

[選択項目] 年度：1991～2025 年 文中：(……) 行列

0.1 2 次の正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix} \quad (0 < p < 1, 0 < q < 1)$$

とする。このとき、以下の問に答えよ。

- (1) A の固有値をすべて求め、それぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよ。
- (2) A を対角化せよ。
- (3) A^n を求めよ。

(北海道大 2003) (m20030103)

0.2 次の行列 A について以下の問に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} \quad (a \neq b, a, b \neq 0, a, b \in \mathbb{R})$$

- (1) A の固有値を求めよ。
- (2) A のそれぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよ。
- (3) A を対角化せよ。

(北海道大 2004) (m20040103)

0.3 次の 2 階の微分方程式：

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0,$$

は、 $y_1 = y$, $y_2 = dy/dx$ の変数変換により、

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

と表せる。行列：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

の固有値・固有ベクトルを計算することにより、 y_1, y_2 の一般解を求めよ。

(北海道大 2005) (m20050101)

0.4 次の 3 次実正方行列 A について、以下の問に答えなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) A の固有値を求めなさい。
- (2) A のそれぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めなさい。
- (3) A を対角化する行列 P を求め、 A の対角化 $P^{-1}AP$ を求めなさい。

(北海道大 2006) (m20060102)

0.5 次の微分方程式の解を求めたい。これに関して次の設問に答えよ。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x - 4y \\ \frac{dy}{dt} &= x - 2y \end{aligned}$$

- (1) この微分方程式の解の一つが, 行列 $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ を用いて $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp(\lambda t) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ で表されるものとする. ただし, $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ はゼロ行列ではなく $u_1 + u_2 = 1$ を満たすものとする. λ と $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ を求め (複数求まる場合は全て答えよ), 一般解を示せ.
- (2) $t = 0$ における $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ の初期値が $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ であるときの解を求めよ.

(北海道大 2007) (m20070101)

- 0.6** 実数列 $a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ が $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たすとする. $\mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく時, 次の設問に答えなさい.

- (1) 行列 $\mathbf{A}$ を対角化する正則行列 $\mathbf{P}$ を求めなさい.
- (2) $\mathbf{A}^n$ を求めなさい.
- (3) $\mathbf{a}_n = \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{a}_1$ が成り立つ (ただし, $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$ (単位行列) とする) ことに注意して, 実数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めなさい.

(北海道大 2008) (m20080101)

- 0.7** 行列, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ が与えられている. 以下の問いに答えなさい.

- (1) $\mathbf{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.
- (2) $\mathbf{P} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \dots + \mathbf{A}^{100}$ を計算しなさい. ここで, $\mathbf{I}$ は単位行列である.

(北海道大 2009) (m20090102)

- 0.8** 次の行列 $\mathbf{A}$ について以下の設問 (1), (2) に答えよ.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

- (1) $\mathbf{A}$ の固有値とその固有ベクトルを求めよ.
- (2) $\mathbf{A}$ の対角化行列 $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$ を求めよ. また, そのときの行列 $\mathbf{P}$ を示せ.

(北海道大 2010) (m20100104)

- 0.9** 以下に示す行列 $\mathbf{P}$ と $\mathbf{A}$ について各設問に答えよ. 途中の計算手順を詳しく記述すること.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 $\mathbf{P}$ の固有値を求めよ.
- (2) 行列 $\mathbf{A}$ を, $\mathbf{P}, a, b, c, d$ および単位行列 $\mathbf{E}$ を用いて表せ.
- (3) 行列 $\mathbf{A}$ の固有値を求めよ.
- (4) 行列式 $|\mathbf{A}|$ を求めよ.

0.10 次の対称行列について、以下の設問に答えよ.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ は $\mathbf{A}$ の固有ベクトルの一つであることを示し、対応する固有値を求めよ.
- (2) $\mathbf{A}$ の固有ベクトルのうち、(1) で与えられた $\mathbf{x}_1$ を除くもの 2 つ ($= \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$) を挙げよ. ただし、それらの大きさを $|\mathbf{x}_2| = |\mathbf{x}_3| = 1$ とし、3 つの固有ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ が互いに直交するものを選ぶこと.
- (3) $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$ ($\mathbf{\Lambda}$: 対角行列) となるような直交行列 $\mathbf{P}$ を求め、これを用いて $\mathbf{A}^n$ を計算せよ.

(北海道大 2013) (m20130101)

0.11 2 次の正方行列 A による 1 次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を考える. ただし、 $A, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の要素はすべて実数である. このとき、以下の設問に答えよ. なお、途中の計算手順を詳しく記述すること.

- (1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする. このとき、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ で表される 4 つの点の像を求めよ. また、この 4 つの点を頂点とする四角形の面積が、1 次変換前と比較して 1 次変換後に何倍になるかを求めよ. ただし、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ を頂点とする平行四辺形の面積は $|ad - bc|$ で与えられる.
- (2) A を直交行列 $\begin{pmatrix} r & -s \\ s & r \end{pmatrix}$ (ただし、 $r^2 + s^2 = 1$) とする. このとき、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ で表される 4 つの点の像を求めよ. また、この 4 つの点を頂点とする四角形の面積が、1 次変換前と比較して 1 次変換後に何倍になるかを求めよ.
- (3) $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ とする. このとき、 A は対称行列である. A を直交行列を用いて対角化せよ.
- (4) (3) と同じく、 $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ とする. このとき、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表される 4 つの点の像を考える. この 4 つの点を頂点とする四角形の面積が、1 次変換前と比較して 1 次変換後に何倍になるかを求めよ.

(北海道大 2014) (m20140102)

0.12 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ で定める.

- (1) A の固有値、固有ベクトルを求めよ.

(2) n は自然数とする. A^n を求めよ.

(北海道大 2017) (m20170105)

0.13 次の三つの 3 次元ベクトル $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ に関して以下の設問に答えなさい.

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) これらのベクトルが一次独立となるとき, a が満たすべき条件を求めなさい. ただし, a は実数とする.

(2) $a = -1$ のとき, 次の等式を満たす行列 $\mathbf{A}$ を求めなさい.

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(北海道大 2017) (m20170108)

0.14 次の行列 $\mathbf{A}$ に関して以下の設問に答えなさい. ただし, a と b は実数とする.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -b^2 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\mathbf{A}$ が異なる二つの固有値をもつための条件を示しなさい.

(2) 行列 $\mathbf{A}$ の固有値が 2 と 4 のとき, a と b を求めなさい.

(3) 行列 $\mathbf{A}$ の固有値が 2 と 4 のとき, A^n を求めなさい. ただし, n は自然数とする.

(北海道大 2017) (m20170109)

0.15 次の行列 $\mathbf{A}$ について, 以下の設問に答えなさい.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) $\mathbf{A}$ の固有値を求めなさい.

(2) 各固有値に属する固有ベクトル (ただし大きさが 1) を求めなさい.

(北海道大 2020) (m20200103)

0.16 次の行列 $\mathbf{A}$ について, 以下の設問に答えなさい.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $a = 4$ のとき, 固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) $a = -1$ のとき, $\mathbf{A}$ は回転を表す行列の定数倍であることを利用して, A^{20} を求めなさい.

(北海道大 2023) (m20230103)

0.17 xy 平面において, 原点 O , 点 $A(a_1, a_2)$, 点 $B(b_1, b_2)$ を考える.

点 B は実行列 $R = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$ で表される線形変換による点 A の像とする.

このとき, 以下の設問に答えなさい. ただし, $A \neq O$, $r > 0$, $0 \leq \theta < \pi$ とする.

設問 1 点 B の座標を a_1, a_2, r, θ を用いて表しなさい.

設問 2 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ を a_1, a_2, r, θ を用いて表しなさい.

設問 3 三角形 $\triangle AOB$ の面積 S を a_1, a_2, r, θ を用いて表しなさい.

設問 4 三角形 $\triangle AOB$ の面積 S と行列式 $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ との関係を表す式を求めなさい.

(北海道大 2024)

(m20240105)

0.18 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A の行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(2) A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2005)

(m20050205)

0.19 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ とする.

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(2) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2005)

(m20050210)

0.20 次の行列 A の行列式の値 $\det A$ と逆行列 A^{-1} を求めよ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(北見工業大 2007)

(m20070205)

0.21 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ につき以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.

(2) 各固有値に属する固有ベクトルをひとつ挙げよ.

(北見工業大 2009)

(m20090205)

0.22 $f: R^2 \rightarrow R^3$ を線形写像とする. $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき,

$$f(\mathbf{u}_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, f(\mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ であるとする.}$$

任意のベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$ に対して $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ となる行列 A を求めよ.

(北見工業大 2010)

(m20100204)

0.23 次の行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(北見工業大 2011)

(m20110206)

0.24 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 行列式 $|A| = 0$ となる x を求めよ.
- (2) $x = 2$ とするとき逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2013) (m20130206)

0.25 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 3 \end{pmatrix}$ とする.

- (1) $|A| = 0$ となる x を求めよ.
- (2) $x = -1$ のとき, A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2014) (m20140204)

0.26 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(2) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする.

等式 $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$ が成り立つような係数 x_1, x_2, x_3 を求めよ.

(北見工業大 2015) (m20150205)

0.27 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ とする. 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2016) (m20160205)

0.28 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2017) (m20170206)

0.29 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2018) (m20180205)

0.30 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2019) (m20190205)

0.31 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det A$ と逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2019) (m20190212)

0.32 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2022)

(m20220206)

0.33 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det B$ を求めよ.

(北見工業大 2022)

(m20220207)

0.34 xyz 直交座標空間におけるある一次変換 f が, 次のような行列 A で表されるとする.

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{6} & 3 \\ \sqrt{6} & -2 & -\sqrt{6} \\ 3 & \sqrt{6} & 1 \end{pmatrix}$$

また, x, y, z 方向を向く単位ベクトルをそれぞれ e_1, e_2, e_3 とする. 次の各問に答えよ.

(1) A^2, A^3 を求めよ.

(2) 次のベクトル x_1 と x_2 は, 1 次変換 f により, どのようなベクトルに移されるか.

$$x_1 = e_1 + e_3, \quad x_2 = \sqrt{3}e_1 - \sqrt{2}e_2 - \sqrt{3}e_3$$

(3) 次のような 3 つのベクトル e_1', e_2', e_3' を考える.

$$e_1' = \frac{e_1 - e_3}{\sqrt{2}}, \quad e_2' = e_2, \quad e_3' = \frac{e_1 + e_3}{\sqrt{2}}$$

6 つの内積 $e_1' \cdot e_1', e_2' \cdot e_2', e_3' \cdot e_3', e_1' \cdot e_2', e_2' \cdot e_3', e_3' \cdot e_1'$ の値を求めよ.

(4) 基底のとりかたを e_1, e_2, e_3 から e_1', e_2', e_3' に変えると, 1 次変換 f を表す行列は, どのような形になるか.

(5) 1 次変換 f はどのような変換か, 明確に述べよ.

(岩手大 1994)

(m19940308)

0.35 t を実変数, x, y を未知関数とする次のような連立微分方程式を考える.

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 5y, \quad \frac{dy}{dt} = x - 2y \quad (\text{a})$$

この連立微分方程式は次のように書き表すことができる.

$$\frac{dr}{dt} = Ar \quad (\text{b})$$

ここで, 行列 A と列ベクトル r は次のように与えられる.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

次の問に答えよ.

(1) 実定数を成分とする 2 行 2 列の正則行列 P を導入すると, 上記の (b) が次のように書きかえられることを示しなさい.

$$\frac{dR}{dt} = BR \quad (\text{c})$$

ここで, B, R は P とその逆行列 P^{-1} を用いて次のように与えられる.

$$B = P^{-1}AP, \quad R = P^{-1}r$$

(2) P を次のようにとると, B が対角行列になることが分かった.

$$P = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

P の行列式 $\det P$, P の逆行列 P^{-1} , および B を求めよ.

(3) 次式のように, 列ベクトル R の成分を X, Y とする.

$$R = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

微分方程式 (c) を解き, X, Y のそれぞれを t の関数として表す一般解を求めよ.

(4) $t = 0$ において $x = x_0, y = y_0$ という初期条件を満足する連立微分方程式 (a) の解を求めよ.

(岩手大 1996) (m19960304)

0.36 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ の和と積を求めよ.

(岩手大 1998) (m19980310)

0.37 次のような行列 A を考える.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

ここで, a は実定数とする. 次の間に答えよ.

(1) A^2, A^3 を求めよ.

(2) 一般の正の整数 n に対する A^n を求めよ. A^n の形を正しく推定し, 数学的帰納法により証明すればよい.

(3) 行列 A に対し, A^0 , 指数関数 $\exp A$ を次のように定義する.

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

$\exp A$ を求めよ. なお, 行列の無限級数の和を求めるためには, 各成分ごとに無限級数の和を求めればよい.

(岩手大 1998) (m19980311)

0.38 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ について, 次の間に答えよ. ただし, E は 2 次の単位行列である.

(1) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2) A^n を求めよ.

(3) $2A^2 - 3A + E = O$ を満たす, a の値をすべて求めよ.

(4) (3) で求めた a の値を代入して, $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ を求めよ.

(岩手大 2004) (m20040308)

0.39 3つの行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

に関し, 次の間に答えよ.

(1) 行列の和 $A + B$ と差 $A - B$ および積 AB を求めなさい.

(2) 行列式 $|B|$ および $|C|$ の値を求めなさい.

(3) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(岩手大 2006) (m20060302)

0.40 (1) 次の行列の積を求めなさい.

$$(i) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \quad (ii) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ のとき, 次のものを求めなさい.

(i) A の行列式 $|A|$

(ii) A の逆行列 A^{-1}

$$(3) \text{ 次の等式を証明しなさい. } \begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1$$

(岩手大 2008) (m20080302)

0.41 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に関して, 次の問いに答えなさい.

(1) 次の式を計算しなさい.

(i) A の逆行列 A^{-1}

(ii) $(A + 6A^{-1})(A - 6A^{-1})$

(2) 行列 A で表される一次変換を f とするとき, 一次変換 f による直線 $y = 3x - 2$ の像の方程式を求めなさい.

(3) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(岩手大 2009) (m20090303)

0.42 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ に関して次の問いに答えなさい.

(1) 行列式 $|A|$ および逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(2) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列であるような正則な 2 次正方行列 P をひとつ求めなさい.

(4) 任意の自然数 n に対し A^n を求めなさい.

(岩手大 2010) (m20100302)

0.43 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ で表される xyz 空間内の線形変換を f とする. 次の問いに答えなさい.

(1) 線形変換 f によって直線 $\ell : x - 1 = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{3}$ がどのような図形に移されるか答えなさい.

(2) 線形変換 f によって平面 $\alpha : x + y + z = 1$ がどのような図形に移されるか答えなさい.

(3) 逆変換 f^{-1} を表す行列を求めなさい.

(4) 線形変換 f によって平面 $\beta : x + y = 1$ に移されるもとの図形を求めなさい

(岩手大 2011) (m20110302)

0.44 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ に関して, 次の問いに答えなさい.

- (1) 行列式 $|A|$ の値を求めなさい.
- (2) 行列 B, C と 2 次の単位行列 E に関して $BC = E$ が成り立つとき, 行列 C を求めなさい.
- (3) 行列 B の固有値と固有ベクトルを求めなさい.
- (4) 行列 B を対角化しなさい.

(岩手大 2012) (m20120302)

0.45 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & b & 2 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えなさい. ただし, a, b は定数とする.

- (1) 定数 a, b を求めなさい.
- (2) 行列 A の固有値を求めなさい.
- (3) 行列 A の固有ベクトルを求めなさい.

(岩手大 2013) (m20130302)

0.46 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えなさい.

- (1) 固有値を求めなさい.
- (2) 行列 A を直交行列により対角化しなさい.
- (3) $X^2 - E = A$ を満たす行列 X をひとつ求めなさい.

(岩手大 2014) (m20140302)

0.47 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えなさい.

- (1) 固有値を求めなさい.
- (2) 固有ベクトルを求めなさい.
- (3) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような行列 P を求め, A を対角化しなさい.
- (4) A^n を求めなさい. ただし, n は自然数とする.

(岩手大 2015) (m20150302)

0.48 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$ を考える. $B' = AB = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $C = AC$ であるとき, 次の問いに答えなさい

- (1) a, b, c, d の値をそれぞれ求めなさい.
- (2) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めなさい.
- (3) $D = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ に対し $D' = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = AD$ であるとき, 逆行列 A^{-1} を用いて u, v の値をそれぞれ求めなさい.
- (4) 行列 A の固有値, および, それに属す固有ベクトルを求めなさい. ただし, 固有ベクトルの大きさは 1 とする.

0.49 行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) A の行列式を求めなさい。
- (2) A の各成分の余因子を求めなさい。
- (3) A は正則であるかどうかを述べなさい、また、正則ならば、 A の逆行列を求めなさい。

(岩手大 2017) (m20170302)

0.50 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めなさい。
- (2) $AB = C$ であるとき、逆行列 A^{-1} を用いて u, v, w の値をそれぞれ求めなさい。
- (3) 行列 A の固有値、固有ベクトルを求めなさい。
- (4) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように行列 P を求め、 A を対角化しなさい。

(岩手大 2018) (m20180302)

0.51 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ベクトル $e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) 行列 A のランク (階数) $\text{rank}(A)$ が 3 であることを示しなさい。
- (2) $e_x' = Ae_x$, $e_y' = Ae_y$ であるとき、2つのベクトル e_x' , e_y' を二辺とする平行四辺形の面積を求めなさい。
- (3) 行列 A の固有値、および、それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めなさい。
- (4) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように行列 P を求め、 A を対角化しなさい。

(岩手大 2019) (m20190302)

0.52 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について 次の問に答えなさい。

- (1) 次の等式を満たすことを示しなさい。

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$

ただし、 E は単位行列、 O は零行列である。

- (2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ のとき、 $A^4 - 5A^3 + 10A^2 + 7A + 3E$ を求めなさい。

(岩手大 2020) (m20200302)

0.53 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 39 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) 行列 A のランク (階数) $\text{rank}(A)$ が 3 であることを示しなさい。
- (2) $AB = C$ であるとき、行列を用いて x, y, z の値をそれぞれ求めなさい。

(3) 行列 A の固有値, 固有ベクトルを求めなさい.

(岩手大 2021) (m20210302)

0.54 3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \\ 10 & 2 & b \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えなさい.

(1) 行列 A が固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ をもつとき, a と b の値を求めなさい.

(2) 行列 A の固有値をすべて求めなさい.

(岩手大 2022) (m20220302)

0.55 (1) A, B を n 次の正方行列とし, $n \geq 2$ とする. 次の式は, 一般に成り立つかどうかを答えよ. 成り立つならば証明を与え, 成り立たないならば反例を与えよ.

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

(2) 次の行列が正則であるための条件を求め, そのときの逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(岩手大 2023) (m20230307)

0.56 x, y, z を未知数とする連立一次方程式

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 3x - 2y + (a+1)z = 2 \\ 2x - ay + 3z = 1 \end{cases} \quad (a \text{ は定数})$$

について, 以下の問いに答えなさい.

(1) 係数行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & a+1 \\ 2 & -a & 3 \end{pmatrix}$ の階数 $\text{rank}(A)$ が 2 となる a の値を全て求めなさい.

(2) (1) で求めた a のうち, この連立一次方程式が解をもつ a の値を答えなさい. また, a がその値のときの連立一次方程式の解を, 任意定数を t と置いて表しなさい.

(岩手大 2024) (m20240302)

0.57 次の行列の行列式を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(秋田大 2001) (m20010408)

0.58 次の $\square$ 内に当てはまる整数を入れよ.

行列 $\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ の逆行列は $\begin{pmatrix} \boxed{\text{(a)}} & \boxed{\text{(b)}} & \boxed{\text{(c)}} \\ \boxed{\text{(d)}} & \boxed{\text{(e)}} & \boxed{\text{(f)}} \\ \boxed{\text{(g)}} & \boxed{\text{(h)}} & \boxed{\text{(i)}} \end{pmatrix}$ である.

(秋田大 2002) (m20020404)

0.59 行列 $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めなさい.

(秋田大 2004) (m20040404)

0.60 行列 $C = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ の階数を求めなさい.

(秋田大 2004) (m20040405)

0.61 a, b を実数とし, $M = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & b \end{pmatrix}$ は, トレース (M の対角成分の総和のことで, $\text{tr}(M)$ と表記する) が 4 で, 行列式 ($\det(M)$ とか $|M|$ と表記する) が -2 とする. そのとき次に答えなさい.

(1) a, b を求めなさい.

(2) 行列 M の固有値を全て求めなさい.

(秋田大 2004) (m20040406)

0.62 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ.

(2) 問題 (1) の行列 A に対して, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく. このとき, P の各列ベクトルが A の固有ベクトルであることを確かめ, $AP = PX$ となる行列 X を求めよ.

(3) 問題 (1) の行列 A の階数 (rank) と行列式 (determinant) を求めよ.

(秋田大 2005) (m20050403)

0.63 (1) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ のとき, 行列 $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$ と, その行列式 (determinant) を計算せよ.

(2) 積分 $I = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$ を計算せよ. ただし, R は正の定数で, D は領域 $x^2 + y^2 \leq R^2$ を表す. 必要ならば問題 (1) の変数変換を用いよ.

(3) 半径 R の球の体積 V を, 上の問題 (2) の積分 I を用いて表せ. 理由も簡潔に述べること.

(秋田大 2005) (m20050406)

0.64 原点と点 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ を頂点とする空間 $\mathbf{R}^3$ 内の立方体を, 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ で変換する. 変換後の体積を求めよ. また, A は逆行列をもつか, 簡潔な理由を添えて答えよ.

(秋田大 2006) (m20060402)

0.65 次の $\boxed{}$ に当てはまる整数を入れよ.

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ の階数は である.

(2) 連立一次方程式 $\begin{cases} x + y - 3z = -9 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 34 \end{cases}$ の解は $x = \text{}$, $y = \text{}$, $z = \text{}$ である.

(秋田大 2007) (m20070402)

0.66 a を実数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ. また, A が正の値の固有値と負の値の固有値の両方を持つための a の値の範囲を求めよ.

(秋田大 2008) (m20080401)

0.67 (1) $x = u - w$, $y = u + w$ とおく. 行列 $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{pmatrix}$ と, その行列式を求めよ.

(2) D は平面内の領域で, 次の 4 直線で囲まれているとする.

$$y = x, \quad y = -x, \quad y = x + 2, \quad y = -x + 4$$

このとき, 積分 $\iint_D xy \, dx dy$ の値を求めよ.

(秋田大 2008) (m20080407)

0.68 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列を掃き出し法を用いて求めよ.

(秋田大 2009) (m20090405)

0.69 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値をすべて求めよ.

(秋田大 2009) (m20090406)

0.70 次のカッコ内に当てはまる整数を記入せよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の階数は であり, A の固有値は, 小さい方から順に

, , である.

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ の行列式の値は である. B の逆行列について, B^{-1} の

(2, 1) 成分は である.

(秋田大 2010) (m20100401)

0.71 行列 $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, 以下の設問 (1), (2) に答えよ.

- (1) P の逆行列が $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ になることを確かめよ.
- (2) P の第 1 列ベクトルを $\mathbf{p}_1$, 第 2 列ベクトルを $\mathbf{p}_2$ とする. $\mathbf{p}_1$ が, ある 2×2 行列 A の固有値 1 の固有ベクトルであり, $\mathbf{p}_2$ が, 同じ行列 A の固有値 -1 の固有ベクトルであるとき, A を求めよ.

(秋田大 2011) (m20110402)

0.72 下記の行列 A について, 次の問いに答えなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

- (1) A の行列式を求めなさい.
- (2) A の逆行列を求めなさい.

(秋田大 2012) (m20120401)

0.73 以下の問いに答えよ.

- (1) 以下の四角内に当てはまる値を計算し, 解答欄の指定した箇所に記入せよ.

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対し, A の 2 つの固有値をそれぞれ α, β とする (ただし, $\alpha < \beta$ とする). また, α と β に対応する固有ベクトルをそれぞれ v_α, v_β とする. このとき

$$\alpha = \boxed{\text{(カ)}}, \beta = \boxed{\text{(キ)}}, v_\alpha = \begin{pmatrix} \boxed{\text{(ク)}} \\ 1 \end{pmatrix}, v_\beta = \begin{pmatrix} \boxed{\text{(ケ)}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる,

注意 $\boxed{\text{(ク)}}$ と $\boxed{\text{(ケ)}}$ は, それぞれ v_α と v_β のベクトルの第一成分である.

- (2) 2 つのベクトル v_α と v_β が直交するかどうか答え, その理由を述べよ.

(秋田大 2013) (m20130404)

0.74 次の行列 A の行列式を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & a \\ x & y & b & b \\ x & y & z & c \end{pmatrix}$$

(秋田大 2013) (m20130405)

- 0.75** (1) 2 つのベクトル $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ がある. ベクトル $s\mathbf{A} + \mathbf{B}$ と $\mathbf{A} + t\mathbf{B}$ が直交するとき, スカラー s と t の関係式を求めよ.

- (2) a, b を実数とするとき; 行列 $C = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ の固有ベクトルと固有値を求めよ.

(秋田大 2015) (m20150403)

0.76 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の原点を通る直線で、次の性質を持つものを考える.

(性質) この直線上の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を、行列 A で変換した点 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ も、この直線上にある.

例えば,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k \text{ は任意の実数})$$

と表される直線 l_1 は、このような直線の一つである. この性質を持つ、 l_1 と異なる直線を全てあげなさい.

(秋田大 2016) (m20160404)

0.77 a, b を実数とし、 $ab \neq 0$ とする. 行列 A を,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

とする. 以下の問いに答えなさい.

- (1) 行列 A の固有値を求めなさい.
- (2) (1) で求めた固有値の固有ベクトルを、ひとつずつ求めなさい.
- (3) (2) で求めた固有ベクトルの図形的関係を答えなさい.

(秋田大 2017) (m20170404)

0.78 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ に対し、 $\mathbf{a}$ を法線ベクトルに持つ原点を通る $\mathbb{R}^3$ 内の平面

を π とする. $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\mathbf{x}$ に対し、平面 π に関して対称なベクトルを対応させる写像を f とすると、 f は線形写像になっている. このとき、以下の問いに答えよ.

- (1) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\mathbf{x}$ に対し、 $f(\mathbf{x})$ を $\mathbf{x}$ と $\mathbf{a}$ を用いて表せ (内積を用いよ).
- (2) $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ となる 3×3 行列を A とするとき、行列 A を求めよ.
- (3) A の固有値と、それぞれの固有値に対応する固有空間を求めよ.

(秋田大 2019) (m20190404)

0.79 2 つの行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}$ (a, b, c は定数) について、以下の問いに答えよ.

- (1) 等式 $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ が成立するとき、 a, b, c の間の関係を求めよ.
- (2) (1) が成立するとき、 B による 1 次変換は、直線 $2x - y = 3$ を直線 $x - y = -3$ にうつすという. このとき、 a, b, c の値を求めよ.

(3) 行列 A, B の固有値をそれぞれ求めよ.

(秋田大 2020) (m20200404)

0.80 2 次方程式 $4x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 = 0$ の解を α, β とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 和 $\alpha + \beta$, 積 $\alpha\beta$ を求め, $\alpha^2 + \beta^2$ の値を答えよ.

(2) $|\alpha - \beta|$ および $|\alpha^4 - \beta^4|$ の値を求めよ.

(3) 行列 $A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta^2 \\ \beta^2 & \alpha^2 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換によって, 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を移したときの関数を求めよ.

(秋田大 2021) (m20210402)

0.81 行列 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 等式 $B\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ を満たすとき, 固有ベクトル $\mathbf{x}$ と固有値 λ を求めよ.

(2) (1) が成立するとき, 未知ベクトル $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{x}$ は, 微分方程式

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = B\mathbf{y}$$

の解であることを示せ.

(3) t ($0 \leq t \leq +\infty$) を時間とすると, 未知ベクトル $\mathbf{y}(t)$ の終端はどのような軌跡となるか, 答えよ.

(秋田大 2021) (m20210404)

0.82 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ のすべての固有値を求め, 各固有値に対する固有ベクトルを求めなさい.

(2) 2 次正方行列 B が, 1 と 2 を固有値として持つとする. さらに,

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

は, それぞれ, 固有値 1 に対する固有ベクトル, 固有値 2 に対する固有ベクトルであるとする. 行列 B を求めなさい.

(秋田大 2022) (m20220404)

0.83 行列 $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ および P の逆行列 P^{-1} を用いて, 行列 A が $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ と対角化される.

(1) 行列 A の固有値が 3 と 5 であることを説明しなさい.

(2) 設問 (1) の 2 つの固有値それぞれに対応する行列 A の固有ベクトルを答えなさい.

(3) 行列 P の逆行列 P^{-1} を求めなさい.

(4) n を自然数として, A^n を求めなさい.

(秋田大 2023) (m20230404)

0.84 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ はある行列 P とその逆行列 P^{-1} を用いて $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のように対角化できるものとする. また, 数列 $\{a_n\}$ を漸化式 $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$, $a_1 = 2$, $a_0 = 1$ ($n = 1, 2, \dots$) を満たす数列とする. 以下の設問 (1)~(4) に答えなさい.

- (1) 行列 P およびその逆行列 P^{-1} を求めなさい.
- (2) n を自然数として, A^n を求めなさい. [;]
- (3) $\{a_n\}$ から作ったベクトルの列 $\left\{ \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \right\}$ と行列 A を用いて, $\{a_n\}$ の漸化式を表しなさい.
- (4) 設問 (2) および (3) の結果を利用して, 漸化式 $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$, $a_1 = 2$, $a_0 = 1$ ($n = 1, 2, \dots$) を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を表す式を求めなさい.

(秋田大 2024) (m20240404)

0.85 2 行 2 列の行列 $P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ と $Q = I - P$ について, 次の問いに答えよ. ただし, I は 2 行 2 列の単位行列である.

- (1) 点 P^{-1} が存在する条件を書き, そのとき P^{-1} を求めよ.
- (2) 正の整数 n に対して, $Q^n = (p+q)^{n-1}Q$ を証明せよ.
- (3) $|P+q-1| < 1$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ を求めよ.

(東北大 1993) (m19930504)

0.86 2 行 2 列の行列 P と単位行列 E をそれぞれ

$$P = \begin{pmatrix} 1 + \cos x & \sin x \\ \sin x & 1 - \cos x \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする. 次の問いに答えよ.

- (1) P^2 を計算せよ.
- (2) 正整数 n に対して P^n を求めよ.
- (3) 正整数 n に対して $(P+E)^n$ を求めよ.

(東北大 1994) (m19940503)

0.87 2 行 2 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ から 4 行 4 列の行列

$$C = \begin{pmatrix} ae & af & be & bf \\ ag & ah & bg & bh \\ ce & cf & de & df \\ cg & ch & dg & dh \end{pmatrix}$$

を作り, $C = A \otimes B$ と表わす. $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とおいて, 次の問いに答えよ.

- (1) $X \otimes Y$, $Y \otimes X$ を求めよ.
- (2) $X^{-1} \otimes Y^{-1}$ を求めよ. ただし, A^{-1} は行列 A の逆行列を表わす.
- (3) (1) で求めた 4 行 4 列の行列 $X \otimes Y$ の固有値を求めよ.

(東北大 1995) (m19950503)

0.88 3 つの 1 次変換を f, g, h とし, これらを表す行列をそれぞれ A, B, C とおく, また, 任意の点 $P(x, y)$ の 2 つの合成変換 $f \circ h$, $h \circ g$ を $f \circ h(P) = f(h(P))$, $h \circ g(P) = h(g(P))$ と定義し, $f \circ h = h \circ g$ が成立するとする. $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$, $C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ であるとき, 次の問いに答えよ. ただし, a は $a \neq 0$ の実定数とする.

- (1) 点 P の変換 h により移される点を P' とする. P' の原点からの距離は, P の原点からの距離に等しいことを示せ.
- (2) g を表す行列 B を求めよ.
- (3) 円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 Q の変換 $f \circ h$ により移される点を Q' とする. Q' の原点からの距離の最大値と最小値を求めよ.

(東北大 1996) (m19960503)

0.89 点 $X(x, y)$ を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる点を $X'(x', y')$ とする.

- (1) OX の長さは r であり, OX の方向は x 軸の正の向きを原点 O のまわりに α だけ回転した方向にあるとする. このとき, x, y, x', y' を r, α, θ により表わせ. ただし, 角 θ と角 α の回転の方向は同一であるとする.
- (2) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表わすとき, 2×2 行列 T は $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ となることを示せ.
- (3) 点 $A(x_1, y_1)$, 点 $B(x_2, y_2)$ と原点 O からなる三角形 OAB を考える. 三角形 OAB を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる三角形を $OA'B'$ とする. 三角形 OAB の面積 S と三角形 $OA'B'$ の面積 S' を与える公式

$$S = \frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|, \quad S' = \frac{1}{2}|x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1|$$

を用いて, $S = S'$ であることを示せ.

- (4) 上記 (3) で定義した三角形 $OA'B'$ の辺 $A'B'$ が直線 $y' = 1$ 上に位置し, $S' = \frac{1}{2}$ であるとする. この場合に, x_1, y_1, x_2, y_2 が満たすべき条件を示せ.
- (5) 上記 (4) において, さらに, $x'_1 = 0, x'_2 > 0, \theta = \frac{\pi}{4}$ とする. 三角形 OAB を図示せよ.

(東北大 2001) (m20010503)

0.90 関数 $f(x)$ は, 微分方程式

$$x^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - 2x \frac{df(x)}{dx} + 2f(x) = 0 \quad (x \geq 1) \quad (\text{a})$$

および, 初期条件

$$x = 1 \text{ のとき } f = 1, \quad \frac{df}{dx} = 0 \quad (\text{b})$$

を満たす. このとき, 以下の問 (1)~(5) に答えよ.

- (1) 方程式 (a) は, 変数変換 $t = \log x$ によって, 以下の微分方程式に帰着することを示せ.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0 \quad (\text{c})$$

また, 初期条件 (b) は,

$$t = 0 \text{ のとき } y = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 0 \quad (\text{d})$$

となることを示せ.

- (2) 方程式 (c) の一般解は

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (\text{e})$$

で与えられる. 方程式 (c) および初期条件 (d) を満たす実数 $\lambda_1, \lambda_2, C_1, C_2$ を求めよ.

- (3) 初期条件 (b) のもとで方程式 (a) の解を求めよ.

- (4) $z(t) = \frac{dy(t)}{dt}$ と定義する. いま, 適切な 2×2 行列 A を定義すれば, 方程式 (c) は

$$\begin{pmatrix} \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

と表される. 行列 A を求めよ.

- (5) 行列 A の固有値を求め, 問 (2) で求めた λ_1, λ_2 と比較せよ.

(東北大 2003) (m20030502)

0.91 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ で定義する.

- (1) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.
- (2) 行列 A によって表される xy 平面上の線形変換を f とする. 直線 $y = ax$ 上の任意の点の f による像が同じ直線 $y = ax$ 上にあるような a の値を求めよ.
- (3) 行列 U を $U = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ で定義する. このとき, $U^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$ が成り立つことを証明せよ. ただし, n は自然数, α は 0 でない実数とする.
- (4) 行列 P を $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ で定義する. このとき, $P^{-1}AP$ を求めよ. また, その結果と問(3)で証明した式を用いて A^n を求めよ. ただし, n は自然数とする.

(東北大 2003) (m20030503)

0.92 2次曲線 $C : 3x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 18 = 0$ は, 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$, ベクトル $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いて, ${}^t\mathbf{p}A\mathbf{p} - 18 = 0$ と表すことができる. ただし, ${}^t\mathbf{p} = (x \ y)$ である.

- (1) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 を求め, それぞれに対応する大きさ 1 の固有ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ を求めよ.
- (2) ベクトル $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とし, ある行列 U を用いて, 線形変換 $\mathbf{p} = U\mathbf{p}'$ を行えば, 2次曲線 C は標準形になる. 行列 U を求め, 2次曲線 C の標準形を x', y' を用いて表せ.
- (3) x 軸と x' 軸のなす角度を求め, x 軸, y 軸と x' 軸, y' 軸の関係を図示し, 2次曲線 C の概形を描け.

(東北大 2005) (m20050501)

0.93 $\mathbb{R}^3$ において x, y の標準内積を (x, y) で表す. 3次実対称行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

で定める. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) A は相異なる正の固有値 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ を持つ. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, および それらに対する長さ 1 の固有ベクトル ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 をそれぞれ求めよ.
- (2) $\mathbb{R}^3$ の一次変換 f_j ($j = 1, 2, 3$) を

$$f_j : x \mapsto (x, \phi_j)\phi_j, \quad j = 1, 2, 3$$

で定める. $\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する f_j の表現行列を P_j とするとき,

$$P_j^2 = P_j, \quad j = 1, 2, 3$$

$$P_j P_k = O, \quad j \neq k \text{ のとき}$$

を示せ. ただし, O は零行列である.

- (3) $m = 1, 2, \dots$ に対して, 行列 B を

$$B = \lambda_1^{\frac{1}{m}} P_1 + \lambda_2^{\frac{1}{m}} P_2 + \lambda_3^{\frac{1}{m}} P_3$$

と定めるとき, $B^m = A$ が成り立つことを証明せよ.

0.94 (1) a, b, c, p, q, r を実数とし,

$$D = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく. 任意の自然数 k に対し,

$$(D + N)^k = D^k + M, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表されることを示せ. ただし, α, β, γ は適当な実数である.

(2) 3次正方行列 A がある自然数 n に対して $A^n = O$ を満たすとき, $A^3 = O$ であることを示せ. ただし, O は零行列である.

0.95 $\mathbf{R}$ は実数全体のなす集合を表す. $\mathbf{R}^N$ は N 次元実ベクトル全体のなす集合を表す.

$\mathbf{R}^4$ の3つのベクトルを $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ で定め, これらを列にもつ行列

$$A = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

を考える. 以下の問に答えよ.

(1) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が一次独立であることを示せ.

(2) A によって定まる線形写像の像を $\text{Im}(A)$ とする. つまり

$$\text{Im}(A) = \left\{ A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R} \right\} \text{ である. } \mathbf{R}^4 \text{ のベクトル } \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} \text{ が } \text{Im}(A) \text{ の元であると}$$

き, p を q, r, s で表せ.

$$(3) \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \text{ の内積を}$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = xx' + yy' + zz' + ww'$$

とする.

$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4$ が $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = (\mathbf{x}, \mathbf{b}) = (\mathbf{x}, \mathbf{c}) = 0$ をみたし, 4次行列 $\tilde{A} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{x})$ の行列式が1であるとき $\mathbf{x}$ を求めよ.

0.96 行列 A と行列 B を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

このとき、以下の問に答えよ.

- (1) AB を求めよ.
- (2) 行列式 $|A|$ を求めよ.
- (3) 逆行列 A^{-1} を求めよ.
- (4) A の固有値を求めよ.

(東北大 2013) (m20130503)

0.97 x を実数とする. $n \times n$ 正方行列である $A_n(x)$ と B_n を以下のように与える.

$$A_n(x) = \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -x & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -x \end{pmatrix} \quad B_n = A_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

すなわち, $A_n(x)$ は対角要素がすべて $-x$, その両側の斜めの要素が 1, それ以外の要素がすべて 0 の 3 重対角行列である. B_n は $A_n(x)$ において $x = 0$ としたときの行列である.

- (1) B_2 の固有値をすべて求めよ.
- (2) B_3 の固有値をすべて求めよ.
- (3) B_n の固有値のひとつを λ とする. この λ は $|A_n(\lambda)| = 0$ を満たすことを示せ.
- (4) λ が B_n の固有値であるとき, $|A_n(\lambda)|$ は漸化式 $|A_n(\lambda)| = -\lambda|A_{n-1}(\lambda)| - |A_{n-2}(\lambda)|$ を満たすことを示せ. ただし, $|A_0(\lambda)| = 1, |A_1(\lambda)| = -\lambda$ とする.
- (5) $\lambda = -2 \cos \theta, |A_n(\lambda)| = \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin \theta}$ とおくとき, これらが (4) の漸化式を満たすことを示せ. ただし, $\sin \theta \neq 0$ である.
- (6) $\frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin \theta} = 0$ を満たす θ を求めよ. これを使って, B_n の固有値 $\lambda = -2 \cos \theta$ を求めよ. また, 求めた固有値は, $n = 2, n = 3$ の場合, それぞれ (1) および (2) で求めた固有値と一致することを示せ.

(東北大 2015) (m20150505)

0.98 3 次実対称行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ に対して, 以下の問いに答えよ.

- (1) A のすべての固有値を求めよ.
- (2) (1) で求めた固有値のそれぞれに対して, 固有空間の次元を求めよ.
- (3) 3 次直交行列 P で, tPAP が対角行列となるものを一つ求めよ. ただし, tP で P の転置行列を表す.

0.99 a は負, b は正の定数とする. 3 次実正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 A の階数が 2 であるための必要十分条件を求めよ.
- (2) A が正則行列のとき, A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(東北大 2015) (m20150507)

- 0.100 (1) 実正方行列が直交行列であることの定義を述べよ.
- (2) 2 次の直交行列は

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (\theta : \text{実数})$$

の形であることを示せ.

- (3) A を n 次直交行列とする. 2 つのベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $A\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{w}$ の間の距離は, $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ の間の距離に等しいことを示せ. ただし, 距離はユークリット空間における標準的な距離とする.

(東北大 2016) (m20160506)

0.101 実数 x を含む次の行列 A について以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} x & -x-1 & 0 \\ x-1 & -x & 0 \\ 1-x & x+1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.
- (2) A^2 と逆行列 A^{-1} を求めよ.
- (3) 行列 B を次式で定義する. n が 3 以上の整数であるとき, B を n と x を用いて表せ.

$$B = A^n + nA^{n-1} - A^{n-2} \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

(東北大 2017) (m20170501)

0.102 3 次実正方行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して, 以下の問いに答えよ.

- (1) A の固有値と各固有値に対する固有ベクトルを求めよ.
- (2) x, y, z の連立方程式

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は解を持つか, その理由も答えよ.

(東北大 2017) (m20170504)

0.103 次の行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 9 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(東北大 2018) (m20180504)

0.104 次の行列 B の行列式 $|B|$ を求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -4 & -8 \\ 5 & -7 & -6 & 9 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(東北大 2018) (m20180505)

0.105 次の行列 C について、以下の問に答えよ.

$$C = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 C の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ. ただし, 固有ベクトルの大きさを 1 とする.
- (2) $P^t C P$ が対角行列となるような直交行列 P を求め, $P^t C P$ を計算せよ. ただし, P^t は行列 P の転置行列を表す.

(東北大 2018) (m20180506)

0.106 (1) n 次正方行列 A, B を用いて $2n$ 次正方行列 C を

$$C = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

で定めるとき, 等式

$$\det C = \det(A + B) \times \det(A - B)$$

が成り立つことを示せ. ただし, $\det C$ は C の行列式を表す.

- (2) 4 次正方行列

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のすべての固有値を求め, それぞれの固有値に対応する固有空間の基底を求めよ.

(東北大 2018) (m20180508)

0.107 次の行列 A について、以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.
- (2) $P^{-1} A P$ が対角行列となるような正則行列 P を求め, $P^{-1} A P$ を計算せよ. ただし, P^{-1} は P の逆行列を表す.

(3) n が 1 以上の整数であるとき, n を用いて A^n を表せ.

(東北大 2019) (m20190503)

0.108 次の行列 B について, 以下の問に答えよ.

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) B^2 と B^3 を求めよ.

(2) n が 1 以上の整数であるとき, n を用いて B^n を表せ.

(東北大 2019) (m20190504)

0.109 t を実数とする. 3×4 行列 A を次で定義する. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 & t \\ -2 & 5 & 6 & -5 \\ 2 & -3 & -10 & 3 \end{pmatrix}$

(1) A の階数 $\text{rank}(A)$ を求めよ.

(2) 4 次元実縦ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \text{ は実数で } A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

の次元を求めよ. また, W の基底を一組求めよ.

(東北大 2019) (m20190505)

0.110 次の正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

で定める. 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の固有値それぞれに対して, その固有空間の基底を求めよ.

(3) 実 3 変数 x, y, z の関数 $f(x, y, z)$ を次で定義する.

$$f(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 2xy - 4yz - 4zx$$

このとき $f(x, y, z)$ の, 条件

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = x + y + z = 0$$

のもとでの最大値と最小値を求めよ.

(東北大 2019) (m20190507)

0.111 (1) 次の行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列 B について、以下の問に答えよ.

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) 行列 B の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ. ただし, 固有ベクトルの大きさを 1 とする.

(b) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ とする. n が 1 以上の整数であるとき, ベクトル $B^n \mathbf{u}$ を求めよ.

(3) 次の行列 C について、以下の問に答えよ.

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) $P^{-1}CP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ. ただし, P^{-1} は P の逆行列を表す.

(b) n が 1 以上の整数であるとき, 行列 C^n を求めよ.

(東北大 2020) (m20200503)

0.112 次の行列 A の行列式 $|A|$ を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 \\ 3 & 8 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

(東北大 2021) (m20210501)

0.113 次の行列 B の逆行列 B^{-1} を求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(東北大 2021) (m20210502)

0.114 次の行列 C について、以下の問いに答えよ.

