 2 次曲線について以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値 a_1，a_2 $(a_1 < a_2)$ とその各々に対応した正規化された固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ を並べて作った 2 次の正方行列を $P = (\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2)$ とする．
${}^tPP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を示せ．

(3) 前問で作った P を使って座標変換 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x'}$ ，$\boldsymbol{x'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を行うと，この 2 次曲線は
${}^t\boldsymbol{x'}\,{}^tPAP\boldsymbol{x'} + 2\,{}^t\boldsymbol{b}P\boldsymbol{x'} - 12 = 0$ と書ける．この式を x', y' を使って表せ．

(4) さらに，座標の平行移動 $\boldsymbol{x'} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{c}$ を行って，この 2 次曲線を標準形で表せ．
ここで，$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ である．c_1, c_2 の値も答えよ．

(5) XY 平面上にこの 2 次曲線の概形を描け．さらに，その図中に $x'y'$ 座標軸および xy 座標軸も描き加えよ．

(筑波大 2012)　　(m20121312)

0.1425 自然数 n について，$a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ \cdots,\ a_n > 0$ とする．このとき，次の (1) から (3) の示す不等式が成立することを証明しなさい．

(1) $0 < a_1 \leqq 1$ かつ $a_2 \geqq 1$ ならば $a_1 + a_2 \geqq a_1a_2 + 1$

(2) $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = 1$ ならば $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqq n$

(3) $\left(\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n \geqq a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$

(筑波大 2012)　　(m20121323)

0.1426 3 次元実ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ と 3 次実正方行列 A を

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a-b & a & b \\ -a+b & -a+c & -b+c \\ a-b & a-c & b-c \end{pmatrix}$$

により与える．ここに，a, b, c は実数とする．

(1) 零ベクトル $\boldsymbol{0}$ と異なり，a, b, c によらない 3 次元実ベクトル $\boldsymbol{w}$ で，a, b, c の値にかかわらず $A\boldsymbol{w} = 0$ を満たすものを 1 つ求めよ．

(2) いま求めたベクトル $\boldsymbol{w}$ に対し，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の一組の基底をなすことを示せ．また，$A\boldsymbol{u}$, $A\boldsymbol{v}$ のそれぞれを，これら 3 つのベクトルの 1 次結合で表せ．

(3) a, b, c によらない正則行列 P で $P^{-1}AP$ を上三角行列にするものが存在することを，具体的に P を与え $P^{-1}AP$ を求めることにより示せ．

(筑波大 2012)　　(m20121324)

0.1427 区間 (a, b) 上の微分可能な関数 $a_{ij}(t)$, $1 \leq i,\ j \leq 3$, を (i, j)−成分とする 3 次正方行列を $A(t) = (a_{ij}(t))$ とする．

(1) 行列式 $|A(t)|$ の微分 $|A(t)|'$ に関する次の等式を示せ．

$$|A(t)|' = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & a'_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & a'_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a'_{31}(t) & a'_{32}(t) & a'_{33}(t) \end{vmatrix}$$

(2) $A(t)$ が正則であるとき，上の等式の右辺の各項を行に関して余因子展開することにより，

$$|A(t)|' = \mathrm{Tr}\left(A'(t)A(t)^{-1}\right)|A(t)|$$

が成り立つことを示せ．ここで $A'(t) = \left(a'_{ij}(t)\right)$ であり，Tr はトレースを表す．

(筑波大 2012)　　(m20121325)

0.1428　積分を利用して，次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$$

(筑波大 2013)　　(m20131303)

0.1429　2 変数関数 $f(x,y)$ を $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$　(ただし，$(x,y)\neq(0,0)$) と定義する．ここで，log は自然対数である．以下の問いに答えよ．

(1)　$f(x,y)$ の全微分を求めよ．

(2)　曲面 $z=f(x,y)$ について，点 $(a,b,f(a,b))$ における法線および接平面の方程式を求めよ．

(3)　$\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ を $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0<x^2+y^2\leqq 1\right\}$ として求めたい．$f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において定義されていないので，
$D_\varepsilon=\left\{(x,y)\,\middle|\,\varepsilon^2<x^2+y^2\leqq 1\,,\ \varepsilon\in\boldsymbol{R}\right\}$ として，$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{D_\varepsilon} f(x,y)dxdy$ を計算せよ．

(筑波大 2013)　　(m20131308)

0.1430　以下でベクトルは位置ベクトルとし，3 次元空間 $\boldsymbol{R}^3$ の点 (x,y,z) とベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とを同一視する．特に原点 $(0,0,0)$ はゼロベクトル $\mathbf{0}$ と同一視する．また，$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&-1&0\end{pmatrix}$ とし，$A\boldsymbol{x}$ と表せる点全体の集合を H とする．つまり $H=\left\{A\boldsymbol{x}\,\middle|\,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3\right\}$ である，

(1)　H は平面となる．その平面の方程式を求めなさい．

(2)　$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3$ に対し，$A^2\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}$ を示しなさい．

(3)　次の 3 条件を満たす 3 次正方行列 B を求めなさい．

追記：　ただし，B はゼロ行列ではないとする．

(a) $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3$, $\boldsymbol{y}\in H$ に対し，$B\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ とは直交する．
（注：ゼロベクトルは任意のベクトルと直交する.）

(b) $\boldsymbol{y}\in H$ に対し，$B\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ である．

(c) $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3$ に対し，$\boldsymbol{z}=B\boldsymbol{x}$ なら $B\boldsymbol{z}=3\boldsymbol{z}$ である．

(4)　A と前問の B に対し，行列 $A+B$ は正則であること（逆行列を持つこと）を示しなさい．

(筑波大 2013)　　(m20131309)

0.1431　数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ は次の漸化式を満たす．

$$\begin{cases} x_{n+1}=2x_n+3y_n \\ y_{n+1}=2x_n-3y_n-2z_n \\ z_{n+1}=3x_n+3y_n-z_n \qquad\qquad (n=0,1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．

(1)　行列 A を用いて漸化式を $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\\z_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}$ と表したとき，A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $x_0=-5,\ y_0=10,\ z_0=5$ のとき，$x_n,\ y_n,\ z_n$ を求めよ．

(筑波大 2013)　　(m20131311)

0.1432 V を有限次元の実ベクトル空間であるとする．V の空でない部分集合 W が次の条件を満たすとき，W は V の部分空間と呼ばれる．

i. $v_1,\ v_2 \in W$ ならば $v_1+v_2 \in W$,

ii. $v \in W,\ c \in R$ ならば $cv \in W$.

(1) 次の集合 $W_1,\ W_2$ が R^4 の部分空間かどうか理由とともに述べよ．

(a) $W_1=\left\{\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix} : x_1x_2=x_3x_4\right\}$

(b) $W_2=\left\{\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix} : x_1+2x_2+3x_3=x_2+2x_3+3x_4\right\}$

(2) 実数を成分とする 2 次正方行列全体の集合 M は，通常の行列の和と行列のスカラー倍に関して実ベクトル空間となる．M の（M 自分以外）部分空間の例を 1 つあげ，それが部分空間になっている理由を述べよ．

(筑波大 2013)　　(m20131313)

0.1433 次の実正方行列 A に対して，以下の問いに答えよ．ただし，途中の計算過程も示すこと．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

(1) A の行列式を求めよ．

(2) $p_n=a^n+b^n+c^n+d^n$ とおくとき，$4\times\ 4$ の行列 $B=\left[p_{i+j-2}\right]_{1\le i,\ j\le 4}$ の行列式を計算せよ．

(筑波大 2013)　　(m20131314)

0.1434 任意の実数 x について $y=\tan^{-1}(x)+\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ の値を，$\tan^{-1}(x)$ の微分を用いて求めなさい．

(筑波大 2013)　　(m20131319)

0.1435 $\boldsymbol{R}^3=\left\{\begin{bmatrix} x\\ y\\ z \end{bmatrix} \middle|\ x,y,z\in\boldsymbol{R}\right\}$ とし，線形変換 $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ は，$f\left(\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 8\\ 2\\ -2 \end{bmatrix}$,

$f\left(\begin{bmatrix} 0\\ 1\\ 0 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 2\\ 6\\ 0 \end{bmatrix}$,　$f\left(\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -2\\ 0\\ 6 \end{bmatrix}$ を満たすとする．

(1) この線形変換 f の標準的な基底に関する行列表現を示せ．

(2) ある実数 $\lambda(\neq 0)$ が存在して，$f(\boldsymbol{x})=\lambda\boldsymbol{x}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ のうち，$||\boldsymbol{x}||=1$ を満たすベクトルをすべて求めよ．

(3) 整数 $n(>0)$ に対し，線形変換 f^n を，$f^1(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$, $f^n(\boldsymbol{x}) = f\bigl(f^{n-1}(\boldsymbol{x})\bigr)$ で帰納的に定義する．f^n の標準的な基底に関する行列表現を，直交行列と対角行列を用いて表せ．

(筑波大 2014)　　(m20141302)

0.1436 3 次元の列ベクトルからなる線形空間を V^3 とし，f を $V^3 \to V^3$ の線形写像とする．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ として以下の小問に答えよ．

(1) $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$，および $\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3\}$ は V^3 の基底となることを示せ．

(2) $f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{b}_1$, $f(\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{b}_2$, $f(\boldsymbol{a}_3) = \boldsymbol{b}_3$ のとき，$f(\boldsymbol{e}_1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)$, $f(\boldsymbol{e}_3)$ を $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ の線形結合として表せ．

(3) $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$ に関する f の表現行列 A を求めよ．

(4) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(5) A^n を求めよ．ただし，n は $n \geq 1$ の整数である．

(筑波大 2014)　　(m20141308)

0.1437 逆正接関数 $f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < f(x) < \dfrac{\pi}{2}\right)$ に関する以下の問いに答えよ．

(1) $y = \mathrm{Tan}^{-1}x$ とおき，$x = \tan y$ とすることで，$\dfrac{dy}{dx}$ を y の関数として求めよ．

(2) $(1+x^2)f'(x) = 1$ が成り立つことを示せ．

(3) $f^{(n)}(x)$ に関する漸化式 $(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$ が成り立つことを示せ．ただし，n は 1 以上の整数である．

(4) $f^{(n)}(0)$ に関する漸化式を解き，m を 0 以上の整数として $f^{(2m)}(0)$ および $f^{(2m+1)}(0)$ を求めよ．

(筑波大 2014)　　(m20141309)

0.1438 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値 λ_1, λ_2, λ_3 を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする．

(2) A の固有値 λ_1, λ_2, λ_3 に属する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ とするとき，$\{\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3\}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底となるように選ぶことができる．そのように選んだ $\{\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3\}$ を 1 組求めよ．

(3) (2) で求めた $\{\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3\}$ を使って行列 P を $P = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3)$ とおくとき，その逆行列 P^{-1} は P の転置行列 ${}^tP$ で与えられる．これは P がどのような行列であることによる性質か．また，P^{-1} および $P^{-1}AP$ はどうなるかを書け．

(4) 連立線形微分方程式 $\dfrac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}(t) = -A\boldsymbol{r}(t)$ を考える．ここで，$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ である．

$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ とおくとき，$q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$ が満たす微分方程式をそれぞれ求めよ．さらに，その一般解を求めよ．

(5) 初期条件が $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \\ \dot{z}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と与えられたとき，$x(t), y(t), z(t)$ を求めよ．ここで，$\dot{x}(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$，$\dot{y}(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$，$\dot{z}(t) = \dfrac{dz(t)}{dt}$ である．

(筑波大 2014)　　(m20141311)

0.1439 $(n+1)$ 次実正方行列

$$A = \begin{pmatrix} c & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & c & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & c & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & c \end{pmatrix}$$

に対し，連立一次方程式

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

が解を持つための必要十分条件は，$c = 1$ または $c = -n$ となることである．このことを示せ．

(筑波大 2014)　　(m20141312)

0.1440 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} x - [x] & 0 \leq x - [x] < \frac{1}{2} \\ 1 - (x - [x]) & \frac{1}{2} \leq x - [x] < 1 \end{cases}$$

で定義する．ただし $[x]$ は x 以下の最大の整数を表す．$x \in \mathbb{R}$ に対して

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(2^k x)}{2^k}$$

とおく．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の，$-1 \leq x \leq 1$ におけるグラフを描け．

(2) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，$g(x) \leq 1$ が成り立つことを示せ．

(3) 関数 $g(x)$ は連続であることを示せ．

(4) 自然数 n に対して，$g\left(\dfrac{1}{2^n}\right) = \dfrac{n}{2^n}$ を示せ．

(5) 関数 $g(x)$ は $x = 0$ において微分不可能であることを示せ．

(筑波大 2014)　　(m20141315)

0.1441 $f : X \to X$ を集合 X 上の写像とし，写像 $f^n : X \to X$ を，$n \geq 1$ のとき $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{ 個}}$，$f^0 = \mathrm{id}_X$（=X 上の恒等写像）で定義する．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $f\left(\displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X)\right) \subseteq \displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X)$ が成り立つことを示せ．

(2) f が単射ならば，$f\left(\displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X)\right) = \displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X)$ が成り立つことを示せ．

(筑波大 2014)　　(m20141316)

0.1442 次の極限値を求めなさい．ただし，$a>0,\ b>0$ とする．

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

(筑波大 2014) (m20141317)

0.1443 $\boldsymbol{R}^3$ のベクトルを

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_4=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\quad (a,b,c\in\boldsymbol{R})$$

とする．

(1) $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ が生成するベクトル空間の基底を一組求めなさい．

(2) $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_4$ が生成するベクトル空間の次元が 3 となる a,b,c の条件を求めなさい．

(3) $A=(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_4)$ を用いて，1 次写像 $f\ :\ \boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ を

$$f(x)=Ax\quad (x\in\boldsymbol{R}^3)$$

によって定める，f の核を求めなさい．

(筑波大 2014) (m20141319)

0.1444 $A=aE_m+bl_m\,{}^t\!l_m$ とおく．ただし，$a,b>0,\ E_m$ は m 次単位行列，

$$l_m=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\qquad (m\text{ 次列ベクトル})$$

とし，${}^t\!l_m$ は l_m の転置とする．

(1) A^2 の固有値をすべて求めよ．

(2) A^2 の逆行列を求めよ．

(筑波大 2015) (m20151301)

0.1445 $\phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\ (-\infty<x<\infty)$ とおく．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)dx=1$ を示せ．

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mu x}\phi(x)dx$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\int_{-\infty}^{y}\phi(x)dx\right)e^{\mu y-\frac{\mu^2}{2}}dy$ を求めよ．ただし，$\mu>0$ とする．

(筑波大 2015) (m20151304)

0.1446 V は実係数の 4 次以下の多項式の全体

$$V=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\mid a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}\right\}$$

とする．V は $1,x,x^2,x^3$ を基底とする実ベクトル空間になることが知られている．
さて，線形変換 $T\ :\ V\to V$ を

$$(T_p)(x)=(1-x^2)\frac{d^2p}{dx^2}(x)-2x\frac{dp}{dx}(x)+12p(x)\,,\quad p\in V$$

によって定義する．次の問いに答えよ．

(1) V の基底 $1, x, x^2, x^3$ に対する T の表現行列を求めよ．

(2) $\mathrm{rank}\, T$ を求めよ．

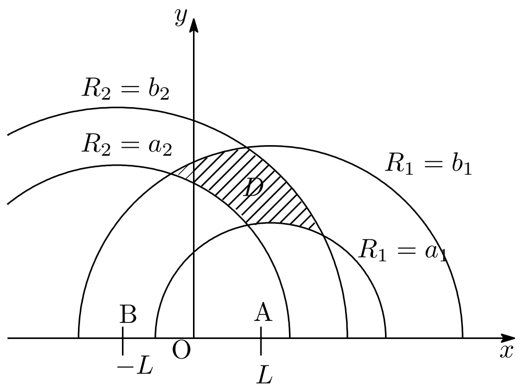
(3) $\ker T$ を求めよ．

(筑波大 2016)　　(m20161302)

0.1447 xy 平面の $y > 0$ なる領域（上半面）の点 $P(x, y)$ に対して，点 $A(L, 0)$ および点 $B(-L, 0)$ からの距離の二乗

$$R_1 = (x-L)^2 + y^2\ , \qquad R_2 = (x+L)^2 + y^2$$

を考える．ここで $L > 0$ とする．また，$f(x, y) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)$ とする．



(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) c をゼロでない定数とし，xy 平面の上半面において $f(x, y) = c$ で表される曲線を考える．この曲線上の任意の点 (x_0, y_0) における法線の方程式を求めよ．そして，その法線と x 軸との交点が c と L だけで決まることを示せ．

(3) a_1, a_2, b_1, b_2 を正の定数とし，$R_1 = a_1$ と $R_1 = b_1$ で指定される円がそれぞれ $R_2 = a_2$ と $R_2 = b_2$ で指定される円と交わる場合を考える（図を参照）．ここで $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$ とし，xy 平面の上半面において $a_1 \leq R_1 \leq b_1$, $a_2 \leq R_2 \leq b_2$ で指定される領域を D とするとき，D を x 軸の周りに回転して出来る回転体の体積は

$$V = 2\pi \int_D y dx dy$$

で与えられる．x, y に関する積分を R_1, R_2 に関する積分に変換することにより V を求めよ．

(4) xy 平面を複素平面と考え，点 $P(x, y)$ を複素数 $z = x + iy$ に対応させ，
複素関数 $g(z) = \log\left(\dfrac{z-L}{z+L}\right)$ を考える．$z - L = r_1 e^{i\theta_1}$, $z + L = r_2 e^{i\theta_2}$ とおくことにより，$g(z)$ の実部は $f(x, y)$ に一致することを示せ．ただし，$0 < r_1$, $0 < r_2$, $0 < \theta_1 < \pi$, および $0 < \theta_2 < \pi$ とする．さらに $g(z)$ の虚部は三角形 PAB のどの内角に対応するか答えよ．

(筑波大 2016)　　(m20161315)

0.1448 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする．

(2) A の正規化した固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を求めよ．ただし，$A\boldsymbol{u}_j = \lambda_j \boldsymbol{u}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ とする．

(3) A を $P^{-1}AP = D$（ただし，P は直交行列，D は対角行列）として対角化したとき，P, P^{-1} および D を求めよ．

(4) (3) で求めた P に対して，$P^{-1}(A+aE)^nP$ を求めよ．ただし，E は 3 次の単位行列，a は実定数，n は正の整数とする．

以下では $AB=BA$ となる 3 次の正方行列 B について考える．

(5) (2) で求めた $\boldsymbol{u}_j$ $(j=1,2,3)$ は B の固有ベクトルになることを示せ．

(6) (3) で求めた P に対して，$P^{-1}BP$ が対角行列になることを示せ．

(筑波大 2016)　　(m20161316)

0.1449 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値 λ_1, λ_2, λ_3 を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする．

(2) A の固有値 λ_1, λ_2, λ_3 に属する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ とするとき，$\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底となるように選ぶことができる．そのように選んだ $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$ を 1 組求めよ．

(3) A を $R^{-1}AR=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ の形に対角化する直交行列 R，および，その逆行列 R^{-1} を答えよ．

(4) x, y, z をそれぞれ任意の実数とし，ベクトル $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ で定義する．

また，$\boldsymbol{u}^T=(x \quad y \quad z)$ とする．このとき，x, y, z を変数とする関数 $f(x,y,z)=\boldsymbol{u}^TA\boldsymbol{u}$ について考える．

(a) (3) で求めた R を用いて新たな変数 X, Y, Z を $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=R^{-1}\boldsymbol{u}$ で定義し，

$f(x,y,z)$ を X, Y, Z の関数 $f(x,y,z)=F(X,Y,Z)$ と表す．このとき，関数 $F(X,Y,Z)$ を X, Y, Z の式で表せ．

(b) 任意の x, y, z に対して，$f(x,y,z) \geq 0$ であることを示せ．また，$f(x,y,z)=0$ を満たす x, y, z を求めよ．

(筑波大 2017)　　(m20171303)

0.1450 以下の関数 $f(x,y)$ が原点 $(x,y)=(0,0)$ で連続かどうかを，その理由とともに答えよ．

(1) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{y} & (y \neq 0) \\ 0 & (y=0) \end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$

(筑波大 2017)　　(m20171308)

0.1451 $E = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}\right\}$ とする．$\mathbb{R}^2$ で定義された連続関数 $f(x,y)$ の E 上でのリーマン和は，それぞれの正整数 m に対して，

$$R_m(f) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-i} f\left(\frac{2i}{m},\ \frac{j}{m}\right)\frac{2}{m^2}$$

で与えられている．$f(x,y) = x + y$ であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の E 上でのリーマン和 $R_m(f)$ を求めよ．　ただし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$ である．

(2) (1) で得られたリーマン和を用いて，関数 $f(x,y)$ の E 上での二重積分を求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)$ の E 上での累次積分を求めよ．

(筑波大 2017)　　(m20171309)

0.1452 (1) 関数 $f(x) = e^x$ をマクローリン展開（$x = 0$ のまわりでテイラー展開）せよ．

(2) 以下の性質 (A) を用いて，次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{1!} + \frac{n-1}{2!} + \cdots + \frac{2}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right)$$

(A) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$$

が成り立つ．

(3) 上の性質 (A) を証明せよ．

(筑波大 2017)　　(m20171312)

0.1453 a を 0 と異なる実数とし，3 次実正方行列を $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$ で与える．

(1) A が与える数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の上の線形変換を

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad , \qquad f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

で表す．この f の核 $\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ および 像 $\mathrm{Im}\, f = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\}$ の基底を 1 組ずつ求めよ．

(2) $ABA = O$ を満たすすべての 3 次実正方行列 B の中で，階数が最大であるものを 1 つ求めよ．ただし，O は零行列を表す．

(筑波大 2017)　　(m20171314)

0.1454 (1) 数列

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が単調減少であることを示せ．

(2) 上の数列が，$C \geq \dfrac{1}{2}$ を満たすある定数 C に収束することを示せ．

(3) 広義積分

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right) dx$$

の値を上の定数 C を用いて表せ．ただし，$[\alpha]$ は α を超えない最大の整数を表す．

(筑波大 2017) (m20171317)

0.1455 図のような円柱座標系での微積分に関する以下の問いに答えよ．

(1) 直交座標 (x, y, z) を円柱座標 (r, θ, z) に変換する，x, y, $\dfrac{\partial x}{\partial r}$, $\dfrac{\partial x}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial x}{\partial z}$ を r, θ, z の関数として示せ．

(2) $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} & \dfrac{\partial r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} & \dfrac{\partial \theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = E$ が成り立つことに留意し，$\dfrac{\partial r}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を r, θ, z を用いて示せ．なお，E は単位行列である．

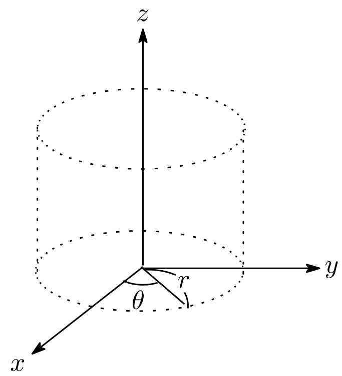
(3) (2) の結果を用いると円柱座標系のラプラシアンは
$\triangle = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ で表される． 関数 $f(r,\ \theta,\ z) = rz\cos\theta$ に対して $\triangle f$ を計算せよ．

(4) 円柱座標系で r だけを変数 $(r > 0)$ とする関数 $g(r)$ が $\triangle g(r) = 0,\ g(1) = 0,\ g(e) = 2$ の条件を満たす．この $g(r)$ を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

(5) x, y, z の r, θ, z に対するヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算せよ．

(6) K を積分領域とする以下の三重積分を，円柱座標系への変数変換を用いて計算せよ．ただし，a は正の定数である．

$$\iiint_k y^2\sqrt{x^2+y^2}dxdydz, \qquad K = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq a\right\}$$



(筑波大 2018) (m20181301)

0.1456 次の漸化式について考える．

$$\begin{cases} a_{n+1} = 7a_n - 6b_n \\ b_{n+1} = 3a_n - 2b_n \end{cases} \qquad a_1 = 1,\ b_1 = 0$$

以下の問いに答えよ．

(1) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ を満たす行列 A を求めよ．

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P，およびその逆行列 P^{-1} を求めよ．

(4) a_n，b_n の一般項を求めよ．

(筑波大 2018)　　(m20181302)

0.1457 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の多項式 $f(A) = A^5 - A^4 + A^3 - A^2 + A - E$ について，以下の問いに答えなさい．ただし，E は単位行列である．

(1) A の固有値 λ_1，λ_2，λ_3 および固有ベクトルを求めよ．ただし，$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ となるようにとること．

(2) A を $A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}P^{-1}$ と対角化する行列 P，およびその逆行列 P^{-1} を求めよ．

(3) $f(A)$ を求めよ．

(4) $|f(A)|$ を求めよ．

(筑波大 2018)　　(m20181303)

0.1458 Newton 法は方程式 $f(x) = 0$ を満たす解 x の近似解を数値的に求める手法の 1 つである．具体的な手順は，以下の通りである．まず，漸化式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

を構成する．ここで，$f'(x_n) = \dfrac{d}{dx}f(x_n) \neq 0$ とする． 次に，この漸化式を適当な初期値 x_0 の下で解き，数列 x_1，x_2，$\cdots$ を計算する． 解が存在する場合には，その収束値 x_∞ は $f(x_\infty) = 0$ を満たす．上述の Newton 法に関して，以下の設問に答えよ．

(1) Newton 法で x_0 から x_1 を求めることは，点 $(x_0,\ f(x_0))$ における $y = f(x)$ の接線と x 軸の交点を求めることになっている．これを示せ．

(2) Newton 法の漸化式から得られる数列 $\{x_n\}$，$n = 0,\ 1,\ \cdots$ は，初期値 x_0 が $f(x) = 0$ の解の近傍にあるときに収束し，その収束値は $f(x) = 0$ の解を与える．これを以下の＜定理＞を用いて示せ．ただし，$f'(x) \neq 0$ かつ $f''(x) = \dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ は連続であるとする．

＜定理＞

関数 $\varphi(x)$ が閉区間 I で微分可能で，$\varphi(x)$ の値域は I に含まれ，I では

$$\left|\frac{d}{dx}\varphi(x)\right| \leq k < 1$$

であるとする．このとき，反復法 $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ によって方程式 $x = \varphi(x)$ のただ 1 つの根 x_∞ が得られる．

(筑波大 2018)　　(m20181306)

0.1459 二つのメーカー X および Y からなる市場において，各メーカーのユーザー数を調査したい． 毎年メーカー X のユーザーのうち $\dfrac{1}{10}$ がメーカー Y のユーザーとなり，一方で，メーカー Y のユーザーのうち $\dfrac{1}{5}$ がメーカー X のユーザーとなる，それ以外は同じメーカーのユーザーのままでいるものとし，ユーザーの総数は変化しない．このとき以下の問いに答えなさい．

(1) ある年におけるメーカー X, Y のユーザー数をそれぞれ x_n, y_n で表す．　このとき翌年におけるそれぞれのメーカーのユーザー数 x_{n+1}, y_{n+1} を二次正方行列 A を使って以下の形で表す．行列 A を具体的に示しなさい．

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

(2) A の固有値および固有ベクトルを求めなさい．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P を一つ求めるとともに，P の逆行列 P^{-1} を求めなさい．

(4) 行列 A^n を求めなさい．

(5) (4) の結果を使って，$n \to \infty$ としたときのメーカー X および Y のユーザー数の比率を求めなさい．

(筑波大 2018)　　(m20181316)

0.1460　$f(x) = \log(1 + \sin x)$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)(x \to 0)$ を満たす a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ．但し，$o(\cdot)$ はランダウの記号（スモール・オー）を表す．

(2) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + \sin x) - x}{3x^2}$$

(3) $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ の近似値を誤差 $\dfrac{1}{100}$ 未満で求めよ （求めた近似値の誤差が $\dfrac{1}{100}$ 未満であることの根拠も述べること）．

(筑波大 2018)　　(m20181319)

0.1461　行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) A のすべての固有値と，それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．なお，固有ベクトルはその第 1 成分を 1 とせよ．

(2) $P^{-1}AP = D$ が対角行列になるように，3 次正則行列 P とその逆行列 P^{-1} の組を求めよ．なお，D の対角要素は大きい順に並べ，P の第 1 行の要素はすべて 1 とせよ．

(3) 自然数 n に対して，ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = (A + 2E)^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の各成分を n の関数として求めよ．ここで E は単位行列である．

(4) 3 次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，その転置ベクトルを ${}^t\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とするとき，${}^t\boldsymbol{r}(A + E)\boldsymbol{r} = 1$ で表される曲面 M は，直交変換 $(x, y, z) \to (X, Y, Z)$ によって標準形

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = 1$$

にすることができる．$\alpha > \beta > \gamma$ となるように定数 α, β, γ を定めよ．

(5) (4) における曲面 M に対して

$$\boldsymbol{r} \to R\boldsymbol{r}$$

で表される回転を施したら，xy 平面，yz 平面，zx 平面いずれに関しても対称な図形となった．このような回転を表す行列 R をひとつ求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191307)

0.1462 2 つの実数 a, θ に対して, 3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

で定める．

(1) A^2 の行列式を求めよ．

(2) A^2 の階数を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の部分集合 V を

$$V = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \right\}$$

で定める．このとき，V の次元を求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191314)

0.1463 実数を成分とする 2 次正方行列全体のなす $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間を $M_2(\mathbb{R})$ で表す．
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ とし，$a \neq d$ と仮定する．$M_2(\mathbb{R})$ 上の線形変換 f_A を

$$f_A(X) = AX - XA \quad (X \in M_2(\mathbb{R}))$$

により定める．

(1) $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく．$f_A(X_1)$, $f_A(X_2)$ は線形独立であることを示せ．

(2) f_A の核の次元が 2 であることを示せ．

(筑波大 2019)　　(m20191315)

0.1464 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2, λ_3 を求めよ．ただし，$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ とする．

(2) 行列 A の正規化した固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ を求めよ．　ただし，$A\boldsymbol{u}_j = \lambda_j\boldsymbol{u}_j$ $(j = 1,\ 2,\ 3)$ とする．

(3) 行列 A を $P^{-1}AP = D$ として，　対角成分が $D_{11} \geq D_{22} \geq D_{33}$ となるように対角化したとき，P, P^{-1} および D を求めよ．　ただし，P は直交行列，D は対角行列，　D_{ij} は D の第 i 行 j 列の成分とする．

(4) ベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ が，$\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = A\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たすとき，$\boldsymbol{x}(t)$ を求めよ．

(5) ベクトル $\boldsymbol{y}(t)$ が，$\dfrac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{y}(t) = -e^A\boldsymbol{y}(t)$，$\boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\dot{\boldsymbol{y}}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たすとき，$\boldsymbol{y}(t)$ を求めよ．ただし，$\dot{y}(t) = \dfrac{d}{dt}y(t)$ とする．

(筑波大 2020)　　(m20201302)

0.1465　$y = \tan x$ の逆関数を $y = \arctan x$ と書く．ある y の値に対して $y = \tan x$ を満たす x は多数存在するが，定義域を $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ に限る場合，$y = \tan x$ は単射となり一意に逆関数を定義することができる．この定義域における $y = \tan x$ の逆関数を $y = \mathrm{Arctan}\, x$ と書くこととする．
上記の定義域において，次の問に答えよ

① $y = \mathrm{Arctan}\, x$ について，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$ を証明せよ．

② 次の無限級数 S の値を求めよ．ただし，その導出過程を示すこと．

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \frac{n}{n^2+3^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

(筑波大 2020)　　(m20201305)

0.1466　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1}{2} & c \end{pmatrix}$ が直交行列となるような a, b, c の組を全て求めなさい．

(筑波大 2020)　　(m20201311)

0.1467　行列 $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ につて，以下の問いに答えなさい．

(1) B の固有多項式を求めなさい．

(2) B が多角化可能となるような d の値を全て求めなさい．

(筑波大 2020)　　(m20201312)

0.1468　4 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A が対角化可能であるかどうかを判定し，その理由を述べよ．

(筑波大 2020)　　(m20201313)

0.1469　$a \in \mathbb{R}$ とする．$\mathbb{R}^4$ の標準内積を $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ とする．$\mathbb{R}^4$ の元

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対し，$\mathbb{R}^4$ の部分空間 V を

$$V = \left\{ \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \langle \boldsymbol{w},\ \boldsymbol{v}_i \rangle = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \right\}$$

で定める．また

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \\ -2 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とし，行列 A で定まる線形写像を $f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ とする．

(1) A の階数 $\mathrm{rank}\, A$ を求めよ．

(2) $\dim V = 2$ であるとき，a の値を求めよ．

(3) (2) で求めた a に対して，f の像 $\mathrm{Im}\, f$ と V の共通部分の基底を 1 組求めよ．

(筑波大 2021) (m20211301)

0.1470 集合 X の部分集合 $A,\ B$ に対し

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

とおく．ここで，$A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$ である．

(1) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ を示せ．

(2) $A \triangle B = \emptyset$ と $A = B$ は同値であることを示せ．

(3) $C \subset X$ とする．$A \triangle B = C$ ならば $A = B \triangle C$ を示せ．

(4) $A_i \subset X \;\; (i = 1, 2, \cdots, k), \;\; B_j \subset X \;\; (j = 1, 2, \cdots, \ell)$ に対し

$$\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i \right) \triangle \left(\bigcap_{j=1}^{\ell} B_j \right) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{\ell} (A_i \triangle B_j)$$

を示せ．

(筑波大 2021) (m20211305)

0.1471 未知数 a, b を含む次の行列 A に関して設問 (1)-(3) に答えなさい．

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A による一次変換で直線 $2x + 3y = 1$ が直線 $x + 4y = 3$ に写るとき，a, b の値を求めなさい．

(2) (1) の条件を満たす行列 A のすべての固有値と，各固有値に対応する長さが 1 の固有ベクトルを 1 つ求めなさい．

(3) (1) の条件を満たす行列 A による一次変換で円 $x^2 + y^2 = 1$ を写した図形の方程式を求めなさい．

(筑波大 2021) (m20211308)

0.1472 次の $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形変換 f について，以下の問に答えよ．

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} z \\ x + y \\ 4x \end{bmatrix}$$

(1) $H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ は $\mathbb{R}^3$ の標準基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ に関する f の表現行列であることを示せ.

(2) H の固有値，各固有値の固有空間をそれぞれ求めよ.

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底で，その基底に関する f の表現行列が対角行列になるようなものを 1 つ求めよ.

(筑波大 2021)　　(m20211310)

0.1473　3 次行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

を考える．なお，以下で I は 3 次の単位行列とする.

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．なお，各固有ベクトルは，その成分が簡単な整数となるようにすること.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように，正則行列 P とその逆行列 P^{-1} を定めよ．なお，P はその要素が簡単な整数となるようにすること.

(3) 行列 A^3 を

$$A^3 = xA^2 + yA + zI$$

のように A^2, A, I の線形結合で表したときの線形結合係数 x, y, z を定めよ.
（設問 (2) で求めた行列 P, P^{-1} を用いると $P^{-1}A^3P$ や $P^{-1}A^2P$ も対角行列となること，および，A の固有値はどれも A の固有方程式を満たすことを利用するとよい．）

(4) 係数 α, β, γ を任意に選んで

$$C = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I$$

で与えられる 3 次行列 C を考えるとき，$C' = AC$ で定義される行列 C' も，ある係数 α', β', γ' を用いて

$$C' = \alpha' A^2 + \beta' A + \gamma' I$$

と表され，それらの係数の間には必ず

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

の関係がある．3 次行列 M を定め，その固有値を求めよ.

(筑波大 2021)　　(m20211318)

0.1474　xy 平面上における 2 次曲線 C

$$4x^2 - 2\sqrt{3}xy + 6y^2 = 21 \ ,$$

について考える．以下の問いに答えよ.

(1) $4x^2 - 2\sqrt{3}xy + 6y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす対称行列 A を求めよ.

(2) A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leqq \lambda_2$ とする.

(3) (2) で求めた各固有値について，正規化された固有ベクトルを求めよ.

(4) A を $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ の形に対角化する直交行列 P，およびその逆行列 P^{-1} を求めよ．

(5) 座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 行うとき，2 次曲線 C を，x', y' を用いて表せ．

(6) x' 軸および y' 軸を，それぞれ x, y を用いた直線の式で表せ．

(7) 2 次曲線 C の概形を xy 平面上に描け．ただし，図中には x' 軸と y' 軸を明記すること．

(筑波大 2022) (m20221304)

0.1475 2 つの 2 変数関数

$$F(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$$
$$G(x, y) = \log\sqrt{x^2 + y^2} - \arctan\frac{y}{x}$$

について，以下の各問に答えよ．ただし，$y = \arctan x$ は $y = \tan x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数である．また，$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$ である．

(1) $G(x, y)$ の x, y に関する偏導関数 $G_x(x, y)$, $G_y(x, y)$ をそれぞれ求めよ．

(2) ラグランジュの未定乗数法を用いて，$F(x, y)$ が条件 $G(x, y) = 0$ のもとで極値をとる点の候補を求めよ．

(3) $G(x, y) = 0$ の陰関数 $y = g(x)$ について，その 1 次導関数 $g'(x)$ を x および $g(x)$ で表せ，また，2 次導関数 $g''(x)$ を $x, g(x)$ および $g'(x)$ で表せ．

(4) (3) を用いて，条件 $G(x, y) = 0$ のもとでの $F(x, y)$ の極小値を求めよ．

(筑波大 2022) (m20221308)

0.1476 以下に示す実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{\nu}_1$, $\boldsymbol{\nu}_2$, $\boldsymbol{\nu}_3$, $\boldsymbol{\nu}_4$, $\boldsymbol{\nu}_5$ について，線形独立となる組合せを一つ挙げなさい．このとき，残り全てのベクトルを線形独立なベクトルの一次結合として表しなさい．

$$\boldsymbol{\nu}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\nu}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\nu}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\nu}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\nu}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(筑波大 2022) (m20221313)

0.1477 実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分集合 W について答えなさい．

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x^2 - y^2 + 4z^2 + 4xz = 0 \right\}$$

(1) W は $\mathbb{R}^3$ の二つの部分空間の組合せで表すことができる． それぞれを W_1, W_2 とするとき，W_1, W_2 を求めるとともに，W を W_1, W_2 を使って表しなさい．

(2) W は部分空間かどうかを理由とともに答えなさい．

(筑波大 2022) (m20221314)

0.1478 $F(x, y) = xy\tan y + \pi\tan y - x$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\tan x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)$ $(x \to 0)$ を満たす実数 a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ．
ただし，$o(\cdot)$ はランダウの記号（スモール・オー）を表す．

(2) 1 以上の整数 n に対し，開区間 $\left(\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\pi,\ \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi\right)$ を I_n とおく．各 I_n における方程式

$$\tan x = \frac{1}{x} \qquad (x \in I_n)$$

の解を x_n とする．$d_n = x_n - n\pi$ とおくとき $F\left(\dfrac{1}{n},\ d_n\right) = 0$ を示せ．

(3) $x = 0$ を含む開区間 I と，I において定義された微分可能な関数 $\varphi(x)$ であって

$$F(x,\ \varphi(x)) = 0 \qquad (x \in I), \qquad \varphi(0) = 0$$

を満たすものが存在することを示せ．

(4) (2) の x_n を

$$x_n = n\pi + b_1\frac{1}{n} + b_2\frac{1}{n^2} + b_3\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad (n \to \infty)$$

と表示したときの実数 $b_1,\ b_2,\ b_3$ を求めよ．

(筑波大 2022)　　(m20221316)

0.1479 (1) 次の関数を微分せよ．

$$y = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2x^2+1}\right)$$

(2) 次の関数について $\dfrac{dz}{dt}$ を t の関数で表せ．

$$z = x^2 + 2y\ , \quad x = \sin t\ , \quad y = 5\cos t$$

(埼玉大 2011)　　(m20111401)

0.1480 次の不定積分を求めよ．

$$\int \left(2x^2 \tan^{-1} 2x\right) dx$$

(埼玉大 2011)　　(m20111402)

0.1481 次の二重積分の値を求めよ．

$$\iint_D xy\,dxdy\ , \quad (\ D = \{\ (x,y)\,|\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2x+3y \leq 6\ \}\ )$$

(埼玉大 2011)　　(m20111403)

0.1482 次のベクトルについて考える．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

(1) 外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ を 3 辺とする平行六面体の体積が 50 のとき，z を求めよ．

(埼玉大 2011)　　(m20111405)

0.1483 以下の微分方程式を解け．

(1) $x\dfrac{dy}{dx} - 2x^2y = y$　　(2) $4y^2 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 4$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 8y = 0$　　(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = \sin 3x$

(埼玉大 2011)　　(m20111406)

0.1484 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) 自然数 n に対して，行列 A^n を計算せよ.

(埼玉大 2011) (m20111407)

0.1485 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ が定める線形写像 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\big(T(x) = Ax,\ x \in \mathbb{R}^3\big)$ を考える.

(1) 写像 T の像 $\mathrm{Im}\, T$ の基底を 1 組求めよ.

(2) 写像 T の核 $\mathrm{Ker}\, T$ の基底を 1 組求めよ.

(埼玉大 2011) (m20111408)

0.1486 原点を通る 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ について以下の問いに答えよ.

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ のなす角を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に垂直なベクトルを 1 つ求めよ.

(埼玉大 2013) (m20131406)

0.1487 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ に対し，次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を 1 つ求めよ.

(3) A^n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ.

(埼玉大 2013) (m20131408)

0.1488 a, b は実数とし

$$A = \begin{pmatrix} a & a+1 & 3 & a+1 \\ a+3 & a+5 & 5 & a+3 \\ b & b+2 & a+1 & 7 \end{pmatrix}$$

とする．写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を $f(x) = Ax$ $(x \in \mathbb{R}^4)$ により定める．このとき，f が全射でないような組 (a, b) をすべて求めよ.

(埼玉大 2013) (m20131409)

0.1489 直交座標系の座標軸 O-xyz を，原点を固定して回転した座標軸を O-XYZ とする．直交座標の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がそれぞれ，新座標系の正規直交形で

$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ と表されたとき，以下の設問に答えよ.

(1) 旧座標系で表された点 $(\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{6})$ の新座標系での座標を求めよ.

(2) 新座標系で $(0,4,2)$ と表される点の旧座標系での座標を求めよ.

(埼玉大 2014)　　(m20141401)

0.1490 (1) $x = x_0$ 付近で連続な関数 $f(x)$ に対し, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$ が成り立つ関数 $\delta(x)$ がある. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} 3\delta(x)e^{-ixy}dx$ の値を求めよ. ただし, $i = \sqrt{-1}$ とする.

(2) 関数 $f(x), g(x)$ があり, それぞれ $F(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx$, $G(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ixy}dx$ とするとき, 次式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx\right)e^{-iyz}dz$ が収束するとして, これを, $F(y)$ および $G(y)$ を用いて表せ. ただし, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx < \infty$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|dx < \infty$ とする.

(埼玉大 2014)　　(m20141403)

0.1491 (1) 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

の固有値をすべて求め, さらに, それぞれの固有値に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) 次の主張は正しいか, それとも誤りか, 正しければ証明し, 誤りならば反例を挙げよ.

(主張) 「 2 次実正方行列 B が相異なる実数の固有値 α, β を持つならば, ある実正則行列 P が存在し, $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ となる. 」

(埼玉大 2014)　　(m20141406)

0.1492 行列 A が次式であたえられるものとして以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の逆行列を求めよ.

(2) 行列 A の固有値を求めよ.

(3) 各固有値に対する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ を求めよ.

(埼玉大 2015)　　(m20151405)

0.1493 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 0$

(2) $x\left(\dfrac{dy}{dx} + \sin x\right) + y = 0$

(3) $3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + y - x - 3 = 0$

(埼玉大 2015)　　(m20151407)

0.1494 次の関数を x について微分せよ.

(1) $y = \tan\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$　　(2) $y = x^{(e^{3x})}$

(埼玉大 2016)　(m20161401)

0.1495 xyz 空間のベクトル $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対する線形変換について，以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{A}$ を y 軸に対して対称移動させるような $3\times\ 3$ 行列を導出せよ.

(2) $\boldsymbol{A}$ を z 軸のまわりに角 θ だけ回転させるような $3\times\ 3$ 行列を導出せよ.

(埼玉大 2016)　(m20161404)

0.1496 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $1-(\cos x)^2\dfrac{dy}{dx} = 0$　　(2) $x\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y$

(3) $x^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 5xy\dfrac{dy}{dx} + 6y^2 = 0$　　(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 4y = x^3 + 1$

(埼玉大 2018)　(m20181406)

0.1497 次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ について考える.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} x \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ とするとき $\cos\theta$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一次従属となるように x を求めよ.

(埼玉大 2019)　(m20191405)

0.1498 2 つの数列 $x_n,\ y_n$ の間に

$$x_n = x_{n-1} + 4y_{n-1}$$
$$y_n = 2x_{n-1} + 3y_{n-1}$$

なる関係がある．ただし，n は自然数とし，$x_0 = -2,\ y_0 = 2$ とする.

(1) $x_1,\ y_1$ を求めよ.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき，$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ となることを示せ.

(3) $x_n,\ y_n$ を n を使って表せ.

(埼玉大 2019)　(m20191406)

0.1499 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = (2y+1)^2 xe^{-x}$

(2) $\dfrac{x}{y}\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} - 1 = 0$

(3) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 2\sin x\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{2}\cos 2x = 0$

(埼玉大 2019)　(m20191407)

0.1500 以下の 3 つの問に答えよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \mathrm{A} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ を満たす行列 A を求めよ.

(2) (1) で求めた行列 A の行列式を求めよ.

(3) (1) で求めた行列 A の逆行列を求めよ.

(群馬大 2011) (m20111503)

0.1501 以下の 4 つの問いに答えよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = A$ を満たす行列 A を求めよ.

(2) (1) で求めた行列 A の行列式を求めよ.

(3) (1) で求めた行列 A の逆行列を求めよ.

(4) (1) で求めた行列 A と行列 $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 3 \end{pmatrix}$ について，$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ が成立するように，a と b を定めよ.

(群馬大 2012) (m20121504)

0.1502 以下の式を簡単にせよ.

(1) $\left(\sin 25^\circ - 3\sin 65^\circ\right)^2 + \left(3\cos 115^\circ + \cos 155^\circ\right)^2$

(2) $\tan(45^\circ + \theta)\tan(45^\circ - \theta) + \tan(135^\circ + \theta)\tan(135^\circ - \theta)$

(3) $(\sin x + \cos x)^2 + \dfrac{(1-\tan x)^2}{1+\tan^2 x} + \tan^2 x + \cos^2 x\,(1 - \tan^4 x)$

(群馬大 2013) (m20131501)

0.1503 $\sqrt{15}$ は無理数である．以下の各問に答えよ.

(1) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$ を展開して整理せよ.

(2) $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ が無理数であることを示せ.

(3) 等式 $4a + (5b-3)\sqrt{15} + \sqrt{15}\left(a - 2b\sqrt{15}\right) = 0$ を満たす有理数 a, b の値を求めよ.

(群馬大 2014) (m20141501)

0.1504 3 次元列ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

について，以下の問に答えよ.

(1) 一次方程式 $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{b}$ を満たす x_1, x_2, x_3, x_4 をすべて求めよ.

(2) 4 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ から 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ への写像 T を

$$T \ : \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4$$

で定める．このとき，T は $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像であることを示せ．また，T の核空間の基底を求めよ.

(3) 前問 (2) の写像 T に対し，T の像空間の基底を求めよ．

(茨城大 2011)　　(m20111701)

0.1505 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とする．以下の各問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値 λ をすべて求めよ．

(2) A を直交行列によって対角化せよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{x}$ の長さを 1 とする．${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ の値が最大となる $\boldsymbol{x}$ を求めよ．${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す．

(4) n を自然数とするとき，A^n を求めよ．

(茨城大 2012)　　(m20121701)

0.1506 f を集合 A から集合 B への写像とし，B の部分集合 C に対して集合 $\{x \in A \mid f(x) \in C\}$ を $f^{-1}(C)$ で表す，$A, B, C, f^{-1}(C)$ のどれも空集合でないとする．このとき，次の (1) および (2) に答えよ．

(1) $f\left(f^{-1}(C)\right) \subset C$ であることを示せ．

(2) f が全射ならば，$f\left(f^{-1}(C)\right) = C$ であることを示せ．

(茨城大 2012)　　(m20121703)

0.1507 x, y を実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y & x^2+y^2 \\ 1 & 3 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 4 & 17 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，A の行列式を $|A|$ で表す．

x, y が条件 $|A| = 0$ を満たすとき，点 (x, y) の描く図形を求めよ．

(茨城大 2012)　　(m20121705)

0.1508 以下の各問に答えよ．

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ -6 & 9 & -3 & -6 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ．

(2) 連立一次方程式 $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ -6x + 9y - 3z = -6 \\ x - 3y + z = 2 \end{cases}$ を解け．

(茨城大 2013)　　(m20131703)

0.1509 4 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2+2b^2 & a^3 \\ 1 & b & 2a^2+b^2 & b^3 \\ 1 & -a & a^2+2b^2 & -a^3 \\ 1 & -b & 2a^2+b^2 & -b^3 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問に答えよ．

ただし，a, b は実数とする．

(1) A の行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) $a = 0$ かつ $b = -1$ のとき，連立 1 次方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解け．

(茨城大 2015)　　(m20151702)

0.1510 k を実数とし，3 次の正方行列 A，3 次の列ベクトル $\boldsymbol{x}$ をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & k & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

とし，$\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 f を

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

により定める．以下の各問に答えよ．

(1) $k=1$ のとき，A の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) $k=1$ のとき，f は全単射となることを示せ．

(3) f は全単射とならないための k についての条件を求めよ．また，f がこの条件を満たすとき，f の核 $\ker(f) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3\ ;\ f(\boldsymbol{x}) = 0\}$ と f の像 $\mathrm{Im}(f) = \{f(\boldsymbol{x})\ ;\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3\}$ の基底を一組求めよ．

(茨城大 2016)　　(m20161701)

0.1511 次の連立不等式で表される領域を D とする．　$\frac{1}{2}y \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2$

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) 累次積分 $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{2}y}^1 e^{x^2} dx \right) dy$ の順序を交換して，値を計算せよ．

(茨城大 2016)　　(m20161704)

0.1512 成分がすべて実数である行列に関して，以下の各問に答えよ．

(1) 行列の積 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ を計算せよ．

(2) 連立 1 次方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解を持つか否か，理由を付けて答えよ．

(3) 一般に，3 行 2 列の行列 A と 2 行 3 列の行列 B の積 AB は単位行列にならないことを示せ．

(茨城大 2016)　　(m20161705)

0.1513 $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 f, g を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して次のように定める；

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_2 + 5x_3 \\ x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}, \qquad g(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - {x_2}^2 \\ 2x_2 + 5x_3 \\ x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

以下の各問に答えよ．

(1) f が線形写像であることを示し，その表現行列 A を求めよ．

(2) 上で求めた行列 A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(3) 上で求めた行列 A の逆行列を求めよ．

(4) g は線形写像でないことを示せ.

(5) g は全単射であることを示せ.

(茨城大 2018)　　(m20181701)

0.1514 R^4 の線形部分空間 V_1 と V_2 を次のように定める.

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in R^4 \quad : \quad \begin{array}{c} 2x + z + 8w = 0 \\ x + y + z + w = 0 \end{array} \right\}$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in R^4 \quad : \quad x = -2y - w = -3z + w \right\}$$

以下の各問に答えよ.

(1) 線形空間 V_1 と V_2 の基底をそれぞれ一組求めよ.

(2) 線形空間 $V_1 \cap V_2$ の基底を一組求めよ.

(3) $V_1 \cup V_2$ が R^4 の線形部分空間ではないことを示せ.

(4) $V_1 \cup V_2$ を含む, R^4 の最小の線形部分空間の基底を一組求めよ.

(茨城大 2019)　　(m20191701)

0.1515 実 2 変数関数 $f(x, y) = x^3 + 3y^2 - 3x - 6y + 2$ を考える. 以下の各問に答えよ.

(1) 関数 $f(x, y)$ の極値を求めよ.

(2) $z = f(x, y)$ で表される曲面の点 $(1, 2, f(1, 2))$ における接平面の方程式を求めよ.

(茨城大 2019)　　(m20191703)

0.1516 a を正の定数とする. 関数 $f(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.
ただし, 対数は自然対数とする.

(茨城大 2020)　　(m20201703)

0.1517 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ について, 以下の各問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) 行列 A の各固有値の固有空間を求めよ. ここで, 固有値 λ の固有空間とは, λ の固有ベクトル全体と零ベクトルからなるベクトル空間のことである.

(茨城大 2020)　　(m20201705)

0.1518 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ とする. 以下の各問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.

(2) 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ の基底を一組求めよ.