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) すべての固有値と固有ベクトルを求めよ.

(b) $P^{-1}CP$ が対角行列となるような正則行列 P を求め, $P^{-1}CP$ を計算せよ. ただし, P^{-1} は P の逆行列を示す.

(c) n が 1 以上の整数であるとき, n を用いて C^n を表せ.

(東北大 2021) (m20210503)

0.115 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ を 3 次正方行列とする. 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ. さらに, 求めた固有値それぞれに対して固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ.

(3) n を 2 以上の整数とする. A^n を求めよ.

(4) 次の式で定義される数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の一般項 a_n を求めよ.

$$a_0 = a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

(東北大 2021) (m20210508)

0.116 次の行列 $\mathbf{X}$ と数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) について, 以下の問に答えよ. ただし, x は実数とする.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 1 & x & x \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $\mathbf{X}^3$ を求めよ.

(2) n が 1 以上の整数であるとき, $\mathbf{X}^n$ が次の形式で表されることを, 数学帰納法を用いて証明せよ;

$$\mathbf{X}^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n & c_n \\ 0 & 1 & a_n & b_n \\ 0 & 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) n が 2 以上の整数であるとき, (2) の a_n, b_n, c_n で構成される数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ の一般項を求めよ.

(東北大 2022) (m20220502)

0.117 n を 2 以上の整数とする. n 次元実列ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ は,

それらの内積 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = {}^t\mathbf{a}\mathbf{b}$ について $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \neq 0$ を満たすとする. n 次正方行列 A を $A = \mathbf{a} {}^t\mathbf{b}$ と定める. ここで, ${}^t\mathbf{a}, {}^t\mathbf{b}$ はそれぞれ $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の転置を表す. 以下の問に答えよ.

(1) A の階数と行列式をそれぞれ求めよ. また, A の固有値をすべて求めよ.

(2) k を正の整数とする. ${}^t\mathbf{b}A^k\mathbf{a}$ を $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ と k を用いてできるだけ簡潔に表せ.

(東北大 2022) (m20220508)

0.118 3 次以下の実数係数多項式全体のなす集合

$$V = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

を考え, V の元を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数と考える. V の二つの元 f, g と実数 s に対して, 和 $f + g \in V$ とスカラー倍 $sf \in V$ を

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (sf)(x) = s(f(x))$$

で定めると, V は $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間となる. V から 4 次元実列ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ への線形写像 $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^4$ を

$$\phi(f) = \begin{pmatrix} f(-1) \\ f'(-1) \\ f(1) \\ f'(1) \end{pmatrix}$$

で定める. ただし f' は f の導関数である. 以下の問いに答えよ.

- (1) V と $\mathbb{R}^4$ の基底に関する ϕ の表現行列を求めよ. ただし V の基底は $\{1, x, x^2, x^3\}$, $\mathbb{R}^4$ の基底は $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ とし,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする.

- (2) 3 次以下の実数係数多項式 f で,

$$f(-1) = 3, \quad f'(-1) = 2, \quad f(1) = -1, \quad f'(1) = 2$$

を満たすものが存在するかどうか答えよ. 存在する場合はそのような多項式をすべて求め, 存在しない場合はそれを証明せよ.

(東北大 2022) (m20220509)

0.119 実線形空間 V を 3 項間漸化式 $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$ を満たす数列全体のなす空間として

$$V = \{\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots) \mid x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n, n = 0, 1, \dots\}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1 \in V$ を

$$\mathbf{e}_0 = (1, 0, -2, \dots), \mathbf{e}_1 = (0, 1, 3, \dots), \mathbf{f}_0 = (1, 1, 1, \dots), \mathbf{f}_1 = (1, 2, 4, \dots)$$

と定める. ここで, $\mathbf{e}_0 = (1, 0, -2, \dots) \in V$ とは, $\mathbf{e}_0$ が第 0 項が 1, 第 1 項が 0 であるような V の元であることを意味する. $E = \{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$ および $F = \{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1\}$ はいずれも V の基底である. 2×2 行列 P で, 任意の $\mathbf{x} \in V$ を $\mathbf{x} = a\mathbf{e}_0 + b\mathbf{e}_1 = c\mathbf{f}_0 + d\mathbf{f}_1$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ と表したとき,

$$P \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ を満たすものを求めよ.}$$

- (2) $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots) \in V$ を $T\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in V$ に対応させる線形写像 $T : V \rightarrow V$ の, 基底 E に関する表現行列 T_E を求めよ.
- (3) T の基底 F に関する表現行列 T_F を求めよ.
- (4) (3) の結果を用いて, $\mathbf{f}_0 = (y_n)_{n=0}^\infty$, $\mathbf{f}_1 = (z_n)_{n=0}^\infty$ の一般項はそれぞれ $y_n = 1$, $z_n = 2^n$ であることを示せ. 更に, 第 0 項が a で第 1 項が b であり, 漸化式 $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$ を満たす数列 $(x_n)_{n=0}^\infty$ の一般項 x_n を a, b を用いて表せ.

(東北大 2023) (m20230508)

0.120 行列 $A = \begin{pmatrix} b & 1-b \\ 1-b & b \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ. ただし, $0 < b < 1$ は実数である.

問 1 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ. ただし, $\lambda_1 < \lambda_2$ とする.

問 2 問 1 で求めた各固有値 λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトルをそれぞれ求め, それらが直交することを示せ.

問 3 次の関係式を満たす直交行列 P を 1 つ求めよ. ただし, λ_1, λ_2 は問 1 で求めた固有値である.

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

問 4 A^n を求めよ. ただし, n は正の整数とする.

(東北大 2024)

(m20240501)

0.121 実数 a に対して 4 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a & 2 \\ a & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1-a & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

(1) A の行列式を求めよ.

(2) A を係数行列とする同次連立 1 次方程式

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が非自明解を持つような a の値を求めよ.

(東北大 2024)

(m20240508)

0.122 実数 a に対して 3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2a & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値を複素数の範囲で求めよ.

(2) A が対角化可能となるような a の条件を求めよ. ただし対角化は複素数を成分に持つ行列を含めた範囲で考えるものとする.

(東北大 2024)

(m20240509)

0.123 3 行 3 列の行列 A と B を以下のように与える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

このとき, 行列 A と B の和 $(A+B)$, 差 $(A-B)$, 積 $(A*B)$ を計算せよ.

(お茶の水女子大 1997)

(m19970607)

0.124 行列 $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ の成分について

$$a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1$$

$$aa' + bb' + cc' = aa'' + bb'' + cc'' = a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0$$

が成り立っている. このとき

(1) M の行列式の値を求めよ.

(2) $a^2 + a'^2 + a''^2 = b^2 + b'^2 + b''^2 = c^2 + c'^2 + c''^2 = 1$

$$ab + a'b' + a''b'' = ac + a'c' + a''c'' = bc + b'c' + b''c'' = 0$$

が成り立っていることを示せ.

ヒント: M と, M の転置行列との積を考えよ.

(お茶の水女子大 1997) (m19970608)

0.125 2行2列の行列 C と D を以下のように与える.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 C の特性方程式 $\det(C - xI) = 0$ を書き下し, その根を求めよ. ただし, $\det(C - xI)$ は行列 $C - xI$ の行列式を表し, I は2行2列の単位行列である. すなわち $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) D の n 乗 (D^n) を求め, そのトレース $\text{tr}(D^n)$ を計算せよ. ただし, $\text{tr} D$ とは行列 D の対角成分の和を表す記号である.

(3) C の n 乗 (C^n) のトレース $\text{tr}(C^n)$ の値を $n = 1, 2, 3$ の場合に求めよ.

この結果を (2) と比較し, 一般の n の場合のトレース $\text{tr}(C^n)$ の値を予想せよ.

(お茶の水女子大 1997) (m19970609)

0.126 3次対称行列 A を次で与える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A の固有ベクトルから成る $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底を求めよ.

(お茶の水女子大 1997) (m19970610)

0.127 実 n 次元ベクトル空間を $\mathbf{R}^n$ で表す. $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ への線形写像 f , $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^4$ への線形写像 g は, それぞれ次の行列 A, B で表されるものとする.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) f と g の合成写像 $g \circ f$ によって $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ がうつされる $\mathbf{R}^4$ のベクトルを求めよ.

(2) $f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をみたす $x \in \mathbf{R}^3$ を求めよ.

(3) g による像空間 $\text{Im } g$ の次元を求めよ. ここで $\text{Im } g$ は

$$\text{Im } g = \{g(x) \in \mathbf{R}^4 \mid x \in \mathbf{R}^3\}$$

で定義される.

(お茶の水女子大 1997) (m19970611)

0.128 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3×3 行列 P を一つ求めよ.

(お茶の水女子大 1999) (m19990609)

0.129 a を $0 \leq a \leq 1$ なる実定数とする. 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ に対して, A^n を計算し, その $n \rightarrow \infty$ における極限を示せ.

(お茶の水女子大 2000) (m20000611)

0.130 実数を成分とする 2×2 行列 A に対し, その転置行列 tA を右から掛けると,

$$A \cdot {}^tA$$

が単位行列になるという.

(1) A はどんな行列か.

(2) 平面上の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ はどんな点になるか, 位置関係を図形的に説明せよ.

(お茶の水女子大 2000) (m20000612)

0.131 (1) 次の対称行列の固有値と固有ベクトルを全て求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

(2) n 行 n 列の実対称行列 A の, n 個の固有ベクトル $b_1, \dots, b_n$ が, 全て求まったとしよう. ベクトル $b_1, \dots, b_n$ はそれぞれ列ベクトルとし, 互いに直交するように取った. 次に, 列ベクトル $b_1, \dots, b_n$ を横に並べて作った, n 行 n 列の行列を B としよう. 即ち, $B = (b_1, \dots, b_n)$. このとき, 行列の積 $B^T A B$ は対角行列であることを証明せよ. 但し, B^T は B の転置行列を表すものとする.

(お茶の水女子大 2000) (m20000614)

0.132 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって表される線型写像 $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ を考える.

(1) 空間 $\mathbf{R}^3$ 中の平面 $x - 3y - 2z = 0$ をパラメーターを使って表せ.

(2) (1) の平面はこの線型写像で何に写されるか.

(3) この線型写像で $\mathbf{R}^2$ 内の直線 $2x + 5y = 0$ に写ってくるもとの空間 $\mathbf{R}^3$ の図形 (すなわち原像) を求めよ.

(お茶の水女子大 2000) (m20000615)

0.133 A を与えられた実係数 n 次正方行列とすると, 以下の問に答えよ.

(1) 零ベクトル o ではないあるベクトル

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

とある自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して $A^m x = o$ が満たされるとき, A は正則行列ではないことを示せ.

- (2) $A^n \neq O$ (n は行列 A の次数) かつ $x \neq o$ であるが, $A^n x = o$ となるような行列 A とベクトル x の組の例を挙げよ.
- (3) あるベクトル $x \neq o$ に対して (1) のような仮定が満たされているとする.

$$k = k(x) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid A^m x = o\}$$

とおくとき, k 個のベクトル $x, Ax, \dots, A^{k-1}x$ は一次独立であることを証明せよ.

- (4) $A^m = O$ がある自然数 m に対して満たされているならば, $k \leq n$ となる自然数 k で $A^k = O$ となるものが存在することを示せ.

(お茶の水女子大 2001) (m20010607)

0.134 以下に与えられる 3 行 3 列の行列 A を考える.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

また, xyz 座標系の基底ベクトルを $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, および $\vec{e}_z$ と表す.

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (1) $A\vec{e}_x$, $A\vec{e}_y$, および $A\vec{e}_z$ を計算せよ.
- (2) 行列式 $\det A$ を計算せよ.
- (3) 逆行列 A^{-1} を求めよ.
- (4) 基底ベクトル $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, および $\vec{e}_z$ を三辺とする立方体を考える. 変換 A によって, その体積は何倍に変換されるか.

(お茶の水女子大 2001) (m20010610)

0.135 (1) 実対称行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値がすべて正である条件を書け.

- (2) (1) の条件のもとで次の重積分を計算せよ. ただし, 必要なら $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ を用いてよい.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)} dx dy$$

(お茶の水女子大 2003) (m20030608)

0.136 次の正方向行列 A, B, C を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

- (1) A, B, C の階数を求めよ.
- (2) A, B, C に逆行列が存在すれば求めよ.
- (3) n 次正方向行列 A について, 次の 2 つの命題を考える:
- (a) A^{-1} が存在する. (b) A の階数が n である.

この 2 つの命題の関係は次の 1), 2), 3) のうちのどれか? 理由とともに答えよ.

- 1) 同値
- 2) 一方が他方の十分条件であるが, 必要条件でない.
- 3) 1), 2) のいずれでもない.

(お茶の水女子大 2003) (m20030610)

0.137 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを計算せよ.

(お茶の水女子大 2003) (m20030612)

0.138 (1) 実対称行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値がすべて正である条件を書け.

(お茶の水女子大 2003) (m20030613)

0.139 行列 A の固有値 λ と固有ベクトル ψ は,

$$A\psi = \lambda\psi$$

という関係式を満足する. このとき以下の問いに答えよ.

(1) 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{ab} \\ \sqrt{ab} & a-b \end{pmatrix}$$

ただし, a, b は正の実数とせよ.

(2) エルミート行列の固有値は, 実数であることを証明せよ. ただし, エルミート行列 H とは, 複素数の成分をもつ行列であり, 転置して複素共役を取った (これをエルミート共役を取るといふ) 行列が, もとの H と一致する行列である.

(お茶の水女子大 2003) (m20030614)

0.140 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して, 次のような複素 n 次正方行列 $N, J_\lambda(n)$ を考える.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad J_\lambda(n) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

(1) 自然数 k に対して N の k 乗 N^k を求めよ.

(2) 自然数 k に対して $J_\lambda(n)^k$ を求めよ.

(3) 複素正方行列 A が対角化可能であることの定義を述べよ.

(4) 複素正方行列 A がある自然数 k に対して $A^k = E$ を満たすならば A は対角化可能であることを示せ. ただし E は単位行列である. 必要ならば次の定理を用いてもよい.

定理 任意の複素 l 次正方行列 A に対して l 次正則行列 P , m 個の複素数 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ および m 個の自然数 $n_1, \dots, n_m$ で $\sum_{i=1}^m n_i = l$ を満たすものが存在して

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1}(n_1) & & & \\ & J_{\lambda_2}(n_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_m}(n_m) \end{pmatrix} \text{ と書ける.}$$

(お茶の水女子大 2003) (m20030615)

0.141 (1) 線形写像の定義を書きなさい.

(2) 次の写像 f が線形写像でないならば線形写像でないことを証明し, 線形写像ならば f を表す行列と, f の核 ($\text{Ker} f$) と像 ($\text{Im} f$) を求め, それぞれの次元を調べなさい.

$$(a) \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x-3y \end{pmatrix}, \quad (b) \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3 \\ 2y+z-4 \end{pmatrix}$$

(注) ただし, 線形空間 V から W への線形写像 $F: V \rightarrow W$ の核とは, $\text{Ker} F = \{v \in V | F(v) = \mathbf{0}\}$ のことで, 像とは $\text{Im} F = \{F(v) \in W | v \in V\}$ のことである. また, $\mathbf{0}$ は零ベクトルを表す.

(お茶の水女子大 2007) (m20070603)

0.142 次の行列 A について, 行列式, 逆行列, 固有値と固有ベクトル空間の基底を求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2007) (m20070604)

0.143 (1) 正方行列 A と B がともに上三角行列であるとき, 積 AB もまた上三角行列となることを示せ.

(2) 次の行列 A について以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) A の固有値を求め, それぞれの固有値に対する A の固有空間の基底を一組求めよ.

(b) 適当な正則行列 P を求めて $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにせよ.

(お茶の水女子大 2009) (m20090602)

0.144 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求め対角化しなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2009) (m20090606)

0.145 行列

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値, および, 独立な固有ベクトルをすべて求めよ

(お茶の水女子大 2009) (m20090607)

0.146 次の行列で定められる $\mathbb{R}^4$ の線形変換の核と像を求めよ.

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & 4 & 7 \\ -2 & -4 & -7 & -6 \\ -1 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2010) (m20100604)

0.147 (1) n を自然数とする. 複素数を成分とする n 次正方行列が n 個の相異なる固有値を持てば, 対角化可能であることを示せ.

- (2) a, b, c, d を複素数とする. 2 次正方行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

が対角化できるための必要十分条件を a, b, c, d の関係を用いて表せ.

(お茶の水女子大 2010) (m20100605)

- 0.148** 二次元平面上で $x-y$ 座標軸を反時計回りに θ だけ回転させた座標軸を $x'-y'$ とする. ある点 P の位置 (x, y) はこの新しい座標軸では (x', y') と表されるが, 両者の間には次のような関係がある:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \textcircled{1}$$

以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 A とその転置行列 A^T の積 AA^T を求めよ.
 (2) 行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \textcircled{2}$$

とすると, BB^T は前問の AA^T に等しいことを示せ. また, A が 2 次元平面上での座標軸の回転を表していたのに対し, B は何を表すかを説明せよ.

- (3) A, B のような行列は直交行列と呼ばれる. 前問で見たような行列 A と B の違いは直交行列のどのような性質によるのか, 答えよ.

(お茶の水女子大 2010) (m20100606)

- 0.149** 次の行列 A で表される線形写像 f を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) f の核 ($\text{Ker } f$) の基底と次元を答えなさい.
 (2) f の像 ($\text{Im } f$) の基底と次元を答えなさい.

(注) ここで, 線形空間 V から W への線形写像 $F: V \rightarrow W$ の核とは, $\text{Ker } F = \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$ のことで, 像とは $\text{Im } F = \{f(\mathbf{v}) \in W \mid \mathbf{v} \in V\}$ のことである. また, $\mathbf{0}$ は零ベクトルを表す.

(お茶の水女子大 2010) (m20100611)

- 0.150** 次の実対称行列 B の固有値, 固有ベクトルを求め, 直交行列により対角化しなさい.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2010) (m20100612)

- 0.151** 任意の実 2×2 行列を無限回作用させることにより, 平面上の点はどこに行き着くかについて考察せよ. 以下の (1) から (5) の手順に従ってもよいし, または別の手順で解答してもよい.

- (1) 上三角行列

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

の固有値を求める.

- (2) 行列 T の n 乗を計算する.
- (3) 行列 T のすべての固有値の絶対値が 1 より小さい場合, 実平面上の点

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

は行列 T を無限回作用するとどのような点に近づくか考える. ただし, $\alpha, \beta, \gamma, x_1, x_2$ はすべて実数であるとする.

- (4) 2×2 行列 M に対し

$$Me = \lambda e$$

を満たす単位固有ベクトルを

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

とし, この成分 a, b を用いて正則行列

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

を定義する. 行列 $P^{-1}MP$ の (2,1) 成分 (左下の要素) がゼロになることを確かめ, 任意の 2×2 行列が上三角行列に変換されることを示す. さらに, $T_0 = P^{-1}MP$ とするとき n を自然数として

$$M^n = P(T_0)^n P^{-1}$$

が成立することを示す.

- (5) 行列 B の要素がすべて実数で, 固有値の絶対値が 1 より小さいとする. このとき行列 B を無限回作用すると, 実平面上の点はどのような点に近づくか考えてみる.

(お茶の水女子大 2011) (m20110604)

0.152 $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f が

$$f: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

を満たすとき, 以下の各問に答えよ.

- (1) f の表現行列 A を求めよ.
- (2) A の固有値およびそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(お茶の水女子大 2011) (m20110608)

0.153 以下の各問に答えよ.

- (1) t を実数とする. 行列

$$A = \begin{pmatrix} t & -t-1 & -1 \\ t-1 & -t & -1 \\ 3-2t & 2t+3 & 4 \end{pmatrix}$$

の固有値を求め, 各固有値に対する固有空間の次元が t の値によってどのように変わるかを答えよ. また, この行列が対角化可能となるような t の値を求め, そのとき $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正方行列 P を一つ求めよ.

- (2) n を自然数, A を n 次実正方行列とする. 以下では i は自然数, $r(X)$ は行列 X の階数を表すものとする.

- (a) $r(A^i) \geq r(A^{i+1})$ となることを示せ.
 (b) $r(A^i) = r(A^{i+1})$ のとき, $r(A^{i+1}) = r(A^{i+2})$ となることを示せ.
 (c) $r(A^n) = r(A^{n+1})$ となることを示せ.

(お茶に水女子大 2012) (m20120602)

- 0.154** 次の写像 f が線形写像でないならば線形写像でないことを証明し, 線形写像ならば f を表す行列と, f の核 ($\text{Ker } f$) と像 ($\text{Im } f$) を求め, それぞれの次元を調べなさい.

(1)

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

(2)

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y + z \\ -3x + 2z \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2012) (m20120607)

- 0.155** 次の行列 A, B, C について, 固有値と固有ベクトル空間の基底を求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2012) (m20120608)

- 0.156** (1) S を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする. S の階数 (ランク) $\text{rank } S$ の定義を述べよ.

- (2) S, T を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする. このとき, 不等式

$$\text{rank}(S + T) \leq \text{rank } S + \text{rank } T$$

が成立することを示せ.

- (3) 上記問題 (2) で $\text{rank}(S + T) = \text{rank } S + \text{rank } T$ が成立するような線形写像 S, T の例をあげよ.

- (4) T を $\mathbb{R}^l$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像とし, S を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする. このとき,

$$\text{rank } S \circ T \leq \text{rank } S, \quad \text{rank } S \circ T \leq \text{rank } T$$

が成立することを示せ.

- (5) 次の行列で定められる線形写像 $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ の階数を求めよ. ただし, a は実数である.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \end{pmatrix}$$

- (6) 上記 (5) で与えられた線形写像 F の核 (核空間) $F^{-1}(\mathbf{0})$ の次元が最も大きくなるときの a を求めよ. またそのときの核の基底を 1 組求めよ.

(お茶の水女子大 2013) (m20130604)

0.157 行列に関する次の問に答えよ.

- (1) 次の 2 行 2 列の実対称行列 A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

の固有値 λ_1, λ_2 と規格化された固有ベクトル v_1, v_2 を求めなさい.

- (2) 前問で求めた固有ベクトルを並べて作った行列と, その転置行列を用いて A を対角化しなさい.

一般に, n 行 n 列の実対称行列 B は, ある直交行列 O およびその転置行列 O^T を用いて $O^T B O$ とすれば対角化されることが知られている.

- (3) 直交行列 O の定義を書きなさい.

- (4) 一般の 2 行 2 列の実対称行列 C の行列式がその 2 つの固有値 c_1, c_2 の積に等しいこと

$$\det C = c_1 c_2$$

を証明し, C が (*) で与えられるとき (すなわち $C = A$) にそれが成り立っていることを示しなさい.

- (5) 一般の 2 行 2 列の実対称行列 C の対角和がその 2 つの固有値 c_1, c_2 の和に等しいこと

$$\text{Tr } C = c_1 + c_2$$

を証明し, C が (*) で与えられるとき (すなわち $C = A$) にそれが成り立っていることを示しなさい.

(お茶の水女子大 2013) (m20130605)

0.158 ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^4$ 上の一次変換 f を表現する行列を

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とするとき, 以下の問に答えよ.

- (1) f の像 $\text{Im } f$ の次元と基底を求めよ.
(2) f の核 $\text{Ker } f$ の次元と基底を求めよ.

(お茶の水女子大 2013) (m20130609)

- 0.159 (1) n 次正則行列 A の逆行列 A^{-1} を A の行列式 $|A|$ 及び A の余因子行列 $\tilde{A}$ を用いて表せ.
(2) A を成分が全て整数である n 次正則行列とする. さらに, A の行列式は 1 であると仮定する. このとき, A の逆行列 A^{-1} の成分も全て整数となることを示せ.
(3) 次の行列 B の行列式を求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & c_1 & 3 & 6 & 7 \\ b_2 & c_2 & 0 & 4 & 6 \\ b_3 & c_3 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

(お茶の水女子大 2014) (m20140602)

0.160 5次正方行列 A を次で与える：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) A の固有値は、 -2 と 8 であることを示せ.
- (2) A の固有値 $-2, 8$ の固有空間をそれぞれ $V(-2), V(8)$ で表す. $\mathbf{a}$ を $V(-2)$ の 0 でないベクトルとし, $\mathbf{b}$ を $V(8)$ の 0 でないベクトルとする. このとき, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は 1 次独立 (線形独立) であることを示せ.
- (3) 各固有空間 $V(-2), V(8)$ の基底を求めよ.
- (4) 行列 A が対角化可能であることを示し, $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求めよ.

(お茶の水女子大 2014) (m20140603)

0.161 以下の問いに答えよ.

- (1) (a) 線形空間 $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への写像 f が線形写像であることの定義を述べよ.

- (b) $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f で, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ に, それぞれ移

す線形写像が存在するかどうか答え, 存在するならば, この条件を満たした像 (像空間) の次元が最大, 最小となる線形写像の例をそれぞれあげ, それらの核 (核空間) の次元と基底を求めよ.

- (c) $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f で, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に, それぞれ移す線

形写像が存在するかどうか答え, 存在するならば, この条件を満たした像 (像空間) の次元が最大, 最小となる線形写像の例をそれぞれあげ, それらの核 (核空間) の次元と基底を求めよ.

- (2) 次の行列 A の固有値と, 各固有値に対する固有ベクトル空間の基底と次元を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2015) (m20150602)

0.162 次の行列 A について, A^2, A^3, A^4 を求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2016) (m20160603)

0.163 ある対称行列 F が直交行列 P によって対角行列 $F' = P^T F P$ へと変換された. ここで T は行列の転置を表す. 以下の問に答えなさい.

- (1) F のトレース (対角成分の和) はこの変換により不変であること, つまり $T_r F = T_r F'$ を証明しなさい.
- (2) 行列 F が以下のように与えられたとき, P と F' を求めなさい.

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (3) 行列 F と F' のトレースを求めなさい.

(お茶の水女子大 2016) (m20160604)

0.164 次の行列 A, B について, それぞれ固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2016) (m20160611)

0.165 以下の 2 次正方行列について, 固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ただし, $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$ とし, a, b は実数とする.

(お茶の水女子大 2016) (m20160615)

0.166 $m \times n$ 型実行列 $A(t) = (a_{ij}(t))$ の各成分 $a_{ij}(t)$ が t に関して微分可能な関数であるとき, $a_{ij}(t)$ の導関数 $a'_{ij}(t)$ を成分にもつ $m \times n$ 型行列を $A'(t)$ で表す.

- (1) 各成分が t に関して微分可能な関数である $m \times n$ 型, $n \times l$ 型実行列をそれぞれ $F(t) = (f_{ij}(t))$, $G(t) = (g_{jk}(t))$ で表す. このとき, 行列の積 $F(t)G(t)$ の各成分も t に関して微分可能な関数となり, $(FG)'(t) = F'(t)G(t) + F(t)G'(t)$ が成り立つことを示せ.
- (2) $F(t) = (f_{ij}(t))$ は, 各成分が t に関して微分可能な関数である n 次実正方行列とする. $F(t)$ の行列式 $|F(t)|$ は t に関して微分可能な関数となることを示せ. すべての t について $F(t) = (f_{ij}(t))$ は正則であるとき, $F(t)$ の逆行列 $F^{-1}(t)$ の各成分も微分可能な関数で, $(F^{-1})'(t) = -F^{-1}(t)F'(t)F^{-1}(t)$ が成り立つことを示せ.

(お茶の水女子大 2017) (m20170603)

0.167 (1) $m \times n$ 型実行列 $A = (a_{ij})$ の階数 (rank) の定義を述べよ.

- (2) t を実数とする. 次の行列の階数を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2t-2 & t & 1 \\ 1 & 0 & 1 & t \\ t & t-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) t を実数とする. 4次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の4つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2t-2 \\ 0 \\ t-1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を $V(t)$ で表す. t が実数全体を動くとき, $V(t)$ の次元の最小値をとるような t の値を求めよ. また, そのときの $V(t)$ の基底を求めよ.

(4) t を実数とする. 未知数 x, y, z に関する次の連立1次方程式が解をもつような t をすべて求めよ.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + (2t-2)y + tz = 1 \\ x + z = t \\ tx + (t-1)y + z = 1 \end{cases}$$

(お茶の水女子大 2017) (m20170604)

0.168 $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f が

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ を } \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix} \text{ に, } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ を } \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ に, } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ を } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ に,}$$

それぞれ写すとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 線形写像 f を表す行列 A を求めよ.

(2) 線形写像 f の核 ($\text{Ker } f$) と像 ($\text{Im } f$) の次元と基底をそれぞれ求めよ.

(お茶の水女子大 2017) (m20170606)

0.169 実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ を直交行列により対角化せよ. 変換に用いた直交行列も答えること.

(お茶の水女子大 2017) (m20170607)

0.170 以下の2次正方行列 A について答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) 固有値を求めよ.

(2) それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(お茶の水女子大 2017) (m20170611)

0.171 (1) 上三角行列の積は上三角行列になることを示せ.

(2) 次の行列式を計算せよ.

$$A = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

(3) 次の行列を対角化せよ。また、各固有値の固有空間の次元を求めよ。

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2018) (m20180602)

0.172 行列 $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ について。

- (1) 固有値を求めよ。
- (2) 固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。

(お茶の水女子大 2018) (m20180605)

0.173 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ について。

- (1) 固有値を求めよ。
- (2) 固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。

(お茶の水女子大 2019) (m20190602)

0.174 次の行列 A を考える。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$T(x) = Ax$ で与えられる $\mathbb{R}^4$ の線形変換 T の像と核それぞれについて、一組の基底と次元を求めよ。

(お茶の水女子大 2019) (m20190606)

0.175 行列

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ。 i は虚数単位である。

(お茶の水女子大 2019) (m20190612)

0.176 次の行列の行列式を計算し、それが 0 となる x の値をすべて求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega & 1 & x \\ \omega & 1 & 2 & x^2 \\ \omega^2 & \omega^2 & 4 & x^3 \\ 1 & \omega & 8 & x^4 \end{pmatrix}$$

ただし、 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ である。

(お茶の水女子大 2020) (m20200603)

0.177 次の式で定義される実対称行列 A を考える。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを全て求めよ.
- (2) 任意の 3 次元ベクトルが行列 A の固有ベクトルの線形結合で表されることを示せ.
- (3) 行列 $\sin\left(\frac{1}{2}\pi A\right)$ とその固有値を求めよ.

(お茶の水女子大 2020) (m20200605)

0.178 行列 $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について、以下の各問いに答えよ.

- (1) 行列式 $\det(M)$ を求めよ.
- (2) 行列 M は可逆か否かを述べ、可逆ならばその逆行列 M^{-1} を求めよ.

(お茶の水女子大 2020) (m20200616)

0.179 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(お茶の水女子大 2020) (m20200617)

0.180 次の行列 A について、 $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ で与えられる $\mathbb{R}^4$ の線形変換 f を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & a & b \\ -1 & 2 & c & d \end{pmatrix}$$

- (1) 線形変換 f の像が $\mathbb{R}^4$ の 2 次元部分空間となるときの a, b, c, d の値を求めよ.
- (2) a, b, c, d が (1) の値のときの $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ の解空間の次元と 1 組の基底を求めよ.
- (3) f を a, b, c, d が (1) の値のときの $\mathbb{R}^4$ の線形変換とし、 g を $\mathbb{R}^4$ の線形変換で、像が $\mathbb{R}^4$ の 2 次元部分空間であるものとする. このとき、 g と f との合成写像 $f \circ g$ の像空間の次元のとり得る値の範囲を答え、その範囲のそれぞれの次元となる g の例をあげよ.

(お茶の水女子大 2021) (m20210605)

0.181 $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 7 & 5 \\ -6 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ の三つの行列に対し、以下の問いに答えよ.

- (1) $\text{rank}(A)$, $\text{rank}(B)$, $\text{rank}(C)$ を求めよ.
- (2) A^{-1} , B^{-1} , C^{-1} が存在するならばそれを求め、存在しないならばその理由を示せ.
- (3) B^n を求めよ.

(お茶の水女子大 2021) (m20210608)

0.182 以下の問いに答えよ. ただし、行列はすべて複素行列とする.

- (1) X をベクトル空間、 U, V, W を X の部分ベクトル空間とする. W が U, V の和集合 $U \cup V$ に含まれるとき、 W は U に含まれるか、 V に含まれるかのどちらかであることを示せ.
- (2) A を 3 次正方行列で、 $A^3 = O$, $A^2 \neq O$ となるものとする. ただし、 O は零行列とする. A の階数を求めよ.

(3) 次の行列 A を考える. ただし, a は複素数とする.

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & -1 & a-2 \\ 2a & 2 & 2-2a \\ -a & -1 & a-1 \end{pmatrix}$$

(a) $a = 0$ のとき, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ.

(b) $a \neq 0$ のとき, A は対角化可能でないことを示せ.

(お茶の水女子大 2022) (m20220604)

0.183 任意の行列 A に対してそのエルミート共役を $A^\dagger$ と表す.

(1) 行列の積 $A^\dagger A$ が負の固有値を持たないことを示せ.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき, 行列 $A^\dagger A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(3) (2) の行列 A に対して行列 $(A^\dagger A)^n$ と $e^{A^\dagger A}$ を求めよ. ただし, n は正の整数である.

(お茶の水女子大 2022) (m20220608)

0.184 (1) 次の x, y, z についての 1 次方程式系の解の 個数 を, a の値で場合分けして求めよ.

$$\begin{cases} x & -2y & - & 3z & = & 3 \\ -2x & +ay & + & 4z & = & 2 \\ -4x & +6y & +(a+8)z & = & -4 \end{cases}$$

(2) 次の行列の対角化可能性を, 固有空間の次元を調べることで判定せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(3) 実行列について次の問いに答えよ.

(a) 対称行列と直交行列の定義を述べよ.

(b) 直交行列によって対角化可能な行列は対称行列であることを示せ.

(c) 対称行列の固有値は実数であることを示せ.

(お茶の水女子大 2023) (m20230602)

0.185 行列 H の固有値と規格直交化された 2 つの相異なる固有ベクトルを求めよ. ただし, 行列 H は次式で与えられるとする.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2023) (m20230607)

0.186 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

(お茶の水女子大 2024) (m20240604)

0.187 正方行列 $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & 1 & t \\ t^2 & t & 1 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ。ただし、 $t \in \mathbb{R}$ とする。

- (1) 行列 $A(t)$ の行列式を求めよ。
- (2) 行列 $A(t)$ が正則行列であるため条件を挙げ、 $A(t)$ の逆行列を求めよ。

0.188 数列 $\{a_n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) がある。この数列の隣接した3項の間には次のような関係式が成り立つ。

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

- (1) $a_0 = a_1 = 1$ として、極限值

$$\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

を求めよ。

- (2) 上の漸化式をベクトルおよび行列の関係式を用いると

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

と書かれる。この行列を対角化し、またその時の固有ベクトルを求めることにより、 $a_0 = a_1 = 1$ を初期値とした極限值

$$\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

を求めよ。また a_n の一般項はどのように書けるか。

(東京大 1997) (m19970703)

0.189 x - y 平面上を、ある一つの点が移動している。

時刻 $t = i$ (i は整数) におけるこの点の位置を $\mathbf{p}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ と表すとき、

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 50 \\ 35 \end{pmatrix} \text{ であった。}$$

また、 $\mathbf{p}_{i+1} = A\mathbf{p}_i$ (A は行列) に従っているものとする。

- (1) 行列 A を求めよ。
- (2) A^n を求め、時刻 $t = n$ (n は整数) におけるこの点の位置 $\mathbf{p}_n$ を求めよ。

(東京大 1998) (m19980702)

0.190 p, q を任意の実数とすると、以下の問いに答えよ。

- (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$ について、 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ を満たす実数 λ と非零ベクトル $\mathbf{x}$ の組をすべて求めよ。

- (2) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を、次の漸化式で与える。
$$\begin{cases} a_{n+1} = (1-p)a_n + qb_n \\ b_{n+1} = pa_n + (1-q)b_n \end{cases}$$

ただし、 $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ とし、 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の初項を、それぞれ、 a_0, b_0 とする。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を p, q, a_0, b_0 を用いて示せ。

(東京大 2006) (m20060702)

0.191 x_i, y_i の各値がある線形系を介して, x_{i+1}, y_{i+1} をそれぞれ出力する際, 入力値と出力値の関係は,

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \text{ で表現できる. ただし, } i \text{ は自然数とし, } A \text{ は行列とする.}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -31 \end{pmatrix} \text{ とするとき, 以下の問いに答えよ.}$$

- (1) 系を表す行列 A を求めよ.
- (2) 行列 A の固有値, 固有ベクトルを求めよ. また, 行列 A の表す一次変換の幾何学的意味を固有ベクトルを用いて述べよ.
- (3) (2) の結果を用いて, A^n を求めよ. ただし, n は自然数とする,
- (4) x_n, y_n を求めよ. ただし, n は自然数とする,

(東京大 2007) (m20070702)

0.192 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について, 以下の設問に答えよ.

- (1) A の固有値 λ_1, λ_2 とそれらに対応する固有ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ をそれぞれ求めよ. ただし, 絶対値が大きい方の固有値を λ_1 とする.
- (2) xy 平面上の 3 点 $P(p_1, p_2), Q(q_1, q_2), R(r_1, r_2)$ を頂点とする三角形 PQR の面積 S の導出過程を示し, 各頂点の座標 $p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2$ により表せ. また, 各頂点の位置ベクトルが A により一次変換された際, その三角形の面積は何倍になるかを求めよ.
- (3) ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ をとり, $\mathbf{a}$ に A を n 回かけたベクトルを $\mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ とする. その成分 α_n, β_n および A^n を求めよ. ただし, n は自然数とする.
- (4) 極限值 $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n}$ が一定の値に収束することを示し, その値を求めよ.

(東京大 2009) (m20090704)

0.193 2 行 2 列の行列 $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $A^2, A^{-1}, |A|$ を求めよ.
- (2) A の全ての固有値を求めよ.
- (3) $(A - I)^2 = 0$ が成り立つことを示せ. ただし, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.
- (4) 任意の実数 t について, ある t の多項式 $g(t)$ と定数 a, b が存在して

$$t^{100} = g(t)(t-1)^2 + at + b$$

が成り立つ. a と b を求めよ.

- (5) A^{100} を A と I を用いて表せ.
- (6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ を自然対数の底 e を用いて表せ. ただし, $A^0 = I, 0! = 1$ である.

(東京大 2010) (m20100701)

0.194 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき, 下の (1)~(5) を答えよ.

ただし, 3つのベクトル $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3$ を $\mathbf{m}_1 = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{pmatrix}, \mathbf{m}_2 = \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \end{pmatrix}, \mathbf{m}_3 = \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \end{pmatrix}$ と

するとき, $M = [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3]$ と表される行列 M は $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$ であるとする.

- (1) 行列の3つの固有値を a_1, a_2, a_3 および固有ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ を求めよ. ただし, $|\mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}_2| = |\mathbf{u}_3| = 1$ とすること.
- (2) 固有ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ を用いて作られる行列 U を $U = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ とする. $UV = I$ のように行列 U に右からかけると単位行列 I となる行列 V を求めよ.
- (3) 固有ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ は互いにどのような関係にあるか説明せよ.
- (4) 固有ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ と行列 U について, 下式を満たすような3つの行列 P_1, P_2, P_3 を求めよ. ただし, P_1, P_2, P_3 はそれぞれ3行3列の行列であり, $\mathbf{0}$ は零ベクトルである.

$$\begin{cases} P_1 U = [\mathbf{u}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0}] \\ P_2 U = [\mathbf{0} & \mathbf{u}_2 & \mathbf{0}] \\ P_3 U = [\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{u}_3] \end{cases}$$

- (5) 行列 A の n 乗である A^n を求めよ. ただし, n は正の整数である.

(東京大 2011) (m20110705)

0.195 3個の一次独立な実数ベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ に対して, 3次の正方行列 A の (i, j) 成分を $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j$ で定義する. ここで $\vec{a} \cdot \vec{b}$ は, ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表すものとする. ただし, $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 = 0$ であるとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 A の行列式を求めよ. さらに, その値が正であることを示せ.
- (2) 実数 x に対して, 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}$$

で定義する. $f(x)$ を定めよ.

- (3) $f(x)$ を最小にする x を求めよ. さらに, $f(x)$ の最小値を求めよ.
- (4) 設問(3)で求めた x に対して, ベクトル $\vec{b}$ を $\vec{b} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + x\vec{a}_3$ とおく. このとき, $\vec{b}$ と $\vec{a}_3$ は直交することを示せ.
- (5) 任意の実数 x_1, x_2, x_3 に対して,

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq 0$$

であることを証明せよ. さらに, 等号が成立するための必要十分条件を示せ.

(東京大 2015) (m20150705)

0.196 3次の正方行列 A の固有値が $-1, 1, 2$ であるとする. また, I を3次の単位行列とする.

- (1) A の特性多項式 $\phi(x)$ を求めよ.
- (2) A^3 および A^4 を, A^2 と A と I の線形和で表せ.

- (3) $A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n I$ と表せる. $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ を a_n, b_n, c_n を用いて表せ. ただし, n は 1 以上の整数である.
- (4) a_n, b_n, c_n を求めよ. 逆行列を求める以下の公式を用いてもよい.

公式:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \text{ について, } \det P \neq 0 \text{ のとき}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} p_{22}p_{33} - p_{23}p_{32} & p_{13}p_{32} - p_{12}p_{33} & p_{12}p_{23} - p_{13}p_{22} \\ p_{23}p_{31} - p_{21}p_{33} & p_{11}p_{33} - p_{13}p_{31} & p_{13}p_{21} - p_{11}p_{23} \\ p_{21}p_{32} - p_{22}p_{31} & p_{12}p_{31} - p_{11}p_{32} & p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21} \end{pmatrix}$$

(東京大 2016) (m20160705)

0.197 2つの正方行列 A, B を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & 1 \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

とし, 行列 C を $C = BAB^{-1}$ とする. 以下の問いに答えよ. なお, 以下では任意のベクトル $\vec{x}$ に対し $\vec{x}^T$ はその転置を表すものとする. また, 行列 I を単位行列とし, ある正方行列 X に対して $\exp(X)$ を

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots$$

と定義する.

- (1) 行列 A の固有値を複素数の範囲で求めよ.
- (2) 行列 C の固有値を複素数の範囲で求めよ.
- (3) あるスカラー変数 t に対して $\exp(At)$ を求めよ.
- (4) 3次元ベクトル $\vec{x}$ に対してスカラー関数 $f(\vec{x})$ を

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n \left\{ \exp\left(C \frac{2\pi k}{n}\right) \vec{a} - \vec{x} \right\}^T \left\{ \exp\left(C \frac{2\pi k}{n}\right) \vec{a} - \vec{x} \right\}$$

とおく. ただし, n は $n > 1$ を満たす整数, $\vec{a}$ は以下のような3次元ベクトルである.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

関数 $f(\vec{x})$ を最小にする $\vec{x}$ は, ある単位ベクトル $\vec{b}$ を用いて以下のような形式で表せる.

$$\vec{x} = \boxed{(\mathcal{A})} \left(\sum_{k=1}^n \boxed{(\mathcal{I})} \right) \vec{b}$$

(a) (ア)と(イ)に入る数式を書け．必要であれば a_1, a_2, a_3, n, k を用いてよい．なお，行列を含まない形式で解答すること．

(b) $\vec{b}$ を求めよ．

(5) (4) で求めた $\vec{x}$ に対して， $n \rightarrow \infty$ としたときの $\vec{x}$ を a_1, a_2, a_3 を用いて表せ．

(東京大 2018) (m20180705)

0.198 数列 x_n, y_n, z_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) を，次の漸化式で定義する．

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \quad (n \geq 0)$$

ただし，

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，初期値 x_0, y_0, z_0 は実数で与えられているものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の全ての固有値と，それに対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) A^n を求めよ．

(3) $x_0 > 0, y_0 > 0, z_0 > 0$ のとき， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n}$ を求めよ．

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2} < C$ となる定数 C ($C > 0$) が存在するための，初期値 x_0, y_0, z_0 に関する必要十分条件を示せ．

(東京大 2020) (m20200704)

0.199 3次元列ベクトル $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ を，まず y 軸回りに角度 θ ($0 < \theta < \pi, \theta \neq \frac{\pi}{2}$) 回転し，次に x 軸回りに

角度 ϕ ($0 < \phi < \pi, \phi \neq \frac{\pi}{2}$) 回転し，最後に xy 平面 ($z = 0$) に投影して $\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix}$ を得る変換を，行

列 T を用いて

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

と表すものとする．

座標系は右手系とし，各軸回りの回転は右ねじの方向を正とする (図 4.1) ．

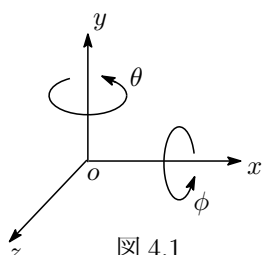


図 4.1

(1) 行列 T を， θ, ϕ を用いて表せ．

ここで、3次元列ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をそれぞれ行列 T によって変換して得られる 3次元列ベクトルを $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ とする.

(2) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ を求めよ.

以下では、 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$ となる場合を考える.

(3) このとき、 $\sin \theta$ と $\sin \phi$ の値を求めよ.

(4) (3) の結果を用いて、 xy 平面 ($z = 0$) における、原点を始点とする $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ のすべての組み合わせの略図を描き、それぞれの場合に $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ が相互になす角度を記せ.

(東京大 2023) (m20230704)

0.200 $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) 行列 A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(2) $M_3(\mathbf{R})$ を 3 次正方実行列全体のなすベクトル空間とする.

$M_3(\mathbf{R})$ から $M_3(\mathbf{R})$ への線形写像 φ_A を

$$\varphi_A(X) = AX$$

と定義する. φ_A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(東京工業大 1996) (m19960804)

0.201 3×3 行列 A が

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を満たすとき、次の問に答えよ.

(1) A を求めよ.

(2) A^n を求めよ.

(東京工業大 1997) (m19970803)

0.202 $A = \begin{pmatrix} -13 & 12 & 6 \\ -12 & 11 & 6 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P をみつけれよ.

(2) 実直交行列 P で上の性質をもつものは存在するか? YES ならば 例をみつけれよ. NO ならば その理由を記せ.

(東京工業大 1998) (m19980803)

0.203 $A = \begin{pmatrix} -13 & 12 & 6 \\ -12 & 11 & 6 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ に対し $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を求めよ.

(東京工業大 2000) (m20000804)

0.204 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ に対して

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ.

(東京工業大 2001)

(m20010805)

0.205 次の行列の階数を求めよ. ただし, x は複素数とする.

$$\begin{pmatrix} x & x+1 & x^2 \\ 1 & x^2+1 & 1 \\ x & x^2+x & x^2 \end{pmatrix}$$

(東京工業大 2001)

(m20010807)

0.206 a を実数とすると, 次の行列の階数を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(東京工業大 2002)

(m20020805)

0.207 A は 3 次複素正方行列で, $A^2 \neq O$, $A^3 = O$ を満たすとする. このとき次の問いに答えよ.

(1) 3 次元の複素列ベクトル $\vec{x}$ を $A^2\vec{x} \neq O$ ととる. このとき, $\{\vec{x}, A\vec{x}, A^2\vec{x}\}$ は 1 次独立であることを示せ.

(2) 上で与えられた $\vec{x}$ に対して, 3 次正方行列 P を $P = (A^2\vec{x} \ A\vec{x} \ \vec{x})$ とおく. このとき,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{であることを示せ.}$$

(東京工業大 2003)

(m20030804)

0.208 $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -5 & 4 & -8 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対し $P^{-1}CP$ が対角行列となるような正則行列 P をみつけよ.

(東京工業大 2004)

(m20040804)

0.209 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

を対角化せよ. A を対角化する正則行列 P も求めよ.

(東京工業大 2005)

(m20050803)

0.210 行列 $B = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$ について

(1) 行列式を求めよ.

(2) 階数を求めよ.

(東京工業大 2005)

(m20050804)

0.211 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -8 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ と定める. $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ.

(東京工業大 2006) (m20060803)

0.212 定数 a, b, c に対し, 行列 B を $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & b \\ a & 2 & -2 \\ 4 & -2 & c \end{pmatrix}$ と定める. B の階数を求めよ.

(東京工業大 2006) (m20060804)

0.213 次の行列の階数を求めよ. $\begin{pmatrix} 1 & y & 1 & x \\ y & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & y \\ x & 1 & y & 1 \end{pmatrix}$

(東京工業大 2007) (m20070803)

0.214 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) A の固有値を求めよ. また, 各固有値に対する固有空間を求めよ.

(2) 次の条件をみたす実直交行列 T を用いて A を対角化せよ. T も具体的に求めよ.

条件: T の (i, j) 成分を t_{ij} とすると, $t_{12} = 2t_{22} > 0$ かつ t_{11}, t_{13} はともに正の数である.

(東京工業大 2008) (m20080803)

0.215 実対称行列 A について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値がどれも零でないことと A が正則であることは同値であることを示せ.

(2) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$ に対し, 適当な直交行列 P によって $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにせよ.

(東京工業大 2009) (m20090801)

0.216 $C := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & p & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ -3 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D := \begin{pmatrix} 3 & 4 & q \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ とおく. ただし, p, q は定数である.

(1) C の行列式を求めよ.

(2) D および CD の階数を求めよ. 必要に応じ p, q の値で場合わけして答えよ.

(東京工業大 2009) (m20090802)

0.217 実数 a, b, c, d に対し, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad+bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) $\det B$ を $\det A$ で表せ.

(2) $\text{rank} A = 0$ のとき $\text{rank} B$ を求めよ.

(3) $\text{rank} A = 1$ のとき $\text{rank} B$ を求めよ.

(4) $\text{rank}A = 2$ のとき $\text{rank}B$ を求めよ.

(東京工業大 2011) (m20110802)

0.218 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を求めよ.

(東京工業大 2012) (m20120803)

0.219 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ とおく. A が逆行列を持つための条件を求め, 更にその場合に逆行列を求めよ.

(東京工業大 2012) (m20120804)

0.220 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$ が対角化可能であるための必要十分条件を求めよ. ただし, a, b, c は複素数とする.

(東京工業大 2013) (m20130801)

0.221 3 次の正方行列 M を次で定義する:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -a^2 + 2a + 3 & 2 & a^2 - 6a + 7 \\ a^2 - 3a & 0 & a \end{pmatrix}$$

このとき以下の問に答えよ.

(1) $a = 1$ のとき $P^{-1}MP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ.

(2) $a = 2$ のとき $Q^{-1}MQ$ が対角行列となるような正則行列 Q が存在するか否かを理由をつけて述べよ. またそのような Q が存在する場合は $Q^{-1}MQ$ を求めよ.

(3) $a = 3$ のとき $R^{-1}MR$ が対角行列となるような正則行列 R が存在するか否かを理由をつけて述べよ. またそのような R が存在する場合は $R^{-1}MR$ を求めよ.

(東京工業大 2014) (m20140803)

0.222 実数 a, b に対して

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & a \\ ab & b^2 & b \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

とおく.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P をみつけれよ.

(東京工業大 2015) (m20150803)

0.223

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく.

- (1) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を一つ求めよ.
- (2) 正の整数 n に対して A^n を求めよ.

(東京工業大 2017) (m20170802)

0.224 次の条件 (i), (ii) をみたす 3 次正方行列 A を求めよ.

- (i) A の固有値はすべて正の実数である.

$$(ii) A^2 = \begin{pmatrix} 27 & -26 & -10 \\ 13 & -12 & -5 \\ 10 & -10 & -1 \end{pmatrix}$$

(東京工業大 2018) (m20180802)

0.225 行列

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ -4 & 0 & 1 & 4 \\ 10 & 2 & 1 & -10 \end{pmatrix}$$

に対して, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ.

(東京工業大 2019) (m20190802)

$$0.226 \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 16 & -2 \\ -3 & -5 & 1 \\ -3 & -8 & 4 \end{pmatrix} \text{ について, 以下の問いに答えよ.}$$

- (1) 3 次正則行列 P で, $P^{-1}AP$ が対角行列になるものを求めよ.
- (2) 3 次正則行列 Q で, $Q^{-1}AQ$ と $Q^{-1}BQ$ が対角行列になるものを求めよ.

(東京工業大 2020) (m20200802)

$$0.227 \quad a, b \text{ を } 0 \text{ でない実数とし, 行列 } A = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ b & a & b \\ -b & b & a \end{pmatrix} \text{ を考える. 次の問に答えよ.}$$

- (1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.
- (2) 行列 A の 各固有値に対応する固有空間の基底を求めよ. ただし, a, b を用いずに基底を表せ.
- (3) 実ベクトル空間 $\left\{ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \text{ は実数} \right\}$ の次元が 2 となるための必要十分条件を a, b を用いて表せ.

(東京工業大 2023) (m20230804)

0.228 実数を成分とする行列

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -a & p \\ a & b & q \\ \frac{1}{5} & a & r \end{pmatrix}$$

は行列式が 1 の直交行列である. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) a, b, p, q, r を求めよ. ただし $a > 0$ である.
- (2) $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ を満たす単位ベクトル $\mathbf{x}$ をひとつ求めよ.
- (3) (2) の $\mathbf{x}$ に対して $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ が $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底をなすような列ベクトル $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ をひと組求めよ.
- (4) (2), (3) の $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ を並べて得られる 3 次正方行列 $P = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ に対して tPAP を求めよ. ただし tP は行列 P の転置行列を表す.

(東京工業大 2024) (m20240803)

0.229 次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(東京農工大 1996) (m19960906)

0.230 次の行列を A とする. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 6 & -8 & 4 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

- (1) A^2 を求めなさい.
- (2) E を 3 次単位行列とすると, t の方程式 $|tE - A^2| = 0$ の解をすべて求めなさい.

(東京農工大 2007) (m20070904)

0.231 λ を実数とし $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ \lambda \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix}$ は 3 次の数ベクトルとする. 次の各問いに答えなさい.

- (1) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ をそれぞれ第 1 列, 第 2 列, 第 3 列とする行列を A とするとき, 行列式 $|A| = 0$ を満たす λ の値を求めなさい.
- (2) λ は (1) で求めた値とする. このとき $\mathbf{c}$ を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の一次結合で表しなさい.

(東京農工大 2010) (m20100901)

0.232 a は実数とする. 次の行列を A とし, 3 次単位行列を E とする.

$$\begin{pmatrix} -10a - 11 & 13a - 23 & -30a - 30 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4a + 4 & -7a + 17 & 12a + 11 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列式 $|E - A|$ を展開して a の式で表しなさい.
- (2) t の方程式 $|tE - A| = 0$ の解がすべて負の実数となるような a の範囲を求めなさい.

(東京農工大 2011) (m20110904)

0.233 4×4 行列 $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えなさい.

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めなさい.

(2) t の方程式 $|tE - A| = 0$ を満たす t の値をすべて求めなさい. ただし E は 4 次単位行列とする.

(3) $B = A - E$ とし, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする. このとき, 連立 1 次方程式 $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{O}$ の解をすべて求めなさい.

(東京農工大 2013) (m20130904)

0.234 A は 3 行 3 列の行列で, その (i, j) 成分が $\sin\left(\frac{7i+5j-1}{6}\pi\right)$ となるものとする.

(1) A の行列式を計算しなさい.

(2) 連立 1 次方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解のうちで $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ を満たすものをすべて求めなさい.

(東京農工大 2014) (m20140904)

0.235 c を定数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & c \end{pmatrix}$ が 1 を固有値としてもつとき, 次の問いに答えなさい.

(1) c の値を求めなさい.

(2) A の固有値 1 に属する固有ベクトルで $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ の形のものを求めなさい.

(東京農工大 2015) (m20150903)

0.236 r は実数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & r & 1 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えなさい.

(1) $A \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が成り立つとき, r の値を求めなさい.

(2) r は (1) で求めた値とする. そのときの A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とする. ただし $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$

とする. A の固有値 λ_1 に属する固有ベクトルで $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ の形のものを求めなさい.

(東京農工大 2017) (m20170903)

0.237 x を定数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & x+1 & -3x+1 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8-x \\ 2 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えなさい.

(1) $A\mathbf{v} = x\mathbf{v}$ が成り立つような x の値を求めなさい.

(2) $x = -5$ のとき, ベクトル $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ と実数 c に対して, $A\mathbf{w} = c\mathbf{w}$ が成り立つような 3 つの実数の組 (a, b, c) をすべて求めなさい.

(東京農工大 2018) (m20180903)

0.238 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -5 & -4 & 2 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えなさい.

(1) A の固有値をすべて求めなさい.

(2) A の最小の固有値に属する固有ベクトルで $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ の形のものを求めなさい.

(東京農工大 2019) (m20190903)

0.239 t は実数とする. 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & t & 0 \end{pmatrix}$ について $A \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$ が成り立つとき, 以下の問いに答えなさい.

(1) t の値を求めなさい.

(2) A の逆行列を求めなさい.

(3) A の固有値のうち最小のものを p とする. p に属する固有ベクトルで $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ の形のものを求めなさい.

(東京農工大 2022) (m20220904)

0.240 t は実数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & -1 & t \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ について, 行列式 $|A|$ の値が -3 となるとき, 次の問いに答えなさい.

(1) t の値を求めなさい.

(2) ベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$ と実数 c に対して, $A\mathbf{v} = c\mathbf{v}$ が成り立つような実数の組 (a, b, c) をすべて求めなさい.

(東京農工大 2023) (m20230903)

0.241 t は実数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1-t & 2 & -t \\ 0 & 4 & t \\ 0 & t & 4 \end{pmatrix}$ とベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ について, A が固有値 4 をもち, 行列 A の固有値 4 に属する固有ベクトルが $\mathbf{v}$ であるとする. 次の問いに答えなさい.

(1) t の値を求めなさい.

- (2) 行列 A の固有値のうち、最大のものを p とする。行列 A の固有値 p に属する固有ベクトルで $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ の形のものを求めなさい。

(東京農工大 2024) (m20240903)

0.242 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & a & -a \\ -a & 1 & -a & 1 \\ a & -1 & a^2 & -1 \\ -a & 1 & -a^2 & -a \end{pmatrix}$$

について次の問いに答えよ。

- (1) $\det A$ を求めよ。
- (2) A^{-1} が存在するための条件を求めよ。
- (3) $\text{rank } A = 3$ である条件を述べよ。
- (4) (3) の条件がなりたつとき A によってきまる線形変換の核の基底を示せ。

(電気通信大 1998) (m19981004)

0.243 次の行列 A で決まる $\mathbf{R}^4$ から $\mathbf{R}^3$ への線形写像について以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (1) 核の基底を求めよ。
- (2) 像の次元を求めよ。
- (3) $\mathbf{R}^4$ をユークリッド内積で内積空間とすると、核の直交補空間の基底を求めよ。

(電気通信大 1999) (m19991003)

0.244 3 次の正方行列 A について次の条件が成り立つとする。 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ は固有値 1 の固有ベクトルである。

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は固有値 -1 の固有ベクトルである。 $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 0 の固有ベクトルである。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) A を求めよ。
- (2) A を対角化する行列 P と対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ。

(電気通信大 2000) (m20001004)

0.245 次の 3 次正方行列 A に対して、その行列式 $|A|$ および、その逆行列 A^{-1} を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

(電気通信大 2001) (m20011006)

0.246 3×3 行列 M が

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

と与えられたとして、次の (a)~(d) の計算を考える。

(1) M^{-1} を求める。

(2) M を下三角行列 L と上三角行列 U の積 $M = LU$ に分解する。

但し、 L または U のいずれかは、対角要素がすべて 1 に等しい行列とする。

(3) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

$Mx_1 = e_1, Mx_2 = e_2, Mx_3 = e_3$ を満たすベクトル x_1, x_2, x_3 を求める。

(4) 連立方程式

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 + 4z_3 = 3 \\ z_1 + z_2 + 3z_3 = 2 \\ 2z_1 + z_2 + 6z_3 = 2 \end{cases}$$

を満たす z_1, z_2, z_3 を求める。

(1) (a)~(d) のすべての計算を行う場合の、適切な計算の順序を示し、手順を簡単に説明せよ。

(2) 前問の解答の手順に従って、(a)~(d) の各々の解を求めよ。

(電気通信大 2001) (m20011007)

0.247 $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ とし、線形写像 $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を、 $f(x) = 6x - \langle v, x \rangle v$ ($x \in \mathbf{R}^3$) で定義する

るとき、次の問に答えよ。ただし、 $\langle, \rangle$ は、 $\mathbf{R}^3$ の通常のユークリッド内積とする。

(1) $\langle f(x), v \rangle = 0$ を示せ。

(2) $f(x) = Ax$ と表すとき、行列 A を求めよ。

(3) f の像 $\text{Im } f$ の次元、および f の核 $\text{Ker } f$ の次元を求めよ。

(4) $\text{Im } f \ni x \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たし、 $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と直交するベクトル $x \in \mathbf{R}^3$ が存在するならば、それ

れを 1 つ求めよ。もしそのようなベクトルが存在しないならば、それを証明せよ。

(電気通信大 2001) (m20011008)

0.248 A は 3 次正方行列で、 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

を満たすとする。このとき、行列 A および行列式 $|A|$ を求めよ。

(電気通信大 2005) (m20051001)

0.249 4 次の単位行列を E とし、4 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考える。さらに λ を実数と

し、 $W(\lambda) = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid Ax = \lambda x\}$ とおく。以下の問に答えよ。

- (1) $\det(\lambda E - A)$ を求めよ.
- (2) $W(\lambda) \neq \{0\}$ となるような λ をすべて求めよ.
- (3) (2) で求めた各 λ に対し, $W(\lambda)$ の基底を求めよ.

(電気通信大 2006) (m20061003)

0.250 行列 A , ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ および未知ベクトル $\mathbf{x}$ を次のようにおく.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 12 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

- (1) 3つのベクトル $\mathbf{u}, A\mathbf{u}, A^2\mathbf{u}$ が一次独立かどうか判定せよ.
- (2) 3つのベクトル $\mathbf{v}, A\mathbf{v}, A^2\mathbf{v}$ が一次独立かどうか判定せよ.
- (3) 任意のベクトル $\mathbf{x}$ に対して, 3つのベクトル $A\mathbf{x}, A^2\mathbf{x}, A^3\mathbf{x}$ は一次独立でないことを示せ.

(電気通信大 2006) (m20061004)

0.251 次の3次正方行列 A, E に対して下記の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) $\det(xE - A) = (x - \lambda_1)^2(x - \lambda_2)$ と因数分解される. λ_1, λ_2 を求めよ.
- (2) $V_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : (A - \lambda_1 E)\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$, $V_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : (A - \lambda_2 E)\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ とおく. V_1 の基底 $\mathbf{v}_1$ と V_2 の基底 $\mathbf{v}_2$ を求めよ.
- (3) $(A - \lambda_1 E)\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1$ となる $\mathbf{v}_3$ をひとつ求めよ.
- (4) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底となる. 線形写像 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ で定めるとき, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ に関する T の表現行列を求めよ.

(電気通信大 2007) (m20071002)

0.252 全微分可能な関数 $z = f(x, y)$ に対して, 極座標による変数変換

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

を考える. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $\left[\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right] = \left[\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right] A$ を満たす行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ を求めよ.
- (2) x, y の r, θ に関するヤコビアン (ヤコビの行列式) $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を計算せよ.
- (3) $\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2$ を $r, \frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta}$ を使って表せ.

(電気通信大 2012) (m20121003)

0.253 線形写像 $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $p: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $q: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}, \quad p\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad q\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

で定義する. 以下の問いに答えよ.

- (1) $\text{Ker } p \subset \text{Ker } (g \circ f)$ を示せ.

ここで, $\text{Ker } p$ は, p の核, $\text{Ker } (g \circ f)$ は合成写像 $g \circ f$ の核である.

- (2) $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, を条件 $g \circ p = q \circ f$ を満たす線形写像とする. $g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$ を求め, $\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する g の表現行列 A を求めよ.

- (3) A の固有値をすべて求めよ.

(電気通信大 2015)

(m20151002)

0.254 線形写像 $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ を以下で定義する.

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 3y + 6z + 4w \\ -3x + 3y - 8z - 4w \\ 2x + 3y - 3z - 4w \\ -5x + 6y - 15z - 8w \end{bmatrix}$$

- (1) f の核 $\text{Ker } f$ の次元と基底を求めよ.

次に, 4 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & -4 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ を用いて, 線形写像 $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ を

$g(x) = Ax \quad (x \in \mathbb{R}^4)$ で定義する.

- (2) g の像 $\text{Im } g$ の次元と基底を求めよ.

- (3) 共通部分 $\text{Ker } f \cap \text{Im } g$ の基底を求めよ.

(電気通信大 2022)

(m20221001)

0.255 (1) 対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めよ.

- (2) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上における関数

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

の最大値と最小値を求めよ.

(横浜国立大 1995)

(m19951102)

0.256 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ.

- (1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

- (2) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ -t \end{pmatrix}$ とするとき,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

を満たすベクトル $\mathbf{x}$ が存在するような実数 t を求めよ.

(3) 3変数関数

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz$$

の球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上における最大値と最小値を求めよ.

(横浜国立大 1996)

(m19961102)

0.257 (1) 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルは長さ 1 となるように表せ

(2) 数ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ を, 問 (1) で求めた固有ベクトルの一次結合で表せ.

(横浜国立大 1997)

(m19971102)

0.258 (1) 次の行列 A の固有値を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 上の行列 A の各固有値に対する固有空間の正規直交基底を求めよ.

(横浜国立大 1998)

(m19981102)

0.259 以下の行列 A の固有値と, その固有値に対する固有空間を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(横浜国立大 2000)

(m20001102)

0.260 次の行列 A の固有値と, その固有値に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(横浜国立大 2001)

(m20011102)

0.261 次の行列 A の固有値と, その固有値に対する固有空間を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(横浜国立大 2003)

(m20031102)

0.262 以下の行列 A について, 次の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) 次の条件を満たす 4 次正則行列 P を 1 つもとめよ:

「 P の列ベクトルはそれぞれ A の固有ベクトルである。」

(横浜国立大 2008)

(m20081101)

0.263 以下の行列 A について, 次の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルは, 互いに直交するように定めよ.
- (2) A の行列式を求めよ.
- (3) n を 1 以上の整数とする. A^n を求めよ.
- (4) A の逆行列を求めよ.

(横浜国立大 2010) (m20101101)

0.264 以下の行列 A について, 次の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

- (1) A の固有値を求めよ.
- (2) A の固有ベクトルを求めよ.
- (3) $A^n \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ.

(横浜国立大 2012) (m20121101)

0.265 以下の行列 A について, 次の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- (1) A の固有値を求めよ.
- (2) A の固有ベクトルを求めよ.
- (3) 互いに直交する 3 本の A の固有ベクトルを 1 組求めよ.

(横浜国立大 2013) (m20131101)

0.266 $0 < x < 1$ とし, $A = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ x & 1-x \end{pmatrix}$ とおく. 次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を 1 つ求めよ.
- (3) n を 1 以上の整数とする, A^n を求めよ.
- (4) A^n の各成分は, $n \rightarrow \infty$ のとき極限をもつことを示せ.

(横浜国立大 2014) (m20141101)

0.267 (1) 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(2) 次の行列のランクを求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

(3) 次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(横浜国立大 2016) (m20161104)

0.268 行列 A が以下で与えられている.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値とその固有ベクトルを求めよ.

(2) 行列 A を対角化せよ.

(3) A^n を計算せよ. ただし, n は正の整数とする.

(横浜国立大 2020) (m20201101)

0.269 次の行列 A について以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値を求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を一つ求めよ.

(3) n を 1 以上の整数とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ を求めよ.

(横浜国立大 2022) (m20221101)

0.270 (1) 以下の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

(2) n を正の整数とする. 上記の行列 A の n 乗を求めよ.

(横浜国立大 2023) (m20231101)

0.271 以下で与えられる行列 A について, 各問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の固有値と、その固有ベクトルを求めよ.
- (2) 行列 A を対角化せよ.
- (3) n が 1 以上の整数のとき、 A^n を求めよ、

(横浜国立大 2024) (m20241101)

0.272 次の行列 A の行列式を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(千葉大 1994) (m19941203)

0.273 次の行列 A の行列式の値を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2x & 2y & x+y+3z \\ 2x & x+3y+z & 2z \\ 3x+y+z & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

(千葉大 1995) (m19951204)

0.274 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき、行列 $B = A^4 - 3A^3 + 2A^2 + 4A + E$ を求めよ. ここで E は単位行列とする.

(千葉大 1996) (m19961204)

0.275 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1, λ_2 を求め、 λ_1, λ_2 に対して、長さが 1 となるように正規化した固有ベクトル ν_1, ν_2 を求めよ. さらに、 ν_1, ν_2 を相隣る 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ.

(千葉大 1997) (m19971203)

0.276 (1) 下記に与えられた行列 A に対して、行および列に関する基本変形を何回か施すことによって、次の標準形 I に変形されることを示せ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) (1) と関連して、次の関係式: $PAQ = I$ が成り立つような正則 3 次正方行列 P と正則 4 次正方行列 Q を求めよ.

(注) 行に関する基本変形とは (I) 一つの行を k 倍する ($k \neq 0$); (II) 一つの行に他の一つの行の k 倍を加える ($k \neq 0$); (III) 一つの行と他の行とを交換する, という変形の総称. 列についても同様.

(千葉大 1998) (m19981204)

0.277 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とベクトル $\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ が与えられている. この時、次の設問に答えよ.

- (1) 行列 A の階数 (rank) を求めよ.
- (2) $\text{Im}(A)$ の表す空間図形を求めよ.
- (3) $\vec{y}_0$ が $\text{Ker}(A^T)$ の元と直交することを示せ.
- (4) $A\vec{x} = \vec{y}_0$ を満たす $\vec{x}$ を求めよ.

ここで、 A^T は A の転置行列、 $\text{Im}(A) = \{A\vec{x} : \vec{x} \in R^3\}$, $\text{Ker}(A) = \{\vec{x} \in R^3 : A\vec{x} = \vec{0}\}$ を表す。

(千葉大 1999) (m19991204)

0.278 以下の設問に答えなさい。

- (1) 次の対称行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- (2) (1) で求めた固有値と固有ベクトルを用いて A^n を求めなさい。

ここで、 A^n は $A^n = A \cdot A \cdot A \cdots A$ のように A を n 回掛け合わせることを意味する。

例えば、 $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A \cdot A$ である。

(千葉大 2000) (m20001204)

0.279 次の 2 次形式について、以下の問いに答えなさい。

$$f(x, y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2$$

- (1) $f(x, y)$ は 2 次の実対称行列 A とベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いて、次のように書き直すことができる。

$$f(x, y) = F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

A を求めなさい。ここで、 $\mathbf{x}^T$ は $\mathbf{x}$ の転置を表す。

- (2) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい。次に、2 次曲線 $f(x, y) = 1$ を、固有ベクトルの方向を新しい座標軸とする座標系 $O - X, Y$ で表わし、その概形を示しなさい。

(千葉大 2002) (m20021204)

0.280 次の行列 A について答えなさい。

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の行列式を、 A の成分を用いて表しなさい。
- (2) 行列 A の成分を用いて、原点を始点とする 3 つの位置ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^T$ を定義する。ここに、 T は行列の転置を示す。これらのベクトルを用いて、 $\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ が (1) で表した行列式に等しくなることを示しなさい。ここで、 $\bullet$ は内積、 $\times$ は外積を意味する。
- (3) 行列式の絶対値が、これら 3 つのベクトルを 3 辺とする平行 6 面体の体積と等しいことを示しなさい。

(千葉大 2003) (m20031205)

0.281 ある運動している点の時刻 t における座標 $(x(t), y(t))$ が微分方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha y(t) + b \\ \alpha x(t) + a \end{pmatrix}$$

を満たす。ここで、 a , b 及び $\alpha (> 0)$ は定数である。

この微分方程式の解は

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A}(t) \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} - (\mathbf{A}(t) - I) \mathbf{v}$$

と書ける. ただし, $\mathbf{A}(t)$ は時刻 t に依存する 2×2 の正方行列, I は 2×2 の単位行列, $\mathbf{v}$ は初期位置 $(x(0), y(0))$ に依らない定ベクトルである. 次の設問に答えなさい.

- (1) $\frac{dy(t)}{dx(t)}$ を t を陽に含まない形で表しなさい.
- (2) (1) の微分方程式を解きなさい.
- (3) 行列 $\mathbf{A}(t)$ を決定しなさい.
- (4) 点 $(x(t), y(t))$ はどのような運動をするか簡潔に説明しなさい.

(千葉大 2005) (m20051204)

0.282 $\mathbb{R}^3$ で行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ が与えられている. 次の問いに答えなさい.

- (1) A の対称部分 $T_1 = \frac{1}{2}(A + A^T)$ と, A の歪み対称部分 $T_2 = \frac{1}{2}(A - A^T)$ の各行列を求めなさい. ここで, A^T は A の転置行列を表す.
- (2) 対称部分の行列 T_1 の固有値と固有ベクトルを求めなさい.
- (3) 歪み対称部分の行列 T_2 で定められる線形写像のゼロ空間 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid T_2 \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ を求めなさい.

(千葉大 2007) (m20071207)

0.283 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい. $A = \begin{pmatrix} -8 & -2 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \\ -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(千葉大 2008) (m20081202)

0.284 (1) A, T が正則行列のとき, 任意の整数 $m \geq 0$ において,

$$(T^{-1}AT)^m = T^{-1}A^mT$$

が成立することを示しなさい. (T^{-1} は T の逆行列)

- (2) 行列 $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.
- (3) A^5 を求めなさい.

(千葉大 2009) (m20091202)

0.285 次の行列 A , ベクトル $\mathbf{b}$ に関する以下の設問に答えなさい.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- (1) $A^T A$ を求めなさい. ただし, A^T は A の転置行列である.
- (2) $A^T A$ が逆行列を持つことを示しなさい.
- (3) $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$ が最小となるような変数ベクトル $\mathbf{x}$ を, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ と置いたとき, p, q の値を求めなさい. ただし, $\|\mathbf{a}\|$ はベクトル $\mathbf{a}$ の長さを表す.

(千葉大 2011) (m20111202)

0.286 対称行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えなさい.

- (1) 行列 A の固有値を全て求めなさい。
- (2) (1) で求めた固有値に対応する大きさ (長さ) 1 の固有ベクトル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ をそれぞれ求めなさい。
- (3) $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2)$ としたとき、 $PP^{-1} = P^{-1}P = I$ を計算することによって、 P が直交行列であることを確認しなさい。ただし、 I は単位行列とする。
- (4) $P^{-1}AP$ を計算して、行列 A を対角化しなさい。

(千葉大 2012) (m20121202)

0.287 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えなさい。

- (1) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい。
- (2) $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ ($n \geq 1$) を満たす数列 $\{x_n\}$ は、始めの二項 x_1, x_2 が与えられれば定まる。そこで、 $(x_1, x_2) = (0, 1)$ で定まる数列を $\mathbf{e}_1$ 、 $(x_1, x_2) = (1, 0)$ で定まる数列を $\mathbf{e}_2$ とする、 $\{x_n\}$ の一般項を求めるため、数列の番号を一つずらす線形変換 T を考えれば、基底 $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ に関する T の表現行列が A になることを示しなさい。
- (3) A^n の固有値を用いて数列 $\{x_n\}$ の一般項を表し、 $(x_1, x_2) = (1, 1)$ で定まる数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めなさい。ただし、 A^n は $A \times A \times \cdots \times A$ を表す。

(千葉大 2013) (m20131202)

0.288 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ について、以下の問に答えなさい。

- (1) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 とそれぞれに対応する固有ベクトル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ を求めなさい。
- (2) 固有ベクトルを縦ベクトルとして、横に並べた行列 $P = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2]$ の逆行列 P^{-1} を求めなさい。
- (3) $P^{-1}AP$ を求めなさい。
- (4) $(P^{-1})^T = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]$ で定義されるベクトル $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ が A^T の固有ベクトルであることを示しなさい。ここで A^T は A の転置行列を表す。

(千葉大 2014) (m20141202)

0.289 三次元ユークリッド空間の中でデカルト直交座標系 $O-XYZ$ が定義され、次の 3 つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が与えられている。このとき、以下の問に答えなさい。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (1) ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に直交するベクトルを求めなさい。
- (2) ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を列ベクトルとする行列を $A = (\mathbf{a} \ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ として、行列 $A^T A$ を求めなさい。ここで、 A^T は A の転置行列である。
- (3) 行列 $A^T A$ の逆行列 $(A^T A)^{-1}$ を求めなさい。
- (4) ベクトル $\mathbf{c}$ に行列 $(A^T A)^{-1} A^T$ を乗じたベクトル $\mathbf{x}_0 = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{c}$ を求めなさい。
- (5) $A\mathbf{x}_0$ を求め、このベクトルを位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$ 、及び、ベクトル $\mathbf{c}$ を位置ベクトル $\overrightarrow{OC}$ と見なしたとき、点 P がベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の定める平面上にあり、かつ $\overrightarrow{PC}$ と $\overrightarrow{OP}$ が直交することを示し、行列 $A(A^T A)^{-1} A^T$ の持つ幾何学的な意味を述べなさい。

(千葉大 2015) (m20151202)

0.290 次の行列 A, B について、以下の問に答えなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列の基本変形を用いて、行列 A および行列 B の階数を求めなさい.
- (2) 行列 A および行列 B が正則であるならば、逆行列を求めなさい.
- (3) 行列 A を係数行列とした連立方程式 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 33 \\ 10 \end{pmatrix}$ を解きなさい.
- (4) 行列 B を係数行列とした連立方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解きなさい.

(千葉大 2016) (m20161202)

0.291 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} t+4 & -3 \\ 1 & t \end{pmatrix}$ (ただし、 t は実数) が正則であるための条件を示しなさい.

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列 B^{-1} を求めなさい.

(千葉大 2017) (m20171205)

0.292 (1) 行列 $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めなさい.

(2) 設問 (1) で求めた固有値に対する大きさ 1 の固有ベクトルを求めなさい.

(千葉大 2017) (m20171206)

0.293 次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(筑波大 2000) (m20001306)

0.294 n 次行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ ($((i, n-i+1)$ 成分のみ 1, 他の成分は 0) について,

A^{-1}, A^k (k : 自然数) を求めよ.

(筑波大 2003) (m20031315)

0.295 行列 $A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ を考えよう. ここで、パラメータ p, q の変動範囲は $0 < p < 1, 0 < q < 1$ であるとする. このとき次の (1),(2),(3) の各問いに答えよ.

- (1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ. ただし、固有ベクトルはノルムが 1 となるように規格化して示せ.
- (2) 行列 A の n 乗、 A^n を求めよ.

(3) 行列 A の n 乗の n が大きい場合の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ を求めよ.

(筑波大 2003)

(m20031316)

0.296 正方行列の固有値, 固有ベクトルに関する以下の2つの問いに答えよ.

(1) 次の正方行列 A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) n 次の正方行列 B の固有値とその転置行列 tB の固有値とは同じであることを証明せよ.

(筑波大 2003)

(m20031317)

0.297 次の行列の逆行列と固有値を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(筑波大 2003)

(m20031318)

0.298 $A(\lambda)$ は実数のパラメータ λ を含む次の正方行列である.

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \lambda \end{pmatrix}$$

また,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする. x, y, z もすべて実数である.

(1) x, y, z を未知変数とする連立一次方程式

$$A(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

が自明でない解を持つための, パラメータ λ が満たすべき条件を求めよ. また, そのときの解を求めよ.

(2) 連立一次方程式

$$A(\lambda)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考える. パラメータ λ に応じた場合分けをして, 解が存在するか否かを調べよ. 存在する場合には, 一意性に注意して, その解を求めよ.

(筑波大 2004)

(m20041319)

0.299 次の微分方程式を解くために, 以下の設問に答えよ.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 &= 2x_1 - 2x_2 \\ \frac{d}{dt}x_2 &= -x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

(1) 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ とおく. この行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるように行列 P を定め, 行列 A を対角化せよ.

- (3) ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とおく. $\mathbf{x}$ と A を用いて, 上の微分方程式を表せ.
- (4) ベクトル $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおく. $P\mathbf{y} = \mathbf{x}$ として, これを設問 (3) で求めた表現に代入せよ. また, この y_1, y_2 に関する微分方程式の一般解を求めよ.
- (5) x_1, x_2 の一般解を求めよ.
- (6) $t = 0$ における初期値 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に対応する解 x_1, x_2 の, $t \rightarrow \infty$ における振る舞いを調べよ.

(筑波大 2004) (m20041321)

0.300 空間 (3次元のユークリッド空間) の中で, 3つのベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ をそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ に写す, つまり,}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とするような線形写像 (行列) A を考える.

- (1) A を具体的な数行列の形で表せ.
- (2) A の固有値, 固有ベクトルをすべて求めよ. 固有ベクトルは正規化 (規格化) せよ.

(筑波大 2006) (m20061318)

0.301 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする.

- (1) $AB, B^T A$ を求めなさい. ただし, B^T は B の転置行列である.
- (2) $X \neq O, AX = XA = O$ となる行列 X を求めなさい. 要素が整数となる行列を 1 つだけ解答すればよい.

(筑波大 2006) (m20061320)

0.302 4 次の正方行列 A を $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ と定める.

- (1) A の固有値を全て求めよ.
- (2) (1) で求めた各々の固有値に対する固有ベクトルを一つずつ求めよ.

(筑波大 2007) (m20071305)

0.303 0 でない n 個の複素数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ をとり, Θ をその (i, j) 成分が $(\theta_i)^{j-1}$ で与えられる n 次正方行列とする. さらに $p_k = (\theta_1)^k + (\theta_2)^k + \dots + (\theta_n)^k \quad (k \geq 0)$ とおく. 以下の問に答えよ.

- (1) 行列 ${}^t\Theta\Theta$ は次の行列に等しいことを示せ. ただし, ${}^t\Theta$ は行列 Θ の転置行列である.

$$A = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \\ p_2 & p_3 & p_4 & \cdots & p_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n-1} & p_n & p_{n+1} & \cdots & p_{2n-2} \end{pmatrix}$$

- (2) Vandermonde の行列式 $\det \Theta = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\theta_i - \theta_j)$
を用いて次の等式を示せ. $\det ({}^t\Theta\Theta) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\theta_i - \theta_j)^2$

- (3) $\theta_1, \dots, \theta_n$ が n 次正方行列 A の固有値であるとき $\operatorname{tr}(A^k) = p_k$ ($k \geq 0$)
となることを示せ. ただし, tr は行列のトレースである.

(筑波大 2007) (m20071307)

- 0.304** (1) 原点に中心をもつ楕円 $x^2 - xy + y^2 = 1$ の, 長軸および短軸の長さをそれぞれ求めよ. また, この楕円の概形を, 主軸の方向がわかるように描け.
(2) 楕円 $x^2 - xy + y^2 = 1$ の長軸を x 軸に一致させる回転 (ただし, 回転角は $-\frac{\pi}{2}$ より大きく $\frac{\pi}{2}$ より小さいとする) による変換 g と, y 軸方向の拡大による変換 f を合成した変換 $f \circ g$ により, 元の楕円は円に変換される. 行列 A を用いて $f \circ g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すとき, A 及びその逆行列 A^{-1} を求めよ.

- (3) 次の積分を求めよ. $\iint_D e^{-(x^2 - xy + y^2)} dx dy \quad \{(x, y) \mid -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty\}$

(筑波大 2007) (m20071312)

0.305 線形写像 $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax_1 + ax_2 + x_3 \\ ax_1 + x_2 + ax_3 \\ x_1 + ax_2 + ax_3 \end{bmatrix}$ ($a \in \mathbf{R}$)

について, 以下の問に答えなさい.

- (1) f の標準基底に関する表現行列 F を求めよ.
(2) f が全単射 (写像の表現行列が正則) となる条件を求めよ.
(3) f が全単射であるとき, 逆写像 f^{-1} の標準基底に関する表現行列を求めよ.

(筑波大 2007) (m20071315)

0.306 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ を計算せよ.

(筑波大 2007) (m20071328)

0.307 連立 1 次方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{を考える} \quad (\alpha, \beta \text{ は定数}).$$

- (1) 行列 A の階数 $\operatorname{rank}(A)$ を求めよ. (2) この方程式に複数の解が存在するための条件を示せ.
(3) そのときの一般解を示せ.

0.308 線形写像 $T : R^4 \rightarrow R^4$ の行列表示を $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ とするとき、以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 A の階数 $\text{rank}(A)$ および T の像 $\text{Im}(T)$ を求めよ.
- (2) 行列 A^2 の階数 $\text{rank}(A^2)$ および合成写像 $T \circ T$ の像 $\text{Im}(T \circ T)$ を求めよ.

(3) 連立一次方程式 $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ を解け.

0.309 次の行列 A について問いに答えよ. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -5 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- (1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正則行列 P は存在するか、理由をつけて答えよ.

0.310 行列 A について以下の設問に答えよ.

$$A \equiv (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \equiv \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) A を構成する 3 個の列ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は、1 次独立か 1 次従属か、理由を示して答えよ.
- (2) A が正則かどうかを調べ、正則な場合は逆行列を求めよ.
- (3) A の固有値と固有ベクトル（大きさを 1 に正規化したもの）をすべて求めよ.
- (4) A を対角化する行列を与え、それを用いて対角化されることを示せ.

0.311 独立変数が 1 個 (t) 、従属変数が 2 個 $(x = x(t), y = y(t))$ の連立微分方程式:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + \sqrt{2}y \\ \frac{dy}{dt} = \sqrt{2}x + y \end{cases}$$

を考える. 初期条件を $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ としたときの解を次の設問に従って求めよ.

- (1) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ において、与えられた微分方程式を行列 A を使って、 $\frac{d}{dt}\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ の形に書き換える. A を具体的な行列の形で表せ.
- (2) A の固有値、固有ベクトルをすべて求めよ. 固有ベクトルは正規化（規格化）し、それを $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ とする.
- (3) $\mathbf{x}(t) = c_1(t)\mathbf{p}_1 + c_2(t)\mathbf{p}_2$ とおくことにする. $c_1(0), c_2(0)$ は x_0, y_0 を使ってどう書けるか.

- (4) $c_1(t), c_2(t)$ が満たす (t に関する) 微分方程式を求めよ.
- (5) 前問 (4) で求めた微分方程式を解いて, $c_1(t), c_2(t)$ を求めよ. 初期条件 $c_1(0), c_2(0)$ は, 設問 (3) で得ていることに注意せよ.
- (6) $x(t), y(t)$ を x_0, y_0 を使って表せ.

(筑波大 2009) (m20091310)

0.312 a を複素数とし, 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

によって定める.

- (1) A の階数 ($= \text{rank} A$) を求めよ.
- (2) $a = 1$ のとき A^{-1} を求めよ.

(筑波大 2009) (m20091311)

0.313 n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して, 次の 2 条件を考える.

- (a) 各成分 a_{ij} は 1 または -1 である.
- (b) A の二つの異なる列ベクトルは必ず直交する.

このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) n が奇数のとき, 条件 (a) と (b) を満たす行列は存在しないことを示せ.
- (2) n 次正方行列 A が条件 (a) と (b) を満たすとき,

$${}^t A A = nE$$

となることを示せ. ただし, E は n 次単位行列, ${}^t A$ は A の転置行列とする.

- (3) 正方行列 A が条件 (a) と (b) を満たすとき,

$$H = \begin{pmatrix} A & -A \\ A & A \end{pmatrix}$$

も条件 (a) と (b) を満たすことを示せ.

(筑波大 2009) (m20091312)

0.314 (1) 4 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して, A^2, A^3, A^4 を計算せよ.

- (2) B が n 次正方行列とする. ある自然数 m に対して $B^m = O$ ならば B の固有値はすべて 0 であることを示せ.
- (3) C が n 次正方行列とする. ある自然数 m に対して $C^m \neq O, C^{m+1} = O$ ならば $n \geq m + 1$ であることを示せ.

(筑波大 2010) (m20101301)

0.315 行列 A について以下の設問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

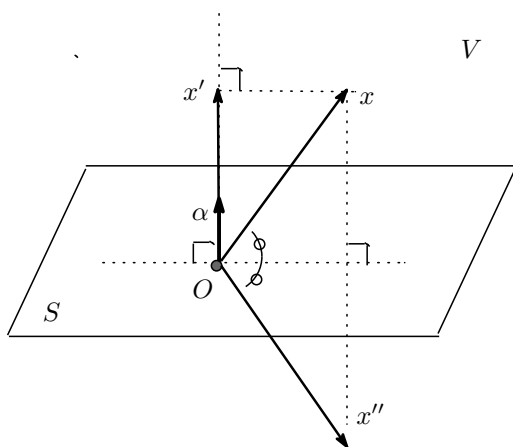
- (1) A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を求めよ. ただし, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする.
- (2) 前問で得た固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対応する固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$ とする. $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$ を求めよ. ただし, 固有ベクトルの長さが 1 となるように選ぶものとする.
- (3) A を対角化する行列 L とその逆行列 L^{-1} を求めよ.

(筑波大 2010) (m20101309)

0.316 3次元空間において, 下図に示す平面 S とベクトル $\mathbf{x}$ を考える. 平面 S は原点 O を通り, その法線ベクトルは $\mathbf{a} (\neq 0)$ である. また $\mathbf{x}$ は原点 O を始点とする任意のベクトルである. 以下の問いに答えよ. ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の内積を $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ と表すこと.

- (1) $\mathbf{x}$ の $\mathbf{a}$ への正射影を $\mathbf{x}'$ とする, $\mathbf{x}'$ を $\mathbf{a}, \mathbf{x}$ を用いて表せ.
- (2) $\mathbf{x}$ の平面 S に関する折り返しを表すベクトルを $\mathbf{x}''$ とする. $\mathbf{x}''$ を $\mathbf{a}, \mathbf{x}$ を用いて表せ.
- (3) (2) において, $\mathbf{x}$ に $\mathbf{x}''$ を対応させる写像は線形写像である. いま, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$

$\mathbf{x}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ とおいた場合に, この線形写像を表す行列を求めよ.