(3) $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : A^n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\}$ の次元が 2 となる自然数 n を求め，その n について V の基底を一組求めよ．

(4) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ かつ $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ を満たす，一次独立であるベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ の組を決定せよ．

(茨城大 2021)　　(m20211701)

0.1519 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ および，$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ に対して，

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{V}(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ [\mathbf{x}, \mathbf{y}] = 0\}$$

とする．以下の各問に答えよ．

(1) $\mathrm{V}(\mathbf{y})$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であることを示せ．

(2) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき，$\mathrm{V}(\mathbf{a})$ の基底を一組求めよ．

(3) A の固有値および各固有値に対応する固有空間の基底を一組求めよ．

(4) $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] \geqq 0$ であることを示せ．

(茨城大 2022)　　(m20221701)

0.1520 $-\infty < x < \infty$ である x に対して，$\tan y = x$ 満たす y で $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ を満たす唯一のものを $y = \mathrm{Arctan}\, x$ と表わす．以下の各問に答えよ．

(1) $\cos(\mathrm{Arctan}\, x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ を示せ．

(2) 曲面 $z = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 上の点 $P = \left(1, 1, \dfrac{\pi}{4}\right)$ での接平面を求めよ．

(3) 関数 $y = x\sqrt{x^2+1} + \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ の微分を求めよ．

(4) 曲面 $z = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ の，xy 平面上の有界閉領域 $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqq 1\right\}$ の真上にある部分の曲面積を求めよ．

(茨城大 2022)　　(m20221702)

0.1521 行列 $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$，ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ として，次の問に答えなさい．

(1) $\boldsymbol{v}$ は A の固有ベクトルであることを示しなさい．また，その固有値を求めなさい．

(2) A の行列式 $|A|$ を計算し，この式を因数分解した式で表しなさい．

(3) x, y, z を実数とするとき，$x + y + z \geqq 0$ なら $|A| \geqq 0$ を示しなさい．

(山梨大 2011)　　(m20111801)

0.1522 次の問に答えなさい．

(1) 次の行列 A の固有値とその固有ベクトル空間を求めなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

(2) 上の行列 A は対角化可能か否かを判定し，対角化可能ならば A を対角化しなさい．

(山梨大 2012)　　(m20121804)

0.1523 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．また，A が対角化できるかどうか判定して，対角化できる場合は対角化しなさい．

(山梨大 2013)　　(m20131801)

0.1524 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 & b & a \\ 0 & b & (a+1)^2 & ab \\ 0 & a & ab & (b+1)^2 \end{pmatrix}$ を考えるとき，A が逆行列をもつために必要かつ十分な $a,\ b$ についての条件を求めなさい．

(山梨大 2013)　　(m20131802)

0.1525 $-\pi \leqq x \leqq \pi$ で定義された関数 $f_n(x)\quad (n = 1, 2, 3)$ を考える．$f_i(x)$ と $f_j(x)$ との内積 $(f_i,\ f_j)$ を $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f_i(x) f_j(x) dx$ と定義するとき，$i,\ j$ をそれぞれ $1, 2, 3$ のいずれかとして，次の設問に答えよ．

(1) $f_1(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}x + 1\right)$，$f_2(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}x - 1\right)$ とすると，$(f_1,\ f_1) = (f_2,\ f_2) = 1$，$(f_1,\ f_2) = 0$ が成り立つことを示せ．

(2) $f_3(x) = ax^2 + b \quad (a,\ b$ は定数$)$ とするとき，$(f_1,\ f_3) = (f_2,\ f_3) = 0$, $(f_3,\ f_3) = 1$ となるような $a,\ b$ を求めよ．

(3) $f_i(-x) = Mf_i(x)$ のように，x を $-x$ と変換する操作を M と書く．M によってベクトル $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ はどのように変換されるか，その行列表現を求めよ．

(4) 直交行列 A によってベクトル $\boldsymbol{f}$ が，ベクトル $\boldsymbol{g} = A\boldsymbol{f}$ に移るとする．操作 M によって $\boldsymbol{g}$ がその定数倍になるような A と $\boldsymbol{g}$ を求めよ．

(山梨大 2017)　　(m20171802)

0.1526 θ と ϕ を実数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix}$ を考える．以下の小問に答えよ．

(1) 行列の積 AB を計算し，その結果を行列 $A,\ B$ と同じ形に変形せよ．

(2) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．なお，固有ベクトルは規格化しなくてもよい．

(3) 行列 A により xy 平面上の 4 点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が変換される点を求め，θ を正として図示せよ．また変換後の点が囲む面積を求めよ．

(山梨大 2018)　　(m20181802)

0.1527 次の行列 A を考えます.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式を求めなさい.

(2) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．ただし，導出過程も示すこと.

(山梨大 2020) (m20201801)

0.1528 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ について，(a)〜(c) に答えよ.

(a) 行列 A の行列式 $\det(A)$ を求めよ.

(b) 行列 A の固有値とその固有ベクトルを求めよ．ただし，導出過程も示すこと.

(c) 行列 A を対角化する行列 P とその逆行列 P^{-1} を求めよ．ただし，導出過程も示すこと.

(山梨大 2021) (m20211803)

0.1529 任意の点 $P(x, y)$ が以下の関数により点 $Q(u, v)$ に写像されるとき，以下の問いに答えよ． ただし，x, y は任意の実数とする.

$$u = \frac{2}{\pi}x$$
$$v = y \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

(1) 点 P および点 Q を任意の実数からなる点の集合の要素として考えるとき，この写像は単射でも全射でもないことを，例を挙げて示せ.

(2) 点 P が $(0, 1) \to \left(\frac{3\pi}{2}, 1\right) \to \left(\frac{3\pi}{2}, 3\right) \to (0, 3) \to (0, 1)$ と移動したとき，点 Q の移動軌跡をグラフに示せ.

(3) 点 Q の移動軌跡で囲まれる領域の面積は，点 P の移動軌跡で囲まれる領域の面積の何倍になるか求めよ.

(山梨大 2023) (m20231803)

0.1530 以下の行列 A の階数を求めよ．また，連立 1 次方程式 $Ax = 0$ の解空間の次元を求め，解空間の基底を与えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(信州大 2012) (m20121901)

0.1531 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 3 \\ 6 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

とおくとき，以下の問に答えよ.

(1) A と B が可換であることを示せ.

(2) A の固有値 λ に属する固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し，$B\boldsymbol{v}$ も A の固有値 λ に属する固有ベクトルであることを示せ．

(3) A, B, C それぞれの固有値と固有ベクトルを求めよ．

(信州大 2012)　　(m20121902)

0.1532 (1) $|x| \leq \dfrac{1}{2}$ ならば，$|\log(1+x) - x| \leq 2x^2$ が成立することを証明せよ．

(2) 次の等式を証明せよ．

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{1}{n}\cos\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \cos x\, dx$$

(信州大 2012)　　(m20121903)

0.1533 次の問いに答えよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr$ を計算せよ．

(2) 2 重積分 $I_n = \displaystyle\iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ を計算せよ．

ただし，$D_n = \left\{ (x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^2 \right\}$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．また，$I_n > \pi$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．

(信州大 2013)　　(m20131902)

0.1534 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(信州大 2013)　　(m20131903)

0.1535 次の問いに答えよ．

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ．

(2) (1) で求めた固有値の中で，最小の固有値に属する固有ベクトルを 1 つ求めよ．

(信州大 2013)　　(m20131904)

0.1536 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．ただし，a, b は実数とする．

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) A が逆行列をもつための a, b の条件を求めよ．また，A の逆行列を求めよ．

(信州大 2014)　　(m20141903)

0.1537 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a+b \\ a & 1 & b \\ a+b & b & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．ただし，a, b は実数とする．

(1) A が 1 を固有値にもつための a, b の条件を求めよ．

(2) A が 1 を固有値にもち，その重複度が 2 以上であるための a, b の条件を求めよ．

(3) A が 1 と 2 を固有値にもつとき，a, b の値を求めよ．

(信州大 2014) (m20141904)

0.1538 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -a & a & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．ただし，a は実数とする．

(1) A が固有値 1 と，それとは異なる実数の固有値をもつための a の条件を求めよ．

(2) 固有値 1 に属する固有ベクトルを 1 つ求めよ．

(信州大 2015) (m20151905)

0.1539 行列 $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ ， $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値と B の固有値を求めよ．

(2) A, B について，それらが対角化できるか調べ，対角化できれば対角化せよ．

(信州大 2016) (m20161904)

0.1540 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\sqrt{x^2-1}}$ を求めよ．

(2) 実数 p, q は，$p > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たすとする． このとき，$a \geqq 0$, $b \geqq 0$ を満たすすべての実数 a, b に対して，不等式 $ab \leqq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ が成り立つことを示せ．

(信州大 2017) (m20171901)

0.1541 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ -1 & 0 & 1 & b \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -a & -b & -1 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．ただし，a, b は実数とする．

(1) A の行列式を計算せよ．

(2) A が逆行列をもつための条件を a と b を用いて表せ．

(3) a と b が (2) の条件を満たすとき，A の逆行列を求めよ．

(信州大 2017) (m20171903)

0.1542 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2a & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -2 & a & -2 \end{pmatrix}$ について，次の各問いに答えよ．ただし，a は実数とする．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A の最大の固有値に属する固有ベクトルを求めよ．

(信州大 2017) (m20171904)

0.1543 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の行列式の値を求めよ．

(2) 6 次正方行列 $\begin{pmatrix} 3A & A \\ A & 2A \end{pmatrix}$ の行列式の値を求めよ.

(信州大 2018)　　(m20181903)

0.1544 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．ただし，a, b は実定数で，$b > 0$ とする.

(1) A の固有値がすべて正になる条件を a, b を用いて表せ.

(2) A の固有ベクトルでその成分がすべて正となるものを 1 つ求めよ.

(信州大 2018)　　(m20181904)

0.1545 以下の正方行列 A_i $(i = 1, 2, 3)$ それぞれについて，PA_iP^{-1} を対角行列にする正方行列 P が存在するかどうかを答え，存在する場合はそのような P および PA_iP^{-1} を答えよ.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(信州大 2018)　　(m20181909)

0.1546 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & p+2 & p \\ 0 & p & p+2 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，p は実数とする.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A が対角化できないような p の値を求めよ.

(信州大 2019)　　(m20191905)

0.1547 n を自然数とする．すべての成分が 1 であるような n 次元列ベクトルを $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ とする．A, B, C を実数成分の n 次正方行列とする.

(1) 行列 A が逆行列を持つとする．このとき，$A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ が存在することを証明せよ.

(2) $B\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ がただ一つだけ存在するとする．このとき B は逆行列を持つことを証明せよ.

(3) $C\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ および ${}^tC\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ が存在するとする．ここで，${}^tC$ は C の転置行列である．このとき $\boldsymbol{v}$ および $\boldsymbol{w}$ の成分の和が一致すること，すなわち $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} w_i$ であること，を証明せよ.

(信州大 2019)　　(m20191911)

0.1548 3 以上の自然数 n に対して，n 次正方行列

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 5 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

を A_n とする．すなわち，A_n の (i,j) 成分は，$i=j$ のとき 5，$|i-j|=1$ のとき 2，それ以外のとき 0 である．A_n の行列式の値を a_n とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) a_3，a_4 を求めよ．

(2) a_{n+2} を a_{n+1} と a_n を用いて表せ．

(3) a_n を求めよ．

(信州大 2020)　　(m20201903)

0.1549 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ，$B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -4 & 3 & 2 \\ -8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A が対角化可能か判定せよ．

(2) 行列 B が対角化可能か判定せよ．

(信州大 2020)　　(m20201904)

0.1550 (1) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$$

(2) 次の極限が存在しないことを示せ．

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

(3) 2 変数関数 $z = f(x,y)$ と $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ の合成関数 $f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ に対し，関係式

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

が成り立つことを示せ．

(信州大 2020)　　(m20201905)

0.1551 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$，が 1 次独立であることを示せ．また，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ の 1 次結合で表せ．

(信州大 2020)　　(m20201907)

0.1552 行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値を求めよ．

(信州大 2020)　　(m20201908)

0.1553 次の行列 A に対して，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) A の行列式を求めよ．

(2) A の逆行列を求めよ．

(3) A の固有値を求めよ．

(4) $A^2 - 3I$ の階数を答えよ．ただし，ここで I は単位行列とする．

(信州大 2021) (m20211904)

0.1554 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ をベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の標準内積とする．つまり，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

に対して

$$\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

である．また，ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ はそれぞれ長さが 1 で，かつ内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関して互いに直交しているとする（k は 1 以上 n 以下の整数）．写像 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1 - \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_2 \rangle \boldsymbol{v}_2 - \cdots - \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_k \rangle \boldsymbol{v}_k \\ &= \boldsymbol{v} - \sum_{i=1}^{k} \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_i \rangle \boldsymbol{v}_i \end{aligned}$$

(1) F は線形写像であることを示せ．

(2) $F(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k$ のそれぞれと直交していることを示せ．

(3) $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k\}$ によって生成される $\mathbb{R}^n$ の部分空間を V とする．$\boldsymbol{v} \in V$ ならば，$F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ となることを示せ（ただし，ここで $\boldsymbol{0}$ は零ベクトルである）．

(4) $F^2 = F$ を満たすことを示せ．

(5) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\langle F(\boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v},\ F(\boldsymbol{w}) \rangle$ が成り立つことを示せ．

(信州大 2021) (m20211905)

0.1555 t は実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ， $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ について，
$A^2B^3A^{-1}$ の行列式の値が 128 であるとき，t の値を求めよ．

(信州大 2022) (m20221904)

0.1556 a は定数とする．このとき，行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ が対角化可能か判定せよ．

(信州大 2022) (m20221905)

0.1557 関数 $f(x)$ は開区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ において,

$$f(x) = \log\cos x$$

で定義されているとする．このとき，次に問いに答えよ．ただし，対数は自然対数である．

(1) $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の 2 次までのマクローリン展開を求めよ．また，剰余項 $R_3(x)$ を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \cos^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ を求めよ．

(信州大 2023)　　(m20231901)

0.1558 3 つの行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ のうち，正則な行列の行列式の値と逆行列を求めよ．

(信州大 2023)　　(m20231904)

0.1559 a, b は実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 2ab-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2ab-3 & a \\ 0 & -b & 3ab-2 \end{pmatrix}$ が対角化可能なとき，a と b が満たす条件を求めよ．

(信州大 2023)　　(m20231905)

0.1560 次の設問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det(\boldsymbol{A})$ と逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めよ．

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ に対して次式が成り立つことを示せ．

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{i})(\boldsymbol{j} \times\ \boldsymbol{k}) + (\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{j})(\boldsymbol{k} \times\ \boldsymbol{i}) + (\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{k})(\boldsymbol{i} \times\ \boldsymbol{j})$$

ただし，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ，x 方向，y 方向，z 方向の単位ベクトルとする．

(新潟大 2011)　　(m20112002)

0.1561 以下の数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ．

$$a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$$

(新潟大 2011)　　(m20112003)

0.1562 a を実数とする．このとき，3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ．

(1) A を対称行列と交代行列の和で表せ．

(2) A が正則であるための a の値に関する条件を求めよ．また，A が正則であるとき，A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) $a \geqq 0$ のとき, A は対角化可能であることを証明せよ．

(新潟大 2011)　　(m20112006)

0.1563 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 f によって，直線 $2x-y+1=0$ が直線 $5x-y+7=0$ に移されるとき a,b の値を求めよ．

(新潟大 2011)　　(m20112010)

0.1564 行列 $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の設問に答えよ．

(1) 行列 A の固有方程式を求めよ．

(2) 行列 A の固有値を全て求めよ．

(3) それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(新潟大 2012)　　(m20122002)

0.1565 実行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a+1 & a \end{pmatrix}$ が固有値をただ 1 つ持つための条件を求めよ．また，そのときの固有値および固有ベクトルを求めよ．

(新潟大 2012)　　(m20122007)

0.1566 a を実数とする．このとき，3 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ．

(1) A の階数 (rank) を求めよ．

(2) A が対角化可能であるかどうか理由をつけて答えよ．また，A が対角化可能であるとき，A を対角化せよ．

(3) $a=\sqrt{2}$ のとき，$A^{-1}=bE_3+cA+dA^2$ となる実数 b,c,d を求めよ．ただし，A^{-1} を A の逆行列，E_3 を 3 次単位行列とする．

(新潟大 2012)　　(m20122010)

0.1567 実数を成分とする 3× 3 行列

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a & 8 \\ 2 & 5 & b \\ c & 4 & 18 \end{pmatrix}$$

に対して，M により与えられる連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + ay + 8z = 0 \\ 2x + 5y + bz = 0 \\ cx + 4y + 18z = 0 \end{cases}$$

がある．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 上の連立 1 次方程式の解の集合が

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2z=y+3z=0\}$$

であるとき，a,b,c の値を求めよ．

(2) (1) の解である a,b,c を成分にもつ M に対して，M は正則でない．その理由を述べよ．

(3) (1) の解である a,b,c を成分にもつ M に対して，$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f を $f(\boldsymbol{x})=M\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3)$ によって定義する．このとき，$f(\mathbb{R}^3)$ を求めよ．

(新潟大 2012)　　(m20122017)

0.1568　関数 $f(x)$ を

$$\begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{2x}\right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

により定める．このとき，$f(x)$ は区間 $(-1, 1)$ で微分可能かどうかを答えよ．すなわち微分可能ならば導関数を求め，微分可能でないなら，そのことを証明せよ．

(新潟大 2013)　　(m20132001)

0.1569　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　A の固有値を求めよ．

(2)　各固有値に対する固有空間の基底を求めよ．

(3)　行列 A を対角化する直交行列を求めよ．

(新潟大 2013)　　(m20132004)

0.1570　$\boldsymbol{R}^2$ における基底 $\chi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$\boldsymbol{R}^2$ における標準基底から，基底 χ への取りかえ行列を求めよ．

(2)　$\boldsymbol{R}^2$ における線形写像 f の標準基底に関する表現行列を，$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ とする．このとき，f の基底 χ に関する表現行列を求めよ．

(新潟大 2014)　　(m20142010)

0.1571　3 次元空間上のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ を x 軸のまわりで角度 θ だけ回転するとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{V}}'$ へ変換される．この関係を 3 × 3 行列 $U(\theta)$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{V}}' = U(\theta)\overrightarrow{\mathrm{V}}$$

と書く．ここで，$U(\theta)$ は

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

で与えられる．以下の問いに答えよ．

(1)　行列 $U(\theta)$ の行列式 $\det U(\theta)$ を求めよ．

(2)　行列 $U(\theta)$ の逆行列 $U(\theta)^{-1}$ を求めよ．

(3)　行列 K を

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

としたとき，K^2，K^3，および K^4 を求めよ．さらに，正の整数 m に対して，K^{2m} と K^{2m-1} を求めよ．

(4) 一般に，正方行列 X の指数関数は無限級数

$$e^X = E + X + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}X^n$$

で定義される．ここで，E は単位行列を表し，$X^0 = E$ である．問 (3) の結果を利用して，

$$e^{\theta K} = U(\theta)$$

となることを示せ.

(新潟大 2014)　　(m20142017)

0.1572 a を定数とする．以下の行列が正則なる a の条件を求め，その条件の下，逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

(新潟大 2015)　　(m20152006)

0.1573 ふたつのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ と ，　$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} c \\ -3 \end{pmatrix}$ が 45°の角度をなすときの　c の値を求めよ.

(新潟大 2015)　　(m20152010)

0.1574 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，$P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ とする.

(1) P の逆行列 P^{-1} を求めよ.

(2) $B = p^{-1}AP$ とするとき，B^n を求めよ．n は自然数とする.

(3) A^n を求めよ.

(新潟大 2015)　　(m20152012)

0.1575 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について次の (1)〜(3) に答えよ．E は単位行列，O は零行列である.

(1) $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$ であることを示せ.

(2) $A^2 = O$ ならば $a+d=0$, $ad-bc=0$ であることを示せ.

(3) $A^2 - 5A + 6E = O$ を満たすとき，$a+d$, $ad-bc$ の値をそれぞれ求めよ.

(新潟大 2015)　　(m20152015)

0.1576 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

について，次の各問いに答えよ.

(1) A の行列式の値を求めよ.

(2) A の固有値をすべて求めよ.

(3) A の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求め，A を対角化せよ.

(新潟大 2015)　　(m20152019)

0.1577 三つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を辺として持つ平行六面対の体積 V を求めよ.

(新潟大 2016)　　(m20162003)

0.1578 条件 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対して, $2\times\ 2$ 行列 T による線形変換 $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = T\boldsymbol{x}$ を考える. $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 1$ を満たすための行列 T を求めよ.

(新潟大 2016)　　(m20162004)

0.1579 行列 $\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値を求め, 各固有値に対応する 2 つの固有ベクトルの交角 θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を示せ

(新潟大 2016)　　(m20162007)

0.1580 以下の関数で表される曲線がある. 区間 $-4 \leqq\ x \leqq\ 4$ における曲線の長さを求めよ.

$$y = 2\left(e^{x/4} + e^{-x/4}\right)$$

(新潟大 2016)　　(m20162009)

0.1581 自然数 n に対して,

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}dx\ , \qquad J_n = \int_0^{\pi}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx$$

とするとき, 次の各問いに答えよ.

(1) 次の公式を利用して, $I_{n+2} = I_n$ を示せ.

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

(2) I_n を求めよ.

(3) 数列 $\{J_n\}$ が等差数列になることを示せ.

(4) J_n を求めよ.

(新潟大 2016)　　(m20162011)

0.1582 正の定数 $a > 0$ と自然数 n に対して, 等式

$$\left(1 + \frac{b_n}{n}\right)^n = 1 + a$$

が成り立つように数列 $\{b_n\}$ を定める. また, 関数 $f(x)$ を $f(x) = (1+a)^x$ により定める. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) b_n を a と n を用いて表せ.

(2) 関数 $f(x)$ の $x = 0$ における微分係数 $f'(0)$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ.

(4) b_n と b_{n+1} の大小関係を不等式で表せ.

(新潟大 2016)　　(m20162013)

0.1583 V_1 と V_2 を 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間とし,

$$V_1 + V_2 = \{x + y \mid x \in V_1,\ y \in V_2\}$$

とする. このとき, 次の各問いに答えよ.

(1) $V_1 \cap V_2$ と $V_1 + V_2$ は $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間になることを示せ.

(2) $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$ で $V_1 \neq V_2$ と仮定する. このとき, $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$ を示せ.

(3) V_1 は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生成される $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間とし,

V_2 は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ で生成される $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間とする.

このとき, $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間 $V_1 \cap V_2$ の基底を一組求めよ.

(新潟大 2016)　　(m20162014)

0.1584 以下の行列 A の行列式の値を求め, A が正則になる実数 a を全て求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(新潟大 2017)　　(m20172005)

0.1585 曲線 $F(x, y, z) = \dfrac{x^2}{4} + y^2 + z^2 - 1 = 0$ 上の点 $\left(-1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ における法線の方程式を求めよ.

(新潟大 2017)　　(m20172008)

0.1586 以下のように行列 $A,\ B,\ C$ を定義する.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

また, I を 3×3 の単位行列とする. ここで, i は虚数単位で $i = \sqrt{-1}$ である.

(1) $A^2 + B^2 + C^2 = kI$ となることを示し, 定数 k を求めよ.

(2) A の固有値を求めよ.

(3) 一般に, 正方行列 M の指数関数 e^M は, 無限級数 $e^M \equiv \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M^n$ で定義される. α を実定数としたとき,

$$e^{i\alpha C} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$$

(問題ではこうなっていましたが, $(2, 2)$ 成分は 1 になるものと思われます)

となることを示せ.

(4) ベクトル $\vec{v}(\phi)$ を $\vec{v}(\phi) = \dfrac{\sin\phi}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{i\cos\phi}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と定義する.

このとき，$e^{i\alpha C}\vec{v}(\phi) = \vec{v}(\phi')$ と書けることを示し，ϕ' を求めよ．ただし，ϕ と ϕ' は実定数である.

(新潟大 2017)　　(m20172017)

0.1587 (1) $\log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ の導関数を求めよ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を求めよ.

(3) 不定積分 $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\,dx$ を求めよ.

(新潟大 2017)　　(m20172019)

0.1588 4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について，次の各問いに答えよ.

(1) A の行列式の値を求めよ.

(2) A の固有値をすべて求めよ.

(3) A の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求め，A を対角化せよ.

(新潟大 2017)　　(m20172020)

0.1589 2 変数関数 $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^4 - \dfrac{2}{3}y^3 + 1$ について，次の各問いに答えよ.

(1) 曲面 $z = f(x,y)$ の点 $\left(1,\ 1,\ \dfrac{13}{3}\right)$ における接平面の方程式を求めよ.

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(3) 平面 $z = 2x + 2y + b$ が曲面 $z = f(x,y)$ のある点における接平面となるような b の値をすべて求めよ.

(新潟大 2017)　　(m20172021)

0.1590 4 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分集合 W_1 を次のように定める.

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

このとき，次の各問いに答えよ.

(1) W_1 は $\mathbb{R}^4$ の線形部分空間になることを示せ.

(2) W_1 の基底を求めよ.

(3) 線形変換 $f\ :\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ の像 $\mathrm{Im}(f) = \left\{ f(\boldsymbol{x}) \;\middle|\; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \right\}$ が W_1 であると仮定する．このとき，f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の次元を求めよ.

(4) W_2 は $\mathbb{R}^4$ の 2 次元線形部分空間で，$W_1 \cup W_2$ が $\mathbb{R}^4$ の線形部分空間であると仮定する．このとき，$W_1 = W_2$ となることを示せ．

(新潟大 2017)　　(m20172022)

0.1591 次の (1)〜(3) の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \left(\frac{x+3}{x}\right)^2 dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(2x-1)^3} dx$　　(3) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos x dx$

(新潟大 2018)　　(m20182002)

0.1592 次の (1),(2) の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 2xy^2$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + \dfrac{y}{x}$

(新潟大 2018)　　(m20182004)

0.1593 原点を中心として球対称な密度分布 $\rho(r) = B\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)$ が存在する．ここで r は原点からの距離である．ただし，B は定数で，$R < r$ では $\rho(r) = 0$ である．

(1) 半径 $r + \triangle r$ の球面と半径 r の球面に挟まれた領域の体積 $\triangle V$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\triangle r}{r} \ll 1$ とすると，近似的に $\triangle V$ は $\triangle r$ に比例し，$\triangle V = f(r)\triangle r$ と書ける．$f(r)$ を求めよ．

(3) $\triangle V$ の領域内の質量は $\rho(r)\triangle V = f(r)\rho(r)\triangle r$ となることから，半径 r の球面より内側に含まれる質量 $M(r)$ は，$M(r) = \displaystyle\int_0^r f(r')\rho(r')dr'$ となる．$r \leqq R$ に対して，$M(r)$ を求めよ．

(4) 密度分布が球対称である場合には，r の位置にある質点が受ける単位質量あたりの重力の大きさ F_G は，$F_G(r) = \dfrac{GM(r)}{r^2}$ となる．$r \leqq R$ と $R < r$ のそれぞれについて，$F_G(r)$ を求めよ．

(5) 横軸を r，縦軸を $F_G(r)$ とするグラフの概形を描け．

(新潟大 2018)　　(m20182006)

0.1594 次のような行列 C について考える．ここで $i^2 = -1$ である．

$$C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 C の固有値をすべて求めよ．

(2) 行列 C の固有ベクトルをすべて求めよ．ただし，固有ベクトルは大きさ 1 に規格化すること．

(3) 行列 C を対角化した行列を D とする．行列 D を求めよ．

(4) D^n を計算し，C^n を求めよ．

(新潟大 2018)　　(m20182007)

0.1595 4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

について，次の各問いに答えよ．

(1) A の行列式の値を求めよ．

(2) A の固有値をすべて求めよ．

(3) A の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ．

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P と P^{-1} を求め，A を対角化せよ．

(新潟大 2018)　　(m20182010)

0.1596 行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値を全て求めよ．

(2) (1) で求めた各固有値に対応する，長さが 1 の固有ベクトルを求めよ．

(3) 行列 A を対角化せよ．

(新潟大 2019)　　(m20192004)

0.1597 次の方程式を解け．　$(\log_3 x)^4 - (\log_3 x)\left(\log_3 x^3\right) + \log_3 x^2 = 0$

(新潟大 2019)　　(m20192008)

0.1598 4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

について，次の各問いに答えよ．

(1) A の行列式の値を求めよ．

(2) A の固有値をすべて求めよ．

(3) A の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ．

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P と P^{-1} を求め，A を対角化せよ．

(新潟大 2019)　　(m20192015)

0.1599 3 次元ユークリット空間 $\mathbb{R}^3$ の平面 L を次のように定める．

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - y = 0 \right\}$$

線形変換 $f; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^3$ から平面 L への射影とする．すなわち，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ について，$f(\boldsymbol{x})$ は平面 L 上にあり，$\boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x})$ は平面 L に垂直なベクトルとなる．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して，$f(\boldsymbol{e}_1)$，$f(\boldsymbol{e}_2)$，$f(\boldsymbol{e}_3)$ を求めよ．

(2) $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ を満たす行列 A を求めよ．

(3) f の像空間 $\mathrm{Im}(f) = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\}$ の基底を一組求めよ．

(4) f の核空間 $\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = 0\}$ の基底を一組求めよ．

(新潟大 2019)　　(m20192017)

0.1600 (1) $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n$ を求めよ．ただし，$a \neq 0$ とし，n は正の整数とする．

(2) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$ のとき，$\boldsymbol{P^{-1}AP} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ となる $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} x & y \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ の x，y 及び a の値を求めよ．

(3) (1)，(2) を用いて $\boldsymbol{A}^n$ を求めよ．

(新潟大 2020)　　(m20202004)

0.1601 2 つの行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ．

(1) A の行列式 $\det A$ と逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 2 つの行列の積 AB を求めよ．

(3) 4 つの行列 A，B，A^{-1} および AB は，いずれも二次元 XY 座標平面上における任意の点 $P(x, y)$ をそれぞれ異なる $P'(x', y')$ に移動させる．A，B，A^{-1} および AB が，それぞれどのように点 P を点 P' に移動させるか，幾何学的意味を述べよ．

(新潟大 2020)　　(m20202007)

0.1602 4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

について，次の各問いに答えよ．

(1) A の行列式の値を求めよ．

(2) A の固有値をすべて求めよ．

(3) A の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ．

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求め，A を対角化せよ．

(5) 自然数 n に対して，A^n を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222003)

0.1603 3 点 $A(0, 0)$，$B(1, 0)$，$C(0, 1)$ を頂点とする三角形 ABC の内部を D とする．D 内の点 $P(x, y)$ と三角形 ABC の 3 つの辺 AB，BC，CA の距離をそれぞれ d_1，d_2，d_3 とし，関数 $f(x, y)$ を $f(x, y) = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ として定義する．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 2 変数関数 $f(x, y)$ を求めよ．

(2) 点 $P\left(x, \dfrac{1}{2}\right)$ が D 内を動くとき，関数 $f\left(x, \dfrac{1}{2}\right)$ の最小値を求めよ．

(3) 点 $p(x, y)$ が D 内を動くとき，関数 $f(x, y)$ の最小値を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222004)

0.1604 虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を含む指数関数 $e^{i\theta}$ を三角関数で表す公式はオイラーの公式と呼ばれる．物理の問題を扱うには，よく似た行列の関係式を用いると便利なことが多い．このことに関連した以下の問いに答えよ．

(1) オイラーの公式を書け．つまり，実数 θ に対して $e^{i\theta}$ を三角関数を用いて表せ．

(2) 二次正方行列 I および J を

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する．J^2 を計算し，J^2 と I の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3) 一般に二次正方行列 X に対し，そのゼロ乗 X^0 および指数関数 e^X は次式で定義される：

$$X^0 = I, \quad e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n = I + X + \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{3!} X^3 + \cdots$$

(2) の関係式に着目すると，行列 $e^{\theta J}$ は I に比例する部分と J に比例する部分の和

$$e^{\theta J} = f(\theta) I + g(\theta) J$$

で表すことができる．このとき，関数 $f(\theta)$ および $g(\theta)$ を求めよ．

なお，必要ならば，三角関数のベキ展開（テイラー・マクローリン展開）が次式で与えられることを用いてもよい．

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} \qquad = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \cdots$$

$$\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots$$

(4) (3) で求めた行列 $e^{\theta J}$ に対して，その行列式の値を答えよ．

次に，これまでの結果の応用として，調和振動子の運動を表す微分方程式

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

の解 $x(t)$ を求めたい．ここで ω は正の定数である．以下の問いに答えよ．

(5) 変数 $p(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ および $q(t) = \omega x(t)$ を用いると，この微分方程式は,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$$

の形に表すことができる．ここで K は t に依らない二次正方行列である．行列 K を答えよ．

(6) (5) の微分方程式の解は次式で与えられる：

$$\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = e^{Kt} \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$$

以上のことから，初期条件 $p(0) = p_0$, $q(0) = q_0$ に対応する解 $x(t)$ を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222006)

0.1605 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ．

(2) $\boldsymbol{A}$ を対角化する行列 $\boldsymbol{P}$ のうち，$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となるものを求めよ．

ただし，$0 \leq \theta \leq \pi/2$ とする．また，θ を求めよ．さらに，$\boldsymbol{P}$ を用いて $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ．

(3) 前問 (2) の条件において，$\mathbf{P}^6$ を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222009)

0.1606 $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ について，$A^2 = A$ が成り立っているとき，以下の問に答えなさい．

(1) x, y を求めなさい．

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(長岡技科大 2011)　　(m20112102)

0.1607 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) A の行列式 $|A|$ を求めなさい．

(2) 実数 x, y, s, t に対して，

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = A \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

が成り立つとき，s, t を x, y で表しなさい．

(3) 前問で得られた式を $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表す行列 B を求めなさい．

(長岡技科大 2012)　　(m20122103)

0.1608 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ と 3 次元ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ を考える．以下の問いに答えなさい．

(1) A の行列式 $|A|$ を求めなさい．

(2) 3 次元ベクトル $\boldsymbol{p}$ についての方程式 $A\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b}$ が解を持つように，k を定めなさい．

(3) 前問で定めた k について，$A\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b}$ の解のうちで $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と垂直なものを求めなさい．

(長岡技科大 2013)　　(m20132102)

0.1609 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対し，下の問いに答えなさい．

(1) A の逆行列 A^{-1} を求めなさい．

(2) 曲線 $C : 5x^2 + 12xy + 8y^2 - 4 = 0$ の A による像 C' の方程式を求め，C' の概形を図示せよ．

(長岡技科大 2015)　　(m20152101)

0.1610 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくとき，下の問いに答えなさい．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような 2 次正方行列 P を 1 つあげなさい．また，$P^{-1}AP$ と P^{-1} を求めなさい．

(3) 自然数 n について，A^n を求めなさい．

(長岡技科大 2017)　　(m20172101)

0.1611　a を 1 でない実数とし，$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ とする．下の問いに答えなさい.

(1)　A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2)　$P^{-1}AP$ が対角行列になるような 2 次直交行列 P を 1 つあげなさい．また，$P^{-1}AP$ を求めなさい.

(長岡技科大 2018)　　(m20182101)

0.1612　a, b を実数とし，3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & b \\ 3 & 3a & 3 \end{pmatrix}$ を考える.

rank A は A の階数を表す．下の問いに答えなさい.

(1)　行列式 $|A|$ の値を a, b を用いて表しなさい.

(2)　行列 A が正則になる条件を a, b を用いて表しなさい.

(3)　rank $A = 1$ となるとき，a, b を求めなさい.

(長岡技科大 2019)　　(m20192101)

0.1613　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくとき，下の問いに答えなさい.

(1)　A の固有多項式 $|\,tE - A|$ を求めなさい．ただし，E を 3 次単位行列とする.

(2)　A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(長岡技科大 2020)　　(m20202101)

0.1614　正方行列を $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とおく.

また，n を自然数とする．下の問いに答えなさい.

(1)　B^2, B^3 を求めなさい.

(2)　AB, BA を求めなさい.

(3)　A^n を n を用いて表しなさい,

(4)　$n \geqq 2$ に対して，C^n を n を用いて表しなさい.

(長岡技科大 2021)　　(m20212101)

0.1615　実数 t の実数値関数 $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ についての連立微分方程式

$$(*) \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 6x_1 + 6x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 - x_2 \end{cases}$$

を考える．また，$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ とおく．下の問いに答えなさい.

(1)　A の固有値，固有ベクトルを求めなさい.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 2 次正方行列 P を一つあげなさい．また，$P^{-1}AP$ を求めなさい．

(3) P を前問 (2) におけるものとし，実数 t の実数値関数 $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$ を

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

により定める．このとき，$(*)$ を y_1，y_2 についての連立微分方程式に書き換えなさい．また，y_1，y_2 を求めなさい．

(4) x_1，x_2 を求めなさい．

(長岡技科大 2021)　　(m20212102)

0.1616 $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．また，実数 t の実数値関数を成分とする 2 次元ベクトル値関数 $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}(t)$ が，微分方程式

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{x} = A\overrightarrow{x} \cdots\cdots (*)$$

を満たしているとする．ただし，ベクトル値関数の微分は，成分ごとの微分である．

下の問いに答えなさい．

(1) A^2 を求めなさい．

(2) $(E - tA)^{-1} = E + tA$ であることを示しなさい．

(3) $\dfrac{d}{dt}\left(tA\overrightarrow{x}\right) = A\overrightarrow{x}$ が成り立つことを示しなさい．

(4) $\dfrac{d}{dt}\left((E - tA)\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}$ が成り立つことを示しなさい．

(5) $(*)$ の解で，$\overrightarrow{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を満たすものを求めなさい．

(長岡技科大 2022)　　(m20222103)

0.1617 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値を λ_1，λ_2，λ_3 ($\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3$) とする．$i = 1, 2, 3$ に対して，λ_i に対応する固有ベクトルでその第 1 成分が 1 のものを $\boldsymbol{u}_i$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $i = 1, 2, 3$ に対して，λ_i および $\boldsymbol{u}_i$ を求めよ．

(2) ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 9 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ をみたす直交行列 P を 1 つ求めよ．ただし，${}^tP$ は P の転置行列である．

(3) ${}^tP \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ．また自然数 n に対して，$A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ．

(金沢大 2011)　　(m20112201)

0.1618 次の問に答えよ．

(1) $(1+\sqrt{x}\,)^3$ は x の整式 $p(x), q(x)$ を用いて

$$(1+\sqrt{x}\,)^3 = p(x) + q(x)\sqrt{x}$$

と表すことができる．$p(x)$ と $q(x)$ を求めよ．

(2) 次の等式

$$\left(\sqrt{x}\,\right)^{(n)} = \frac{-(2n-3)}{2x}\left(\sqrt{x}\,\right)^{(n-1)} \ , \quad n = 2, 3, 4, \cdots$$

を示せ．ただし，$(\sqrt{x}\,)^{(n)}$ は $\sqrt{x}$ の n 階導関数である．

(3) $f(x) = (1+\sqrt{x}\,)^3$ とおくとき，

$$f^{(n)}(x) = 3\left(1 - \frac{x}{2n-3}\right)\left(\sqrt{x}\,\right)^{(n)} \ , \quad n = 2, 3, 4, \cdots$$

を示せ．

(金沢大 2011)　　(m20112202)

0.1619 関数 $f(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(2) $D_a = \{(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 2 \leqq x^2 + y^2 \leqq a^2\}$ とする．

$$\lim_{a\to\infty} \iint_{D_a} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dxdy$$

を求めよ．

(金沢大 2011)　　(m20112203)

0.1620 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について，次の問に答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の各固有値に対する固有空間を求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ．

(金沢大 2011)　　(m20112204)

0.1621 $V = R^3$ を R 上の 3 次元ベクトル空間とする．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \ , \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とし，行列 A が定める V 上の線形変換を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in V)$ とする．次の問に答えよ．

(1) $\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3\}$ は V の基底であることを示せ．

(2) V の基底 $\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3\}$ に関する f の表現行列 B を求めよ．

(3) f の像 $\mathrm{Im}f$ は V の部分空間であることを示せ．また，$\mathrm{Im}f$ の基底を一つ求めよ．

(金沢大 2011)　　(m20112205)

0.1622 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して,

$$A\vec{p_i} = \lambda_i \vec{p_i}\,,\ |\vec{p_i}| = 1\ (i = 1, 2, 3)\,, \quad \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$$

とする．ここで，$|\vec{p}|$ はベクトル $\vec{p}$ の長さとする．次の問いに答えよ．

(1) λ_1, λ_2, λ_3 を求めよ．

(2) $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$ を求めよ．

(3) $\vec{x} = x_1\vec{p}_1 + x_2\vec{p}_2 + x_3\vec{p}_3$ とする．$\lim\limits_{n\to\infty} |A^n\vec{x}| = \infty$ となるための x_1, x_2, x_3 の条件を述べよ．

(金沢大 2012)　　(m20122201)

0.1623 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$ に対して，$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$ とする．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^2$ に対して，次を示せ．

(1) 行列式

$$\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{vmatrix}$$

が 0 でないならば，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は 1 次独立である．

(2) 上の行列式が 0 ならば，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は 1 次従属である．

(金沢大 2012)　　(m20122204)

0.1624 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1-2r & r & r \\ r & 1-2r & r \\ r & r & 1-2r \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．ただし $r > 0$ とする．

(1) 行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$$

を因数分解した形で求めよ．

(2) A の固有値，および対応する固有空間を求めよ．

(3) $\boldsymbol{R}^3$ の点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ を

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \quad \boldsymbol{x}_{n+1} = A\boldsymbol{x}_n\ (n \geqq\ 1)$$

により定める．$\{\boldsymbol{x}_n\}$ が収束するための r の条件，およびそのときの $\{\boldsymbol{x}_n\}$ の極限を求めよ．

(金沢大 2012)　　(m20122205)

0.1625 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問い (1)〜(3) に答えよ．

(1) A が固有値 3 と 1 をもつことを確かめ，固有値 3 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ と固有値 1 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{y}$ を 1 つずつ求めよ．

(2) (1) で求めた $\boldsymbol{y}$ に対して，$\boldsymbol{z} - A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{z}$ を 1 つ求めよ．

(3) (1), (2) の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ を用いて行列 $P = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})$ をつくるとき，$P^{-1}AP$ を求めよ．

(金沢大 2013)　　(m20132201)

0.1626 $a_n \neq 0$ を満たす実数 $a_1,\ a_2,\ \cdots .\ a_n$ に対して

$$V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n \,\middle|\, a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = 0 \right\}$$

とおく．次の問い (1)〜(3) に答えよ

(1) V が $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間であることを示せ．

(2) V の次元が $n-1$ であることを，実際にその基底を与えることによって，示せ．

(3) V の直交補空間を求めよ．

(金沢大 2013)　　(m20132202)

0.1627 $x \geqq 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ が

$$0 \leqq f(x) \leqq \int_0^x f(t)dt$$

を満たすとする．次の (1)〜(3) を示せ，

(1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\dfrac{d}{dx}\log\left(\varepsilon + \displaystyle\int_0^x f(t)dt\right) < 1$.

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $f(x) < \varepsilon e^x$.

(3) 任意の $x \geqq 0$ に対して $f(x) = 0$.

(金沢大 2013)　　(m20132203)

0.1628 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の行列式 $\det A$ を求めよ．

(2) $\det A = 0$ とする．

　(a) A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \quad (\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ を求めよ．

　(b) $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ に対する固有ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{p_1},\ \overrightarrow{p_2},\ \overrightarrow{p_3}$ とする．$\overrightarrow{p_1},\ \overrightarrow{p_2},\ \overrightarrow{p_3}$ を求めよ．

(金沢大 2013)　　(m20132206)

0.1629 行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 6 & -6 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値を $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\ (\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ とする．$i = 1,2,3$ に対して，λ_i に対応する固有ベクトルでその第 1 成分が 1 のものを $\boldsymbol{u}_i$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $i = 1,2,3$ に対して，λ_i および $\boldsymbol{u}_i$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3$ とし，$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \boldsymbol{v}$ とおく．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{z_n}$ を求めよ．

(金沢大 2014)　　(m20142201)

0.1630 関数 $\varphi(x) = x\log x \ (x > 0)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ を求めよ．

(2) テイラーの定理を適用して，$\varphi(x)$ の $x = 1$ における 1 次の近似式 $p(x)$ および剰余項 R_2 を求めよ．

(3) (2) の $p(x)$ に対し，$x > 0$ において $\varphi(x) \geqq p(x)$ が成り立つことを示せ．

(4) 閉関数 $[0, 1]$ で定義された正の値をとる連続関数 $f(x)$ が $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ を満たすとする．このとき

$$\int_0^1 \varphi\left(f(x)\right)\,dx \geqq 0$$

が成り立つことを示せ．

(金沢大 2014)　　(m20142202)

0.1631 線形変換 $f \ : \ \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ は

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

をみたすとする．ただし $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ は $\boldsymbol{R}^3$ の標準基底，即ち

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{R}^3$ の標準基底に関する f の表現行列を求めよ．

(2) f の像 $(\mathrm{Im}\, f)$ の次元が 2 とする．

(a) b を a と c で表せ．

(b) f の核 $(\mathrm{Ker}\, f)$ を求めよ．

(金沢大 2014)　　(m20142204)

0.1632 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の各固有値に対する固有空間を求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ．

(金沢大 2014)　　(m20142205)

0.1633 任意の x, y, z について

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x+y+4z \\ -4x+3y+2z \\ -x+y+z \end{pmatrix}$$

となる $3\times\ 3$ 行列 A を考える．次の問いに答えよ．

(1) A を求めよ．

(2) A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\ \ (\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3)$ と，それぞれに対応する長さ 1 の固有ベクトル p_1, p_2, p_3 を求めよ．

(3) B を A の逆行列，n を自然数とするとき，B^n の固有値を $\mu_1^{(n)},\ \mu_2^{(n)},\ \mu_3^{(n)}\ \ (\mu_1^{(n)}<\mu_2^{(n)}<\mu_3^{(n)})$ とおく．数列 $a_n=\dfrac{\mu_1^{(n)}\mu_3^{(n)}}{\mu_2^{(n)}}\ \ (n=1,2,\cdots)$ に対して，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束発散を調べよ．収束する場合はその値を求めよ．

(金沢大 2015)　　(m20152201)

0.1634 R^3 の部分集合 $W=\left\{ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; 3x+4y-z=0 \right\}$ と線形変換

$$f: R^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) W が R^3 の部分空間であることを示し，その基底を一組求めよ．

(2) $\boldsymbol{x}\in W$ のとき $f(\boldsymbol{x})\in W$ となることを示せ．

(3) (2) により，f の定義域を W に制限することにより，線形変換

$$g: W\ni \boldsymbol{x} \longmapsto f(\boldsymbol{x})\in W$$

ができる．この変換 g の (1) で選んだ W の基底に関する表現行列を求めよ．

(金沢大 2015)　　(m20152204)

0.1635 行列 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ついて，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の各固有値に対する固有空間を求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を一つ求めよ．

(4) $B=(\alpha E-A)(\beta E-A)^{-1}$ とおく．ただし E は 3 次の単位行列，α と β は A の固有値とは異なる実数とする．B を対角化せよ．

(金沢大 2015)　　(m20152205)

0.1636 次の微分，積分を計算しなさい．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(x^{\sin x}\right)$ (2) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$

(金沢大 2015) (m20152209)

0.1637 行列 A を次のように定義する．

$$A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値と規格化された固有ベクトルを求めなさい．

(2) ある行列 P を用いて，行列 $A' = P^{-1}AP$ を対角行列にすることができる． P と A' を求めなさい．

(金沢大 2015) (m20152211)

0.1638 k を実数とする． R^3 の部分集合

$$W=\left\{ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} 2x+10y+3z=0, \\ 3x+15y+kz=0 \end{array} \right\}$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) W が R^3 の部分空間であることを示せ．

(2) W の次元と基底の 1 組を求めよ．

(3) W の直交補空間 $W^{\perp}$ を求めよ．

(金沢大 2016) (m20162201)

0.1639 $Q_0(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $Q_n(t)$ は n 次式 $(n=1,2,3)$ で

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(Q_n(t)\right)^2 dt = 1$,

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q_m(t)Q_n(t)dt = 0 \ \ (0 \leqq \ m < n \leqq \ 3)$,

(c) $Q_n(t)$ の t^n の係数は正

とする． このとき $Q_n(t)$ $(n=1,2,3)$ を求めよ．

(金沢大 2016) (m20162203)

0.1640 行列 A は

$$A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=4\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満たす．次の問いに答えよ．

(1) $P=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，行列式 $\det P$ および逆行列 P^{-1} を求めよ．

(2) 行列 A を求めよ．

(3) 行列 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ に対して，$x_{11} + x_{22} + x_{33}$ を tr(X) で表す．自然数 n に対して $\mathrm{tr}(A^n)$ を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162206)

0.1641 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を計算しなさい．

(金沢大 2016)　　(m20162212)

0.1642 何回でも偏微分可能な関数 $u(x, y, z)$ が

$$\Delta u = 0 \qquad \left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

を満たしているとする．このとき，

$$v = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}$$

に対して，Δv を計算せよ．

(金沢大 2016)　　(m20162215)

0.1643 (1) 自然数 n に対して，集合 $D_n = \left\{ (x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq n^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \right\}$ における関数 $e^{-x^2-y^2}$ の積分 $\displaystyle\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dxdy$ を求めよ．

(2) 集合 $\left\{ (x, y) \in R^2 \mid 0 \leq x \leq n,\ 0 \leq y \leq n \right\}$ を R_n と表すとき，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\iint_{R_n} e^{-x^2-y^2} dxdy - \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dxdy \right) = 0$ を示せ．

(3) 次の積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

(金沢大 2016)　　(m20162216)

0.1644 次の問いに答えよ．ただし，以降 a, b は正の定数とする．

(1) $f(x) = a^x$ の導函数を求めよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{1}{x} \log \frac{a^x + b^x}{2}$ を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x}$ を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162220)

0.1645 連立方程式

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

を満たす点 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in R^4$ の全体を V とする．

(1) V は R^4 の線形部分空間であることを示せ．

(2) V の基底を一つ求めよ．

(3) R^4 の基底で，(2) で求めた V の基底を含むものを一つ求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162225)

0.1646 次の $4\times\ 4$ 行列 A とベクトル $\boldsymbol{b}\in R^4$ ついて以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 10 & -8 \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \\ a \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\in R^4$ に対する連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持つように定数 a を定めよ．

(2) (1) で求めた a に対して，連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解を求めよ．

(3) 像空間 $\mathrm{Im}A=\{A\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in R^4\}$ の基底と次元を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162226)

0.1647 $A=\begin{pmatrix} -5 & -4 & 4 \\ 16 & 15 & -16 \\ 10 & 10 & -11 \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162227)

0.1648 実数を成分とする 2 次正方行列全体がつくるベクトル空間を M とする．
$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\in M$ に対し，線形写像 $F:M\to M$ を

$$F(X)=AX-XA\qquad(X\in M)$$

によって定義するとき，M の部分空間

$$\mathrm{Ker}\,F=\big\{X\in M\mid F(X)=O\big\}.\qquad \mathrm{Im}\,F=\big\{F(X)\mid X\in M\big\}$$

の次元を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162228)

0.1649 写像 $f\,:\,R^3\to R^3$ を

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix})=\begin{pmatrix} 2x_1+3x_2-x_3 \\ 4x_1-x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$$

によって定める．

(1) f は線形写像であることを示せ．

(2) $\mathrm{Im}\,f$ と $\mathrm{Ker}\,f$ の次元を求めよ．ただし，

$$\mathrm{Im}\,f=\big\{f(\boldsymbol{x})\,\big|\,\boldsymbol{x}\in R^3\big\}$$
$$\mathrm{Ker}\,f=\big\{\boldsymbol{x}\in R^3\,\big|\,f(\boldsymbol{x})=0\big\}$$

である．

(3) 写像 f は逆写像 f^{-1} を持つか．持つならばそれを求め，持たなければその理由を記せ．

(金沢大 2016) (m20162229)

0.1650 $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) A の固有値とその固有値に属する固有空間を求めよ．

(金沢大 2016) (m20162230)

0.1651 R^3 の 2 つの部分集合

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, 2x + y + z = 0 \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x - 2y + z = 0 \right\}$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) $V \cap W$ の基底を求めよ．

(2) V と W の基底を求めよ．

(3) $V + W$ を求めよ．

(金沢大 2016) (m20162231)

0.1652 (1) $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ の階数 (rank$M$) を求めよ．

(2) 次の連立方程式を解け．

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 & = & 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 3x_4 & = & -2 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 6x_4 & = & 5 \end{array} \right.$$

(金沢大 2016) (m20162232)

0.1653 $7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 1 \cdots (*)$ を次の手順で，(x, y) 平面に図示せよ．

(1) $(*)$ の左辺は $2 \times\ 2$ の対称行列 A を用いて，$(x \quad y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すことが出来る．A を求めよ．

(2) A の固有値 $(\lambda_1 < \lambda_2)$，および，長さ 1 の固有ベクトル $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$（$\lambda_1$に対応），

$v_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$（$\lambda_2$に対応）を求めよ．ただし，$a > 0$，$c > 0$ と選ぶ．

(3) 行列 $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ とおく．$P^{-1}AP$ を計算せよ．

(4) 変数変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ としたとき，(x, y) 平面上の図形は，反時計回りに q ラジアン回転すると (X, Y) 平面上の図形に移る．q を求めよ．また，上記の図形を (X, Y) 平面上で図示せよ．

(5) $(*)$ を (x, y) 平面上で図示せよ．

(金沢大 2016)　　(m20162234)

0.1654 行列 $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を考える．次の各小問に答えよ．

(1) P の固有値をすべて求めよ．またそれぞれの固有値に属する固有ベクトルを一つずつ求めよ．ただし固有ベクトルの成分は整数値に選べ．

(2) $\boldsymbol{v}$ を (1) で求めた固有ベクトルの線形結合として表せ．

(3) $P^n\boldsymbol{v}$ を求めよ．さらに極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P^{2n+1}\boldsymbol{v}$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P^{2n}\boldsymbol{v}$ を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162237)

0.1655 k を実数とする．行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2k \\ 1 & 2k & 2 \\ k & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) A の階数を求めよ．

(2) A による $\boldsymbol{R}^3$ の変換

$$f : \boldsymbol{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

を考える．

(a) f が $\boldsymbol{R}^3$ の線形変換であることを示せ．

(b) f の像 $(\mathrm{Im}\, f)$ の次元が 2 のとき，f の核 $(\mathrm{Ker}\, f)$ の次元と基底の 1 組を与えよ．

(金沢大 2017)　　(m20172201)

0.1656 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) A を対角化せよ．

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して，関数 $f(\boldsymbol{x})$ を $f(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ と定めると，$f(\boldsymbol{x}) \geqq 0$ であることを示せ．さらに $f(\boldsymbol{x}) = 0$ となる $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ を求めよ．ただし ${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す．

(3) $A = B^2$ となる行列 B を求めよ．

(金沢大 2017)　　(m20172202)

0.1657 (1) $\dfrac{x}{1+x} \leqq \log(1+x) \leqq x \quad (x > -1)$ を示せ．

(2) 実数列 $\{a_n\}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を満たすとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n$ を求めよ．

(3) 実数列 $\{b_n\}$ は有界数列とする．もし $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b_n}{n}\right)^n$ が収束するならば，$\{b_n\}$ も収束することを示せ．

(金沢大 2017)　　(m20172203)

0.1658 行列 $A=\begin{pmatrix} -1 & 8 & 8 \\ 4 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) I を 3 次の単位行列とするとき，A の特性多項式 $\det(\lambda I-A)$ を求めよ．

(2) A の固有値 λ_1，λ_2，λ_3 $(\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3)$ と，それぞれに対応する長さ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_3$ を求めよ．

(3) 行列 A^4-10A^2 を求めよ．

(金沢大 2017)　　(m20172206)

0.1659 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の各問いに答えなさい．

(1) A の固有値と規格化された固有ベクトルをすべて求めなさい．

(2) ある行列 V を用いて，行列 $A'=V^{-1}AV$ を対角行列にすることができる．V と A' を求めなさい．

(金沢大 2017)　　(m20172212)

0.1660 (1) 線形写像

$$f:\boldsymbol{R}^4\ni\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & -4 \\ 5 & 8 & 8 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3$$

の像 $(\mathrm{Im}\, f)$ と核 $(\mathrm{Ker}\, f)$ の基底をそれぞれ一組求めよ．

(2) $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合 $W=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; z^2\geqq x^2+y^2\right\}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではないことを示せ．

(3) $\boldsymbol{R}^n (n\geq 3)$ のベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ が 1 次独立であるとき，$\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3$，$\boldsymbol{u}_3+\boldsymbol{u}_1$ も 1 次独立であることを示せ．

(金沢大 2018)　　(m20182201)

0.1661 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について 次の問いに答えよ．

(1) ${}^tPAP$ が対角行列となるような 3 次の直交行列 P を一つ求めよ．ただし ${}^tP$ は P の転置行列を表す．

(2) $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3$ に対して，$f(\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ とおく（${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す）．

集合 $S=\left\{\boldsymbol{x}={}^t(x,y,z)\in\boldsymbol{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\right\}$ における，$f(\boldsymbol{x})$ の最大値と最小値，およびそれらを与える $\boldsymbol{x}\in S$ をすべて求めよ．

(3) $A^5-5A^4+2A^3+9A^2$ を求めよ．

(金沢大 2018)　　(m20182202)

0.1662 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．以下において，I は 3 次の単位行列，O は 3 次の零行列である．

(1) A の特性多項式 $\det(\lambda I - A)$ を求めよ．

(2) A の実数の固有値をすべて求め，各固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ．

(3) $A^3 + aA^2 + bA + cI = O$ を満たす実数 a, b, c を求めよ．

(4) 行列 A^{2018} を計算せよ．

(金沢大 2018)　　(m20182206)

0.1663 定数 $a > 0$ を与えて，開区間 $\left(0, \dfrac{\pi}{a}\right)$ 上で関数 $f(x) = \dfrac{\cos(ax)}{\sin(ax)}$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) $x = 0$ での右側極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0+0} f(x)$ と $x = \dfrac{\pi}{a}$ での左側極限 $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{a} - 0} f(x)$ をそれぞれ調べよ．

(2) $f(x)$ は $\left(0, \dfrac{\pi}{a}\right)$ 上で，$f'(x) = -a\left(1 + f(x)^2\right)$ を満たすことを示せ．

(3) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在することを示し，その導関数 $(f^{-1})'(x)$ を求めよ．

(4) (3) の関数 $f^{-1}(x)$ と $f(b) = b$ を満たす定数 b $\left(0 < b < \dfrac{\pi}{a}\right)$ に対して，広義積分

$$\int_b^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)\left\{1 + \left(f^{-1}(x)\right)^2\right\}} dx$$

を a と b を用いて表せ．

(金沢大 2018)　　(m20182207)

0.1664 関数 $f(x, y) = (x + y)e^{-(x^2+y^2)}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 曲面 $z = f(x, y)$ 上で点 $(1, 0, f(1, 0))$ における接平面の方程式を $z = ax + by + c$ と表すとき，定数 a, b, c を求めよ．

(2) $f(x, y)$ の極値を調べよ．

(3) 次の広義重積分の値を求めよ．必要ならば，$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを利用してよい．

$$\iint_D f(x, y) dxdy, \quad D = \{(x, y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$$

(金沢大 2018)　　(m20182208)

0.1665 行列 A は

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を満たしている．次の問いに答えよ．

(1) 行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対して，行列式 $\det P$ および逆行列 P^{-1} を求めよ．

(2) 行列 A を求めよ.

(3) E を 4 次の単位行列とするとき,

$$(A^2-E)^2(A^2-4E)+A^2+A=aA^2+bA+cE$$

を満たす実数の組 (a,b,c) を 1 つ求めよ.

(金沢大 2019)　　(m20192201)

0.1666 被積分関数に自然対数を含んでいる定積分

$$I=\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx$$

の値が $0.18<I<0.28$ となることを確かめる．次の問いに答えよ.

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，不等式

$$\frac{\log(1+x)}{1+x^2} \geqq \left(x-\frac{1}{2}x^2\right)(1-x^2)$$

が成り立つことを示し，これを用いて $I \geqq \dfrac{11}{60}$ であることを導け.

(2) 2 つの等式

$$1+\tan\theta=\frac{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\cos\theta} \quad \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

および

$$\int_0^{\pi/4} \log\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right\}d\theta=\int_0^{\pi/4}\log(\cos\theta)d\theta$$

がそれぞれ成り立つことを示し，これらを用いて定積分 I を計算せよ.

(3) $\pi<3.2$ および $\log 2<0.7$ であることと問題 (1)(2) の結果を合わせて,
$0.18<I<0.28$ であることを確かめよ.

(金沢大 2019)　　(m20192202)

0.1667 正接関数 $\tan x$ の逆関数を $\tan^{-1}x$ とし，$x \neq 0$ となる (x,y) に対して関数 $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ を定める．次の問いに答えよ.

(1) 偏導関数を計算して，$f_y(x,y)-f_x(x,y)$ と $f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)$ を求めよ.

(2) $0<a<1$ に対し

$$D_a=\left\{(x,y)\ \middle|\ a^2 \leqq x^2+y^2,\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x\right\}$$

とするとき，重積分

$$I_a=\iint_{D_a}\{f_y(x,y)-f_x(x,y)\}\,dxdy$$

を計算し，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to+0} I_a$ を求めよ.

(金沢大 2019)　　(m20192203)

0.1668 行列

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -13 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ.

(1) A のすべての固有値，および各固有値に対する固有空間を求めよ.

(2) 3 次の正則行列 P で，$P^{-1}AP$ が対角行列となるものは存在しないことを示せ.

(金沢大 2019)　　(m20192204)

0.1669 k を実数とする．行列 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k-7 \\ 0 & -1 & 1 & 3k \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) B の階数 (rank$B$) を求めよ.

(2) 次の連立一次方程式が解をもつような k の値と，その k に対する連立一次方程式の解をすべて求めよ.

$$\begin{cases} x+y+\ z &= \ k-7 \\ \ -y+\ z &= \ 3k \\ 2x+y+3z &= \ 1 \end{cases}$$

(3) B による $\boldsymbol{R}^4$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像

$$f\ :\ \boldsymbol{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

を考える．f の核 (Ker f) の次元と 1 組の基底，f の像 (Im f) の次元と 1 組の基底をそれぞれ求めよ.

(金沢大 2019)　　(m20192205)

0.1670 p と q を実数とする．行列

$$A=\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

が異なる実数の固有値 α と β をもつとき，次の問いに答えよ.

(1) p と q が満たす条件を求めよ.

(2) 次を満たす正則行列 P の一つを，α と β を用いて与えよ.

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

(3) 漸化式

$$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を，a_1，a_2，α，β を用いて表せ.

(金沢大 2020)　　(m20202201)

0.1671 行列

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

と，B による $\boldsymbol{R}^4$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像

$$f\ :\ \boldsymbol{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longleftrightarrow B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

について，次の問いに答えよ.

(1) f の核 (Ker f) を求めよ.

(2) f が全射であることを示せ.

(3) E_3 を 3 次の単位行列とする．このとき,

$$BC = E_3$$

を満たす行列 C が存在する場合にはそのような C を一つ与え，存在しない場合にはその理由を述べよ.

(金沢大 2020)　　(m20202202)

0.1672 (1) 集合 $D = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; |x| + |y| \leq 1\right\}$ の概形を描け.

(2) (1) で定義した D に対して積分 $\displaystyle\iint_D (x - y + 1)\, e^{x+y}\, dx\, dy$ を求めよ.

(3) $\max\{u, v\} = \begin{cases} u & (u \geq v) \\ v & (u < v) \end{cases}$ とする．積分 $\displaystyle\int_0^3 \left(\int_0^1 e^{\max\{x^2, 9y^2\}} dy\right) dx$ を求めよ.

(金沢大 2020)　　(m20202206)

0.1673 (1) n を自然数とする. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^n$ を求めよ.

(2) 次の行列の固有値を求め，それぞれの固有値に対応する固有空間の基底を 1 組求めよ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(金沢大 2020)　　(m20202208)

0.1674 α を実数とする．2 以上の自然数 n に対して，n 次の正方行列 A_n を

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \alpha & -1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

により定める．ここで，$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ である.

また，$a_n = \det(A_n)$ とする．次の問いに答えよ.

(1) a_2, a_3 を求めよ.

(2) a_n を求めよ.

(3) $\alpha \geq 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n$ を求めよ.

(金沢大 2021)　　(m20212204)

0.1675 次の行列が対角化可能であるか調べ，対角化可能ならば，与えられた行列 A に対し，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P とそのときの対角行列を 1 組求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 8 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(金沢大 2021)　　(m20212205)

0.1676 行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) A のすべての固有値，および各固有値に対する固有空間を求めよ．

(2) A が対角化可能であるかどうを調べよ．さらに，A が対角化可能ならば，$P^{-1}AP$ が対角行列となる P を求めよ．

(3) 3 次実正方行列 B が $AB = BA$ を満たすとき，B は対角化可能であることを示せ．

(金沢大 2021)　　(m20212206)

0.1677 (1) $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$,　$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$,　$\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{R}$ 上 1 次従属となるような実数 α の値を求めよ．

(2) β を実数とする．$\boldsymbol{R}^3$ の部分空間

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} \beta & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

の次元が 2 となるときの β の値を求めよ．また，そのときの W の 1 組の基底を求めよ．

(3) 写像

$$f : \boldsymbol{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 3x^2 - y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$$

が線形写像ではないことを示せ．

(金沢大 2021)　　(m20212207)

0.1678 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)) = (\cos t,\ \sin t,\ t)$ で表される曲線を考える．

(a) $\boldsymbol{r}(t)$ での単位接線ベクトルを求めなさい．

(b) $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲で，この曲線に沿って線積分 $\displaystyle\int_C xy^2 ds$ を求めなさい．ただし ds は曲線の線素とする．

(金沢大 2021)　　(m20212213)

0.1679 (a) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と規格化された固有ベクトルをすべて求めなさい．

(b) 関数 $f(x,y)=3x^2-4xy+3y^2$ は任意の実数 x,y に対して $f(x,y)\geq 0$ を満たすことを示しなさい.

(金沢大 2021)　　(m20212214)

0.1680 (1) $\alpha>1$ のとき，関数 $f(x)=(x+|x|)^{\alpha}$ は $\boldsymbol{R}$ 上の C^1 級関数であることを証明せよ.

(2) 集合 $\left\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{4}(x+|x|)^2+y^2\leq 1,\ x\geq -2\right\}$ の面積を求めよ.

(3) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)-1+\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(x^2\right)}$$

(金沢大 2022)　　(m20222201)

0.1681 次の命題の真偽を判定し，命題が真の場合は証明を与え，命題が偽の場合は反例あるいはその判断理由を述べよ.

(1) V を $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間とし，m 個の元 $e_1,\ \cdots,\ e_m\in V$ は $\boldsymbol{R}$ 上 1 次独立とする．ベクトル $v\in V$ が $e_1,\ \cdots,\ e_m$ の $\boldsymbol{R}$ 上の 1 次結合であるとき，$v=c_1e_1+\cdots+c_me_m$ を満たす実数の組 $(c_1,\ \cdots,\ c_m)$ はただ一通りに定まる.

(2) 2×2 行列 A,B について，$\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$ が成立する.

(3) $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間 $\boldsymbol{R}^2=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} \;\middle|\; x,y\in\boldsymbol{R}\right\}$ に対し，写像 $f\ :\ \boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ を

$$f\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x+y \\ x-2y+1\end{pmatrix}$$

で定めると，f は線形写像である.

(4) n を任意の自然数とする．正則な $n\times n$ 行列は，固有値 0 を持たない.

(金沢大 2022)　　(m20222203)

0.1682 対称行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 固有値を全て求めよ.

(2) A を直交行列によって対角化せよ.

(金沢大 2022)　　(m20222204)

0.1683 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) A のすべての固有値を求めよ.

(2) A の各固有値に対する固有空間を求めよ.

(3) A が対角化可能の場合は $P^{-1}AP$ が対角行列になるような P を 1 つ求めよ．対角化可能ではない場合はその理由を述べよ.

(金沢大 2022)　　(m20222205)

0.1684 (1) 線形写像 $f\ :\ \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ を $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4$ に対して

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

で定める．このとき，f の像 $\mathrm{Im}(f)$ の次元と 1 組の基底，および f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の次元と 1 組の基底を求めよ．

(2) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$， $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ によって生成される $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間を W とする． 線形写像 $g\ :\ \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^2$ であって，$\mathrm{Ker}(g) = W$ となるものを 1 つ求めよ．

(金沢大 2022) (m20222206)

0.1685 C^1 級関数 $z = f(x, y)$ に対して，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ とするとき

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \qquad (r \neq 0)$$

が成り立つことを示せ．

(金沢大 2022) (m20222208)

0.1686 $(\ ,\ )$ を $\boldsymbol{R}^3$ 上の標準内積とする．2 つのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \boldsymbol{R}^3$ の間の距離 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})^{1/2}$$

により定める． 任意のベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \boldsymbol{R}^3$ に対し，$d\left(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\right) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を満たすような写像 $f\ :\ \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を $\boldsymbol{R}^3$ 上の等長変換とよぶ．次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{R}^3$ 上の 2 つの等長変換 f, g に対して，合成写像 $f \circ g$ も $\boldsymbol{R}^3$ 上の等長変換となることを示せ．

(2) ベクトル $\mathbf{a_1} \in \boldsymbol{R}^3$ および行列 A_2, A_3 を

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とし, $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 f_1, f_2, f_3 を

$$f_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}_1, \quad f_2(\mathbf{x}) = A_2\mathbf{x}, \quad f_3(\mathbf{x}) = A_3\mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^3)$$

と定める．このとき f_1, f_2, f_3 は $\boldsymbol{R}^3$ 上の等長変換であることを示せ．

(3) ベクトル $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をベクトル $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ にうつすような等長変換を，(2) の f_1, f_2, f_3 の合成を繰り返すことにより 1 つ与えよ．

(金沢大 2022) (m20222210)

0.1687 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ について，以下の各問いに答えなさい.

(1) A の固有値を求めなさい.

(2) ある直交行列 P を用いて，$P^{-1}AP$ を対角行列にすることができる．P を求めなさい.

(金沢大 2022)　　(m20222214)

0.1688 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in R$$

が

$${}^tAA = E_3$$

をみたすとする. このとき，A の各行ベクトルは長さが 1 で互いに直交することを示せ．ただし，${}^tA$ は A の転置行列，E_3 は 3 次の単位行列を表す.

(富山大 2011)　　(m20112301)

0.1689 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}(1-x^2)e^{\left(a(x-b)\right)^2}$　$(a, b$ は定数である$)$

(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{(1-x)^3}\right)$　$(x \neq 1)$

(富山大 2012)　　(m20122301)

0.1690 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とする．このとき

(1) A の行列式を求めよ.

(2) A のゼロではない固有値及びゼロではない固有ベクトルを求めよ.

(3) (2) で求めた 2 つの固有ベクトルを列ベクトルとして並べた行列 P の逆行列 P^{-1}，及び $P^{-1}AP$ を計算せよ.

(富山大 2012)　　(m20122304)

0.1691 懸垂曲線 $y = a\cosh\dfrac{x}{a}$　$(a > 0)$ と直線 $y = b$　$(b > a)$ で囲まれた図形を考える.

(1) 直線と懸垂曲線は $x = \pm\ell$ で交差する．逆双曲線関数を用いて，定数 a と b で ℓ を表せ.

(2) 曲線の長さは曲線の線素 $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ を積分することによって与えられる．この図形の周囲の長さを a と b を用いて表せ.

双曲線関数 $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,　$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$，逆双曲線関数 $\cosh^{-1}x = \pm\log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ $(x > 1)$,　$\sinh^{-1}x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ を用いても良い.

(富山大 2012)　　(m20122305)

0.1692 $\mathbf{R}^3$ における 3 つのベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を考える.

(1) $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2,, \boldsymbol{e}_3\}$ は $\mathbf{R}^3$ の基底であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{e}_1$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に，$\boldsymbol{e}_2$ を $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に，$\boldsymbol{e}_3$ を $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に写す $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ への線形写像を行列で表せ.

(富山大 2012)　　(m20122307)

0.1693 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{\log_e(1-x)^2}$　　(2) $\dfrac{d}{dx}(\cos 2x)^{-2}$　　(3) $\dfrac{d}{dx}\tan\left(\dfrac{e^{x^2}}{2}\right)$

(富山大 2013)　　(m20132301)

0.1694 行列 $H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ $(\alpha,\ \beta$ は実定数，$\beta \neq 0)$ について，以下の問に答えよ.

(1) H の固有値を α, β を用いて表せ.

(2) (1) で求めたそれぞれの固有値に対応する固有空間の正規直交基底を求めよ.

(3) H を直交行列を用いて対角化せよ.

(富山大 2013)　　(m20132304)

0.1695 実数を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ が逆行列をもつための必要十分条件を x, y, z を用いて表せ.

(富山大 2013)　　(m20132307)

0.1696 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{\sin(1-x^{-1})}{(1-x)^3}$　　(2) $\dfrac{d}{dx}x^{x-2}$　$(x>0)$　　(3) $\dfrac{d}{dx}\left(3^x \exp\left(\dfrac{1}{3-x}\right)\right)$

(富山大 2014)　　(m20142301)

0.1697 次の微分方程式の一般解を求めよ．ただし，(3) についてはすべての一般解を求め，(4) については特殊解を求めよ.

(1) $e^{2x-y} + e^{x+y}\dfrac{dy}{dx} = 0$

(2) $(x^3+y^3)dx - 3xy^2dy = 0$

(3) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - (2x+3y)\dfrac{dy}{dx} + 6xy = 0$

(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 15y = 0$　$\left(x = 0 \text{ のとき }\quad y = 5,\ \dfrac{dy}{dx} = 1\right)$

(富山大 2014)　　(m20142306)

0.1698 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & x+2 & -1 & -1 \\ x & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $(x \in R)$ の階数を求めよ.

(富山大 2014)　　(m20142307)

0.1699 P を 2 以下の実係数多項式からなる実ベクトル空間とする．写像 $G: P \to P$ を，

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ $(a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R})$ に対し $G\left(f(x)\right) = f(x+1) = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2$

で定義する.

(1) G は線形写像であることを示せ.

(2) P の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する G の表現行列を求めよ.

(富山大 2014) (m20142308)

0.1700 $\mathbf{R}^2$ をユークリッド平面とする．すなわち，$\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2)$，$\boldsymbol{y} = (y_1,\ y_2)\ \in \mathbf{R}^2$ に対し，その距離を $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ で定義したときの距離空間とする．$f_1,\ f_2\ :\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を連続関数とし，$f\ :\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を，$f(x_1,\ x_2) = (f_1(x_1,\ x_2),\ f_2(x_1,\ x_2))\ \ \big((x_1,\ x_2) \in \mathbf{R}^2\big)$ で定義する．このとき，f が連続写像であることを示せ.

(富山大 2014) (m20142309)

0.1701 次の問いに答えよ.

(1) $1 - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{5!}$ を循環小数で表せ.

(2) マクローリンの定理を用いて，$\left|\sin x - \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}\right)\right| \leqq \dfrac{|x|^7}{7!}\ \ (x \in R)$ を示せ.

(3) $\dfrac{n}{1000} \leqq \sin 1 < \dfrac{n+1}{1000}$ を満たす自然数 n を求めよ.

(富山大 2014) (m20142310)

0.1702 x, y を実数とする．座標平面上の点 (x, y) に対して，行列

$$A = \begin{pmatrix} x & y & 2 \\ y & 1 & y \\ 2 & y & x \end{pmatrix}$$

を考える．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 直交行列 $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，${}^tPAP$ を求めよ.

(2) A の相異なる固有値の個数が 2 であるような点 (x, y) の集合を図示せよ.

(富山大 2015) (m20152303)

0.1703 xy 平面上に 3 点，$A(1,\ 1)$，$B(3,\ 1)$，$C(1,\ 4)$ を頂点とする三角形がある．この 3 つの頂点を線形写像 T により変換するとき，次の各問いに答えよ．ただし，線形写像 T は行列 $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ で与えれれる．計算の概略も示すこと.

(1) 頂点 $A,\ B,\ C$ の変換後の各頂点を $A',\ B',\ C'$ とする．これら 6 点を xy 座標平面上に座標の値とともに図示せよ.

(2) 点 $A',\ B'$ を通る直線をベクトル表示せよ．同様に点 $A',\ C'$ を通る直線をベクトル表示せよ.

(3) (2) の 2 直線が直交することをベクトルの内積を使って示せ.

(4) 三角形 ABC と三角形 $A'B'C'$ の面積比を求めよ.

(富山大 2015) (m20152308)

0.1704 3 次実対称行列 A は固有値 2 と 3 をもち，固有値 2 に対する固有空間 W_2 はある実数 x, y を用いて

$W_2 = \left\{ c \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \middle|\ c \in \mathbb{R} \right\}$ と表され，固有値 3 に対する固有空間 W_3 は

$W_3 = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| c_1,\ c_2 \in \mathbb{R} \right\}$ と表されている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $x,\ y$ を求めよ．

(2) $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を W_2 と W_3 のベクトルの和で表せ．

(3) 自然数 n に対して $A^n \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ を求めよ．

(富山大 2016)　　(m20162302)

0.1705　次の計算をせよ．ただし，計算の概略も示すこと．

(1) $\dfrac{d}{dx} x^{\sin x} \quad (x > 0)$　　(2) $\dfrac{d^5}{dx^5}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) \quad (x \neq 1)$

(富山大 2017)　　(m20172301)

0.1706　スカラー関数 $f(x,y,z) = e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)}$ について， 次の各問いに答えよ．ただし，$\overrightarrow{i}$，$\overrightarrow{j}$，$\overrightarrow{k}$ は，それぞれ直角座標系の $x,\ y,\ z$ 方向の単位ベクトルとする．

(1) 点 $P\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 0\right)$ を含む等位面（関数 f の値が等しい点の集合）の点 P における単位法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ の $x,\ y,\ z$ 成分を求めよ．

(2) 関数 f の勾配の発散 $\nabla \cdot \nabla f$ を求めよ．

(3) 関数 f の勾配の回転 $\nabla \times \nabla f$ を計算し，$\overrightarrow{0}$ となることを示せ．

(4) 点 $Q(1,0,1)$ における，ベクトル $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \sqrt{2}\,\overrightarrow{k}$ の方向への f の方向微分係数を求めよ．

(富山大 2017)　　(m20172303)

0.1707　$y = a \arcsin\left(\sqrt{\dfrac{x}{a}}\right) + \sqrt{ax - x^2}$　(a： 定数，$0 < x \leq a$) の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(富山大 2018)　　(m20182301)

0.1708　次の各問いに答えよ．ただし，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ は 2 行 2 列の正則な実数行列，$\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{O}$ はそれぞれ 2 行 2 列の単位行列と零行列とする．

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I} \end{vmatrix}$ と $\begin{vmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{vmatrix}$ をそれぞれ求めよ．

(2) 次の等式が成立することを示せ．

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$$

(3) 次の分割行列（ブロック行列）の積を計算せよ．なお計算結果は，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{O}$ のうち必要なものを小行列とする一つの分割行列として示すこと．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

(4) 次の等式が成立することを (1),(2),(3) の結果を利用して示せ．

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}^{-1}|$$

(富山大 2018)　　(m20182306)

0.1709 半径 $a(a>0)$ の円が x 軸に接して滑らずに転がるとき，円周上の定点が描く曲線をサイクロイドといい，パラメータを t として

$$x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

で与えられる．このとき次の各問いに答えよ．

(1) 導関数 $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ を計算せよ．

(2) $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$ を求めよ．

(3) 一般に，パラメータ t が α から β まで変化したとき，点 $(x(t), y(t))$ が描く曲線の長さ l は次式で表される．

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

サイクロイドにおいて，$t = t_0\ (0 < t_0 < 2\pi)$ を初期値として

円が一回転したとき $(t = t_0 + 2\pi)$ の曲線の長さを求めよ．

(富山大 2018)　　(m20182307)

0.1710 次の計算をせよ．ただし，計算の概略も示すこと．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(xe^{\sin x}\right)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right)$

(富山大 2019)　　(m20192301)

0.1711 (1) 正方行列 A, P, D の間に $AP = PD$ の関係があるとき，A^n を P, P^{-1}, D および n を用いて表せ．ただし n は自然数である．また，P は正則行列であるとする．

(2) 次の行列 B は相異なる 3 つの実数の固有値を持つ．これらの固有値および対応する固有ベクトルを求めよ．

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(3) (2) の行列 B において，固有値 λ_1, λ_2, λ_3 の各々に対応する任意の固有ベクトルを

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} q_{1,1} \\ q_{2,1} \\ q_{3,1} \end{pmatrix},\ \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} q_{1,2} \\ q_{2,2} \\ q_{3,2} \end{pmatrix},\ \overrightarrow{x_3} = \begin{pmatrix} q_{1,3} \\ q_{2,3} \\ q_{3,3} \end{pmatrix}$$

とし，行列 Q を

$$Q = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix}$$

としたとき

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

となる．この性質を利用し，(1), (2) の結果をもとに B^n を求めよ．

(富山大 2019)　　(m20192304)

0.1712 θ の範囲が $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，次の式で定義される xy 平面上の曲線に囲まれる領域の面積を求めよ．

$$\begin{cases} x = 2\sin\theta \\ y = 2\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

(富山大 2020)　　(m20202303)

0.1713 次の式で定義される xy 平面上の曲線 y_1 と y_2 および $x = 0$ と $x = 2\pi$ で囲まれる面積を求めよ

$$\begin{cases} y_1 = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ y_2 = \sin(x) \end{cases}$$

(富山大 2021)　　(m20212304)

0.1714 次の極限値を求めよ．
なお，必要に応じて, 公式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を使ってもよい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

(福井大 2011)　　(m20112401)

0.1715 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \log_e\left(\cos^2 x\right)$　　(2) $y = x^{\tan^{-1} x}$

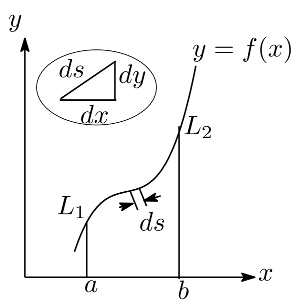
(福井大 2011)　　(m20112402)

0.1716 次の各問にしたがって，半径 R の円の円周の長さを求めよ．

(1) 右の図のように，関数 $f(x)$ の L_1 から L_2 の長さは $\displaystyle\int_{L_1}^{L_2} ds$ で求めることができる．

$$\int_{L_1}^{L_2} ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

となることを導け．



(2) 点 (x, y) と x 軸との間の角度を θ とすると，x および y を θ の関数で表せ．また，dy/dx を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_{L_1}^{L_2} ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ の積分の式を用いて，半径 R の円の円周の長さが $2\pi R$ となることを示せ．ただし，計算の途中過程も必ず示すこと．

(福井大 2011)　　(m20112404)

0.1717 $z = \arctan\left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$ のとき，$x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ となることを示せ．

(福井大 2011)　　(m20112405)

0.1718 座標変換によって，曲線 $x^2 + xy + y^2 = 1$ を $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$ の形（標準系）に書き換えたい．ここでは，この変換を次の手順によって行う．以下の問いに答えよ，途中経過がわかるように記述しないと減点する．

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) ２つの固有ベクトルを正規化した列ベクトル（単位長さとした列ベクトル）を $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ とする．$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ を書け．（どちらが $\boldsymbol{p}$ でもよい）

(3) これらの列ベクトル $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ を使って，行列 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \end{pmatrix}$ を表せ．

(例：列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ のとき $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ という行列を表せる．)

(4) 行列 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ によって対角化せよ．ここで，$\boldsymbol{P}^{-1}$ は行列 $\boldsymbol{P}$ の逆行列である．

(5) $\boldsymbol{x}$ を$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{X}$ で座標変換する．ここで，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ である．さて，このとき，$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}^T \left(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right) \boldsymbol{X}$ となることを示せ．ここで，$\boldsymbol{x}^T$ は列ベクトル $\boldsymbol{x}$ の転置で，$\boldsymbol{P}^T$ は $\boldsymbol{P}$ の転置行列である．

(6) 問題 (4) と (5) の答を使って，$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = x^2 + xy + y^2 = 1$ を $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$ の形に変換せよ．ここで，α と β は上記の座標変換の結果から決まる数値（スカラー）である．

(福井大 2011)　　(m20112407)

0.1719 次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) $3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$

(4) ${}^t\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ （t は転置を表す）

(福井大 2011)　　(m20112418)

0.1720 次のベクトル群が一次独立か一次従属かどうか判断せよ．

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$

(福井大 2011)　　(m20112419)

0.1721 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) (1) で求めた固有値の中で，中間の値を持つ固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(福井大 2011)　　(m20112420)

0.1722 次の公式を使って極限値を求めよ．

〈公式〉$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to +0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log_e(1+2x)}{x}$

(福井大 2012)　　(m20122403)

0.1723 次の関数を微分せよ．

(1) $y=\left(\dfrac{\log_e x}{x}\right)^5$

(2) $y=x^x$

(福井大 2012) (m20122404)

0.1724 $\displaystyle\iint_R \left(y-x^3\right)dxdy\,,\quad \left(R\,:\,0\leq x\leq 1,\ x^2\leq y\leq 2\sqrt{x}\right)$ の値を求めよ.
また積分領域 R も図示せよ.

(福井大 2012) (m20122409)

0.1725 次の値を求めよ.

(1) $\dfrac{a^{\frac{5}{6}}b^{-\frac{1}{3}}\left(b^{-\frac{3}{2}}\sqrt{a^2b}\right)^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{2}}b^{-2}}$, ただし, a,b は正の数とする.

(2) $\log_5\sqrt[8]{5}$

(3) $\dfrac{\log_5 8\cdot\log_3 6\cdot\log_2 3}{\log_5 3+\log_5 2}$

(福井大 2012) (m20122414)

0.1726 次のベクトルと行列の演算を行え.

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

(2) $3\begin{pmatrix}2 & 4\\1 & 3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & -1\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos 2x & -\sin 2x\\ \sin 2x & \cos 2x\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 5\\3 & 6\end{pmatrix}$

(福井大 2012) (m20122419)

0.1727 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 3\end{pmatrix}$ とし, t が転置を表すとき, 次の関係が成り立つことを示せ.

(1) ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$

(2) ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$

(福井大 2012) (m20122420)

0.1728 行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -3 & -2\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値の中で, 最大の値を持つ固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2012) (m20122421)

0.1729 $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\1 & 3\end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めよ.

(2) $\Phi_A(A)=0$ （ケーリー・ハミルトンの定理）が成り立つことを示せ.

(3) 上の結果を利用して，A の逆行列を求めよ．

(福井大 2012)　　(m20122422)

0.1730 次の行列 A について以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

(1) $a = 1,\ b = 2,\ c = 3$ のとき，A の行列式の値を求めよ．

(2) $a,\ b,\ c$ が相異なる実数のとき，A が正則であることを示せ．

(福井大 2013)　　(m20132403)

0.1731 極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{2x - x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x}$

(福井大 2013)　　(m20132405)

0.1732 不定積分を求めよ．

< 公式 > 必要に応じて次の公式を使ってもよい．

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (\,a, C \text{ は定数})$$

(1) $\displaystyle \int \sin^2 x \,\cos x \,dx$

(2) $\displaystyle \int \frac{dx}{x^2(2 + x^2)}$

(福井大 2013)　　(m20132407)

0.1733 次の問いに答えよ．

(1) 行列 $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{D}$ があるとき，$(\boldsymbol{BC})^T = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}^T$ が成り立つとして，次の関係が成り立つことを証明せよ．ここで，$\boldsymbol{B}^T$ は $\boldsymbol{B}$ の転置行列である．

$$(\boldsymbol{BCD})^T = \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}^T$$

(2) $\boldsymbol{A}$ を二次正方行列とする．$\boldsymbol{A}$ を含む次の式を満たす $\boldsymbol{A}$ を求めよ．

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(福井大 2013)　　(m20132412)

0.1734 次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $(1 \quad 2 \quad 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) $3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) ${}^t\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

(福井大 2013)　　(m20132421)

0.1735 次の行列の階数 (rank) を求めるとともに，正則性を調べ，正則なら逆行列を求めなさい．

(1) $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 2a & 3b \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(福井大 2013) (m20132423)

0.1736 次の行列の固有値を求め，最大の固有値に対する固有ベクトルを求めなさい．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(福井大 2013) (m20132424)

0.1737 行列 $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(福井大 2014) (m20142418)

0.1738 $f(x) = x^2 - 4x + 5$ とする．関数 $f(x)$ のグラフ上の 2 点 $(2,\ f(2))$ と $(4,\ f(4))$ を結ぶ直線の傾きが，点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きに等しくなる a の値を求めよ．

(福井大 2014) (m20142420)

0.1739 以下の与える行列 A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

について， 次の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値及び固有ベクトルを求めよ．

(2) 行列 A の対角行列を $\Sigma = U^{-1}AU$ とする．行列 A を対角化する行列 U を求めよ．

(3) 行列 U を用いて対角化した行列 A の対角行列 Σ を求めよ．

(福井大 2014) (m20142427)

0.1740 単振子の周期 T は，振子の長さを ℓ，重力の加速度を g とすれば，$T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ で与えられる．ℓ, g が微小量 $\triangle\ell$, $\triangle g$ だけ変化するときの T の変化量を $\triangle T$ とするとき，$\triangle T$ が近似的に以下の式で表されることを示せ．

$$\frac{\triangle T}{T} = \frac{1}{2}\left(\frac{\triangle\ell}{\ell} - \frac{\triangle g}{g}\right)$$

(福井大 2015) (m20152405)

0.1741 y を x の関数とするとき，微分方程式

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' + a = 0 \quad （a \text{ は実数の定数}）$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) この微分方程式を，条件 $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ のもとで解け．

(2) 上の (1) で求めた解 y について $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} y^2 dx$ とおく．I が有限になるための a に関する必要十分条件を示せ．また，その必要十分条件が満たされるとき，a を用いて I を表せ．なお，正規分布（ガウス分布）の確率密度関数の性質を利用してもよい．

(福井大 2015) (m20152413)

0.1742 次のベクトルと行列の演算を行え.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) $3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(3) ${}^t\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$（$t$ は転置記号）

(4) $\begin{pmatrix} \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ -\sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}$

(福井大 2015)　　(m20152420)

0.1743 次の連立一次方程式をガウスの消去法（掃き出し法）を用いて解け.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(福井大 2015)　　(m20152421)

0.1744 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた最小の固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2015)　　(m20152422)

0.1745 行列 A, B, C に関して，行列式を計算しなさい．また，逆行列を，それぞれ求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(福井大 2015)　　(m20152423)

0.1746 曲率 $\rho^{(注)}$ に関する以下の微分方程式について答えなさい.

$$y'' = \rho(1 + {y'}^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする.

(1) $\dfrac{d\rho}{dx}$ を求めなさい.

(2) 円の方程式 $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ のとき，(1) の曲率 ρ に関する x の微分 $\dfrac{d\rho}{dx}$ が 0 となり，曲率 ρ は一定であることを示しなさい.

(3) ρ を定数として，微分方程式 ① を解きなさい．必要であれば，以下の置換法 $y' = \nu = \tan\theta \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いること.

（注）曲線上の各点において，その曲線の曲がりの程度を示す値.

(福井大 2015)　　(m20152425)

0.1747 (1) $A = \begin{pmatrix} a+b & a & a \\ a & a+c & a \\ a & a & a+d \end{pmatrix}$ に対して，　$|A| = abcd\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d}\right)$

となることを示せ．ただし，$abcd \neq 0$ とする.

(2) 行列 $A_n = \left(a_{ij}\right)$ $\bigl(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n,\ n$ は 3 以上の整数$\bigr)$ を，

$$a_{ij} = a_0 + a_i \delta_{ij}\ , \qquad a_i : \text{実数}\ (1 \leq i \leq n)$$

で定義するとき，

$$|A_n| = a_0 a_1 \cdots a_{n-1} a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} \right)$$

となることを示せ．ただし，$a_0 a_1 \cdots a_{n-1} a_n \neq 0$ である．また，δ_{ij} は，$i = j$ のときに 1，$i \neq j$ のときに 0 をとるものとする．

(福井大 2016)　　(m20162409)

0.1748 連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - y - 6 \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 2y + 1 \end{cases}$$

について，以下の問いに答えよ．ただし，この微分方程式の解 $x(t)$，$y(t)$ を要素とするベクトルを $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする．ただし，$a \neq \dfrac{5}{2}$ とする．

(1) 任意の t に対して $\boldsymbol{r}(t)$ が不変となるような解 $\boldsymbol{r}_0 \in \mathbb{R}^2$ を，a を用いて表せ．

(2) 今，$\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とするとき，$X(t)$ および $Y(t)$ に関する連立微分方程式を導け．

(3) (2) で求めた連立微分方程式を満たす解 $\boldsymbol{d}(t)$ が，任意の初期値に対して $t \to +\infty$ で $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に収束する条件を a を用いて表せ．

(4) $a = -4$，初期値ベクトル $\boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ としたときの解 $\boldsymbol{r}(t)$ を求めよ．

(福井大 2016)　　(m20162410)

0.1749 次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $y = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^3$　　(2) $y = \sin^3 x \cos^3 x$　　(3) $y = \dfrac{1}{e^x + 1}$　　(4) $y = \dfrac{1}{(1 - x^2)^{3/2}}$

(福井大 2016)　　(m20162412)

0.1750 次式に与えられる行列 A について，以下の問いに答えよ．(4) 以外については計算の課程も示すこと．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値を λ として，固有方程式を“ $(1 - \lambda)$ の多項式 $= 0$ ”の形に表せ．

(2) A の固有値を全て求めよ．固有方程式“ $(1 - \lambda)$ の多項式 $= 0$ ”の左辺をどのように因数分解したのかがわかるように解答すること．

(3) A の固有値を λ_1，λ_2，λ_3，$(\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ とする．固有値 λ_n に対応する正規化（規格化）された固有ベクトル $\boldsymbol{u}_n$ を以下の形で求めよ．

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ \square \\ \square \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ \square \\ \square \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$$

(4) 以下の空欄を生めよ．ただし，(あ) と (い) には数値，(う) と (お) には語句，(え) には行列が入る．なお，$\boldsymbol{u}_n \cdot \boldsymbol{u}_m$ は $\boldsymbol{u}_n$ と $\boldsymbol{u}_m$ の内積，${}^tP$ は P の転置行列を表す．3 つの固有ベクトル $\boldsymbol{u}_n$ の長さは全て $\boxed{\text{(あ)}}$ であり，さらに $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1 = \boxed{\text{(い)}}$ である．従って，行列 $P = (\boldsymbol{u}_1\,\boldsymbol{u}_2\,\boldsymbol{u}_3)$ は $\boxed{\text{(う)}}$ 行列である．よって，${}^tP$ と $\boxed{\text{(え)}}$ の積は単位行列となる．なお，P が $\boxed{\text{(う)}}$ 行列であるのは A が $\boxed{\text{(お)}}$ 行列であることの必然的な結果である．

(5) P^{-1} を求めよ．

(6) $P^{-1}A^2P$ を求めよ．

(福井大 2016)　　(m20162419)

0.1751 以下の行列 A に関して，次の問いに答えなさい．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式を計算しなさい．

(2) 逆行列を求めなさい．

(3) 固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(福井大 2016)　　(m20162420)

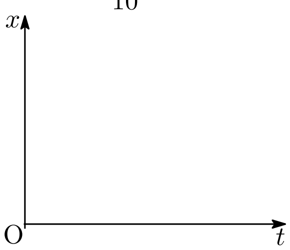
0.1752 以下の微分方程式について答えなさい．（なお，$\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ である.）

$$\dot{x} = \left(1 - \frac{x}{K}\right)x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots① $$

ここで，K は正の定数である．

(1) 十分時間が経過したとき，つまり $t \to \infty$ のとき，x はどうなるかを答えなさい．

(2) $t = 0$ のとき，$x = \dfrac{K}{10}$ であった．t - x のグラフを描きなさい．



(3) 微分方程式 ① の解を求めなさい．

(福井大 2016)　　(m20162424)

0.1753 x を実数とする時以下の 3 つのベクトルが一次従属となる x を求めよ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ x \end{pmatrix}$$

(福井大 2018)　　(m20182404)

0.1754 x, y, z を実数とする．以下のベクトルがそれぞれ直交するときの x, y, z を求めよ．また，そのときのベクトルを長さ 1 の単位ベクトルとして示せ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ z \end{pmatrix}$$

(福井大 2018)　　(m20182405)

0.1755 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 及びベクトル $\boldsymbol{q}_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ を用いて以下のような漸化式を定義する．このとき，以下の設問に答えよ．

$$\boldsymbol{q}_{n+1} = A\boldsymbol{q}_n \quad (n \text{ は整数})$$

(1) $\boldsymbol{q}_n$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{\varepsilon}_n = \dfrac{{}^T\boldsymbol{q}_n\, A\, \boldsymbol{q}_n}{{}^T\boldsymbol{q}_n\, \boldsymbol{q}_n}$ 及び $\boldsymbol{p}_n = \dfrac{\boldsymbol{q}_n}{|\boldsymbol{q}_n|}$ とするとき，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 及び $\boldsymbol{p}_n$ を求めよ．ここで，${}^T\boldsymbol{q}_n$ は $\boldsymbol{q}_n$ を転置したベクトルである．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 及び $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}_n$ を求めよ．

(福井大 2018)　　(m20182406)

0.1756 以下の微分方程式を解きなさい．また，特殊解のグラフは一般解のグラフにどのように関係づけられるかを答えなさい．

$$y = x\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

(福井大 2018)　　(m20182409)

0.1757 (1) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

は 3 個の固有値 λ_1，λ_2，λ_3 を持つ．ただし，$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ とする．λ_1，λ_2，λ_3 を求めよ．

(2) (1) で求めた固有値 λ_1，λ_2，λ_3 に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$ を求めよ．

(3) (2) で求めた固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$ をそれぞれ 1 列目，2 列目，3 列目に持つ行列を P とする．P の逆行列 P^{-1} を求めよ．

(福井大 2018)　　(m20182422)

0.1758 次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$　　(2) $4\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　　(4) ${}^t\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$　　(t:転置を表す)

(5) $\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(福井大 2018)　　(m20182428)

0.1759 x の関数 $p(x)$，$q(x)$ が a，b を定数として $\begin{pmatrix} p(x) \\ q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ix} & e^{-ix} \\ ie^{ix} & -ie^{-ix} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ で表されるとする．

ただし，i は虚数単位，e は自然対数の底である．この時，以下の問いに答えよ．

(1) $x = 0$ のとき上式を $\begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix} = (A)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と表す．行列 (A) を求めよ．

(2) 上の式を $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (B) \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$ と変形したときの行列 (B) を求めよ.

(3) (1)(2) の結果を利用し $\begin{pmatrix} p(x) \\ q(x) \end{pmatrix} = (C) \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$ と表したとき，行列 (C) を求めよ.

(4) (C) の成分を三角関数で表せ.

(福井大 2018) (m20182429)

0.1760 次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(福井大 2018) (m20182430)

0.1761 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(福井大 2018) (m20182432)

0.1762 以下の行列の行列式を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^3$

(福井大 2020) (m20202406)

0.1763 以下のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次従属となるような実数 x のうち，$x > 0$ を満たすものを求めよ.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$

(福井大 2020) (m20202407)

0.1764 行列 $\boldsymbol{A}$，ベクトル $\boldsymbol{b}$ に関して以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値 α_1，α_2，α_3 及び対応する固有ベクトル $\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$ を求めよ．固有値は $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ とし，固有ベクトルは大きさを 1 にせよ.

(2) $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルの線形結合で表せ.

(3) $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{b}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を求めよ.

(福井大 2020) (m20202408)

0.1765 (1) 以下のベクトル $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$ の一次独立，1 次従属を判定せよ．ただし，x は実数とする.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3+x \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 5+x \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(2) n を 2 以上の整数，α を 0 でない実数とする．次式で定義される n 次正方行列 $A = (a_{i,j})$ について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \iddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & i+j = n+1 \text{ のとき} \\ \alpha & i = j = n \quad \text{のとき} \\ 0 & \text{上記以外のとき} \end{cases}$$

(a) A の逆行列を求めよ．

(b) A の行列式を計算せよ．

(3) 次の行列の階数を求めよ．ただし，z は実数とする．

$$\begin{pmatrix} z & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & z \end{pmatrix}$$

(福井大 2020)　　(m20202415)

0.1766　以下の行列 A の逆行列を求めよ．計算過程も明記すること．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(福井大 2020)　　(m20202419)

0.1767　以下の行列 B を考える．B の固有値の 1 つは 3 である．この固有値に対する固有ベクトルを 1 つ求めよ．ただし，固有ベクトルを規格化する必要はない．考え方と計算過程を明記すること．

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(福井大 2020)　　(m20202420)

0.1768　次の関数を微分せよ．

(1) $y = \left(\dfrac{4x+3}{x^2-3x+4} \right)$　　(2) $y = \sin^5 x \ \cos 5x$

(3) $y = \log(1+x^2)$　　(4) $y = e^{\sqrt{x}}$

(福井大 2020)　　(m20202423)

0.1769　次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$　　(2) $3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$　　(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

(福井大 2020)　(m20202427)

0.1770 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とし，t が転置を表すとき，${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ が成り立つことを示せ.

(福井大 2020)　(m20202428)

0.1771 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値に中で，最小の値を持つ固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2020)　(m20202429)

0.1772 $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めよ.

(2) $\Phi_A(A) = 0$（ケーリー・ハミルトンの定理）が成り立つことを示せ.

(3) 上の結果を利用して，A^n を求めよ.

(福井大 2020)　(m20202430)

0.1773 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ を求めよ.

(福井大 2020)　(m20202432)

0.1774 以下に示す行列の行列式及び固有値を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(福井大 2021)　(m20212406)

0.1775 以下の行列を対角化せよ.

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(福井大 2021)　(m20212407)

0.1776 以下のベクトルがそれぞれ直交するときの実数 x を求めよ．また，そのときのベクトルを長さ 1 の単位ベクトルとして示せ.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ x \end{pmatrix}$$

(福井大 2021)　(m20212408)

0.1777 以下の行列 A, およびベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ を考える．a を実数とし，以下に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) $A\boldsymbol{u}$ を計算することにより，$\boldsymbol{u}$ は a の値によらず A の固有ベクトルであることを示せ．また 固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ に対する固有値を求めよ．

（注）固有方程式を使う必要はない．

(2) ベクトル $\boldsymbol{v}$ が A の固有ベクトルとなるように，a の値を定めよ．また，そのときの固有値（固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対する固有値）を求めよ．

（注）固有方程式を使う必要はない．

(3) $a = 0$ のとき，A の固有値を全て求めよ．

(福井大 2021)　　(m20212416)

0.1778 以下のベクトル $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$ を考え．$\boldsymbol{h} = x\boldsymbol{f} + y\boldsymbol{g}$ を成立させる実数 x と y が存在するか否かを調べることにより，$\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$ が一次独立か一次従属かを判定せよ．

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(福井大 2021)　　(m20212418)

0.1779 非負の実数 θ[rad] を媒介変数とする曲線

$$\begin{cases} x = \theta\cos\theta \\ y = \theta\sin\theta \end{cases} \qquad (1)$$

は「アルキメデスのらせん」と呼ばれ，その概形は図 1 に示す「蚊取り線香」に近い，図 2 のような渦巻状の曲線となる．

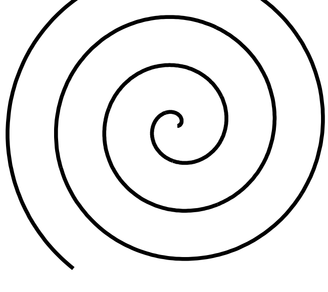


図 1 ：蚊取り線香

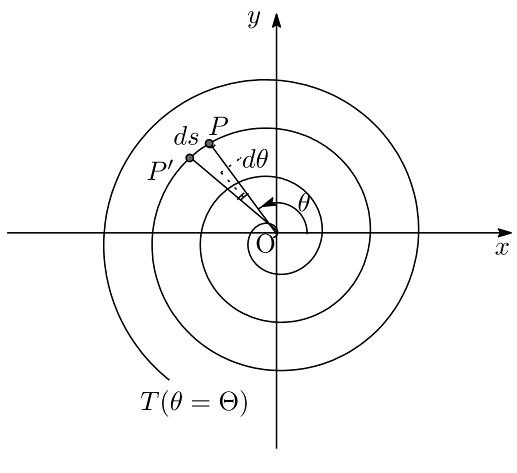


図 2 :「アルキメデスのらせん」

図 2 に示すように，曲線上の点 P に対して θ を微小角度 $d\theta$ だけ増加させ，点 P が P' に移動したとする．このときの $P - P'$ 間の微小な長さを ds と表すと，$\dfrac{ds}{d\theta}$ は，

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \qquad (2)$$

で与えられる．以下の問いに答えよ．

(1) 式 (1) の x, y に対し，$\dfrac{dx}{d\theta}$, $\dfrac{dy}{d\theta}$ を各々求めよ．

(2) 式 (2) を利用して，$\dfrac{d\theta}{ds}$ を θ によって表せ，$\dfrac{ds}{d\theta}$ ではなく $\dfrac{d\theta}{ds}$ を求めることに注意．

(3) (2) で求めた θ の関数 $\dfrac{d\theta}{ds}$ について，グラフの概形を描きたい．$\dfrac{d\theta}{ds}$ の θ に関する 1 階導関数を用いて増減を調べ，$\dfrac{d\theta}{ds}$ を縦軸に，θ を横軸に取ったグラフの概形を示せ．

(4) 図 2 に示すように，「らせん」の内側の端点は原点 O に一致し，外側の端点 T に対する θ を $\theta = \Theta$ とおく．このとき，O から T までの曲線の長さ L を Θ によって表せ．【ヒント】L の計算過程で現れる定積分には複数の計算方法が知られており，そのひとつに $\theta = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ と置換する方法がある $\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right.$ は双曲正弦関数 $\sinh t$ であるので，双曲線関数を用いてもよい$\left.\right)$.