(筑波大 2011) (m20111304)

0.317 実数を成分とする 2×2 行列全体を V として, 以下の問題に答えなさい.

- (1) 以下のような $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ は V のひとつの基底であることを示しなさい.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (2) V から V への一次変換 A が以下を満たしているとき, 基底 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ による A の行列表現を求めなさい.

$$A(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) A の固有値を全て求めなさい.

(筑波大 2011) (m20111311)

0.318 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 A の固有値, 固有空間を求めよ. (2) A^n を求めよ. ただし, n は正の整数とする.

(筑波大 2011) (m20111317)

0.319 2 次実正方行列の全体を $M(2; R)$ とする. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2; R)$ と $M(2; R)$ の 2 つの部分集合 $T = \{X \in M(2; R) \mid \text{Tr } X = 0\}$, $S = \{Y \in M(2; R) \mid {}^t Y = Y\}$ について以下を示せ.
ただし, $\text{Tr } X$ は X のトレース, ${}^t Y$ は Y の転置行列とする.

- (1) $ad - bc \neq 0$ のとき $X \in T$ ならば $AXA^{-1} \in T$ が成り立つ.
(2) $Y \in S$ ならば $AY^t A \in S$ が成り立つ.
(3) 写像 $\Phi: T \rightarrow S$ を $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \in T$ に対して $\Phi(X) = \begin{pmatrix} y & -x \\ -x & -z \end{pmatrix}$ で定める.
 $ad - bc = 1$ のとき任意の $X \in T$ に対して

$$\Phi(AXA^{-1}) = A\Phi(X){}^t A$$

が成り立つ.

(筑波大 2011) (m20111319)

0.320 4 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について. 以下の問いに答えよ.

- (1) A の行列式を計算せよ. (2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 4 次正則行列 P を求めよ.

(筑波大 2011) (m20111320)

0.321 2 次曲線 $13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 - 4x - 4\sqrt{3}y - 12 = 0$ を ${}^t \mathbf{x} A \mathbf{x} + 2 {}^t \mathbf{b} \mathbf{x} - 12 = 0$ と表すことにする.

ここで, $A = \begin{pmatrix} 13 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$, ${}^t \mathbf{b} = (-2 \quad -2\sqrt{3})$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ${}^t \mathbf{x} = (x \quad y)$

である. この 2 次曲線について以下の問いに答えよ.

- (1) A の固有値 a_1, a_2 ($a_1 < a_2$) とその各々に対応した正規化された固有ベクトル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ を求めよ.
(2) $\mathbf{p}_1$ と $\mathbf{p}_2$ を並べて作った 2 次の正方行列を $P = (\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2)$ とする.

${}^t P P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を示せ.

- (3) 前問で作った P を使って座標変換 $\mathbf{x} = P \mathbf{x}'$, $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を行くと, この 2 次曲線は
 ${}^t \mathbf{x}' {}^t P A P \mathbf{x}' + 2 {}^t \mathbf{b} P \mathbf{x}' - 12 = 0$ と書ける. この式を x', y' を使って表せ.

- (4) さらに, 座標の平行移動 $\mathbf{x}' = \mathbf{X} + \mathbf{c}$ を行って, この 2 次曲線を標準形で表せ.

ここで, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ である. c_1, c_2 の値も答えよ.

- (5) XY 平面上にこの 2 次曲線の概形を描け. さらに, その図中に $x'y'$ 座標軸および xy 座標軸も描き加えよ.

(筑波大 2012) (m20121312)

0.322 3次元実ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ と 3 次実正方行列 A を

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a-b & a & b \\ -a+b & -a+c & -b+c \\ a-b & a-c & b-c \end{pmatrix}$$

により与える. ここに, a, b, c は実数とする.

- (1) 零ベクトル $\mathbf{0}$ と異なり, a, b, c によらない 3 次元実ベクトル $\mathbf{w}$ で, a, b, c の値にかかわらず $A\mathbf{w} = \mathbf{0}$ を満たすものを 1 つ求めよ.
- (2) いま求めたベクトル $\mathbf{w}$ に対し, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ が 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の一組の基底をなすことを示せ. また, $A\mathbf{u}, A\mathbf{v}$ のそれぞれを, これら 3 つのベクトルの 1 次結合で表せ.
- (3) a, b, c によらない正則行列 P で $P^{-1}AP$ を上三角行列にするものが存在することを, 具体的に P を与え $P^{-1}AP$ を求めることにより示せ.

(筑波大 2012) (m20121324)

0.323 区間 (a, b) 上の微分可能な関数 $a_{ij}(t)$, $1 \leq i, j \leq 3$, を (i, j) -成分とする 3 次正方行列を $A(t) = (a_{ij}(t))$ とする.

- (1) 行列式 $|A(t)|$ の微分 $|A(t)|'$ に関する次の等式を示せ.

$$|A(t)|' = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & a'_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & a'_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a'_{31}(t) & a'_{32}(t) & a'_{33}(t) \end{vmatrix}$$

- (2) $A(t)$ が正則であるとき, 上の等式の右辺の各項を行に関して余因子展開することにより,

$$|A(t)|' = \text{Tr} (A'(t)A(t)^{-1}) |A(t)|$$

が成り立つことを示せ. ここで $A'(t) = (a'_{ij}(t))$ であり, Tr はトレースを表す.

(筑波大 2012) (m20121325)

0.324 以下でベクトルは位置ベクトルとし, 3 次元空間 $\mathbf{R}^3$ の点 (x, y, z) とベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とを同一

視する. 特に原点 $(0, 0, 0)$ はゼロベクトル $\mathbf{0}$ と同一視する. また, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とし, $A\mathbf{x}$

と表せる点全体の集合を H とする. つまり $H = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3\}$ である,

- (1) H は平面となる. その平面の方程式を求めなさい.
- (2) $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ に対し, $A^2\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ を示しなさい.
- (3) 次の 3 条件を満たす 3 次正方行列 B を求めなさい.

追記: ただし, B はゼロ行列ではないとする.

- (a) $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$, $\mathbf{y} \in H$ に対し, $B\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ とは直交する.

(注: ゼロベクトルは任意のベクトルと直交する.)

(b) $\mathbf{y} \in H$ に対し, $B\mathbf{y} = \mathbf{0}$ である.

(c) $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ に対し, $\mathbf{z} = B\mathbf{x}$ なら $B\mathbf{z} = 3\mathbf{z}$ である.

(4) A と前問の B に対し, 行列 $A + B$ は正則であること (逆行列を持つこと) を示しなさい.

(筑波大 2013) (m20131309)

0.325 数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ は次の漸化式を満たす.

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = 2x_n - 3y_n - 2z_n \\ z_{n+1} = 3x_n + 3y_n - z_n \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A を用いて漸化式を $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ と表したとき, A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $x_0 = -5$, $y_0 = 10$, $z_0 = 5$ のとき, x_n , y_n , z_n を求めよ.

(筑波大 2013) (m20131311)

0.326 V を有限次元の実ベクトル空間であるとする. V の空でない部分集合 W が次の条件を満たすとき, W は V の部分空間と呼ばれる.

i. $v_1, v_2 \in W$ ならば $v_1 + v_2 \in W$,

ii. $v \in W$, $c \in \mathbf{R}$ ならば $cv \in W$.

(1) 次の集合 W_1 , W_2 が $\mathbf{R}^4$ の部分空間かどうか理由とともに述べよ.

$$(a) W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 x_2 = x_3 x_4 \right\}$$

$$(b) W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = x_2 + 2x_3 + 3x_4 \right\}$$

(2) 実数を成分とする 2 次正方行列全体の集合 M は, 通常の行列の和と行列のスカラー倍に関して実ベクトル空間となる. M の (M 自分以外) 部分空間の例を 1 つあげ, それが部分空間になっている理由を述べよ.

(筑波大 2013) (m20131313)

0.327 次の実正方行列 A に対して, 以下の問いに答えよ. ただし, 途中の計算過程も示すこと.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

(1) A の行列式を求めよ.

(2) $p_n = a^n + b^n + c^n + d^n$ とおくと, 4×4 の行列 $B = [p_{i+j-2}]_{1 \leq i, j \leq 4}$ の行列式を計算せよ.

0.328 $\mathbf{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbf{R} \right\}$ とし, 線形変換 $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ は, $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$,
 $f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ を満たすとする.

- (1) この線形変換 f の標準的な基底に関する行列表現を示せ.
- (2) ある実数 $\lambda (\neq 0)$ が存在して, $f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ を満たすベクトル $\mathbf{x}$ のうち, $\|\mathbf{x}\| = 1$ を満たすベクトルをすべて求めよ.
- (3) 整数 $n (> 0)$ に対し, 線形変換 f^n を, $f^1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$, $f^n(\mathbf{x}) = f(f^{n-1}(\mathbf{x}))$ で帰納的に定義する. f^n の標準的な基底に関する行列表現を, 直交行列と対角行列を用いて表せ.

0.329 3次元の列ベクトルからなる線形空間を V^3 とし, f を $V^3 \rightarrow V^3$ の線形写像とする.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ として以下の小問に答えよ.}$$

- (1) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, および $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ は V^3 の基底となることを示せ.
- (2) $f(\mathbf{a}_1) = \mathbf{b}_1$, $f(\mathbf{a}_2) = \mathbf{b}_2$, $f(\mathbf{a}_3) = \mathbf{b}_3$ のとき, $f(\mathbf{e}_1)$, $f(\mathbf{e}_2)$, $f(\mathbf{e}_3)$ を $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ の線形結合として表せ.
- (3) $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ に関する f の表現行列 A を求めよ.
- (4) 行列 A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.
- (5) A^n を求めよ. ただし, n は $n \geq 1$ の整数である.

0.330 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

- (1) A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を求めよ. ただし, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする.
- (2) A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に属する固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ とするとき, $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ は $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底となるように選ぶことができる. そのように選んだ $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ を 1 組求めよ.
- (3) (2) で求めた $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ を使って行列 P を $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3)$ とおくと, その逆行列 P^{-1} は P の転置行列 tP で与えられる. これは P がどのような行列であることによる性質か. また, P^{-1} および $P^{-1}AP$ はどうなるかを書け.

(4) 連立線形微分方程式 $\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) = -A\mathbf{r}(t)$ を考える. ここで, $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ である.

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \text{ とおくとき, } q_1(t), q_2(t), q_3(t) \text{ が満たす微分方程式をそれぞれ求}$$

めよ. さらに, その一般解を求めよ.

$$(5) \text{ 初期条件が } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \\ \dot{z}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ と与えられたとき, } x(t), y(t), z(t)$$

を求めよ. ここで, $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, $\dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt}$, $\dot{z}(t) = \frac{dz(t)}{dt}$ である.

(筑波大 2014) (m20141311)

0.331 $(n+1)$ 次実正方行列

$$A = \begin{pmatrix} c & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & c & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & c & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & c \end{pmatrix}$$

に対し, 連立一次方程式

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

が解を持つための必要十分条件は, $c = 1$ または $c = -n$ となることである. このことを示せ.

(筑波大 2014) (m20141312)

0.332 $A = aE_m + bl_m {}^t l_m$ とおく. ただし, $a, b > 0$, E_m は m 次単位行列,

$$l_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (m \text{ 次列ベクトル})$$

とし, ${}^t l_m$ は l_m の転置とする.

(1) A^2 の固有値をすべて求めよ.

(2) A^2 の逆行列を求めよ.

(筑波大 2015) (m20151301)

0.333 V は実係数の 4 次以下の多項式の全体

$$V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

とする. V は $1, x, x^2, x^3$ を基底とする実ベクトル空間になることが知られている.

さて, 線形変換 $T: V \rightarrow V$ を

$$(T_p)(x) = (1-x^2)\frac{d^2p}{dx^2}(x) - 2x\frac{dp}{dx}(x) + 12p(x), \quad p \in V$$

によって定義する. 次の問いに答えよ.

- (1) V の基底 $1, x, x^2, x^3$ に対する T の表現行列を求めよ.
- (2) $\text{rank } T$ を求めよ.
- (3) $\ker T$ を求めよ.

(筑波大 2016) (m20161302)

0.334 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ.

- (1) A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を求めよ. ただし, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする.
- (2) A の正規化した固有ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ を求めよ. ただし, $A\mathbf{u}_j = \lambda_j \mathbf{u}_j$ ($j = 1, 2, 3$) とする.
- (3) A を $P^{-1}AP = D$ (ただし, P は直交行列, D は対角行列) として対角化したとき, P, P^{-1} および D を求めよ.
- (4) (3) で求めた P に対して, $P^{-1}(A + aE)^n P$ を求めよ. ただし, E は 3 次の単位行列, a は実定数, n は正の整数とする.

以下では $AB = BA$ となる 3 次の正方行列 B について考える.

- (5) (2) で求めた $\mathbf{u}_j$ ($j = 1, 2, 3$) は B の固有ベクトルになることを示せ.
- (6) (3) で求めた P に対して, $P^{-1}BP$ が対角行列になることを示せ.

(筑波大 2016) (m20161316)

0.335 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ.

- (1) A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を求めよ. ただし, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする.
- (2) A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に属する固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ とするとき, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ は $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底となるように選ぶことができる. そのように選んだ $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ を 1 組求めよ.

- (3) A を $R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ の形に対角化する直交行列 R , および, その逆行列 R^{-1} を答えよ.

- (4) x, y, z をそれぞれ任意の実数とし, ベクトル $\mathbf{u}$ を $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ で定義する.

また, $\mathbf{u}^T = (x \ y \ z)$ とする. このとき, x, y, z を変数とする関数 $f(x, y, z) = \mathbf{u}^T A \mathbf{u}$ について考える.

- (a) (3) で求めた R を用いて新たな変数 X, Y, Z を $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R^{-1}\mathbf{u}$ で定義し,

$f(x, y, z)$ を X, Y, Z の関数 $f(x, y, z) = F(X, Y, Z)$ と表す. このとき, 関数 $F(X, Y, Z)$ を X, Y, Z の式で表せ.

- (b) 任意の x, y, z に対して, $f(x, y, z) \geq 0$ であることを示せ. また, $f(x, y, z) = 0$ を満たす x, y, z を求めよ.

(筑波大 2017) (m20171303)

0.336 a を 0 と異なる実数とし, 3 次実正方行列を $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$ で与える.

(1) A が与える数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の上の線形変換を

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

で表す. この f の核 $\text{Ker } f = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ および 像 $\text{Im } f = \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}$ の基底を 1 組ずつ求めよ.

(2) $ABA = O$ を満たすすべての 3 次実正方行列 B の中で, 階数が最大であるものを 1 つ求めよ. ただし, O は零行列を表す.

(筑波大 2017) (m20171314)

0.337 図のような円柱座標系での微積分に関する以下の問いに答えよ.

(1) 直交座標 (x, y, z) を円柱座標 (r, θ, z) に変換する, $x, y, \frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial x}{\partial z}$ を r, θ, z の関数として示せ.

$$(2) \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = E \text{ が成り立つことに留意し, } \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} \text{ を } r, \theta, z$$

を用いて示せ. なお, E は単位行列である.

(3) (2) の結果を用いると円柱座標系のラプラシアンは

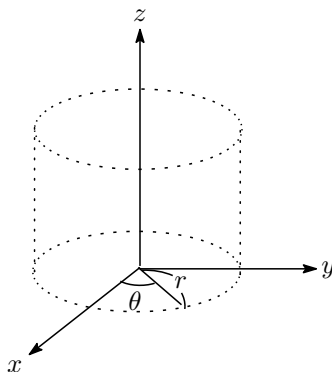
$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ で表される. 関数 } f(r, \theta, z) = rz \cos \theta \text{ に対して } \Delta f \text{ を計算せよ.}$$

(4) 円柱座標系で r だけを変数 ($r > 0$) とする関数 $g(r)$ が $\Delta g(r) = 0, g(1) = 0, g(e) = 2$ の条件を満たす. この $g(r)$ を求めよ. ただし, e は自然対数の底である.

(5) x, y, z の r, θ, z に対するヤコビ行列式 (ヤコビアン) を計算せよ.

(6) K を積分領域とする以下の三重積分を, 円柱座標系への変数変換を用いて計算せよ. ただし, a は正の定数である.

$$\iiint_K y^2 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \quad K = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq a\}$$



(筑波大 2018) (m20181301)

0.338 次の漸化式について考える.

$$\begin{cases} a_{n+1} = 7a_n - 6b_n \\ b_{n+1} = 3a_n - 2b_n \end{cases} \quad a_1 = 1, b_1 = 0$$

以下の問いに答えよ.

- (1) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ を満たす行列 A を求めよ.
- (2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P , およびその逆行列 P^{-1} を求めよ.
- (4) a_n, b_n の一般項を求めよ.

(筑波大 2018) (m20181302)

0.339 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の多項式 $f(A) = A^5 - A^4 + A^3 - A^2 + A - E$ について, 以下の問いに答えなさい. ただし, E は単位行列である.

- (1) A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ および固有ベクトルを求めよ. ただし, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ となるようにとること.
- (2) A を $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1}$ と対角化する行列 P , およびその逆行列 P^{-1} を求めよ.
- (3) $f(A)$ を求めよ.
- (4) $|f(A)|$ を求めよ.

(筑波大 2018) (m20181303)

0.340 二つのメーカー X および Y からなる市場において, 各メーカーのユーザー数を調査したい. 毎年メーカー X のユーザーのうち $\frac{1}{10}$ がメーカー Y のユーザーとなり, 一方で, メーカー Y のユーザーのうち $\frac{1}{5}$ がメーカー X のユーザーとなる, それ以外は同じメーカーのユーザーのままでいるものとし, ユーザーの総数は変化しない. このとき以下の問いに答えなさい.

- (1) ある年におけるメーカー X, Y のユーザー数をそれぞれ x_n, y_n で表す. このとき翌年におけるそれぞれのメーカーのユーザー数 x_{n+1}, y_{n+1} を二次正方行列 A を使って以下の形で表す. 行列 A を具体的に示しなさい.

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

- (2) A の固有値および固有ベクトルを求めなさい.
- (3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P を一つ求めるとともに, P の逆行列 P^{-1} を求めなさい.
- (4) 行列 A^n を求めなさい.
- (5) (4) の結果を使って, $n \rightarrow \infty$ としたときのメーカー X および Y のユーザー数の比率を求めなさい.

(筑波大 2018) (m20181316)

0.341 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について、以下の問いに答えよ。

- (1) A のすべての固有値と、それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。なお、固有ベクトルはその第 1 成分を 1 とせよ。
- (2) $P^{-1}AP = D$ が対角行列になるように、3 次正則行列 P とその逆行列 P^{-1} の組を求めよ。なお、 D の対角要素は大きい順に並べ、 P の第 1 行の要素はすべて 1 とせよ。
- (3) 自然数 n に対して、ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = (A + 2E)^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の各成分を n の関数として求めよ。ここで E は単位行列である。

- (4) 3 次元空間の位置ベクトルを $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 、その転置ベクトルを ${}^t\mathbf{r} = (x, y, z)$ とするとき、 ${}^t\mathbf{r}(A + E)\mathbf{r} = 1$ で表される曲面 M は、直交変換 $(x, y, z) \rightarrow (X, Y, Z)$ によって標準形

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = 1$$

にすることができる。 $\alpha > \beta > \gamma$ となるように定数 α, β, γ を定めよ。

- (5) (4) における曲面 M に対して

$$\mathbf{r} \rightarrow R\mathbf{r}$$

で表される回転を施したら、 xy 平面、 yz 平面、 zx 平面いずれに関しても対称な図形となった。このような回転を表す行列 R をひとつ求めよ。

(筑波大 2019) (m20191307)

0.342 2 つの実数 a, θ に対して、3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

で定める。

- (1) A^2 の行列式を求めよ。
- (2) A^2 の階数を求めよ。
- (3) $\mathbb{R}^3$ の部分集合 V を

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A^2\mathbf{x} = \mathbf{x}\}$$

で定める。このとき、 V の次元を求めよ。

(筑波大 2019) (m20191314)

0.343 実数を成分とする 2 次正方行列全体のなす $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間を $M_2(\mathbb{R})$ で表す。

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ とし、 $a \neq d$ と仮定する。 $M_2(\mathbb{R})$ 上の線形変換 f_A を

$$f_A(X) = AX - XA \quad (X \in M_2(\mathbb{R}))$$

により定める。

- (1) $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく. $f_A(X_1)$, $f_A(X_2)$ は線形独立であることを示せ.
- (2) f_A の核の次元が 2 であることを示せ.

(筑波大 2019) (m20191315)

0.344 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を求めよ. ただし, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ とする.
- (2) 行列 A の正規化した固有ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ を求めよ. ただし, $A\mathbf{u}_j = \lambda_j\mathbf{u}_j$ ($j = 1, 2, 3$) とする.
- (3) 行列 A を $P^{-1}AP = D$ として, 対角成分が $D_{11} \geq D_{22} \geq D_{33}$ となるように対角化したとき, P, P^{-1} および D を求めよ. ただし, P は直交行列, D は対角行列, D_{ij} は D の第 i 行 j 列の成分とする.

(4) ベクトル $\mathbf{x}(t)$ が, $\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たすとき, $\mathbf{x}(t)$ を求めよ.

(5) ベクトル $\mathbf{y}(t)$ が, $\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{y}(t) = -e^A\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{\mathbf{y}}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たすとき, $\mathbf{y}(t)$ を求めよ. ただし, $\dot{\mathbf{y}}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{y}(t)$ とする.

(筑波大 2020) (m20201302)

0.345 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1}{2} & c \end{pmatrix}$ が直交行列となるような a, b, c の組を全て求めなさい.

(筑波大 2020) (m20201311)

0.346 行列 $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ につて, 以下の問いに答えなさい.

- (1) B の固有多項式を求めなさい.
- (2) B が対角化可能となるような d の値を全て求めなさい.

(筑波大 2020) (m20201312)

0.347 4 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

で定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) A の固有値を求めよ.
- (2) A が対角化可能であるかどうかを判定し, その理由を述べよ.

(筑波大 2020) (m20201313)

0.348 $a \in \mathbb{R}$ とする. $\mathbb{R}^4$ の標準内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ とする. $\mathbb{R}^4$ の元

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対し, $\mathbb{R}^4$ の部分空間 V を

$$V = \{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^4 \mid \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \}$$

で定める. また

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \\ -2 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とし, 行列 A で定まる線形写像を $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ とする.

- (1) A の階数 $\text{rank } A$ を求めよ.
- (2) $\dim V = 2$ であるとき, a の値を求めよ.
- (3) (2) で求めた a に対して, f の像 $\text{Im } f$ と V の共通部分の基底を 1 組求めよ.

(筑波大 2021) (m20211301)

0.349 未知数 a, b を含む次の行列 A に関して設問 (1)-(3) に答えなさい.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A による一次変換で直線 $2x + 3y = 1$ が直線 $x + 4y = 3$ に写るとき, a, b の値を求めなさい.
- (2) (1) の条件を満たす行列 A のすべての固有値と, 各固有値に対応する長さが 1 の固有ベクトルを 1 つ求めなさい.
- (3) (1) の条件を満たす行列 A による一次変換で円 $x^2 + y^2 = 1$ を写した図形の方程式を求めなさい.

(筑波大 2021) (m20211308)

0.350 次の $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形変換 f について, 以下の問に答えよ.

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} z \\ x + y \\ 4x \end{bmatrix}$$

- (1) $H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ は $\mathbb{R}^3$ の標準基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ に関する f の表現行列であることを示せ.
- (2) H の固有値, 各固有値の固有空間をそれぞれ求めよ.
- (3) $\mathbb{R}^3$ の基底で, その基底に関する f の表現行列が対角行列になるようなものを 1 つ求めよ.

(筑波大 2021) (m20211310)

0.351 3 次行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

を考える. なお, 以下で I は 3 次の単位行列とする.

- (1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ. なお, 各固有ベクトルは, その成分が簡単な整数となるようにすること.
- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように, 正則行列 P とその逆行列 P^{-1} を定めよ. なお, P はその要素が簡単な整数となるようにすること.
- (3) 行列 A^3 を

$$A^3 = xA^2 + yA + zI$$

のように A^2, A, I の線形結合で表したときの線形結合係数 x, y, z を定めよ.

(設問 (2) で求めた行列 P, P^{-1} を用いると $P^{-1}A^3P$ や $P^{-1}A^2P$ も対角行列となること, および, A の固有値はどれも A の固有方程式を満たすことを利用するとよい.)

- (4) 係数 α, β, γ を任意に選んで

$$C = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I$$

で与えられる 3 次行列 C を考えるとき, $C' = AC$ で定義される行列 C' も, ある係数 α', β', γ' を用いて

$$C' = \alpha' A^2 + \beta' A + \gamma' I$$

と表され, それらの係数の間には必ず

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

の関係がある. 3 次行列 M を定め, その固有値を求めよ.

(筑波大 2021) (m20211318)

0.352 xy 平面上における 2 次曲線 C

$$4x^2 - 2\sqrt{3}xy + 6y^2 = 21,$$

について考える. 以下の問いに答えよ.

- (1) $4x^2 - 2\sqrt{3}xy + 6y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす対称行列 A を求めよ.
- (2) A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ. ただし, $\lambda_1 \leq \lambda_2$ とする.
- (3) (2) で求めた各固有値について, 正規化された固有ベクトルを求めよ.
- (4) A を $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ の形に対角化する直交行列 P , およびその逆行列 P^{-1} を求めよ.
- (5) 座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 行うとき, 2 次曲線 C を, x', y' を用いて表せ.
- (6) x' 軸および y' 軸を, それぞれ x, y を用いた直線の式で表せ.
- (7) 2 次曲線 C の概形を xy 平面上に描け. ただし, 図中には x' 軸と y' 軸を明記すること.

(筑波大 2022) (m20221304)

0.353 対称行列 $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -5 & 1 \\ 3 & -5 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ は2つの固有値 λ_1, λ_2 を持ち, $\lambda_1 < \lambda_2$ とすれば $\lambda_1 = -8$ である. この A について以下の問いに答えよ.

- (1) $\lambda_1 = -8$ に対する方程式 $A\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}$ の一般解を, 一次独立なベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ とパラメータ s, t を用いて $\mathbf{x} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ の形で表せ.
- (2) (1) で求めた一般解を, 正規直交系をなすベクトル $\mathbf{c}, \mathbf{d}$ とパラメータ u, v を用いて $\mathbf{x} = u\mathbf{c} + v\mathbf{d}$ の形で表せ.
- (3) $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ を $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}'_0 + \mathbf{x}''_0$ の形に分解せよ. ただし $\mathbf{x}'_0$ は (2) で求めた $\mathbf{c}, \mathbf{d}$ を用いて $\mathbf{x}'_0 = u\mathbf{c} + v\mathbf{d}$ の形に表せるベクトル, $\mathbf{x}''_0$ は $\mathbf{c}, \mathbf{d}$ に直交するベクトルである.
- (4) (3) で求めた $\mathbf{x}''_0$ が A の固有ベクトルとなることを示せ.
- (5) 自然数 n に対して $A^n\mathbf{x}_0$ を求めよ.

(筑波大 2024) (m20241304)

0.354

$$V = \{f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, \text{ 複素線形写像 } \}$$

とする. V の元 f, g の和 $f + g$, および複素数 α に関するスカラー倍 αf を

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (x \in \mathbb{C}^n)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad (x \in \mathbb{C}^n)$$

で定めることにより V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなす. $e_1, \dots, e_n$ を $\mathbb{C}^n$ の基底とする.

$i = 1, \dots, n$ に対し, $\hat{e}_i : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\hat{e}_i \left(\sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = x_i \quad (x_1 \cdots x_n \in \mathbb{C})$$

で定める.

A を対角化可能な n 次複素正方行列とし, 写像 $T : V \rightarrow V$ を

$$(T(f))(x) = f(Ax) \quad (f \in V, x \in \mathbb{C}^n)$$

で定める.

- (1) $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$ は V の基底であることを示せ.
- (2) T は複素線形写像であることを示せ.
- (3) 次を満たす V の基底 $f_1, \dots, f_n$ が存在することを示せ.

T の $f_1, \dots, f_n$ に関する表現行列 B が対角行列である

- (4) B を (3) の対角行列とする. $B = P^{-1}AP$ を満たす n 次複素正則行列 P が存在することを示せ.

(筑波大 2024) (m20241311)

0.355 次の連立方程式について、 a を実数の定数として以下の問いに答えよ。

$$\begin{cases} x - y - z = -1 \\ ax + 2y + 3z = 3 \\ 3x + y + az = 2 \end{cases}$$

- (1) 連立方程式の解が1組に決まる条件を係数行列の行列式を用いて示せ。また、そのときの a の条件を示せ。
- (2) 解がない場合の a の値を求めよ。
- (3) 解が一意に定まらない場合の a の値を求めよ。またその解が、任意定数 t を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ で与えられる場合、定数 } c_1, c_2, c_3, c_4 \text{ を求めよ。}$$

(筑波大 2025) (m20251305)

0.356 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ。ただし、 θ は実数の定数である。

- (1) 行列 A の転置行列を tA で表す場合、 tAA を求めよ。
- (2) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ。ただし、固有値 λ_1, λ_2 は複素数である。
- (3) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 に対する固有ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ を求めよ。
- (4) A^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ。

(筑波大 2025) (m20251306)

0.357 2次曲線 $5x^2 - 2xy + 5y^2 + 10\sqrt{6}x - 2\sqrt{6}y + 18 = 0$ について考える。

- (1) $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とし、上記の2次曲線を ${}^t\mathbf{z}A\mathbf{z} + 2{}^t\mathbf{b}\mathbf{z} + c = 0$ と表す。
対称行列 A 、ベクトル $\mathbf{b}$ 、スカラー c を求めよ。ただし、ベクトル $\mathbf{x}$ の転置は ${}^t\mathbf{x}$ と表す。
- (2) (1) で求めた行列 A の固有値および長さ1の固有ベクトルを求めよ。
- (3) (2) で求めた固有ベクトルを横に並べた行列 P を用いて、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ という変数変換を行い、2次曲線を新たな変数 X, Y を用いて表せ。
- (4) 変数 X, Y で表された2次曲線を楕円 $\frac{s^2}{a} + \frac{t^2}{b} = 1$ の形式 (a, b は正の定数) に変形し、新たな変数 s, t を変数 X, Y で表せ。
- (5) 変数 x, y を変数 s, t に変換する変数変換を「回転 (または鏡映)」および「平行移動」の語を用いて説明せよ。

(筑波大 2025) (m20251307)

0.358 (1) 次の実正方行列 A の行列式を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

- (2) (1) の行列 A が正則となる条件を a, b, c, d を用いて述べよ。

- (3) 2次元平面上の4つの点 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, 3, 4$) を通る次のような多項式 $y = h_0 + h_1x + h_2x^2 + h_3x^3$ を決める問題を考える. y 座標および多項式の係数についての列ベクトルを, それぞれ, $\mathbf{y} = {}^t(y_1, y_2, y_3, y_4)$, $\mathbf{h} = {}^t(h_0, h_1, h_2, h_3)$ と定めるとき, 多項式が4つの点すべてを通る条件を $\mathbf{y}$, $\mathbf{h}$ と4次正方行列を用いて表せ. ただし, ベクトル $\mathbf{z}$ の転置は ${}^t\mathbf{z}$ と表す.
- (4) (3) の x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) がすべて異なるとき, 多項式が一意に決まることを示せ.

(筑波大 2025) (m20251308)

0.359 正の実数 a を含む2次関数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2axy + 2ayz$ は実対称行列 A と実ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を用いて, $f(x, y, z) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ と表せる.

また, $f(x, y, z)$ は直交行列 B と実ベクトル $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ を用いた1次変換 $\mathbf{x} = B\mathbf{u}$ によって,

$g(u, v, w) = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 w^2$ の形に変換される (ただし, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は実数とする).

このとき, 以下の設問に答えなさい.

- (1) 行列 A を求めなさい.
- (2) 行列 A の固有値をすべて求めなさい.
- (3) $f(x, y, z) = 1$ が楕円面となるための a の条件を求めなさい.
- (4) $|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|$ のうち最も値が大きいものが $\frac{3}{2}$ となるとき, a および行列 B を求めなさい.

(筑波大 2025) (m20251317)

- 0.360** (1) n 次正方行列 A について, A の固有値, 固有ベクトルの定義を述べよ.
- (2) B は3行3列の行列で, 次の (a)(b)(c) を満たしている.
- (a) B の固有値は1と2である.

(b) B の1に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ がとれる.

(c) B の2に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ がとれる.

上の条件 (a)(b)(c) を満たす行列 B を求めよ.

(埼玉大 1998) (m19981402)

0.361 A を $m \times n$ の実行列とする. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を未知数とする一次方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{o} \quad (\text{i})$$

を考える.

- (1) 方程式 (i) の解全体は, $\mathbf{R}^n$ の線形部分空間をなすことを示せ.
- (2) (1) の線形部分空間の次元と, A の階数 ($\text{rank } A$) の関係式を記せ. (証明不要)

(3) B も $m \times n$ の実行列とし、一次方程式

$$B\mathbf{x} = \mathbf{o} \quad (\text{ii})$$

を考える. $\text{rank}A + \text{rank}B < n$ が成り立つとき、方程式 (i) と方程式 (ii) に $\mathbf{o}$ 以外の共有解が存在することを示せ.

(埼玉大 1999) (m19991405)

0.362 次の4つの行列 A, B, C, D を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A, B, AB の行列式を求めよ.

(2) 行列 $C + D$ の階数を求めよ.

(埼玉大 2001) (m20011408)

0.363 n 次正方行列 A が次のように与えられているとする. ただし, $n \geq 2$ とする.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき, $A = LU$ となる下三角行列 L , 上三角行列 U は存在しないことを証明せよ.

(埼玉大 2002) (m20021404)

0.364 E を3次単位行列とし,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

とおく. 整数 $n \geq 1$ に対し, $A^n = 3^{n-1}(nA - 3(n-1)E)$ であることを証明せよ.

(埼玉大 2003) (m20031407)

0.365 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の逆行列を求めなさい.

(2) 次の連立1次方程式の解 x, y, z を (1) の結果を用いて求めなさい.

$$\begin{cases} -x - y - z = 3 \\ 4x - 3y - 4z = 2 \\ -4x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

(3) 行列 A の固有値, 固有ベクトルを求めなさい.

(埼玉大 2003) (m20031409)

0.366 a, b, c, d は実数とする.

- (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ の階数が 1 となるための a, b の条件を求めよ.
- (2) 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & c & 1 & c \\ d & 1 & d & 1 \\ c & d & c & d \end{pmatrix}$ の階数が 2 となるための c, d の条件を求めよ.

(埼玉大 2004) (m20041407)

0.367 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ.
- (2) (1) で求めた固有値に対する固有ベクトルを求めよ.
- (3) $P = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ としたとき, $AP = PB$ となる a, b を定めよ.
- (4) (3) の関係を用いて A^n を求めよ. ただし, n は自然数とする.

(埼玉大 2004) (m20041408)

0.368 (1) 次の行列 A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- (2) 行列 A を $P^{-1}AP$ により対角化せよ. 解答では, まず, 行列 P を求めてから A を対角化せよ.

(埼玉大 2005) (m20051402)

0.369 行列 $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & a & a & 1 \\ a & a & a & a \\ 1 & a & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ.

- (1) 行列 A の行列式が 0 となるような実数 a の値を求めよ.
- (2) 行列 A が直交行列となるような実数 a の値を求めよ.

(埼玉大 2005) (m20051404)

0.370 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ.

- (1) 行列 A の固有値と階数を求めよ.
- (2) 行列 A を対角化して得られる行列を書け (結果だけでよい).
- (3) 行列 A^3 のトレースを求めよ.

(埼玉大 2005) (m20051405)

0.371 写像 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + 4y + 3z \\ x + 2y + z \end{pmatrix}$ により定義する.

$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ と

$\mathbb{R}^2$ のベクトル $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ.

(1) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

(2) $(T(\mathbf{a}_1), T(\mathbf{a}_2), T(\mathbf{a}_3)) = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)A$ を満たす 2 行 3 列の行列 A を求めよ.

(埼玉大 2006) (m20061406)

0.372 行列 A は以下のように対称行列 R と交代行列 S の和で表すことができる.

$$A = R + S, \quad \text{ただし, } A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ とする. このとき, } R \text{ および } S \text{ を求めよ.}$$

(埼玉大 2007) (m20071404)

0.373 a, b を実数とし, 正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & b \\ b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \end{pmatrix}$ を考える.

(1) A の階数を求めよ.

(2) 積 AB が単位行列になるような a, b の組をすべて求めよ.

(埼玉大 2007) (m20071408)

0.374 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を 1 つ求めよ.

(埼玉大 2007) (m20071409)

0.375 (1) 行列 A の階数を求めよ. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) 行列 B の逆行列を求めよ. $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(3) 行列 C の行列式を求めよ. ただし, 解答は因数分解した形で表せ. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}$

(埼玉大 2008) (m20081403)

0.376 $\mathbf{R}^2$ のベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の内積を $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ で表す. $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^2$ を長さ 1 のベクトルとして, 直線

$$l = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \mid (\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0\}$$

に関する折り返し写像を T とする. すなわち, $T(\mathbf{x})$ は直線 l に関して $\mathbf{x}$ と線対称の位置にあるベクトルである.

(1) $T(\mathbf{x})$ を $\mathbf{x}$ と $\mathbf{u}$ を用いて表せ.

(2) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ とするとき, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ となる行列 A を求めよ.

0.377 (1) $\mathbf{R}^2$ における一次変換 f は、点 $(1, 2)$ を点 $(0, 3)$ に、点 $(2, 0)$ を点 $(4, 2)$ に移す。このとき、以下の問いに答えなさい。

- (a) 一次変換 f を表す行列を求めなさい。
 (b) 一次変換 f によって、 $y = x - 1$ は、どのような図形に移されるか。

(2) 次の 2 つのベクトルについて考える。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- (a) $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は、一次従属か一次独立か調べなさい。
 (b) $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角 θ とするとき、 $\cos \theta$ を求めなさい。

(3) 次の行列 $\mathbf{A}$ について考える。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) 固有値をすべて求めなさい。
 (b) 固有ベクトルをすべて求めなさい。

0.378 次の行列の行列式の値が 0 となるような x を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 0 & x & 1 & 2 \\ -x & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 0 & 5 \\ -2 & -4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

0.379 (1) $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ とする。ただし、 θ は $0 < \theta < 2\pi$, $\theta \neq \pi$ を満たす実数とする。

次の条件 (a), (b), (c) をすべて満たすような $\alpha_1, \alpha_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ の組を 1 つ求めよ。

- (a) α_1, α_2 は相異なる複素数である。
 (b) $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ は複素数を成分とする 2 次元ベクトルで、どちらも零ベクトルではなく、さらに $\frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$ と $\frac{i}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ はともに実数を成分とするベクトルになる。
 (c) $A\mathbf{p}_1 = \alpha_1\mathbf{p}_1$ かつ $A\mathbf{p}_2 = \alpha_2\mathbf{p}_2$ を満たす。

(2) B を 2 次の実正平方行列とし、 B のどの固有値も実数でないと仮定する。

- (i) 次の (d), (e), (f) をすべて満たすような $\beta_1, \beta_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ の組が存在することを示せ。
 (d) 正の実数 r と、 $0 < \theta < 2\pi$, $\theta \neq \pi$ を満たす実数 θ を用いて、 $\beta_1 = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $\beta_2 = r(\cos \theta - i \sin \theta)$ と表される。
 (e) $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ は複素数を成分とする 2 次元ベクトルで、どちらも零ベクトルでなく、さらに $\frac{1}{2}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)$ と $\frac{i}{2}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$ はともに実数を成分とするベクトルになる。
 (f) $B\mathbf{q}_1 = \beta_1\mathbf{q}_1$ かつ $B\mathbf{q}_2 = \beta_2\mathbf{q}_2$ を満たす。

(ii) 2 次の実正則行列 M が存在して,

$$M^{-1}BM = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

となることを示せ.

(埼玉大 2009) (m20091405)

0.380 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & -11 & 7 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ.

(埼玉大 2010) (m20101401)

0.381 0 と 1 のみを成分とする 2×3 行列 A で,

$$A {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}^tA A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たすものを求めよ. ここで, tA は A の転置行列を表す.

(埼玉大 2010) (m20101402)

0.382 (1) つぎの行列式を計算せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & 0 \\ y & 1 & 0 & y \\ z & 0 & 1 & z \\ 0 & w & w & 1 \end{vmatrix}$$

(2) つぎの行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) つぎの行列の固有値, 固有ベクトルの組をすべて求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(埼玉大 2010) (m20101407)

0.383 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) 自然数 n に対して, 行列 A^n を計算せよ.

(埼玉大 2011) (m20111407)

0.384 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ に対し, 次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値を求めよ.
- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を 1 つ求めよ.
- (3) A^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ.

(埼玉大 2013) (m20131408)

0.385 (1) 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

の固有値をすべて求め、さらに、それぞれの固有値に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

- (2) 次の主張は正しいか、それとも誤りか、正しければ証明し、誤りならば反例を挙げよ.
(主張) 「2 次実正方行列 B が相異なる実数の固有値 α, β を持つならば、ある実正則行列 P が存在し、 $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ となる.」

(埼玉大 2014) (m20141406)

0.386 行列 A が次式であたえられるものとして以下の間に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の逆行列を求めよ.
- (2) 行列 A の固有値を求めよ.
- (3) 各固有値に対する固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ を求めよ.

(埼玉大 2015) (m20151405)

0.387 xyz 空間のベクトル $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対する線形変換について、以下の間に答えよ.

- (1) $\mathbf{A}$ を y 軸に対して対称移動させるような 3×3 行列を導出せよ.
- (2) $\mathbf{A}$ を z 軸のまわりに角 θ だけ回転させるような 3×3 行列を導出せよ.

(埼玉大 2016) (m20161404)

0.388 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & c \end{pmatrix}$ が $A^2 = A + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を満たすとする. 以下の 2 問に答えよ.

- (1) A を求めよ.
- (2) A^{10} を求めよ.

(群馬大 2003) (m20031504)

0.389 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ がある. 以下の 3 問に答えよ.

- (1) A の行列式が $|A| = 2$ となるとき a の値を求めよ.
- (2) $|A| = 2$ かつ $|AB| = 6$ となるとき a と b の値を求めよ.
- (3) (2) の a, b のときの B の逆行列を求めよ.

(群馬大 2004) (m20041504)

0.390 3×3 の行列に関する積は、行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ と表すとき、ベクトル $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し、

$$\mathbf{A}\mathbf{d} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix} \text{ と定義し、 } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \text{ に対して、}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \text{ を } c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} \quad (i, j = 1, 2, 3) \text{ と定義する.}$$

このとき以下の 2 問に答えよ.

$$(1) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 3 \\ -6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ と } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2} & -\frac{11}{2} \\ -\frac{19}{7} & 1 & b \\ \frac{41}{14} & c & \frac{19}{2} \end{pmatrix} \text{ とするとき、 } \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

となるとき a, b, c の値を求めよ.

$$(2) \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ とし、 } \mathbf{d} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ とするとき、 } \mathbf{Cd} = -2\mathbf{d} \text{ となるとき } x \text{ と } z \text{ を、}$$

y を用いて示すと $x = py, z = qy$ になる. p, q の値を求めよ.

(群馬大 2005) (m20051505)

0.391 点 (x, y) を点 (x', y') に対応づける xy 平面上の写像は、その対応づけが行列の計算として、下式のよう
に書けるとき、1 次変換と呼ばれる (ここで a, b, c, d は定数であり、下式は「 $x' = ax + by$ か
つ $y' = cx + dy$ 」と同値).

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2k & k \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 f について、以下の 2 問に答えよ.

- (1) この 1 次変換 f が原点以外にも「変換の影響を受けない点」(すなわち、変換によって位置が変わらない点)をもつように k の値を定めよ.
- (2) 前問 (1) の 1 次変換で「変換の影響を受けない点」の全体は、 xy 平面上の直線を形成する. この直線の方程式を求めよ.

(群馬大 2006) (m20061503)

0.392 行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ がある. このとき、以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 $\mathbf{A}$ の逆行列が存在するために必要な、 $a \neq \pm\infty$ 以外の条件を求めよ.
- (2) $a = 4$ のとき、行列 $\mathbf{A}$ の逆行列を求めよ.

(群馬大 2007) (m20071501)

0.393 2 つの方程式 $x + \frac{1}{2}y - 5 = 0$ と $\frac{2}{3}x + y - 5 = 0$ がある. このとき、以下の問いに答えよ.

- (1) この 2 つの方程式からなる連立方程式を解く際にこれらは、 $\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 15 \end{pmatrix}$ とい
う行列の形式で表現できる. このときの a, b, c, d の値を求めよ.

(2) (1) で求めた a, b, c, d の値のとき, $\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるような e, f, g, h の値を求めよ.

(3) このとき連立方程式の解は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ になる. i, j の値を求めよ.

(群馬大 2009) (m20091501)

0.394 以下の 3 つの問に答えよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ を満たす行列 A を求めよ.

(2) (1) で求めた行列 A の行列式を求めよ.

(3) (1) で求めた行列 A の逆行列を求めよ.