(福井大 2021)　　(m20212419)

0.1780 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \log\left(5\sqrt{x^2+1} + 5x\right)$　　(2) $y = \dfrac{-e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(3) $y = \cos\dfrac{5\pi}{x^2+5}$　　(4) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(福井大 2022)　　(m20222401)

0.1781 次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $2\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 3 \\ -5 & 7 & -4 & 8 \\ 1 & -2 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & -7 & 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -8 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ -3 & -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

(2) $a\begin{pmatrix} a-b & -b \\ b & b-a \end{pmatrix} - b\begin{pmatrix} a-b & -a \\ a & b-a \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

(福井大 2022)　　(m20222405)

0.1782 以下に示す行列の演算を行いなさい．ただし，三角関数は数値に置き換えて算出すること．また，式中の t は転置を意味する．

$$4\begin{pmatrix} \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \\ \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \\ \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \end{pmatrix}^t$$

(福井大 2022)　　(m20222406)

0.1783 次の連立一次方程式をガウスの消去法（掃き出し法）を用いて解きなさい．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(福井大 2022)　　(m20222407)

0.1784 3 次元ベクトル $\mathbf{x}_n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ に関する数列を以下のように定義する．

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}_n\,, \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値をすべて求めよ.

(2) $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0$ を用いて, $\mathbf{x}_n$ を求めよ.

(福井大 2022) (m20222417)

0.1785 以下の行列 $\mathbf{S}$ に関する問いに答えよ. ただし, θ は実数である.

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\mathbf{S}$ を対角化せよ.

(2) n を自然数とし, $\mathbf{S}^n$ を求めよ.

(3) 行列 $\mathbf{S}$ 及び実数 x を用いた指数関数はそれぞれ以下の式で定義される.
$\exp(\mathbf{S})$ を計算せよ.

$$\exp(\mathbf{S}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{S}^n}{n!} \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(福井大 2022) (m20222418)

0.1786 次の行列 A を対角化せよ. なお, A を対角化する正則行列 P も明記すること.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(静岡大 2011) (m20112504)

0.1787 次の関数 f のマクローリン (Maclaurin) 展開 $\left(f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)$ を求めよ.

(1) $f(x) = e^{x^2}$ (2) $f(x) = \log(2+x) \quad (-2 < x < 2)$

(静岡大 2012) (m20122504)

0.1788 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値および対応する固有空間を求めよ. さらに, 直交行列を用いて A を対角化できるならば直交行列を求め対角化せよ. できないならばその理由を述べよ.

(静岡大 2012) (m20122506)

0.1789 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) (1) の行列 A を直交行列を用いて対角化せよ. このとき, 用いた直交行列も明記せよ.

(3) 2 次曲面の方程式 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4xy - 4yz = 1$ を標準形に変えよ.

(静岡大 2013) (m20132502)

0.1790 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, 以下の問いに答えなさい.

(1) ランク（階数）を求めなさい.

(2) 固有値をすべて求めなさい．また，そのうち 0 でない固有値に対応する固有ベクトルを求めなさい．

(静岡大 2013)　　(m20132510)

0.1791 行列 X_2 , X_3 , X_4 を各々

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) X_2 , X_3 , X_4 の行列式の値を求めなさい．

(2) X_n（n : 自然数）を対角成分が 0 で，ほかの成分はすべて 1 である n 行 n 列の行列とすると，X_5 の行列式の値は 4 になるという．このとき，(1) の結果も利用して X_n の行列式の値を推測し，それが正しいことを示しなさい．

(静岡大 2013)　　(m20132511)

0.1792 次の極限値を求めなさい．

(i) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x\sin(x) - \frac{\pi}{2}}{\cos(x)} \right)$　　(ii) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2} \right)$

(静岡大 2015)　　(m20152501)

0.1793 関数 $f(x) = \cos(ax)\cos(bx)$ の第 n 次導関数は

$$f^{(n)}(x) = \frac{(a+b)^n}{2}\cos\left((a+b)x + \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{(a-b)^n}{2}\cos\left((a-b)x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

となることを示しなさい．

(静岡大 2015)　　(m20152502)

0.1794 a を実数として $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が $A^2 - A + E = 0$ を満たすとする．

(1) a の値を求めよ．

(2) A^{60} を求めよ．

(静岡大 2015)　　(m20152503)

0.1795 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ とするとき，A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(静岡大 2015)　　(m20152504)

0.1796 (1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の階数を求めなさい．

(2) x, y, z を実数とするとき，$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$ ならば $x = y = z$ が成り立つことを示しなさい．

(3) 行列 $\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}$ の階数を求めなさい．ただし，x, y, z は実数とする．

(静岡大 2016)　　(m20162503)

0.1797 R^3 の 3 つのベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

に対し，以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ を列ベクトルとする行列を係数行列に持つ連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

が解を持つように定数 α の値を定めよ．また，そのときの一般解を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が線形従属か線形独立かを調べよ．線形従属の時には $\boldsymbol{a}_3$ を $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の線形結合で表せ．

(3) $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の線形結合 $\boldsymbol{b} = x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2$ が $\boldsymbol{a}_1$ に直交する単位ベクトルとなるとき，実数 x と y の値を求めよ．

(岐阜大 2011)　　(m20112603)

0.1798 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ およびベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ に対し，以下の問に答えよ．

(1) A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) $\boldsymbol{b}$ を A の固有ベクトルの線形結合で表せ．

(3) $A^5\boldsymbol{b}$ を求めよ．

(岐阜大 2011)　　(m20112604)

0.1799 次の行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(岐阜大 2012)　　(m20122604)

0.1800 以下の式でガンマ関数 $\Gamma(t)$ を定義する．

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx\,,\ t > 0.$$

次の問に答えよ．ただし， $t > 0$ のとき $\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^t = 0$ となることは証明しなくても使ってよい．

(1) $t > 0$ に対して $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ となることを示せ．

(2) 自然数 n に対して $\Gamma(n+1) = n!$ となることを示せ．

(3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2$, すなわち

$$\left(\int_o^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx\right)\left(\int_o^\infty e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}dy\right)$$

を x, y の 2 変数関数の重積分で表せ.

(4) 変数 (x, y) から (r, θ) への変数変換

$$\begin{cases} \sqrt{x} = r\cos\theta, \\ \sqrt{y} = r\sin\theta \end{cases}$$

に対してヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ.

(5) 前問 (4) の変数変換を用いて (3) の重積分を計算し $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ を求めよ.

(岐阜大 2014)　　(m20142601)

0.1801 (1) 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような行列 P を 1 つ求めよ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 1$,

$$a_{n+3} = a_{n+2} + 4a_{n+1} - 4a_n \qquad (n \geq 1)$$

で定義する. このとき

$$\begin{pmatrix} a_{n+3} \\ a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

を満たす 3 次正方行列 B を求めよ.

(4) 一般項 a_n を求めよ.

(岐阜大 2014)　　(m20142602)

0.1802 α を実数とする. 正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & \alpha \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して以下の問に答えよ.

(1) A の行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(2) 行列 A が固有値 1 をもつような α の値を求めよ.

(3) A が正則にならないような α の値を求めよ. また, そのときの A の階数（ランク）を求めよ.

(岐阜大 2015)　　(m20152602)

0.1803 xyz 空間 $(\mathbb{R}^3)$ の線形変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を表す行列を $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とする. すなわち, A は $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, 　$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を満たす行列である. 次の問に答えよ.

(1) 線形変換 f がベクトルの大きさを変えないとき，行列 A の満たすべき条件を求めよ.

(2) 線形変換 f が x 軸上の点を動かさないとき，行列 A の満たすべき条件を求めよ.

(3) (1) と (2) の条件を満たし，平面 $x+y+z=0$ 上の点を平面 $5x-y+7z=0$ 上に移す線形変換 f を表す行列 A を求めよ

(岐阜大 2016)　　(m20162603)

0.1804 $z=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ とおく．偏導関数 z_x，z_{xy} を求めよ.
（ なお記号 $\tan^{-1}$ は逆三角関数を表す．）

(岐阜大 2017)　　(m20172602)

0.1805 m を定数として 3 次元ベクトル

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}0\\1\\m\end{pmatrix}$$

を考える．$\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は線形独立（一次独立）であることを示せ．また，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が線形従属（一次従属）になるような定数 m の値を求め，そのとき，$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の線形結合（一次結合）で表せ.

(岐阜大 2017)　　(m20172606)

0.1806 (1) 次の行列 H が正則かどうか判定せよ.

$$H=\begin{pmatrix}4&-1&1&-1\\5&-1&1&0\\1&-2&0&-2\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}$$

(2) A, B, C 及び X, Y, Z, W を n 次行列とし, A, B を正則とする．以下の問いに答えよ.

(a) $2n$ 次行列

$$P=\begin{pmatrix}O&A\\B&C\end{pmatrix},\qquad Q=\begin{pmatrix}X&Y\\Z&W\end{pmatrix}$$

の積 PQ を求めよ．ただし O は n 次零行列である.

(b) P^{-1} を A, B, C を用いて表せ.

(岐阜大 2018)　　(m20182601)

0.1807 $a=\log 2$ とし，関数 f と g を

$$f(x)=ax-a-\log x$$
$$g(x)=x^2-ae^x$$

で定義する．ただし，$\log$ は e を底とする自然対数である．以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ と $g(x)$ の導関数を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の閉区間 [1, 2] における最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ.

(3) 次の累次積分 I の積分順序を変更せよ:

$$I=\int_1^2\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\sin(g(y))dy\right)dx\ ,$$

ただし,

$$\alpha(x)=ax$$
$$\beta(x)=a+\log x$$

とする.

(4) I の値を求めよ．

(岐阜大 2018)　　(m20182602)

0.1808 A を対角化可能な n 次行列，$\alpha \neq 0$ を実数とする．このとき $(n+1)$ 次行列

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

も対角化可能であることを示せ．なお，上式の右辺において右上の 0 と左下の 0 はそれぞれ行零ベクトル，列零ベクトルを表す．

(岐阜大 2020)　　(m20202604)

0.1809 成分が $0, 1, -1$ のどれかからなる 2 次行列を考える．以下の問に答えよ．

(1) $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とする．

[ア] N の行列式を求めよ．

[イ] N の固有値を求めよ．

[ウ] ある自然数 k に対して，$A^k = O$ となるような行列 A を冪零（べきれい）行列という．N が冪零行列であることを示せ．

(2) 成分が $0, 1, -1$ のどれかからなる 2 次行列で，以下の [い]〜[り] であるものを，それぞれ一つずつ挙げよ．ただし，同じものを二度挙げてはならない．

[い] 零行列　[ろ] 単位行列　[は] 直交行列　[に] 対称行列　[ほ] 対角行列　[へ] 上三角行列
[と] 下三角行列　[ち] 固有値がただ一つの行列　[り] 固有値が純虚数である行列

(3) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする．M が対角化できないことを示せ．

(4) $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．任意のベクトル $\vec{x} \neq \vec{0}$ に対して，

$$ {}^t\vec{x} A \vec{x} = (\vec{x},\ A\vec{x}) > 0$$

を満たすような行列 A を正定値行列という．L が正定値行列であることを示せ．

(岐阜大 2020)　　(m20202605)

0.1810

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & a & 0 \\ -a+b & 1+a-b & b \\ b & -b & 1+b \end{pmatrix}$$

とする．ただし，$a,\ b$ は実数とする．

(1) $\det A$ を求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は．A の固有ベクトルであることを示せ．

(3) A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(4) A が対角化可能となる $a,\ b$ の値をすべて求めよ．

(岐阜大 2022)　　(m20222601)

0.1811 k を定数として $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}4\\1\\k\\-3\end{pmatrix}$ とする．このとき，$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$，が一次従属となるような k の値を求めよ．

(岐阜大 2022)　　(m20222604)

0.1812 (1) 次式が成り立つような定数 a の値を求めよ．

$$\lim_{x\to\infty}\left(x+a-\sqrt{x^2+x+1}\right)=1$$

(2) 次の関数を微分せよ．

$$f(x)=\log\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

(豊橋技科大 2011)　　(m20112705)

0.1813 円 $x^2+y^2=4$ 上の直交座標系の点 $P(x,y)$ は，つぎの 1 次変換 f によって，円 $u^2+v^2=16$ 上の点 $Q(u,v)$ に移される．以下の問いに答えよ．

$$f\ :\ \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-a\\a&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

(1) 点 $P(x,y)$ の座標を，偏角 θ を用いて表せ．ただし，偏角とは原点 O を円の中心として，半直線 OP と x 軸の正方向とのなす角である．

(2) $a\ (>0)$ の値を求めよ．

(3) 点 $P(x,y)$ が上記の 1 次変換 f によって点 $Q(0,4)$ へ移されたとき，点 $P(x,y)$ の座標を求めよ．

(豊橋技科大 2013)　　(m20132704)

0.1814 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を満足するベクトル $\boldsymbol{x}$ の大きさ（長さ）$|\boldsymbol{x}|$ を求めよ．

(3) A の固有値 λ_1 と λ_2 を求めよ．ただし，$\lambda_1\leqq\lambda_2$ とする．

(4) n を正の整数 $(n=1,2,3,\cdots)$ とするとき，A^n を求めよ．

(豊橋技科大 2013)　　(m20132705)

0.1815 行列を $A=\begin{pmatrix}3&2\\1&0\\2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\6&-3\\0&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1&2&0\\5&1&4\end{pmatrix}$ とするとき，次の式を計算せよ．

ア．AC　　　イ．$(3C)A-C(2B)$

(豊橋技科大 2016)　　(m20162703)

0.1816 ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ ， $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ について，以下を求めよ．

ア．内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

イ．それぞれの大きさ $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$

ウ．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に直交し，かつ大きさが 6 であるすべてのベクトル $\boldsymbol{c}$

(豊橋技科大 2016)　　(m20162705)

0.1817 次の値を求めよ．ただし，オ．において，1 以上 100 以下の整数を全体集合とし，$A = \{1, 2, 3, 5, 7, 13\}$ とする．また，$n(A)$ は集合 A の要素数を表し，$\overline{A}$ は集合 A の補集合を表す．

ア．$3!$　　イ．$0!$　　ウ．${}_5P_2$　　エ．${}_7C_2$　　オ．$n\left(\overline{A \cup \overline{A}}\right)$

(豊橋技科大 2016)　　(m20162706)

0.1818 次の行列 A, B に関して，次の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ b & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 行列 B が対称行列であるとき，定数 a, b を求めよ．

(3) (2) のとき，行列 B の固有値をすべて求めよ．

(豊橋技科大 2017)　　(m20172702)

0.1819 (1) 行列 $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ -4 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ の行列式を求めよ．

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(3) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を全て求めよ．また，最も小さい固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めよ．

(豊橋技科大 2018)　　(m20182703)

0.1820 関数 $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) 曲面 $z = f(x, y)$ 上の点 $(1, 2, 9)$ における接平面の方程式を求めよ．

(3) $x(t)$, $y(t)$ はともに t について微分可能な関数で $\left(\dfrac{df}{dt}\right)_{t=0} = 0$ をみたしており，

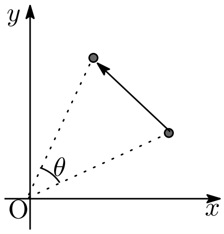
さらに $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{t=0} > 0$ とする．$t = 0$ のとき，

単位ベクトル $\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}} \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}$ を求めよ．

(豊橋技科大 2019)　　(m20192701)

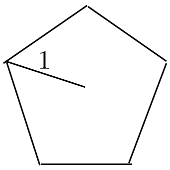
0.1821 xy 平面上において，原点 O を中心に反時計回りに θ の回転を行う一次変換は下図の行列 A_θ で表される．この行列を利用して三角関数の計算を行うとともに，図形の面積の値を求めたい．以下の問いに答えよ．

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



(1) ${A_\theta}^2,\ {A_\theta}^3$ を計算し，$\cos\theta,\ \sin\theta$ で表せ．また，$A_{n\theta} = (A_\theta)^n$ であることを利用して $\cos 2\theta,\ \sin 2\theta,\ \cos 3\theta, \sin 3\theta$ を $\cos\theta,\ \sin\theta$ で表せ．

(2) $\sin\dfrac{2\pi}{5}$ の値を α とおく．半径 1 の円に内接する正五角形の面積を α を用いて表せ．



(3) (1) の結果を用いて $\sin\dfrac{\pi}{10},\ \cos\dfrac{\pi}{10}$ の値をそれぞれ求めよ．

(4) 半径 1 の円に内接する正五角形の面積の値を求めよ．

(豊橋技科大 2019) (m20192703)

0.1822 次の行列 $A,\ B$ に関して，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ -\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

(1) A の行列式の値を求めよ．

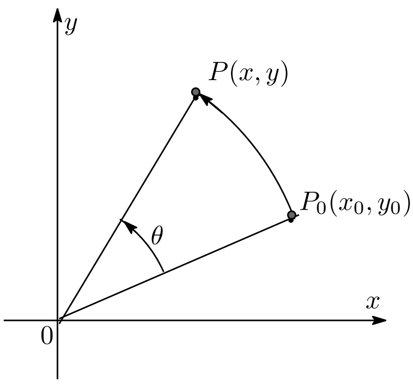
(2) A の逆行列を求めよ．

(3) BA を求めよ．

(4) $ABABA^2$ を求めよ．

(豊橋技科大 2020) (m20202701)

0.1823 図のように，xy 平面上の点 $P_0(x_0, y_0)$ を原点 O のまわりに θ だけ回転した点 $P(x, y)$ に移す座標変換は次の線形変換により表される．また，このときの変換行列を $A(\theta)$ と定義する．以下の設問に答えよ．



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) xy 平面上の点を x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍する変換行列 B を a と b を用いて表せ．

(2) xy 平面上の点を原点 O のまわりに $(-\theta)$ 回転し，その後 x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍し，最後に原点 O のまわりに θ 回転する線形変換を考える．このときの変換行列 C を a, b, $\cos\theta$ および $\sin\theta$ を用いて表せ．

(3) 次に示す変換行列 D の固有値を求め，それぞれの固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルをすべて求めよ．

$$D = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

(4) 変換行列 C が変換行列 D に等しいとき，a, b および θ の値を求めよ．ただし，θ は $0 \leq \theta \leq \pi/2$ の範囲にあるとする．

(豊橋技科大 2021)　　(m20212701)

0.1824　次の重積分を計算せよ．

$$\iint_D e^{x+y} dxdy \quad \left(D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 1 \right\} \right)$$

(豊橋技科大 2021)　　(m20212703)

0.1825　$n = 1, 2, 3$ に対して，次のように定める関数 $A_n(x)$ と定積分 B_n がある．以下の設問に答えよ．

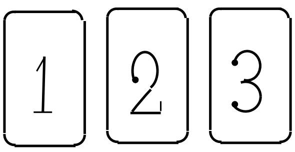
$$A_1(x) = \frac{1}{\sin^2 x},\ \ A_2(x) = \sin x,\ \ A_3(x) = \sin^3 x \quad (\pi/3 \leq x \leq \pi/2)$$

$$B_n = \int_{\pi/3}^{\pi/2} A_n(x) dx$$

(1) $\pi/3 < x_0 < \pi/2$ のとき，$A_1(x_0)$, $A_2(x_0)$, $A_3(x_0)$ を値の小さい方から順に並べよ．

(2) 定積分 B_1, B_2, B_3 をそれぞれ求めよ．

(3) 図のように，3 枚のカードに 1 から 3 までの数字が 1 つずつ書かれている．この 3 枚のカードの中から無作為にカードを 1 枚選び，そのカードに書かれている数字を n とする．この操作を 2 度行うとき，少なくとも 1 度は $B_n > 1/2$ となる数字 n が書かれているカードを選ぶ確率を求めよ．ただし，1 度目の操作後に選んだカードは元に戻し，2 度目でも 1 度目と同じ操作を行うものとする．



(豊橋技科大 2021)　　(m20212705)

0.1826　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{v}$ は行列 A の固有ベクトルであるであることを示せ．また，$\boldsymbol{v}$ に対応する A の固有値を求めよ．

(2) 3 次元空間内のある平面 α を考え，その上の任意の点 P を (x, y, z) とする．この α がベクトル $\boldsymbol{v}$ に垂直で，かつ 3 次元空間の原点を通るとき，この平面 α を表す式を，x, y, z を用いて求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して，線形変換 f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で与える．このとき，(2) で求めた平面 α 上の任意の点 Q を f によって移動した点 Q' も平面 α 上の点となることを示せ．

(豊橋技科大 2022)　　(m20222701)

0.1827 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値 λ_1，λ_2 $(\lambda_1 < \lambda_2)$ を求めよ．

(2) 任意の自然数 n に対して，$A^{n+1} = 3A^n - 2A^{n-1}$ が成り立つことを示せ．ただし，$A^0 = E$ とする．

(3) 実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ を

$$A^{n+1} - \lambda_1 A^n = a_n A + b_n E, \qquad A^{n+1} - \lambda_2 A^n = c_n A + d_n E \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める．ただし，λ_1，λ_2 を (1) で求めた A の固有値とする．このとき，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．

(4) A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(豊橋技科大 2023)　　(m20232701)

0.1828 以下の問に答えよ．

(1) 次の行列 A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) A^5 を求めよ．

(名古屋大 2011)　　(m20112802)

0.1829 以下の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx$ （m, n は負でない整数）

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} \, dx$ （ヒント：$x = \tan\theta$とおけ．また，$\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$である．）

(名古屋大 2011)　　(m20112803)

0.1830 以下の問いに答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 x} dx$ の値を求めよ．

(2) 関数 $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ の導関数を求めよ．

(3) $y = \dfrac{1}{2}x^2$ によって表される曲線の $0 \leq x \leq 1$ の部分の長さを求めよ．

(名古屋大 2014)　　(m20142803)

0.1831 次の漸化式で定義される数列を考える.

$$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{4}\left(3x_n + \frac{c^4}{x_n^3}\right) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

数列 $\{x_n\}$ は収束することを示し，その極限値を求めよ．ただし，c は任意の正の定数である.

(名古屋大 2014)　　(m20142804)

0.1832 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に関して，以下の設問に答えよ.

(1) 行列 A が 2 個の固有値を持つような a を全て求めよ．またそのときの固有値を求めよ.

(2) 行列 A が 3 個の固有値を持つような a の場合について,

(a) 全ての固有値と固有ベクトルを a を用いて記せ.

(b) 行列 A は，ある正則行列 P によって $D = P^{-1}AP$ と対角化可能である．　P を一つ示し，その P に対応する，P^{-1}, D をそれぞれ求めよ.

(名古屋大 2016)　　(m20162801)

0.1833 次の関数の 2 階の偏導関数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を，それぞれ求めよ.

$z = \sin\left(x^2 y\right)$

(名古屋大 2017)　　(m20172803)

0.1834 3 次正方行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ を A とする. ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して, 内積を使って関数を $Q(\boldsymbol{u}) = (A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$ と定義する.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) 条件 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 1$ の下での関数 $Q(\boldsymbol{u})$ の最大値と最小値を求めよ.

(名古屋工業大 2011)　　(m20112902)

0.1835 次の積分の値を求めよ.

$$I_1 = \int_0^1 \left(\sin^{-1} x\right)^2 dx$$

(名古屋工業大 2011)　　(m20112904)

0.1836 3×3 行列 A と B は関係 $A^3 - AB = I$ を満たす. ただし, I は 3 次単位行列である.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とするとき, 次の問に答えよ.

(1) A^2 と A^{-1} を求めよ.

(2) B を求めよ.

(名古屋工業大 2011)　　(m20112908)

0.1837 (1) 次の行列式を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

(2) 次の行列が逆行列をもつときの x の条件を求めよ．また，そのときの逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & 1 \\ x^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2012)　　(m20122901)

0.1838 次の行列 A と P について，問 (1) と (2) に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) (1) で求めた固有値を $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ $(\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3)$ とする．このとき行列 P が直交行列で，かつ次を満たすように a, b, c を求めよ．

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2012)　　(m20122902)

0.1839 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x} \right)$ を求めよ．

(名古屋工業大 2012)　　(m20122906)

0.1840 R^3 の 2 組の基底 $A : (\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$ と $B : (\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)$ は

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

によって定義されている．このとき，次の問に答えよ．

(1) 基底 $A \to B$ の基底変換の行列 P を求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ の基底 $B : (\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)$ に関する座標は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるとき，
$\boldsymbol{\xi}$ の基底 $A : (\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$ に関する座標を求めよ．

(3) 2 組の基底 $A : (\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$ と $B : (\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)$ に関して，
同じ座標をもつ非零ベクトル $\boldsymbol{\eta}$ を求めよ．

(名古屋工業大 2012)　　(m20122907)

0.1841 (x, y, z) 空間における平面 $2x + 3y + 4z + 6 = 0$ を，線形写像

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

によって写して得られる (X, Y, Z) 空間の図形の方程式を求めよ．

(名古屋工業大 2013)　　(m20132905)

0.1842 行列

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 13 & -7 \\ -2 & 9 & -4 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

を対角化せよ．(すなわち，正則行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列となるものと，そのときの対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ．)

(名古屋工業大 2013)　　(m20132906)

0.1843 次の問いに答えよ．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$ の値を求めよ．

(2) 関数 $F(x)$ が $F(x) = \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}}\left(2-\frac{1}{3t}\right)dt$，　$x>0$ によって定義される．このとき，$F(x)$ の増減範囲を調べ，極値を求めよ．

(名古屋工業大 2013)　　(m20132907)

0.1844 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

の固有値を λ_1, λ_2, λ_3 $(|\lambda_1| \leqq |\lambda_2| \leqq |\lambda_3|)$ とするとき，次をみたす正則行列 P をひとつ求めよ．

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2014)　　(m20142904)

0.1845 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ は対角化可能か否か判定せよ．

(名古屋工業大 2015)　　(m20152907)

0.1846 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

の固有値を求めよ．また，A の最大固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(名古屋工業大 2016)　　(m20162904)

0.1847 空間ベクトルを

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

とおく．

(1) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ からグラム・シュミットの正規直交化法を用いて，正規直交系 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ を求めよ．

(2) (1) で求めた $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ を含む R^3 の正規直交基底を 1 組求めよ．

(名古屋工業大 2016)　　(m20162905)

0.1848 行列 $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) A を直交行列によって対角化せよ．

(2) $A=B^2$ を満たす対称行列 B を一つ求めよ．

(名古屋工業大 2017)　　(m20172903)

0.1849 a, b を定数とするとき，R^4 の部分集合

$$W=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} x+3y+5z-w=a \\ x-y-3z+3w=b \\ 2x-y-4z+5w=0 \end{array}\right\}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) W が R^4 の部分空間となるように $a,\ b$ の値を定めよ．

(2) $a,\ b$ が (1) で定めた値のとき，W の次元と基底を求めよ．

(名古屋工業大 2017)　　(m20172904)

0.1850 関数 $f(x,y)=\cos x+\cos y+\cos(x-y)$ について，３点

(i) $(x,y)=(0,0)$,　　(ii) $(x,y)=\left(\dfrac{2\pi}{3},\ -\dfrac{2\pi}{3}\right)$,　　(iii) $(x,y)=(\pi,0)$

は，$f_x(x,y)=0,\ f_y(x,y)=0$ を満たす．このとき各点で $f(x,y)$ が極値を取るかどうかを判定せよ．また，極値を取る場合には極値を求めよ．

(名古屋工業大 2018)　　(m20182903)

0.1851 (1) 次の x, y, z に関する連立一次方程式が，解を持たないための定数 k の条件を求めよ．

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrr} & & -3y & + & z & = & -3 \\ & 3x & & - & 2z & = & k \\ - & x & +\ 2y & & & = & 1 \end{array}\right.$$

(2) 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ について，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を考える．$\boldsymbol{b}$ として $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶとき，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ のそれぞれの解 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3$ を求めよ．

(名古屋工業大 2018)　　(m20182905)

0.1852 対称行列 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ．

(1) A の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) グラム・シュミットの正規直交化法で，(1) で求めた固有ベクトルから正規直交系 $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3\}$ を求めよ．

(名古屋工業大 2018)　　(m20182906)

0.1853　関数 $y=\sin x\ \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と $y=\cos x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ に対して，その逆関数をそれぞれ $\mathrm{Sin}^{-1}x$, $\mathrm{Cos}^{-1}x$ と書く．そのとき次の方程式を解け．

$$\mathrm{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{15}}{4}+\mathrm{Cos}^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3}=\mathrm{Cos}^{-1}x$$

(名古屋工業大 2019)　　(m20192901)

0.1854　次の行列 A の列を左から $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_5$ とする．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 4 & -4 & -15 \\ -1 & -2 & -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

(1)　$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_5$ から一次独立なものを取り出すとき，その最大個数 r を求めよ．

(2)　$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_5$ から r 個の一次独立なものを, 前の方から順に取り出せ．

(3)　(2) で選ばなかったものを，(2) で選んだものの一次結合で表せ．

(名古屋工業大 2019)　　(m20192904)

0.1855　行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　A を対角化せよ．

(2)　自然数 n に対して，A^n を求めよ．

(名古屋工業大 2019)　　(m20192905)

0.1856　次の実対称行列 A に対し，実直交行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列となるものと，そのときの対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ．

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2020)　　(m20202906)

0.1857　行列

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 10 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 10 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．

(1)　A の行列式を求めよ．

(2)　A の逆行列 A^{-1} の行列式を求めよ．

(名古屋工業大 2021)　　(m20212904)

0.1858　k は定数とする．行列

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2k \\ -1 & 1 & 2k \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) A が対角化可能であるような k の値をすべて求めよ．

(名古屋工業大 2021)　　(m20212905)

0.1859 関数 $f(x) = \sin\left(\mathrm{Cos}^{-1}x\right)$ の増減を調べ，極値を求めよ．ただし，$y = \mathrm{Cos}^{-1}x$ の値域は $0 \leqq y \leqq \pi$ である．

(名古屋工業大 2022)　　(m20222901)

0.1860 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．ただし，a は定数とする．

(1) 行列 A が逆行列を持たないような a の値をすべて求めよ．

(2) 行列式 $|AB|$ を計算せよ．

(名古屋工業大 2022)　　(m20222905)

0.1861 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ を対角化せよ．

(名古屋工業大 2022)　　(m20222906)

0.1862 行列

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) P の逆行列を求めよ．

(2) P の列ベクトルを左から順に $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ とおいたとき，

$$A\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_1, \qquad A\boldsymbol{p}_2 = 2\boldsymbol{p}_2, \qquad A\boldsymbol{p}_3 = 2\boldsymbol{p}_3$$

をみたす 3 次正方行列 A およびその固有値を求めよ．

(名古屋工業大 2023)　　(m20232906)

0.1863 行列 $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ による一次変換について，以下の問に答えよ．

ここで，一次変換とは下式に示すように，任意の平面上の座標 (x, y) を (x', y') に移す変換をいう．

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(1) $a = 1$, $b = k$（k は任意の実数）のとき，xy 平面全体が xy 平面全体に移される条件と，直線に写される条件を示せ．また，直線に移された場合の直線の式を求めよ．

(2) 直線 $2x + y = 0$ が，直線 $6x - 5y = 0$ に移されるとき，a, b の値を求めよ．

(三重大 2011)　　(m20113106)

0.1864 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ に関する以下の問について答えよ.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) A を対角化することにより, A^{17} を求めよ.

(3) 正則行列の持つ性質について列挙せよ.

(三重大 2011) (m20113109)

0.1865 以下の問に答えなさい.

(1) 次の行列 A の固有値 λ_1, λ_2 とそれぞれの固有値に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ をひとつ求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) 問 (1) で求めた固有ベクトルからなる行列 $P = (\boldsymbol{x}_1 \ \ \boldsymbol{x}_2)$ を用いて, $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(3) n が正の整数のとき, 問 (2) の結果を利用して, A^n を求めなさい.

(三重大 2011) (m20113115)

0.1866 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ に関する以下の問について答えよ.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) A を対角化せよ.

(3) A^n を求めよ.

(三重大 2012) (m20123101)

0.1867 (1) 次の交代行列 $\boldsymbol{A}$（i 行 j 列成分 a_{ij} と j 行 i 列成分 a_{ji} が $a_{ij} = -a_{ji}$ を満たす行列）の行列式, 固有値および固有ベクトルを求めよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 以下の交代行列 $\boldsymbol{B}$ の行列式は $|\boldsymbol{B}| = p^2$ とかける. p を求めよ.

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

(3) n 行 n 列の正方行列 $\boldsymbol{C}$ が交代行列であり n が奇数のとき, 行列式 $|\boldsymbol{C}|$ は 0 となることを示せ.

(三重大 2012) (m20123108)

0.1868 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ の定める平面の一次変換において, 原点を通る不動直線が 1 本のみ存在する場合の a の値を求めよ. ただし, 不動直線とは「その像がもとの直線と一致する直線」のことである.

(三重大 2012) (m20123113)

0.1869 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値および, 固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(三重大 2012) (m20123120)

0.1870 $2\times\ 2$ 行列 A が次の 2 つの条件 (a), (b) を満たしている.

(a) $A^2-3A+2E=O$ (b) $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$

ただし, E は単位行列, O は零行列を表す, 以下の問いに答えよ.

(1) $A\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ を求めよ.

(2) $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ を求めよ.

(3) A を求めよ.

(4) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(三重大 2013) (m20133105)

0.1871 二つの実数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ $(n=0,1,2,3,\cdots)$ が, $a_{n+1}=a_n+2b_n \quad b_{n+1}=-a_n+4b_n$ を満たす. ただし, $a_0=1$, $b_0=-1$ である. 以下の問いに答えなさい.

(1) $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$ を満たす行列 A を求めなさい.

(2) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 とそれぞれの固有値に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を求めなさい.

(3) 問 (2) で求めた固有ベクトルから行列 $P=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)$ を用いて, $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(4) 問 (3) の結果を利用して, A^n を求めなさい.

(5) 実数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めなさい.

(三重大 2013) (m20133109)

0.1872 確率密度関数に関する以下の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x)=k\,(1-|x|)$ （ただし, $|x|\leqq\ 1$）が確率密度関数となるように, 定数 k の値を定めよ. ここで, 確率密度関数 $f(x)$ と x 軸の間の面積は 1 であるという性質がある.

(2) X を確率変数とするとき, (1) に示す確率密度関数 $f(x)$ から求められる確率 $P(-0.3\leqq\ X\leqq\ 0.8)$ を求めよ.

(三重大 2013) (m20133115)

0.1873 (1) A を N 行 N 列の実対称行列, すなわち, ${}^tA=A$ （${}^tA$ は A の転置行列）を満たし成分が実数の行列とするとき, A の固有値 $a_i\,(i=1,2,3,\cdots,N)$ と各 a_i に対する固有ベクトル $\overrightarrow{v}_i$ について以下のことを示せ.

(a) 固有値はすべて実数である.

(b) $a_i\neq a_j$ ならば, $\overrightarrow{v}_i$ と $\overrightarrow{v}_j$ は直交する. すなわち, 内積 $(\overrightarrow{v}_i,\overrightarrow{v}_j)=0$. [ただし, $\overrightarrow{v}_i$ はすべて実ベクトルに選んでおく.]

(2) 2 行 2 列の行列 B を

$$B=\begin{pmatrix}3&-i\\i&3\end{pmatrix}$$

とする.

(a) 固有値の和と積を求めよ.

(b) B を対角化する行列, すなわち, UBU^{-1} が対角行列になるような行列 U を求めよ.

(三重大 2013) (m20133117)

0.1874 以下の問に答えなさい.

(1) 以下に示す x, y, z に関する方程式を考える. これが $x = y = z = 0$ 以外の解を持つように, 定数 k の値を定め, 解を求めなさい.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) 以下に示す行列 A により表される線形写像 $f : \boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$ を考える. 写像 f の核の次元および正規直交化された基底を求めなさい. なお, 写像 f の核は $\left\{\boldsymbol{x} \in R^4 \;\middle|\; f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\right\}$ ($\boldsymbol{0}$ は R^4 の零ベクトルとする) として定義される.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(三重大 2014) (m20143102)

0.1875 次の関数を微分せよ.

(1) $y = (3x - 1)^3$

(2) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

(3) $y = \log_e \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

(4) $y = \dfrac{2e^x + 1}{e^x + 1}$

(三重大 2014) (m20143106)

0.1876 行列 $A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ による 1 次変換において $x^2 - y^2 = 1$ を満たす不動点 $Q(x, y)$ が存在する.

m の値と点 $Q(x, y)$ を求めよ.

(三重大 2014) (m20143110)

0.1877 (1) $y = f(x)$ と 2 直線 $x = a$, $x = b$ と x 軸で囲まれる面積は, 次式の定積分の定義により求めることができる.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \triangle x$$

ただし, $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続とし, $\triangle x = (b - a)/n$, $x_k = a + k\triangle x$ とする. 上記の積分の定義を用いて, $\displaystyle\int_0^1 x dx$ を求めなさい. ただし, 導出過程も示すこと.

(2) 問 (1) の定積分の定義を用いて,

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots\cdots + \frac{1}{2n}\right)$ を求めなさい.

(三重大 2015) (m20153101)

0.1878 次の行列 A の固有値, 固有ベクトルおよび固有ベクトル間の角度を求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(三重大 2015) (m20153103)

0.1879 点 $(1,\ -1)$, $(-3,\ 7)$ をそれぞれ $(5,\ -5)$, $(-11,\ 23)$ に移す 1 次変換を行うことができる 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えなさい.

(1) 行列 A を求めなさい.

(2) 行列 A は $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = 0$ を満たす，このとき A^4 を求めなさい．ただし，E は単位行列である.

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(三重大 2016)　　(m20163101)

0.1880 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について以下に答えよ.

(1) A^5 の行列式 $|A^5|$ の値を求めよ.

(2) A の固有値および $\underline{\text{互いに直交する長さ 1}}$ の固有ベクトルをすべて求めよ.

(3) A を変換 P^TAP によって対角化する直交行列 P を構成し，対角化を実行せよ．ただし，P^T は P の転置行列である.

(三重大 2016)　　(m20163117)

0.1881 ある 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えなさい.

(1) この行列 A の固有値を求めなさい.

(2) この行列 A の固有ベクトルを求めなさい.

(3) A^n の値を求めなさい

(三重大 2017)　　(m20173101)

0.1882 x, y に関する実数値関数 $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{2}xy$ について，以下の問に答えなさい.

(1) $f(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす対称行列 A を求めなさい.

(2) A の全ての固有値と，それぞれの固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めなさい.

(3) $T^{-1}AT$ が対角行列となるような正規直交行列 T を求めなさい．さらに，$T^{-1}AT$ を求めなさい.

(4) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ により変数変換をすることで，$f(x,y)$ を変換した結果得られる $g(u,v)$ を求めなさい．また，$g(u,v) = 4$ の概形を u-v 平面上に描きなさい.

(三重大 2017)　　(m20173108)

0.1883 行列 $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$ のとき，次の行列を求めよ.

(1) A の逆行列 A^{-1}　　(2) $2(A-3B)$　　(3) AB　　(4) $(AB)^n$

(三重大 2017)　　(m20173112)

0.1884 (1) 次の行列 A とベクトル $\overrightarrow{v}$ の積 $A\overrightarrow{v}$ を求めよ．またベクトル $\overrightarrow{v}$ と $A\overrightarrow{v}$ の内積 $\overrightarrow{v} \cdot A\overrightarrow{v}$ を求めよ．ただし，a, b, c, x, y は実数とする.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(2) (1) の行列 A の行列式 $|A|$ と，2 つの固有値および固有ベクトルを求めよ．

(3) (1) の $\overrightarrow{v}$ が $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}>0$ を満たし，(2) の行列式が $|A|\neq 0$ を満たすとき，(1) の内積が $\overrightarrow{v}\cdot A\overrightarrow{v}>0$ となる十分条件は，$a>0$, $c>0$ かつ $|A|>0$ であることを証明せよ．

(三重大 2017)　　(m20173115)

0.1885 3 次元空間の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 S を求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の両方に垂直で，大きさが 1 となるベクトルを全て求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積 V を求めよ．

(4) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ からなる行列 $A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$ の固有値を求めよ．

(三重大 2018)　　(m20183101)

0.1886 $A=\begin{pmatrix}1&1\\4&-2\end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えなさい．

(1) A の逆行列を求めなさい．

また，それを利用して x, y に関する連立方程式 $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ を解きなさい．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正方行列 P を求めなさい．

また，それを利用して $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ により定義される数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ の一般項を求めなさい．ここで，n は自然数とする．

(三重大 2018)　　(m20183105)

0.1887 $A=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\2&2&1&1\\3&4&1&2\\-2&-2&-1&-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\a\\b\end{pmatrix}$ とするとき，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持つように a, b を定めよ．

(三重大 2018)　　(m20183109)

0.1888 (1) 次の行列 A の行列式 $|A|$ を求めよ．また行列 A と次のベクトル $\overrightarrow{v}$ の積 $A\overrightarrow{v}$ を計算し，$A\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}$ となることを示せ．　ただし θ, ϕ は実数，i は虚数単位とする．

$$A=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)e^{-i\phi}\\ \sin(\theta)e^{i\phi} & -\cos(\theta)\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)e^{i\phi}\end{pmatrix}$$

(2) (1) の行列 A について，$\phi=0$ としたときの 2 つの固有値および固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさは 1 とせよ．

(3) 次の行列 B の 2 つの固有値を求めよ．ただし k は実数とする．また $|k|\leq 1$ として，大きさ 1 とした 2 つの固有ベクトルを求めよ．また 2 つの固有値を k の関数として，$|k|\leq 1$ の範囲でグラフに描け．

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$$

(三重大 2018)　　(m20183112)

0.1889 3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えなさい.

(1) 行列 A の行列式を求めなさい.

(2) 行列 A の固有値を求めなさい.

(3) 行列 A について, 1 次独立な固有ベクトルをすべて求めなさい. ただし, 固有ベクトルの大きさを 1 としなさい.

(4) (3) で求めた固有ベクトルが互いになす角度をすべて求めなさい.

(三重大 2020)　　(m20203107)

0.1890 xyz 直交座標系であらわされる空間の xy 平面上に楕円 E,

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$$

がある. 楕円 E を底面とし, z 軸上の点 $(0, 0, 2)$ を頂点とする錐体（楕円錐）P について以下の問いに答えなさい. ただし, $0 \leqq z \leqq 2$ とする.

(1) 錐体 P の方程式を x, y, z を用いてあらわしなさい.

(2) 楕円 E 上の点 $(0, 2, 0)$ をとおり, $\overrightarrow{n} = (0, 1, 3)$ を法線とする平面 α の方程式を示しなさい.

(3) 平面 α による錐体 P の切断面の外周上の任意の点を X とする. 平面 α 上の点 $\mathrm{A}\left(0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ と X との距離 R（$\overrightarrow{\mathrm{XA}}$ の大きさ）は定数になる. R を求めなさい.

(4) 平面 α による錐体 P の切断面の面積 S を求めなさい.

(三重大 2020)　　(m20203108)

0.1891 以下の問いに答えなさい. ただし, y は x の関数であり, $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする.

(1) 初期条件を $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$ とするとき, 微分方程式　　$xy'' + y' = 0$　　を解きなさい.

(2) 区間 $\sqrt{3} \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$ において, (1) の解である関数が描く曲線の長さ L を求めなさい. ただし, 区間 $a \leqq x \leqq b$ の関数 $y = f(x)$ の曲線の長さ L は, $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$　で与えられる.

(三重大 2020)　　(m20203109)

0.1892 二次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ における $A\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ を満たす定数 k とベクトル $\overrightarrow{u}$ について, 以下の各問に答えなさい.

(1) この定数 k の値を求めなさい.

(2) このベクトル $\overrightarrow{u}$ を求めなさい.

(3) A^n を求めなさい.

(4) x-y 二次元平面上に存在しているある直線は, この行列 A を用いた一次変換

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって x 軸に一致した. 返還前の直線の式を求めなさい.

(三重大 2022)　　(m20223104)

0.1893 次の関数を微分せよ.

(1) $y = x^{2x} \quad (x > 0)$　　(2) $y = e^{-2x} \sin 3x$

(3) $y = \left(\tan x + \dfrac{1}{\tan x}\right)^2$　　(4) $y = (3x-1)\sqrt{x^3+1}$

(三重大 2022)　(m20223109)

0.1894 次の行列の積を求め，その行列式の値を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(三重大 2022)　(m20223111)

0.1895 次の行列の逆行列を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(三重大 2022)　(m20223113)

0.1896 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して，次の問に答えよ.

(1) 行列 A^2 を求めよ.

(2) 2 つのベクトル $A\boldsymbol{a}$ と $A^2\boldsymbol{a}$ は一次独立であることを示せ.

(3) ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $A\boldsymbol{a}$ と $A^2\boldsymbol{a}$ の一次結合で表せ.

(奈良女子大 2011)　(m20113201)

0.1897 以下の関数を微分せよ.

(1) $y = \cosh\left(\sqrt{x^2+1}\right)$　　(2) $y = \tan^{-1} x$

(奈良女子大 2011)　(m20113204)

0.1898 次のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ 0 \right)$$

(1) $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ を求めよ.

(2) $\nabla \times\ \boldsymbol{A}$ を求めよ.

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の概形を $x - y$ 平面上に図示せよ.

ここで，∇ は次のように定義された演算子である.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,,\ \frac{\partial}{\partial y}\,,\ \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

(奈良女子大 2012)　(m20123204)

0.1899 次の実対称行列 A について以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) 行列 A の固有値を求めよ．

(3) 行列 A の固有ベクトルをすべて求めよ．なお，固有ベクトルは規格化すること．

(4) 行列 A は，直交行列 V とその転置行列 V^T を以下のように左右からかけることにより，対角行列 B に変換することができる．

$$B = V^T A V$$

行列 V と B を求めよ．

(奈良女子大 2012)　　(m20123205)

0.1900 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & a & 1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$

と，ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して，次の問に答えよ．ただし，a は実数である．

(1) 3 つのベクトル $A\boldsymbol{e}_1$, $A\boldsymbol{e}_2$, $A\boldsymbol{e}_3$ が一次従属となるときの a の値を求めよ．

(2) (1) で求めた a の値に対し，

$$A^{2n-1} = (-2)^{n-1}A$$

が成り立つことを示せ．ただし，n は 1 以上の整数である．

(奈良女子大 2012)　　(m20123206)

0.1901 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ と，ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して，次の問に答えよ．ただし a は実数である．

(1) 行列 A^2 を求めよ．

(2) 3 つのベクトル $A\boldsymbol{e}_1$, $A\boldsymbol{e}_2$, $A\boldsymbol{e}_1$ が一次従属となるときの a の値を求めよ．

(奈良女子大 2013)　　(m20133201)

0.1902 A を連続微分可能なベクトル場，$f(x,y,z)$ を連続微分可能な関数とするとき，以下の関係式を証明せよ．ただし，$\boldsymbol{r} = (x,y,z)$, $r = |\boldsymbol{r}|$ である．

(1) $\nabla \cdot (\boldsymbol{r} \times \nabla f(x,y,z)) = 0$

(2) $(A \cdot \nabla)A = \dfrac{1}{2}\nabla(|A|^2) - A \times (\nabla \times A)$

(3) $\nabla \cdot \left(\dfrac{A \times \boldsymbol{r}}{r} \right) = \dfrac{\boldsymbol{r} \cdot (\nabla \times A)}{r}$

ここで,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

である．必要なら，以下の関係式を用いてよい．

(a) $\nabla\cdot(fA) = (\nabla f)\cdot A + f\nabla\cdot A$

(b) $\nabla\times(fA) = (\nabla f)\times A + f\nabla\times A$

(c) $\nabla(A\cdot B) = A\times(\nabla\times B) + B\times(\nabla\times A) + (B\cdot\nabla)A + (A\cdot\nabla)B$

(d) $\nabla\cdot(A\times B) = B\cdot(\nabla\times A) - A\cdot(\nabla\times B)$

(奈良女子大 2013)　　(m20133207)

0.1903　次の行列 $A(\theta)$ について以下の問に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1)　行列式 $|A|$ を求めよ．

(2)　$A(\theta_1+\theta_2) = A(\theta_1)A(\theta_2)$ であることを示せ．

(3)　$A(\theta)A(-\theta) = I$ を示せ．ここで I は単位行列である．

(4)　行列 $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$ の固有値をすべて求めよ．

(奈良女子大 2013)　　(m20133208)

0.1904　次の微分を求めよ．ただし，a は実定数である．

(1) $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}(ax)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\left(x^2e^{-ax}\right)$　　$\dfrac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(奈良女子大 2014)　　(m20143201)

0.1905　次のスカラー関数 $U(x,y,z)$ について以下の問いに答えよ．ただし，a は正の実定数とする．

$$U(x,y,z) = \exp\left[-a(x^2+y^2+z^2)\right]$$

(1)　ベクトル $F = \nabla U$ を求めよ．

(2)　$\nabla\cdot F = 0$ となるとき，x, y, z が満たす条件をすべて求めよ．

(3)　$\nabla\times\ F$ を求めよ．

ここで，演算子 ∇ は次のように定義する．

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

(奈良女子大 2014)　　(m20143204)

0.1906　3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 3 \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}$ と，ベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

に対して，次の問に答えよ．ただし，a は実数である．

(1)　$A\boldsymbol{v}_1$，$A\boldsymbol{v}_2$ を求めよ．

(2)　2 つのベクトル $A\boldsymbol{v}_1$, $A\boldsymbol{v}_2$ は a の値にかかわらず一次独立となることを示せ.

(3)　3 つのベクトル $A\boldsymbol{v}_1$, $A\boldsymbol{v}_2$, $A\boldsymbol{v}_3$ が一次従属となるような a の値をすべて求めよ.

(奈良女子大 2014)　　(m20143205)

0.1907　$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ の時, 以下の量を計算せよ. ただし, $r \neq 0$ とする.

(1) ∇r^n　　(2) $\nabla \times\ r^n \boldsymbol{r}$　　(3) $\nabla \cdot \left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)$　　(4) $\nabla \left(\dfrac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3}\right)$　　(5) $\nabla f(\boldsymbol{r})$

ここで, ∇ は以下で定義する微分演算子であり,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$f(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{r}$ の任意の関数, $\boldsymbol{p}$ は定ベクトル, n は定数である.

(奈良女子大 2015)　　(m20153204)

0.1908　次の行列 A に関する以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ただし, a および b は実数であり, $b \neq 0$ とする.

(1)　行列式 $|A|$ を求めよ.

(2)　行列 A の固有値を求めよ,

(3)　前問で得られた固有値に対する固有ベクトルを求めよ. なお, 固有ベクトルは規格化すること.

(4)　適切な直交行列を使って, 行列 A を対角化せよ.

(奈良女子大 2015)　　(m20153205)

0.1909　ベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して, 次の問に答えよ.

(1)　$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ は一次独立となることを示せ.

(2)　a を実数とするとき, 3 つのベクトル $a\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3$, $-\boldsymbol{v}_1 + a\boldsymbol{v}_3$, $a\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ が一次従属となるような a の値をすべて求めよ.

(奈良女子大 2015)　　(m20153206)

0.1910　次の 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値を λ_1, λ_2, λ_3 $(\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3)$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1)　λ_1, λ_2, λ_3 の値を求めよ.

(2)　次の等式が成り立つような正則行列 P を求めよ.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2016)　　(m20163201)

0.1911 微分方程式に関する以下の問題に答えよ.

(1) 微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} = -x + \sin t$ を解いて, $t = 0$ で $x = 0$ となる解 $x(t)$ を求めよ.

(2) 微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 1 - \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2$ を考える.

(a) $v = \dfrac{dx}{dt}$ とおく. $t = 0$ で $v = 0$ となる解 $v(t)$ を求めよ.
(b) $t = 0$ で $x = 0$ かつ $v = 0$ となる解 $x(t)$ を求めよ.

(奈良女子大 2016)　　(m20163207)

0.1912 xy 座標で多項式 $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$ で表される曲線を考える.

(1) この式は実数の定数 a, b, c を成分に持つ 2 × 2 対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

を使って,

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

と書き換えることができる. 行列 A を求めよ.

(2) 行列 A は異なる 2 つの実数の固有値 λ_1, λ_2 をもつ ($\lambda_1 < \lambda_2$ とする). λ_1, λ_2 を求めよ.

(3) 前問で得られた固有値 λ_1, λ_2 の固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ とする. $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ が直交していることを示せ.

(4) $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ をそれぞれ長さ 1 になるように決めて,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X\boldsymbol{e}_1 + Y\boldsymbol{e}_2$$

によって新しく XY 座標を定義する. 問題で与えた多項式を XY 座標で表し, もとの xy 座標で曲線のグラフをかけ.

(奈良女子大 2016)　　(m20163208)

0.1913 ベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は直交することを示せ.

(2) 3 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ は一次独立でないことを示せ,

(3) 3 次正方行列 A に対して $A\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ のとき, $A\boldsymbol{v}_3$ を求めよ. さらに $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ であるとき, A を求めよ.