(群馬大 2011) (m20111503)

0.395 以下の 4 つの問に答えよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = A$ を満たす行列 A を求めよ.

(2) (1) で求めた行列 A の行列式を求めよ.

(3) (1) で求めた行列 A の逆行列を求めよ.

(4) (1) で求めた行列 A と行列 $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 3 \end{pmatrix}$ について, $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ が成立するように, a と b を定めよ.

(群馬大 2012) (m20121504)

0.396 以下の値を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

(図書館情報大 1994) (m19941604)

0.397 次のような行列 A と B がある.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

今, 成分が整数からなる 2×2 の行列 C と次のような関係がある.

$$CAC^{-1} = B$$

(1) 行列 C の成分を

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とした場合, a, b, c, d の間にはどのような関係があるか.

(2) その関係を満たす行列 C の一般形を求めよ.

(3) C の逆行列 C^{-1} を求めよ.

(図書館情報大 1998) (m19981605)

0.398 $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ とする. X, X^{-1} を求めよ.

(図書館情報大 1999) (m19991609)

0.399 以下の (1)-(5) の行列の積が定義されるかどうか判断し, 定義されない場合には×を, 定義される場合には積の計算結果を, 解答欄に記入せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(図書館情報大 2002) (m20021609)

0.400 $A = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A の固有値と, 対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) 実対称行列 X で, 次の 2 つの条件 (ア), (イ) の両方を満たすものを求めよ.

(ア) $X^2 = A$ (イ) 固有値がすべて正

(図書館情報大 2002) (m20021610)

0.401 次に与える行列の固有値, および行列式の値を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(茨城大 1998) (m19981703)

0.402 $A = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ x & 1 & y \\ z & y & 1 \end{pmatrix}$ について,

(1) A の階数が 1 となる数の組 (x, y, z) をすべて求めよ.

(2) $x = 1, y = 2$ のとき,

(a) $\det A = 0$ となる z を求めよ.

(b) $\det A \neq 0$ のとき, A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(茨城大 1999) (m19991707)

0.403 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ とする. 次の各問に答えよ.

(1) A が正則であるための a の条件を求めよ.

(2) A が正則であるとき, A^{-1} の $(1, 2)$ 成分を求めよ.

(茨城大 2000)

(m20001703)

0.404 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする. 次の各問に答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A を対角化するユニタリ行列を求めよ.

(3) A^6 を求めよ.

(茨城大 2001)

(m20011706)

0.405 行列 $A = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$ について

(1) A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(2) ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を A の固有ベクトルの 1 次結合で表せ.

(3) 自然数 n に対して, $A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(茨城大 2002)

(m20021706)

0.406 連立方程式 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + az = a - 3 \end{cases}$ について

(1) 係数行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix}$ の行列式の値を求めよ.

(2) 拡大係数行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & a & a - 3 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ.

(3) この方程式が解をもつか否かを判定し, 解をもつ場合にはその解を求めよ.

(茨城大 2003)

(m20031703)

0.407 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき,

(1) A の固有値を求めよ.

(2) T の逆行列 T^{-1} を求めよ.

(3) $T^{-1}AT$ を求めよ.

(茨城大 2004)

(m20041703)

0.408 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 3 & -2 \\ 4 & -11 & 9 & -6 \end{pmatrix}$ の固有値をすべて求めよ.

(茨城大 2005)

(m20051701)

0.409 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について、次の各問に答えよ。

(1) A の行列式 $|A|$ を求めよ。 (2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

(3) $AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす行列 X を求めよ。

(茨城大 2006) (m20061701)

0.410 k を実数とし、3 次の正方行列 A 、3 次元列ベクトル $\mathbf{b}, \mathbf{x}$ をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -10 \\ -2 & k & 8 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

とする。以下の各問に答えよ。

- (1) 連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつための k についての必要十分条件を求めよ。
 (2) 3 次元実ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ 内の部分空間 $V = \{A\mathbf{u}; \mathbf{u} \in \mathbf{R}^3\}$ が 2 次元となるための k についての必要十分条件を求めよ。また、そのときの V の基底を一組求めよ。
 (3) 前問 (2) の k に対し、行列 A の固有値および固有値に対応する固有空間の基底を一組求めよ。

(茨城大 2008) (m20081701)

0.411 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ について、次の各問に答えよ。

- (1) 行列 A の固有値を求めよ。
 (2) 各固有値に対し、固有空間の 1 組の基底を求めよ。

ここで、固有値 λ の固有空間とは、 λ の固有ベクトル全体と零ベクトルからなるベクトル空間のことである。

(茨城大 2008) (m20081705)

0.412 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ (a は実数) について、次の各問いに答えよ。

- (1) A の階数を求めよ。
 (2) A の行列式の値を求めよ。

(茨城大 2009) (m20091702)

0.413 実数を成分にもつ n 次列ベクトル全体からなるベクトル空間を $\mathbb{R}^n$ で表す。すべての成分が実数である n 次正方行列 A に対して、 $\mathbb{R}^n$ の部分空間 $\text{Ker} A$ と $\text{Im} A$ を次のように定める。

$$\text{Ker} A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}, \quad \text{Im} A = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

ただし、 $\mathbf{0}$ は零ベクトルを表す。

以下の各行列 A について、 $\text{Ker} A$ および $\text{Im} A$ の次元と 1 組の基底を求めよ。

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(茨城大 2010)

(m20101702)

0.414 実数 α, β に対して, 2 次実正方行列 A で

$$A^2 - (\alpha + \beta)A + \alpha\beta I = O$$

(I は 2 次単位行列, O は 2 次零行列) を満たすものを考える. 但し, A は I の定数倍ではないとする. 以下に各問に答えよ.

(1) $A - \alpha I$ と $A - \beta I$ は, どちらも正則でないことを示せ.

(2) 実数を成分とする 2 次元列ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して, $\mathbf{y} = (A - \beta I)\mathbf{x}$ とおく. このとき任意の $\mathbf{x}$ に対して,

$$(A - \alpha I)\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

となることを示せ. また, α は A の固有値であることも示せ. さらに, $\mathbf{p}_1$ を α に対する固有ベクトルとすると,

$$(A - \beta I)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1$$

を満たす列ベクトル $\mathbf{p}_2$ で, $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$ が一次独立となるものが存在することを示せ.

(3) (2) の $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ を用いて, 2 次正方行列 P を

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{p}_1, \quad P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{p}_2$$

であるように定める. $P^{-1}AP$ および $P^{-1}A^n P$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) を求めよ.

(茨城大 2010)

(m20101706)

0.415 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とする. 以下の各問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値 λ をすべて求めよ.

(2) A を直交行列によって対角化せよ.

(3) ベクトル $\mathbf{x}$ の長さを 1 とする. ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ の値が最大となる $\mathbf{x}$ を求めよ. ${}^t\mathbf{x}$ は $\mathbf{x}$ の転置を表す.

(4) n を自然数とすると, A^n を求めよ.

(茨城大 2012)

(m20121701)

0.416 x, y を実数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y & x^2 + y^2 \\ 1 & 3 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 4 & 17 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について, A の行列式を $|A|$ で表す.

x, y が条件 $|A| = 0$ を満たすとき, 点 (x, y) の描く図形を求めよ.

(茨城大 2012)

(m20121705)

0.417 以下の各問に答えよ.

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ -6 & 9 & -3 & -6 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ.

$$(2) \text{ 連立一次方程式 } \begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ -6x + 9y - 3z = -6 \\ x - 3y + z = 2 \end{cases} \text{ を解け.}$$

(茨城大 2013) (m20131703)

0.418 4 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 + 2b^2 & a^3 \\ 1 & b & 2a^2 + b^2 & b^3 \\ 1 & -a & a^2 + 2b^2 & -a^3 \\ 1 & -b & 2a^2 + b^2 & -b^3 \end{pmatrix}$ に対して、以下の問に答えよ.

ただし、 a, b は実数とする.

(1) A の行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) $a = 0$ かつ $b = -1$ のとき、連立 1 次方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解け.

(茨城大 2015) (m20151702)

0.419 k を実数とし、3 次の正方行列 A 、3 次の列ベクトル $\boldsymbol{x}$ をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & k & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

とし、 $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 f を

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

により定める. 以下の各問に答えよ.

(1) $k = 1$ のとき、 A の固有値、固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) $k = 1$ のとき、 f は全単射となることを示せ.

(3) f は全単射とならないための k についての条件を求めよ. また、 f がこの条件を満たすとき、 f の核 $\ker(f) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3; f(\boldsymbol{x}) = 0\}$ と f の像 $\text{Im}(f) = \{f(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3\}$ の基底を一組求めよ.

(茨城大 2016) (m20161701)

0.420 成分がすべて実数である行列に関して、以下の各問に答えよ.

(1) 行列の積 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ を計算せよ.

(2) 連立 1 次方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解を持つか否か、理由を付けて答えよ.

(3) 一般に、3 行 2 列の行列 A と 2 行 3 列の行列 B の積 AB は単位行列にならないことを示せ.

(茨城大 2016) (m20161705)

0.421 $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ への写像 f, g を $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ に対して次のように定める；

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_2 + 5x_3 \\ x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}, \quad g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2^2 \\ 2x_2 + 5x_3 \\ x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

以下の各問に答えよ．

- (1) f が線形写像であることを示し、その表現行列 A を求めよ．
- (2) 上で求めた行列 A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．
- (3) 上で求めた行列 A の逆行列を求めよ．
- (4) g は線形写像でないことを示せ．
- (5) g は全単射であることを示せ．

(茨城大 2018) (m20181701)

0.422 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ について、以下の各問に答えよ．

- (1) 行列 A の固有値を求めよ．
- (2) 行列 A の各固有値の固有空間を求めよ．ここで、固有値 λ の固有空間とは、 λ の固有ベクトル全体と零ベクトルからなるベクトル空間のことである．

(茨城大 2020) (m20201705)

0.423 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ とする．以下の各問に答えよ．

- (1) 行列 A の固有値をすべて求めよ．
- (2) 3次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ の基底を一組求めよ．
- (3) $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : A^n \mathbf{x} = \mathbf{x}\}$ の次元が 2 となる自然数 n を求め、その n について V の基底を一組求めよ．
- (4) $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ かつ $A\mathbf{y} = \mathbf{x}$ を満たす、一次独立であるベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ の組を決定せよ．

(茨城大 2021) (m20211701)

0.424 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 1 & -a & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$ について、以下の各問いに答えよ．ただし、 a と b はともに実数とする．

- (1) $a = 1, b = 0$ のとき、行列 A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．
- (2) 行列 A の階数 $\text{rank} A$ を求めよ．
- (3) $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ への写像 T を $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$) により定める． $a \neq 0$ かつ $\text{rank} A = 2$ のとき、 T の像 $\text{Im}(T) = \{T(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3\}$ の 1 組の基底と、 T の核 $\text{Ker}(T) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \mid T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ の 1 組の基底を求めよ．

(茨城大 2023) (m20231701)

0.425 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について、以下の各問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) A の各固有値に対し、固有空間の 1 組の基底を求めよ. ここで、固有値 λ の固有空間とは、 λ の固有ベクトル全体と零ベクトルからなるベクトル空間のことである.

(茨城大 2024) (m20241707)

0.426 $\mathbf{R}^2$ において、ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ に、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ にそれぞれ写す線形変換を表す 2 次の正方行列を求めよ.

(茨城大 2024) (m20241710)

0.427 微分可能な関数を成分とする n 次正方行列 $A = (f_{ij}(x))$ の微分を、 $\frac{dA}{dx} = \left(\frac{df_{ij}(x)}{dx} \right)$ となる n 次行列と決める. このとき、次の問に答えよ.

(1) 微分可能な関数を成分とする n 次正方行列 A, B に対し、 $\frac{dAB}{dx} = \frac{dA}{dx}B + A\frac{dB}{dx}$ が成立することを示せ.

(2) $\frac{dA^{-1}}{dx} = -A^{-1}\frac{dA}{dx}A^{-1}$ が成立することを示せ.

(山梨大 2002) (m20021806)

0.428 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ のとき、 A の行列式の値および逆行列を求めよ.

(山梨大 2002) (m20021807)

0.429 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき、 A の行列式の値および逆行列を求めよ.

(山梨大 2003) (m20031805)

0.430 2次元の実座標平面上のベクトルを直線 $y = 5x$ に関して線対称移動する変換 f を考える. また、基本単位ベクトルを $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) 基底となる 2 つの直交するベクトルを $\mathbf{a}_1 = 1\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$, $\mathbf{a}_2 = -5\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2$ とする. また、直線 $y = 5x$ に関してベクトル $s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2$ と線対称なベクトルを $S\mathbf{a}_1 + T\mathbf{a}_2$ とする. 即ち、 $f(s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2) = S\mathbf{a}_1 + T\mathbf{a}_2$ で、 S, T, s, t は実数. このとき、 S, T を s, t を用いた式で表せ.

(2) 基底であるベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ に対応する変換 f の行列 A を求めよ.

(3) $x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 = s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2$ とするとき、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ となる行列 B を求めよ.

(4) $f(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) = X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2$ とするとき、 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる行列 F を行列 A, B を用いて表し、行列 F を求めよ.

(山梨大 2003) (m20031806)

0.431 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき、 A の行列式の値および逆行列を求めよ.

(山梨大 2004) (m20041804)

0.432 下記に示す 4×4 行列 A が逆行列をもつための条件を導け.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

(山梨大 2005) (m20051801)

0.433 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, A の行列式の値および逆行列を求めよ.

(山梨大 2005) (m20051802)

0.434 2 次の実行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とその転置行列 (A の行と列を入れ替えた行列) tA について次の問いに答えよ.

- (1) $A = {}^tA$ となる条件を, a, b, c, d を用いて表せ.
- (2) $A = {}^tA$ となるとき, A の固有値は実数であることを示せ.

(山梨大 2005) (m20051803)

0.435 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式の値および逆行列を求めなさい.

(山梨大 2006) (m20061801)

0.436 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$ と行列 $B = \begin{pmatrix} d & e \\ 1 & f \end{pmatrix}$ が $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を満たしているとき, 次の間に答えなさい.

- (1) $b = c = 0$ のとき, $CA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる零行列でない 2 次の正方行列 C を一つ求めなさい.
- (2) ある零行列でない 2 次の正方行列 D で $DA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となることを示しなさい.
- (3) 行列 A の行列式の値を求めなさい.
- (4) A の固有値を求めなさい.

(山梨大 2006) (m20061802)

0.437 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ca & ab \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix}$ を考えるとき, A が逆行列をもつために必要かつ十分な a, b, c についての条件を求めなさい.

(山梨大 2007) (m20071802)

0.438 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ が異なる固有値をもたないような k の値をすべて求めなさい.

(山梨大 2007) (m20071803)

0.439 次の行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ を考える.

(1) A の固有値を求めなさい.

(2) A の固有ベクトルを求めなさい.

(山梨大 2007) (m20071808)

0.440 3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の各問 (1)(2) に答えなさい.

(1) A^2, A^3 を求め, さらに A^{10} を求めなさい.

(2) 行列 A の固有値をすべて求めなさい.

(山梨大 2008) (m20081802)

0.441 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ とベクトル $V = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ とを考える.

ただし, θ は任意の実数とする.

(1) A の固有値をすべて求めなさい.

(2) V は A の一つの固有ベクトルであることを示し, 固有ベクトル V に対する A の固有値を求めなさい.

(山梨大 2009) (m20091802)

0.442 次の行列 $A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 8 \\ -5 & -8 & -9 \end{pmatrix}$ を考える.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A の固有ベクトルを求めよ.

(山梨大 2009) (m20091805)

0.443 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ のとき, A の行列式の値および逆行列を求めよ.

(山梨大 2010) (m20101801)

0.444 (1) 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい. 固有ベクトルを求める際, 適当な定数を用いてもかまいません.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(2) 前問で求めた固有ベクトルを列として並べた行列を P とします. 逆行列 P^{-1} を求めなさい.

(3) 前問で求めた P^{-1} を用いて, $P^{-1}AP$ を計算しなさい.

(4) 前問で求めた $P^{-1}AP$ を計算することにより, A^N を求めたい. どのようにしたら求められるか方針を示し, そのあと具体的に計算しなさい.

(山梨大 2010) (m20101806)

0.445 行列 $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$, ベクトル $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ として, 次の間に答えなさい.

(1) v は A の固有ベクトルであることを示しなさい. また, その固有値を求めなさい.

(2) A の行列式 $|A|$ を計算し、この式を因数分解した式で表しなさい。

(3) x, y, z を実数とすると、 $x + y + z \geq 0$ なら $|A| \geq 0$ を示しなさい。

(山梨大 2011) (m20111801)

0.446 次の問に答えなさい。

(1) 次の行列 A の固有値とその固有ベクトル空間を求めなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

(2) 上の行列 A は対角化可能か否かを判定し、対角化可能ならば A を対角化しなさい。

(山梨大 2012) (m20121804)

0.447 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい。また、 A が対角化できるかどうか判定して、対角化できる場合は対角化しなさい。

(山梨大 2013) (m20131801)

0.448 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 & b & a \\ 0 & b & (a+1)^2 & ab \\ 0 & a & ab & (b+1)^2 \end{pmatrix}$ を考えるとき、 A が逆行列をもつために必要かつ十分な a, b についての条件を求めなさい。

(山梨大 2013) (m20131802)

0.449 $-\pi \leq x \leq \pi$ で定義された関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3$) を考える。 $f_i(x)$ と $f_j(x)$ との内積 (f_i, f_j) を $\int_{-\pi}^{\pi} f_i(x)f_j(x)dx$ と定義するとき、 i, j をそれぞれ $1, 2, 3$ のいずれかとして、次の設問に答えよ。

(1) $f_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi}x + 1 \right)$, $f_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi}x - 1 \right)$ とすると、 $(f_1, f_1) = (f_2, f_2) = 1$, $(f_1, f_2) = 0$ が成り立つことを示せ。

(2) $f_3(x) = ax^2 + b$ (a, b は定数) とするとき、 $(f_1, f_3) = (f_2, f_3) = 0$, $(f_3, f_3) = 1$ となるような a, b を求めよ。

(3) $f_i(-x) = Mf_i(x)$ のように、 x を $-x$ と変換する操作を M と書く。 M によってベクトル $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ はどのように変換されるか、その行列表現を求めよ。

(4) 直交行列 A によってベクトル $\mathbf{f}$ が、ベクトル $\mathbf{g} = A\mathbf{f}$ に移るとする。操作 M によって $\mathbf{g}$ がその定数倍になるような A と $\mathbf{g}$ を求めよ。

(山梨大 2017) (m20171802)

0.450 θ と ϕ を実数とし、行列 $A = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix}$ を考える。以下の小問に答えよ。

(1) 行列の積 AB を計算し、その結果を行列 A, B と同じ形に変形せよ。

- (2) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ. なお, 固有ベクトルは規格化しなくてもよい.
- (3) 行列 A により xy 平面上の 4 点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が変換される点を求め, θ を正として図示せよ. また変換後の点が囲む面積を求めよ.

(山梨大 2018) (m20181802)

0.451 次の行列 A を考えます.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の行列式を求めなさい.
- (2) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい. ただし, 導出過程も示すこと.

(山梨大 2020) (m20201801)

0.452 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ について, (a)~(c) に答えよ.

- (a) 行列 A の行列式 $\det(A)$ を求めよ.
- (b) 行列 A の固有値とその固有ベクトルを求めよ. ただし, 導出過程も示すこと.
- (c) 行列 A を対角化する行列 P とその逆行列 P^{-1} を求めよ. ただし, 導出過程も示すこと.

(山梨大 2021) (m20211803)

0.453 以下の行列 A を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (b) A を対角化せよ.
- (c) A^5 を求めよ.

(山梨大 2024) (m20241802)

0.454 $x_0 = 1, y_0 = 1$ として, 数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を次の連立漸化式で定義する. このとき, 下の設問に答えなさい.

$$\begin{cases} x_n = 5x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ y_n = -x_{n-1} + 2y_{n-1} \end{cases}$$

- (a) 上の漸化式を次式のように表すとき, 行列 A を求めなさい.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

- (b) A を対角化する行列 P と P によって得られる対角行列 B を求めなさい.
- (c) A^n を求めなさい.
- (d) 一般項 x_n, y_n を求めなさい.

(山梨大 2024) (m20241804)

0.455 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対し, 適当な正則行列 P を求めて $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにせよ.

(信州大 1998) (m19981906)

0.456 次の行列の固有値と固有空間を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(信州大 1999) (m19991905)

0.457 次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(信州大 2003) (m20031902)

0.458 次の行列が対角化可能かどうかを調べ, 可能ならば対角化せよ.

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(信州大 2004) (m20041904)

0.459 次の行列の固有値と固有ベクトルを求め, 対角化せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(信州大 2005) (m20051902)

0.460 次の行列の固有値と固有ベクトルを求め, 対角化せよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(信州大 2006) (m20061901)

0.461 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

- (1) A の行列式を求めよ.
- (2) A の逆行列を求めよ.
- (3) A の固有値とその固有ベクトルを求めよ.

(信州大 2007) (m20071901)

0.462 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

- (1) A の階数を求めよ.
 (2) 連立 1 次方程式 $Ax = \mathbf{0}$ の解全体のなす $\mathbb{R}^4$ の部分空間 (すなわち解空間) W の次元を求めよ.
 (3) W の基底を求めよ.

(信州大 2008) (m20081901)

0.463 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値を求めよ. (2) A の固有ベクトルを求めよ. (3) A を対角化せよ.

(信州大 2008) (m20081902)

0.464 以下の行列 A の階数を求めよ. また, 連立 1 次方程式 $Ax = \mathbf{0}$ の解空間の次元を求め, 解空間の基底を与えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(信州大 2012) (m20121901)

0.465 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 3 \\ 6 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

とおくとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) A と B が可換であることを示せ.
 (2) A の固有値 λ に属する固有ベクトル $\mathbf{v}$ に対し, $B\mathbf{v}$ も A の固有値 λ に属する固有ベクトルであることを示せ.
 (3) A, B, C それぞれの固有値と固有ベクトルを求めよ.

(信州大 2012) (m20121902)

0.466 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(信州大 2013) (m20131903)

0.467 次の問いに答えよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値の中で, 最小の固有値に属する固有ベクトルを 1 つ求めよ.

(信州大 2013) (m20131904)

0.468 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ. ただし, a, b は実数とする.

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) A が逆行列をもつための a, b の条件を求めよ. また, A の逆行列を求めよ.

(信州大 2014) (m20141903)

0.469 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a+b \\ a & 1 & b \\ a+b & b & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ. ただし, a, b は実数とする.

(1) A が 1 を固有値にもつための a, b の条件を求めよ.

(2) A が 1 を固有値にもち, その重複度が 2 以上であるための a, b の条件を求めよ.

(3) A が 1 と 2 を固有値にもつとき, a, b の値を求めよ.

(信州大 2014) (m20141904)

0.470 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -a & a & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ. ただし, a は実数とする.

(1) A が固有値 1 と, それとは異なる実数の固有値をもつための a の条件を求めよ.

(2) 固有値 1 に属する固有ベクトルを 1 つ求めよ.

(信州大 2015) (m20151905)

0.471 行列 $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値と B の固有値を求めよ.

(2) A, B について, それらが対角化できるか調べ, 対角化できれば対角化せよ.

(信州大 2016) (m20161904)

0.472 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ -1 & 0 & 1 & b \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -a & -b & -1 & 0 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ. ただし, a, b は実数とする.

(1) A の行列式を計算せよ.

(2) A が逆行列をもつための条件を a と b を用いて表せ.

(3) a と b が (2) の条件を満たすとき, A の逆行列を求めよ.

(信州大 2017) (m20171903)

0.473 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2a & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -2 & a & -2 \end{pmatrix}$ について, 次の各問いに答えよ. ただし, a は実数とする.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A の最大の固有値に属する固有ベクトルを求めよ.

(信州大 2017) (m20171904)

0.474 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

(1) A の行列式の値を求めよ。

(2) 6 次正方行列 $\begin{pmatrix} 3A & A \\ A & 2A \end{pmatrix}$ の行列式の値を求めよ。

(信州大 2018) (m20181903)

0.475 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。ただし、 a, b は実定数で、 $b > 0$ とする。

(1) A の固有値がすべて正になる条件を a, b を用いて表せ。

(2) A の固有ベクトルでその成分がすべて正となるものを 1 つ求めよ。

(信州大 2018) (m20181904)

0.476 以下の正方行列 A_i ($i = 1, 2, 3$) それぞれについて、 PA_iP^{-1} を対角行列にする正方行列 P が存在するかどうかを答え、存在する場合はそのような P および PA_iP^{-1} を答えよ。

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(信州大 2018) (m20181909)

0.477 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & p+2 & p \\ 0 & p & p+2 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ。ただし、 p は実数とする。

(1) A の固有値を求めよ。

(2) A が対角化できないような p の値を求めよ。

(信州大 2019) (m20191905)

0.478 n を自然数とする。すべての成分が 1 であるような n 次元列ベクトルを $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ とする。 A, B, C を実数成分の n 次正方行列とする。

(1) 行列 A が逆行列を持つとする。このとき、 $A\mathbf{v} = \mathbf{u}$ を満たすベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ が存在することを証明せよ。

(2) $B\mathbf{v} = \mathbf{u}$ を満たすベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ がただ一つだけ存在するとする。このとき B は逆行列を持つことを証明せよ。

(3) $C\mathbf{v} = \mathbf{u}$ を満たすベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ および ${}^tC\mathbf{w} = \mathbf{u}$ を満たすベクトル

$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ が存在するとする。ここで、 tC は C の転置行列である。このとき $\mathbf{v}$ およ

び $\mathbf{w}$ の成分の和が一致すること、すなわち $\sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n w_i$ であることを、を証明せよ。

(信州大 2019) (m20191911)

0.479 3以上の自然数 n に対して, n 次正方行列

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 5 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

を A_n とする. すなわち, A_n の (i, j) 成分は, $i = j$ のとき 5, $|i - j| = 1$ のとき 2, それ以外のとき 0 である. A_n の行列式の値を a_n とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) a_3, a_4 を求めよ.
- (2) a_{n+2} を a_{n+1} と a_n を用いて表せ.
- (3) a_n を求めよ.

(信州大 2020) (m20201903)

0.480 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -4 & 3 & 2 \\ -8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 A が対角化可能か判定せよ.
- (2) 行列 B が対角化可能か判定せよ.

(信州大 2020) (m20201904)

0.481 行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値を求めよ.

(信州大 2020) (m20201908)

0.482 次の行列 A に対して, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (1) A の行列式を求めよ.
- (2) A の逆行列を求めよ.
- (3) A の固有値を求めよ.
- (4) $A^2 - 3I$ の階数を答えよ. ただし, ここで I は単位行列とする.

(信州大 2021) (m20211904)

0.483 t は実数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ について,

$A^2 B^3 A^{-1}$ の行列式の値が 128 であるとき, t の値を求めよ.

(信州大 2022) (m20221904)

0.484 a は定数とする. このとき, 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ が対角化可能か判定せよ.
(信州大 2022) (m20221905)

0.485 3つの行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ のうち, 正則な行列の行列式の値と逆行列を求めよ.
(信州大 2023) (m20231904)

0.486 a, b は実数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2ab-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2ab-3 & a \\ 0 & -b & 3ab-2 \end{pmatrix}$ が対角化可能なとき, a と b が満たす条件を求めよ.
(信州大 2023) (m20231905)

0.487 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について. 次の問いに答えよ.
(1) 行列 A が対角化可能かどうか判定せよ. また, 対角化可能であれば, 対角化せよ.
(2) 行列 B が対角化可能かどうか判定せよ. また, 対角化可能であれば, 対角化せよ.
(信州大 2024) (m20241904)

0.488 t は実数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & t & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.
(1) A の行列式の値を求めよ. また, A が正則なとき, t が満たす条件を求めよ.
(2) t が (1) で求めた条件を満たすとき, A の逆関数を求めよ.
(信州大 2025) (m20251903)

0.489 a は実数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ a-1 & 1 & a-1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が対角化可能なとき, a が満たす条件を求め, 対角化せよ.
(信州大 2025) (m20251904)

0.490 n を 2 以上の自然数として $n \times n$ 行列 $A_n = (a_{ij})$ を次で定める.

$$\begin{aligned} a_{ii} &= 1 & (i = 1, 2, \dots, n) \\ a_{i,i+1} &= 1 & (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ a_{i+1,i} &= -1 & (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ a_{ij} &= 0 & (|i-j| \geq 2) \end{aligned}$$

たとえば

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

である.

(1) $D_n = \det A_n$ とおく. A_n の第 n 列で余因子展開し, D_n に関する漸化式を求めよ.

(2) D_5 を求めよ.

(新潟大 1998) (m19982005)

0.491 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ で与えられる連立方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を考える.

このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 行の基本変形を行うことにより, A の階級 (rank) を求めよ.

(2) 上の連立方程式を解け.

(新潟大 1999) (m19992004)

0.492 実数 a に対して, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & a & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 方程式 $f(x) = x^3 - (a+5)x^2 + (5a+4)x - 6a+4 = 0$ は, a の値によらない解をもつことを示し, その解を求めよ.

(2) A の固有値を求めよ.

(3) ある a に対して, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ を満たす行列 P を 1 つ求めよ.

(新潟大 1999) (m19992005)

0.493 正方行列 X, Y に対して, $|XY| = |X||Y|$ が成り立つことは知っているものとする. ただし, $|*|$ は行列式を表す. A, B, C, D を n 次正方行列, I, O をそれぞれ n 次の単位行列, ゼロ行列とする. このとき, 次の各問いに答えよ.

(1) 行列の積 $\begin{pmatrix} I & O \\ -C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & B \\ C & D \end{pmatrix}$ を求めよ.

(2) $\begin{vmatrix} I & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D - CB|$ となることを示せ.

(3) A が正則 (逆行列をもつこと) であるとき, 次の各問いに答えよ.

(a) 次の式を満たす n 次正方行列 X を求めよ.

$$\begin{pmatrix} I & O \\ X & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

(b) さらに, $AC = CA$ ならば,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$$

が成り立つことを示せ.

(新潟大 2000) (m20002003)

0.494 $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ (θ は実数) とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 行列 P の逆行列 P^{-1} 及び、行列 A の固有値を求めよ。
 (2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように θ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) の値を定めよ。
 (3) 曲線 $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 2$ の概形を描け。

(新潟大 2000) (m20002004)

0.495 以下の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。ここで $i^2 = -1$ である。

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

(新潟大 2001) (m20012007)

0.496 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & -10 & 14 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -6 & 7 \end{pmatrix}$ として、次の問に答えよ。

- (1) 行の基本変形を行うことにより、 A の階数 (rank) を求めよ。

- (2) 連立方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ の全体のなすベクトル空間の基底を求めよ。

(新潟大 2001) (m20012008)

0.497 次の問いに答えよ。

- (1) A を n 次正方形行列とし、 E, O をそれぞれ n 次単位行列、 n 次零行列とする。このとき、次の (a), (b) を示せ。

- (a) 正の整数 m に対して

$$E - A^m = (E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{m-1})$$

が成り立つ。

- (b) ある正の整数 m に対して $A^m = O$ となるとき、 $E - A$, $E + A$ は共に正則 (逆行列を持つこと) である。

- (2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。このとき、 $A^3 = O$ であることを示せ。さらに $(E - A)^{-1}$ および $(E + A)^{-1}$ を求めよ。

(新潟大 2002) (m20022004)

0.498 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値を λ_1, λ_2 ($|\lambda_1| > |\lambda_2|$) とし、対応する固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ とする。

- (1) $\lambda_1, \lambda_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ を求めよ。

- (2) 正の実数 a, b をとり、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

と定める。このとき a, b の選び方によらずに極限值 $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ が定まることを示し、その値 L を求めよ。

(新潟大 2002) (m20022005)

0.499 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) A の固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ。
- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求めよ。
- (3) 数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を $x_0 = 1, y_0 = 0$ とし、 $n \geq 1$ に対して、
$$\begin{cases} x_n = 5x_{n-1} - 2y_{n-1} \\ y_n = -2x_{n-1} + 8y_{n-1} \end{cases}$$
と定義する。このとき、一般項 x_n と y_n を求めよ。

(新潟大 2003) (m20032004)

0.500 実数 a に対して、 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 行列 A の階数を求めよ。
- (2) 同次連立一次方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の実数解を求めよ。

(新潟大 2004) (m20042004)

0.501 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ 、 $P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ (θ は実数) について、次の問いに答えよ。

- (1) A の固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ。
- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるように θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) の値を求めよ。
- (3) 曲線 $5x^2 + 2xy + 5y^2 - 12 = 0$ の概形を描け。

(新潟大 2004) (m20042005)

0.502 実数 a に対して、行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

は固有値 1 をもつとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) A のすべての固有値を求めよ。
- (3) 正則行列 P で、 $P^{-1}AP$ が対角行列となるものがあれば、そのような P を 1 つ求めよ。

(新潟大 2005) (m20052002)

0.503 (1) 整数 a に対して、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & a & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。また、 A の逆行列の成分がすべて整数で
あるとする。このとき、 a の値と A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

- (2) 実数 b, c に対して、行列 $B = \begin{pmatrix} 5 & b \\ c & 4 \end{pmatrix}$ は、異なる固有値をもつとする。さらに、それぞれの固有値に属する固有ベクトルを $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とする。このとき、 b と c の値および B の固有値を求めよ。

(新潟大 2006) (m20062004)

0.504 $\mathbb{R}^3 = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ をユークリッド空間とする. このとき, 以下の各問に答えよ.

- (1) A を 3 次の実正則行列とする. $\mathbb{R}^3$ の線型変換 T を $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$) によって定義する. 点 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ を通り, 零ベクトルでないベクトル $\mathbf{v}$ に直交する平面を W とする. このとき, $T(W)$ は点 $A\mathbf{p}$ を通り, ベクトル ${}^t(A^{-1})\mathbf{v}$ に直交する平面であることを示せ. ここで, ${}^t(A^{-1})$ は, A の逆行列 A^{-1} の転置行列である.

- (2) a, b, c を正の実数とし, 楕円面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ を C とする. C 上の点 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ における C の接平面の方程式を求めよ.

(新潟大 2006) (m20062006)

0.505 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ について行列式と逆行列を求めよ.

(新潟大 2009) (m20092004)

- 0.506 (1) A を 3 次実正方行列とする. 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 以外の解を持つための必要十分条件は, A が正則 (可逆) でないことである. このことを証明せよ.

- (2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1-a & 2 & 2 \\ 1 & 2-a & -1 \\ -1 & 1 & 4-a \end{pmatrix}$ に対して, 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 以外の解を持つとき, a の値を求めよ. 更に, 求めた a の値に対して, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解を求めよ.

(新潟大 2009) (m20092006)

0.507 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det(A)$ と逆行列 A^{-1} を求めよ.

(新潟大 2010) (m20102002)

0.508 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(新潟大 2010) (m20102008)

- 0.509 (1) a, b を複素数とすると, $A = \frac{1}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}} \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ はユニタリ行列であることを示せ. ただし, $|a|$, $\bar{a}$ はそれぞれ a の絶対値および複素共役を表す.

- (2) $U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}$ のとき, $U^{-1}BU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ を満たす行列 B について, B^n を求めよ. ただし i は虚数単位である.

(新潟大 2010) (m20102012)

0.510 次の設問に答えよ.

- (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det(A)$ と逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2) 任意のベクトル $\mathbf{A}$ に対して次式が成り立つことを示せ.

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} \bullet \mathbf{i})(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + (\mathbf{A} \bullet \mathbf{j})(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + (\mathbf{A} \bullet \mathbf{k})(\mathbf{i} \times \mathbf{j})$$

ただし, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ はそれぞれ, x 方向, y 方向, z 方向の単位ベクトルとする.

(新潟大 2011) (m20112002)

0.511 a を実数とする. このとき, 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

- (1) A を対称行列と交代行列の和で表せ.
- (2) A が正則であるための a の値に関する条件を求めよ. また, A が正則であるとき, A の逆行列 A^{-1} を求めよ.
- (3) $a \geq 0$ のとき, A は対角化可能であることを証明せよ.

(新潟大 2011) (m20112006)

0.512 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の設問に答えよ.

- (1) 行列 A の固有方程式を求めよ.
- (2) 行列 A の固有値を全て求めよ.
- (3) それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(新潟大 2012) (m20122002)

0.513 実行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a+1 & a \end{pmatrix}$ が固有値をただ 1 つ持つための条件を求めよ. また, そのときの固有値および固有ベクトルを求めよ.

(新潟大 2012) (m20122007)

0.514 a を実数とする. このとき, 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

- (1) A の階数 (rank) を求めよ.
- (2) A が対角化可能であるかどうか理由をつけて答えよ. また, A が対角化可能であるとき, A を対角化せよ.
- (3) $a = \sqrt{2}$ のとき, $A^{-1} = bE_3 + cA + dA^2$ となる実数 b, c, d を求めよ. ただし, A^{-1} を A の逆行列, E_3 を 3 次単位行列とする.

(新潟大 2012) (m20122010)

0.515 実数を成分とする 3×3 行列

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 8 \\ 2 & 5 & b \\ c & 4 & 18 \end{pmatrix}$$

に対して, M により与えられる連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + ay + 8z = 0 \\ 2x + 5y + bz = 0 \\ cx + 4y + 18z = 0 \end{cases}$$

がある。このとき、次の各問いに答えよ。

- (1) 上の連立 1 次方程式の解の集合が

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2z = y + 3z = 0\}$$

であるとき、 a, b, c の値を求めよ。

- (2) (1) の解である a, b, c を成分にもつ M に対して、 M は正則でない。その理由を述べよ。
 (3) (1) の解である a, b, c を成分にもつ M に対して、 $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f を $f(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$) によって定義する。このとき、 $f(\mathbb{R}^3)$ を求めよ。

(新潟大 2012) (m20122017)

0.516 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) A の固有値を求めよ。
 (2) 各固有値に対する固有空間の基底を求めよ。
 (3) 行列 A を対角化する直交行列を求めよ。

(新潟大 2013) (m20132004)

0.517 $\mathbf{R}^2$ における基底 $\chi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ を考える。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\mathbf{R}^2$ における標準基底から、基底 χ への取りかえ行列を求めよ。
 (2) $\mathbf{R}^2$ における線形写像 f の標準基底に関する表現行列を、 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ とする。このとき、 f の基底 χ に関する表現行列を求めよ。

(新潟大 2014) (m20142010)

0.518 3次元空間上のベクトル $\vec{V}$ を x 軸のまわりで角度 θ だけ回転するとベクトル $\vec{V}'$ へ変換される。この関係を 3×3 行列 $U(\theta)$ を用いて

$$\vec{V}' = U(\theta)\vec{V}$$

と書く。ここで、 $U(\theta)$ は

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

で与えられる。以下の問いに答えよ。

- (1) 行列 $U(\theta)$ の行列式 $\det U(\theta)$ を求めよ。
 (2) 行列 $U(\theta)$ の逆行列 $U(\theta)^{-1}$ を求めよ。
 (3) 行列 K を

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

としたとき、 K^2 、 K^3 、および K^4 を求めよ。さらに、正の整数 m に対して、 K^{2m} と K^{2m-1} を求めよ。

(4) 一般に、正方行列 X の指数関数は無限級数

$$e^X = E + X + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}X^n$$

で定義される。ここで、 E は単位行列を表し、 $X^0 = E$ である。問 (3) の結果を利用して、

$$e^{\theta K} = U(\theta)$$

となることを示せ。

(新潟大 2014) (m20142017)

0.519 a を定数とする。以下の行列が正則なる a の条件を求め、その条件の下、逆行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

(新潟大 2015) (m20152006)

0.520 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ とする。

- (1) P の逆行列 P^{-1} を求めよ。
- (2) $B = P^{-1}AP$ とするとき、 B^n を求めよ。 n は自然数とする。
- (3) A^n を求めよ。

(新潟大 2015) (m20152012)

0.521 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について次の (1)~(3) に答えよ。 E は単位行列、 O は零行列である。

- (1) $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$ であることを示せ。
- (2) $A^2 = O$ ならば $a+d=0$, $ad-bc=0$ であることを示せ。
- (3) $A^2 - 5A + 6E = O$ を満たすとき、 $a+d$, $ad-bc$ の値をそれぞれ求めよ。

(新潟大 2015) (m20152015)

0.522 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

について、次の各問いに答えよ。

- (1) A の行列式の値を求めよ。
- (2) A の固有値をすべて求めよ。
- (3) A の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ。
- (4) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求め、 A を対角化せよ。

(新潟大 2015) (m20152019)

- 0.523** 条件 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4$ を満たすベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対して, 2×2 行列 T による線形変換 $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = T\mathbf{x}$ を考える. $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 1$ を満たすための行列 T を求めよ.

(新潟大 2016) (m20162004)

- 0.524** 行列 $\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値を求め, 各固有値に対応する 2 つの固有ベクトルの交角 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) を示せ

(新潟大 2016) (m20162007)

- 0.525** 以下の行列 A の行列式の値を求め, A が正則になる実数 a を全て求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(新潟大 2017) (m20172005)

- 0.526** 以下のように行列 A, B, C を定義する.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

また, I を 3×3 の単位行列とする. ここで, i は虚数単位で $i = \sqrt{-1}$ である.

- (1) $A^2 + B^2 + C^2 = kI$ となることを示し, 定数 k を求めよ.
- (2) A の固有値を求めよ.
- (3) 一般に, 正方行列 M の指数関数 e^M は, 無限級数 $e^M \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M^n$ で定義される. α を実定数としたとき,

$$e^{i\alpha C} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{問題ではこうなってい} \\ \text{ましたが, } (2,2) \text{ 成分は } 1 \text{ に} \\ \text{なるものと思われます} \end{array} \right)$$

となることを示せ.

- (4) ベクトル $\vec{v}(\phi)$ を $\vec{v}(\phi) = \frac{\sin \phi}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{i \cos \phi}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と定義する.

このとき, $e^{i\alpha C} \vec{v}(\phi) = \vec{v}(\phi')$ と書けることを示し, ϕ' を求めよ. ただし, ϕ と ϕ' は実定数である.

(新潟大 2017) (m20172017)

- 0.527** 4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について、次の各問いに答えよ.

- (1) A の行列式の値を求めよ.
- (2) A の固有値をすべて求めよ.
- (3) A の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.
- (4) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求め、 A を対角化せよ.

(新潟大 2017) (m20172020)

0.528 次のような行列 C について考える. ここで $i^2 = -1$ である.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 C の固有値をすべて求めよ.
- (2) 行列 C の固有ベクトルをすべて求めよ. ただし, 固有ベクトルは大きさ 1 に規格化すること.
- (3) 行列 C を対角化した行列を D とする. 行列 D を求めよ.
- (4) D^n を計算し, C^n を求めよ.

(新潟大 2018) (m20182007)

0.529 4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

について、次の各問いに答えよ.

- (1) A の行列式の値を求めよ.
- (2) A の固有値をすべて求めよ.
- (3) A の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.
- (4) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P と P^{-1} を求め、 A を対角化せよ.

(新潟大 2018) (m20182010)

0.530 行列 A について、以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の固有値を全て求めよ.
- (2) (1) で求めた各固有値に対応する、長さが 1 の固有ベクトルを求めよ.
- (3) 行列 A を対角化せよ.

(新潟大 2019) (m20192004)

0.531 4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

について、次の各問いに答えよ.

- (1) A の行列式の値を求めよ.
- (2) A の固有値をすべて求めよ.
- (3) A の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.
- (4) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P と P^{-1} を求め、 A を対角化せよ.

(新潟大 2019) (m20192015)

0.532 3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の平面 L を次のように定める.

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \right\}$$

線形変換 $f; \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^3$ から平面 L への射影とする. すなわち, 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ について, $f(\mathbf{x})$ は平面 L 上にあり, $\mathbf{x} - f(\mathbf{x})$ は平面 L に垂直なベクトルとなる. このとき, 次の各問いに答えよ.

- (1) ベクトル $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して, $f(\mathbf{e}_1)$, $f(\mathbf{e}_2)$, $f(\mathbf{e}_3)$ を求めよ.
- (2) $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$) を満たす行列 A を求めよ.
- (3) f の像空間 $\text{Im}(f) = \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}$ の基底を一組求めよ.
- (4) f の核空間 $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$ の基底を一組求めよ.

(新潟大 2019) (m20192017)

0.533 2つの行列 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

- (1) A の行列式 $\det A$ と逆行列 A^{-1} を求めよ.
- (2) 2つの行列の積 AB を求めよ.
- (3) 4つの行列 A , B , A^{-1} および AB は, いずれも二次元 XY 座標平面上における任意の点 $P(x, y)$ をそれぞれ異なる $P'(x', y')$ に移動させる. A , B , A^{-1} および AB が, それぞれどのように点 P を点 P' に移動させるか, 幾何学的意味を述べよ.

(新潟大 2020) (m20202007)

0.534 4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

について, 次の各問いに答えよ.

- (1) A の行列式の値を求めよ.
- (2) A の固有値をすべて求めよ.
- (3) A の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.
- (4) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求め、 A を対角化せよ.
- (5) 自然数 n に対して, A^n を求めよ.