(奈良女子大 2017)　　(m20173201)

0.1914 (1) 関数 $f(x) = \arctan\left(\dfrac{2}{x}\right)$ を x で微分せよ．

(2) 関数 $f(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$ を考える．ここで，ω_0, γ は正の実定数とする．以下の問いに答えよ;

(a) 極限値 $\displaystyle\lim_{\omega\to\infty} f(\omega)$ を求めよ．

(b) $\omega > 0$ の範囲で，$f(\omega)$ が極大をもつために満たすべき ω_0 と γ に対する条件式を求めよ．またその時の ω を求めよ．

(奈良女子大 2017)　　(m20173204)

0.1915 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする．以下の量を計算せよ．

(1) r の勾配 ∇r

(2) $\dfrac{1}{r}$ の勾配 $\nabla\dfrac{1}{r}$

(3) $\boldsymbol{r}$ の発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{r}$

(4) $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$　(ω は正の実定数) とするときの，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ の回転 $\nabla\times\boldsymbol{v}$

ここで，∇ は以下で定義される微分演算子である．

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

(奈良女子大 2017)　　(m20173207)

0.1916 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ として，$\boldsymbol{r}' = A\boldsymbol{r}$ を求めよ．

(2) 行列式 A を求めよ．

(3) 逆行列 A^{-1} を求めよ．

(奈良女子大 2017)　　(m20173208)

0.1917 3 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ を次で定める．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & a & b \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

さらに，$f_1 = A\mathbf{e}_1$, $f_2 = A\mathbf{e}_2$, $f_3 = A\mathbf{e}_3$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) f_1, f_2, f_3 が一次従属となる a, b の条件を求めよ．

(2) $Bf_1 = \boldsymbol{e}_1$, $Bf_2 = \boldsymbol{e}_2$, $Bf_3 = \boldsymbol{e}_3$ となる 3 次正方行列 B が存在するための a, b を求めよ．

(奈良女子大 2018)　　(m20183201)

0.1918 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列式を求めよ.

(2) 固有値を全て求めよ.

(3) 前問で求めた固有値のそれぞれに対応する固有ベクトルを示せ．ここで固有ベクトルの長さは任意でよく，また必ずしも互いに直交せずともかまわない.

(奈良女子大 2018)　　(m20183207)

0.1919 a, b, c を定数とし，3 次正方行列 A を次で定める.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ．さらに A の固有値の異なる値の個数が 2 個になるための a, b, c の条件を求めよ.

(2) A の一次独立な 3 つの固有ベクトルを求めよ.

(奈良女子大 2019)　　(m20193201)

0.1920 関数 $f(x) = \log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ $(-1 < x < 1)$ を $x = 0$ の近傍でテイラー展開し，x の 3 乗の項まで求めよ.

(奈良女子大 2019)　　(m20193205)

0.1921 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(奈良女子大 2019)　　(m20193210)

0.1922 a を実数とする．ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_4$ を

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$$

と定める．以下の問いに答えよ.

(1) ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3\}$ が一次独立であることを示せ.

(2) ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_4\}$ が一次独立とならないような a の値をすべて求めよ.

(奈良女子大 2022)　　(m20223201)

0.1923 p を $0 < p < 1$ をみたす実数とする．行列 A および数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\ \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix},\ a_1 = 1,\ b_1 = 0,\ \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}\ (n \geqq 2)$$

と定める．以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) $k \geqq 1$ に対し，A^k を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$ であることを示せ.

(奈良女子大 2022)　　(m20223202)

0.1924 2 次元の xy 平面内の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に関する以下の問いに答えよ.

ただし，$a>b>0$ であり，また楕円の離心率を

$$\tilde{e}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

とする.

(1) 楕円の周囲の長さ L は

$$L=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\tilde{e}^2\cos^2\theta}\ d\theta$$

で与えられることを示せ.

(2) 離心率 $\tilde{e}$ が 1 より十分小さいとき，長さ L は近似的に

$$L=2\pi a\left(1-\frac{1}{4}\tilde{e}^2\right)$$

となることを示せ.

(奈良女子大 2022)　　(m20223207)

0.1925 時間 t $(t\geq 0)$ で関数 $x(t)$ についての次の微分方程式を考える.

$$\frac{dx(t)}{dt}=a\,(f(t)-x(t))$$

ここで a は正の実数で，$f(t)$ は与えられた実関数とする．以下の問いに答えよ.

(1) $a=\log_e 2$ で，$t\geq 0$ で $f(t)=0$ である場合に，$x(0)=1$ をみたす解 $x(t)$ を求めよ.

(2) 一般に時間が十分に経った後の解は，$x(0)$ の値に関係なく

$$x(t)=a\int_0^t f(u)e^{a(u-t)}du$$

に近づくことを示せ.

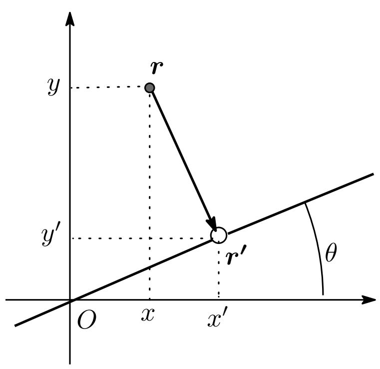
(3) 次に，$a=\log_e 2$ で，関数 $f(t)$ が 0 以上の任意の整数 n について

$$f(t)=\begin{cases}1 & (2n\leq t<2n+1)\\ 0 & (2n+1\leq t<2n+2)\end{cases}$$

であ場合を考える．整数 N が十分大きくなったときに $x(2N)$ が近づく値を求めよ.

(奈良女子大 2022)　　(m20223208)

0.1926 下図のように xy 平面上の任意の点 $\boldsymbol{r}=(x,y)$ を，x 軸から角度 θ 傾いた直線に垂直に射影した点 $\boldsymbol{r}'=(x',y')$ を求める変換を考える．以下の問いに答えよ.



(1) ベクトル $\boldsymbol{r}$ と単位ベクトル $\boldsymbol{e}=(\cos\theta,\sin\theta)$ を使って，ベクトル $\boldsymbol{r}'$ を表せ.

(2) (x, y) と (x', y') の関係は 2×2 行列 A を使って一次変換
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
として表すことができる．行列 A を求めよ．

(3) 行列 A の 2 つの固有値を計算し，それぞれの固有値に属する固有ベクトルの方向を求めよ．

(奈良女子大 2022)　　(m20223209)

0.1927 数列 $\{a_n\}$ を　$a_1 = 3,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{3}{a_n}\right)$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$
によって定めるとき，次の (1)〜(3) に答えよ．

(1) $n \geqq 1$ であるすべての n に対して，$a_n > \sqrt{3}$ であることを証明せよ．

(2) $n \geqq 1$ であるすべての n に対して，$a_{n+1} - \sqrt{3} < \dfrac{1}{2}\left(a_n - \sqrt{3}\right)$ であることを証明せよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = \sqrt{3}$ であることを証明せよ．

(京都大 2012)　　(m20123302)

0.1928 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ で表される線形変換を f とする．次の問に答えよ．

(1) この線形変換 f によって動かない点をすべて求めよ．

(2) この線形変換 f によって動かない直線をすべて求めよ．

(京都大 2014)　　(m20143303)

0.1929 直交座標系（デカルト座標系）Γ に対して，$O'(1,\ 1,\ 1)$，$e_x{}' = {}^t\left(1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2},\ 0\right)$，
$e_y{}' = {}^t\left(1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3}\right)$，$e_z{}' = {}^t\left(-1/\sqrt{6},\ -1/\sqrt{6},\ 2/\sqrt{6}\right)$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) 新座標系 $\Gamma' = \{O' : e_x{}',\ e_y{}',\ e_z{}'\}$ も直交座標系であることを示し，かつ座標変換 $\Gamma \to \Gamma'$ の式を求めよ．

(2) 座標系 Γ における方程式が $x + y + z = 6$ である平面 π の，新座標系 Γ' における方程式を求めよ．

(3) 座標系 Γ における方程式が，$\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$ である直線 g の，新座標系 Γ' における方程式が，$\dfrac{x' - \boxed{\text{あ}}}{\boxed{\text{い}}} = \dfrac{y' - \boxed{\text{う}}}{\boxed{\text{え}}} = z'$ になるとき，$\boxed{\text{あ}}$〜$\boxed{\text{え}}$ の空欄に入る数を求めよ．

(京都大 2014)　　(m20143304)

0.1930 A, B, C, D は各々 $n \times\ n$ 実行列であり，D は正則であるとする．また，M は
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$
として定義する $2n \times\ 2n$ 実行列である．M が正則であるとき，次の (1)〜(3) に答えよ．

(1)
$$\begin{pmatrix} I & F \\ 0 & I \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} I & 0 \\ G & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$
を満たす $n \times\ n$ 実行列 F, G, H を A, B, C, D を用いて表せ．ここに，I は $n \times\ n$ 単位行列，0 は $n \times\ n$ ゼロ行列である．

(2) (1) で求めた行列 H は正則であることを示せ．

(3) M^{-1} を A, B, C, D を用いて表せ.

(京都大 2015) (m20153304)

0.1931 実数のパラメータ θ に依存する行列 $A(\theta)$ が

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{2}{3}\cos^2\theta & -\dfrac{2}{3}\cos\theta\sin\theta \\ -\dfrac{2}{3}\cos\theta\sin\theta & 1-\dfrac{2}{3}\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

で与えられている．$\mathbb{R}^2$ の点 $\boldsymbol{x}$ をデカルト座標系 $O-x_1x_2$ を用いて $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2)$ と表す．これらを用いて，集合 $\Omega(\theta)$ を

$$\Omega(\theta) = \{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\cdot A(\theta)\}\boldsymbol{x} \leq 1\}$$

と定義する．ここに，$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{2} x_i y_i$$

である．このとき，次の (1)〜(4) に答えよ．

(1) $A(\theta)$ のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化して単位ベクトルとせよ．

(2) $\Omega(\theta)$ の概形を描け．

(3) $\Omega(0)\cap\Omega(\pi/2)$ の面積を求めよ．

(4) $\displaystyle\bigcup_{0\leq\theta\leq\pi/2}\Omega(\theta)$ を図示し，その面積を求めよ．ここに，$\boldsymbol{x} \in \displaystyle\bigcup_{0\leq\theta\leq\pi/2}\Omega(\theta)$ とは，$0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$ なる θ_0 があって，$\boldsymbol{x} \in \Omega(\theta_0)$ となることである．

(京都大 2015) (m20153305)

0.1932 地球の人口変化を微分方程式で表す．(1)〜(3) に答えよ．

(1) ある時刻 t における人口を $P(t)$ とし，その時の人口増加率（単位時間あたりに増加する人口）は人口に比例すると仮定すれば，次式が成り立つ．

$$\frac{dP}{dt} = aP \qquad ①$$

ただし，a は正の定数である．時刻 0 における人口を P_0 (>0)，すなわち $P(0) = P_0$ とおいて，式 ① を解いて P を求めよ．

(2) 式 ① に従うと人口は単調増加することになるが，現実の地球の人口収容力には限界がある．収容できる限界の人口 $P_{\max}$ に近づくと人口増加が鈍化することを表すため，人口増加率を $(1-P/P_{\max})$ 倍する．

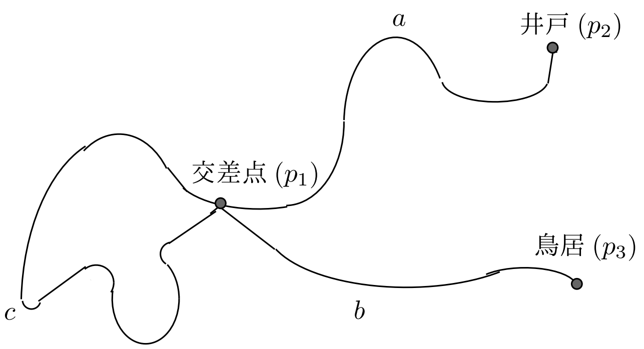
$$\frac{dP}{dt} = a\left(1-\frac{P}{P_{\max}}\right)P \qquad ②$$

これを解いて P を求めよ．ただし，a と P_0 は (1) と同じとする．

(3) (1) と (2) の解の概形を解答用紙の所定欄に図示せよ．

(京都大 2016) (m20163301)

0.1933



上の図はある村の略図を表す．この村には三つの主要な場所として交差点 (p_1)，井戸 (p_2)，鳥居 (p_3) がある．p_1 と p_2 は道 a で結ばれており，p_1 と p_3 は道 b で結ばれている．また，p_1 からは道 c を通って p_1 に戻ることができる．道 a, b, c の長さはいずれも 1 とする．

二つの場所 x と y があるとき（ただし，このとき一般に $x = y$ の場合も許す），x から一つ以上の道を通って y に至る経路を考えることにする．場所 x から場所 y に至る経路は，場所を表す記号と道を表す記号が交互に現れる記号列で表すことができる．また，ある経路中に現れる道の長さの合計をその経路の長さと呼ぶ．たとえば，p_2 から道 a を通り p_1 に移動し，さらに道 b を通って p_3 に至る経路は．記号列 (p_2, a, p_1, b, p_3) で表すことができ，この経路の長さは 2 である．また，記号列 (p_2, a, p_1, c, p_1, a, p_2) は長さ 3 の経路を表す．後者の例のように，経路中に同じ場所や同じ道が複数回現れても良い．

二つの場所 p_i と p_j が道で直接結ばれている場合は第 i 行第 j 列成分を 1 として，直接結ばれていない場合は第 i 行第 j 列成分を 0 とすることにより，この村の場所と道は，次のような 3 行 3 列の行列 A で表現できる．この行列を隣接行列と呼ぶ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，行列 $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の第 i 行第 j 列成分は，p_i から p_j に到達する長さ 2 の異なる経路の数を表す．たとえば，第 1 行第 1 列成分の値 3 は，p_1 から p_2 に到達する (p_1, c, p_1, c, p_1), (p_1, a, p_2, a, p_1), (p_1, b, p_3, b, p_1) という 3 個の長さ 2 の経路が存在することを表す．

問 1〜問 3 に答えよ．

(1) A^3 を求めよ．

(2) A^3 の第 1 行第 1 列成分の値に対応する経路をすべて列挙せよ．

(3) A^n を求めよ．（ n は 1 以上の自然数である．）

(京都大 2017)　　(m20173304)

0.1934 次の定積分の値を求めよ．（ただし，e は自然対数の底）

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{3x^2-1}{x}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^\pi \left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2 dx$

(京都大 2017)　　(m20173305)

0.1935 次の三角関数を含む微分方程式の一般解を，定数 C を用いて求めよ．

（イ） $x\tan\dfrac{y}{x} - y + x\dfrac{dy}{dx} = 0$　　（ロ） $\left(\tan y - 6x^2\right)dx + \dfrac{x}{\cos^2 y}dy = 0$

(京都大 2018)　　(m20183304)

0.1936 次の指数関数を含む微分方程式の一般解を，定数 C を用いて求めよ．

（イ） $\dfrac{dy}{dx} + e^x y = 7e^x$　　　（ロ） $(y + e^x \sin y)\,dx + (x + e^x \cos y)\,dy = 0$

(京都大 2018)　　(m20183305)

0.1937 次の行列の逆行列を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(京都大 2019)　　(m20193301)

0.1938 x_1〜x_3 を変数とする次の連立方程式を解け．

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(京都大 2019)　　(m20193302)

0.1939 次の行列の行列式を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 & 3 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -8 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & .\cdot^{\cdot} & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$　（n 次の正方行列，ただし n は 2 以上の自然数）

(京都大 2019)　　(m20193303)

0.1940 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ によって定まる $\boldsymbol{R}^4$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像を T とおく．すなわち，$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ である．ただし，$\boldsymbol{R}^n$ は n 次元実ベクトル空間を表す．(1)〜(4) に答えよ．

(1) 像 $T(\boldsymbol{R}^4)$ の次元を求めよ．

(2) 像 $T(\boldsymbol{R}^4)$ の基底を 1 組作れ．

(3) $\mathrm{Ker}(T)$ の次元を求めよ．ただし，$\mathrm{Ker}(T)$ は $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間であり，次のように定められる．

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4 \;\middle|\; T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \right\}$$

(4) $\mathrm{Ker}(T)$ の基底を 1 組作れ．

(京都大 2019)　　(m20193305)

0.1941 (1) 次の微分方程式の一般解を，定数 C を用いて求めよ．

（イ） $\dfrac{dy}{dx} = y^2 + y - 6$

(ロ) $\dfrac{dy}{dx} = 2 + \dfrac{y}{x} + e^{-\frac{y}{x}}$

(ハ) $\left(\dfrac{3}{x} + \dfrac{y}{x^2}\right) dx + \left(3y - \dfrac{1}{x}\right) dy = 0$

(2) 次の微分方程式の一般解を，定数 C を用いて求めよ．
なお，積分因子は $\sin x$ である．

$$(2\sin y\cos x - 2)\,dx + \cos y \sin x\,dy = 0 \qquad (0 < x < \pi)$$

(京都大 2022)　　(m20223301)

0.1942 (1) 次の行列が正則行列となるための a の条件を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 上記の行列において $a = 1$ の場合の行列式の値を求めよ．

(3) x_1〜x_4 を変数とする 次の連立方程式を解け．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(京都大 2022)　　(m20223302)

0.1943 (1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log\left(1 + \frac{3}{x}\right)$ および $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log\left(1 + \frac{3}{x^2}\right)$ を求めよ．

(2) 積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \log\left(1 + \frac{3}{x^2}\right) dx$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2011)　　(m20113402)

0.1944 E を 3 次の単位行列とし，$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の実固有値のうちで最小のものを λ とする．λ に対する固有ベクトル $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を 1 つ求めよ．

(3) $B = A^7 + 5A^4 + E$ とおく．(2) で求めたベクトル $\vec{v}$ が B の固有ベクトルになることを示し，$\vec{v}$ に対する B の固有値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2012)　　(m20123401)

0.1945 一般に 3 次正方行列 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ に対して $\mathrm{tr}(X) = x_{11} + x_{22} + x_{33}$ とおく．

$\mathrm{tr}(X)$ を X のトレースという．$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ -3 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{tr}(X)$ の値を求めよ．

(2) 任意の 3 次正方行列 X のたいして，$\mathrm{tr}(XA) = \mathrm{tr}(AX)$ となることを証明せよ．

(3) $AX - XA = A$ となる 3 次正方行列 X は存在しないことを証明せよ．

(京都工芸繊維大 2013)　　(m20133401)

0.1946 (1) a を実数とする．行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ a & 3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ

(2) 整数を成分とする 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ がある．

(a) A の固有多項式の 1 次の項の係数を求めよ．

(b) A が複素数の範囲でただ一つの固有値 α をもつとき，$3\alpha^2$ は整数であることを示せ．

(京都工芸繊維大 2014)　　(m20143401)

0.1947 (1) 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) n を自然数とする．3 次正方行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，B^n を求めよ．

(京都工芸繊維大 2015)　　(m20153401)

0.1948 実数 a, b, c に対して 4 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & c & -b \\ 1 & -c & 0 & a \\ 1 & b & -a & 0 \end{pmatrix}$$

を考える．

(1) $a + b + c \neq 0$ のとき，A が正則行列であることを示せ．

(2) $a + b + c = 0$ のとき，4 次の列ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ で，$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たすものをすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2017)　　(m20173401)

0.1949 極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}$ および $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2017)　　(m20173402)

0.1950 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x}}$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2017)　　(m20173403)

0.1951 関数 $F(x, y) = x^3 + 2y^3 - 7xy + 4$ を考える．関数 $y = f(x)$ は，$x = 2$ を含むある開区間 I 上で微分可能であり，次の条件 $(*)$ および $(**)$ を満たしているとする．

(*) $F(x, f(x)) = 0 \quad (x \in I)$

(**) $f'(2) < 0$

このとき，$f(2)$ の値および $f'(2)$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2017)　(m20173404)

0.1952 (1) 2 回微分可能な関数 $F(x)$ に対し，不定積分に関する関係式

$$\int (F''(x) + F(x)) \sin x dx = F'(x) \sin x - F(x) \cos x + C$$

を示せ．ただし，C は任意定数とする．

(2) n を 3 以上の自然数とする．微分方程式

$$y' + y = e^{-x} \left\{ x^n + n(n-1)x^{n-2} \right\} \sin x$$

の解 $y = y(x)$ で条件 $y(0) = 0$ を満たすものを求めよ．

(京都工芸繊維大 2017)　(m20173405)

0.1953 $\boldsymbol{R}^4$ の 3 つのベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が 1 次独立であるかどうかを調べよ．

(京都工芸繊維大 2018)　(m20183402)

0.1954 a, b を実数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & -1 & b \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ は固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を持つとする．

(1) a, b を求めよ．

(2) A の固有値をすべて求めよ．

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & b & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2019)　(m20193401)

0.1955 (1) 積分 $\displaystyle\int_0^T \frac{\sqrt{1 + \sin x}}{\sqrt{1 - \sin x}} dx \quad \left(0 \leqq T < \frac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．

(2) a を正の実数とする．広義積分 $\displaystyle\int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 + \sin x}}{(1 - \sin x)^a} dx$ が収束するような a の範囲．および a がその範囲にあるときの，この広義積分を求めよ．

(京都工芸繊維大 2019)　(m20193402)

0.1956 関数 $z = f(x, y)$ は C^2 級であるとする．x, y が別の 2 変数 s, t の関数であり，

$$x = 2 \cos s + 3 \sin t, \qquad y = 4 \sin s + 5 \cos t$$

と表されているとする．$(s, t) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ のときの x, y の値をそれぞれ p, q とする．ただし，関数 $f(x, y)$ が C^2 級であるとは，$f(x, y)$ の 2 階までのすべての偏導関数が存在して，それらが連続であることである．

(1) x, y の s, t に関する 1 階偏導関数をすべて求めよ.

(2) z を s, t の関数と見なしたとき, $\dfrac{\partial z}{\partial s}\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ を $f_x(p,q)$ および $f_y(p,q)$ を用いて表せ.

(3) z を s, t の関数と見なしたとき, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t \partial s}\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ を $f_{xx}(p,q)$, $f_{xy}(p,q)$ および $f_{yy}(p,q)$ を用いて表せ.

(京都工芸繊維大 2019) (m20193403)

0.1957 a を実数とする. 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を考える. E は 3 次の単位行列を表す.

(1) 行列 $aE + A$ の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) 行列 $aE + A$ の階数を求めよ.

(3) 3 次正則行列 P で
$$P^{-1}(aE + A)P = aE + A^2$$
を満たすものは存在しないことを示せ.

(京都工芸繊維大 2020) (m20203401)

0.1958 (1) 関数 $z = z(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ に関する微分方程式
$$(*) \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} - 6z = 4e^t$$
を考える.

(a) 微分方程式 $\dfrac{d^2 z}{dt^2} + \dfrac{dz}{dt} - 6z = 0$ の一般解を求めよ.

(b) $(*)$ の一般解を求めよ.

(2) 関数 $y = y(x)$ $(x > 1)$ に関する微分方程式
$$(**) \qquad (x-1)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2(x-1)\frac{dy}{dx} - 6y = 4x - 4$$
を考える. 変数変換 $x(t) = e^t + 1$ $(-\infty < t < \infty)$ により, $z(t) = y\left(x(t)\right)$ とおく.

(a) $\dfrac{dz}{dt}$ および $\dfrac{d^2 z}{dt^2}$ を $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$ および x を用いて表せ.

(b) $(x-1)^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + 2(x-1)\dfrac{dy}{dx} - 6y = \dfrac{d^2 z}{dt^2} + \dfrac{dz}{dt} - 6z$ が成り立つことを示せ.

(c) $(**)$ の一般解を求めよ.

(京都工芸繊維大 2020) (m20203405)

0.1959 4 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の固有ベクトルのみから成る $\mathbb{R}^4$ の正規直交基底を 1 組求めよ.

(京都工芸繊維大 2021) (m20213401)

0.1960 x の関数 $f(x) = 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$ を考える.

(1) $f(x)$ の増減を調べ, 極値を求めよ.

(2) 極限 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ.

(3) 関数 $y = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$ $(x \geqq 0)$ の値域を求めよ.

(京都工芸繊維大 2022) (m20223402)

0.1961 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 2 & 2 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$ について考える．ただし，a は実数とする．

(1) 行列 A の固有値の一つが 0 である場合，a の値を求めよ．

(2) $a = -1$ の場合について，A の固有値と固有ベクトルを求めて, A を対角化せよ．

(3) $\boldsymbol{x}$ を長さ 1 のベクトルとする．ベクトル $\boldsymbol{y}$ を，$\boldsymbol{x}$ の A による一次変換 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ とする．
$a = -1$ の場合について，$\boldsymbol{y}$ の長さ $|\boldsymbol{y}|$ を最大とする $\boldsymbol{x}$ を求めよ．また，そのときの長さ $|\boldsymbol{y}|$ を求めよ．

(大阪大 2011) (m20113506)

0.1962 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ が，行列 $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -11 & 4 \\ -30 & 11 \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \frac{1}{3^n}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

と定義される．ここで n は自然数とする．以下の問いに答えよ．

(1) PAP^{-1} を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 第 n 項が $c_n = 2^n b_n$ で与えられる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ならびに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ を求めよ．

(大阪大 2012) (m20123501)

0.1963 以下の問に答えよ．ただし，u, v, w は複素数である．

(1) 方程式 $|u+2| = 2|u-1|$ を満たす u が描く図形を複素平面上に図示せよ．

(2) 方程式 $|u| = 2$ を満たす複素数 u を

$$v = u + \frac{1}{4u}$$

により変数変換する．このとき，複素数 v が描く図形を複素平面上に図示せよ．

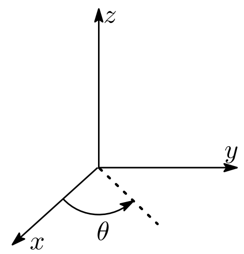
(3) 方程式 $|u+2| = 2|u-1|$ を満たす複素数 u を

$$w = i\left(\frac{4u^2 - 16u + 17}{4u - 8}\right)$$

により変数変換する．ただし，i は虚数単位とする．このとき，複素数 w が描く図形を複素平面上に図示せよ．

(大阪大 2012) (m20123503)

0.1964 下図に示すように，3 次元実ベクトル空間における直交座標系を考える．z 軸回りの回転については，回転角 θ の正の方向を，下図の矢印の方向とする．また，$0 \leq \theta \leq 2\pi$ とする．このとき，以下の問に答えよ．



(1) 点 (x, y, z) を点 (x', y', z') へと移す xy平面に平行な移動　$x' = x + az$，$y' = y + bz$，$z' = z$ を考える．このとき，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

なる 3 次正方行列 A を求めよ．

(2) 点 (x, y, z) を点 (x', y', z') へと移す z 軸周り角 θ の回転を考える．このとき，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

なる 3 次正方行列 B を求めよ．

(3) 問い (1),(2) における行列 A, B に関して，行列式 $|AB|$ を求め，$(AB)^{-1}$ が存在することを示せ．

(4) 問い (1),(2) における行列 A, B に関して，$(AB)^{-1}$ を求めよ．

(5) 問い (1),(2) における行列 A, B に関して，$AB = BA$ となるための必要十分条件を示せ．

(大阪大 2012)　　(m20123504)

0.1965 以下の設問に答えよ．

(1) 次式を証明せよ．

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x) - \left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}\right)}{x^3} = 0 \qquad (a)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)}{x^2} = 0 \qquad (b)$$

(2) 次式を証明せよ．

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n - \left(1 - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{3n^2}\right)}{\dfrac{1}{n^2}} = 0$$

(3) 問 (1)，問 (2) の結果を用いて，次式を証明せよ．

$$\lim_{n \to \infty} n^2 \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2}\right) \right\} = 0$$

(大阪大 2012)　　(m20123505)

0.1966 以下の設問に答えよ．

(1) 実数を要素とする行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ が異なる固有値を有するための条件を求めよ．また，そのとき，異なる固有値に対する固有ベクトルが直交することを示せ．

(2) 2 次曲線 $7x^2-4xy+7y^2=9$ の概形を描け．

(3) $x^2+y^2=1$ のとき，関数 $f(x,y)=2x^2+dxy+3y^2$ の最大値と最小値を求めよ．ただし，d は実数の定数とする．

(大阪大 2012)　　(m20123506)

0.1967 (1)

$$f(x)=\left(\frac{x^2}{\pi}-\cos(x)\right),\quad (0\leq x<2\pi)$$

で定義された周期 2π を持つ関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\}$$

とフーリエ級数に展開したとき，

$$a_n,\ (n=0,1,2,\cdots),\ b_n,\ (n=1,2,\cdots)$$

を求めよ．

(2) (1) の結果を利用して

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

の値を求めよ．

(大阪大 2012)　　(m20123510)

0.1968 (1) 行列 $A=\begin{pmatrix} b & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ c & 0 & b \end{pmatrix}$ のすべての固有値と，それぞれに対応する固有ベクトルを求めよ．

ただし，a,b,c は実数である．

(2) 行列 A を対角化する直交行列の中で，対称行列となる P を一つ求めよ．

(3) A^n を求めよ．ただし，n は自然数を表す．

(4) (2) で求めた P を用いて $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と 1 次変換することで，$x^2+2y^2+z^2+xz$ が $\lambda_1u^2+\lambda_2v^2+\lambda_3w^2$ と表せることを示せ．また，定数 λ_1，λ_2，λ_3 の値を求めよ．

(大阪大 2013)　　(m20133503)

0.1969 確率変数 X は確率密度関数

$$p(x)=C_kx^{k-1}e^{-x},\quad (x\geq 0)$$

を持つとする．ただし，k は自然数で，C_k は $\displaystyle\int_0^{\infty}p(x)dx=1$ で定まる正の数とする．

(1) 正の数 C_k，および $E[e^{-tX}]$, $(t\geq 0)$ を求めよ．

(2) 確率変数列 $X_1,\cdots,X_n$ は互いに独立に同一分布に従うとし，その確率密度関数を $p(x)$ とする，このとき，

$$q_n(t)=E[e^{-t(X_1+\cdots+X_n)}],\quad (t\geq 0)$$

を求めよ．

(3) 極限値

$$\lim_{n\to\infty} q_n\left(\frac{1}{n}\right)$$

を求めよ．

(大阪大 2013)　　(m20133508)

0.1970 曲線 C が媒介変数表示 $x=f(s),\ y=g(s),\ s\geq 0$ で表される．ただし，$\cosh s=(e^s+e^{-s})/2$ ，$\sinh s=(e^s-e^{-s})/2$ を用いて

$$f(s)=s-\frac{\sinh s}{\cosh s}$$
$$g(s)=\frac{1}{\cosh s}$$

と定義する．以下の設問に答えよ．

(1) 定数 $b>0$ に対して曲線 $C(b)$ が $x=f(s),\ y=g(s),\ 0\leq s\leq b$ で表される．$C(b)$ の長さ $\ell(b)$ を求めよ．

(2) 点 P は時刻 0 で $x=f(0),\ y=g(0)$ を出発して s が増える方向へ一定の速さで C 上を移動する．時刻 $t>0$ までに移動した経路の長さを t とする．時刻 t における P の位置を $x=f\left(\varphi(t)\right)$, $y=g\left(\varphi(t)\right)$ と表すための関数 $\varphi(t)$ を求めよ

(大阪大 2014)　　(m20143501)

0.1971 $\{f_k(x)\}_{k=1.2.\cdots}$ を閉区間 $I(\subset\mathbb{R})$ で定義された実数値連続関数の列とする．二つの条件を考える．

$$\text{条件 1 ：}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\Big|f_k(x)\Big|<\infty,\qquad x\in I$$
$$\text{条件 2 ：}\quad \max_{x\in I}\left|\sum_{k=1}^{m}f_k(x)-\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\right|\to 0\qquad (m,n\to\infty)$$

条件 1 が満たされるとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ は I において絶対収束するという．条件 2 が満たされるとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ は I において一様収束するという．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)=|x|\quad (x\in[-\pi,\ \pi])$ のフーリエ級数

$$s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\quad x\in[-\pi,\pi]$$

を求めよ．

(2) (1) で求めた級数 $s(x)$ が $[-\pi,\pi]$ において絶対収束することを示せ．

(3) (1) で求めた級数 $s(x)$ が $[-\pi,\pi]$ において一様収束することを示せ．

(大阪大 2014)　　(m20143506)

0.1972 N を自然数とする．ボタンを押下すると 1 から N までの整数の中から一つの数字をランダムに表示する機械がある．ボタンを離すと表示された数字は消える．それぞれの数字は等確率で表示される．ボタンの押下を n 回行い表示された数字を $X_1,\cdots,X_n$ とし，これらは互いに独立な確率変数とする．$T=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$ とおき，T を用いて N を推定したい．事象 A の生起確率を $P(A)$ と書く．以下の問いに答えよ．

(1) $P(T\leq t)=\left\{P(X_1\leq t)\right\}^n\quad (t=1,\cdots,N)$ を示せ．

(2) $P(T=t)\quad (t=1,\cdots,N)$ を求めよ．

(3) 期待値 $E(T)$ が次式で与えられることを示せ.

$$E(T) = N - \sum_{t=1}^{N} \left(\frac{t-1}{N} \right)^n$$

(4) 次式を示せ.

$$\lim_{N \to \infty} \frac{E(T)}{N} = \frac{n}{n+1}$$

(大阪大 2014)　　(m20143507)

0.1973 曲線 $C : y = u(x)$ 上の点 (x, y) における接線が y 切片 $2xy^2$ をもち，かつ，曲線 C が点 $\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$ を通るとき，関数 $u(x)$ を求めよ.

(大阪大 2015)　　(m20153502)

0.1974 行列の対角化に関する以下の設問に答えよ.

(1) 次の対称行列 A を直交行列によって対角化せよ．ただし，a は実定数である.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列 B が正則行列によって対角化できるための実定数 b, c の必要十分条件を求めよ．また，対角化出来る場合は対角化せよ.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

(大阪大 2015)　　(m20153506)

0.1975 $\mathbb{R}^2$ は 2 次元実数列ベクトルの集合とする．$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ の大きさを $|\boldsymbol{x}|$ とし，実数を成分とする 2 次の正方行列 B に対して

$$||B|| = \max_{|\boldsymbol{x}|=1} |B\boldsymbol{x}|$$

と定める．$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，$||B||$ の値を求めよ．また，その値を与える $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ をすべて求めよ.

(大阪大 2016)　　(m20163501)

0.1976 (1) 実数を成分とする 2 次の正方行列 A, B は対称行列とし，A は相異なる固有値を持つとする．このとき，$AB = BA$ ならば A と B は同じ直交行列によって対角化されることを示せ.

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ を同じ直交行列によって対角化せよ.

(大阪大 2016)　　(m20163502)

0.1977 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に関して以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A が対角化する直交行列 P の中で対称行列を求めよ.

(3) A の逆行列を，問い (1), (2) で求めた A の固有値と P を用いて表せ.

(4) 問い (3) の結果を用いて，連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ の解を求めよ.

(5) 問い (3) の結果および直交行列の性質 $P^T P = I$ を用いて，正の整数 n に対する連立方程式 $A^n \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ の解 $\boldsymbol{x}_{(n)}$ を P, n および A の固有値を用いて表せ．，$n \to \infty$ としたときの $\boldsymbol{x}_{(n)}$ の極限を示せ．ただし，P^T は P の転置行列を，I は単位行列を表す．

(大阪大 2016)　　(m20163510)

0.1978 行列 $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) すべての固有値と，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさは 1 とする．

(2) 関数 $f(x, y, z)$ の x, y, z についての偏導関数をそれぞれ $f_x(x, y, z)$，$f_y(x, y, z)$，$f_z(x, y, z)$，関数 $g(x, y, z)$ の x, y, z についての偏導関数をそれぞれ $g_x(x, y, z)$，$g_y(x, y, z)$，$g_z(x, y, z)$ とする．関数 $f(x, y, z)$ が条件 $g(x, y, z) = 0$ のもとで点 (a, b, c) において極値をとり，$g_x(a, b, c) \neq 0$ または $g_y(a, b, c) \neq 0$ または $g_z(a, b, c) \neq 0$ ならば，次の式を満たす実数 λ が存在する．

$$f_x(a, b, c) - \lambda g_x(a, b, c) = 0$$

$$f_y(a, b, c) - \lambda g_y(a, b, c) = 0$$

$$f_z(a, b, c) - \lambda g_z(a, b, c) = 0$$

条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ のもとで，次の関数 $f(x, y, z)$ が最小値をとる (x, y, z) を求めよ．

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(大阪大 2017)　　(m20173503)

0.1979 複素数 $z = x + iy$ について以下の問いに答えよ．ただし，x，y は実数，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) 複素数 $1 + \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{99}$ の絶対値と偏角を求めよ．

(2) 曲線 C を放物線 $y = x^2 - 1$ の $z = -1$ から $z = 1$ に向かう曲線とする．このとき，複素関数 $f(z) = \overline{z} + z^2$ を C 上で積分せよ（$\overline{z}$ は z の共役複素数）．

(3) 複素数 $g(z) = \dfrac{1}{(z-1)(3-z)}$ において，中心が $z = 0$ のべき級数展開を求めよ．ただし，$|z| < 3$ とし，この範囲で収束するものをすべて求めること．なお，以下の幾何級数を用いてもよい．

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}\,, \qquad |z| < 1$$

(大阪大 2018)　　(m20183503)

0.1980 α を 1 以上の実数とする．1 回微分可能な関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_2^{2x} \left\{ f\left(\frac{t}{2}\right) \right\}^{\alpha} dt + 1 \qquad ①$$

を満たすという．以下の設問に答えよ．

(1) $f(1) = A$ を満たす実数 A を求めよ．

(2) $y = f(x)$ とおく．式 ① の両辺を x で微分することにより，微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y^{\alpha} \qquad ②$$

が成り立つことを示せ.

(3) 初期条件「$x = 1$ のとき $y = A$ （ただし A は (1) で求めた値)」のもとで微分方程式 ② の特殊解を Y とする．「1 以上の任意の実数 x に対して，Y の x における値が実数になる」ための，α に対する条件を求めよ.

(大阪大 2018) (m20183505)

0.1981 次式で表される xyz 座標系の 2 次曲面について以下の問いに答えよ.

$$8x^2 + 2\sqrt{3}yz + 7y^2 + 5z^2 = 8$$

(1) 与式の左辺の対称行列 A を用いて $(x\ y\ z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の形式で表せ.

(2) A のすべての固有値を重複する場合も含めて求め，それぞれに対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは互いに直交するものを示すこと.

(3) A を対角化する直交行列を一つ示し，その直交行列で対角化せよ.

(4) xyz 座標系の原点から小問 (2) で求めた各固有ベクトルの方向に X 軸，Y 軸，Z 軸をとるとき，与えられた 2 次曲面の $X-Y$, $Y-Z$, $Z-X$ の各平面による切断面をそれぞれ図示せよ．その際，切断面の輪郭線と各軸との交点の座標を記入すること.

(大阪大 2019) (m20193503)

0.1982 $\boldsymbol{x} = {}^t(x, y, z)$ に対する線形変換

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x & + & 3y & - & z \\ 2x & + & y & + & 3z \\ 3x & + & 2y & + & 4z \end{pmatrix}$$

について，以下の問に答えよ．ただし，^{t} は行列の転置を表すとする.

(1) ある行列 A を用いて，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表すことができる．この行列 A を求めよ.

(2) k を実数とし，$\boldsymbol{b} = {}^t(5, 0, k)$ とする．$\boldsymbol{x}$ についての方程式 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ が解を持つための，k についての必要十分条件を求めよ．またその条件が満たされるときの解を求めよ.

(3) $\boldsymbol{0} = {}^t(0, 0, 0)$ とする．$\boldsymbol{x}$ についての方程式 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ の解を求めよ.

(4) E を 3 次の単位行列とし，行列 B を $B = A - E$ で定める．行列 B の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(大阪大 2019) (m20193506)

0.1983 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & a \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．ただし，a, b は実数とする.

(1) A の固有値と，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求め，すべての固有値と固有ベクトルが実数であるための条件を述べよ.

(2) A の逆行列が存在するための条件を述べ，逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) 問い (2) の結果を用い，逆行列 A^{-1} が存在するときの連立方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ の解を求めよ．

(4) A を対角化する行列 P を一つ示し，A を対角化せよ．

(5) A^n を求めよ．また，$n \to \infty$ のとき A^n のすべての要素が実数を持ち，かつ発散しないための a, b の範囲を示せ．

(大阪大 2020)　　(m20203501)

0.1984 3 次の正方行列 $M = (m_{ij})$ に対して，対角成分の和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} m_{ii}$ を $\mathrm{tr}(M)$ で表すとする．

また，行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) (1) で求めた行列 A の 3 つの固有値を，それぞれ λ_1，λ_2，λ_3 とする．このとき，
$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$　　が成り立つことを示せ．

(3) 実数を成分とする 3 次の正方行列 B, C に対して，　$\mathrm{tr}(BC) = \mathrm{tr}(CB)$　が成り立つことを示せ．

(4) 実数を成分とする 3 次の正方行列 D は，互いに異なる実数の固有値 μ_1，μ_2，μ_3 を持つとする．このとき，　$\mathrm{tr}(D) = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$　が成り立つことを示せ．

(大阪大 2020)　　(m20203506)

0.1985 2 変数関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

で定める．ここで，関数 $\theta = \tan^{-1} s$ は，関数

$$s = \tan\theta \quad \left\{-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$$

の逆関数である．2 変数関数 $g(x, y)$ を

$$g(x, y) = h\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) e^{f(x,y)}$$

で定める．ここで，関数 $h(r)$ は区間 $(0, \infty)$ を定義域とし，区間 $(0, \infty)$ において 1 回微分可能とする．以下の問いに答えよ．

(1) 2 変数関数 $p(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ の x についての偏導関数 $p_x(x, y)$ を求めよ．

(2) 2 変数関数 $q(x, y) = e^{f(x,y)}$ の x についての偏導関数 $q_x(x, y)$ と y についての偏導関数 $q_y(x, y)$ を求めよ．

(3) $g(x, y)$ の定義域において，等式

$$-yg_x(x, y) + xg_y(x, y) - h'\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) e^{f(x,y)} = 0$$

が成り立っているとする．　ここで，$g_x(x, y)$ は $g(x, y)$ の x についての偏導関数，$g_y(x, y)$ は $g(x, y)$ の y についての偏導関数，$h'(r)$ は $h(r)$ の導関数を表す．$h(1) = 1$ を満たす $h(r)$ を求めよ．

(大阪大 2021)　　(m20213506)

0.1986 (1) 実数を成分に持つ対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の小問に答えよ．

(a) A の固有値をすべて求めよ．

(b) A を直交行列によって対角化せよ．

(2) 実数を成分に持つ 3 次の対称行列 B が，3 つの相異なる固有値を持つとする．B の異なる固有値に対応する固有ベクトルは，互いに直交することを示せ．

(大阪大 2021) (m20213507)

0.1987 以下の問いに答えよ．ただし，A_n は n 次の実正方行列を，${A_n}^T$ は A_n の転置行列を表す．

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & p & 0 \end{pmatrix}$ が正則ではないとき，実数 p の値を求めよ;

(2) ${A_3}^T = -A_3$ である A_3 を任意の実数 a, b, c を用いて表し，正則かどうかを判定せよ．

(3) ${A_n}^T = -A_n$ である A_n が正則かどうかを判定せよ．ただし，n は 5 以上の奇数であるとする．

(大阪大 2022) (m20223501)

0.1988 $0 \leqq \theta < 2\pi,\ 0 \leqq \phi < 2\pi$ とする．3 次の正方行列 $A,\ B$ を次式で定義し，$C = AB$ とする．

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}$$

なお，虚数単位は $i\ (= \sqrt{-1})$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 行列 C の行列式の値を求めよ．

(2) 行列 C のすべての固有値およびそれらの絶対値を求めよ．

(大阪大 2022) (m20223506)

0.1989 コインを投げたとき，表が出る確率が $p\left(0 < p < 1,\ p \neq \dfrac{1}{2}\right)$ であるコイン A と，表が出る確率が $1-p$ であるコイン B が 1 枚ずつある．ただし，p は常に一定である．また，コイン A とコイン B は見た目や重さでは判別できない．以下の設問に答えよ．

(1) コイン A とコイン B を同時に投げたとき，2 枚とも表が出る確率を求めよ．

(2) ある競技において，2 名の競技者がいずれも公平に権利を得られるような抽選の仕組みを考えたい．コイン A またはコイン B，またはその両方を用いて，実現可能な方法を理由とともに一つ述べよ．

(3) N を正の整数とする．コイン A とコイン B を中身の見えない袋に入れる．その袋からコインを 1 枚無作為に取り出し表裏を確認後，コインを袋に戻す試行を N 回繰り返したところ，N 回とも表が出た．このとき，投げたコインが全て A であった条件付き確率を求めよ．

(大阪大 2022) (m20223507)

0.1990 関数 $X(r,\theta) = r\cos\theta,\ Y(r,\theta) = r\sin\theta$ の定義域はいずれも $D = (0,\infty) \times (-\pi,\pi)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 2 つの集合

$$A = \left\{ \left(X(r,\theta_0), Y(r,\theta_0) \right) \mid r \in (0,\infty) \right\},\ B = \left\{ \left(X(r_0,\theta), Y(r_0,\theta) \right) \mid \theta \in (-\pi,\pi) \right\}$$

を 1 つの座標平面上に図示せよ．ただし，$\theta_0 \in (-\pi,\pi)$，$r_0 \in (0,\infty)$ は定数である．

(2) 行列 $J(r,\theta)=\begin{pmatrix} X_r(r,\theta) & Y_r(r,\theta) \\ X_\theta(r,\theta) & Y_\theta(r,\theta) \end{pmatrix}$ とその行列式 $|J(r,\theta)|$ を求めよ．ただし，

$$X_r=\frac{\partial X}{\partial r},\ Y_r=\frac{\partial Y}{\partial r},\ X_\theta=\frac{\partial X}{\partial \theta},\ Y_\theta=\frac{\partial X}{\partial \theta}$$

である．

(3) 2つのベクトル $\big(X_r(r,\theta),Y_r(r,\theta)\big)$，$\big(X_\theta(r,\theta),Y_\theta(r,\theta)\big)$ が直交することを示せ．

(大阪府立大 2011)　　(m20113602)

0.1991 R^4 の部分空間 W_1, W_2 を

$$W_1=\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\in R^4 \ \middle|\ b+c+d=0\right\}$$

$$W_2=\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\in R^4 \ \middle|\ a+b=0,\ c=2d\right\}$$

とする．このとき，W_1, W_2 のそれぞれの次元と一組の基底を求めよ．また，

$$W_1\cap W_2\ ,\quad W_1+W_2$$

のそれぞれの次元と一組の基底を求めよ．

(大阪府立大 2011)　　(m20113604)

0.1992 次の問いに答えよ．

(1) ある実対称行列は異なる固有値をもつとする．このとき，異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交することを示せ．

(2) 行列 A を

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，A の固有値，固有ベクトルを求め，A を対角化せよ．

(大阪府立大 2011)　　(m20113606)

0.1993 3 次元空間内の点 A, B の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ とする．

(1) 行列

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

の固有値を求めよ．

(2) (1) の行列 C を用いて，

$$\boldsymbol{y}=C\boldsymbol{x}\ ,\quad ||\boldsymbol{x}||\leqq\ 1$$

とするとき，点 B 全体のなす図形の体積を示せ．ただし，$||\boldsymbol{x}||$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ の大きさを表す．

(大阪府立大 2011)　　(m20113607)

0.1994　2× 2 の行列 A をつぎのように定義する：

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

このとき，つぎの各問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) 問い (1) で求めた固有値に対応する行列 A の長さ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(3) 問い (1) で求めた固有値を λ，対応する長さ 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ と置く．次の等式を満たすベクトル $\boldsymbol{y}$ を求めよ.

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$$

ただし E は 2× 2 の単位行列であるとする.

(4) ベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ が次のように成分表示されるとする.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

このとき 2× 2 の行列 B を次のように定義する：

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

次の等式を満たす 2× 2 の行列 C を求めよ：

$$AB = BC$$

(大阪府立大 2013)　　(m20133604)

0.1995　(1) ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ のいずれにも直交する単位ベクトル $\boldsymbol{c}$ を求めよ.

(2) 3 次元実数空間 $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ におけるベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の座標ベクトルを求めよ.

(大阪府立大 2013)　　(m20133608)

0.1996　4 次の正方行列 A を $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ により定める.

(1) 行列 A の階数を求めよ.

(2) 行列 A の固有値をすべて求めよ．さらに，そのうちで絶対値が最小の固有値に対する固有ベクトルを 1 つ求めよ.

(大阪府立大 2016)　　(m20163603)

0.1997　実ベクトル空間 V とそのベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ について，次の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n$ が一次独立であるとはどういうことか，その定義を述べよ．

(2) $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n$ が V を生成するとはどういうことか，その定義を述べよ．

(3) $V = R^4$ で

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

のとき，$\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3,\ \boldsymbol{x}_4,\ \boldsymbol{x}_5$ が V を生成するかどうかを，(2) で述べた定義にしたがって調べよ．

(大阪府立大 2016)　　(m20163604)

0.1998 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

とするとき，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) A を直交行列を用いて対角化せよ．

(大阪府立大 2016)　　(m20163605)

0.1999 3 次元の実数ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ を

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2r-3 \\ -r+6 \\ r-1 \end{pmatrix}$$

により定める．ただし，r は実数とする．

(1) $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ は一次独立（線形独立）であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が 3 次元実数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の基底でないとき，$\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ の一次結合（線形結合）で表せるか．表せるなら，$\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ の一次結合で表せ．そうでないなら，理由を述べ，$\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ の一次結合で表せないことを説明せよ．

(大阪府立大 2017)　　(m20173601)

0.2000 4 次の正方行列 A と 4 次の実数ベクトル $\boldsymbol{b}$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

により定める．

(1) 行列 A の階数を求めよ．

(2) $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を満たす 4 次の実数ベクトル $\boldsymbol{v}$ のうち，$||\boldsymbol{b}+\boldsymbol{v}||$ を最小にする $\boldsymbol{v}$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{0}$ は 4 次の零ベクトルとし，$||\boldsymbol{b}+\boldsymbol{v}||$ はベクトル $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{v}$ の大きさ（ノルム）を表すとする．

(大阪府立大 2018)　　(m20183601)

0.2001　線形写像 $f\ :\ \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ を，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & & +2x_3 & \\ 2x_1 & +x_2 & +7x_3 & +x_4 \\ x_1 & & +2x_3 & +x_4 \end{pmatrix}$$

と定める．ただし，$\boldsymbol{R}^n$ は実数を成分とする n 次元列ベクトルの全体を表す．

(1) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を満たす行列 A の第 j 列ベクトルを $\boldsymbol{a}_j$ とする．$\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4\}$ は 1 次従属であることを示せ．

(2) f の像 $\mathrm{Im}\, f = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4\}$ の次元と 1 組の基底を求めよ．

(3) f の核 $\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4 \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ の次元と 1 組の基底を求めよ．

(4) f は全射か単射か示せ．
注意：「全射」は「上への写像」，「単射」は「1 対 1 写像」とも呼ばれる．

(大阪府立大 2018)　　(m20183608)

0.2002　行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

とする．

(1) A のすべての固有値を求めよ．

(2) A の各固有値に対する固有空間の基底を 1 組ずつ求めよ．

(3) 行列 A を対角化する直交行列 P を 1 つ求め，対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ．

(大阪府立大 2018)　　(m20183609)

0.2003　2 次正方行列 A を $A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$ により定める．また，E を 2 次の単位行列とする．

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ．

(2) 行列 A を対角化せよ．

(3) 一般に，B を 2 次正方行列とし，P を 2 次の正則行列とする．さらに，$C = P^{-1}BP$ とおく．このとき，$k = 1, 2, \cdots$ に対し，

$$(B + uE)^k = P(C + uE)^k P^{-1}$$

が成り立つことを示せ．ただし，u は実数とする．

(4) $k = 1, 2, \cdots$ に対し，$(A + 7E)^k (A + 2E)^3$ を計算せよ．

(大阪府立大 2019)　　(m20193601)

0.2004　ℓ, m, n を自然数として，次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle \lim_{\ell \to \infty} \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^{2\ell}$

(2) x が有理数であるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty}\{\cos(m!\pi x)\}^{2n}\right]$

(3) x が無理数であるとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}\{\cos(m!\pi x)\}^{2n}\right]$

(大阪府立大 2019)　　(m20193605)

0.2005　$\boldsymbol{R}^3$ 上の 1 次変換 f を

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1+2x_2+4x_3 \\ 2x_1+4x_2+9x_3 \\ x_1+2x_2-8x_3 \end{pmatrix}$$

と定め，$\boldsymbol{R}^3$ の部分空間 W_1 を $W_1 = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \mid x_1 - x_3 = 0\right\}$ とする．

(1) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ をみたす行列 A を求めよ．

(2) f の像 $\mathrm{Im}\, f = \left\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3\right\}$ の次元と 1 組の基底を求めよ．

(3) f の核 $\mathrm{Ker}\, f = \left\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\right\}$ の次元と 1 組の基底を求めよ．

(4) $W_2 = W_1 \cap (\mathrm{Im}\, f)$ の次元と 1 組の基底を求めよ．

(大阪府立大 2019)　　(m20193609)

0.2006　行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とし，内積は標準内積とする．

(1) A のすべての固有値を求めよ．

(2) 固有値 0 に対する A の固有空間の正規直交基底を求めよ．

(3) 行列 A を対角化する直交行列 P を 1 つ求め，対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ．

(大阪府立大 2019)　　(m20193610)

0.2007　$c,\ w,\ x,\ y,\ z$ を実数とし, 4 次正方行列 A と 4 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -c+1 & -1 & -2c+1 \\ -1 & 2c+1 & 2 & 3c-1 \\ 2 & -c+4 & 0 & -3c+2 \\ 0 & 0 & 1 & c^2-c \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

により定める．

(1) A の行列式を求めよ．

(2) A が正則にならない c の値をすべて求めよ．

(3) c を，(2) で求めた値のうち最大のものとする．このとき，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{0}$ でない $\boldsymbol{x}$ を 1 つ求めよ．ただし，$\boldsymbol{0}$ は 4 次元零ベクトルとする．

(大阪府立大 2020)　　(m20203601)

0.2008 次の行列 X, Y の逆行列をそれぞれ求めよ（a は複素数とし空欄の成分は 0 とする.）

$$X = \begin{pmatrix} 1 & a & & \\ & 1 & a & \\ & & 1 & a \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & a & & \\ & 1 & a & \\ & & 1 & a \\ a & & & 1 \end{pmatrix}$$

(神戸大 2011) (m20113801)

0.2009 k を実数として

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

とする．$\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める.

(1) f の核 $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ の次元を求めよ.

(2) f の像 $W = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\}$ の次元を求めよ.

(神戸大 2011) (m20113802)

0.2010 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を正数からなる数列で，不等式

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成立するものとする．この時，以下の問いに答えよ.

(1) 全ての自然数 n について $a_n \leq \dfrac{a_1}{n^2}$ となることを示せ.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することを示せ.

(神戸大 2011) (m20113803)

0.2011

$$f(x) = \tan x - \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

とおく．以下の問いに答えよ.

(1) $f'(x)$ を求めよ.

(2) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f(x) > 0$ を示せ.

(3) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x < \tanh(\tan x)$ を証明せよ.

（ただし，任意の実数 t に対して，$\tanh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ である.）

(神戸大 2011) (m20113807)

0.2012 $x = x(t)$ を変数 t の C^{∞} 級関数とする．このとき，次の微分方程式を解け.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 4 = 0$$

ただし，$x(0) = \dfrac{dx}{dt}(0) = 0$ とする.

(神戸大 2012) (m20123805)

0.2013 行列 $A = \begin{pmatrix} u & -4 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}$ は正則でないという．以下の問いに答えよ．

(1) u の値を求めよ．

(2) 行列 $A+E$ の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ と対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3$ を求めよ．

(3) $B\boldsymbol{x}_1 = \sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{x}_1,\ B\boldsymbol{x}_2 = \sqrt{\lambda_2}\boldsymbol{x}_2,\ B\boldsymbol{x}_3 = \sqrt{\lambda_3}\boldsymbol{x}_3$ を満たす行列 B を求めよ．

(神戸大 2013)　　(m20133801)

0.2014 z は $|z| = 1,\ z \neq 1$ を満たす複素数とする．このとき，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n} + \cdots \tag{$*$}$$

が（ある複素数に）収束することを示したい．以下の問いに答えよ．非負整数 n に対し $S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k$ とおく．

(1) 非負整数 n に対し $|S_n| \leq \dfrac{2}{|1-z|}$ であることを示せ．

(2) $m > n$ であるような正の整数 m, n に対し次が成り立つことを示せ．

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{z^k}{k} = \sum_{k=n}^{m-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{S_m}{m} - \frac{S_{n-1}}{n}$$

(3) (1),(2) を用いて，以下の条件 (C) が成り立つことを示せ．

任意の正の実数 ε に対し，正の整数 N が存在して，
$m > n \geq N$ であるような任意の整数 m, n に対して
$\left| \sum_{k=n}^{m-1} \frac{z^k}{k} \right| < \varepsilon$ が成り立つ．　　(C)

（コーシーの収束条件定理によれば，条件 (C) は級数 $(*)$ の収束と同値であるため，(3) より級数 $(*)$ の収束が証明できることになる．）

(神戸大 2014)　　(m20143810)

0.2015 実係数行列

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ -1 & 0 & -a \\ a & -a & a^2-1 \end{pmatrix}$$

について次の問に答えよ．

(1) M の固有値 λ と固有空間 $W(\lambda\,;M)$ を求めよ．

(2) 固有空間 $W(\lambda\,;M)$ の正規直交基底を求めよ．

(神戸大 2015)　　(m20153801)

0.2016 実係数行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+t^2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

について，次の問に答えよ．

(1) $A^2,\ A^3,\ A^4$ を求めよ．

(2)
$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$$
を $B_n = x_n E + y_n A$ とするとき，
$$B = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)E + \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)A$$
を求めよ．ここで E は単位行列を表す．

(3) $B = E$ を満たすような t を求めよ．

(神戸大 2015)　　(m20153803)

0.2017 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値 λ と固有空間 $W(\lambda; A)$ を全て求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P を 1 つ求めよ．なお，${}^tPP = E$（単位行列）を満たす実正方行列 P を直交行列という．

(3) $n \in \mathbb{N}$ に対して，A^n のトレース $\mathrm{Tr}\,A^n$ を計算せよ．

(神戸大 2016)　　(m20163801)

0.2018 行列 $A = \begin{pmatrix} \dfrac{11}{6} & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ に対して，$B = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} kA^{k-1}$ とする．ただし，A^0 は単位行列 E を表すものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) B を求めよ．

(2) $(E-A)^2 B$ を計算せよ．

(神戸大 2016)　　(m20163802)

0.2019 $f(x,y) = \dfrac{\sin x}{\cos x + \cosh x}$ に対して，$\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(x,y) + \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x,y)$ を計算せよ．

ただし，$\cosh y = \dfrac{e^y + e^{-1}}{2}$ である．

(神戸大 2016)　　(m20163803)

0.2020 $D_0(x) \equiv 1,\ D_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2\cos kx\ (n \geq 1)$，$F_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x)\ (n \geq 0)$ で $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{D_n\}$ と $\{F_n\}$ を定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $D_n(x)\sin\dfrac{x}{2} = \sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right)x$ となることを示せ．

(2) $F_n(x)\sin^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2(n+1)}\Bigl\{1 - \cos(n+1)x\Bigr\} = \dfrac{1}{n+1}\sin^2\dfrac{n+1}{2}x$ となることを示せ．

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)dy = 2\pi$ となることを示せ．

(4) $0 < \delta < \pi$ なる δ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\delta \leq |y| \leq \pi} F_n(y)dy = 0$ となることを示せ．

(神戸大 2016)　　(m20163805)

0.2021 自然数 n に対して，次数 n 以下の実数係数 1 変数多項式全体からなる実ベクトル空間 P_n を考え，

$$H_n(x) = e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$$

とおく．以下の各問に答えよ．

(1) $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$ を具体的に求めよ．

(2) $H_n(x)$ が次数 n の多項式であることを示せ．

(3) $H_0(x)$, $H_1(x)$, $\cdots$, $H_n(x)$ が P_n の基底をなすことを示せ．

(4) $0 \leqq m < n$ を満たす任意の整数 m について，次の式が成り立つことを示せ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m H_n(x) e^{-x^2} dx = 0$$

(神戸大 2016)　　(m20163807)

0.2022 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めたそれぞれの固有値に対して固有ベクトル空間を求めよ．

(3) $B = P^{-1}AP$ となるような直交行列 P と対角行列 B の組を一つ求めよ．

(神戸大 2018)　　(m20183801)

0.2023 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $A = B\,{}^tB$ をみたし，すべての対角成分が正の下三角行列 B を求めよ．　ただし，${}^tB$ は B の転置行列とする．

(2) A の行列式の値を求めよ．

(3) B の逆行列を求めよ．

(4) A^{-1} の第 4 行を求めよ．

(神戸大 2018)　　(m20183802)

0.2024 xy 平面の第 1 象限（$x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ を満たす領域）において，2 本の曲線 $xy = 1$, $xy = 9$ と 2 本の直線 $y = x$, $y = 4x$ で囲まれた領域を R とする．以下の各問に答えよ．

(1) R の概形を書け．

(2) 変数変換 $x = \dfrac{u}{v}$, $y = uv$ により R と 1 対 1 に対応する uv 平面の第 1 象限（$u \geq 0$ かつ $v \geq 0$ を満たす領域）に含まれる領域 S を求め，S の概形を書け．

(3) (2) の変数変換を用いて，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_R \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right) dxdy$$

(神戸大 2019)　　(m20193804)

0.2025 実数 a, b に対し 3 次実正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A が相異なる 3 つの固有値をもつための a, b の条件を求めよ．

(3) (2) の条件が成り立つとき，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を一つ求めよ．また，そのときの $P^{-1}AP$ を求めよ．

(神戸大 2021)　　(m20213801)

0.2026 実 4 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ について，次の問いに答えよ．

(1) 4 つのベクトルの組

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が $\mathbb{R}^4$ の基底を成すか判定せよ．

(2) 0 でない実数 a, b, c, d に対し，4 つのベクトルの組

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$$

が生成する $\mathbb{R}^4$ の部分空間の次元を求めよ．

(神戸大 2021)　　(m20213802)

0.2027 S を 2×2 実対称行列とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 行列 S が正定値（すべての固有値が正）のとき，S の $(1,1)$ 成分，$(2,2)$ 成分は 0 でないことを示せ．

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-x_1^2 - x_2^2)\, dx_1\, dx_2$ を極座標に変換することにより求めよ．

(3) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}x^T Sx\right) dx_2$ を x_1 の関数として求めよ．ただし，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ であり，S は正定値とする．

(神戸大 2021)　　(m20213803)

0.2028 (1) a を実数の定数とする．x, y の関数

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} + axy + \frac{y^4}{4}$$

の停留点 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ かつ } \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ となる点} \right)$ を求め，それらが f の極大値を与える，極小値を与える，極値を与えないのどれであるか判定せよ．

(2) $x,\ y$ の関数 $u,\ v$ を

$$u = xy$$
$$v = e^{x^2+y^2}$$

で定める．$x,\ y$ の関数

$$g(x,y) = \sin(uv)$$

に対して，$\dfrac{\partial g}{\partial x},\ \dfrac{\partial g}{\partial y}$ を $x,\ y$ で表せ.

(神戸大 2022)　　(m20223805)

0.2029 a を実数とし,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

とする.

(1) $B = P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P が存在するための必要十分条件を，a を用いて表せ.

(2) (1) の条件が成り立つとき，$B = P^{-1}AP$ となる直交行列 P と対角行列 B の組を一つ求めよ.

(神戸大 2022)　　(m20223806)

0.2030 行列 A とベクトル $\boldsymbol{u}$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & 1 & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{2} & 0 & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

で定める．次の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{u}$ は A の固有ベクトルであることを示せ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正方行列 P を 1 つ求めよ.

(3) 上記の P に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} P^{-1}A^nP$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ.

(神戸大 2023)　　(m20233801)

0.2031 x, y の 2 変数関数 $f(x,y)$ に対し,

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

と定める．$f(x,y)$ が次の関数のときに $\triangle f$ を求めよ．ただし，以下において，i は虚数単位である.

(1) $f(x,y)$ は $(x^2 - iy^2)(1+i) + e^{x+iy}$ の実部.

(2) $f(x,y)$ は $\dfrac{1}{x+iy}$ の虚部.

(3) $f(x,y) = 7x^6y - 35x^4y^3 + 21x^2y^5 - y^7$

(4) $f(x,y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{20}(-1)^k \begin{pmatrix} 40 \\ 2k \end{pmatrix} x^{40-2k}y^{2k}$

(神戸大 2023)　　(m20233803)

0.2032 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ において，すべての成分 a, b, c, d が正数のとき，次の問いに答えよ.

(1) A は異なる実数の固有値を持つことを示せ.

(2) 固有ベクトルとして少なくとも一つは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad (x > 0,\ y > 0)$ となるベクトルがとれることを示せ.

(岡山大 2011) (m20114003)

0.2033 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ.

(1) A の逆行列を求めよ.

(2) A の固有値をすべて求めよ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P を求めよ.

(岡山大 2012) (m20124003)

0.2034 2 次正方実行列 A であって ${}^tA = A$ を満たす行列全体からなる実ベクトル空間を V とする．ここで，${}^tA$ は A の転置行列を表す.

(1) V は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ を基底として持つことを示せ.

(2) V の元 A に対して

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

を対応させる写像 f は，V 上の線形変換であることを示せ．また，f の階数を求めよ.

(岡山大 2012) (m20124004)

0.2035 a を実数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を考える．以下の問いに答えよ.

(1) $A - E$ は逆行列を持たないことを示せ．（ただし，E は単位行列とする.）

(2) ある正の実数 b に対して，$A - bE$ も $A + bE$ も逆行列を持たないとする．このとき a の値を求めよ.

(3) ある正則な行列 P により

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

であるとする．このとき a の値を求めよ．また，このような行列 P を一つ求めよ.

(岡山大 2013) (m20134003)

0.2036 行列 X の階数を $\mathrm{rank}(X)$ と表すことにする．A, B を n 次正方行列としたとき以下の問いに答えよ.

(1) 不等式

$$\mathrm{rank}(AB) \leqq \mathrm{rank}(B)$$

を示せ．また，A が正則ならば等号が成立することを示せ．

(2) $AB = O$（ゼロ行列）のとき，不等式

$$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) \leqq n$$

を示せ．

(3) $n = 3$ とし，$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ とおく．B の階数を求めよ．さらに

$$\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(A) - 2$$

を満たす A は存在しないことを示せ．

(岡山大 2013)　　(m20134004)

0.2037 3 次元実ベクトルが空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対し，線形変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が $f(\boldsymbol{a}) = 2\boldsymbol{a}$, $f(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$, $f(\boldsymbol{c}) = -\boldsymbol{c}$ を満たすとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の固有多項式を求めよ．

(2) $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}\}$ は : $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間であることを示せ．

(3) W の次元を求めよ．

(4) ベクトル $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$ が，無限個の自然数 n に対して不等式

$$||f^n(\boldsymbol{x})|| < 2^n ||\boldsymbol{x}||$$

を満たすための実数 x, y, z の条件を求めよ．ただし f^n は合成変換 $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{ 個}}$ を表し，$|| \cdot ||$ はベクトルの長さを表すものとする．

(岡山大 2014)　　(m20144003)

0.2038 (1) 不等式 $0 \leqq t - \log(1+t) \leqq \dfrac{t^2}{2} \quad (t \geqq 0)$ が成り立つことを示せ．

(2) 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

は $K = 1$ のときに発散し，$k = 2$ のとき収束することを示せ．

(3) 全ての $x > 0$ に対して，級数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

は発散することを示せ．

(4) 全ての $x \geqq 0$ に対して，級数

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \right\}^2$$

は収束することを示せ.

(岡山大 2015)　　(m20154002)

0.2039 $\mathbb{R}^4$ 上の線形変換 f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ で定める．ただし，A は次で与えられる行列とする.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の階数（ランク）を求めよ.

(2) 写像 f の像 $\mathrm{Im}(f)$ の基底を一組求めよ.

(3) 写像 f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の次元を求めよ.

(4) $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$ であるか判定せよ.

(岡山大 2015)　　(m20154003)

0.2040 3 次正方行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad B = {}^tAA$$

により与えられる．ここで，${}^tA$ は A の転置行列である．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) A および B の行列式を計算せよ.

(2) $P^{-1}BP$ が対角行列となるような直交行列 P を一つ求めよ.

(3) $B = C^2$ となる対称行列 C を求めよ.

(4) C は正則行列であり，AC^{-1} は直交行列であることを示せ.

(岡山大 2015)　　(m20154004)

0.2041 関数 $f_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ を

$$f_n(x) = c_n \left(\frac{1 + \cos x}{2}\right)^n$$

で定める．ただし，c_n は正の定数で

$$\int_0^{\pi} f_n(x)dx = 1$$

となるように選ぶ．以下の問いに答えよ.

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{1 + \cos x}{2}\right)^n \sin x dx$$

を求めよ.

(2) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $c_n < \dfrac{n+1}{2}$ が成り立つことを示せ.

(3) $0 < x \leqq \pi$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ.

(岡山大 2016)　　(m20164001)

0.2042 実数を成分とする 3 次正方行列 A で次の条件を満たすものを考える.

$$(*) \qquad A^2 \neq O, \qquad A^3 = O$$

以下の問いに答えよ.

(1)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると, B は上記の条件 $(*)$ を満たすことを示せ.

(2) $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $A^2\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ が存在することを示せ.

(3) 上記 (2) における $\boldsymbol{u}$ に対して, $\boldsymbol{u}$, $A\boldsymbol{u}$, $A^2\boldsymbol{u}$ は 1 次独立であることを示せ.

(4) ある正則行列 P を用いて

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

と表されることを示せ.

(岡山大 2016)　　(m20164003)

0.2043 $t \in \mathbb{R}$ に対して, 3 次正方行列 A を次で定める.

$$A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ.

(1) A の行列 $\det A$ を t の多項式で表し, かつ, $\det A = 0$ となる t を求めよ.

(2) $\mathrm{rank}(A)$ を t の値で場合分けして求めよ.

(3) 3 個の列ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ を次のようにとる.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

そして, 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a} \rangle\, \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{b} \rangle\, \boldsymbol{b} + \langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{c} \rangle\, \boldsymbol{c}\,, \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$$

と定める. ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は, $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1,\ x_2,\ x_3,)$, $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1,\ y_2,\ y_3,) \in \mathbb{R}^3$ に対して $\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ で与えられる $\mathbb{R}^3$ 上の標準内積である.
$\mathrm{rank}(f)$ を t の値で場合分けして求めよ.

(岡山大 2016)　　(m20164004)

0.2044 (1) 関数 $g(x) = \sqrt{1+x}$ のマクローリン展開は

$$g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}n} \begin{pmatrix} 2n-2 \\ n-1 \end{pmatrix} x^n$$

であることを示せ. ただし, $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ とする. また, 右辺の無限級数の収束半径は 1 であることを示せ.

(2) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

で定めるとき，$f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} x^n$$

であることを示せ.

(3) 上の問い (2) の $f(x)$ のマクローリン展開について，その収束半径を求めよ.

(岡山大 2017)　　(m20174001)

0.2045 初期値 $F_1 = 1,\ F_2 = 1$ と漸化式 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ で定義される数列 $\{F_n\}$ をフイボナッチ数列という．例えば，$F_3 = F_2 + F_1 = 2,\ F_4 = F_3 + F_2 = 3$ である．このとき，次の問いに答えよ.

(1) F_6 を求めよ．また，行列式

$$\det \begin{pmatrix} F_4 & F_5 \\ F_5 & F_6 \end{pmatrix}$$

の値を求めよ.

(2) $n \geqq 1$ に対して，2 次の正方行列 A_n を

$$A_n = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{pmatrix}$$

によって定めるとき，$\det A_n = (-1)^{n-1}$ が成り立つことを示せ.

(3) $n \geqq 1$ に対して，3 次の正方行列 B_n を

$$B_n = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \\ F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} \\ F_{n+2} & F_{n+3} & F_{n+4} \end{pmatrix}$$

によって定めるとき，$\det B_n = 0$ が成り立つことを示せ.

(4) 上の問い (3) で定義した B_n の余因子行列を $\tilde{B}_n$ とかくとき，$n \geqq 1$ に対して，$\det \tilde{B}_n = 0$ が成り立つことを示せ.

(岡山大 2017)　　(m20174003)

0.2046 (1) 3 次正方行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

のすべての固有値および各固有値に属する固有ベクトルを求めよ.

(2) $x,\ y,\ z$ を変数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x - y - 2z = a \\ 2x + y + z = b \\ 3y + 5z = c \end{cases}$$

が解をもつための $a,\ b,\ c$ の条件を答えよ．また，その一般解を求めよ.

(岡山大 2017)　　(m20174004)

0.2047 標準内積の入った線形空間 $\mathbb{R}^4$ における次のベクトルを考える.

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_4=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を W_1, ベクトル $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を W_2 とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 部分空間 W_1+W_2 の直交補空間の次元を求めよ.

(2) $W_1\cap W_2$ の基底を一組求めよ.

(3) W_1 の直交補空間を $W_1^{\perp}$ とする. ベクトル

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4$$

の直和分解 $\mathbb{R}^4=W_1\bigoplus W_1^{\perp}$ に伴う分解を

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\quad\left(\boldsymbol{y}\in W_1,\ \boldsymbol{z}\in W_1^{\perp}\right)$$

とし, ベクトル $\boldsymbol{y}$ を $a\boldsymbol{v}_1+b\boldsymbol{v}_2$ と表す. 実数 $a,\ b$ を $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ を用いて表せ.

(広島大 2011) (m20114107)

0.2048 以下の問いに答えよ.

(1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ が発散することを示せ.

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log(n+1)}$ の収束・発散を調べよ.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\log(1+x)}\right)$ を求めよ.

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ を求めよ.

(広島大 2012) (m20124102)

0.2049 以下の問いに答えよ.

(1) 次の広義重積分の値を求めよ.

$$\iint_D\frac{1}{(x^2+y^2)\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\,dxdy$$

ただし, 積分領域 D を次で定める.

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2>e^2\}$$

(2) 関数

$$f(x,y)=\frac{1}{(x^2+y^2)\left\{\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^{1/2}+\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\right\}}$$

についての広義重積分 $\displaystyle\iint_E f(x,y)dxdy$ が収束することを示せ. ただし. 積分領域 E を次で定める.

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2>1\}$$

(広島大 2012)　　(m20124106)

0.2050　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ を対角化せよ．すなわち，$P^{-1}AP = D$ を満たす正則行列 P および対角行列 D を一組求めよ．

(広島大 2013)　　(m20134103)

0.2051　$\vec{F} = \begin{pmatrix} a_1 & b_3 & b_2 \\ b_3 & a_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ，$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$ とするとき，以下の経路に沿って

$\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(X,Y,Z)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ を求めよ．　$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, X, Y, Z$ はすべて実定数とする．

(1)　$(0,0,0) \to (X,0,0) \to (X,Y,0) \to (X,Y,Z)$ ．

(2)　$(0,0,0)$ と (X,Y,Z) を直線上で結ぶ線分 ．

(広島大 2013)　　(m20134104)

0.2052　3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ を求めよ．

(2)　$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ を求めよ．

(広島大 2014)　　(m20144101)

0.2053　行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．

(1)　A の逆行列が存在する条件を求めよ．

(2)　(1) が満たされるとき，A の逆行列を求めよ．

(広島大 2014)　　(m20144104)

0.2054　2 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ において，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ で表す．一つの単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ を固定して，写像 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を次のように定義する．

$$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{u}$$

以下の問いに答えよ．

(1)　写像 T は線形写像であることを示せ．

(2)　ベクトル $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{u}$ と平行であるとき，$T(\boldsymbol{x})$ を求めよ．また，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ が直交するとき，$T(\boldsymbol{x})$ を求めよ．$\boldsymbol{u}$ を用いない形で表すこと．

(3)　ベクトル $\boldsymbol{u}$ と直交する単位ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とする．$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ とするとき，$T(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の一次結合で表し，$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{x}$, $T(\boldsymbol{x})$ の関係を図示せよ．

(4)　ベクトル $\boldsymbol{u}$ を

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

と表すとき，写像 T の標準基底に関する表現行列 A を求めよ．

(広島大 2014)　　(m20144107)

0.2055 一般項 $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ をもつ数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に関して，以下の問いに答えよ．

(1) $n = 1, 2, \cdots$ および $k = 0, \cdots, n$ に対し，${}_nC_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ とする．このとき，不等式

$$\frac{{}_nC_k}{n^k} \leq \frac{{}_{n+1}C_k}{(n+1)^k}$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n = 1, 2, \cdots$ に対し，$a_n < a_{n+1}$ を示せ．

(3) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界であることを示せ．

(4) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ．

(広島大 2014)　　(m20144108)

0.2056 実数列 $\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体のなす実ベクトル空間を V とし，級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} {a_i}^2$ が収束するような実数列 $\{a_n\}$ 全体の集合を W とする．以下の問いに答えよ．

(1) W が V の部分ベクトル空間をなすことを示せ．

(2) $\{a_n\}$, $\{b_n\} \in W$ に対して，級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ が絶対収束することを示せ．

(3) $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ は W 上の内積であることを示せ．

(4) $a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, $b_n = \left(\dfrac{5}{7}\right)^n$ のとき，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の交角 θ を求めよ．ただし，内積空間の元 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対してノルムを $||\boldsymbol{a}|| := \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$ と書くとき，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の交角とは $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ||\boldsymbol{a}||\ ||\boldsymbol{b}|| \cos\theta$ を満たす実数 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ のことである．

(広島大 2014)　　(m20144109)

0.2057 実数 ℓ に対して $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ を次で定める．

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^{\ell}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．

(1) f が原点 $(0,0)$ において連続であるための ℓ の条件を求めよ．

(2) f が原点 $(0,0)$ で x について偏微分可能であるための ℓ の条件を求めよ．

(3) $\ell = 1$ のとき，極限

$$J = \lim_{R\to\infty} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} f(x,y)\,dxdy$$

を考える．変数変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ により，J は

$$J = \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \frac{\sin\left(r^4 \varphi(\theta)\right)}{r} dr \right) d\theta$$

となることを示せ．ここで，$\varphi(\theta) = \cos^4\theta + \sin^4\theta$ である．

(4) $\ell = 1$ のとき (3) の極限 J が存在することを示し，その値を求めよ．
その際，広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ は収束し，その値が $\dfrac{\pi}{2}$ であることを用いても良い．

(広島大 2014)　　(m20144110)

0.2058 $2\times\ 2$ 行列 A は，固有値 1 に属する固有ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ と 固有値 4 に属する固有ベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を持つとする．また，$2\times\ 2$ 行列 B を $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ により定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $2\times\ 2$ 行列 P で $A = PBP^{-1}$ が成り立つようなものをひとつ見つけよ．（答だけで良い.）

(2) 行列 A を求めよ．

(3) $2\times\ 2$ 行列 X で $X^2 = B$ となるようなものを全て求めよ．

(4) $2\times\ 2$ 行列 Y で $Y^2 = A$ となるようなものはいくつあるか．また，そのような Y をひとつ見つけよ．

(5) $2\times\ 2$ 行列 Z で $Z^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるようなものを全て求めよ．

(広島大 2015)　　(m20154101)

0.2059 $a \in \mathbb{R}$ に対し

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

で定義される $\mathbb{R}^4$ の線形変換 f を考える．以下の問いに答えよ．

(1) f の像および核の次元を求めよ．

(2) $a = 0$ のとき，f の逆写像に対応する行列を求めよ．

(3) 次の基底に関する f の表現行列を求めよ．

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(広島大 2015)　　(m20154103)

0.2060 実行列　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　を考える．以下の問いに答えよ．

(1) A の階数を求めよ．

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) 実 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の中で，次の図形 S を考える．

$$S = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \boldsymbol{v} \cdot A\boldsymbol{v} = \sqrt{2} \right\}$$

ただし，$\boldsymbol{v} \cdot A\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{v}$ との内積を表す．S の概形を図示せよ．

(4) S の点で，原点との距離が最小のものをすべて求めよ．

(広島大 2016)　　(m20164101)

0.2061　実行列　$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 9 \\ -2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$　を考える．以下の問いに答えよ．

(1)　A の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(2)　A^{-1} の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(3)　実 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の基底 $\{\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}\}$ を任意にとり，$\mathbb{R}^3$ のベクトルの列 $\{\boldsymbol{v}_n\}$ に対して $\boldsymbol{v}_n = a_n\boldsymbol{x} + b_n\boldsymbol{y} + c_n\boldsymbol{z}$ とする．ただし，a_n, b_n, c_n は実数である．このとき，$\{\boldsymbol{v}_n\}$ が有界であることと，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ がすべて有界数列であることとが同値であることを示せ．ただし，$\{\boldsymbol{v}_n\}$ が有界であるとは，$\boldsymbol{v}_n$ の長さからなる数列 $\{||\boldsymbol{v}_n||\}$ が有界であることと定義する．

(4)　$W = \left\{\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \{A^n\boldsymbol{w} \mid n = 1, 2, 3, \cdots\} \text{ は有界} \right\}$ とおく．W が $\mathbb{R}^3$ の部分線形空間になることを示し，その基底を求めよ．

(広島大 2016)　　(m20164105)

0.2062　c を実数とし，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & c & 5 \\ 3 & 2 & 9 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$c = 6$ のとき，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解を求めよ．

(2)　方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つための c の条件を求めよ．

(3)　方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持たないとき，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の一般解を求めよ．

(広島大 2017)　　(m20174101)

0.2063　行列 A，ベクトル $\boldsymbol{b}$ を

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とし，写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を次のように定義する．

$$f(\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \cdot (A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})$$

ただし，$\cdot$ はベクトルの内積を表す．以下の問いに答えよ．

(1)　A の階数を求めよ．

(2)　$f(\boldsymbol{x})$ の最小値を求めよ．

(3)　A の固有値 0 に対する固有ベクトルを一つ求めよ．

(4)　$f(\boldsymbol{x})$ の最小値を与える $\boldsymbol{x}$ の中で最も原点に近い $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(広島大 2017)　　(m20174103)

0.2064　a, b を実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & a & -6 \\ 2 & -6 & b \end{pmatrix}$ によって表される $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像をそれぞれ f, g とおく．以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求めよ.

(2) g の核 $\mathrm{Ker}\, g$ の次元を求めよ.

(3) $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$ となるために a, b が満たすべき必要十分条件を求めよ.

(広島大 2018)　　(m20184101)

0.2065 A, B を n 次正方複素行列とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ i & -1 & i \end{pmatrix}$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ. ただし i は虚数単位である.

(2) ある n 次正則行列 P が存在して $P^{-1}AP = B$ が成り立つとき, A と B の固有値の集合は一致することを示せ.

(3) A が正則であるとき, AB と BA の固有値の集合は一致することを示せ.

(4) $AB = BA$ が成り立つとき, A と B は少なくとも 1 つの共通の固有ベクトルを持つことを示せ.

(広島大 2018)　　(m20184105)

0.2066 3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

(1) A が正則行列であることを示し, A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2) A のすべての固有値を求め, さらにそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを一つずつ求めよ.

(3) 3 次正則行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列になるものを一つ求め, さらにそのときの対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ.

(4) $B = A^{-1} + A^2 + A^3$ とおく. B のすべての固有値を求め, さらにそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを一つずつ求めよ.

(広島大 2021)　　(m20214102)

0.2067 複素数を成分とする 2 次正方行列全体のなす集合を $M(2, \mathbb{C})$ で表す. E_2 を 2 次の単位行列とする. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C})$ に対し, A の随伴行列 A^* を

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}$$

により定める. ただし, 複素数 z に対し $\overline{z}$ は z の複素共役を表す. また

$$H(2) = \{A \in M(2, \mathbb{C}) \mid A^* = A\}$$
$$U(2) = \left\{A \in M(2, \mathbb{C}) \;\middle|\; P \text{ は正則で } \quad P^{-1} = P^*\right\}$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) $A \in H(2)$ とする. A の固有値は実数であることを示せ.

(2) $A \in H(2)$ とする. A がただ一つの固有値をもつならば, ある実数 λ が存在して $A = \lambda E_2$ となることを示せ.

(3) $A \in H(2)$ は異なる二つの固有値をもつとする．$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ をそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルとするとき，

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$$

が成り立つことを示せ．ただし，(,) は $\mathbb{C}^2$ の標準エルミート内積である．

(4) $A \in H(2)$ に対し，ある $P \in U(2)$ が存在して P^*AP が対角行列となることを示せ．

(広島大 2021)　　(m20214104)

0.2068 次の行列を計算せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^5$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$　　ただし，n は自然数とする．

(広島大 2021)　　(m20214109)

0.2069 次の微分方程式を解け．

$$3\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 9 = 0$$

(広島大 2022)　　(m20224104)

0.2070 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ とする．

(1) $(x, y) \neq (0, 0)$ において，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(2) $(x, y) \neq (0, 0)$ において，$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ 方向の微分係数（方向微分係数）を求めよ．

(3) $(x, y) = (0, 0)$ において，z が全微分可能でないことを示せ．

(広島市立大 2011)　　(m20114202)

0.2071 次の 3 次正方行列 A について以下の問に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の各固有値に対応する固有ベクトル空間の基底をそれぞれ求めよ．

(3) $D = P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P およびそれに対応する D を求めよ．

(4) 問 (3) で求めた D に対し，D^n を求めよ．ただし，n は正の整数とする．

(5) A^n を求めよ．ただし，n は正の整数とする．

(広島市立大 2011)　　(m20114204)

0.2072 座標平面上に楕円 C : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を考える．また，$\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ を平面ベクトル全体のなす空間の正規直交基底とする．原点 O を通り方向ベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ の直線が楕円 C と交わる点を P，原点 O を通り方向ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ の直線が楕円 C と交わる点を Q とすると，

$$\frac{1}{||\overrightarrow{OP}||^2} + \frac{1}{||\overrightarrow{OQ}||^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

が成り立つことを証明せよ．

(広島市立大 2011)　　(m20114205)

0.2073 極座標 (r, θ) で表示して $r = 1 + \cos\theta$ で表わされる曲線を考える．極座標で $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ と表わせるこの曲線上の点 A での接線の方程式を求めよ．

(広島市立大 2012) (m20124203)

0.2074 2 変数関数 $f(x, y) = \sin(x + 2y)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) f の勾配ベクトル $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ を求めよ．

また，勾配ベクトルの具体的な値を $(0, 0)$, $(0, \pi/4)$, $(0, \pi/2)$ において求めよ．

(2) 座標平面上の 4 点 $(0, 0)$, $(0, \pi/2)$, $(\pi, 0)$, $(\pi, -\pi/2)$ を頂点とする平行四辺形が定める領域を D とする（図 1）．2 重積分 $\displaystyle\iint_D |f(x, y)|\, dxdy$ の値を求めよ．

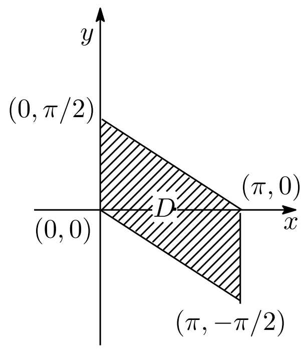


図 1

(広島市立大 2012) (m20124204)

0.2075 次の 3 次正方行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の各固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ．

(3) $D = P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．

(4) (3) で求めた P に対し，P^{-1} を求めよ．

(5) (3) で求めた P に対応する D を示せ．

(広島市立大 2012) (m20124205)

0.2076 次の 3 次正方行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の各固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ．

(3) $D = P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．

(4) 問 (3) で求めた P に対応する D を示せ．

(広島市立大 2013) (m20134204)

0.2077 次の 3 つのベクトルに垂直な単位ベクトルを求めなさい.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(山口大 2014)　　(m20144302)

0.2078 以下に示す行列 A について，行列式 $|A|$ の値を求めなさい．さらに逆行列 A^{-1} の $(1,1)$ 成分を求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

(山口大 2015)　　(m20154302)

0.2079 次に示す行列 A の固有値および対応する固有ベクトルを求めなさい．固有ベクトルは，いずれか一つの固有値に対して求めればよい.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(山口大 2016)　　(m20164302)

0.2080 $y = \dfrac{1}{3}x\sqrt{x} + 3$ に関する次の問いに答えなさい.

(1) $\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ を求めなさい.

(2) 区間 $(4 \leq x \leq 8)$ における曲線 y の長さ L を求めなさい.

(山口大 2016)　　(m20164304)

0.2081 次の初期値問題について答えなさい.

(1) 次の微分方程式の一般解を求めなさい.
$$\frac{dy}{dx} = -y\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

(2) さらに，次の式を満足する上記 (1) で求めた一般解の特殊解を求めなさい.
$$y(0) = \frac{1}{2}$$

(山口大 2017)　　(m20174301)

0.2082 次に示す行列 A の固有値が全て負の実数となるとき，x のとりうる範囲を求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & x^2 - 1 & -1 \\ 0 & 0 & x - 0.5 \end{pmatrix}$$

(山口大 2017)　　(m20174302)

0.2083 次の行列 A を対角化した行列 B を求めなさい．また，A を対角化させる正則行列 C を求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(山口大 2018)　　(m20184302)

0.2084 $0 \leqq a \leqq 1$ に対して, 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a & 1 & -1 \\ 0 & 9a & 3 \\ \frac{3}{4}a & 1 & -a \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．ここで，$\det(M)$ は正方行列 M の行列式を表す.

(1) $\det(A)$ を求めよ.

(2) $f(a) = \det(A)$ とする．$f(a)$ のグラフを図示せよ.

(3) n を自然数とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \det(A^n)$ を求めよ.

(徳島大 2011) (m20114401)

0.2085 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $A = B^2$ となる行列 B をすべて求めよ.

(徳島大 2012) (m20124401)

0.2086 連立微分方程式 $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \cos t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ の一般解を求めよ.

(徳島大 2012) (m20124404)

0.2087 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) $A\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる列ベクトル $\boldsymbol{p}$ の中で，大きさ $|\boldsymbol{p}|$ が最小となる $\boldsymbol{p}$ を求めよ．また，そのときの $|\boldsymbol{p}|$ を求めよ.

(徳島大 2012) (m20124405)

0.2088 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 固有値を求めよ.

(2) 各固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(3) 直交行列 P を求めて ${}^tPAP$ を対角行列にせよ．ここで，${}^tP$ は P の転置行列を表す.

(徳島大 2013) (m20134401)

0.2089 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ.

(1) A と B の積 AB を求めよ.

(2) $AB\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$ を満たす定数 α を求めよ.

(3) $B^{-1}A^{-1}\boldsymbol{x} = \beta\boldsymbol{x}$ を満たす定数 β を求めよ．

(徳島大 2014)　　(m20144401)

0.2090 $0 < a < \dfrac{1}{2}$ とし，xy 平面上の領域を $D = \left\{(x, y)\ ;\ y \leqq\ x \leqq \dfrac{1}{2},\ a \leqq\ y \leqq \dfrac{1}{2}\right\}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) D を図示せよ．

(2) $I_a = \displaystyle\iint_D \cos\left(\pi(x-a)^2\right) dxdy$ を求めよ．

(3) (2) の I_a について，$\displaystyle\lim_{a\to\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - a\right)^{-2} I_a$ を求めよ．

(徳島大 2014)　　(m20144403)

0.2091 次の問いに答えよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,　$B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ とする．B が A の逆行列となるような a を求めよ．

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,　$B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & \dfrac{1}{2} & c \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$ とする．B が A の逆行列となるような $a,\ b,\ c$ を求めよ．

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(徳島大 2015)　　(m20154401)

0.2092 $f(x) = x\log\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$　$(x > 0)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\alpha = \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ とする．α を求めよ．

(2) (1) で求めた α に対して，$\beta = \displaystyle\lim_{x\to\infty}\Big(f(x) - \alpha x\Big)$ とする．

$t = \dfrac{1}{x}$ とおくと，$x \to \infty$ のとき $t \to +0$ であることを利用して，β を求めよ．

(3) (1),(2) で求めた $\alpha,\ \beta$ に対して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - (\alpha x + \beta)}{\dfrac{1}{x}}$ を求めよ．

(徳島大 2015)　　(m20154402)

0.2093 $D = \{(x, y)\ :\ x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0,\ x + y \geqq\ 1\}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $u = x + y,\ v = \dfrac{y}{x+y}$ とおく．x, y を u, v の式で表せ．また，行列式 $J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 v\sin(\pi v)dv$ を求めよ．

(3) $f(x,y) = \dfrac{y}{x+y}e^{-(x+y)}\sin\left(\dfrac{\pi y}{x+y}\right)$ に対して，$I = \displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ を求めよ．ここで，(1) の変換により $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dv \int_1^\infty f\big(x(u,v),\ y(u,v)\big)|J(u,v)|du$ となることを用いてよい．

(徳島大 2015)　　(m20154403)

0.2094　3 次実正方行列 A は，-2 と 7 を固有値にもつ．$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ は固有値 -2 に対応する A の固有ベクトル，$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 7 に対応する A の固有ベクトルである．3 つのベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ が，どの 2 つも直交するとき，次の問いに答えよ．

(1) 実数 a, b, c を求めよ．

(2) $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ を並べた 3 次正方行列を $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix}$ とする．P^{-1} を求めよ．

(3) A を求めよ．

(徳島大 2018)　　(m20184401)

0.2095　関数 $f(x)$ は，$\sin f(x) = \cos^2 x$, $0 \leqq f(x) \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす．

(1) $f(0)$, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ をそれぞれ求めよ．

(2) $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ をそれぞれ求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f'(x)$ を求めよ．

(徳島大 2018)　　(m20184402)

0.2096　べき級数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の項別微分を求めよ．

(2) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ は収束することを示せ．

(3) $f(x)$ は開区間 $(-1,1)$ で収束することを示せ．

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} f(x)dx$ の値を求めよ．

(高知大 2011)　　(m20114502)

0.2097　2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とする．A の固有値は τ と $\overline{\tau} = -\dfrac{1}{\tau}$ であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\begin{pmatrix} -1 \\ \tau \end{pmatrix}$ は固有値 τ と $\overline{\tau}$ に対する固有ベクトルで，単位ベクトルとなることを示せ．

(3) $\boldsymbol{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_n = A^n \boldsymbol{v}_0$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とするとき，$\boldsymbol{v}_n = \dfrac{\tau^n \boldsymbol{u}_1 - \overline{\tau}^{n-1}\boldsymbol{u}_2}{\sqrt{1+\tau^2}}$ を示せ．

(高知大 2011)　　(m20114503)

0.2098 線形写像 $f\,:\,\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} \delta_{i,1} \\ \delta_{i,2} \\ \delta_{i,3} \\ \delta_{i,4} \end{pmatrix}$ に対して $f(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{k=1}^{i} i\boldsymbol{e}_k$ となっている．ただし，$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ である．このとき次の問いに答えよ．

(1) $f(\boldsymbol{e}_4)$ はどんなベクトルか，成分表示せよ．

(2) $f(\boldsymbol{e}_1)$，$f(\boldsymbol{e}_2)$，$f(\boldsymbol{e}_3)$，$f(\boldsymbol{e}_4)$ は 1 次独立であることを示せ．

(3) $\mathbb{R}^4$ の基底を $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_4$，$\boldsymbol{e}_4$ とするとき．f の表現行列 A を求めよ．

(4) A は正則であることを示せ．

(5) f の逆写像はあるか．あれば求め，無ければその理由を述べよ．

(高知大 2011)　　(m20114504)

0.2099 a を正の実数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ a & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 行列 A の行列式の値が 6 となるような a の値を求めよ．

(2) 行列 A の固有値が二つの実数となるような a の値を求めよ．

(3) (2) で求めた a に対し，行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(高知大 2011)　　(m20114505)

0.2100 3 次実正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．ただし，a は定数とする．

(1) A の階数 (rank A) を求めよ．

(2) A が正則行列であるための定数 a に対する条件を求めよ．

(3) 方程式

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ の他にも解をもつための定数 a に対する条件を求め，その条件のもとで一般解を求めよ．

(高知大 2012)　　(m20124503)

0.2101 2 次正方行列 A と 4 次正方行列 B を

$$A = \begin{pmatrix} -27 & 75 \\ -10 & 28 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -27 & 75 & 0 & 0 \\ -10 & 28 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A の行列式を求めよ．

(2) B の行列式を求めよ．

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(4) B の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(高知大 2012)　　(m20124504)

0.2102　4 次行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(高知大 2012)　　(m20124505)

0.2103　次の平面の線形変換に対応する行列を求めよ．求める過程も述べよ．

(1) 直線 $2x + y = 0$ に関する対称移動となる変換．

(2) 原点を中心として時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転する変換．

(3) 直線 $x + 2y = 0$ へ正射影する変換．

(4) $y = x$ 上の各点 (p, q) は同じ直線上の点 $(2p, 2q)$ に移る．また，$y = -x$ 上の各点 (p, q) は同じ直線上の点 $\left(\dfrac{p}{2}, \dfrac{q}{2}\right)$ に移る．これらの 2 条件を満たす変換．

(高知大 2013)　　(m20134503)

0.2104　$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) J のすべての固有値を求めよ．

(2) J の異なる固有値に対して，それぞれの固有空間の基底を求めよ．

(3) J は対角化可能かどうか，理由をつけて答えよ．また　対角化可能である場合には，$P^{-1}JP$ が対角行列となるような P を求めよ．

(高知大 2013)　　(m20134504)

0.2105　行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) $A = PDP^{-1}$ を満たす正則行列 P とその逆行列 P^{-1}，および対角行列 D を求めよ．

(3) 正の整数 n に対し，A^{2n} を求めよ．

(高知大 2013)　　(m20134505)

0.2106　関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{x^2} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $x \neq 0$ のとき，$f'(x)$ を求めよ．

(2) 任意の実数 x に対して，$|f(x)| \leqq x^2$ であることを示せ．

(3) $f(x)$ は $x=0$ で微分可能かどうかを理由を挙げて答えよ.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xf'(x)$ を求めよ.

(高知大 2014)　　(m20144501)

0.2107 実数を成分とする n 次正方行列全体の集合を $M_n(\mathbb{R})$ とおく. $M_n(\mathbb{R})$ は通常の和とスカラー倍で $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になっている. $M_n(\mathbb{R})$ の元 A に対し,

$$L(A) = \{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$$

とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $L(A)$ は $M_n(\mathbb{R})$ の部分空間であることを示せ.

(2) $L(A)$ は行列の積について閉じていること, つまり任意の $B, C \in L(A)$ に対し, $BC \in L(A)$ となることを示せ.

(3) $n=2$ として, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の場合にベクトル空間 $L(A)$ の基底を 1 組求め, $L(A)$ の次元を答えよ.

(高知大 2014)　　(m20144504)

0.2108 4 次の正方行列 A が 2 次の正方行列 P, Q, R を用いて

$$A = \begin{pmatrix} P & Q \\ O_2 & R \end{pmatrix}$$

のように表されているとする. ただし, O_2 は $2\times\ 2$ の零行列である. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) A が正則なら, P, R も正則であることを示せ.

(2) P, R は正則であるとする. このとき

$$A\begin{pmatrix} P^{-1} & X \\ O_2 & R^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \\ O_2 & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^{-1} & X \\ O_2 & R^{-1} \end{pmatrix}$$

が 4 次の単位行列と等しくなるような 2 次の正方行列 X を, P, Q, R を用いて書き表せ.

(3) 次の 4 次の正方行列 B の逆行列を求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(高知大 2015)　　(m20154503)　　大 2015)

0.2109 2 次の実正方行列全体の集合を $M_2(\mathbb{R})$ とおく. $M_2(\mathbb{R})$ は通常の和とスカラー倍で $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になっている. 写像 $f: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ を

$$f(A) = {}^tA \quad \bigl(a \in M_2(\mathbb{R})\bigr)$$

で定める. ただし, ${}^tA$ は A の転置行列を表す. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) f は一次写像であることを示せ.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は $M_2(\mathbb{R})$ の基底となることを示せ.

(3) (2) の基底に関する f の表現行列を求めよ.

(高知大 2015) (m20154504)

0.2110 $f(x)$ は開区間 $(-1, 1)$ 上で連続な正値関数で,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = 1$$

を満たすとする. さらに, 正の整数 n ごとに実数直線 $\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f_n(x)$ を,

$$f_n(x) = \begin{cases} nf(nx) & \left(x \in \left(-\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n}\right) \text{のとき}\right) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

で与える. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$ を求めよ.

(2) N を正の整数とし, ε を正の数とする. $\mathbb{R}$ 上で定義された連続関数 $g(x)$ が閉区間 $\left[-\dfrac{1}{N},\ \dfrac{1}{N}\right]$ 上で $\Big|g(x)\Big| < \varepsilon$ を満たせば, $n > N$ を満たす任意の整数 n に対して,

$$-\varepsilon \leqq \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x)dx \leqq \varepsilon$$

であることを示せ.

(3) $\mathbb{R}$ 上で定義された任意の連続関数 $h(x)$ に対して, $a_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)h(x)dx$ とおく.
このとき, $g(x) = h(x) - h(0)$ に対して (2) の結果を利用することにより,
数列 $\{a_n\}$ は $n \to \infty$ のとき $h(0)$ に収束することを示せ.

(高知大 2016) (m20164502)

0.2111 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 10 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A の各固有値に対して, 固有空間の基底を一組求めよ.

(3) A は対角化可能かどうかを理由を付けて答えよ

(高知大 2016) (m20164503)

0.2112 a, b, c は実数であるとする. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$. $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) A^{-1} を求めよ.

(2) $B = AJA^{-1}$ とおく. B を求めよ.

(3) (2) の B によって定まる線形写像を $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ と書く. このとき $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ であることを示せ. ただし, $\mathrm{Im}(f)$ と $\mathrm{Ker}(f)$ はそれぞれ f の像と f の核を表すものとする.

(4) (3) の線形写像 f に対して, $\mathrm{Ker}(f)$ の基底を一組求めよ.

(高知大 2016)　　(m20164504)

0.2113　次の極限値　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)$　を求めよ.

(高知大 2016)　　(m20164505)

0.2114　3 次行列

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値・固有ベクトルを求めよ.

(高知大 2017)　　(m20174501)

0.2115　(1)　任意の $x>0$ に対して

$$\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}$$

が成り立つような定数 a, b, c を求めよ.

(2)　$r>0$ のとき，次の広義積分の値を r を用いて表せ.

$$\int_r^{\infty}\frac{dx}{x(x+1)^2}$$

(3)　(2) で求めた広義積分の値を $I(r)$ とおく．$\displaystyle\lim_{r\to\infty}\left(r^2 I(r)\right)$ を求めよ.

(高知大 2017)　　(m20174502)

0.2116　A を $A^2=O$（零行列）を満たす複素数を成分とする 4 次の正方行列とする．さらに，$A\boldsymbol{p}$, $A\boldsymbol{q}$ が一次独立となる 4 次元複素ベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ があるとする．このとき，次の問いに答えよ.

(1)　$\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $A\boldsymbol{p}$, $A\boldsymbol{q}$ は一次独立であることを示せ.

(2)　行列 A の固有値と階数を求めよ.

(3)　$P=(A\boldsymbol{p}\quad \boldsymbol{p}\quad A\boldsymbol{q}\quad \boldsymbol{q})$ とおくと P は正則であることを示し，さらに

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となることを示せ.

(高知大 2017)　　(m20174505)

0.2117　ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の内積を，$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ に対して,

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=a_1b_1+2a_2b_2+3a_3b_3$$

により定義する．$\mathbb{R}^3$ を通常の内積ではなく，この内積に関する計量ベクトル空間とみなすとき，次の問いに答えよ.

(1)　$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^3$ が正規直交系であるならば．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は一次独立であることを示せ.

(2)　$\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は一次独立であるが，正規直交系ではないことを示せ.

(3) (2) の $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ をシュミットの直交化法を用いて直交化せよ．

(高知大 2018)　　(m20184503)

0.2118 n は正の整数とする． A は n 次実正方行列で，$A^2 = O_n$ をみたすとする．また，$\alpha = \det(A + I_n)$, $\beta = \det(A - I_n)$ とおく．ただし，O_n と I_n はそれぞれ n 次の零行列と単位行列を表すものとし，$\det(M)$ は行列 M の行列式とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\left(\det\left(\frac{1}{2}A + I_n\right)\right)^2$ を α または β を用いて表せ．

(2) $\left(\det\left(I_n - \frac{1}{2}A\right)\right)^2$ を α または β を用いて表せ．

(3) n が奇数のとき，$\alpha \geqq \beta$ を示せ．

(高知大 2019)　　(m20194503)

0.2119 3 次の正方行列 A が

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

で与えられているとし，A を $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への一次写像とみなす．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A の階数を求めよ．

(2) A の像 $\mathrm{Image}(A)$ を求めよ．

(3) A の転置行列 ${}^tA$ の核 $\mathrm{Ker}({}^tA)$ を求めよ．

(4) $\mathrm{Ker}({}^tA)$ の元は $\mathrm{Image}(A)$ の元と $\mathbb{R}^3$ の標準内積に関して直交することを示せ．

(高知大 2019)　　(m20194504)

0.2120 以下の問に答えよ．

(1) 次の累次積分の値を求めよ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{2y}{\pi}}^1 \cos\frac{y}{x}dx \right) dy$$

(2) $D = \{(x, y) : x, y \geq 0,\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\, dxdy$$

(愛媛大 2011)　　(m20114605)

0.2121 (1) $f(x) = \tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ とおく．ただし，$\tan^{-1} x$ の値域は $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ とする．

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．　　(b) $f(2)$ の値を求めよ．

(2) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - e^{-4x}}{\sin 5x}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{\log x}$　　(c) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x - 1}\right)$

(愛媛大 2011)　　(m20114607)

0.2122 二変数関数 $f(x, y)$ は 2 回偏微分可能であり，$(x, y) = (a, b)$ において $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ を満たしている．また，一変数関数 $g(z)$ は 2 回微分可能であるとする． $F(x, y) = g\left(f(x, y)\right)$ とおくとき，次の (1), (2), (3) に答えよ．

(1) $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ を $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ と $g'\left(f(x, y)\right)$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{\partial F}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) = 0$ を示せ.