(新潟大 2022) (m20222003)

0.535 虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を含む指数関数 $e^{i\theta}$ を三角関数で表す公式はオイラーの公式と呼ばれる。物理の問題を扱うには、よく似た行列の関係式を用いると便利ことが多い。このことに関連した以下の問いに答えよ。

- (1) オイラーの公式を書け。つまり、実数 θ に対して $e^{i\theta}$ を三角関数を用いて表せ。
 (2) 二次正方行列 I および J を

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する。 J^2 を計算し、 J^2 と I の間に成り立つ関係式を求めよ。

- (3) 一般に二次正方行列 X に対し、そのゼロ乗 X^0 および指数関数 e^X は次式で定義される：

$$X^0 = I, \quad e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n = I + X + \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{3!} X^3 + \cdots$$

(2) の関係式に着目すると、行列 $e^{\theta J}$ は I に比例する部分と J に比例する部分の和

$$e^{\theta J} = f(\theta)I + g(\theta)J$$

で表すことができる。このとき、関数 $f(\theta)$ および $g(\theta)$ を求めよ。

なお、必要ならば、三角関数のベキ展開（テイラー・マクローリン展開）が次式で与えられることを用いてもよい。

$$\cos \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} = 1 - \frac{1}{2!} \theta^2 + \cdots$$

$$\sin \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} = \theta - \frac{1}{3!} \theta^3 + \cdots$$

- (4) (3) で求めた行列 $e^{\theta J}$ に対して、その行列式の値を答えよ。

次に、これまでの結果の応用として、調和振動子の運動を表す微分方程式

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

の解 $x(t)$ を求めたい。ここで ω は正の定数である。以下の問いに答えよ。

- (5) 変数 $p(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ および $q(t) = \omega x(t)$ を用いると、この微分方程式は、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$$

の形に表すことができる。ここで K は t に依らない二次正方行列である。行列 K を答えよ。

- (6) (5) の微分方程式の解は次式で与えられる：

$$\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = e^{Kt} \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$$

以上のことから、初期条件 $p(0) = p_0$, $q(0) = q_0$ に対応する解 $x(t)$ を求めよ。

(新潟大 2022)

(m20222006)

0.536 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ.

(2) A を対角化する行列 P のうち, $P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ となるものを求めよ.

ただし, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ とする. また, θ を求めよ. さらに, P を用いて A を対角化せよ.

(3) 前問 (2) の条件において, P^6 を求めよ.

(新潟大 2022) (m20222009)

0.537 $A = \begin{pmatrix} a+2b & 2-3b \\ 3-4c & a+3c \end{pmatrix}$ とする. 1 行 2 列の行列 $X = (x \ y)$ に対して, $X' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく. すべての x, y に対して, 行列の積 XAX' がつねに O となるような a, b, c の値を求めよ.

(長岡技科大 1992) (m19922107)

0.538 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき, 行列 $xE - A$ の行列式 $|xE - A|$ を求めよ. (x の整式で表せ).

(長岡技科大 1992) (m19922108)

0.539 $f(t) = e^{-t} \cos t$, $g(t) = e^{-t} \sin t$ とするとき,

(1) $\begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ となる, 定数を成分とする 2×2 行列 A を求めよ.

(2) 4 階の導関数 $f^{(4)}(t)$, $g^{(4)}(t)$ を求めよ.

(長岡技科大 1994) (m19942106)

0.540 空間の点 (x, y, z) の平面 $z = \sqrt{3}x$ に関する対称点を (x', y', z') とする. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と表すとき, 行列 A を求めよ.

(長岡技科大 1994) (m19942107)

0.541 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって表される空間の 1 次変換を f とする. 点 $P(x, y, z)$ が球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上を動くとき, 点 $f(P)$ と定点 $Q(0, 1, 0)$ との距離の最大値および最小値を求めよ.

(長岡技科大 1995) (m19952105)

0.542 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ. (n は自然数, E は単位行列とする.)

(1) $(A - E)(A + \frac{1}{2}E)$ を計算せよ.

(2) x^n を $(x-1)(x+\frac{1}{2})$ で割った余りを $a_n x + b_n$ とする. a_n, b_n を n の式で表せ.

(3) $A^n = a_n A + b_n E$ と表せることを示せ.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ を求めよ.

(長岡技科大 1996) (m19962104)

0.543 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(長岡技科大 1997) (m19972106)

0.544 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) A が正則であるための条件を求めよ.
- (2) A が正則であるとき, その逆行列 A^{-1} を求めよ.

(長岡技科大 1998) (m19982105)

0.545 以下の問いに答えよ.

- (1) 点 $P(x, y)$ から x 軸に下ろした垂線の足 (P が x 軸上にあるときは P 自身) を $P'(x', y')$ とする. P を P' に移す一次変換を $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すとき, 行列 A を求めよ.
- (2) 点 $P(x, y)$ から直線 $y = kx$ (k は定数) に下ろした垂線の足 (P がこの直線上にあるときは P 自身) を $P'(x', y')$ とする. P を P' に移す一次変換を $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すとき, 行列 B を求めよ.

(長岡技科大 1999) (m19992104)

0.546 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 AB を計算せよ.
- (2) 行列式 $|A|$ を求めよ.
- (3) $AX = E$ となる行列 X を求めよ.

(長岡技科大 2000) (m20002104)

0.547 xyz 空間において, 平面 $H: x + y + z = 0$ に関する対称移動を表す行列を A とする. 以下の各問いに答えよ.

- (1) $s + t + u = 0$ を満たす s, t, u について, $A \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}$ を求めよ. また, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ.
- (2) 等式 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s + t + u = 0$ が成り立っているとき, k, s, t, u を x, y, z で表せ.
- (3) 任意の x, y, z に対して, $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を求めよ.
- (4) A を求めよ.

(長岡技科大 2004) (m20042103)

0.548 実数 θ に対して $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とおく. 以下の問いに答えなさい.

(1) $R(\theta)K = KR(-\theta)$ を示しなさい.

(2) 原点を通る傾き $\tan \theta$ の直線に関する対称移動を表す行列を $A(\theta)$ とするとき, $A(\theta) = R(2\theta)K$ を示しなさい.

(3) $A\left(\frac{7\pi}{12}\right)A(\theta) = R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ となる $A(\theta)$ を求めなさい.

(長岡技研大 2007) (m20072102)

0.549 2 次の正方行列 A の 4 つの成分は, それぞれ独立に 0 または 1 の値を確率 $\frac{1}{2}$ でとるものとする. 以下の問いに答えなさい.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる確率を求めなさい.

(2) $A = {}^tA$ となる確率を求めなさい. ただし, tA は A の転置行列を表す.

(3) $|A| = 1$ となる確率を求めなさい. ただし, $|A|$ は A の行列式を表す.

(4) 確率変数 $X = |A^2|$ の期待値を求めなさい.

(長岡技科大 2008) (m20082101)

0.550 (1) xy 平面上の点 (x, y) の y 軸に関する対称点を (x', y') とするとき, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる行列 A を求めなさい.

(2) xy 平面上の点 (x, y) の直線 $y = ax$ に関する対称点を (x', y') とするとき, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる行列 B を求めなさい.

(3) 行列の積 BA が角度 $\frac{\pi}{3}$ の反時計まわりの回転を表すとき, a の値を求めなさい.

(長岡技科大 2009) (m20092102)

0.551 大小 2 つのサイコロを投げて出た目をそれぞれ a, b とし, 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ b & 4 \end{pmatrix}$ を作る. 以下の問いに答えなさい.

(1) A が対称行列になる確率を求めなさい.

(2) A が正則行列になる確率を求めなさい.

(3) 行列式 $|A|$ の期待値を求めなさい.

(長岡技科大 2010) (m20102101)

0.552 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えなさい.

(1) A の行列式 $|A|$ を求めなさい.

(2) 実数 x, y, s, t に対して,

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = A \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

が成り立つとき, s, t を x, y で表しなさい.

(3) 前問で得られた式を $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表す行列 B を求めなさい.

(長岡技科大 2012) (m20122103)

0.553 3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ と3次元ベクトル $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ を考える. 以下の問いに答えなさい.

(1) A の行列式 $|A|$ を求めなさい.

(2) 3次元ベクトル $\mathbf{p}$ についての方程式 $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$ が解を持つように, k を定めなさい.

(3) 前問で定めた k について, $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$ の解のうちで $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と垂直なものを求めなさい.

(長岡技科大 2013) (m20132102)

0.554 2次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対し, 下の問いに答えなさい.

(1) A の逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(2) 曲線 $C: 5x^2 + 12xy + 8y^2 - 4 = 0$ の A による像 C' の方程式を求め, C' の概形を図示せよ.

(長岡技科大 2015) (m20152101)

0.555 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくとき, 下の問いに答えなさい.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような2次正方行列 P を1つあげなさい. また, $P^{-1}AP$ と P^{-1} を求めなさい.

(3) 自然数 n について, A^n を求めなさい.

(長岡技科大 2017) (m20172101)

0.556 a を1でない実数とし, $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ とする. 下の問いに答えなさい.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような2次直交行列 P を1つあげなさい. また, $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(長岡技科大 2018) (m20182101)

0.557 a, b を実数とし, 3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & b \\ 3 & 3a & 3 \end{pmatrix}$ を考える.

$\text{rank } A$ は A の階数を表す. 下の問いに答えなさい.

(1) 行列式 $|A|$ の値を a, b を用いて表しなさい.

(2) 行列 A が正則になる条件を a, b を用いて表しなさい.

(3) $\text{rank } A = 1$ となるとき, a, b を求めなさい.

(長岡技科大 2019) (m20192101)

0.558 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくとき、下の問いに答えなさい。

- (1) A の固有多項式 $|tE - A|$ を求めなさい。ただし、 E を 3 次単位行列とする。
- (2) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい。

(長岡技科大 2020) (m20202101)

0.559 正方行列を $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とおく。

また、 n を自然数とする。下の問いに答えなさい。

- (1) B^2, B^3 を求めなさい。
- (2) AB, BA を求めなさい。
- (3) A^n を n を用いて表しなさい。
- (4) $n \geq 2$ に対して、 C^n を n を用いて表しなさい。

(長岡技科大 2021) (m20212101)

0.560 実数 t の実数値関数 $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ についての連立微分方程式

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 6x_1 + 6x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - x_2 \end{cases}$$

を考える。また、 $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ とおく。下の問いに答えなさい。

- (1) A の固有値、固有ベクトルを求めなさい。
- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 2 次正方行列 P を一つあげなさい。また、 $P^{-1}AP$ を求めなさい。
- (3) P を前問 (2) におけるものとし、実数 t の実数値関数 $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$ を

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

により定める。このとき、 $(*)$ を y_1, y_2 についての連立微分方程式に書き換えなさい。また、 y_1, y_2 を求めなさい。

- (4) x_1, x_2 を求めなさい。

(長岡技科大 2021) (m20212102)

0.561 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えなさい。

- (1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい。
- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つあげなさい。また、その P に対する $P^{-1}AP$ を求めなさい。

- (3) 2次正方行列 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $\text{tr}(M) = a + d$ とおく. 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{tr}(A^n))}{n}$ を求めなさい.

(長岡技科大 2023) (m20232104)

0.562 a を実数とする. 行列 A とベクトル $\vec{b}$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ -a & -a & a \\ a+1 & a & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix}$$

とし, 実数 x, y, z についての連立方程式を

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{b} \quad \cdots (*)$$

とする. 下の問いに答えなさい.

- (1) $a = 0$ として, $(*)$ を解きなさい.
- (2) $a = 1$ として, $(*)$ を解きなさい.
- (3) $a = -1$ として, $(*)$ を解きなさい.

(長岡技科大 2024) (m20242102)

0.563 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して, 次に答えよ.

- (1) A の行列式 $|A|$ の値を, 第2行に関して(余因子)展開することにより求めよ.
- (2) A は正則か. 正則ならば, その逆行列 A^{-1} を求めよ.

(金沢大 1999) (m19992207)

0.564 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問に答えよ.

- (1) 行列式 $|\lambda I - A|$ が 0 となる λ の値を求めよ.
- (2) (1) における λ の値に対して, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ を満たすベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ をすべて求めよ.

(金沢大 1999) (m19992208)

0.565 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値を求めよ.
- (2) (1) で求めた各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.
- (3) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$, $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ となる直交行列 P と α, β, γ を求めよ.

(金沢大 2000) (m20002203)

0.566 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対して、次の問いに答えよ.

- (1) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ が成立するような行列 P と α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$) を求めよ.
- (2) (1) で求めた行列 P とある対角行列 B に対し $X = PBP^{-1}$ とおく. $X^2 = A$ が成立するよ
うに行列 B を定めよ.

(金沢大 2001) (m20012203)

0.567 行列 $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ に対して、次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値を求めよ.
- (2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$, $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ となる正則行列 P を 1 つ求めよ. さらに α, β, γ の値を
求めよ.

(金沢大 2003) (m20032203)

0.568 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 & 2 \\ -a & 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ.

- (1) 行列 A が固有値 1 をもつときの a 値を求めよ.
- (2) (1) で求めた a について、行列 A の固有値 1 に対する固有ベクトルを求めよ.

(金沢大 2005) (m20052201)

0.569 t を実数とし、 $A = \begin{pmatrix} 1 & t & t \\ t & 1 & t \\ t & t & 1 \end{pmatrix}$ とおく.

- (1) A の行列式 $\det A$ の値を求めよ.
- (2) A の階数を求めよ.

(金沢大 2005) (m20052204)

0.570 (1) 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、ある数 k とある零行列と異なる 2 次正方行列 B が存在
して、 $AB = BA = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ.

(2) t を実数とする. 連立一次方程式

$$\begin{cases} 3x + 5y + 2z &= 0 \\ x + (t+2)y + z &= 0 \\ tx + y + (t-1)z &= 0 \end{cases}$$

が $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ でない解を持つための t についての必要十分条件を求めよ. また, そのときの解を求めよ.

(金沢大 2005) (m20052205)

0.571 行列 L を

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と定義します. 行列 L の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(金沢大 2005) (m20052209)

0.572 行列 $A = \begin{pmatrix} k & \frac{1}{3} \\ 1-k & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ (k は定数, $0 < k < 1$) について, 次の問に答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A を対角化せよ.

(3) $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ ($n = 1, 2, \dots$) とするとき, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + d_n)$ を求めよ.

(金沢大 2006) (m20062201)

0.573 A を任意ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して, $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ を満たす 3×3 行列とする.

(1) A を求めよ.

(2) A^3 を求めよ.

(3) A の 3 つの固有値及び各固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(金沢大 2007) (m20072201)

0.574 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ とする. 次に答えよ.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $n \rightarrow \infty$ のとき, $3^{-n} A^n$ はどのような行列に近づくか.

(金沢大 2007) (m20072204)

0.575 次の 4×4 行列 A とベクトル $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^4$ について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 10 & -8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \\ a \end{pmatrix}$$

(1) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$ に対する連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解を持つように定数 a を定めよ.

(2) (1) で求めた a に対して, 連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解を求めよ.

(3) 像空間 $\text{Im} A = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4\}$ の基底と次元を求めよ.

(金沢大 2007) (m20072214)

0.576 $A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 4 \\ 16 & 15 & -16 \\ 10 & 10 & -11 \end{pmatrix}$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ.

(金沢大 2007)

(m20072215)

0.577 実数を成分とする 2 次正方行列全体がつくるベクトル空間を M とする.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M$ に対し, 線形写像 $F : M \rightarrow M$ を

$$F(X) = AX - XA \quad (X \in M)$$

によって定義するとき, M の部分空間

$$\text{Ker} F = \{X \in M \mid F(X) = O\}, \quad \text{Im} F = \{F(X) \mid X \in M\}$$

の次元を求めよ. ただし, O は零行列を表す.

(金沢大 2007)

(m20072216)

0.578 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 (\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3)$ とする. $i = 1, 2, 3$ に対して, λ_i に対応する固有ベクトルで, その第 1 成分を 1 としたものを $\mathbf{u}_i$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $i = 1, 2, 3$ に対して, λ_i および $\mathbf{u}_i$ を求めよ.

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3$ を満たす定数 a, b, c を求めよ.

(3) 自然数 n に対して, $A^n \mathbf{u}_1$ および $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(金沢大 2008)

(m20082201)

0.579 $A = \begin{pmatrix} a+b & a & b \\ b & b+c & c \\ a & c & a+c \end{pmatrix}$ とする. 次に答えよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & a & c \end{pmatrix} B$ となる行列 B を一つ見つけよ.

(2) A の行列式 $\det A$ を求め, A の逆行列が存在する為の必要十分条件を a, b, c の条件として答えよ.

(金沢大 2008)

(m20082204)

0.580 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 行列式 $\det A$ を求めよ.

(2) $\det A = 0$ のとき, 方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解け.

(3) $\det A \neq 0$ のとき, 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(金沢大 2009) (m20092201)

0.581 行列 $A = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考える. 次の問いに答えよ.

(1) A のすべての固有値を求め, それぞれの固有値に対する固有ベクトルを与えよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P をひとつ求めよ.

(金沢大 2009) (m20092204)

0.582 任意の x, y, z について, $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y \\ x+z \end{pmatrix}$ となる 3×3 行列 A を考える. 次の問いに答えよ.

(1) A を求めよ.

(2) A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ($\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$) と, それぞれに対応する長さ 1 の固有ベクトル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ を求めよ.

(3) ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ となる直交行列 P を求めよ. ただし, tP は P の転置行列である.

(金沢大 2010) (m20102201)

0.583 a, b, c を正の実数として, 行列

$$A = \begin{pmatrix} -(a+c) & a & c \\ a & -(a+b) & b \\ c & b & -(b+c) \end{pmatrix}$$

を考える. 次の問いに答えよ.

(1) A の階数 (rank) を求めよ.

(2) 連立 1 次方程式

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

の解を求めよ.

(金沢大 2010) (m20102204)

0.584 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) 固有多項式 $\Phi_A(t) = \det(tE - A)$ を求めよ. ただし, E は 3 次の単位行列である.

(2) $(A - 2E)^2, (A - 2E)^3$ を求めよ.

(3) 自然数 n に対して A^n を求めよ.

(金沢大 2010) (m20102205)

0.585 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(金沢大 2010) (m20102213)

0.586 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ($\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$) とする. $i = 1, 2, 3$ に対して, λ_i に対応する固有ベクトルでその第 1 成分が 1 のものを $\mathbf{u}_i$ とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $i = 1, 2, 3$ に対して, λ_i および $\mathbf{u}_i$ を求めよ.

(2) ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 9 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ をみたす直交行列 P を 1 つ求めよ. ただし, tP は P の転置行列である.

(3) ${}^tP \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ. また自然数 n に対して, $A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(金沢大 2011) (m20112201)

0.587 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について, 次の問に答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の各固有値に対する固有空間を求めよ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ.

(金沢大 2011) (m20112204)

0.588 $V = R^3$ を R 上の 3 次元ベクトル空間とする.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とし, 行列 A が定める V 上の線形変換を $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in V$) とする. 次の問に答えよ.

(1) $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ は V の基底であることを示せ.

(2) V の基底 $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ に関する f の表現行列 B を求めよ.

(3) f の像 $\text{Im} f$ は V の部分空間であることを示せ. また, $\text{Im} f$ の基底を一つ求めよ.

(金沢大 2011) (m20112205)

0.589 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して,

$$A\vec{p}_i = \lambda_i \vec{p}_i, \quad |\vec{p}_i| = 1 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$$

とする. ここで, $|\vec{p}|$ はベクトル $\vec{p}$ の長さとする. 次の問いに答えよ.

- (1) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を求めよ.
 (2) $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ を求めよ.
 (3) $\vec{x} = x_1\vec{p}_1 + x_2\vec{p}_2 + x_3\vec{p}_3$ とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} |A^n \vec{x}| = \infty$ となるための x_1, x_2, x_3 の条件を述べよ.

(金沢大 2012) (m20122201)

0.590 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ に対して, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$ とする. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^2$ に対して, 次を示せ.

- (1) 行列式

$$\begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{a}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{vmatrix}$$

が 0 でないならば, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は 1 次独立である.

- (2) 上の行列式が 0 ならば, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は 1 次従属である.

(金沢大 2012) (m20122204)

0.591 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1-2r & r & r \\ r & 1-2r & r \\ r & r & 1-2r \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ. ただし $r > 0$ とする.

- (1) 行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$$

を因数分解した形で求めよ.

- (2) A の固有値, および対応する固有空間を求めよ.

- (3) $\mathbf{R}^3$ の点列 $\{\mathbf{x}_n\}$ を

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n \quad (n \geq 1)$$

により定める. $\{\mathbf{x}_n\}$ が収束するための r の条件, およびそのときの $\{\mathbf{x}_n\}$ の極限を求めよ.

(金沢大 2012) (m20122205)

0.592 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について, 次の問い (1)~(3) に答えよ.

- (1) A が固有値 3 と 1 をもつことを確かめ, 固有値 3 に対する固有ベクトル $\mathbf{x}$ と固有値 1 に対する固有ベクトル $\mathbf{y}$ を 1 つずつ求めよ.
 (2) (1) で求めた $\mathbf{y}$ に対して, $\mathbf{z} - A\mathbf{z} = \mathbf{y}$ を満たすベクトル $\mathbf{z}$ を 1 つ求めよ.
 (3) (1), (2) の $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ を用いて行列 $P = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ をつくる時, $P^{-1}AP$ を求めよ.

(金沢大 2013) (m20132201)

0.593 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) A の行列式 $\det A$ を求めよ.

(2) $\det A = 0$ とする.

(a) A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ($\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$) を求めよ.

(b) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対する固有ベクトルをそれぞれ $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ とする. $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ を求めよ.

(金沢大 2013) (m20132206)

0.594 行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 6 & -6 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ($\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$) とする. $i = 1, 2, 3$ に対して, λ_i に対応する固有ベクトルでその第 1 成分が 1 のものを $\mathbf{u}_i$ とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $i = 1, 2, 3$ に対して, λ_i および $\mathbf{u}_i$ を求めよ.

(2) $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3$ とし, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \mathbf{v}$ とおく. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{z_n}$ を求めよ.

(金沢大 2014) (m20142201)

0.595 線形変換 $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ は

$$f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

をみたすとする. ただし $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ は $\mathbf{R}^3$ の標準基底, 即ち

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする. 次の問に答えよ.

(1) $\mathbf{R}^3$ の標準基底に関する f の表現行列を求めよ.

(2) f の像 ($\text{Im } f$) の次元が 2 とする.

(a) b を a と c で表せ.

(b) f の核 ($\text{Ker } f$) を求めよ.

(金沢大 2014) (m20142204)

0.596 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の各固有値に対する固有空間を求めよ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ.

(金沢大 2014) (m20142205)

0.597 任意の x, y, z について

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x + y + 4z \\ -4x + 3y + 2z \\ -x + y + z \end{pmatrix}$$

となる 3×3 行列 A を考える. 次の問いに答えよ.

- (1) A を求めよ.
- (2) A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ($\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$) と, それぞれに対応する長さ 1 の固有ベクトル p_1, p_2, p_3 を求めよ.
- (3) B を A の逆行列, n を自然数とすると, B^n の固有値を $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \mu_3^{(n)}$ ($\mu_1^{(n)} < \mu_2^{(n)} < \mu_3^{(n)}$) とおく. 数列 $a_n = \frac{\mu_1^{(n)} \mu_3^{(n)}}{\mu_2^{(n)}} \quad (n = 1, 2, \dots)$ に対して, 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束発散を調べよ.

収束する場合はその値を求めよ.

(金沢大 2015) (m20152201)

0.598 R^3 の部分集合 $W = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 3x + 4y - z = 0 \right\}$ と線形変換

$$f: R^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3$$

を考える. 次の問いに答えよ.

- (1) W が R^3 の部分空間であることを示し, その基底を一組求めよ.
- (2) $\mathbf{x} \in W$ のとき $f(\mathbf{x}) \in W$ となることを示せ.
- (3) (2) により, f の定義域を W に制限することにより, 線形変換

$$g: W \ni \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) \in W$$

ができる. この変換 g の (1) で選んだ W の基底に関する表現行列を求めよ.

(金沢大 2015) (m20152204)

0.599 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値をすべて求めよ.
- (2) A の各固有値に対する固有空間を求めよ.
- (3) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を一つ求めよ.
- (4) $B = (\alpha E - A)(\beta E - A)^{-1}$ とおく. ただし E は 3 次の単位行列, α と β は A の固有値とは異なる実数とする. B を対角化せよ.

(金沢大 2015) (m20152205)

0.600 行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- (1) A の固有値と規格化された固有ベクトルを求めなさい。
 (2) ある行列 P を用いて、行列 $A' = P^{-1}AP$ を対角行列にすることができる。 P と A' を求めなさい。

(金沢大 2015) (m20152211)

0.601 行列 A は

$$A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満たす。次の問いに答えよ。

- (1) $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して、行列式 $\det P$ および逆行列 P^{-1} を求めよ。
 (2) 行列 A を求めよ。
 (3) 行列 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ に対して、 $x_{11} + x_{22} + x_{33}$ を $\text{tr}(X)$ で表す。自然数 n に対して $\text{tr}(A^n)$ を求めよ。

(金沢大 2016) (m20162206)

0.602 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を計算しなさい。

(金沢大 2016) (m20162212)

0.603 次の 4×4 行列 A とベクトル $\mathbf{b} \in R^4$ について以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 10 & -8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \\ a \end{pmatrix}$$

- (1) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in R^4$ に対する連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解を持つように定数 a を定めよ。
 (2) (1) で求めた a に対して、連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解を求めよ。
 (3) 像空間 $\text{Im} A = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in R^4\}$ の基底と次元を求めよ。

(金沢大 2016) (m20162226)

0.604 $A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 4 \\ 16 & 15 & -16 \\ 10 & 10 & -11 \end{pmatrix}$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) A の固有値を求めよ。
 (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ。

(金沢大 2016) (m20162227)

0.605 実数を成分とする 2 次正方行列全体がつくるベクトル空間を M とする.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M \text{ に対し, 線形写像 } F: M \rightarrow M \text{ を}$$

$$F(X) = AX - XA \quad (X \in M)$$

によって定義するとき, M の部分空間

$$\text{Ker } F = \{X \in M \mid F(X) = O\}, \quad \text{Im } F = \{F(X) \mid X \in M\}$$

の次元を求めよ.

(金沢大 2016) (m20162228)

0.606 $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.
- (2) A の固有値とその固有値に属する固有空間を求めよ.

(金沢大 2016) (m20162230)

0.607 $7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 1 \cdots (*)$ を次の手順で, (x, y) 平面に図示せよ.

- (1) $(*)$ の左辺は 2×2 の対称行列 A を用いて, $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すことが出来る. A を求めよ.
- (2) A の固有値 $(\lambda_1 < \lambda_2)$, および, 長さ 1 の固有ベクトル $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (λ_1 に対応),
 $v_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ (λ_2 に対応) を求めよ. ただし, $a > 0, c > 0$ と選ぶ.
- (3) 行列 $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ とおく. $P^{-1}AP$ を計算せよ.
- (4) 変数変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ としたとき, (x, y) 平面上の図形は, 反時計回りに q ラジアン
 回転すると (X, Y) 平面上の図形に移る. q を求めよ. また, 上記の図形を (X, Y) 平面上で図示
 せよ.
- (5) $(*)$ を (x, y) 平面上で図示せよ.

(金沢大 2016) (m20162234)

0.608 行列 $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を考える. 次の各小問に答えよ.

- (1) P の固有値をすべて求めよ. またそれぞれの固有値に属する固有ベクトルを一つずつ求めよ.
 ただし固有ベクトルの成分は整数値に選べ.
- (2) $\mathbf{v}$ を (1) で求めた固有ベクトルの線形結合として表せ.
- (3) $P^n \mathbf{v}$ を求めよ. さらに極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{2n+1} \mathbf{v}$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{2n} \mathbf{v}$ を求めよ.

(金沢大 2016) (m20162237)

0.609 k を実数とする. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2k \\ 1 & 2k & 2 \\ k & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

- (1) A の階数を求めよ.
- (2) A による $\mathbf{R}^3$ の変換

$$f: \mathbf{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$$

を考える.

- (a) f が $\mathbf{R}^3$ の線形変換であることを示せ.
- (b) f の像 ($\text{Im } f$) の次元が 2 のとき, f の核 ($\text{Ker } f$) の次元と基底の 1 組を与えよ.

(金沢大 2017) (m20172201)

0.610 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

- (1) A を対角化せよ.
- (2) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ に対して, 関数 $f(\mathbf{x})$ を $f(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ と定めると, $f(\mathbf{x}) \geq 0$ であることを示せ. さらに $f(\mathbf{x}) = 0$ となる $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ を求めよ. ただし ${}^t\mathbf{x}$ は $\mathbf{x}$ の転置を表す.
- (3) $A = B^2$ となる行列 B を求めよ.

(金沢大 2017) (m20172202)

0.611 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 8 \\ 4 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) I を 3 次の単位行列とすると, A の特性多項式 $\det(\lambda I - A)$ を求めよ.
- (2) A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ($\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$) と, それぞれに対応する長さ 1 の固有ベクトル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ を求めよ.
- (3) 行列 $A^4 - 10A^2$ を求めよ.

(金沢大 2017) (m20172206)

0.612 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ について, 以下の各問いに答えなさい.

- (1) A の固有値と規格化された固有ベクトルをすべて求めなさい.
- (2) ある行列 V を用いて, 行列 $A' = V^{-1}AV$ を対角行列にすることができる. V と A' を求めなさい.

(金沢大 2017) (m20172212)

0.613 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について 次の問いに答えよ.

(1) tPAP が対角行列となるような 3 次の直交行列 P を一つ求めよ. ただし tP は P の転置行列を表す.

(2) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ に対して, $f(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ とおく (${}^t\mathbf{x}$ は $\mathbf{x}$ の転置を表す).

集合 $S = \{\mathbf{x} = {}^t(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ における, $f(\mathbf{x})$ の最大値と最小値, およびそれらを与える $\mathbf{x} \in S$ をすべて求めよ.

(3) $A^5 - 5A^4 + 2A^3 + 9A^2$ を求めよ.

(金沢大 2018) (m20182202)

0.614 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ. 以下において, I は 3 次の単位行列, O は 3 次の零行列である.

(1) A の特性多項式 $\det(\lambda I - A)$ を求めよ.

(2) A の実数の固有値をすべて求め, 各固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(3) $A^3 + aA^2 + bA + cI = O$ を満たす実数 a, b, c を求めよ.

(4) 行列 A^{2018} を計算せよ.

(金沢大 2018) (m20182206)

0.615 行列 A は

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を満たしている. 次の問いに答えよ.

(1) 行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対して, 行列式 $\det P$ および逆行列 P^{-1} を求めよ.

(2) 行列 A を求めよ.

(3) E を 4 次の単位行列とすると,

$$(A^2 - E)^2(A^2 - 4E) + A^2 + A = aA^2 + bA + cE$$

を満たす実数の組 (a, b, c) を 1 つ求めよ.

(金沢大 2019) (m20192201)

0.616 行列

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -13 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

- (1) A のすべての固有値, および各固有値に対する固有空間を求めよ.
 (2) 3 次の正則行列 P で, $P^{-1}AP$ が対角行列となるものは存在しないことを示せ.

(金沢大 2019) (m20192204)

0.617 k を実数とする. 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k-7 \\ 0 & -1 & 1 & 3k \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) B の階数 ($\text{rank} B$) を求めよ.
 (2) 次の連立一次方程式が解をもつような k の値と, その k に対する連立一次方程式の解をすべて求めよ.

$$\begin{cases} x + y + z = k - 7 \\ -y + z = 3k \\ 2x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

- (3) B による $\mathbf{R}^4$ から $\mathbf{R}^3$ への線形写像

$$f : \mathbf{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$$

を考える. f の核 ($\text{Ker } f$) の次元と 1 組の基底, f の像 ($\text{Im } f$) の次元と 1 組の基底をそれぞれ求めよ.

(金沢大 2019) (m20192205)

0.618 p と q を実数とする. 行列

$$A = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

が異なる実数の固有値 α と β をもつとき, 次の問いに答えよ.

- (1) p と q が満たす条件を求めよ.
 (2) 次の満たす正則行列 P の一つを, α と β を用いて与えよ.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

- (3) 漸化式

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を, a_1, a_2, α, β を用いて表せ.

(金沢大 2020) (m20202201)

0.619 行列

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

と, B による $\mathbf{R}^4$ から $\mathbf{R}^3$ への線形写像

$$f : \mathbf{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$$

について, 次の問いに答えよ.

- (1) f の核 ($\text{Ker } f$) を求めよ.
- (2) f が全射であることを示せ.
- (3) E_3 を 3 次の単位行列とする. このとき,

$$BC = E_3$$

を満たす行列 C が存在する場合にはそのような C を一つ与え, 存在しない場合にはその理由を述べよ.

(金沢大 2020) (m20202202)

- 0.620** (1) n を自然数とする. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^n$ を求めよ.

- (2) 次の行列の固有値を求め, それぞれの固有値に対応する固有空間の基底を 1 組求めよ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(金沢大 2020) (m20202208)

- 0.621** α を実数とする. 2 以上の自然数 n に対して, n 次の正方行列 A_n を

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \alpha & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

により定める. ここで, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ である.

また, $a_n = \det(A_n)$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) a_2, a_3 を求めよ.
- (2) a_n を求めよ.
- (3) $\alpha \geq 0$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

(金沢大 2021) (m20212204)

- 0.622** 次の行列が対角化可能であるか調べ, 対角化可能ならば, 与えられた行列 A に対し, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P とそのときの対角行列を 1 組求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 8 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(金沢大 2021) (m20212205)

0.623 行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

について、次の問いに答えよ.

- (1) A のすべての固有値, および各固有値に対する固有空間を求めよ.
- (2) A が対角化可能であるかどうかを調べよ. さらに, A が対角化可能ならば, $P^{-1}AP$ が対角行列となる P を求めよ.
- (3) 3 次実正方行列 B が $AB = BA$ を満たすとき, B は対角化可能であることを示せ.

(金沢大 2021) (m20212206)

- 0.624 (a) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と規格化された固有ベクトルをすべて求めなさい.
- (b) 関数 $f(x, y) = 3x^2 - 4xy + 3y^2$ は任意の実数 x, y に対して $f(x, y) \geq 0$ を満たすことを示しなさい.

(金沢大 2021) (m20212214)

- 0.625 次の命題の真偽を判定し, 命題が真の場合は証明を与え, 命題が偽の場合は反例あるいはその判断理由を述べよ.

- (1) V を $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間とし, m 個の元 $e_1, \dots, e_m \in V$ は $\mathbf{R}$ 上 1 次独立とする. ベクトル $v \in V$ が $e_1, \dots, e_m$ の $\mathbf{R}$ 上の 1 次結合であるとき, $v = c_1e_1 + \dots + c_me_m$ を満たす実数の組 $(c_1, \dots, c_m)$ はただ一通りに定まる.
- (2) 2×2 行列 A, B について, $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ が成立する.
- (3) $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間 $\mathbf{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbf{R} \right\}$ に対し, 写像 $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ を

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y \\ x - 2y + 1 \end{pmatrix}$$

で定めると, f は線形写像である.

- (4) n を任意の自然数とする. 正則な $n \times n$ 行列は, 固有値 0 を持たない.

(金沢大 2022) (m20222203)

- 0.626 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ.

- (1) 固有値を全て求めよ.
- (2) A を直交行列によって対角化せよ.

(金沢大 2022) (m20222204)

- 0.627 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ.

- (1) A のすべての固有値を求めよ.
- (2) A の各固有値に対する固有空間を求めよ.

- (3) A が対角化可能の場合は $P^{-1}AP$ が対角行列になるような P を 1 つ求めよ. 対角化可能ではない場合はその理由を述べよ.

(金沢大 2022) (m20222205)

0.628 $(\cdot, \cdot)$ を $\mathbf{R}^3$ 上の標準内積とする. 2 つのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$ の間の距離 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})^{1/2}$$

により定める. 任意のベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$ に対し, $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を満たすような写像 $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を $\mathbf{R}^3$ 上の等長変換とよぶ. 次の問いに答えよ.

- (1) $\mathbf{R}^3$ 上の 2 つの等長変換 f, g に対して, 合成写像 $f \circ g$ も $\mathbf{R}^3$ 上の等長変換となることを示せ.
 (2) ベクトル $\mathbf{a}_1 \in \mathbf{R}^3$ および行列 A_2, A_3 を

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とし, $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ への写像 f_1, f_2, f_3 を

$$f_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}_1, \quad f_2(\mathbf{x}) = A_2\mathbf{x}, \quad f_3(\mathbf{x}) = A_3\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3)$$

と定める. このとき f_1, f_2, f_3 は $\mathbf{R}^3$ 上の等長変換であることを示せ.

- (3) ベクトル $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をベクトル $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ にうつすような等長変換を, (2) の f_1, f_2, f_3 の合成を繰り返すことにより 1 つ与えよ.

(金沢大 2022) (m20222210)

0.629 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ について, 以下の各問いに答えなさい.

- (1) A の固有値を求めなさい.
 (2) ある直交行列 P を用いて, $P^{-1}AP$ を対角行列にすることができる. P を求めなさい.

(金沢大 2022) (m20222214)

0.630 (1) 行列 $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, $M = A + B$ となるような対称行列 A , 交代行列 B を求めよ.

註: A が対称行列であるとは ${}^tA = A$ であること (tA は A の転置行列を表す), B が交代行列であるとは ${}^tB = -B$ であることを意味する.

- (2) (1) で求めた対称行列 A を, 適当な直交行列 P によって対角化せよ. (直交行列 P を求める計算の過程も明示すること)

(富山大 1994) (m19942302)

0.631 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

- (1) A の行列式を求めよ.
- (2) A^2, A^3, A^4 を求めよ.
- (3) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(富山大 2001) (m20012305)

0.632 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ. ただし, $\lambda_1 > \lambda_2$ とする.
- (2) λ_1, λ_2 に対する固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ のうちで, 長さが 1, 第 1 成分が正のものを求めよ.
- (3) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ は直交することを証明せよ.
- (4) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ とするとき, $\mathbf{x} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2$ をみたす実数 k_1, k_2 を求めよ.

(富山大 2001) (m20012306)

0.633 2×2 行列 σ_1 が $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられるとき, 次の問いに答えよ.

- (1) σ_1 の固有値と大きさが 1 の直交固有ベクトルを求めよ.
- (2) σ_1 を対角化する変換行列 P を求め, σ_1 を対角化せよ.
- (3) 対角化した行列を σ_3 とするとき, $\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 = 2i\sigma_3$ および $\sigma_2\sigma_2 = I$ を満たす行列 σ_2 を求めよ. ここで, i は虚数単位, I は 2×2 の単位行列である.

(富山大 2003) (m20032306)

0.634 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (2) 行列 A は対角化可能か.
- (3) 行列 A^3 は直交行列を用いて対角化可能か.

(富山大 2003) (m20032307)

0.635 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ が, 等式 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ を満たす実数 a, b の値を求めよ. また, 逆行列 A^{-1}, B^{-1} をそれぞれ求めよ.

(富山大 2004) (m20042307)

0.636 行列 $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ および 2 次の正方行列 P について, P が逆行列 P^{-1} をもち, $P^{-1}CP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ が成り立つとき, α, β は行列 C の固有値であることを証明せよ. また, 自然数 n に対して C^n を求めよ.

(富山大 2004) (m20042308)

0.637 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

- (1) 行列 A の行列式を求めよ.
 (2) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(富山大 2004) (m20042311)

0.638 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

- (1) A の行列式を計算せよ.
 (2) A の逆行列が存在する条件を示し, そのときの逆行列を求めよ.

(3) 連立 1 次方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を解け.

解が存在しない場合は, 解なしと答えよ.

(富山大 2005) (m20052304)

0.639 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(富山大 2005) (m20052308)

0.640 行列 $S = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と, S を対角化する行列を求めよ.

(富山大 2005) (m20052313)

0.641 2×2 行列 $Z = aI + bJ$ を考える.

ただし, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ および $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ である. また, a と b は実数であり, a と b が同時に 0 になることはないとする.

- (1) Z^T を計算し, a, b, I, J で表せ. ここで添字 T は行列の転置を表す.
 (2) $Z + Z^T$ と $Z - Z^T$ をそれぞれ a, b, I, J で表せ.
 (3) ZZ^T を a, b, I, J で表せ.
 (4) Z の逆行列を求め, a, b, I, J で表せ.
 (5) J と Z の固有値をそれぞれ求めよ.

(富山大 2006) (m20062305)

0.642 2×2 行列 $L = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-\beta^2} & -\beta/\sqrt{1-\beta^2} \\ -\beta/\sqrt{1-\beta^2} & 1/\sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix}$ とするとき (ただし, $0 < \beta < 1$ とする), 以下の問いに答えよ.

- (1) L による 1 次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を行つたとき, $x'^2 - y'^2 = x^2 - y^2$ が成り立つことを示せ.

- (2) L が行列の方程式 $L^2 - 2L/\sqrt{1-\beta^2} + I = O$ を満足することを示せ. ただし, I は 2×2 の単位行列で, O は 2×2 の零行列である.
- (3) L の固有値を求めよ.
- (4) L と別の 2×2 行列 $M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-\gamma^2} & -\gamma/\sqrt{1-\gamma^2} \\ -\gamma/\sqrt{1-\gamma^2} & 1/\sqrt{1-\gamma^2} \end{pmatrix}$ を用いた 1 次変換 $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = ML \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を行ったとき, $x''^2 - y''^2 = x^2 - y^2$ が成り立つことを示せ. ただし, $0 < \gamma < 1$ とする.
- (5) L の逆行列を求めよ.

(富山大 2007) (m20072303)

0.643 θ を任意の実数, I を単位行列, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ として, 行列 A が $A = (\cos \theta)I + (i \sin \theta)\sigma_1$ で与えられるとき, 以下の問いに答えよ. ここで i は虚数単位とする.

- (1) σ_1^2 を計算せよ.
- (2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.
- (3) σ_2 の固有値 λ と固有ベクトル ν を求めよ.
- (4) $A\sigma_2A^{-1}$ を計算して σ_2 を対角化するように θ を決定せよ. ただし, θ の範囲を $0 < \theta < \pi/2$ とする. また, このときの θ の値を用いた行列 A により, σ_2 の固有ベクトル ν を変換したベクトル $u = A\nu$ を求めよ.

(富山大 2008) (m20082303)

0.644 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) A^2 を求めよ.
- (2) A の行列式を求めよ.
- (3) 逆行列 A^{-1} を求めよ.
- (4) 固有値と固有ベクトルを求めよ.

(富山大 2009) (m20092303)

- 0.645** (1) 正方行列 A, P, D の間に $P^{-1}AP = D$ の関係があるとき, A^n (n は自然数) を P, P^{-1}, D, n を用いて表せ. ただし, 帰納法などによる証明は不要とする.
- (2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有ベクトルのうち, 大きさが 1 の二つを $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ とする. ただし, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq k \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ で, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が固有値の小さいほうに対応した固有ベクトルとする. このとき, $Q = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ とした場合の $Q^{-1}BQ$ を求めよ.
- (3) (1), (2) の結果をもとに, B^{10} を求めよ. ただし, 帰納法などによる証明は不要とする. なお, 必要ならば $2^{10} = 1024$, $3^{10} = 59049$, $5^{10} = 9765625$ の値を用いよ.

(富山大 2010) (m20102304)

0.646 3次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in R$$

が

$${}^tAA = E_3$$

をみたすとする. このとき, A の各行ベクトルは長さが 1 で互いに直交することを示せ. ただし, tA は A の転置行列, E_3 は 3 次の単位行列を表す.

(富山大 2011) (m20112301)

0.647 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とする. このとき

- (1) A の行列式を求めよ.
- (2) A のゼロではない固有値及びゼロではない固有ベクトルを求めよ.
- (3) (2) で求めた 2 つの固有ベクトルを列ベクトルとして並べた行列 P の逆行列 P^{-1} , 及び $P^{-1}AP$ を計算せよ.

(富山大 2012) (m20122304)

0.648 $\mathbf{R}^3$ における 3 つのベクトル $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を考える.

- (1) $\{e_1, e_2, e_3\}$ は $\mathbf{R}^3$ の基底であることを示せ.
- (2) e_1 を $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に, e_2 を $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に, e_3 を $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に写す $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ への線形写像を行列で表せ.

(富山大 2012) (m20122307)

0.649 行列 $H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ (α, β は実定数, $\beta \neq 0$) について, 以下の間に答えよ.

- (1) H の固有値を α, β を用いて表せ.
- (2) (1) で求めたそれぞれの固有値に対応する固有空間の正規直交基底を求めよ.
- (3) H を直交行列を用いて対角化せよ.

(富山大 2013) (m20132304)

0.650 実数を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ が逆行列をもつための必要十分条件を x, y, z を用いて表せ.

(富山大 2013) (m20132307)

0.651 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & x+2 & -1 & -1 \\ x & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ($x \in R$) の階数を求めよ.

(富山大 2014) (m20142307)

0.652 P を 2 以下の実係数多項式からなる実ベクトル空間とする. 写像 $G: P \rightarrow P$ を,

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ($a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R}$) に対し $G(f(x)) = f(x+1) = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2$ で定義する.