(3) さらに, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = 0$ を仮定するとき, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a,b) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a,b) = 0$ を示せ.

(愛媛大 2011) (m20114609)

0.2123 $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ とする.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

(2) 空間内の点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ における曲面 $z = f(x,y)$ の接平面の方程式を求めよ.

(3) 空間における領域

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 \leqq\ a^2\ \ 0 \leqq\ z \leqq\ f(x,y)\right\}$$

の体積を求めよ. ただし, $0 < a < 1$ とする.

(愛媛大 2013) (m20134603)

0.2124 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 56 & 4 & -2 \\ 6 & 54 & -2 \\ 180 & 120 & -10 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 106 & 4 & -2 \\ 6 & 104 & -2 \\ 180 & 120 & 40 \end{pmatrix}$ の固有値をすべて求めよ.

(愛媛大 2013) (m20134604)

0.2125 次の累次積分を求めよ.

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3}\,dy\right) dx$$

(愛媛大 2014) (m20144604)

0.2126 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ とする.

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.

(2) (1) で求めた行列 A の固有値に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

(愛媛大 2014) (m20144605)

0.2127 (1) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\cos\frac{4}{x}\right)^{x^2}$

(2) x の関数 $x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x$ を微分せよ.

(3) 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi$$

ただし, $\cos^{-1} x$ の値域は $[0,\ \pi]$ とする.

(愛媛大 2015) (m20154601)

0.2128 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする，また，n を自然数とする．

次の行列の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(i) E (ii) A (iii) A^n

(愛媛大 2015) (m20154605)

0.2129 (1) 次の不定積分を求めよ． $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

(2) 次の定積分を求めよ． $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^{-1} 2x \; dx$

(3) 曲線 $y=\sin^{-1} 2x \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\right)$，直線 $y=\dfrac{\pi}{2}$ および y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

ただし，$\sin^{-1} x$ の値域は $\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ とする．

(愛媛大 2017) (m20174602)

0.2130 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ とする．

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) 行列 A の固有値をすべて求めよ．

(3) (2) で求めた行列 A の固有値に対する固有ベクトルをすべて求めよ．

(愛媛大 2017) (m20174605)

0.2131 (1) 次の関数の導関数を求めよ．ただし，a は正の定数とする．

(a) $\sin^{-1}(x^2)$ (b) $x^{\sin x} \quad (x>0)$ (c) $\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$

(2) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x}$

(愛媛大 2018) (m20184601)

0.2132 行列 $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ a & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ は 0 を固有値として持つとする．ただし，a は定数とする．

(1) 定数 a を求めよ．

(2) A の 0 でない固有値をすべて求めよ．

(3) 固有値 0 に対する固有ベクトルをすべて求めよ．

(愛媛大 2018) (m20184605)

0.2133 (1) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2x\tan x-\frac{\pi}{2}}{\sin x-\cos x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log\left(\frac{x+2}{x+4}\right)$

(2) $f(x)=\sqrt{x+2}$ とする．

(a) 3 階までの導関数 $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ を求めよ．

(b) 次の式

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-a_0-a_1x-a_2x^2}{x^2}=0$$

が成り立つように定数 a_0, a_1, a_2 を定めよ．

(愛媛大 2021)　　(m20214601)

0.2134 次の不定積分を求めよ．

$$(a)\ \int\frac{1}{(1+\sin^2 x)\tan x}dx \qquad (b)\ \int x^9e^{-x^{10}}dx$$

0.2135 次の広義積分が収束するように定数 a を定め，そのときの広義積分の値を求めよ．

$$\int_1^\infty\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}-\frac{a}{\sqrt{x}}\right)dx$$

(愛媛大 2021)　　(m20214602)

0.2136 次の行列の積を求めよ．

$$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\3&2&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1&0\\4&3&0&1\\0&0&2&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

(愛媛大 2021)　　(m20214605)

0.2137 行列 $A=\begin{pmatrix}2&-1\\-6&1\end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(愛媛大 2021)　　(m20214607)

0.2138 $A=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&3&3&0\\3&x&y&0\\2&1&x&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\x\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\y\\x\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ とする．

ただし，x, y は実数とする．

(1) ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ において，$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ が 1 次従属になるとき，x, y の値を求めよ．

(2) ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ において，$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$ が 1 次従属になるとき，y を x で表せ．

(3) ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ において，$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$ が 1 次独立なとき，$A\boldsymbol{u}_1$, $A\boldsymbol{u}_2$, $A\boldsymbol{u}_3$, $A\boldsymbol{u}_4$ も 1 次独立であることを示せ．

(愛媛大 2022)　　(m20224610)

0.2139 3× 3 行列 A を

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

とし，E を 3× 3 単位行列とする．以下の問いに答えよ．

(1) x についての多項式として，$|xE-A|=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ が成立するように，定数 a_0, a_1, a_2, a_3 を定めよ．ただし，$|xE-A|$ は行列 $xE-A$ の行列式を表す．

(2) (1) で求めた定数 a_0, a_1, a_2 に対し，$a_0A^2+a_1A+a_2E$ を求めよ．

(九州大 2011)　　(m20114703)

0.2140 $3\times\ 3$ 行列 B, C をそれぞれ

$$B=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

とし，点 $P_n(x_n,\ y_n,\ z_n)\quad (n=1,2,3,\cdots)$ を $x_1=y_1=z_1=1$,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}=B\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

によって定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 行列 C の逆行列 C^{-1} を求めよ．

(2) ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ はそれぞれ行列 B の固有ベクトルであることを示せ．

(3) $a_n,\ b_n,\ c_n\quad (n=1,2,3,\cdots)$ を，

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

によって定めるとき，$a_{n+1},\ a_n$ の間に成立する関係式を求めよ．

(4) $n\to\infty$ としたとき，点 P_n はある点 P_∞ に近づくことを示し，点 P_∞ を求めよ．

(九州大 2011) (m20114704)

0.2141 行列 $A=\begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -12 & 1 \end{pmatrix}$ に対し以下の問いに答えよ．

(1) A の行列式を求めよ．

(2) A の逆行列を求めよ．

(3) A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(九州大 2012) (m20124701)

0.2142 (1) 次の周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \left(-\pi\leqq\ x<-\dfrac{\pi}{4}\right) \\ 1 & \left(-\dfrac{\pi}{4}\leqq\ x<\dfrac{3\pi}{4}\right) \\ -1 & \left(\dfrac{3\pi}{4}\leqq\ x<\pi\right) \end{cases}, \qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

(2) 関数 $f(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$ で定義する．次式で定義される関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，関数 $y=F(\omega)$ のグラフの概形を描け．なお，T は正の実数とする．

$$f(t)=\begin{cases} a & (|t|\leqq\ T) \\ 0 & (|t|>T) \end{cases}$$

(3) 関数 $f(t)$ は $t>0$ で定義されているものとし，$f(t)$ のラプラス変換を $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ で定義するとき，以下の問いに答えよ．

(a) $f(t)=\sin\omega t$ のラプラス変換が $F(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ であることを示せ．

(b) $f(t)=\cos\omega t$ のラプラス変換が $F(s)=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ であることを示せ．

(c) $f(t)=a+bt$ のラプラス変換が $F(s)=\dfrac{as+b}{s^2}$ であることを示せ．

(九州大 2012)　　(m20124704)

0.2143 $A=\begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 2 & 13 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) それぞれの固有値に対する第 2 成分が 1 の固有ベクトルを求めよ．

(九州大 2012)　　(m20124707)

0.2144 行列 $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) 各固有値に対する固有空間の基底を求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P と $P^{-1}AP$ を求めよ．

(九州大 2012)　　(m20124709)

0.2145 ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分集合 V を

$$V=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1-2x_2+3x_4=0\,,\ x_1-x_2+x_3+2x_4=0\right\}$$

により定める．

(1) V は $\mathbb{R}^4$ の部分空間であることを示せ．

(2) V の基底を一組求めよ．

ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ 上の内積を，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4$ に対し，

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4$$

により定める．V の直交補空間を

$$W=\left\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \text{任意の } \boldsymbol{x}\in V \text{ に対し，} (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0\right\}$$

と定める．

(3) W は $\mathbb{R}^4$ の部分空間であることを示せ．

(4) W の正規直交基底を一組求めよ.

(九州大 2012)　　(m20124712)

0.2146 n 次実正方行列 $A=(a_{ij})$ は, どの行についても $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=1$ とする, 以下の問いに答えよ.

(1) 1 は A の固有値であることを示せ.

(2) 2 は $2A$ の固有値であることを示せ.

(3) 行列 $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(4) B が対角化可能かどうか判定せよ.

(九州大 2013)　　(m20134701)

0.2147 次の行列 A, B について, 以下の問いに答えよ.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & c \end{pmatrix}$$

(1) A の階数が 1 となる条件, 2 となる条件をそれぞれ求めよ.

(2) AB が正則であるための条件を求めよ.

(3) BA の逆行列が存在するならその条件を求めよ. 存在しないならその理由を述べよ.

(九州大 2014)　　(m20144701)

0.2148 (1) 次の周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x)=|x| \quad (-\pi \leqq x<\pi), \qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ であることを示せ.

(3) $t>0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)=\mathcal{L}[f(t)](s)=\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ とする. 以下の問いに答えよ.

(a) a を定数とするとき, $\mathcal{L}[e^{at}](s)$ を求めよ. また, $\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s)=F(s-a)$ を示せ.

(b) $\dfrac{dF(s)}{ds}=\mathcal{L}[-tf(t)](s)$ が成り立つことを示せ. また, これを用いて $F(s)=\log\left(\dfrac{s+1}{s}\right)$ のラプラス逆変換を求めよ.

(九州大 2014)　　(m20144703)

0.2149 (1) $u=f(x,y)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ $(r>0)$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(a) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ を r, θ および, u の r, θ に関する偏導関数を用いて表せ.

(b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を r, θ および, u の r, θ に関する偏導関数を用いて表せ.

(2) 領域 $D=\left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 1\right\}$ において, 関数 $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ を考える. 以下の問いに答えよ.

(a) 領域 $\left\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\right\}$ における $f(x,y)$ の極値とそれを与える (x,y) を求めよ．極大か極小かも述べよ．

(b) 単位円 $x^2+y^2=1$ 上での $f(x,y)$ の最大値，最小値とそれらを与える (x,y) を求めよ．

(c) 領域 D における $f(x,y)$ の最大値，最小値とそれらを与える (x,y) を求めよ．

(九州大 2014)　　(m20144704)

0.2150　次の行列 A について，以下の問いに答えよ．ただし，a は実数値とする．

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

(1)　A の逆行列が存在するための a の必要十分条件を示せ.

(2)　a が小問 (1) の条件を満たす時，A の逆行列を求めよ．

(3)　A の固有値を求めよ．

(4)　A が対角化可能であるための a の必要十分条件を示せ.

(九州大 2015)　　(m20154701)

0.2151　a を実数として，4 次正方行列 A を次のように定義する．

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & a & 1 \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \\ 1 & a & 0 & a \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1)　A の行列式を求めよ．

(2)　A の行列式が 0（ゼロ）となるような a の値をすべて求めよ．

(3)　前問 (2) の解のうちの最小値を a_0 とおく．(前問 (2) の解がただ一つの場合は，それを a_0 とおく．)　$a=a_0$ の場合に，A の階数 (rank) を求めよ．

(九州大 2015)　　(m20154706)

0.2152　x,y を実数とし，行列 A, B および $\boldsymbol{p}$ を下記のように定義する．

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

また，$C=AB({}^tA)$ とする．ここで ${}^tA$ は A の転置行列である．以下の問いに答えよ．

(1)　行列 A^{-1} を求めよ．

(2)　行列 C の固有値を求めよ．

(3)　行列 C の行列式 $\det(C)$ を求めよ．

(4)　$x>0$, $x^2+y^2=1$ および $\boldsymbol{p}\cdot(C\boldsymbol{p})=1$ を満たす x と y を求めよ．

(九州大 2016)　　(m20164701)

0.2153　(1)　(a) 周期 $2L$ の区分的に連続な関数 $f(x)$ をフーリエ級数で表現した式を示し，そのフーリエ係数を求める式を示せ．

(b) 次の関数 $f(x)$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} -2x-4 & (-2 \leqq x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 4-2x & (0 < x \leqq 2) \end{cases}$$

(2) $t > 0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \mathfrak{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ とする．必要ならば下記の表にある関係式を用いて，次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．また (b) については，$f(t)$ $(t > 0)$ のグラフをかけ．

(a) $F(s) = \dfrac{2}{s(s+1)(s+2)}$

(b) $F(s) = \dfrac{-s+2}{s^2+2s+4}$

表：
$$\boxed{\begin{array}{l} \mathfrak{L}[1] = \dfrac{1}{s}, \quad \mathfrak{L}[t^n] = \dfrac{n!}{s^{n+1}}\ (n = 1, 2, \cdots), \quad \mathfrak{L}[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a}, \quad \mathfrak{L}[\sin \omega t] = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}, \\ \mathfrak{L}[\cos \omega t] = \dfrac{s}{s^2+\omega^2},\ \mathfrak{L}[f(at)] = \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right),\ \mathfrak{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a),\ \mathfrak{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau}F(s) \end{array}}$$

（九州大 2016）　　(m20164703)

0.2154　3 次正方行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -2 \\ -5 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の固有値のうちで最小なものを λ_0 とおく．（固有値がただ一つの場合には，それを λ_0 とおく．）λ_0 に対応する固有ベクトルで，「ベクトルの長さ（大きさ）は 1」かつ「第 1 成分は負ではない」という条件を満たすものを求めよ．

（九州大 2016）　　(m20164706)

0.2155　a, b は $a > 0,\ b > 0$ なる定数とする．$x > 0,\ y > 0$ において 2 変数関数 $f(x, y)$ を次の式で定義する．

$$f(x, y) = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{b}{y}}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ．

(2) $y > 0$ なる y を固定する．このとき，次の積分（広義積分）は収束するか発散するかを理由を示して答えよ．さらに，収束する場合には，積分の値を求めよ

$$f(y) = \int_0^1 f(x, y)dx$$

（九州大 2016）　　(m20164708)

0.2156 4 次正方行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ.

(1) A の行列式を求めよ.

(2) A の逆行列を求めよ.

(九州大 2017) (m20174701)

0.2157 a, b を実数として，次の行列 A について考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ a & b & 3 \end{pmatrix}$$

(1) A が正則であるための条件を求めよ.

(2) A に掃き出し法（ガウスの消去法）を適用して次の行列 U を得たとする.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

この時，a, b を用いて c を表せ.

(3) U の各列ベクトルが直交するように a, b, c を求めよ.

(4) a, b, c が小問 (3) を満たすとき，$A = LU$ が成り立つような行列 L を求めよ.

(5) a, b, c が小問 (3) を満たすとき，U の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(九州大 2017) (m20174704)

0.2158 4 次正方行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の固有値のうちで最大のものを λ_0 とおく. λ_0 に対応する固有ベクトルで，第 1 成分が 1 であるものを求めよ.

(九州大 2018) (m20184705)

0.2159 xy 座標平面上の点 P の移動について考える.

時刻 $t = n$（n は正の整数）における点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{p}_n = (x_n,\ y_n)$ を次の漸化式で定める.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

点 P の始点は，正の実数 s を用いて，$\boldsymbol{p}_0 = (x_0, y_0) = (1, s)$ で与えられるとする.

以下の問いに答えよ.

(1) (x_n, y_n) を n と s を用いて表せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}$ を求めよ.

(九州大 2019)　　(m20194701)

0.2160 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

について，以下の問に答えよ.

(1) A の固有値，および，それぞれの固有値に属する固有空間の基底を一組ずつ求めよ.

(2) A を直交行列により対角化せよ，すなわち，$P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求め，$P^{-1}AP$ がどのような対角行列となるかを表示せよ.

(九州大 2019)　　(m20194707)

0.2161 3 次の実正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

について，以下の問に答えよ.

(1) A のトレースが 0 のとき，A の行列式を求めよ.

(2) $BA = AB$ のとき，行列 A の固有値を求めよ.

(九州大 2019)　　(m20194708)

0.2162 3 次正方行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の固有値のうちで最小なものを λ_0 とおく.（固有値がただ一つの場合には，それを λ_0 とおく.）λ_0 に対応する固有ベクトルで，「ベクトルの長さ（大きさ）は 1」かつ「第 1 成分は負ではない」という条件をみたすものを求めよ.

(九州大 2019)　　(m20194709)

0.2163 a を $a \neq 0$ なる実数として，4 次正方行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

このとき，A の階数 (rank) を求めよ.

(九州大 2019)　　(m20194710)

0.2164 $x>0,\ y>0$ において，2 変数関数 $f(x,y)$ および $g(x,y)$ を次の式で定義する．

$$f(x,y)=\log\left(x^2+y^2\right)\ ,\qquad g(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^{1/3}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の x に関する 2 次偏導関数 $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)$ を求めよ．

(2) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$\lim_{t\to+0}t\log t=0$$

(3) 領域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0<x^2+y^2<1,\ 0<y<x\right\}$ における次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D\frac{f(x,y)}{g(x,y)}dxdy$$

(九州大 2019) (m20194712)

0.2165 行列

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{pmatrix}$$

について考える．このとき次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A の固有値のうちで最大なものを λ_0 とおく（固有値がただ一つの場合には，それを λ_0 とおく）．このとき λ_0 に対応する固有ベクトルで，「 ベクトルの長さ（大きさ）は 1 」かつ「 第 1 成分は負でない 」という条件を満たすものを求めよ．

(九州大 2020) (m20204701)

0.2166 (1) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ．

$$y''-y'-2y=e^{2x}$$

(2) 次の $y(x)$ および $z(x)$ に関する連立微分方程式の一般解を求めよ．

$$y'-2y-z=e^x\ ,\quad y'-6y+z'=0$$

(3) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ．

$$\left(\frac{y'}{y^2}\right)'-\frac{1}{y}=0$$

(九州大 2020) (m20204705)

0.2167 次の線形変換を考える．以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{p}'=A\boldsymbol{p}\ ,\quad A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{p}'=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

(1) 線形変換の像 $\boldsymbol{p}'$ はある平面上に限定される．この平面を表す式を求めよ．

(2) (1) で求めた平面に対する零でない法線方向ベクトル $\boldsymbol{u}$ を示せ．

また，$\boldsymbol{u}$ とベクトル $\boldsymbol{p}_1'=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ に直交するベクトルを求めよ．

(3) $\boldsymbol{p} \neq 0$ のとき $\dfrac{|\boldsymbol{p}'|}{|\boldsymbol{p}|}$ の最大値を求めよ．$\dfrac{|\boldsymbol{p}'|}{|\boldsymbol{p}|}$ が最大値をとるときの x, y, z の条件を示せ．

(九州大 2020)　　(m20204706)

0.2168 確率 $p(0 < p < 1)$ で表，確率 $1 - p$ で裏がでるコインを n 回独立に投げる．以下の問いに答えよ．

(1) n 回のうち表が出た回数を表す確率変数を X とする．X の値が k $(k \in \{0, 1, \cdots, n\})$ となる確率 $P(X = k)$ を求めよ．

(2) X の期待値 $E[X]$ について，$E[X] = np$ が成り立つことを示せ．

(3) λ を正の定数として $p = \dfrac{\lambda}{n}$ とすると，以下が成り立つことを示せ．

$$\lim_{n\to\infty} P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

ただし，任意の実数 a について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$ を用いてよい．

(九州大 2020)　　(m20204708)

0.2169 (1) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ．

$$y'' - 2y' + 5y = \sin 2x$$

(2) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ．

$$y'' + 2y' - 3y = e^{-3x}$$

(3) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ．

$$\left(\frac{y'}{y^3}\right)' - \frac{4y'}{y^3} - \frac{2}{y^2} = 0$$

(九州大 2021)　　(m20214702)

0.2170 3 次正方行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の固有値のうちで最小のものを λ_0 とおく．λ_0 に対応する固有ベクトルで，「ベクトルの長さ（大きさ）は 1)」かつ「第 1 成分は負ではない」という条件を満たすものを求めよ．

(九州大 2021)　　(m20214705)

0.2171 (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) を xy 平面上の相異なる 3 点とする．また，$|M|$ は正方行列 M の行列式を表すこととする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．3 点 (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) が同一直線上に存在するとき $|A| = 0$ となることを示せ．

(2) 変数 x, y に対して，正方行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ {X_1}^2+{Y_1}^2 & X_1 & Y_1 & 1 \\ {X_2}^2+{Y_2}^2 & X_2 & Y_2 & 1 \\ {X_3}^2+{Y_3}^2 & X_3 & Y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．さらに，$\triangle_{i,j}$ を B の (i,j)-小行列式，つまり，B の第 i 行と第 j 列をとり除いて得られる 3×3 行列の行列式とする．B の第 1 行に関する余因子展開にによリ，小行列式を用いて B の行列式を表せ.

(3) 前問の行列 B が $|B| = 0$ を満たすとき，変数 x, y が満たす方程式を xy 平面上に図示せよ.

(九州大 2021)　　(m20214706)

0.2172 $0 < A < B \leqq 1$ とするとき，領域 D を $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; A \leqq x \leqq B,\ x^2 \leqq y \leqq x\right\}$ とし，

$f(x,y) = \dfrac{y+y^2}{x^2+y^2}$ とする．このとき，次の各問に答えよ.

ただし，逆正接関数 $\arctan(x)$ が $\dfrac{1}{x^2+1}$ の原始関数であることは既知として用いてよい.

(1) 関数 $g(x,y) = y - x\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ を y で偏微分した偏導関数を求めよ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x,y)dx$ を求めよ．ただし，$x > 0,\ y > 0$ とする.

(3) 関数 $h(x) = 2\ \arctan(x) - 2x + x\log(x^2+1)$ の微分を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_D f(x,y)dxdy = H(B) - H(A)$ を満たす関数 $H(x)$ を求めよ.

(九州大 2021)　　(m20214708)

0.2173 $a \geqq 0$ として，行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) $a = 4$ のとき，A の各固有値に対する固有空間を求めよ.

(3) A が対角化可能でないような a の値をすべて求めよ.

(九州大 2021)　　(m20214709)

0.2174 $a \in \mathbb{R},\ r > 0$ とする．点 $\boldsymbol{x}_1 = (x_1, y_1)$ は円 $C_1 = \left\{(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; {x_1}^2 + {y_1}^2 = 1\right\}$ 上を動き，点 $\boldsymbol{x}_2 = (x_2, y_2)$ は円 $C_2 = \left\{(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x_2-a)^2 + {y_2}^2 = r^2\right\}$ 上を動くものとする.

2 点 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ 間のユークリッド距離に関する極値問題について，以下の問いに答えよ．ただし，$\mathbb{R}$ は実数全体を表すとする.

(1) 関数

$$f(\theta_1,\theta_2) = (r\cos\theta_2 + a - \cos\theta_1)^2 + (r\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2, \quad (\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R})$$

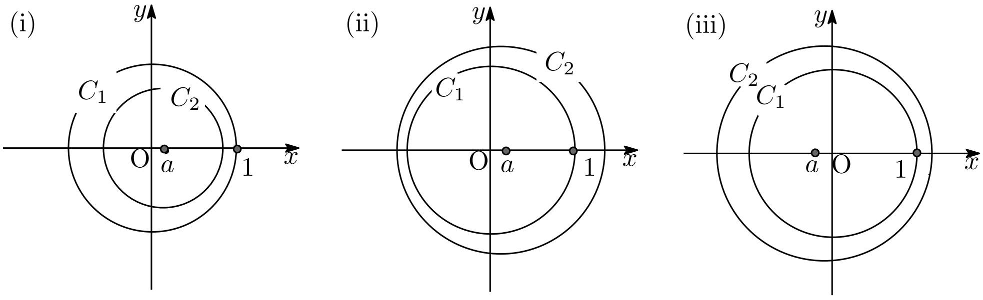
の $(\theta_1,\theta_2) = (0,0)$ におけるヘッセ行列

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} f_{\theta_1\theta_1}(0,0) & f_{\theta_1\theta_2}(0,0) \\ f_{\theta_2\theta_1}(0,0) & f_{\theta_2\theta_2}(0,0) \end{pmatrix}$$

を求めよ.

(2) (1) で求めたヘッセ行列が正定値になるための条件を a と r で表せ.

(3) 図 (i)(ii)(iii) それぞれについて，点 $\boldsymbol{x}_1^* = (1, 0)$, $\boldsymbol{x}_2^* = (a + r, 0)$ が極値問題の極小解であるかどうか判定せよ.



(九州大 2021)　　(m20214712)

0.2175　3 次正方行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -9 \\ -20 & -3 & 10 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の固有値のうちで最小のものを λ_0 とおく．λ_0 に対応する固有ベクトルで，「ベクトルの長さ（大きさ）は 1 」かつ「第 1 成分は負ではない」と言う条件を満たすものを求めよ.

(九州大 2022)　　(m20224704)

0.2176　以下のように XY 平面上の点 $(x_1,\ y_1)$ を点 $(x_2,\ y_2)$ へうつす線形変換 $(*)$ を考える.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\ ,\quad M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdots (*)$$

(1) ア) 行列 M の行列式の値 $(\det M)$ を求めよ.

イ) x_2, y_2 を用いて，x_1, y_1 をそれぞれ書き表せ.

(2) 原点を中心とした単位円 C： $x^2 + y^2 = 1$ を，線形変換 $(*)$ を用いて変形した閉曲線 D を考える．D を表す x, y の方程式を求めよ.

(3) 原点を中心とし，x 軸と y 軸に長短径をもつ楕円 E は以下の方程式で表される.

$$E\ :\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

E を原点まわりに反時計方向に角度 θ だけ回転した楕円 E' を表す式を求め，以下の空白ア〜ウを埋めよ.

$$E'\ :\ \left(\boxed{\quad ア \quad}\right) x^2 + \left(\boxed{\quad イ \quad}\right) xy + \left(\boxed{\quad ウ \quad}\right) y^2 = 1$$

(4) (3) の結果を用いて閉曲線 D が楕円であることを示し，その面積を求めよ.

(九州大 2022)　　(m20224705)

0.2177　次の行列 A について，以下の問いに答えよ．a, b は実数である.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値が 2 つの異なる実数で得られることを示せ.

(2) 以下に示す行列 P を用いると $P^{-1}AP$ は対角行列となった. このとき, $a,\ b$ の満たすべき条件を示せ.

$$P = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{4} & -\sin\dfrac{\pi}{4} \\ \sin\dfrac{\pi}{4} & \cos\dfrac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

(九州大 2022) (m20224708)

0.2178 下式で表される Leibniz の公式を使って, $y = x^3 \sin x$ の第 n 次導関数を求めなさい.

$$\text{Leibniz の公式 : } (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} u^{(n-1)}v' + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} u^{(n-2)}v'' + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} uv^{(n)}$$

ここで, $(uv)^{(n)}$: 関数 uv の第 n 次導関数, $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$

(佐賀大 2011) (m20114902)

0.2179 次の不定積分または定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \left(2x - \frac{1}{x}\right)^2 dx$ (2) $\displaystyle\int x\sec^2 x dx \quad (\sec^2 x = 1/\cos^2 x)$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \left(1 - x^2\right)^{7/2} dx$ (4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\cos x)\, dx$

(佐賀大 2011) (m20114903)

0.2180 次の不定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \left(\frac{3x+5}{x^2+4x+3}\right) dx$ (2) $\displaystyle\int \left(x^3 e^{-x^2}\right) dx$ (3) $\displaystyle\int (\sin 2x\ \cos 3x)\ dx$

(佐賀大 2011) (m20114911)

0.2181 3 つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ -1 \end{pmatrix}$$

が一次従属になるような x を求めよ. さらに, その x に対するベクトル $\boldsymbol{c}$ をベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ の一次結合で表せ.

(佐賀大 2011) (m20114914)

0.2182 次の対称行列を対角化せよ. 対角化するための直交行列も求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2011) (m20114916)

0.2183 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) dx$ (2) $\displaystyle\int (\log x)\, dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x-1} dx$ (4) $\displaystyle\int \frac{1}{(3-x)(3-2x)} dx$

(佐賀大 2012) (m20124908)

0.2184 次の関数 y について答えなさい．ただし，a および b は正の定数である．

$$y = 4a\left\{\left(\frac{b}{x}\right)^{12} - \left(\frac{b}{x}\right)^{6}\right\}$$

(1) $y = 0$ となるときの x の値を求めなさい．

(2) $y < 0$ となるときの x の値の範囲を求めなさい．

(3) 関数 y が極値をとるときの x を求めなさい．

(佐賀大 2012) (m20124909)

0.2185 $\boldsymbol{A}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ のとき，次の等式が成り立つことを示しなさい．

(1) $\boldsymbol{A}(\theta)^{-1} = \boldsymbol{A}(-\theta)$　　(2) $\boldsymbol{A}(\alpha+\beta) = \boldsymbol{A}(\alpha)\boldsymbol{A}(\beta)$

(佐賀大 2012) (m20124915)

0.2186 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ は正則であるか確かめ，正則であれば逆行列を求めなさい．

(佐賀大 2012) (m20124917)

0.2187 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \log_{10} 3x$　　(2) $y = \left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^3$

(佐賀大 2013) (m20134901)

0.2188 2 つの直交する大きさ 1 のベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ が次のように与えられているとき，以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ と直交する単位ベクトル $\boldsymbol{k}$ を 2 つ求めよ．

(2) (1) で求めた $\boldsymbol{k}$ のいずれかを用いて，次のベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ の一次結合で表せ．

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2013) (m20134907)

0.2189 次の行列の逆行列を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(佐賀大 2013) (m20134908)

0.2190 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) A に対して，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を求めよ．

(3) $A^n = PXP^{-1}$ となるような行列 X を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(佐賀大 2013)　　(m20134909)

0.2191 次の方程式が解を持つような a, b の値を求めよ．また，そのときの解を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a-1 \\ 2a+4 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

(佐賀大 2014)　　(m20144906)

0.2192 次のベクトルの組は 1 次独立であるかを調べよ．

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -13 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2014)　　(m20144907)

0.2193 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

に対して，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を一つ求めよ．さらに，対角行列 $P^{-1}AP$ も書け．

(佐賀大 2014)　　(m20144908)

0.2194 次の行列について，問いに答えよ．ただし E は単位行列，O はゼロ行列である．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) 行列 A が $A^2 - 2A - 3E = O$ を満たすことを示せ．

(3) (2) で求めた結果を使って（$A^4 = A^2A^2$ の計算を行うことなく）A^4，A^{-1} を求めよ．

(佐賀大 2015)　　(m20154903)

0.2195 次の行列 A について以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A のすべての固有値を求めよ．

(2) ３つの固有値に対応する規格化された（長さが 1 の）固有ベクトルをそれぞれ求めよ．

(3) 行列 A を対角化した行列 A_d を求めよ．

(4) 次の関係式を満たす直交行列 O を求めよ．ここで，O^T は O の転置行列である．

$$A_d = O^TAO$$

(佐賀大 2015)　　(m20154911)

0.2196 2 次元 xy 平面を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 点 $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を原点の回りに角 ϕ だけ回転して $(x',y')=\big(r\cos(\theta+\phi),\ r\sin(\theta+\phi)\big)$ に移すときの回転行列 $R(\phi)$ を求めよ．

(2) $\Delta\phi$ が十分小さいとき，$R(\phi)$ が次のように表されることを示せ．

$$R(\phi)=\begin{pmatrix}1 & -\Delta\phi \\ \Delta\phi & 1\end{pmatrix}$$

(佐賀大 2015)　　(m20154913)

0.2197 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 \\ 3 & -6\end{pmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ

(1) $AX=0$ を満たす 2 次正方行列 X をすべて求めよ．

(2) $AX=XA=0$ を満たす X をすべて求めよ．

(佐賀大 2015)　　(m20154921)

0.2198 次の行列が直交行列となるように，a,b,c を決めよ．

$$\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & a \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & b & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ c & \dfrac{-2}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

(佐賀大 2015)　　(m20154924)

0.2199 次の関数の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^2-3ax+2a^2}{x^2-a^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

(佐賀大 2016)　　(m20164901)

0.2200 次の関数を微分しなさい．

(1) $-3x^2+x+\dfrac{1}{x^2}$　　(2) x^3e^{-x}　　(3) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3$　　(4) $\dfrac{x^2}{\log x}$

(佐賀大 2016)　　(m20164906)

0.2201 次のベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ について以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{c}$ に垂直で大きさが $\sqrt{5}$ であるベクトル $\boldsymbol{p}$ を求めよ．

(佐賀大 2016)　　(m20164917)

0.2202 次の行列 $A,\ B$ について以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の逆行列を求めよ.

(2) 行列 AB の積を求めよ.

(佐賀大 2016) (m20164918)

0.2203 次の行列 P について以下の問いに答えよ.

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -4 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 P の固有値を求めよ.

(2) 行列 P の固有ベクトルを求めよ.

(佐賀大 2016) (m20164920)

0.2204 次の関数を微分せよ.

(1) e^{3x} (2) $\log_a x$ $\left(\text{ヒント}:\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}\right)$ (3) $\log_{10}\bigl(\log_{10} x\bigr)$

(佐賀大 2016) (m20164921)

0.2205 次の関数の極限を求めよ.ただし,$a > 0$ とする.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$

(佐賀大 2016) (m20164925)

0.2206 次の定積分の値を求めよ. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(1 + \sin^2 x\right)\cos x \, dx$

(佐賀大 2017) (m20174901)

0.2207 次の行列 A, B, C について以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) $A + B$ を求めよ.

(2) $A^T B$ を求めよ.

(3) C の逆行列を求めよ.

(佐賀大 2017) (m20174904)

0.2208 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2017) (m20174906)

0.2209 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \log_{10} 5x$ (1) $y = \left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^4$

(佐賀大 2017) (m20174907)

0.2210 次の微分方程式を解け.

(1) $\dfrac{dy}{dx} + y\tan x = \sin 2x$ (2) $\dfrac{dy}{dx} = x\left(1 + y^2\right)$

(佐賀大 2017) (m20174910)

0.2211 次の関数を微分しなさい.

(1) $y = \dfrac{4}{3}x^6$ (2) $y = \left(x^2 + 1\right)^3$ (3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(4) $y = 2e^{5x}$ (5) $y = \sin^2 x$ (6) $y = \ln\left(x^2 + x\right)$

(佐賀大 2017) (m20174911)

0.2212 関数 $f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)e^{x-y}$ について，次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底である.

(1) 偏導関数 f_x，f_y，f_{xx}，f_{xy}，f_{yy} を求めよ.

(2) $f(x, y)$ の極値を求めよ.

(佐賀大 2017) (m20174917)

0.2213 次の極限値を求めなさい..

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2(x^2 - 1)} - \frac{x}{x^2 - 1}\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{3\arcsin\frac{x}{5}}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left\{\log(3x + 1) - \log 3x\right\}$

(佐賀大 2018) (m20184901)

0.2214 xy 平面上の集合 $\left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < R^2\right\}$ で定義された関数 $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ について，下記の問いに答えなさい．ただし，定数 R は $R > 2$ を満たすとする.

(1) $\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$ を求めなさい.

(2) 集合 D を $D = \left\{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$ とし，極座標を利用して，

重積分 $I = \displaystyle\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$ を求めなさい.

(佐賀大 2018) (m20184903)

0.2215 次のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ について以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めよ.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2018) (m20184913)

0.2216 次の行列 A について以下の問いに答えよ.

(1) ${}^tAA$ を求めよ.

(2) A の逆行列を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2018)　　(m20184914)

0.2217　次の行列 A について以下の問いに答えよ.

(1) 固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) 正則行列 P を求め，対角化せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2018)　　(m20184915)

0.2218　つぎの連立一次方程式が成り立つベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & -5 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2018)　　(m20184928)

0.2219　次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ について，以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ の長さを求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ とベクトル $\boldsymbol{a}_2$ の内積を求めよ.

(3) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立なベクトルか 1 次従属なベクトルかを示せ.

(佐賀大 2021)　　(m20214904)

0.2220　次の 2 次正方行列 A について，以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式の値を求めよ.

(2) 行列 A の逆行列を求めよ.

(3) 行列 A の固有値をすべて求めよ.

(4) (3) で求めた行列 A の各固有値に属する固有ベクトルを求めよ.

(5) 行列 A が対角化可能か調べ，対角化可能であれば適当な正則行列 P を求め，対角化せよ.

(佐賀大 2021)　　(m20214905)

0.2221　次の関数を微分しなさい.

(1) $y = \dfrac{1}{2}x^4$　　(2) $y = \left(2x^2+1\right)^2$　　(3) $y = \sqrt{x}$　　(4) $y = 3\,e^{-4x}$

(佐賀大 2021)　　(m20214906)

0.2222　$f(x,y) = \sin^2(x) - \cos(y) \quad \left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \pi\right)$ の極値を求めよ.

(佐賀大 2021)　　(m20214917)

0.2223 次の重積分を計算せよ.

$$\iint_D \left(x+\frac{2}{y}\right)dxdy \qquad (D: 1 \leq x \leq 4,\ 1 \leq y \leq e^2)$$

(佐賀大 2022) (m20224908)

0.2224 次の連立一次方程式を解け.

$$\begin{cases} -x-3y+2z-2w=3 \\ -2x-6y+4z-5w=-1 \\ 3x+9y-6z+7w=-2 \end{cases}$$

ただし，答えは $t,\ s$ を任意の実数として，以下の $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2$ を求め

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \\ 0 \\ a_2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

の形に書くこと.

(佐賀大 2022) (m20224910)

0.2225 4 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -8 & 8 \\ 0 & 6 & -9 & 8 \\ -9 & -1 & -4 & -6 \\ 6 & 8 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

の行列式に関する以下の問いに答えよ.

(1) 行列式 $|A|$ の変形と余因子展開を行って,

$$|A| = c|B|$$

となる 3 次正方行列 B と実数 c を一組求めよ.

(2) 行列式 $|B|$ の値を求めて，行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(佐賀大 2022) (m20224911)

0.2226 次の 2 次正方行列に関する以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) ある直交行列 P に対して ${}^tPAP = B$ が対角行列になるとき，対角行列 B を求めよ.
ただし，${}^tP$ は P の転置行列である.

(3) $\boldsymbol{x}$ を 2 次元実ベクトルとして,

$$\max_{||x||=1} ||A\boldsymbol{x}|| = \max_{||x||=1} ||B\boldsymbol{x}||$$

を示し，その値を求めよ.

(佐賀大 2022) (m20224912)

0.2227 下記の極限値を求めなさい. 答えだけでなく途中経過も記載すること.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{2x^3-x^2-4x+3}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$

(佐賀大 2022) (m20224924)

0.2228 以下の A, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{X}$ について次の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の逆行列を求めよ.

(2) 逆行列を用いて $A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$ を満たす x, y, z（未知の実数）の値を求めよ.

(長崎大 2011) (m20115006)

0.2229 以下の行列 A の固有値, および長さ 1 の固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(長崎大 2011) (m20115007)

0.2230 次式で与えられるベクトルと行列に対して，積が定義できる組を選びその積を求めよ.

ベクトル $\quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

行列 $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(長崎大 2011) (m20115013)

0.2231 2 次元ベクトル $\boldsymbol{d}$ を $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で定義するとき，次の問に答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{d}$ を正規化したベクトル $\boldsymbol{u}_1$ を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{d}$ と直交する単位ベクトル $\boldsymbol{u}_2$ を求めよ.

(3) 2 次元空間の基本ベクトルを $\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ を用いて表せ.

(長崎大 2011) (m20115014)

0.2232 行列 $A = \dfrac{1}{\alpha\beta + 3} \begin{pmatrix} \alpha & -2 \\ 1.5 & \beta \end{pmatrix}$ の逆行列の固有値が 2 と 2.5 であるとき，実数 α 及び β の値を求めよ．なお，$\alpha \geq \beta$, $\alpha\beta \neq -3$ とする．求める過程も記述すること.

(長崎大 2011) (m20115017)

0.2233 離散型確率変数 X が m 個の値 x_1, x_2, $\cdots$ x_m を取り，それぞれの値を取る確率を p_1, p_2, $\cdots$, p_m とする $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i = 1\right)$．確率変数 X の期待値を $E(X) = \mu$ とすると，確率変数 X の分散 $V(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} (x_i - \mu)^2 p_i$ を $V(X) = E(X^2) - \mu^2$ と記すことができることを示せ.

(長崎大 2011) (m20115018)

0.2234 次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(長崎大 2011) (m20115021)

0.2235 行列 A が

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

と与えられている．ただし，a は正の実数とする．

(1) A の行列式を求めなさい．

(2) A の余因子 $\widetilde{a}_{ij}$ $(i = 1, 2\,;\ j = 1, 2)$ を求めなさい．

(3) A の逆行列が存在するための条件と，そのときの逆行列を求めなさい．

(4) A の固有値と長さ 1 の固有ベクトルを求めなさい．

(大分大 2011)　　(m20115107)

0.2236 3 行 2 列行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

で定め，その転置行列を A^T で表す．さらに，行列 B と行列 P を

$$B = A^T A\,, \quad P = AB^{-1}A^T$$

により定める．ここで，B^{-1} は B の逆行列を表す．また，A の転置行列 A^T とはその i 行 j 列成分が A の j 行 i 列成分であるような 2 行 3 列行列のことである．

(1) B を求めなさい．

(2) P を求めなさい．

(3) 連立方程式

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解きなさい．

(大分大 2011)　　(m20115108)

0.2237 2次の対称な正方行列 $A = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$ を考える．このとき，行列 A と 2次元のベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いて，2 次式 $f(x, y)$ を $f(x, y) = \boldsymbol{v}^T A\,\boldsymbol{v}$ と定義する．ただし，記号 T は，行列やベクトルの転置を示し，$\boldsymbol{v}^T$ はベクトル $\boldsymbol{v}$ の転置を示すものとする．

(1) 行列 A の固有値，固有ベクトル（ベクトルの大きさは 1 とする）を求めなさい．

(2) 適当な直交行列 U により行列 A を対角化し，$U^T AU = D$ と表現する．ただし，D は 2 次の対角行列とする．行列 U と D を求めなさい．

(3) (2) の結果を利用して，$f(x, y)$ は負の値をとらないことを証明しなさい．

(大分大 2012)　　(m20125108)

0.2238 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 3a \end{pmatrix}$，$(a \neq 0)$，行列 $B = P^{-1}AP$ とする．
ここで，P^{-1} は P の逆行列を表す．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 行列 P^{-1} を求めなさい．

(2) 行列 B を求めなさい.

(3) n を正の整数とするとき, $A^n = PB^nP^{-1}$ が成り立つことを証明しなさい.

(大分大 2014) (m20145101)

0.2239 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ に関して, 次の問いに答えなさい.

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) それぞれの固有ベクトルからなる空間を V とし, V の正規直交基底を求めなさい.

(3) 設問 (2) の結果を用いて, 行列 A を R^TAR により対角化する直交行列 R を求めなさい. ただし, R^T は R の転置行列である.

(熊本大 2011) (m20115201)

0.2240 xy 平面上の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を同じ平面上の点 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ に移す写像

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad ①$$

について, 以下の問いに答えなさい.

(1) この写像を表す行列の固有値と固有ベクトルの組は, 次に示す ② と ③ の二つであることを示しなさい. なお, 固有ベクトルの大きさは, $\sqrt{2}$ に選んである.

$$固有値\ \lambda_1 = \frac{3}{2}\ ,\quad 固有ベクトル\ \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad ②$$

$$固有値\ \lambda_2 = \frac{1}{2}\ ,\quad 固有ベクトル\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad ③$$

(2) 二つの固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立なので, xy 平面上の点を表すベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の 1 次結合によって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$$

のように表現できる. α および β を, x および y を用いて表しなさい.

(3) この写像によって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が移る点 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ を, α, β, $\boldsymbol{x}_1$ および $\boldsymbol{x}_2$ を用いて表しなさい.

(熊本大 2013) (m20135202)

0.2241 次の問いに答えなさい. ただし, $|x| < 1$ とする.

(1) $\left(\tan^{-1} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ を用いて, $\tan^{-1} x$ の Maclaurin 展開を求めなさい. なお,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

である.

(2) $\theta = \tan^{-1}\dfrac{1}{5}$ とするとき,

$$\tan 2\theta = \frac{5}{12},\ \tan 4\theta = \frac{120}{119},\ \tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239}$$

であることを示して, $\dfrac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\dfrac{1}{5} - \tan^{-1}\dfrac{1}{239}$ を導きなさい.

(3) (1),(2) を用いて，π の近似値を小数第 5 位まで求めなさい．必要であれば，以下の補助表を用いてもよい．

補助表

x	x	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^4}{4}$	$\frac{x^5}{5}$	$\frac{x^6}{6}$	$\frac{x^7}{7}$	$\cdots$
$\frac{1}{5}$	0.2	0.02	0.00267	0.0004	0.00006	0.00001	0	$\cdots$
$\frac{1}{239}$	0.00418	0.00001	0	0	0	0	0	$\cdots$

(熊本大 2013)　　(m20135203)

0.2242 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問に答えなさい．

(1) A の逆行列を求めなさい．

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(3) A は対角化可能かどうか調べ，その理由を示しなさい．

(4) A^n を求めなさい．

(熊本大 2017)　　(m20175201)

0.2243 下記の行列 A の逆行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(熊本大 2019)　　(m20195202)

0.2244 次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$$

この漸化式は行列を用いて次のように表現できる．

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えなさい．

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値および対応する固有ベクトルを求めなさい．

(2) $B = P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P を用いて，対角行列 B を求めなさい．

(3) 行列 A^n を求めなさい．ただし，A^n は次式で定義される．

$$A^n = \underbrace{AAA\cdots A}_{n}$$

(4) 上記 (3) の結果を利用して，$a_0 = 0,\ a_1 = 1$ を初期値としたときの数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めなさい．

(熊本大 2020)　　(m20205203)

0.2245 次の積分について，以下の問に答えなさい．

$$I = \iiint_D \frac{xz}{(y+z)(x+y+z)^4}\,dxdydz$$

$$D\ :\ a \leq x+y+z \leq b,\ 0 \leq x, y, z \quad (0 < a < b)$$

(1) $t = x+y+z,\ u = y+z,\ z = z$ と変換した場合のヤコビアン

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,u,z)} \qquad \left(= \frac{\partial(x,y)}{\partial(t,u)}\right)$$

を求めなさい．

(2) D の範囲の概略を $x,\ y,\ z$ からなる直交座標に $a,\ b$ を用いて図示しなさい．

(3) I を $a,\ b$ を用いて求めなさい．

(熊本大 2021) (m20215202)

0.2246 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(熊本大 2022) (m20225202)

0.2247 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ および行列 $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問いに答えなさい．

(1) A の固有値を全て求めなさい．

(2) B の逆行列を求めなさい．

(3) 行列 $(AB)^n$ を求めなさい．ただし，n は自然数である．

(4) 行列 $(BA)^n$ を求めなさい．ただし，n は自然数である．

(5) (4) の結果を用いて，A の逆行列を A と B を使って表しなさい．

(熊本大 2022) (m20225203)

0.2248 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ．

(1) $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を満たす列ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(2) 行列 A の固有値の 1 つは 0 である．この固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(宮崎大 2011) (m20115301)

0.2249 次の各問に答えよ．ただし，答えは，$x + yi$ の形（$x,\ y$ は実数，i は虚数単位）で表せ．

(1) $\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^3$ を計算せよ．

(2) 次の方程式を満たす複素数 z をすべて求めよ．

$$z^2 + i = 0$$

(宮崎大 2011) (m20115302)

0.2250 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) (1) で求めた固有値に対応する固有ベクトルをすべて求めよ．

(宮崎大 2012) (m20125303)

0.2251 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ．

(2) 行列 A の固有ベクトルをすべて求めよ．

(宮崎大 2013) (m20135301)

0.2252 連立一次方程式 $\begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 6 \\ x_1 & & +x_3 & = & 0 \end{cases}$ について，次の各問に答えよ．

(1) この連立一次方程式を，行列 A を用いて $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表したときの A を求めよ．ただし，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{b}$ はベクトルであり，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) 連立一次方程式を解け．

(宮崎大 2014) (m20145303)

0.2253 連立一次方程式

$$\begin{cases} x_1 \qquad + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

について，次の各問いに答えよ．

(1) この連立一次方程式を，行列 A を用いて $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表したときの A を求めよ．ただし，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{b}$ はベクトルであり，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．

(2) この連立一次方程式を解け．

(宮崎大 2015) (m20155302)

0.2254 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の固有ベクトルをすべて求めよ．

(3) A^{99} を求めよ．

(宮崎大 2016) (m20165303)

0.2255　重積分

$$I = \iint_D \sin\frac{2x+y}{9}dxdy\ , \qquad D = \left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leqq\ y \leqq\ x,\ x+\frac{y}{2} \leqq\ 3\pi\right\}$$

について，次の各問に答えよ．

(1)　領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2)　等式 $I = \displaystyle\int_{\boxed{\text{ア}}}^{\boxed{\text{イ}}}\left(\int_{\boxed{\text{ウ}}}^{\boxed{\text{エ}}}\sin\frac{2x+y}{9}dx\right)dy$　の空欄 $\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまる数値あるいは数式を答えよ．

(3)　重積分 I の値を求めよ．

(宮崎大 2016)　　(m20165305)

0.2256　ベクトル

$$\boldsymbol{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \qquad \boldsymbol{u_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について，次の各問に答えよ．

(1)　ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積を $(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})$ と表現する．このとき，$(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2)$，$(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_3)$，$(\boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3)$ の値をそれぞれ求めよ．

(2)　$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ の長さをそれぞれ求めよ．

(3)　$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ と向きが同じで，長さ 1 のベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{w}_1$，$\boldsymbol{w}_2$，$\boldsymbol{w}_3$ とする．このとき，

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = a\boldsymbol{w}_1 + b\boldsymbol{w}_2 + c\boldsymbol{w}_3$$

を満たす実数 a，b，c をそれぞれ求めよ．

(宮崎大 2017)　　(m20175302)

0.2257　関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)\ \text{のとき}) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)\ \text{のとき}) \end{cases}$$

について，次の各問に答えよ．

(1)　$(x,y) \neq (0,0)$　のとき，$f_x(x,y)$ を求めよ．

(2)　$f_x(0,0) = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$ を示せ．

(3)　$f_{xy}(0,0) = \displaystyle\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k} = 0$ を求めよ．

(宮崎大 2017)　　(m20175304)

0.2258　連立一次方程式 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$　について，次の各問に答えよ．

(1)　この連立一次方程式を，行列 A を用いて $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表したときの A を求めよ．ただし，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{b}$ はベクトルであり，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ とする．

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) 連立一次方程式を解け.

(宮崎大 2018)　　(m20185303)

0.2259 関数 $f(x,\ y) = \sqrt{x^2+y^2}$ について，次の各問に答えよ.

(1) $(x,\ y) \neq (0,\ 0)$ のとき，$f_x(x,\ y)$ と $f_{xx}(x,\ y)$ をそれぞれ求めよ.

(2) 次のそれぞれの極限について，存在する場合はその値を求め，存在しない場合はその理由を述べよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f_{xx}(x,\ y)\right)$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f_{x}(x,\ y)\right)$

(宮崎大 2018)　　(m20185304)

0.2260 座標空間において，原点を中心とした半径 a の球 B の体積 V を，以下の手順で求める.

球 B を xy 平面で切ったときの断面のうち，$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ を満たす部分を D と表す.

また，球 B の表面（球面）のうち $z \geqq 0$ を満たす部分を表す方程式を $z = f(x,\ y)$ とする.

さらに，D を xy 平面内の領域とみなし，重積分 $I = \displaystyle\iint_D f(x,\ y)dxdy$ を考える.

このとき，次の各問に答えよ.

(1) 方程式 $z = f(x,\ y)$ を具体的に書き下せ.

(2) 領域 D を xy 平面に図示せよ.

(3) 領域 D を極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて表すと，I は

$$I = \int_{\boxed{\text{ア}}}^{\boxed{\text{イ}}} \left(\int_{\boxed{\text{ウ}}}^{\boxed{\text{エ}}} \boxed{\quad\text{オ}\quad}\, d\theta \right) dr$$

と書き直せる．空欄 $\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{オ}}$ に当てはまる数または式を答えよ.

(4) I を計算することによって，$V = \dfrac{4}{3}\pi a^3$ であることを示せ.

(宮崎大 2018)　　(m20185305)

0.2261 k を実数の定数とする．連立一次方程式

$$\begin{cases} \quad x + 2y + z = 0 \\ -2x + 3y - z = 0 \\ \ -x + ky + z = 0 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (*)$$

について，次の各問いに答えよ.

(1) $(*)$ を，行列 A を用いて $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ と表したときの A を求めよ. ただし，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{0}$ はベクトルであり，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする.

(2) (1) で求めた行列 A に対して，行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(3) $(*)$ が自明解 $x = y = z = 0$ 以外の解ももつような k の値を求めよ.