- (1) G は線形写像であることを示せ.
- (2) P の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する G の表現行列を求めよ.

(富山大 2014) (m20142308)

0.653 x, y を実数とする. 座標平面上の点 (x, y) に対して, 行列

$$A = \begin{pmatrix} x & y & 2 \\ y & 1 & y \\ 2 & y & x \end{pmatrix}$$

を考える. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 直交行列 $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して, tPAP を求めよ.
- (2) A の相異なる固有値の個数が 2 であるような点 (x, y) の集合を図示せよ.

(富山大 2015) (m20152303)

0.654 xy 平面上に 3 点, $A(1, 1)$, $B(3, 1)$, $C(1, 4)$ を頂点とする三角形がある. この 3 つの頂点を線形写像 T により変換するとき, 次の各問いに答えよ. ただし, 線形写像 T は行列 $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 計算の概略も示すこと.

- (1) 頂点 A, B, C の変換後の各頂点を A', B', C' とする. これら 6 点を xy 座標平面上に座標の値とともに図示せよ.
- (2) 点 A', B' を通る直線をベクトル表示せよ. 同様に点 A', C' を通る直線をベクトル表示せよ.
- (3) (2) の 2 直線が直交することをベクトルの内積を使って示せ.
- (4) 三角形 ABC と三角形 $A'B'C'$ の面積比を求めよ.

(富山大 2015) (m20152308)

0.655 3 次実対称行列 A は固有値 2 と 3 をもち, 固有値 2 に対する固有空間 W_2 はある実数 x, y を用いて

$$W_2 = \left\{ c \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbf{R} \right\} \text{ と表され, 固有値 3 に対する固有空間 } W_3 \text{ は}$$

$$W_3 = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2 \in \mathbf{R} \right\} \text{ と表されている. このとき, 次の問いに答えよ.}$$

- (1) x, y を求めよ.
- (2) $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ を W_2 と W_3 のベクトルの和で表せ.
- (3) 自然数 n に対して $A^n \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ を求めよ.

0.656 次の各問いに答えよ. ただし, A, B は 2 行 2 列の正則な実数行列, I, O はそれぞれ 2 行 2 列の単位行列と零行列とする.

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} I & O \\ A^{-1} & I \end{vmatrix}$ と $\begin{vmatrix} I & A^{-1} \\ O & I \end{vmatrix}$ をそれぞれ求めよ.

(2) 次の等式が成立することを示せ.

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

(3) 次の分割行列 (ブロック行列) の積を計算せよ. なお計算結果は, A, B, I, O のうち必要なものを小行列とする一つの分割行列として示すこと.

$$\begin{pmatrix} I & O \\ A^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B - A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1} \\ O & I \end{pmatrix}$$

(4) 次の等式が成立することを (1), (2), (3) の結果を利用して示せ.

$$\begin{vmatrix} A & I \\ I & B \end{vmatrix} = |A||B - A^{-1}|$$

0.657 (1) 正方行列 A, P, D の間に $AP = PD$ の関係があるとき, A^n を P, P^{-1}, D および n を用いて表せ. ただし n は自然数である. また, P は正則行列であるとする.

(2) 次の行列 B は相異なる 3 つの実数の固有値を持つ. これらの固有値および対応する固有ベクトルを求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(3) (2) の行列 B において, 固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の各々に対応する任意の固有ベクトルを

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} q_{1,1} \\ q_{2,1} \\ q_{3,1} \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} q_{1,2} \\ q_{2,2} \\ q_{3,2} \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} q_{1,3} \\ q_{2,3} \\ q_{3,3} \end{pmatrix}$$

とし, 行列 Q を

$$Q = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix}$$

としたとき

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

となる. この性質を利用し, (1), (2) の結果をもとに B^n を求めよ.

0.658 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式の値および固有値を求めよ.

また, この行列の対角化は可能かどうか調べよ.

0.659 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ がある.

- (1) 行列 A の固有値を λ とすると, λ は $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ を満たさなければならないことを示しなさい.
- (2) 前問の行列 A の固有値を求めなさい.
- (3) その行列 A の固有ベクトルを求めなさい.

(福井大 2000) (m20002416)

0.660 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を, 対称行列と交代行列の和として表しなさい.

(福井大 2001) (m20012416)

0.661 以下に二つの線型変換がある.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

- (1) これらの行列による変換は平面上でどのような幾何学的意味を持つか説明せよ.
- (2) A, B による合成変換の行列を求めよ.
- (3) (2) で求めた合成変換の行列の逆変換行列を求めよ.
- (4) (2) で求めた合成変換によって, 直線 $y = 3x + 2$ はどのような図形に変換されるか.

(福井大 2001) (m20012418)

0.662 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(福井大 2001) (m20012419)

0.663 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき, $\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$ となる正方行列 $\mathbf{X}$ を求めなさい.

(福井大 2003) (m20032412)

0.664 次の行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ がある.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- (1) $4\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$ を計算しなさい.
- (2) $\mathbf{CD}$ と $\mathbf{DC}$ の計算をしなさい.

(福井大 2003) (m20032413)

0.665 次の行列 $\mathbf{B}$, ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ がある. 3次元の空間でベクトル $\mathbf{a}$ は (x_1, y_1, z_1) の点を表し, ベクトル $\mathbf{b}$ は $(1, 0, 0)$ の点を表し, ベクトル $\mathbf{c}$ は直線を表す.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \text{ここで } t \text{ は任意の実数, } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & 0 & \sin \frac{\pi}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \frac{\pi}{6} & 0 & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

- (1) 線形変換（一次変換） $\mathbf{y}_1 = \mathbf{Bb}$ によって、ベクトル $\mathbf{b}$ は 3 次元座標でどこに移されるかわかるように図に描きなさい。
- (2) 線形変換（一次変換） $\mathbf{y}_2 = \mathbf{Bc}$ によって、ベクトル $\mathbf{c}$ は 3 次元座標でどこに移されるか。ベクトル $\mathbf{y}_2 = \mathbf{Bc}$ を図に描き、どのような形か説明しなさい。

(福井大 2003) (m20032415)

0.666 次の 2 つの列ベクトル $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ からなる行列 A がある。

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A のランク（階数）はいくらか。
- (2) 次のベクトルと行列の積を計算しなさい。

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- (3) 行列 A から得られる 2 つの固有ベクトルを求めなさい。
- (4) 正規化された固有ベクトルを書きなさい。
- (5) 正規化された 2 つの固有ベクトル（列ベクトル）からなる 2 行 2 列の正方行列 $\mathbf{P}$ を求めなさい。
- (6) 列ベクトルを $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ とする。 ${}^t(\mathbf{Pb})\mathbf{A}(\mathbf{Pb})$ を計算しなさい。ただし、 ${}^t(\mathbf{Pb})$ は $\mathbf{Pb}$ の転置を意味している。
- (7) ${}^t(\mathbf{Pb})\mathbf{A}(\mathbf{Pb}) = \frac{3}{2}$ が表す図形を図 B に描きなさい。そして、その図形がどのような形状か詳しく説明しなさい。

(福井大 2004) (m20042419)

0.667 次の行ベクトル $\mathbf{a}$ と行列 $\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ と $\mathbf{D}$ がある。以下の計算をせよ。ただし、計算できない場合は、計算できないと記せ。

$$\mathbf{a} = (3 \quad 4 \quad 5) \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 9 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{aB} =$$

$$\mathbf{Ba} =$$

$$\mathbf{CD} =$$

$$\mathbf{DC} =$$

(福井大 2005) (m20052406)

0.668 次の行列に対応する固有値と固有ベクトルを求めよ。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(福井大 2005) (m20052408)

0.669 2 行 2 列の行列

$$\mathbf{A}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

に対して、次の等式が成り立つことを示せ。

- (1) $\mathbf{A}(x)\mathbf{A}(y) = \mathbf{A}(x+y)$
- (2) $\mathbf{B}(x)\mathbf{B}(y) = \mathbf{A}(x-y)$
- (3) $\mathbf{A}(x)\mathbf{B}(y) = \mathbf{B}(x+y)$
- (4) $(\mathbf{A}(x))^n = \mathbf{A}(nx)$

(福井大 2005) (m20052411)

0.670 次の行列 A について、以下の問いに答えよ。 $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- (1) A の固有値を求めよ。
- (2) A を対角化する正則行列 P を求めて、 A を対角化せよ。

(福井大 2006) (m20062410)

0.671 次のベクトルと行列の演算を行え。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(福井大 2006) (m20062421)

0.672 行列 A の固有値 λ と固有ベクトル $\mathbf{x}$ に関する設問である。

$$(1) A, \lambda, \mathbf{x} \text{ の間に成り立つ関係を示せ。} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ の固有値を求めよ。}$$

- (3) (2) の解に対応する固有ベクトルを一つ示せ。

(福井大 2006) (m20062422)

0.673 次の行列 B がある。以下の問いに答えよ。

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- (1) B の固有値と固有ベクトル $\mathbf{x}$ を求めよ。
- (2) B^3 を計算せよ。
- (3) $\mathbf{x}$ を B の絶対値の小さい方の固有値に対応する固有ベクトルとする時、 $B^{10}\mathbf{x}$ を求めよ。

(福井大 2008) (m20082405)

0.674 次のような連立方程式がある。以下の問いに答えよ。

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \quad \text{ここで,} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

行列 A は下の 3 つの列ベクトルを使って、次のように表現できる。

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \quad \text{ここで,} \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の階数 (ランク) を求めよ.
 (2) 連立方程式の解を求めよ.
 (3) 列ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は一次独立か一次従属か答えよ. もしそれらが一次従属なら, $\mathbf{a}_1$ を $\mathbf{a}_2$ と $\mathbf{a}_3$ の一次結合として表現せよ.

(福井大 2008) (m20082406)

- 0.675** (1) 次の行列の逆行列を求めよ.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$
- (2) α を実数とする. このとき, 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.
- (a) A の行列式を計算せよ. (b) A の階数を求めよ.
- (3) 三つのベクトル $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ が線形従属 (一次従属) となるような x の値を求めよ.

(福井大 2008) (m20082409)

- 0.676** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ について, 次の計算をせよ.
- (1) AB (2) BA (3) $2A + 3 {}^tB$ (ただし, tB は B の転置行列を示す)
- (福井大 2008) (m20082419)

- 0.677** 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を λ , 固有ベクトルを $\mathbf{x}$ とする時, 以下の問いに答えよ.
- (1) $A, \lambda, \mathbf{x}$ の間に成立する関係を示せ.
 (2) 固有値を求めよ.
 (3) 各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2008) (m20082420)

- 0.678** 次の行列 A と B について 積 AB および BA を計算せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

(福井大 2009) (m20092412)

- 0.679** 次の行列 C の固有値を求めよ. また, 固有値の中で負の値をもつ固有値に対する固有ベクトルも求めよ.

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

(福井大 2009) (m20092413)

0.680 次の行列 A について以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (2) 行列 A は対角化可能か. 可能ならば対角化せよ.

(福井大 2009) (m20092415)

0.681 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ がある.

- (1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を満たすベクトル $\mathbf{x}$ を求めよ. n は整数とし, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 以外の $\mathbf{x}$ を求めること.

(福井大 2010) (m20102409)

0.682 座標変換によって, 曲線 $x^2 + xy + y^2 = 1$ を $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$ の形 (標準系) に書き換えたい. ここでは, この変換を次の手順によって行う. 以下の問いに答えよ, 途中経過がわかるように記述しないと減点する.

- (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.
- (2) 2つの固有ベクトルを正規化した列ベクトル (単位長さとした列ベクトル) を $\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$ とする. $\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$ を書け. (どちらが $\mathbf{p}$ でもよい)
- (3) これらの列ベクトル $\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$ を使って, 行列 $\mathbf{P} = (\mathbf{p} \ \mathbf{q})$ を表せ.
(例: 列ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ のとき $(\mathbf{a} \ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ という行列を表せる.)
- (4) 行列 $\mathbf{A}$ を $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$ によって対角化せよ. ここで, $\mathbf{P}^{-1}$ は行列 $\mathbf{P}$ の逆行列である.
- (5) $\mathbf{x}$ を $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{X}$ で座標変換する. ここで, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ である. さて, このとき, $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{X}^T (\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}) \mathbf{X}$ となることを示せ. ここで, $\mathbf{x}^T$ は列ベクトル $\mathbf{x}$ の転置で, $\mathbf{P}^T$ は $\mathbf{P}$ の転置行列である.
- (6) 問題 (4) と (5) の答を使って, $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = x^2 + xy + y^2 = 1$ を $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$ の形に変換せよ. ここで, α と β は上記の座標変換の結果から決まる数値 (スカラー) である.

(福井大 2011) (m20112407)

0.683 次のベクトルと行列の演算を行え.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) 3 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

$$(4) t \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は転置を表す})$$

(福井大 2011) (m20112418)

0.684 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値の中で、中間の値を持つ固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2011) (m20112420)

0.685 次のベクトルと行列の演算を行え.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) $3 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

(福井大 2012) (m20122419)

0.686 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とし, t が転置を表すとき, 次の関係が成り立つことを示せ.

(1) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

(2) ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$

(福井大 2012) (m20122420)

0.687 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値の中で、最大の値を持つ固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2012) (m20122421)

0.688 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めよ.

(2) $\Phi_A(A) = 0$ (ケーリー・ハミルトンの定理) が成り立つことを示せ.

(3) 上の結果を利用して, A の逆行列を求めよ.

(福井大 2012) (m20122422)

0.689 次の行列 A について以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

(1) $a = 1, b = 2, c = 3$ のとき, A の行列式の値を求めよ.

(2) a, b, c が相異なる実数のとき, A が正則であることを示せ.

(福井大 2013) (m20132403)

0.690 次の問いに答えよ.

- (1) 行列 B と C と D があるとき, $(BC)^T = C^T B^T$ が成り立つとして, 次の関係が成り立つことを証明せよ. ここで, B^T は B の転置行列である.

$$(BCD)^T = D^T C^T B^T$$

- (2) A を二次正方行列とする. A を含む次の式を満たす A を求めよ.

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(福井大 2013) (m20132412)

0.691 次のベクトルと行列の演算を行え.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) 3 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(3) {}^t \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(福井大 2013) (m20132421)

0.692 次の行列の階数 (rank) を求めるとともに, 正則性を調べ, 正則なら逆行列を求めなさい.

$$(1) \begin{pmatrix} a & 2b \\ 2a & 3b \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(福井大 2013) (m20132423)

0.693 次の行列の固有値を求め, 最大の固有値に対する固有ベクトルを求めなさい.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(福井大 2013) (m20132424)

0.694 行列 $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2014) (m20142418)

0.695 以下の与える行列 A ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

- (1) 行列 A の固有値及び固有ベクトルを求めよ.
 (2) 行列 A の対角行列を $\Sigma = U^{-1}AU$ とする. 行列 A を対角化する行列 U を求めよ.
 (3) 行列 U を用いて対角化した行列 A の対角行列 Σ を求めよ.

(福井大 2014) (m20142427)

0.696 次のベクトルと行列の演算を行え.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} & (3) \quad & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は転置記号}) \\
 (2) \quad & 3 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} & (4) \quad & \begin{pmatrix} \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ -\sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(福井大 2015) (m20152420)

0.697 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) 行列 A の固有値を求めよ.
- (2) (1) で求めた最小の固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2015) (m20152422)

0.698 行列 A, B, C に関して, 行列式を計算しなさい. また, 逆行列を, それぞれ求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(福井大 2015) (m20152423)

0.699 (1) $A = \begin{pmatrix} a+b & a & a \\ a & a+c & a \\ a & a & a+d \end{pmatrix}$ に対して, $|A| = abcd \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)$ となることを示せ. ただし, $abcd \neq 0$ とする.

(2) 行列 $A_n = (a_{ij})$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, n$ は 3 以上の整数) を,

$$a_{ij} = a_0 + a_i \delta_{ij}, \quad a_i : \text{実数} (1 \leq i \leq n)$$

で定義するとき,

$$|A_n| = a_0 a_1 \cdots a_{n-1} a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} \right)$$

となることを示せ. ただし, $a_0 a_1 \cdots a_{n-1} a_n \neq 0$ である. また, δ_{ij} は, $i = j$ のときに 1, $i \neq j$ のときに 0 をとるものとする.

(福井大 2016) (m20162409)

0.700 次式に与えられる行列 A について, 以下の問いに答えよ. (4) 以外については計算の課程も示すこと.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) A の固有値を λ として, 固有方程式を “ $(1 - \lambda)$ の多項式 $= 0$ ” の形に表せ.
- (2) A の固有値を全て求めよ. 固有方程式 “ $(1 - \lambda)$ の多項式 $= 0$ ” の左辺をどのように因数分解したのかがわかるように解答すること.

- (3) A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, ($\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$) とする. 固有値 λ_n に対応する正規化 (規格化) された固有ベクトル $\mathbf{u}_n$ を以下の形で求めよ.

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ \square \\ \square \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ \square \\ \square \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$$

- (4) 以下の空欄を生めよ. ただし, (あ) と (い) には数値, (う) と (お) には語句, (え) には行列が入る. なお, $\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_m$ は $\mathbf{u}_n$ と $\mathbf{u}_m$ の内積, tP は P の転置行列を表す. 3 つの固有ベクトル $\mathbf{u}_n$ の長さは全て $\square$ (あ) であり, さらに $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_1 = \square$ (い) である. 従って, 行列 $P = (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3)$ は $\square$ (う) 行列である. よって, tP と $\square$ (え) の積は単位行列となる. なお, P が $\square$ (う) 行列であるのは A が $\square$ (お) 行列であることの必然的な結果である.
- (5) P^{-1} を求めよ.
- (6) $P^{-1}A^2P$ を求めよ.

(福井大 2016) (m20162419)

0.701 以下の行列 A に関して, 次の問いに答えなさい.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列式を計算しなさい.
- (2) 逆行列を求めなさい.
- (3) 固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(福井大 2016) (m20162420)

0.702 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 及びベクトル $\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ を用いて以下のような漸化式を定義する. このとき, 以下の設問に答えよ.

$$\mathbf{q}_{n+1} = A\mathbf{q}_n \quad (n \text{ は整数})$$

- (1) $\mathbf{q}_n$ を求めよ.
- (2) $\epsilon_n = \frac{{}^t\mathbf{q}_n A \mathbf{q}_n}{{}^t\mathbf{q}_n \mathbf{q}_n}$ 及び $\mathbf{p}_n = \frac{\mathbf{q}_n}{|\mathbf{q}_n|}$ とするとき, ϵ_n 及び $\mathbf{p}_n$ を求めよ. ここで, ${}^t\mathbf{q}_n$ は $\mathbf{q}_n$ を転置したベクトルである.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n$ 及び $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}_n$ を求めよ.

(福井大 2018) (m20182406)

0.703 (1) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

は 3 個の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を持つ. ただし, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ とする. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を求めよ.

- (2) (1) で求めた固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対応する固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ を求めよ.
- (3) (2) で求めた固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ をそれぞれ 1 列目, 2 列目, 3 列目に持つ行列を P とする. P の逆行列 P^{-1} を求めよ.

(福井大 2018) (m20182422)

0.704 次のベクトルと行列の演算を行え.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) 4 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad (t: \text{転置を表す})$$

$$(5) \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(福井大 2018) (m20182428)

0.705 x の関数 $p(x)$, $q(x)$ が a, b を定数として $\begin{pmatrix} p(x) \\ q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ix} & e^{-ix} \\ ie^{ix} & -ie^{-ix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ で表されるとする.

ただし, i は虚数単位, e は自然対数の底である. この時, 以下の問いに答えよ.

$$(1) \quad x=0 \text{ のとき上式を } \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix} = (A) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ と表す. 行列 } (A) \text{ を求めよ.}$$

$$(2) \quad \text{上の式を } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (B) \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix} \text{ と変形したときの行列 } (B) \text{ を求めよ.}$$

$$(3) \quad (1)(2) \text{ の結果を利用し } \begin{pmatrix} p(x) \\ q(x) \end{pmatrix} = (C) \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix} \text{ と表したとき, 行列 } (C) \text{ を求めよ.}$$

$$(4) \quad (C) \text{ の成分を三角関数で表せ.}$$

(福井大 2018) (m20182429)

0.706 次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(福井大 2018) (m20182430)

0.707 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(福井大 2018) (m20182432)

0.708 以下の行列の行列式を計算せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^3$$

(福井大 2020) (m20202406)

0.709 行列 $\mathbf{A}$, ベクトル $\mathbf{b}$ に関して以下の問いに答えよ.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (1) $\mathbf{A}$ の固有値 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 及び対応する固有ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ を求めよ. 固有値は $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ とし, 固有ベクトルは大きさを 1 にせよ.
- (2) $\mathbf{b}$ を $\mathbf{A}$ の固有ベクトルの線形結合で表せ.
- (3) $\mathbf{A}^n \mathbf{b}$ ($n = 1, 2, \dots$) を求めよ.

(福井大 2020) (m20202408)

- 0.710** (1) 以下のベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ の一次独立, 1 次従属を判定せよ. ただし, x は実数とする.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3+x \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 5+x \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- (2) n を 2 以上の整数, α を 0 でない実数とする. 次式で定義される n 次正方行列 $A = (a_{i,j})$ について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & i+j = n+1 \text{ のとき} \\ \alpha & i=j=n \text{ のとき} \\ 0 & \text{上記以外} \end{cases}$$

- (a) A の逆行列を求めよ.
- (b) A の行列式を計算せよ.
- (3) 次の行列の階数を求めよ. ただし, z は実数とする.

$$\begin{pmatrix} z & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & z \end{pmatrix}$$

(福井大 2020) (m20202415)

- 0.711** 以下の行列 A の逆行列を求めよ. 計算過程も明記すること.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(福井大 2020) (m20202419)

- 0.712** 以下の行列 B を考える. B の固有値の 1 つは 3 である. この固有値に対する固有ベクトルを 1 つ求めよ. ただし, 固有ベクトルを規格化する必要はない. 考え方と計算過程を明記すること.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(福井大 2020) (m20202420)

- 0.713** 次のベクトルと行列の演算を行え.

$$(1) \quad 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$$

$$(6) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

(福井大 2020) (m20202427)

0.714 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とし, t が転置を表すとき, ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$ が成り立つことを示せ.

(福井大 2020) (m20202428)

0.715 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値の中で, 最小の値を持つ固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2020) (m20202429)

0.716 $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めよ.

(2) $\Phi_A(A) = 0$ (ケーリー・ハミルトンの定理) が成り立つことを示せ.

(3) 上の結果を利用して, A^n を求めよ.

(福井大 2020) (m20202430)

0.717 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ を求めよ.

(福井大 2020) (m20202432)

0.718 以下に示す行列の行列式及び固有値を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(福井大 2021) (m20212406)

0.719 以下の行列を対角化せよ.

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(福井大 2021) (m20212407)

0.720 以下の行列 A , およびベクトル $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ を考える. a を実数とし, 以下に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (1) $A\mathbf{u}$ を計算することにより, $\mathbf{u}$ は a の値によらず A の固有ベクトルであることを示せ. また 固有ベクトル $\mathbf{u}$ に対する固有値を求めよ.
 (注) 固有方程式を使う必要はない.
- (2) ベクトル $\mathbf{v}$ が A の固有ベクトルとなるように, a の値を定めよ. また, そのときの固有値 (固有ベクトル $\mathbf{v}$ に対する固有値) を求めよ.
 (注) 固有方程式を使う必要はない.
- (3) $a = 0$ のとき, A の固有値を全て求めよ.

(福井大 2021) (m20212416)

0.721 次のベクトルと行列の演算を行え.

$$(1) \quad 2 \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 3 \\ -5 & 7 & -4 & 8 \\ 1 & -2 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & -7 & 5 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -8 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ -3 & -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad a \begin{pmatrix} a-b & -b \\ b & b-a \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} a-b & -a \\ a & b-a \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (4) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

(福井大 2022) (m20222405)

0.722 以下に示す行列の演算を行いなさい. ただし, 三角関数は数値に置き換えて算出すること. また, 式中の t は転置を意味する.

$$4 \begin{pmatrix} \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \\ \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \\ \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \end{pmatrix}^t$$

(福井大 2022) (m20222406)

0.723 3次元ベクトル $\mathbf{x}_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) に関する数列を以下のように定義する.

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_n, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値をすべて求めよ.
- (2) $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0$ を用いて, $\mathbf{x}_n$ を求めよ.

(福井大 2022) (m20222417)

0.724 以下の行列 $\mathbf{S}$ に関する問いに答えよ. ただし, θ は実数である.

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 $\mathbf{S}$ を対角化せよ.
- (2) n を自然数とし, $\mathbf{S}^n$ を求めよ.

(3) 行列 $\mathbf{S}$ 及び実数 x を用いた指数関数はそれぞれ以下の式で定義される.

$\exp(\mathbf{S})$ を計算せよ.

$$\exp(\mathbf{S}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{S}^n}{n!}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(福井大 2022)

(m20222418)

0.725 次のベクトルと行列の計算をなさい.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(3) 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(福井大 2023)

(m20232418)

0.726 次の行列の逆行列を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} a & 2b \\ 2a & 3b \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 3 & -6 & 10 \\ 3 & -5 & 11 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

(福井大 2023)

(m20232420)

0.727 次の行列の固有値と最大の固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(福井大 2023)

(m20232421)

0.728 右の行列について以下の問いに答えよ. $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ ただし, $x \neq n\pi$

(1) 実数の範囲で固有値の有無を確認しなさい.

(2) 複素数まで拡張して固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2023)

(m20232422)

0.729 以下に示す行列の行列式を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(福井大 2024)

(m20242406)

0.730 以下に示す行列の固有値を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

(福井大 2024)

(m20242407)

0.731 n を自然数とする. 以下に示す行列 A の n 乗を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(福井大 2024) (m20242408)

0.732 次のベクトルと行列の計算をなさい.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}^3$$

$$(4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(福井大 2024) (m20242424)

0.733 (1) 逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

(2) 行列式の値を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(福井大 2024) (m20242426)

0.734 次の行列の固有値と最大の固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

(福井大 2024) (m20242427)

0.735 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値および対応する固有ベクトルを求めよ. また, 直交行列を用いて A を対角化せよ.

(静岡大 2004) (m20042506)

0.736 (1) ベクトルの組 $a_1, a_2, \dots, a_n$ が 1 次独立であることの定義を述べよ.

(2) 次のベクトルの中から 1 次独立なベクトルの組を選び, 残りをそれらの 1 次結合で表せ.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(3) 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.

(静岡大 2005) (m20052503)

0.737 3×3 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ とおく. 次の問に答えよ.

(1) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2) 連立方程式
$$\begin{cases} -5x + 10y = 5 \\ 2x - 3y - \frac{1}{2}z = 5 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$
 を解け.

(静岡大 2006) (m20062506)

0.738 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする. 次の問に答えなさい.

(1) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(2) 行列 A の固有値を求めなさい.

(静岡大 2006) (m20062512)

0.739 次の行列は対角化できるか調べよ.
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(静岡大 2008) (m20082510)

0.740 行列 $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ の固有値とその固有値に対する固有空間を求めよ.

(静岡大 2009) (m20092502)

0.741 次の行列の逆行列を求めなさい.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(静岡大 2009) (m20092511)

0.742 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(2) A を直交行列で対角化せよ.

(3) n を自然数とすると, A^n を求めよ.

(静岡大 2010) (m20102504)

0.743 次の行列 A を対角化せよ. なお, A を対角化する正則行列 P も明記すること.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(静岡大 2011) (m20112504)

0.744 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値および対応する固有空間を求めよ. さらに, 直交行列を用いて A を対角化できるならば直交行列を求め対角化せよ. できないならばその理由を述べよ.

(静岡大 2012) (m20122506)

- 0.745** (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.
 (2) (1) の行列 A を直交行列を用いて対角化せよ. このとき, 用いた直交行列も明記せよ.
 (3) 2 次曲面の方程式 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4xy - 4yz = 1$ を標準形に変えよ.
 (静岡大 2013) (m20132502)

- 0.746** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, 以下の問いに答えなさい.
 (1) ランク (階数) を求めなさい.
 (2) 固有値をすべて求めなさい. また, そのうち 0 でない固有値に対応する固有ベクトルを求めなさい.
 (静岡大 2013) (m20132510)

0.747 行列 X_2, X_3, X_4 を各々

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) X_2, X_3, X_4 の行列式の値を求めなさい.
 (2) X_n (n : 自然数) を対角成分が 0 で, ほかの成分はすべて 1 である n 行 n 列の行列とすると, X_5 の行列式の値は 4 になるという. このとき, (1) の結果も利用して X_n の行列式の値を推測し, それが正しいことを示しなさい.

(静岡大 2013) (m20132511)

0.748 a を実数として $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が $A^2 - A + E = 0$ を満たすとする.

- (1) a の値を求めよ.
 (2) A^{60} を求めよ.

(静岡大 2015) (m20152503)

- 0.749** (1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の階数を求めなさい.
 (2) x, y, z を実数とすると, $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$ ならば $x = y = z$ が成り立つことを示しなさい.
 (3) 行列 $\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}$ の階数を求めなさい. ただし, x, y, z は実数とする.

(静岡大 2016) (m20162503)

0.750 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して $P^{-1}AP = D$ が成立するような正則行列 P および対角行列 D を求めよ.

(岐阜大 2003) (m20032607)

0.751 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ による $R^2 \rightarrow R^2$ の線形写像 $A: \mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x}$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) 像 $\text{Im}A$ を示しなさい.
- (2) 核 $\text{Ker}A$ を示しなさい.
- (3) $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ の解 $\mathbf{x}$ をすべて求めよ. 解が存在しない場合には, その理由を述べよ.
- (4) $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の解 $\mathbf{x}$ をすべて求めよ. 解が存在しない場合には, その理由を述べよ.

(岐阜大 2005) (m20052612)

0.752 方程式 $x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 1$ によって表される R^2 内の図形を次のやり方にしたがって求めよ.

- (1) 方程式 $x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = (x_1, x_2)A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ となる対称行列 A を求めよ.
- (2) A のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.
- (3) 2次の直交行列 P を使って, PAP^T が対角行列 (Λ とする) となるようにしたい. ただし, T は, 転置行列を表す. 直交行列 P とこの対角行列 Λ を求めよ.
- (4) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ によって座標変換を行ない, (y_1, y_2) 座標で先の方程式で表される図形の概形を描きなさい.
- (5) (4) の図形の中に, (x_1, x_2) 座標の座標軸を書き入れなさい.

(岐阜大 2005) (m20052613)

0.753 行列 A を対角化せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(岐阜大 2005) (m20052615)

0.754 3行3列の行列 $A = \begin{pmatrix} x-a & 2x & 2x \\ 2a & a-x & 2a \\ 0 & 0 & -a-x \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

- (1) この行列の行列式 $|A|$ を求めよ.
- (2) この行列式の値がゼロとなる, すなわち $|A| = 0$ を満たす, x を求めよ.

(岐阜大 2006) (m20062601)

0.755 次の3つの行列について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列式 $\det A$, $\det B$, $\det C$ を求めよ.
- (2) 行列 A のすべての固有値, および, 各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.
- (3) 行列 C の階数 ($\text{rank } C$) を求めよ.

(岐阜大 2006) (m20062613)

0.756 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換によって, 直線 $y = mx$ 上の点 P が, 同じ直線 $y = mx$ 上の点 Q に変換されるとき, m の値を求めよ.

(岐阜大 2006) (m20062619)

0.757 n 次正方行列 A が $A^3 = O$ をみたしているとする. ただし, O は成分がすべて 0 の行列である.

- (1) $|A| = 0$ であることを示せ. ただし, $|A|$ は A の行列式である.
- (2) $n = 2$ とする. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくとき, $A^2 - (a + d)A = O$ であることを示せ.
- (3) $n = 2$ ならば $A^2 = O$ であることを示せ.

(岐阜大 2007) (m20072603)

0.758 次の行列 A に対して以下の問いに答えよ. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

- (1) A の二つの固有値とそれぞれに対応する固有ベクトルを求めよ.
- (2) A を対角化する行列 P , つまり, $P^{-1}AP$ が対角行列になるような P を求めよ.
- (3) 次の連立微分方程式を解け. $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad x_1(0) = 1, x_2(0) = 2$

(岐阜大 2007) (m20072612)

0.759 次の行列の固有値および固有ベクトルを求めよ. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(岐阜大 2007) (m20072622)

0.760 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(岐阜大 2007) (m20072625)

0.761 次の 2 行 2 列の行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) この行列 A の固有値 λ を求めよ.
- (2) 上記 (1) の固有値 λ に対応する固有ベクトル $\mathbf{X}$ を求めよ.

(岐阜大 2008) (m20082601)

0.762 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ がある. 以下の問いに答えよ.

- (1) この行列の 2 つの固有値 λ_1 と λ_2 を求めよ.
- (2) A^{100} を求めよ.

(岐阜大 2008) (m20082604)

0.763 次の3次行列 A について (1)~(3) に答えなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (1) A の固有値を求めなさい.
- (2) A の各固有値に対応する固有ベクトルを求めなさい.
- (3) A を対角化する正則行列 P と $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(岐阜大 2008) (m20082607)

0.764 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ がある.

- (1) $|A|$ の値を求めよ.
- (2) A の逆行列を求めよ.
- (3) A の固有値を求めよ.
- (4) A の固有ベクトルを求めよ.

(岐阜大 2008) (m20082610)

0.765 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

(岐阜大 2008) (m20082617)

0.766 2行2列の行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ に対し, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ となるような2行2列の正則行列 P と a, b の組を1つ求めよ.

(岐阜大 2009) (m20092602)

0.767 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について

- (1) $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = 0$ を示せ. ただし, E は単位行列とする.
- (2) $A^2 = A$ となる A をすべて求めよ.
- (3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ のとき, A^n を求めよ.

(岐阜大 2009) (m20092611)

0.768 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ がある. 以下の問いに答えよ.

- (1) 行列式 $\det A$ を求めよ.
- (2) 逆行列 A^{-1} を求めよ.
- (3) 連立方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を解け.

- 0.769 (1) 次の行列 A の階数 ($\text{rank} A$) を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (2) 次の連立方程式が解をもつような定数 a の値を求め, そのときの一般解を示せ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & a & 1 \\ a & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ a \end{pmatrix}$$

(岐阜大 2010) (m20102602)

- 0.770 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

- (2) 行列 $B = A^2 - 4A - 4E$ とするとき, 行列の積 BA が零行列になることを示せ. ただし, E は 3 次の単位行列とする.

- (3) xyz 空間の点 $P = (x, y, z)$ から, XYZ 空間の点 $Q = (X, Y, Z)$ への一次変換 T を行列 A を用いて次のように定める.

$$T : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

xyz 空間上の任意の点 P は, 変換 T によって XYZ 空間内の同一の平面 H 上の点 Q にうつる. その平面 H の方程式を求めよ.

(岐阜大 2010) (m20102603)

- 0.771 R^3 の 3 つのベクトル

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

に対し, 以下の問に答えよ.

- (1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ を列ベクトルとする行列を係数行列に持つ連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

が解を持つように定数 α の値を定めよ. また, そのときの一般解を求めよ.

- (2) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が線形従属か線形独立かを調べよ. 線形従属の時には $\mathbf{a}_3$ を $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ の線形結合で表せ.
- (3) $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ の線形結合 $\mathbf{b} = x\mathbf{a}_1 + y\mathbf{a}_2$ が $\mathbf{a}_1$ に直交する単位ベクトルとなるとき, 実数 x と y の値を求めよ.

(岐阜大 2011) (m20112603)

0.772 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ およびベクトル $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ に対し、以下の問に答えよ.

- (1) A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.
- (2) $\mathbf{b}$ を A の固有ベクトルの線形結合で表せ.
- (3) $A^5 \mathbf{b}$ を求めよ.

(岐阜大 2011) (m20112604)

0.773 次の行列 A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(岐阜大 2012) (m20122604)

0.774 (1) 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような行列 P を 1 つ求めよ.
- (3) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 1,$

$$a_{n+3} = a_{n+2} + 4a_{n+1} - 4a_n \quad (n \geq 1)$$

で定義する. このとき

$$\begin{pmatrix} a_{n+3} \\ a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

を満たす 3 次正方行列 B を求めよ.

- (4) 一般項 a_n を求めよ.

(岐阜大 2014) (m20142602)

0.775 α を実数とする. 正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & \alpha \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して以下の問に答えよ.

- (1) A の行列式 $|A|$ の値を求めよ.
- (2) 行列 A が固有値 1 をもつような α の値を求めよ.
- (3) A が正則にならないような α の値を求めよ. また, そのときの A の階数 (ランク) を求めよ.

(岐阜大 2015) (m20152602)

0.776 xyz 空間 ($\mathbb{R}^3$) の線形変換 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を表す行列を $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とする. すなわち, A は $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ を満たす行列である. 次の問に答えよ.

- (1) 線形変換 f がベクトルの大きさを変えないとき、行列 A の満たすべき条件を求めよ。
 (2) 線形変換 f が x 軸上の点を動かさないとき、行列 A の満たすべき条件を求めよ。
 (3) (1) と (2) の条件を満たし、平面 $x + y + z = 0$ 上の点を平面 $5x - y + 7z = 0$ 上に移す線形変換 f を表す行列 A を求めよ

(岐阜大 2016) (m20162603)

- 0.777** (1) 次の行列 H が正則かどうか判定せよ。

$$H = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (2) A, B, C 及び X, Y, Z, W を n 次行列とし、 A, B を正則とする。以下の問いに答えよ。

- (a) $2n$ 次行列

$$P = \begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$$

の積 PQ を求めよ。ただし O は n 次零行列である。

- (b) P^{-1} を A, B, C を用いて表せ。

(岐阜大 2018) (m20182601)

- 0.778** A を対角化可能な n 次行列、 $\alpha \neq 0$ を実数とする。このとき $(n+1)$ 次行列

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

も対角化可能であることを示せ。なお、上式の右辺において右上の 0 と左下の 0 はそれぞれ行零ベクトル、列零ベクトルを表す。

(岐阜大 2020) (m20202604)

- 0.779** 成分が $0, 1, -1$ のどれかからなる 2 次行列を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とする。

[ア] N の行列式を求めよ。

[イ] N の固有値を求めよ。

[ウ] ある自然数 k に対して、 $A^k = O$ となるような行列 A を冪零（べきれい）行列という。

N が冪零行列であることを示せ。

- (2) 成分が $0, 1, -1$ のどれかからなる 2 次行列で、以下の [い]～[り] であるものを、それぞれ一つずつ挙げよ。ただし、同じものを二度挙げてはならない。

[い] 零行列 [ろ] 単位行列 [は] 直交行列 [に] 対称行列 [ほ] 対角行列 [へ] 上三角行列

[と] 下三角行列 [ち] 固有値がただ一つの行列 [り] 固有値が純虚数である行列

- (3) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。 M が対角化できないことを示せ。

- (4) $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。任意のベクトル $\vec{x} \neq \vec{0}$ に対して、

$${}^t\vec{x}A\vec{x} = (\vec{x}, A\vec{x}) > 0$$

を満たすような行列 A を正定値行列という。 L が正定値行列であることを示せ。

0.780 $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とし, E は 2 次の単位行列とする. $ACB = E$ となる 2 次正方行列 A, B がないことを示せ.

(岐阜大 2023) (m20232602)

0.781 次の両方の条件をみたす 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ をすべて求めよ.

- ・ 固有値は 2 のみ
- ・ 固有値 2 についての固有ベクトルは $c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ただし $c \neq 0$) のみ

(岐阜大 2023) (m20232603)

0.782 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ a+1 & 2 & 0 \\ a-2 & 1 & 2a \end{pmatrix}$ (a は実数) とする. 以下の問に答えよ.

- (1) 行列 A の固有値に 0 があるとき, 実数 a を求めよ.
- (2) 行列 A の固有値に 1 があるとき, 実数 a を求めよ.
- (3) 行列 A が (2) の条件を満たすときの A の固有値をすべて求めよ.
- (4) 微分可能な関数 $f(t), g(t), h(t)$ とその導関数 $f'(t), g'(t), h'(t)$ の満たす式が下のようにならされている. 関数 $f(t), g(t), h(t)$ を求めよ. ただし, a は (2) で求めた実数とする.

$$\begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \\ h'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f(0) \\ g(0) \\ h(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(岐阜大 2023) (m20232606)

0.783 n を自然数とする. 次のように数列 $\{a_n\}$ とベクトル $\mathbf{v}_n$ を定める.

$$a_{n+3} = -2a_{n+2} + 5a_{n+1} + 6a_n, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2,$$

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

次の問いに答えなさい.

- (1) $\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n$ ($n \geq 1$) を満たす 3 次行列 A を求めなさい.
- (2) A の固有値を求めなさい.
- (3) a_4, a_5, a_6 を求めなさい.
- (4) $\mathbf{v}_n = A^{n-1}\mathbf{v}_1$ が成り立つことより, A の固有値を α, β, γ ($\alpha \leq \beta \leq \gamma$) とするとき,

$$a_n = s\alpha^{n-3} + t\beta^{n-3} + u\gamma^{n-3} \quad (n \geq 4)$$

を満たす実数 s, t, u が存在することを示し, s, t, u と a_n の値を求めなさい.

(岐阜大 2024) (m20242601)

0.784 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$ (a, b 実数) とする.

行列 A の固有方程式が重根をもつ場合を考える. 以下の問に答えよ.

- (1) A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.
- (2) A が対角化可能となる a, b の関係式を求めよ.
- (3) n を自然数とする. A が対角化可能となるとき, A^n を求めよ.

(岐阜大 2024) (m20242604)

0.785 行列 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の (1) P^2 (2) P^{-1} を求めよ.

(豊橋技科大 1997) (m19972707)

0.786 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ とするとき,

A の転置行列 tA と A^2 および逆行列 A^{-1} を求めよ.

(豊橋技科大 1998) (m19982711)

0.787 平面上で直線 $y = 3x + 2$ 上の点は, 変換行列が $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ である一次変換により, どのような図形上に写像されるか答えよ.

(豊橋技科大 1998) (m19982712)

0.788 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする. 次の関係を満たす行列 X, Y をそれぞれ求めよ.
 $AX = YA = B$

(豊橋技科大 1999) (m19992707)

0.789 式 (イ), (ロ), (ハ) に関して各問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} \quad (\text{イ})$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{ロ})$$

$$z = 3x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 4\sqrt{3}x + 4y \quad (\text{ハ})$$

- (1) 式 (イ) の A の行列式を求めよ.
- (2) 式 (ロ) の固有値 λ を求めよ.
- (3) 式 (ロ) の固有ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めよ.
- (4) x, y, z で表される 2 次曲面 (ハ) を x, y, z に関して座標変換し, 標準形で表せ. 標準形とは, 楕円面, 一葉双曲面, 二葉双曲面, 楕円放物面, 二次すい面を指す.

(豊橋技科大 1999) (m19992708)

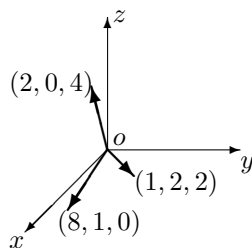
- 0.790** 次の対称行列 A の固有値, 固有ベクトルを求めよ. また, A を直交変換によって対角行列になおす直交行列を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(豊橋技科大 2000) (m20002708)

- 0.791** 3本のベクトル:

$$a = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

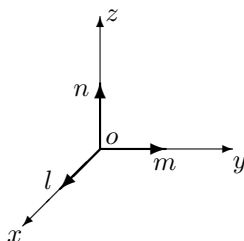


を3辺とする平行6面体を, これらを列ベクトルとする行列 A

$$A = (a, b, c) = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

で表すとする. このとき, 以下の問に答えよ.

- (1) この平行6面体と体積の等しい立方体を, 下図に示す基底ベクトル (l, m, n) を用いて, 上と同様に行列 $B = (l, m, n)$ で表せ.



- (2) 平行6面体 A を, 変数 $PA = B$ により体積の等しい立方体 B に変換する行列 P を求めよ.

(豊橋技科大 2001) (m20012709)

- 0.792** 列ベクトル $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が平面上の点の座標 (x, y) に対応するとき, 次の行列 A を用いて Ax で表される1次変換について, 以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) 平面上の点 $(1, 2)$ はどんな点に移るか.
 (2) 平面上の直線 $x + 4y - 1 = 0$ はどのような直線に移るか.

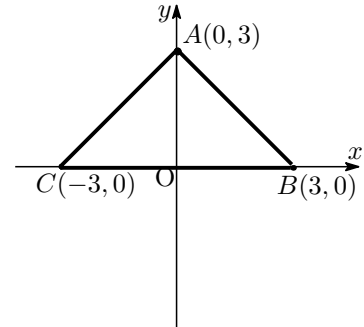
(豊橋技科大 2003) (m20032708)

0.793 行列 F によって点 (x, y) を点 (x', y') に移す次の 1 次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

がある. この 1 次変換が, 点 $(2, -1)$ を点 $(4, 4)$ に, 点 $(-1, 3)$ を点 $(-2, -7)$ にそれぞれ移すとき, 以下の各問いに答えよ.