(4) (3) で求めた k の値に対する $(*)$ の解を，すべて求めよ.

(宮崎大 2019)　　(m20195302)

0.2262 連立一次方程式 $\begin{cases} 2x & -\,y & -3z & = & 2 \\ x & -3y & -2z & = & 5 \\ -x & +\,y & +\,z & = & -3 \end{cases}$ について，次の各問に答えよ．

(1) この連立一次方程式を，行列 A を用いて $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表したときの A を求めよ．ただし，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{b}$ はベクトルであり，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ とする．

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) この連立一次方程式を解け．

(宮崎大 2020)　　(m20205305)

0.2263 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ について，次の各問に答えよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を計算せよ．

(2) 1 次変換 f による，正方形 $\left\{(x, y) \;\middle|\; 1 \leqq x \leqq 2,\ 1 \leqq y \leqq 2\right\}$ の像を座標平面上に図示せよ．

(3) 1 次変換 f による，直線 $x + y = 3$ の像を座標平面上に図示せよ．

(宮崎大 2021)　　(m20215302)

0.2264 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めたそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(3) 適当な直交行列 P により，$P^{-1}AP$ は対角行列となる．そのような直交行列 P を 1 つ求めよ．

(宮崎大 2022)　　(m20225301)

0.2265 直交座標系 $O - XYZ$ におけるベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\boldsymbol{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ と $\boldsymbol{c} = (c_1,\ c_2,\ c_3)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ により作られる三角形に余弦定理を適用して，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積について，$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ が成り立つことを示せ．ただし，θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角であり，また $|\boldsymbol{a}|$ と $|\boldsymbol{b}|$ はそれぞれ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の大きさを表し，$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$，$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2}$ である．

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積は $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$ と定義される．これより，$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ が成り立つことを示せ．

(鹿児島大 2011)　　(m20115403)

0.2266 次の微分を求めなさい．

$$\frac{d}{dx}\left(\log\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|\right)$$

（ただし，対数は自然対数とする.）

(鹿児島大 2011)　　(m20115409)

0.2267 以下の問いに答えなさい．なお，一般の 2×2 の正方行列：$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $\boldsymbol{A}^2 - (a+d)\boldsymbol{A} + (ad - bc)\boldsymbol{E} = 0$ が成り立つこと（ハミルトン・ケーリーの定理）を参考にしても構いません．

(1) 行列：$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$ が成り立つとする．$a+d=1$ のとき，$ad-bc$ の値を求めなさい．

(2) 行列：$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$ について，$\boldsymbol{B}^2$，$\boldsymbol{B}^3$，$\boldsymbol{B}^{100}$ を求めなさい．

(鹿児島大 2011)　　(m20115411)

0.2268 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ を求めなさい．ただし，n は正の整数とする．

(鹿児島大 2011)　　(m20115415)

0.2269 行列 $A = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，行列 $B = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ がある．このとき，以下の各問に答えよ．

(1) AB ならびに BA を求めよ．

(2) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ，$D = 2BA - C$ とするとき，D を求めよ．

(3) n を正の整数，$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$ とするとき，$D^n\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \cos(-n\pi/2+2n\theta+\phi) \\ \sin(-n\pi/2+2n\theta+\phi) \end{pmatrix}$ であることを証明せよ．

(4) $R = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ とするとき $D^n = R$ の形に書けることを示し，β を求めよ．また，このことを利用して逆行列 $(D^n)^{-1}$ を求めよ．

(鹿児島大 2012)　　(m20125404)

0.2270 ベクトルに関する以下の各問に答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ について，$2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = \dfrac{|\boldsymbol{c}|}{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})} \neq 0$ が成り立つ．ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めよ．ただし，求める θ の範囲は $-\pi \leq \theta \leq \pi$ とする．

(2) $\overrightarrow{OA} = (1,2,3)$，$\overrightarrow{OB} = (1,1,-1)$，$\overrightarrow{OC} = (1,0,1)$ であり，原点 O から $\triangle ABC$ に垂線を下ろしたときの交点を D とする．$\overrightarrow{OD}$ ならびに $\triangle ABC$ の面積 S，四面体 $OABC$ の体積 V を求めよ．

(鹿児島大 2012)　　(m20125405)

0.2271 直交座標系 $O-XYZ$ におけるベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\boldsymbol{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$，$\boldsymbol{c} = (c_1,\ c_2,\ c_3)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは互いに直交になり，$|\boldsymbol{a}| = 3$，$|\boldsymbol{b}| = 4$ であるとき，$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\ (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$ を求めよ．ただし，“$\times$”はベクトルの外積を表し，$\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\ \boldsymbol{a}$，$|\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta$ である．$|\boldsymbol{a}|$ と $|\boldsymbol{b}|$ はそれぞれ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の大きさを表す．また，θ は $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へのなす角である．

(2) $\boldsymbol{a} = (2,\ -3,\ 1)$，$\boldsymbol{b} = (1,\ -2,\ 3)$，$\boldsymbol{c} = (1,\ 2,\ -7)$ であるとき，$\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{c} = 10$ を満たすベクトル $\boldsymbol{A}$ を求めよ．ただし，“$\cdot$”はベクトルの内積を表し，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ である．また，外積について $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$ にもなる．

(鹿児島大 2012)　　(m20125409)

0.2272 次の微分を求めなさい．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\log x\right)$　（ ただし，対数は自然対数とする．）

(鹿児島大 2012)　　(m20125411)

0.2273 $2\times\ 2$ の正方行列：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ がある．$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$ とするとき，以下の問いに答えなさい．ただし，$\boldsymbol{O}$ は零行列を表わす．

(1) $ad-bc$ の値と，その値を導出した過程を示しなさい．

(2) $a+d$ の値と，その値を導出した過程を示しなさい．

(鹿児島大 2012)　　(m20125413)

0.2274 次の微分を求めなさい．

$\dfrac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right)\qquad\left(-\dfrac{\pi}{2}\leq\sin^{-1}x\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$

(鹿児島大 2012)　　(m20125416)

0.2275 $2\times\ 2$ の正方行列：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ があるとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めなさい．

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(鹿児島大 2012)　　(m20125418)

0.2276 次の行列の積を計算しなさい．

(1) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 0 & c & d \\ 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3$

(鹿児島大 2012)　　(m20125427)

0.2277 以下の微分を計算せよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left\{\log\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)\right\}$　　(ただし，$0<x<\pi$)

(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right)$　　(ただし，$-1<x<1$)

(鹿児島大 2013)　　(m20135401)

0.2278 直交座標系 $O-xyz$ における次のベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ について，以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_1\times\ \boldsymbol{v}_2$ を求めよ．ただし，$\times$ は外積を表す．

(2) 次の関係を満たす 3 つのスカラー a,b,c の値をそれぞれ求めよ．

$$a\boldsymbol{v}_1+b\boldsymbol{v}_2+c\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2013)　　(m20135405)

0.2279 正方行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ がある．以下の問いに答えなさい．

(1) 行列 A の行列式を求めなさい.

(2) 行列 A の逆行列を求めなさい.

(鹿児島大 2013)　　(m20135409)

0.2280 次の設問に答えなさい.

(1) 列ベクトル $A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ と行ベクトル $B = \begin{bmatrix} d & e & f \end{bmatrix}$ を用いて, 次の行列積を計算しなさい.

① AB　　② BA

(2) 次の行列の階数を求めなさい.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 3 & 16 \end{pmatrix}$$

(3) 次の行列の逆行列を求めなさい.

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$$

ただし, ω は $x^3 = 1$ の 1 つの虚数解とする.

(鹿児島大 2014)　　(m20145403)

0.2281 以下の微分を計算せよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\}$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x}{x^2+1}\right)$

(鹿児島大 2014)　　(m20145406)

0.2282 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$ の固有値は $\dfrac{4}{5}$ であり, 固有単位ベクトルは $\vec{a} = (a_x,\ a_y) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(1, 2)$ である. 以下の問いに答えなさい.

(1) $\vec{a}$ と直交する単位ベクトル $\vec{b} = (b_x,\ b_y)$ を求めなさい. ただし, $b_x < 0$ とする.

(2) 行列 P を $\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{pmatrix}$ とおく. ${}^tP\,P$ と $P\,{}^tP$ を求めなさい. ただし, ${}^tP$ は P の転置行列とする.

(3) ${}^tP\,A\,P$ を求めなさい.

(鹿児島大 2014)　　(m20145414)

0.2283 曲線 $y = \sin^{-1} x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $y = \dfrac{\pi}{2}x$ について, 以下の問いに答えなさい. ただし, $\sin^{-1}$ はアークサインとする.

(1) 上の曲線と直線が囲む領域を図示しなさい.

(2) 曲線と直線の囲む領域の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2014)　　(m20145415)

0.2284 以下の微分を計算せよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\left(1 - xe^{-x^m/m}\right)$　(ただし, $m \neq 0$)

(鹿児島大 2015)　　(m20155401)

0.2285 下記の行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A を構成する三つの縦ベクトルは線形独立かどうかを調べよ．

(2) 直交座標系 $O-xy$ において，行列 A の各要素からなる三直線：$a_i x + b_i y = c_i \quad (i = 1, 2, 3)$ の交点を求めよ．

(鹿児島大 2015)　　(m20155405)

0.2286 次のように行列 A が定義されている．A^6 を求めなさい．

$$A = \begin{pmatrix} -a & \dfrac{1}{2} \\ 2 & a \end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2015)　　(m20155410)

0.2287 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が，逆行列と転置行列の等しい直交行列（$A^T = A^{-1}$）であることを示せ．

(鹿児島大 2015)　　(m20155415)

0.2288 以下の微分を計算せよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\log(x^2 + 4x + 4)$　(ただし，$x > 0$)　　(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\cos x}{1 + \sin x}\right)$　(ただし，$0 < x < \pi$)

(鹿児島大 2016)　　(m20165401)

0.2289 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ が正則であるかどうかを調べよ．

(2) $x - y$ 平面上において，次に示す三直線の交点の座標 (x, y) を求めよ．

$l_1 :\ x + y = 5$

$l_2 :\ x + 2y = -1$

$l_3 :\ x + 3y = -7$

(鹿児島大 2016)　　(m20165405)

0.2290 (1) 次の行列式の値を求めなさい．

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

(2) 次の行列 A に対して $A = A^{-1}$ が成り立つとする．このときの x と y を求めよ．ただし，x は自然数であり，y は整数であるとする．

$$A = \begin{pmatrix} x & -3 \\ 8 & y \end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2016)　　(m20165409)

0.2291 曲線 $y = f(x)$ の任意の点 $(t,\ f(t))$ における接線が x 軸と点 $\left(\dfrac{t}{2},\ 0\right)$ で交わるような $f(x)$ を求めなさい．ただし，$f(x)$ は微分可能であるとする．

(鹿児島大 2016)　　(m20165417)

0.2292 下記の行列 A について以下の問いに答えよ．ただし，虚数単位は i とする．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) A の行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) A の 2 つの固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ を求めよ．

(鹿児島大 2017)　　(m20175405)

0.2293 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，$A+B,\ AB,\ A^2,\ B^TA^T$ をそれぞれ求めよ．

(2) 行列を用いて，次の連立一次方程式を解け（計算過程を示すこと）．

$$\begin{cases} -x+y+z=2 \\ \ \ x+y+z=6 \\ \ \ x+y-z=4 \end{cases}$$

(3) 行列 $A,\ B$ が正則な行列であるとする．このとき，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ となることを示せ．

(鹿児島大 2017)　　(m20175415)

0.2294 次の微分を求めなさい．

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^3(x^2+1)\right)$$

(鹿児島大 2018)　　(m20185406)

0.2295 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(鹿児島大 2018)　　(m20185410)

0.2296 (1) $f(x,y) = x^2+xy+y^3,\ x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t$ のとき，$\dfrac{d}{dt}f\left(x(t),\ y(t)\right)$ を計算しなさい．

(2) $g(x) = e^x,\ x = r\cos t$ のとき，$\dfrac{\partial}{\partial t}g(r\cos t),\ \dfrac{\partial}{\partial r}g(r\cos t)$ を計算しなさい．

(鹿児島大 2018)　　(m20185414)

0.2297 (1) 次の行列を計算しなさい．

$$3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列の積を計算しなさい．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めなさい．

(鹿児島大 2018)　　(m20185415)

0.2298 次の関数を x で微分しなさい．

$$y = (\tan(x))^x$$

(鹿児島大 2018)　　(m20185416)

0.2299 次の微分を計算しなさい．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2x}{1+2x^2}\right)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}(\sin 2x\cos^2 x)$

(鹿児島大 2018)　　(m20185420)

0.2300 次の行列 A がある．以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 以下の連立方程式の解を求めよ．

$$4x+6y=8, \qquad 4x+2y=24$$

(3) 行列 A の固有値を求めよ．

(鹿児島大 2018)　　(m20185424)

0.2301 以下の微分を求めなさい．

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\cos x+1}\right)$$

(鹿児島大 2018)　　(m20185425)

0.2302 O を原点とする直交座標系の 2 点 $P,\ Q$ の位置ベクトルを $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えなさい．

(1) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角が 45°のときの　a の値を求めなさい．

(2) $a=2$ のときの $\triangle OPQ$ の面積 S を求めなさい．

(鹿児島大 2018)　　(m20185427)

0.2303 行列 A を $A=\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えなさい．

(1) A^2 を求めなさい．

(2) 行列式 $|A|$ が $|A|=0$ となる a の値を求めなさい．

(鹿児島大 2018)　　(m20185428)

0.2304 次の定積分を求めよ．

$$\int_0^1\int_{-2}^4\left(x^3\cdot\sqrt{3y+1}\right)dxdy$$

(鹿児島大 2018)　　(m20185433)

0.2305 (1) 次の行列の計算をせよ．

$$5\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \\ -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列の計算をせよ．

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2018)　　(m20185434)

0.2306 以下の微分を計算せよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2-4x-5}{x^2+3x+2}\right)$ (2) $\dfrac{d}{dx}\left[\cos\left(\log ax\right)\right]$

(鹿児島大 2021) (m20215401)

0.2307 行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の転置行列を ${}^t\boldsymbol{A}$ とするとき，${}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ を計算せよ.

(2) 行列 $\boldsymbol{B}$ の逆行列 $\boldsymbol{B}^{-1}$ を求めよ.

(3) 行列 $\boldsymbol{B}$ の固有値 λ を求めよ.

(鹿児島大 2021) (m20215405)

0.2308 以下の問いに答えなさい.

(1) 平面 P の方程式を $x+y+\alpha z+1=0$，平面 Q の方程式を $x+\alpha y+z-1=0$ とする．平面 P と Q のなす角が直角となるような α の値を求めなさい.

(2) ベクトル $\overrightarrow{A}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{B}=\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{C}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ が線形従属となるような実数 β の値をすべて求めなさい.

(鹿児島大 2021) (m20215408)

0.2309 行列 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & a \\ -1 & a & 1 \\ -2 & a & -2 \end{pmatrix}$ の行列式が 4 となるときの a の値を求めなさい.

(鹿児島大 2021) (m20215409)

0.2310 行列 $B=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有ベクトル $\overrightarrow{v_1}=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対応する固有値 λ_1 を求めなさい．また，行列 B の固有値 $\lambda_2=2$ に対応する大きさが 1 の固有ベクトル $\overrightarrow{v_2}$ をすべて求めなさい.

(鹿児島大 2021) (m20215410)

0.2311 以下の微分を計算せよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-x-1}\right)$ (2) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sin x}{1-\cos x}\right)$

(鹿児島大 2022) (m20225401)

0.2312 下記の行列 A について，以下の問いに答えよ.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A を構成する 3 つの縦ベクトルは線形独立であるかどうかを調べよ.

(2) 直交座標系 $O-xyz$ において，行列 A の転置行列を行列 B として，$(x\ \ y\ \ z)B=(10\ \ 5\ \ 1)$ の解を求めよ.

(鹿児島大 2022) (m20225405)

0.2313 $\dfrac{d}{dx}\left(\cos(\sin x^2)+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}\right)$ を求めなさい.

(鹿児島大 2022) (m20225406)

0.2314 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) 行列 A の行列式の値を求めなさい.

(2) 行列 A の逆行列を求めなさい.

(鹿児島大 2022)　　(m20225409)

0.2315 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2011)　　(m20115501)

0.2316 次の微分を計算しなさい.

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x - x\sqrt{1-x^2}\right) \quad \text{（ただし，} -\frac{\pi}{2} < \sin^{-1} x < \frac{\pi}{2} \text{とする）}$$

(室蘭工業大 2011)　　(m20115507)

0.2317 以下の問いに答えよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と各々の固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような，正則な正方行列 P を求めよ．ただし, 行列 P は直交行列（逆行列と転置行列が等しい行列）とする.

(室蘭工業大 2011)　　(m20115508)

0.2318 以下の (1),(2),(3) に答えよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ，$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ としたとき，行列の積 AB を求めなさい.

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & 8 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の階数を求めなさい.

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -x \\ 1 & -6 & 11 & 6 \end{vmatrix}$ が正となる実数 x の条件を求めなさい.

(室蘭工業大 2011)　　(m20115511)

0.2319 行列 $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ.

(室蘭工業大 2015)　　(m20155501)

0.2320 $y = \cos x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ.

(室蘭工業大 2015)　　(m20155503)

0.2321 3 つの行列が，以下のように与えられているとする．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \ , \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき，次の行列積をそれぞれ求めよ．

$$AB \ , \qquad CAB \ , \qquad BC$$

(室蘭工業大 2015)　　(m20155508)

0.2322 3 つのベクトルが，以下のように与えられているとする．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

このとき，$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ を求めよ．さらに，次の行列式を計算せよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(室蘭工業大 2015)　　(m20155509)

0.2323 2 変数関数 $z = z(x, y)$，$x(r, \theta) = r\cos\theta$，$y(r, \theta) = r\sin\theta$ の偏微分に関する以下の問いに答えよ．ただし，以下では，$r = 0$ の場合は除いて考える．

(1) 偏微分 $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を用いて表せ．

(2) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$ となることを示せ．

(室蘭工業大 2015)　　(m20155512)

0.2324 次の関数を微分せよ．

(1) $y = x^3 \cos 3x$　　(2) $y = \log\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$　　(3) $y = \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^3$

(室蘭工業大 2015)　　(m20155514)

0.2325 行列に関する設問に答えよ．

(1) 下記に示す行列 A の固有値，固有ベクトルを全て求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 下記に示す行列 B の固有値，固有ベクトルを全て求めよ．

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2015)　　(m20155515)

0.2326 以下の行列 A の行列式を求めなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2016)　　(m20165504)

0.2327 行列に関する以下の問いに答えよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ の逆行列を計算せよ.

(2) (1) で求めた逆行列を利用して,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

の x, y, z を求めよ.

(室蘭工業大 2016)　　(m20165507)

0.2328 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2016)　　(m20165513)

0.2329 以下の 3 つのベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ が一次独立であるとき, 実数 x が満たす条件を求めよ.

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ x \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2016)　　(m20165514)

0.2330 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の両方に直交する単位ベクトルを求めなさい.

(室蘭工業大 2017)　　(m20175501)

0.2331 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ に関する以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求め, 各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) $AX = BA$ を満足する行列 X を求めよ.

(室蘭工業大 2017)　　(m20175506)

0.2332 以下の微分を計算せよ.

$$\frac{d}{dx}\left\{\sin^{-1}\left(x^2-1\right)\right\} \qquad \left(0 < x < \sqrt{2}\right)$$

(室蘭工業大 2017)　　(m20175507)

0.2333 関数 (1) と (2) を x で微分せよ.

(1) $y = \log\left(x^3+4x^2+5x+2\right)$　　(2) $y = \cos\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)e^{-x}$

(室蘭工業大 2018)　　(m20185505)

0.2334 $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{1}{2x-1}\right)$ を計算せよ. ただし, $x \neq \dfrac{1}{2}$ とする.

(室蘭工業大 2018)　　(m20185507)

0.2335 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に関する以下の問いに答えよ.

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ.

(2) 行列式 $|A|$ を計算せよ.

(室蘭工業大 2018) (m20185509)

0.2336 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，以下の行列

$$2A^3 - 9A^2 + 10A + 8E$$

を求めなさい．ただし，E は単位行列とする.

(室蘭工業大 2018) (m20185513)

0.2337 直交座標系において，ベクトル関数 $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z) = (2y, -2x, z)$ が与えられているとき，以下の問いに答えよ．ただし，$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ である.

(1) $\nabla(A \cdot A)$ $\quad (= \mathrm{grad}(A \cdot A)\ )$ を求めよ.

(2) $\nabla \cdot (xyzA)$ $\quad (= \mathrm{div}(xyzA)\ )$ を求めよ.

(3) $\nabla \times A$ $\quad (= \mathrm{rot} A\ )$ を求めよ.

(4) 4 点 $P(1,1,0)$, $Q(-1,1,0)$, $R(-1,-1,0)$, $S(1,-1,0)$ を頂点とする四角形の辺に沿って $P \to Q \to R \to S \to P$ の順に一周する線積分 $\displaystyle\oint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ.
ただし，$d\boldsymbol{r}$ は線積分における線素ベクトルを表す.

(室蘭工業大 2021) (m20215504)

0.2338 次の行列 A の固有値及び固有ベクトルを求めよ.

$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$

(室蘭工業大 2022) (m20225503)

0.2339 以下の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2022) (m20225507)

0.2340 行列 $A = \begin{pmatrix} a^5 & 0 & a^5 & a^5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ a^5 & 1 & a^5 & 2a^5 \\ a^5 & 1 & 2a^5 & a^5 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) A の行列式を求めよ.

(2) $a = -\dfrac{1}{2} - j\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，A の行列式の値を示せ．ただし，$j = \sqrt{-1}$ である.

(室蘭工業大 2022)　　(m20225511)

0.2341 直角座標系 (x, y, z) において，スカラー関数 $f = x^2 + y^2 + 2z$ が与えられているとき，

以下の問いに答えよ．ただし，$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z} \right)$ である．

(1) $\nabla f \ \left(= \mathrm{grad}(f) \right)$ を求めよ．

(2) $\nabla \cdot (\nabla f) \ \left(= \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) \right)$ を求めよ．

(3) $\nabla \times (\nabla f) \ \left(= \mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) \right)$ を求めよ．

(4) 点 $A(1, 0, 0)$ から点 $B(0, 1, 0)$ に向かう経路 C 上の線積分 $\displaystyle\int_C (\nabla f) \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．

ただし，$d\boldsymbol{r}$ は線積分における線素ベクトルを表す．また，経路 C は任意に設定してよい．

(室蘭工業大 2022)　　(m20225512)

0.2342 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ， $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ ， $C = (1 \quad -2)$ のとき，次の問いに答えよ．

(1) $AX = B$ を満たす行列 X を求めよ．

(2) $YA = C$ を満たす行列 Y を求めよ．

(香川大 2016)　　(m20165704)

0.2343 $z = e^{x^2}\left(x + \dfrac{1}{y} \right)$, $x = \sqrt{2}t$, $y = e^{t^2}$ のとき，$\dfrac{dz}{dt}$ を t を用いて表せ．

(香川大 2021)　　(m20215701)

0.2344 以下のベクトル $\vec{v}$ の集合 V は，線形空間（ベクトル空間とも呼ぶ）である．V の次元と基底を求めよ．

$$V = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z, u \text{ は } \left\{ \begin{array}{c} x + 2y + 3z + u = 0 \\ 2x + 3y + z + 2u = 0 \\ 3x + 5y + 4z + 3u = 0 \\ x + y - 2z + u = 0 \end{array} \right. \text{ の解} \right\}$$

(香川大 2022)　　(m20225705)

0.2345 以下の行列 A は，適当な正則行列 P を用いて $P^{-1}AP = B$ のように相似変換し，行列 B を対角行列にすることができる．対角行列となる B を求めよ．また，P の一例を示せ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(香川大 2022)　　(m20225706)

0.2346 次のベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ について，以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合として表せ．

(島根大 2012)　　(m20125804)

0.2347 写像 $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} ax^2+2y-2z+w \\ x-y+z+bw+c-2 \\ 2x+(d+1)yz-w \end{pmatrix}$$

で定める．このとき，f が線形写像になり，かつ核の次元が 2 となる a,b,c,d の値を求めよ．

(島根大 2012)　　(m20125805)

0.2348 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) A を直交行列を用いて対角化せよ．

(島根大 2012)　　(m20125806)

0.2349 次の (1), (2), (3) に答えよ．$\mathbb{R}^n$ は n 次列ベクトルのなす実ベクトル空間を表すことにする．

(1) (a) 「実ベクトル空間 V の n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ が V の基底である」ことの定義を述べよ．

(b) 実ベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立であるとき，$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4$ が 1 次従属であるならば，$\boldsymbol{v}_4$ が $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合で表せることを示せ．

(2) 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，写像 $f_A:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^3$ を $f_A(\boldsymbol{v})=A\boldsymbol{v}\ \ (\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^5)$ と定める．このとき，

(a) 写像 f_A は線形写像であることを示せ．

(b) f_A の核 $\mathrm{ker}f_A$ の基底を求めよ．

(c) $\mathbb{R}^5$ の標準基底と $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{w_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ w_2=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ w_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ に関する f_A の表現行列を求めよ．

(3) n 次実正方行列 B に対して，線形写像 $f_B:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ を $f_B(\boldsymbol{v})=B\boldsymbol{v}\ \ (\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n)$ と定める．このとき，f_B が全射であれば，B は正則行列であることを証明せよ．

(島根大 2013)　　(m20135801)

0.2350 $(3,4)$ 型行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，写像 $f_A:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ を $f_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ と定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) f_A は線形写像であることを示せ．

(2) f_A の核 $\mathrm{Ker}f_A$ に属するベクトルをすべて求めよ．

(3) f_A の像 $f_A\left(\mathbb{R}^4\right)$ の基底を求めよ．

(4) $f_A(\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{y}$ をすべて求めよ．もしそのような $\boldsymbol{y}$ が存在しない場合はその理由を述べよ．

(島根大 2014)　　(m20145801)

0.2351　以下に現れる関数はすべて $\mathbb{R}^2$ 上で C^1 級とする．写像

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 , \quad f(x,y) = \big(u(x,y),\ v(x,y)\big)$$

と二変数関数 $g(u,v)$ の合成を $F = g \circ f$ と定める．このとき，

$$F(x,y) = (g \circ f)(x,y) = x$$

ならば，以下の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\begin{pmatrix} g_u & g_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(島根大 2014)　　(m20145806)

0.2352　(1)　次の行列 A と行列 A' の階数を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4a+13 \\ 3 & 0 & 4 & a \end{pmatrix}$$

(2)　連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x - y + 3z = 4a + 13 \\ 3x \quad + 4z = a \end{cases}$$

の解が存在するための必要十分条件を (1) で求めた階数を用いて述べよ．さらに，解が存在するような a の値をすべて求めよ．

(3)　(2) の連立 1 次方程式が解をもつとき，その一般解を求めよ．

(島根大 2015)　　(m20155803)

0.2353　$D = \big\{(x,y) : 5x^2 - 6xy + 5y^2 \leq 4,\ y \geq x\big\}$ とする．

(1)　変数変換 $x = u - \dfrac{v}{2}$, $y = u + \dfrac{v}{2}$ を考える．この変換により，D にうつされる (u,v) 平面の領域を求めよ．

(2)　$\displaystyle\iint_D \exp\left(\frac{5x^2 - 6xy + 5y^2}{4}\right) dxdy$ の値を求めよ．ただし $\exp(x) = e^x$ である．

(島根大 2015)　　(m20155807)

0.2354　(1)　$R > 0$ とする．$\Omega(R) = \big\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2,\ 0 \leq y \leq x\big\}$ とするとき，
重積分 $\displaystyle\iint_{\Omega(R)} \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2} dxdy$ を計算せよ．

(2)　$\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_0^R \left(\int_0^x \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2} dy\right) dx$ を求めよ．

(3)　α を定数とし，$(x,y) \neq (0,0)$ に対して $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\alpha/2}$ と定める．$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(島根大 2016)　　(m20165804)

0.2355　微分方程式 $y = x\dfrac{dy}{dx} + 3 \cdot \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ について，以下の設問に答えよ．

(1)　$\dfrac{dy}{dx} = p$ と置き，置き換えた式を示せ．

(2) 設問 (1) の結果を x に関して微分せよ.

(3) 設問 (2) の結果から p, x のみを含む微分方程式を示せ.

(4) $\dfrac{dp}{dx} \neq 0$ のとき x を p を用いて表せ.

(5) $\dfrac{dp}{dx} \neq 0$ のとき y を p を用いて表せ.

(6) $\dfrac{dp}{dx} \neq 0$ のとき x と y はある 1 つの半円上にあることを示せ. また, その半径を示せ.

(島根大 2016) (m20165806)

0.2356 以下の設問に答えよ. ただし, T $(T > 0)$ および ϕ は定数である.

(1) 次の定積分を計算せよ. $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt$

(2) 次の定積分を計算せよ. $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^{T} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right)\right]^2 dt$

(3) 次式が成り立つことを示せ. $\displaystyle\int_0^{T} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right) dt = 0$

(4) 次の定積分を計算せよ. $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^{T} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{3}\right)\right]^2 dt$

(島根大 2017) (m20175801)

0.2357 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を求めよ.

(島根大 2017) (m20175803)

0.2358 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} , \quad f(\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} , \quad f(\boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となるような線形写像とする, f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ と像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求めよ.

(島根大 2017) (m20175804)

0.2359 $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x - 3y + z = 0 \right\}$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であることを示せ.

(2) W の次元を求めよ.

(3) $\boldsymbol{v}$ を W に属さない $\mathbb{R}^3$ のベクトルとし，$U=\{k\boldsymbol{v}\mid k\in\mathbb{R}\}$ とする．このとき，次が成り立つことを示せ．

$$W+U=\mathbb{R}^3\ , \qquad W\cap U=\{0\}$$

ただし，$W+U=\{\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}\mid \boldsymbol{w}\in W,\ \boldsymbol{u}\in U\}$ である．

(島根大 2017)　　(m20175805)

0.2360 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) A の行列式の値を求めよ．

(2) A の階数を求めよ．

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(4) $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f を次のように定める．

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 2x-z \\ -x-y+z \\ 3x+y-2z \end{pmatrix}$$

(a) f は線形写像であることを示せ．

(b) $f(\mathbb{R}^3)$ の一組の基底を求めよ．

(島根大 2019)　　(m20195804)

0.2361 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

(1) A の固有値，固有ベクトルを求めよ．　　(2) A^n を求めよ．

(島根大 2020)　　(m20205803)

0.2362 a を実数，$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．線形写像 $f\ :\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を

$$f(X)=AX$$

と定める．f の核を $\mathrm{Ker}f$，像を $\mathrm{Im}f$ で表す．必要なら a による場合分けを行い，それぞれの場合に $\mathrm{Ker}f$, $\mathrm{Im}f$ の次元を求めよ．さらに $\mathrm{Ker}f$, $\mathrm{Im}f$ の基底をそれぞれ 1 組ずつ求めよ．

(島根大 2020)　　(m20205805)

0.2363 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$　　(2) $\displaystyle\int x\,(\log x)^2\,dx$

(首都大 2014)　　(m20145907)

0.2364 ベクトル場 $\overrightarrow{a}=y\overrightarrow{i}-x\overrightarrow{j}$ と曲線 C: $\overrightarrow{r}=(\cos^2 t)\overrightarrow{i}+(\sin^2 t)\overrightarrow{j}$　$\left(0\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $d\overrightarrow{r}$ を計算せよ．

(2) 内積 $\overrightarrow{a}\cdot d\overrightarrow{r}$ を計算せよ．

(3) (2) の結果を用いて，C に沿う線積分 $I = \int_C \vec{a} \cdot d\vec{r}$ の値を求めよ．

(首都大 2016)　　(m20165913)

0.2365 (1) 次の関数について $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．　$x = \dfrac{a}{\cos\theta}$,　$y = b\tan\theta$　（ a, b は定数，ただし，$a \neq 0$ ）

(2) 次の関数について $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．　$y = \dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x\right)$

(3) 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x \to +0} x^x$

(東京都立大 2020)　　(m20205910)

0.2366 $y = \cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ の逆関数 $y = \cosh^{-1} x$ について，次の各式を示せ．

(1)

$$y = \cosh^{-1} x = \pm\log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

(2) $y > 0$ の $y = \cosh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ について

$$y' = \frac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

(滋賀県立大 2011)　　(m20116001)

0.2367 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないような k の値を求めよ．また，$k = 2$ のとき A の逆行列を求めよ．

(滋賀県立大 2011)　　(m20116003)

0.2368 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ （ただし，a, b, c, d は実数）に対して，A が正則になるための条件を求め，

A の余因子行列を用いて A^{-1} を求めよ．

(滋賀県立大 2015)　　(m20156003)

0.2369 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ について　次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．ただし，重複がある場合は，その重複度も答えよ．

(2) A の固有ベクトルを求めよ．

(滋賀県立大 2016)　　(m20166002)

0.2370 極限 $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\left(\tan^{-1}(3x) - \frac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．ただし，$\tan^{-1}$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．

(滋賀県立大 2021)　　(m20216001)

0.2371 行列 $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ は対角化可能である．対角化のための正則行列 P を求めて，A を対角化せよ．

(滋賀県立大 2021)　　(m20216004)

0.2372 1 次変換 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ による直線 $y = 3x - 2$ の像の方程式を求めよ.

(滋賀県立大 2022)　　(m20226003)

0.2373 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \left(\sqrt{3},\ 1,\ 0\right)$, $\boldsymbol{b} = (0,\ 2,\ 0)$, $\boldsymbol{c} = \left(1,\ \sqrt{3},\ 2\sqrt{3}\right)$ が, いずれも原点 $(0,\ 0,\ 0)$ を始点として存在しているとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の成す角の大きさを求めよ.

(3) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を共に含む平面を α と呼ぶとき, 平面 α と $\boldsymbol{c}$ の成す角の大きさを求めよ.

(宇都宮大 2014)　　(m20146102)

0.2374 $y = \log\left(x^2 + 1\right)$ のとき, $\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ.

(宇都宮大 2014)　　(m20146104)

0.2375 平面上の閉領域 D を,

$$D = \{(x, y)\,|\, 0 \leqq\ x \leqq\ y,\ 0 \leqq\ y \leqq\ 1\}$$

と定める. D における積分 $I = \displaystyle\int_D e^{y^2} dxdy$ について, 下の問いに答えよ.

(1) 閉領域 D を図示せよ. 途中の過程も記入せよ.

(2) 積分 I を, 累次積分 $\displaystyle\int_a^b \left(\int_c^d e^{y^2} dx\right) dy$ の形で表し, a, b, c, d を求めよ. なお, a, b, c, d は定数とは限らない. 計算経過も記入せよ.

(3) 積分 I の値を計算せよ. 計算経過も記入せよ.

(宇都宮大 2015)　　(m20156104)

0.2376 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えなさい.

(1) $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$ が成り立つことを示しなさい. ただし, $\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{O}$ はそれぞれ, 2 次の単位行列および 2 次の零行列とする.

(2) $\boldsymbol{A}^6$ を求めなさい.

(3) $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めなさい.

(宇都宮大 2019)　　(m20196104)

0.2377 次の行列について, 下の問いに答えよ. なお, 計算過程も記入せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) $A^2 - 5A + 6E = O$ が成り立つことを示せ. ここで, E と O は, それぞれ, 2 次の単位行列と 2 次の零行列である.

(2) A^6 を求めよ.

(3) A^n を求めよ. ただし, n は自然数である.

(宇都宮大 2022)　　(m20226101)

0.2378 次のベクトルについて，下の問いに答えよ．なお，計算過程も記入せよ．

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ は 3 次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の基底になることを示せ．

(2) $\vec{x}_1$ を正規化したベクトル $\vec{y}_1$ を求めよ

(3) $\vec{y}_1$, $\vec{x}_2$ の一次結合で，$\vec{y}_2 \cdot \vec{y}_1 = 0$ となるベクトル $\vec{y}_2$ を求めよ．ただし，$\vec{y}_2 \cdot \vec{y}_1$ は $\vec{y}_2$ と $\vec{y}_1$ の内積を表し，$|\vec{y}_2| = 1$ とする．

(4) $\vec{y}_1$, $\vec{y}_2$, $\vec{x}_3$ の一次結合で，$\vec{y}_3 \cdot \vec{y}_1 = 0$ かつ $\vec{y}_3 \cdot \vec{y}_2 = 0$ となるベクトル $\vec{y}_3$ を求めよ．ただし，$|\vec{y}_3| = 1$ とする．

(宇都宮大 2022) (m20226102)

0.2379 行列 $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値をすべて求めよ．

(はこだて未来大 2011) (m20116301)

0.2380 線形写像 $f : R^3 \to R^3$ は，${}^t(1, 0, 0)$ を ${}^t(1, 0, -1)$ へ，${}^t(0, 1, 1)$ を ${}^t(0, 1, 0)$ へ，${}^t(0, 1, 2)$ を ${}^t(2, 1, -2)$ へ，それぞれ移すものとする．ここで ${}^t\boldsymbol{a}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ の転置を表す．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 3 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

が 1 次従属であることを示せ．

(2) $f(x) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in R^3)$ となるような行列 A を求めよ．

(3) (2) で求めた行列 A について，行列 A の階数を求めよ．

(はこだて未来大 2011) (m20116303)

0.2381 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ただし，$a \neq 3$ とする．

(1) 逆行列 A^{-1} の成分がすべて整数となるような a の条件をすべて示せ．

(2) (1) で求めた条件における逆行列をすべて求めよ．

(はこだて未来大 2012) (m20126301)

0.2382 2 次実対称行列について，以下の問いに答えよ．

(1) 2 次実対称行列 $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) 2 次実対称行列 S が正定値であるとは，すべての $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$ に対して ${}^t\boldsymbol{x}S\boldsymbol{x} > 0$ が成立することをいう．ここで ${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置である．(1) の行列 B が正定値であることを示せ．

(3) 2 次実対称行列 $C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ の固有値をそれぞれ λ_1, λ_2 とする．行列 C が正定値となるための λ_1, λ_2 の条件を求めよ．

(はこだて未来大 2012)　　(m20126302)

0.2383 次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right) dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}\, dx$

(はこだて未来大 2012)　　(m20126303)

0.2384 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の階数を求めよ．

(3) $\left\{ A\boldsymbol{x} \;\middle|\; \boldsymbol{x} \in R^3 \right\}$ の基底を求めよ．ただし，R^3 は実 3 次元数ベクトル空間を表す．

(はこだて未来大 2013)　　(m20136303)

0.2385 $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対する正接関数 $\tan y$ の逆関数を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ とする．すなわち，

$$y = \mathrm{Tan}^{-1}x \iff x = \tan y \qquad \left(x \in (-\infty, \infty),\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) $y = \mathrm{Tan}^{-1}x$ のグラフの概形を描け．

(2) $\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{2}{3} + \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{5}$ の値を求めよ．ただし，必要であれば，次の正接関数に対する加法定理は既知として用いてよい．

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

(はこだて未来大 2013)　　(m20136305)

0.2386 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$ で定まる線形写像 $f \ :\ R^3 \to R^3$, $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，a は実数とする．

(1) A の階数 $\mathrm{rank}A$ を求めよ．

(2) A の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の基底を求めよ．

(3) A の像 $\mathrm{Im}(f)$ の基底を求めよ．

(はこだて未来大 2014)　　(m20146301)

0.2387 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ および，実ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって ${}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{x} = 1$ で表される 2 次曲線 C について，以下の問いに答えよ．ここで，${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す．

(1) 行列 B を対角化せよ．

(2) 2 次曲線 C を座標平面上に図示せよ．

(はこだて未来大 2014)　　(m20146302)

0.2388 t を媒介変数として，方程式

$$x = \cos^3 t\,, \qquad y = \sin^3 t \qquad \left(0 \leqq\ t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

で表される座標平面上の曲線を D とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ をそれぞれ求めよ．

(2) 曲線 D の接線のうち，接点の x 座標が $\dfrac{27}{125}$ であるものを求めよ．

(3) 曲線 D の長さを求めよ．

(はこだて未来大 2014)　　(m20146304)

0.2389 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ．

(3) 行列 A が対角化可能かどうか調べよ．さらに，対角化可能であれば行列 A を対角化せよ．

(はこだて未来大 2015)　　(m20156301)

0.2390 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\left(\frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}\right)$ を求めよ．

(2) $0 < x < \pi$ のおいて，$\dfrac{d}{dx}\log\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)$ を求めよ．

(3) $\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{3}{5} + \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{4}{5}$ を求めよ．
ただし．$\sin x$ の逆関数 $\mathrm{Sin}^{-1}x$ の値域は，$\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ とする．

(はこだて未来大 2015)　　(m20156302)

0.2391 実数 $a > 0$ に対して，行列 A, P, B を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = P^{-1}AP$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) P^{-1} を求めよ．

(2) B が異なる 3 個の固有値をもたないとき，a の値を定めよ．

(3) a が (2) で求めた値であるとき，$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し

$$B^n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満たす x, y, z を求めよ．

(はこだて未来大 2016)　　(m20166301)

0.2392 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ -5 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ で定まる線形写像

$$f\ :\ R^4 \to R^3\ , \qquad f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) A の階数 rank A を求めよ．

(2) f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の基底を求めよ．

(3) f の像 $\mathrm{Im}(f)$ の基底を求めよ．

(はこだて未来大 2017)　　(m20176301)

0.2393 $f(x)=\arctan x$，つまり $f(x)$ を $\tan x$ の逆関数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の第 3 次導関数 $f^{(3)}(x)$ を求めよ．

(2) 以下の等式を満たす 4 つの定数 a_0，a_1，a_2，a_3 をすべて求めよ．

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+o(x^3) \qquad (x\to 0)$$

ただし，記号 o はランダウのスモールオーである．

(3) $f\left(\sqrt{3}\right)$ の値を求めよ．

(4) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} f(x)dx$ の値を求めよ．

(はこだて未来大 2017)　　(m20176302)

0.2394 3 次正方行列

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ．

(3) 行列 A が対角化可能かどうか調べよ．さらに，対角化可能であれば行列 A を対角化せよ．

(はこだて未来大 2018)　　(m20186301)

0.2395 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x+5^x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}$ を求めよ．

(はこだて未来大 2018)　　(m20186303)

0.2396 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ で定まる線形写像

$$f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3,\ f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right)=A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) A の階数 rank A を求めよ．

(2) A の核 Ker(f) の基底を求めよ．

(3) 行列 A とその転置 ${}^tA$ の積 $A{}^tA$ が対角化可能かどうか調べ，対角化可能なら $P^{-1}A{}^tAP$ が対角行列となるような直交行列 P を求めよ．

(はこだて未来大 2021)　　(m20216301)

0.2397 i は虚数単位とする．3 次の正方行列

$$A=\begin{pmatrix} 1-i & 1+i & 1+i \\ 1+i & 1-i & 1+i \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた各固有値に対し固有空間の基底を求めよ．

(3) 行列 A が対角化可能かどうか調べよ．さらに，対角化可能ならば $P^{-1}AP$ が対角行列になるような行列 P と P^{-1} を求めよ．

(はこだて未来大 2022)　　(m20226301)

0.2398 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & 11 & 8 & 13 \\ 2 & 8 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ の値を求めよ

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(東京海洋大 2011)　　(m20116401)

0.2399 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -8 \\ -1 & 2 & 14 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(東京海洋大 2011)　　(m20116402)

0.2400 行列 $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(東京海洋大 2012)　　(m20126402)

0.2401 行列 $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -6 \\ -3 & 5 & -6 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(東京海洋大 2012)　　(m20126403)

0.2402 以下の関数を x で微分しなさい．

(1) $y = 2x^3 - 5x^2$ (2) $y = \sin^2 x$

(3) $y = \left\{\log\left(\sqrt{x}+1\right)\right\}^2$ (4) $y = \displaystyle\int_x^{2x} \sin\theta d\theta$

(東京海洋大 2013) (m20136401)

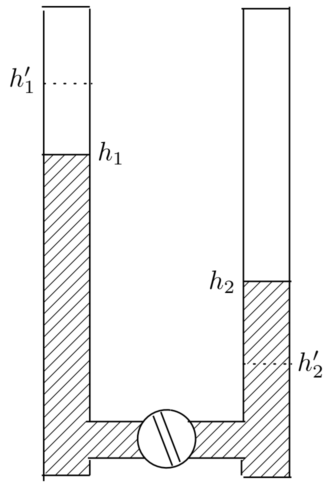
0.2403 下記の定積分，または不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int_0^1 (3x^3 + 4x^2 - 2)dx$ (2) $\displaystyle\int (\cos 2x + \sin 3x)dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x^2}dx$

(4) $\displaystyle\int x\cos(1+x^2)dx$ (5) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$

(東京海洋大 2013) (m20136402)

0.2404 右図のように同じ内径のパイプの底部をコック付パイプで連結して垂直に立てた．コックを開ける前の水位は左のパイプが h_1' $[cm]$ で右のパイプは h_2' $[cm]$ であった．コックを開けて t[秒] 後には水位が h_1 $[cm]$ と h_2 $[cm]$ になった．ただし，水位はパイプの底部からの高さである．次の各問に答えなさい．



(1) 左のパイプの水位の低下速度 dh_1/dt $[cm/$秒$]$ は，両パイプ間の水位差に比例していた．dh_1/dt を表す次式を完成しなさい．ただし，$\boxed{\text{ア}}$ には整数または分数が入り，$\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ および $\boxed{\text{エ}}$ には h_1', h_2' または h_1 のいずれかが入る．また，k_1 は係数である．

$$\frac{dh_1}{dt} = -k_1\left\{\boxed{\text{ア}}\times\boxed{\text{イ}} - \left(\boxed{\text{ウ}}+\boxed{\text{エ}}\right)\right\}$$

(2) t[秒] 後における水位 h_1 を表す次式を完成しなさい．ただし，$\boxed{\text{a}}$ には整数または分数が入り，$\boxed{\text{b}}$，$\boxed{\text{c}}$ および $\boxed{\text{d}}$ には h_1', h_2', k_1, t からなる式が入る．また，h_1 を導く過程も書きなさい．

$$h_1 = -\boxed{\text{a}}\left\{\boxed{\text{b}}\times\ e^{\left(\boxed{\text{c}}\right)} + \boxed{\text{d}}\right\}$$

(東京海洋大 2014) (m20146404)

0.2405 行列 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(東京海洋大 2016) (m20166406)

0.2406 (1) $D = \left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leqq\ x+y \leqq\ 1,\ 0 \leqq\ x-y \leqq\ 2\right\}$ に対し，重積分 $\displaystyle\iint_D e^{x+y}dxdy$ の値を求めよ．

(2) 積分の順序を入れ替えることにより，重積分 $\displaystyle\int_{-1}^1\left(\int_x^1 y^2 e^{xy}dy\right)dx$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2016) (m20166409)

0.2407 $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ に対して，$B=P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P と対角行列 B を求めよ．

(東京海洋大 2021)　　(m20216407)

0.2408 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，$B=P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P と対角行列 B を求めよ．

(東京海洋大 2022)　　(m20226402)

0.2409 次の不定積分，または定積分を求めなさい．

1) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}dx$　　2) $\displaystyle\int 2\sin x\cos x dx$

3) $\displaystyle\int_1^4 \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx$　　4) $\displaystyle\int_1^2 x^2\log x\, dx$

(東京海洋大 2022)　　(m20226407)

0.2410 $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，次の各問いに答えなさい．

(1) 行列 P の行列式の値と逆行列を求めなさい．

(2) $P^{-1}Q$ の値と固有値を求めなさい．

(和歌山大 2013)　　(m20136501)

0.2411 次の微分方程式について，与えられた初期条件を満たす特殊解を求めなさい．

(1) $y\dfrac{dy}{dx}=2x^2$,　　$y(0)=1$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\sin 2x$,　　$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}-4y=0$,　　$y(0)=1,\ y'(0)=-1$

(和歌山大 2013)　　(m20136505)

0.2412 次の極限値を求めなさい．

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$$

(和歌山大 2016)　　(m20166501)

0.2413 $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき，次の各問いに答えなさい．

(1) A のすべての固有値を求めなさい．

(2) A の各固有値に対する固有ベクトルを求めなさい．

(3) A を対角化する正則行列 P を求め, A を対角化しなさい．

(和歌山大 2016)　　(m20166504)

0.2414 a が 0 でない実数のとき，次の不定積分を求めなさい．

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$$

なお，解答に際して，

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C \qquad (C\text{ は積分定数})$$

を用いてよい．

(和歌山大 2017) (m20176501)

0.2415 次式を満たす x, y, z の値を求めなさい．

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & z \\ x & 3 \\ 2 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 10 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

(和歌山大 2017) (m20176504)

0.2416 以下の (1)，(2) に示す行列の逆行列をそれぞれ求めなさい．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(和歌山大 2017) (m20176505)

0.2417 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の (1)，(2) を求めなさい．

(1) この行列の固有値

(2) この行列の固有ベクトル

(和歌山大 2017) (m20176506)

0.2418 関数 $f(x)$ に対する次式の積分をフーリエ変換と定義する．ただし，i は虚数単位，e は自然対数の基底である．

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx$$

また，2 つの関数 $g(x)$，$h(x)$ に対する次式の積分をたたみこみと定義する．

$$g(x)*h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-\alpha)h(\alpha)d\alpha$$

フーリエ変換およびたたみこみに関する次の (1)〜(3) に答えなさい．

(1) 次式で与えられる関数 $f_1(x)$ のフーリエ変換 $F_1(u)$ を求めなさい．

$$f_1(x) = \begin{cases} 1\,, & \left(x \leqq \left|\dfrac{1}{2}\right| \text{ の場合}\right) \\ 0\,, & \left(x > \left|\dfrac{1}{2}\right| \text{ の場合}\right) \end{cases}$$

(2) 関数 $f_1(x)$ 同士のたたみこみによって得られる関数を $f_2(x)$ とする．関数 $f_2(x)$ を求め，その概略図を描きなさい．

(3) 関数 $f_2(x)$ のフーリエ変換 $F_2(u)$ を求めなさい．

(和歌山大 2017)　　(m20176509)

0.2419　2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の (1)〜(3) に答えなさい.

(1) 固有値を求めなさい.

(2) 固有ベクトルを求めなさい.

(3) 固有値 α, β に対して，次式が成り立つように，正則行列 P を求めなさい．ただし，$\alpha > \beta$ とする.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

(和歌山大 2018)　　(m20186501)

0.2420　関数 $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ のマクローリン展開を $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とするとき，係数 a_n を求めよ.

(和歌山大 2022)　　(m20226502)

0.2421　次のベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ について，あとの問いに答えなさい．解答は途中の式も省略せずに書きなさい.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ の組は線形独立か線形従属かを理由とともに答えなさい.

(岩手県立大 2013)　　(m20137002)

0.2422　次の行列 A, B について，あとの問いに答えなさい．解答は途中の式も省略せずに書きなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A, B の階数（ランク）をそれぞれ答えなさい.

(2) 行列式 $|A|, |B|$ をそれぞれ答えなさい.

(岩手県立大 2013)　　(m20137003)

0.2423　次のベクトル $\boldsymbol{v}$ と行列 A, B, C について，あとの問いに答えなさい．回答は途中の式も省略せずに書きなさい.

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ , \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ , \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ -7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $A\boldsymbol{v}$, $B\boldsymbol{v}$, $C\boldsymbol{v}$ について，定義されるときは，それぞれの値を計算しなさい．定義されないときはその理由を答えなさい.

(2) 行列式 $|A|$, $|B|$ をそれぞれ答えなさい.

(3) 行列 A, B の逆行列をそれぞれ答えなさい.

(4) 行列 B の固有値と固有ベクトルをそれぞれ答えなさい.

(岩手県立大 2014)　　(m20147001)

0.2424 次の行列 A, B, C, D について，あとの問いに答えなさい．解答は途中の式も省略せずに書きなさい．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) AB を答えなさい．

(2) 行列 A, B の階数（ランク）をそれぞれ答えなさい．

(3) 行列式 $|A|$, $|C|$ をそれぞれ答えなさい．

(4) 行列 A, C の逆行列をそれぞれ答えなさい．定義されないときには「定義されない」と答えなさい．

(5) 行列 D の固有値と固有ベクトルを答えなさい．

(岩手県立大 2016)　　(m20167001)

0.2425 次の行列 A, B, C とベクトル $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$ について，あとの問いに答えなさい，解答は途中の式も省略せずに書きなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

(1) AB と BA をそれぞれ答えなさい．定義されないときには「定義されない」と答えなさい．

(2) 行列式 $|A|$, $|C|$ をそれぞれ答えなさい．

(3) 行列 A, C の逆行列をそれぞれ答えなさい．定義されないときには「定義されない」と答えなさい．

(4) ベクトル $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$ の組が線形独立か線形従属か 理由とともに 答えなさい．

(5) 次の連立一次方程式の解を 行列を使用して 求めなさい．行列を使用したことが分かるように，途中経過を示しなさい．

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 5 \\ x + y + z = -7 \\ x + 3y + 9z = -5 \end{cases}$$

(岩手県立大 2017)　　(m20177001)