- (1) 行列 F を求めよ.
- (2) 行列 F の固有値および固有ベクトルを求めよ.
- (3) 下図の点 A, B, C に対して, 行列 F による 1 次変換を n 回行って移る点をそれぞれ A_n, B_n, C_n とする.
 $n = 1$ および $n = 2$ のとき, 三角形 $A_1 B_1 C_1$ と
 三角形 $A_2 B_2 C_2$ を各頂点の座標を入れて図示せよ.



- (4) 三角形 $A_n B_n C_n$ の面積を S_n とするとき, S_n を n を用いて表せ.

(豊橋技科大 2004) (m20042707)

0.794 列ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $(\mathbf{a} \ \mathbf{b})X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ を求めよ.
- (2) ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が 1 次独立であることを示せ.
- (3) 列ベクトル $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の 1 次結合で表せ.
- (4) 実数を成分とする 2 次元列ベクトル全体のなす集合 $\mathbf{R}^2$ の正規直交基底 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ を, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ から作れ.

(豊橋技科大 2006) (m20062704)

0.795 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda_1 = -1$ と $\lambda_2 = 5$ である. 以下の問に答えよ.

- (1) A の固有値が $\lambda_1 = -1$ と $\lambda_2 = 5$ であることを示せ.
- (2) 固有値 λ_1 に対する固有空間 W_1 の基底と次元を求めよ.

(豊橋技科大 2006) (m20062705)

0.796 次の行列について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & a & a \\ 0 & a & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列式 $|A| = 6$ のとき, a の値を求めよ.
- (2) $a = 1$ のとき, A の転置行列 ${}^t A$ と B の積 ${}^t A \cdot B$ を求めよ.
- (3) B の逆行列 B^{-1} を求めよ.
- (4) B の固有値をすべて求めよ.
- (5) (4) で求めた固有値のうち最大のものに対する固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルは単位ベクトルとする.

0.797 行列 $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -18 & -7 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ、ただし、 $\lambda_1 > \lambda_2$ とせよ.
- (2) 各固有値 λ_1, λ_2 に対する固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ とするとき、 a と b を求めよ.
- (3) (2) で求めた固有ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ を用いて、行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ を定義する. このとき、 $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる行列 Q を求めよ.
- (4) 行列 QAP を求めよ.
- (5) 自然数 n に対して、 QA^nP を求めよ.

0.798 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & -b \end{pmatrix}$ で与えられる 1 次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ により、曲線 $y = x^2$ の上の点 (x, y) は、曲線 $x^2 + 2xy + y^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$ の上の点 (x', y') に移される. $a > 0$ であるとき、以下の問いに答えよ.

- (1) x, y を用いて x' および y' を表せ.
- (2) a を用いて b を表せ.
- (3) 任意のベクトル $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は、1 次変換 $\mathbf{q} = A\mathbf{p}$ によりベクトル $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ に移される. $|\mathbf{q}| = |\mathbf{p}|$ であるとき、 a の値を求めよ.
- (4) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる最小の正の整数 n を求めよ.

0.799 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ で与えられるとき、以下の問いに答えよ.

- (1) A^{-1} を求めよ.
- (2) ベクトル $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ として、 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解 x_1 と x_2 を求めよ.
- (3) ベクトル $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{pmatrix}$ として、 $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ の解が $x_1 = 0, x_2 = 0$ 以外の解を持つように、定数 k の値を求めよ.
- (4) 行列 $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ として、 ADF を求めよ.

0.800 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 逆行列 A^{-1} を求めよ.
- (2) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を満足するベクトル $\mathbf{x}$ の大きさ (長さ) $|\mathbf{x}|$ を求めよ.

(3) A の固有値 λ_1 と λ_2 を求めよ. ただし, $\lambda_1 \leq \lambda_2$ とする.

(4) n を正の整数 ($n = 1, 2, 3, \dots$) とするとき, A^n を求めよ.

(豊橋技科大 2013) (m20132705)

0.801 行列を $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ とするとき, 次の式を計算せよ.

ア. AC イ. $(3C)A - C(2B)$

(豊橋技科大 2016) (m20162703)

0.802 次の行列 A, B に関して, 次の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ b & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) 逆行列 A^{-1} を求めよ.
- (2) 行列 B が対称行列であるとき, 定数 a, b を求めよ.
- (3) (2) のとき, 行列 B の固有値をすべて求めよ.

(豊橋技科大 2017) (m20172702)

0.803 (1) 行列 $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ -4 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ の行列式を求めよ.

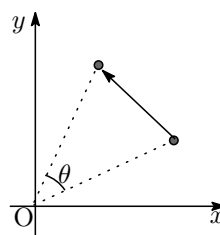
(2) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(3) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を全て求めよ. また, 最も小さい固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(豊橋技科大 2018) (m20182703)

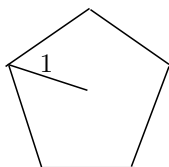
0.804 xy 平面上において, 原点 O を中心に反時計回りに θ の回転を行う一次変換は下図の行列 A_θ で表される. この行列を利用して三角関数の計算を行うとともに, 図形の面積の値を求めたい. 以下の問いに答えよ.

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$



- (1) A_θ^2, A_θ^3 を計算し, $\cos \theta, \sin \theta$ で表せ. また, $A_{n\theta} = (A_\theta)^n$ であることを利用して $\cos 2\theta, \sin 2\theta, \cos 3\theta, \sin 3\theta$ を $\cos \theta, \sin \theta$ で表せ.

- (2) $\sin \frac{2\pi}{5}$ の値を α とおく．半径 1 の円に内接する正五角形の面積を α を用いて表せ．



- (3) (1) の結果を用いて $\sin \frac{\pi}{10}$, $\cos \frac{\pi}{10}$ の値をそれぞれ求めよ．
 (4) 半径 1 の円に内接する正五角形の面積の値を求めよ．

(豊橋技科大 2019) (m20192703)

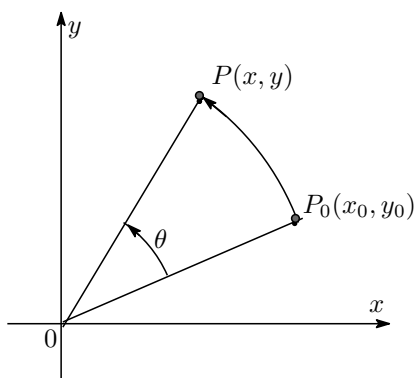
0.805 次の行列 A , B に関して，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

- (1) A の行列式の値を求めよ．
 (2) A の逆行列を求めよ．
 (3) BA を求めよ．
 (4) $ABABA^2$ を求めよ．

(豊橋技科大 2020) (m20202701)

0.806 図のように， xy 平面上の点 $P_0(x_0, y_0)$ を原点 O のまわりに θ だけ回転した点 $P(x, y)$ に移す座標変換は次の線形変換により表される．また，このときの変換行列を $A(\theta)$ と定義する．以下の設問に答えよ．



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- (1) xy 平面上の点を x 軸方向に a 倍， y 軸方向に b 倍する変換行列 B を a と b を用いて表せ．
 (2) xy 平面上の点を原点 O のまわりに $(-\theta)$ 回転し，その後 x 軸方向に a 倍， y 軸方向に b 倍し，最後に原点 O のまわりに θ 回転する線形変換を考える．このときの変換行列 C を a , b , $\cos \theta$ および $\sin \theta$ を用いて表せ．
 (3) 次に示す変換行列 D の固有値を求め，それぞれの固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルをすべて求めよ．

$$D = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

- (4) 変換行列 C が変換行列 D に等しいとき, a, b および θ の値を求めよ. ただし, θ は $0 \leq \theta \leq \pi/2$ の範囲にあるとする.

(豊橋技科大 2021) (m20212701)

0.807 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) ベクトル v は行列 A の固有ベクトルであることを示せ. また, v に対応する A の固有値を求めよ.
- (2) 3次元空間内のある平面 α を考え, その上の任意の点 P を (x, y, z) とする. この α がベクトル v に垂直で, かつ3次元空間の原点を通るとき, この平面 α を表す式を, x, y, z を用いて求めよ.
- (3) ベクトル $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して, 線形変換 f を $f(x) = Ax$ で与える. このとき, (2) で求めた平面 α 上の任意の点 Q を f によって移動した点 Q' も平面 α 上の点となることを示せ.

(豊橋技科大 2022) (m20222701)

0.808 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$) を求めよ.
- (2) 任意の自然数 n に対して, $A^{n+1} = 3A^n - 2A^{n-1}$ が成り立つことを示せ. ただし, $A^0 = E$ とする.
- (3) 実数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$ を

$$A^{n+1} - \lambda_1 A^n = a_n A + b_n E, \quad A^{n+1} - \lambda_2 A^n = c_n A + d_n E \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める. ただし, λ_1, λ_2 を (1) で求めた A の固有値とする. このとき, $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ.

- (4) A^n を求めよ. ただし, n は自然数とする.

(豊橋技科大 2023) (m20232701)

0.809 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 行列式 $|A|$ の値を求めよ.
- (2) 行列 A の逆行列を求めよ.
- (3) 等式 $XA = |A|B$ を満たす行列 X を求めよ.

(豊橋技科大 2025) (m20252701)

0.810 未知関数 $x(t), y(t)$ に関する次の連立微分方程式 (E) を考える.

$$(E) \quad \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ.
- (2) 連立微分方程式 (E) を解け.

(名古屋大 1999) (m19992803)

0.811 3次元空間内の原点を O , 点 A の位置ベクトルを $a = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ で表す.

点 A を通り, 方向ベクトルが $\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$ ($\neq 0$) である直線 l が与えられている.

- (1) 直線 l を表す方程式を書け.
- (2) 空間内に位置ベクトル $p = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ である点 P が任意に与えられたとき, 点 P に最も

近い直線 l 上の点を Q とする. 点 Q の位置ベクトル $q = \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ を, $q = Lp + b$ の形で表せ.

ただし, L, b は直線 l だけで定まり, p, q には無関係な行列およびベクトルをそれぞれ表す.

- (3) 行列 L の階数を求めよ.
- (4) 行列 L のすべての固有値と固有ベクトルを求めよ.

(名古屋大 2002) (m20022802)

0.812 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

- (1) A を適当な正則行列 P によって対角化せよ.
- (2) A^n を求めよ (ただし, n は正整数とする).
- (3) A によって1次変換 $f: \begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 2x + 4y \end{cases}$ を定める.
 f は任意の直線を直線に, 平行な直線を平行な直線に移すことを証明せよ.
- (4) 頂点が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である正方形の写像 f による像を Z とする. Z の面積を求めよ.

(名古屋大 2003) (m20032802)

0.813 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

- (1) A の逆行列を求めよ.
- (2) A の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルは正規化したもの (大きさが1のもの) を示せ.
- (3) A を対称行列と交代行列の和で表せ. なお, 行列 X の転置行列を X^t としたとき, $X^t = X$ を満たすものを対称行列, $X^t = -X$ を満たすものを交代行列という.

(名古屋大 2004) (m20042803)

- 0.814** 赤, 黄, 青のランプがあり, 各時刻において, いずれか一つのランプが点灯する. 時刻 t に, 赤のランプが点灯しているとき, 時刻 $t+1$ には, 赤が 0.75, 黄が 0.25 の確率で点灯する. 時刻 t に, 黄のランプが点灯しているとき, 時刻 $t+1$ には, 黄が 0.5, 赤が 0.25, 青が 0.25 の確率で点灯する. 時刻 t に, 青のランプが点灯しているとき, 時刻 $t+1$ には, 青が 0.75, 黄が 0.25 の確率で点灯する. 時刻 t に赤, 黄, 青のランプが点灯している確率を, それぞれ $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$ で表し, 時刻 $t+1$ に赤, 黄, 青のランプが点灯している確率を, それぞれ $X_1(t+1)$, $X_2(t+1)$, $X_3(t+1)$ で表す. 以下の問いに答えよ.

$$(1) \begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \text{ と表したときの行列 } A \text{ を示せ.}$$

(2) 行列 A の行列式を求めよ.

(3) 行列 A の逆行列を求めよ.

(4) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルは第 3 成分が 1 となるようにして示せ.

(名古屋大 2007) (m20072801)

- 0.815** 水 1ℓ を 2 つの瓶 A, B に適当に分け, 瓶 A , 瓶 B に入っている水の量をそれぞれ x_0, y_0 とする.

「瓶 A 中の水の 1 割と, 瓶 B 中の水の 2 割を, それぞれ小瓶 C, D へ抜き取り, 小瓶 C の水を瓶 B に, 小瓶 D の水を瓶 A へ入れる」という手続きを n 回繰り返した後, 瓶 A , 瓶 B に入っている水の量をそれぞれ x_n, y_n とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) x_n, y_n を次のように行列を用いた漸化式で表すとき, 行列 T を求めよ.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

(2) 行列 T の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(3) x_n, y_n を, x_0, y_0 および n を用いて表せ.

(4) $n \rightarrow \infty$ としたときの, x_n/y_n の値を求めよ.

(名古屋大 2008) (m20082801)

- 0.816** 以下の問いに答えよ.

(1) 次の行列 A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) A^5 を求めよ.

(名古屋大 2011) (m20112802)

- 0.817** 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に関して, 以下の設問に答えよ.

(1) 行列 A が 2 個の固有値を持つような a を全て求めよ. またそのときの固有値を求めよ.

(2) 行列 A が 3 個の固有値を持つような a の場合について,

(a) 全ての固有値と固有ベクトルを a を用いて記せ.

- (b) 行列 A は、ある正則行列 P によって $D = P^{-1}AP$ と対角化可能である。 P を一つ示し、その P に対応する、 P^{-1} , D をそれぞれ求めよ。

(名古屋大 2016) (m20162801)

- 0.818** (1) 次の行列 A の固有多項式 $|xE - A|$ を計算して、 A の固有値を求めよ。但し、 E は単位行列を表す。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (2) 上で得られた固有値の固有ベクトルを求めよ。

(名古屋工業大 1997) (m19972903)

- 0.819** 次の 2×2 の行列 A について以下の問に答えよ。本問題において、ベクトルは 2 次元の縦ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を意味する。

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- (1) A の固有値とそれぞれの固有値に対する一つの固有ベクトルを求めよ。
 (2) (1) で求めた固有値と固有ベクトルを用いて行列 E と B を適当に定め、行列 A を

$$A = EBE^{-1}$$

の形で表せ。ここで、 E^{-1} は E の逆行列で B は $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ のような形である。

- (3) (2) で定めた E と B を用いて、 A^n はどのように表すことができるか。ここで、 A^n は n 個の A を掛け合わせたものである。

(ヒント) まず、 $A = EBE^{-1}$ の表現を用いて A^2 がどのようなになるかを調べよ。

- (4) ベクトル全体の集合を V と書く。 V の任意の二つの要素 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, に対して、

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

とする。ベクトルの列 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots$ が一つのベクトル $\mathbf{x}$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) = 0$$

を満たすとき、この列は $\mathbf{x}$ に収束すると言う。

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ を一つのベクトルとし、行列 A を用いて、

$\mathbf{a}, A\mathbf{a}, A^2\mathbf{a}, A^3\mathbf{a}, \dots$ なる列をつつくととき、この列が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に収束ことを示せ。(3) で求めた A^n の表現を用いよ。

(名古屋工業大 1997) (m19972904)

- 0.820** 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して、以下の各問に答えよ。ただし、 $a \geq 0$ である。

- (1) A の二つの固有値 λ_1, λ_2 を求めよ。
 (2) λ_1, λ_2 にそれぞれ対応する固有ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ のどちらにも直交するベクトルは 0 ベクトルのみであることを示せ。

- (3) 上の問(2)における固有ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ が互いに直交するときの a の値を求めよ.

(名古屋工業大 1998) (m19982907)

0.821 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

- (2) 行列 $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ.

- (3) 二つの関数 $x(t), y(t)$ が次の微分方程式を満たすとする.

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

この時, $P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$ とおくと $\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$ はどんな微分方程式を満たすか.

- (4) (3) の $X(t), Y(t)$ の微分方程式を解き $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ を求めよ.

(名古屋工業大 1998) (m19982908)

0.822 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して次を求めよ.

- (1) $|A|$ および A^{-1}

- (2) A の固有値

- (3) 上の (2) で求めた各固有値に対する固有ベクトル

(名古屋工業大 1999) (m19992906)

0.823 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{9}{8} & 1 \end{pmatrix}$$

について以下の問に答えよ.

- (1) A の二つの固有値 λ_1, λ_2 と, それぞれの固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ を求めよ.

- (2) 一つのベクトル $\mathbf{x}$ は, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ を用いて

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{p}_1 + \beta \mathbf{p}_2$$

と書ける. このことを用いると, $A^n \mathbf{x}$ は, $\lambda_1, \lambda_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ を用いてどのように表すことができるか. α, β は, 実数である.

- (3) 一つのベクトル $\mathbf{x}$ に対して,

$$A\mathbf{x}, A^2\mathbf{x}, \dots, A^n\mathbf{x}, \dots$$

なるベクトルの列は, 二次元平面上の点列を表すが, この点列の挙動は, $\mathbf{x}$ の取り方によって異なるものになる. このことを, (1) と (2) で求めたことを用いて論じよ.

(名古屋工業大 1999) (m19992907)

0.824 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ. 更に, 行列 tTAT が対角行列になるような直交行列 T を求めよ.

(名古屋工業大 2000) (m20002905)

0.825 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ について、次の問に答えよ.

- (1) A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.
- (2) $A = PBP^{-1}$ となるように行列 P, B を定めよ. ここで, 行列 B はある実数 a, b について $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ の形となるように定めよ.
- (3) A^n を求めよ.

(名古屋工業大 2000) (m20002906)

0.826 次の行列 A が対角化可能である必要十分条件は $a \neq b$ であることを示し, 対角化可能な場合に $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2001) (m20012906)

0.827 次の行列 A について, 以下の問いに答えよ. ただし, a は実数とする.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) A の階数 (rank) を求めよ.
- (2) $\vec{x}$ を列ベクトルとすると, $A\vec{x} = \vec{0}$ となる $\vec{x}$ ($\vec{x} \neq \vec{0}$) を求めよ.

(名古屋工業大 2001) (m20012907)

0.828 4 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

について次の問い (1),(2),(3) に答えよ.

- (1) A の行列式を求めよ.
- (2) A の逆行列を求めよ.
- (3) 次の列ベクトルを行列 A の列で与えられる 4 つの列ベクトルの 1 次結合で表せ.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2004) (m20042901)

0.829 実数 a, b, c, d, e, f を用いて表される次の 4 次正方行列を考える.

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) この行列の行列式を求めよ.
 (2) $be = af + cd$ の時, この行列式の値を可能な限り簡単にせよ.

(名古屋工業大 2005) (m20052902)

0.830 (1) $\mathbb{R}^2$ の原点 O を中心とする角 $\frac{\pi}{4}$ の回転移動 F_r を標準基底 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関して行列で表せ.

(2) 標準基底に関して行列 $A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$ と表される線形写像 $F_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ がある. この線形写像 F_t に回転移動 F_r を合成してできる写像を F と表したとき, 円 $C : x^2 + y^2 = 2$ の F による像 $F(C)$ を与える方程式を求めよ.

(名古屋工業大 2006) (m20062902)

0.831 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ.

- (1) 直接計算で $A^3 = A + A^2 - I$ を確かめよ. ここで, I は 3 次単位行列である.
 (2) (1) の結果に基づき $n \geq 4$ に対して, 帰納法で $A^n = A^{n-2} + A^2 - I$ を証明せよ.
 (3) (2) の結果を用いて A^{50} を求めよ.

(名古屋工業大 2006) (m20062907)

0.832 次の行列 A は対角化可能かどうか判定し, 対角化可能なら $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2007) (m20072904)

0.833 3 次の正方行列 A を $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

- (1) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 $P = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ で各列ベクトル $\mathbf{p}_i$ の長さが 1 となる行列 P をひとつ求めよ.
 (2) (1) で求めた P の転置行列を tP とする. この時 ${}^tPP = E_3$ (E_3 は単位行列) を示し, さらに $P^{-1} = {}^tP$ となる事を示せ.
 (3) 任意のベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対して $({}^tP\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, P\mathbf{b})$ が成り立つ性質を用いて, $\mathbf{y} = {}^tP\mathbf{x}$ とした時に, 次の等式を示せ.

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (({}^tPAP)\mathbf{y}, \mathbf{y})$$

- (4) $\mathbf{x}$ の成分を $x_i (i = 1, 2, 3)$ とした時, x_1, x_2, x_3 の 3 つの一次式 $f_i(x) = f_i(x_1, x_2, x_3) (i = 1, 2, 3)$ があり, $(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = f_1(x)^2 - f_2(x)^2 + 2f_3(x)^2$ となる事を示せ.

(名古屋工業大 2008) (m20082902)

0.834 (1) 次の行列 A は対角化できないことを示せ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 行列 B を $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく. $B^{-1}AB$ を求めよ.

(3) 自然数 n に対して A^n を求めよ.

(名古屋工業大 2009) (m20092902)

0.835 行列 A , 変数ベクトル $\mathbf{x}$, 定数ベクトル $\mathbf{c}$ を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ただし, a は定数である. 方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) 方程式が解をもたないための a の値を求めよ.

(2) 方程式が無数の解をもつための a の値を求めよ.

(3) 方程式が唯一の解をもつための a の範囲を示せ. またこの範囲の a に対して解 $\mathbf{x}$ を求めよ.

(名古屋工業大 2009) (m20092906)

0.836 次の 4 次行列 A , 4 次単位行列 E , およびパラメータ t に対して, 行列式 $|tE - A|$ を t について因数分解しなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 4 & 0 \\ -5 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2010) (m20102901)

0.837 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 1 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について, 積 AB の逆行列 $(AB)^{-1}$ を求めよ.

(名古屋工業大 2010) (m20102907)

0.838 3 次正方行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ を A とする. ベクトル $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ に対して, 内積を使って関数を $Q(\mathbf{u}) = (A\mathbf{u}, \mathbf{u})$ と定義する.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) 条件 $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 1$ の下での関数 $Q(\mathbf{u})$ の最大値と最小値を求めよ.

(名古屋工業大 2011) (m20112902)

0.839 3×3 行列 A と B は関係 $A^3 - AB = I$ を満たす. ただし, I は 3 次単位行列である.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ とするとき, 次の問いに答えよ.}$$

(1) A^2 と A^{-1} を求めよ.

(2) B を求めよ.

(名古屋工業大 2011) (m20112908)

0.840 (1) 次の行列式を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

(2) 次の行列が逆行列をもつときの x の条件を求めよ. また, そのときの逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & 1 \\ x^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2012) (m20122901)

0.841 次の行列 A と P について, 問 (1) と (2) に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ($\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$) とする. このとき行列 P が直交行列で, かつ次を満たすように a, b, c を求めよ.

$${}^t P A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2012) (m20122902)

0.842 R^3 の 2 組の基底 $A: (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ と $B: (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ は

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

によって定義されている. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 基底 $A \rightarrow B$ の基底変換の行列 P を求めよ.

(2) ベクトル ξ の基底 $B: (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ に関する座標は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるとき,

ξ の基底 $A: (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ に関する座標を求めよ.

(3) 2 組の基底 $A: (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ と $B: (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ に関して, 同じ座標をもつ非零ベクトル η を求めよ.

(名古屋工業大 2012) (m20122907)

0.843 行列

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 13 & -7 \\ -2 & 9 & -4 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

を対角化せよ. (すなわち, 正則行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列となるものと, そのときの対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ.)

(名古屋工業大 2013) (m20132906)

0.844 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ($|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|$) とするとき, 次をみたす正則行列 P をひとつ求めよ.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2014) (m20142904)

0.845 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ は対角化可能か否か判定せよ.

(名古屋工業大 2015) (m20152907)

0.846 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

の固有値を求めよ. また, A の最大固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(名古屋工業大 2016) (m20162904)

0.847 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) A を直交行列によって対角化せよ.
- (2) $A = B^2$ を満たす対称行列 B を一つ求めよ.

(名古屋工業大 2017) (m20172903)

0.848 (1) 次の x, y, z に関する連立一次方程式が, 解を持たないための定数 k の条件を求めよ.

$$\begin{cases} -3y + z = -3 \\ 3x - 2z = k \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ について, 連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を考える. $\mathbf{b}$ として $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶとき, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ のそれぞれの解 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ を求めよ.

(名古屋工業大 2018) (m20182905)

0.849 対称行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値, 固有ベクトルをすべて求めよ.
- (2) グラム・シュミットの正規直交化法で, (1) で求めた固有ベクトルから正規直交系 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ を求めよ.

(名古屋工業大 2018) (m20182906)

0.850 次の行列 A の列を左から $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ とする.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 4 & -4 & -15 \\ -1 & -2 & -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

- (1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ から一次独立なものを取り出すとき, その最大個数 r を求めよ.
- (2) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ から r 個の一次独立なものを, 前の方から順に取り出せ.
- (3) (2) で選ばなかったものを, (2) で選んだものの一次結合で表せ.

(名古屋工業大 2019) (m20192904)

0.851 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) A を対角化せよ.
- (2) 自然数 n に対して, A^n を求めよ.

(名古屋工業大 2019) (m20192905)

0.852 次の実対称行列 A に対し, 実直交行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列となるものと, そのときの対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2020) (m20202906)

0.853 行列

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 10 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

- (1) A の行列式を求めよ.
- (2) A の逆行列 A^{-1} の行列式を求めよ.

(名古屋工業大 2021) (m20212904)

0.854 k は定数とする. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2k \\ -1 & 1 & 2k \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.
- (2) A が対角化可能であるような k の値をすべて求めよ.

(名古屋工業大 2021) (m20212905)

0.855 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ. ただし, a は定数とする.

- (1) 行列 A が逆行列を持たないような a の値をすべて求めよ.
- (2) 行列式 $|AB|$ を計算せよ.

(名古屋工業大 2022) (m20222905)

0.856 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ を対角化せよ.

(名古屋工業大 2022) (m20222906)

0.857 行列

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

- (1) P の逆行列を求めよ.
- (2) P の列ベクトルを左から順に $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ とおいたとき,

$$A\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1, \quad A\mathbf{p}_2 = 2\mathbf{p}_2, \quad A\mathbf{p}_3 = 2\mathbf{p}_3$$

をみたす 3 次正方行列 A およびその固有値を求めよ.

(名古屋工業大 2023) (m20232906)

0.858 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a^2 & a^3 \\ a & a^3 & a^5 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ. ただし a は定数とする.

- (1) 行列式 $|A|$ を因数分解せよ.
- (2) 行列 A の階数を求めよ.

0.859 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

について、以下の問いに答えよ.

- (1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
 (2) A^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ.

(名古屋工業大 2024) (m20242906)

0.860 (1) 実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値を全て求めよ.

- (2) $\mathbb{R}^4$ の正規直交基底で、(1) の行列 A の固有ベクトルからなるものを一組求めよ.

(名古屋工業大 2025) (m20252905)

0.861 (1) 次の行列 A の階数を求めよ. ただし、 a は定数である.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^3 & a^4 \end{pmatrix}$$

- (2) x, y, z についての次の連立 1 次方程式を解け. ただし、 a は定数である.

$$\begin{cases} x + y + z & = & 1 \\ x + ay + a^2z & = & a \\ x + a^3y + a^4z & = & 1 + a - a^2 \end{cases}$$

(名古屋工業大 2025) (m20252906)

0.862 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

$c \neq 0$ に対して、次の 3 種類の行列

$P_i(c) : I$ の第 i 行を c 倍した行列

$P_{ij}(c) : I$ の (i, j) 成分に c を加えた行列 ($i \neq j$)

$P_{ij} : I$ の第 i 行と第 j 行を入れ換えた行列 ($i \neq j$)

を基本行列という.

- (1) $P_i(c)A$, $P_{ij}(c)A$, $P_{ij}A$ はそれぞれ行列 A にどのような操作を加えたものといえるか述べよ.

(2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ.

- (3) (2) の A^{-1} を基本行列の積として表せ.

- (4) (2) の A を基本行列の積として表せ.

(愛知県立大 2000) (m20003003)

0.863 m は実数とする.

$$A = \begin{pmatrix} m & m+3 \\ 1-m & -m \end{pmatrix} \text{ について}$$

- (1) A が逆行列を持たないとき, A^2 を求めよ.
 (2) A の逆行列が A 自身であるように, m の値を定めよ.

(三重大 2002) (m20023115)

0.864 ベクトル $(1, 2)$ に行列を掛けると

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

のように (一般には) 向きと大きさが異なるベクトル $(-3, -3)$ が得られるが, 他方

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のようにその方向を変えない特殊なベクトル (x, y) が存在することもある. 後者のようなベクトルは, この行列の固有ベクトルと呼ばれ, その長さが何倍となったか (a の値) は固有値と呼ばれる. このような方向をもったベクトル (x, y) を求めよ. また, ベクトルの長さは何倍になっているか.

(三重大 2002) (m20023117)

0.865 $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるとき, x, y, z および w を求めよ.

(三重大 2003) (m20033110)

0.866 次の行列の行列式を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

(三重大 2003) (m20033111)

0.867 (1) 次の行列の行列式を $\det A$ とする.

$$A = \begin{pmatrix} x-a & y-b & z-c \\ d-a & e-b & f-c \\ l & m & n \end{pmatrix}$$

ここで, $a, b, c, d, e, f, l, m, n$ は定数として, 方程式 $\det A = 0$ が 3 次元空間 (xyz 空間) 上の平面の式を与えることを示せ. また, この平面の法線ベクトルを求めよ.

- (2) この平面に直線 $\frac{x-d}{l} = \frac{y-e}{m} = \frac{z-f}{n}$ が含まれることを示せ.

(三重大 2003) (m20033112)

0.868 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 8 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

- (1) 行列式 $|A|$ の値を求めなさい.
 (2) 行列 A のすべての固有値を求めなさい.

(三重大 2003) (m20033113)

0.869 ある 3×3 の行列 A とベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ がある. これらの間に, $A\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{a}_1$, $A\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2$, $A\mathbf{a}_3 = 3\mathbf{a}_3$ の関係が成り立つとして, 以下の問に答えよ.

(1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は互いに直交するベクトルであることを証明せよ.

(2) ベクトル $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ を, $\mathbf{r} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{a}_3$ で分解した. 定数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, を求めよ.

(3) $A\mathbf{r}$ および $A^2\mathbf{r}$ を求めよ.

(4) $A^n\mathbf{r}$ の一般形を求めよ.

(三重大 2003) (m20033114)

0.870 次の 2 つの行列 A, P について, P が逆行列をもち, $B = P^{-1}AP$ が対角行列 B となるように, 実数 x, y, α, β の値を求めなさい. ただし, $\alpha > \beta$ とする.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

(三重大 2004) (m20043113)

0.871 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) 行列式 $|A|$ を計算せよ.

(2) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(三重大 2005) (m20053104)

0.872 行列 $\begin{pmatrix} a & 1/\sqrt{5} \\ b & 2b \end{pmatrix}$ が直交行列であるとき, 実数 a, b の値を求めよ.

(三重大 2005) (m20053105)

0.873 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えなさい.

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めなさい.

(2) 行列 A のすべての固有値と, 各固有値に対する固有ベクトルを求めなさい.

(3) 正則行列 P によって行列 A を対角化したい. このような正則行列 P と, その逆行列 P^{-1} , および対角化された行列 $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(4) 行列 $P^{-1}A^nP$ を求めなさい. ただし, n は自然数とする.

(三重大 2005) (m20053107)

0.874 (1) 複素行列 $\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ.

ここで, a, b, c, d は実数であり (ただし, $c \neq 0$), $i^2 = -1$ である.

(2) λ_1, λ_2 に対する固有ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ を求め, エルミート内積 $(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2) = \sum_{j=1}^2 x_{1j}^* x_{2j}$ を計算せよ. ただし, x_{ij} は $\mathbf{x}_i$ の j 成分であり ($i, j = 1, 2$), α^* は α の複素共役を表す.

(三重大 2005) (m20053110)

0.875 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ に対して, 連立一次方程式 $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が $x = y = 0$ 以外の解をもつように k の値を定めよ.

(三重大 2005) (m20053113)

0.876 行列 $A = \begin{pmatrix} m & m+5 \\ 2-m & -m \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えなさい。ただし、 m は実数とする。

(1) A が逆行列を持たないとき、 A^2 を求めなさい。

(2) $A^{-1} = A$ となるような m の値を求めなさい。

(三重大 2006) (m20063107)

0.877 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい。 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(三重大 2006) (m20063113)

0.878 (1) 複素行列 $\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ。ここで、 a, b, c, d は実数であり (ただし、 $c \neq 0$)、 $i^2 = -1$ である。

(2) λ_1, λ_2 に対する固有ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ を求め、エルミート内積 $(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2) = \sum_{j=1}^2 x_{1j}^* x_{2j}$ を計算せよ。ただし、 x_{ij} は $\mathbf{x}_i$ の j 成分であり ($i, j = 1, 2$)、 α^* は α の複素共役を表す。

(三重大 2006) (m20063118)

0.879 $\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ x-3y & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4y+6z & 0 \\ z & 2z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ を満たす全ての λ と、それぞれの λ について x, y, z の比 $x : y : z$ を求めよ。ただし、 x, y, z は全ては 0 でないとする。

(三重大 2007) (m20073102)

0.880 (1) 定数 k_1, k_2 を含む次の行列 A の階数 (rank) を、 k_1, k_2 の値で場合分けして求めなさい。

$$A = \begin{pmatrix} k_1 & 1 & 1 \\ 1 & k_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ を満たすベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を考え、その $\mathbf{v}$ が表す点の集合が x, y, z を軸とする直交座標系でどのような形状となるかを、行列 A の階数 (rank) ごとに説明しなさい。

(三重大 2007) (m20073106)

0.881 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ として、以下の設問に答えよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ のとき、 $A^2 - 5A + 6E$ および A^5 を求めよ。

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2 - 2A - 8E = O$ を満たすとき、 $(a+d, ad-bc)$ の値の組を全て求めよ。

(三重大 2007) (m20073111)

0.882 対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ (a, b, c は実数) は適当な直交行列 T (直交行列とは ${}^tT T = T {}^tT = I$ [単位行列] を満たす行列、 tT は T の転置行列) を使って、 ${}^tT A T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ のような対角形に変形できる。

- (1) 自然数 n に対して $A^n = T \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} {}^tT$ となることを示せ.
- (2) $a + b = \alpha + \beta$, $ab - c^2 = \alpha\beta$ の関係があることを示せ.
- (3) $a = b = 2$, $c = -1$ のとき, α , β の値を求めよ. また, 直交行列 T も求めよ.

(三重大 2007) (m20073117)

0.883 次の行列 A に対して

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) 固有値方程式をたて, 固有値をすべて求めよ. ただし, 固有値はすべて整数値とする.
- (2) 固有ベクトルをすべて求め, それを用いてこの行列を対角化 ($P^tAP = E$: E は単位行列) する行列 P を求めよ. ただし, P は直交行列である.

(三重大 2008) (m20083101)

0.884 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ が, $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ かつ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす時, (1)~(3) の設問に答えなさい. ただし, k, x, y は実数である.

- (1) k の値をすべて求めよ.
- (2) (1) で求めた k の値に対して $A \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たす x をすべて求めよ.
- (3) (2) で求めた結果を用いて A^n を求めよ. ただし, n は自然数とする.

(三重大 2009) (m20093103)

0.885 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ の値を求めなさい.

(2) A, B が同じ次数の正方行列であるとき, 行列式 $\begin{vmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{vmatrix}$ の値を, $|A + 2B|$ と $|A - B|$ の式で表しなさい.

この導出には, n 次正方行列 P , m 次正方行列 S , $m \times n$ の行列 R , $n \times m$ の零行列 O に対して, $\begin{vmatrix} P & O \\ R & S \end{vmatrix} = |P||S|$ が成り立つことを使ってよい.

(3) 問 (2) の結果を利用して, 行列 $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ のすべての固有値を求めなさい.

(三重大 2009) (m20093106)

0.886 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ に関する以下の問いについて答えよ.

- (1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (2) A を対角化せよ.
- (3) A^{23} を求めよ.

(三重大 2009) (m20093107)

0.887 (1) 次の対称行列 A の固有値, 固有ベクトルをすべて求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- (2) 一般の実対称行列 B について, その固有値はすべて実数で, 異なる固有値に属する固有ベクトルは互いに直交することを示せ.

(三重大 2009) (m20093110)

0.888 次の行列 A の行列式 $|A|$ 及び逆行列 A^{-1} を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

(三重大 2010) (m20103110)

0.889 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ として, 以下の (1),(2) に答えよ.

- (1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $A^2 - 5A + 6E$ および A^5 を求めよ.
- (2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2 - 2A - 8E = O$ を満たすとき, $a + d$ および $ad - bc$ を求めよ.

(三重大 2010) (m20103117)

0.890 行列 $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ による一次変換について, 以下の問に答えよ.

ここで, 一次変換とは下式に示すように, 任意の平面上の座標 (x, y) を (x', y') に移す変換をいう.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- (1) $a = 1$, $b = k$ (k は任意の実数) のとき, xy 平面全体が xy 平面全体に移される条件と, 直線に写される条件を示せ. また, 直線に移された場合の直線の式を求めよ.
- (2) 直線 $2x + y = 0$ が, 直線 $6x - 5y = 0$ に移されるとき, a, b の値を求めよ.

(三重大 2011) (m20113106)

0.891 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ に関する以下の問について答えよ.

- (1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (2) A を対角化することにより, A^{17} を求めよ.

(3) 正則行列の持つ性質について列挙せよ.

(三重大 2011) (m20113109)

0.892 以下の問に答えなさい.

(1) 次の行列 A の固有値 λ_1, λ_2 とそれぞれの固有値に対する固有ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ をひとつ求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) 問 (1) で求めた固有ベクトルからなる行列 $P = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2)$ を用いて, $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(3) n が正の整数のとき, 問 (2) の結果を利用して, A^n を求めなさい.

(三重大 2011) (m20113115)

0.893 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ に関する以下の問について答えよ.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) A を対角化せよ.

(3) A^n を求めよ.

(三重大 2012) (m20123101)

0.894 (1) 次の交代行列 A (i 行 j 列成分 a_{ij} と j 行 i 列成分 a_{ji} が $a_{ij} = -a_{ji}$ を満たす行列) の行列式, 固有値および固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 以下の交代行列 B の行列式は $|B| = p^2$ とかける. p を求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

(3) n 行 n 列の正方行列 C が交代行列であり n が奇数のとき, 行列式 $|C|$ は 0 となることを示せ.

(三重大 2012) (m20123108)

0.895 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ の定める平面の一次変換において, 原点を通る不動直線が 1 本のみ存在する場合の a の値を求めよ. ただし, 不動直線とは「その像がもとの直線と一致する直線」のことである.

(三重大 2012) (m20123113)

0.896 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値および, 固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(三重大 2012) (m20123120)

0.897 2×2 行列 A が次の 2 つの条件 (a), (b) を満たしている.

$$(a) A^2 - 3A + 2E = O \quad (b) A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ただし, E は単位行列, O は零行列を表す, 以下の問いに答えよ.

(1) $A \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(2) $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(3) A を求めよ.

(4) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(三重大 2013) (m20133105)

0.898 二つの実数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) が, $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ $b_{n+1} = -a_n + 4b_n$ を満たす. ただし, $a_0 = 1$, $b_0 = -1$ である. 以下の問いに答えなさい.

(1) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ を満たす行列 A を求めなさい.

(2) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 とそれぞれの固有値に対する固有ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ を求めなさい.

(3) 問 (2) で求めた固有ベクトルから行列 $P = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ を用いて, $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(4) 問 (3) の結果を利用して, A^n を求めなさい.

(5) 実数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めなさい.

(三重大 2013) (m20133109)

0.899 (1) A を N 行 N 列の実対称行列, すなわち, ${}^tA = A$ (tA は A の転置行列) を満たし成分が実数の行列とすると, A の固有値 a_i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) と各 a_i に対する固有ベクトル $\vec{v}_i$ について以下のことを示せ.

(a) 固有値はすべて実数である.

(b) $a_i \neq a_j$ ならば, $\vec{v}_i$ と $\vec{v}_j$ は直交する. すなわち, 内積 $(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0$. [ただし, $\vec{v}_i$ はすべて実ベクトルに選んでおく.]

(2) 2 行 2 列の行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix}$$

とする.

(a) 固有値の和と積を求めよ.

(b) B を対角化する行列, すなわち, UBU^{-1} が対角行列になるような行列 U を求めよ.

(三重大 2013) (m20133117)

0.900 以下の問いに答えなさい.

(1) 以下に示す x, y, z に関する方程式を考える. これが $x = y = z = 0$ 以外の解を持つように, 定数 k の値を定め, 解を求めなさい.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) 以下に示す行列 A により表される線形写像 $f: \mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x}$ を考える. 写像 f の核の次元および正規直交化された基底を求めなさい. なお, 写像 f の核は $\{\mathbf{x} \in R^4 \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ ($\mathbf{0}$ は R^4 の零ベクトルとする) として定義される.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(三重大 2014) (m20143102)

0.901 行列 $A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ による 1 次変換において $x^2 - y^2 = 1$ を満たす不動点 $Q(x, y)$ が存在する.

m の値と点 $Q(x, y)$ を求めよ.

(三重大 2014) (m20143110)

0.902 次の行列 A の固有値, 固有ベクトルおよび固有ベクトル間の角度を求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(三重大 2015) (m20153103)

0.903 点 $(1, -1)$, $(-3, 7)$ をそれぞれ $(5, -5)$, $(-11, 23)$ に移す 1 次変換を行うことができる 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えなさい.

(1) 行列 A を求めなさい.

(2) 行列 A は $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = 0$ を満たす, このとき A^4 を求めなさい. ただし, E は単位行列である.

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(三重大 2016) (m20163101)

0.904 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について以下に答えよ.

(1) A^5 の行列式 $|A^5|$ の値を求めよ.

(2) A の固有値および 互いに直交する長さ 1 の固有ベクトル をすべて求めよ.

(3) A を変換 $P^T A P$ によって対角化する直交行列 P を構成し, 対角化を実行せよ. ただし, P^T は P の転置行列である.

(三重大 2016) (m20163117)

0.905 ある 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えなさい.

(1) この行列 A の固有値を求めなさい.

(2) この行列 A の固有ベクトルを求めなさい.

(3) A^n の値を求めなさい

(三重大 2017) (m20173101)

0.906 x, y に関する実数値関数 $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{2}xy$ について, 以下の間に答えなさい.

(1) $f(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす対称行列 A を求めなさい.

(2) A の全ての固有値と, それぞれの固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めなさい.

(3) $T^{-1}AT$ が対角行列となるような正規直交行列 T を求めなさい. さらに, $T^{-1}AT$ を求めなさい.

- (4) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ により変数変換をすることで, $f(x, y)$ を変換した結果得られる $g(u, v)$ を求めなさい. また, $g(u, v) = 4$ の概形を u - v 平面上に描きなさい.

(三重大 2017) (m20173108)

- 0.907 行列 $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$ のとき, 次の行列を求めよ.

- (1) A の逆行列 A^{-1} (2) $2(A - 3B)$ (3) AB (4) $(AB)^n$

(三重大 2017) (m20173112)

- 0.908 (1) 次の行列 A とベクトル $\vec{v}$ の積 $A\vec{v}$ を求めよ. またベクトル $\vec{v}$ と $A\vec{v}$ の内積 $\vec{v} \cdot A\vec{v}$ を求めよ. ただし, a, b, c, x, y は実数とする.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- (2) (1) の行列 A の行列式 $|A|$ と, 2つの固有値および固有ベクトルを求めよ.
 (3) (1) の $\vec{v}$ が $\vec{v} \cdot \vec{v} > 0$ を満たし, (2) の行列式が $|A| \neq 0$ を満たすとき, (1) の内積が $\vec{v} \cdot A\vec{v} > 0$ となる十分条件は, $a > 0, c > 0$ かつ $|A| > 0$ であることを証明せよ.

(三重大 2017) (m20173115)

- 0.909 3次元空間の3つのベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の作る平行四辺形の面積 S を求めよ.
 (2) ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の両方に垂直で, 大きさが1となるベクトルを全て求めよ.
 (3) ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ の作る平行六面体の体積 V を求めよ.
 (4) ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ からなる行列 $A = (\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ.

(三重大 2018) (m20183101)

- 0.910 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ とする. 以下の問いに答えなさい.

- (1) A の逆行列を求めなさい.

また, それを利用して x, y に関する連立方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を解きなさい.

- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正方行列 P を求めなさい.

また, それを利用して $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ により定義される数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ の一般項を求めなさい. ここで, n は自然数とする.

(三重大 2018) (m20183105)

- 0.911 (1) 次の行列 A の行列式 $|A|$ を求めよ. また行列 A と次のベクトル $\vec{v}$ の積 $A\vec{v}$ を計算し, $A\vec{v} = \vec{v}$ となることを示せ. ただし θ, ϕ は実数, i は虚数単位とする.

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)e^{-i\phi} \\ \sin(\theta)e^{i\phi} & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

- (2) (1) の行列 A について、 $\phi = 0$ としたときの 2 つの固有値および固有ベクトルを求めよ。ただし、固有ベクトルの大きさは 1 とせよ。
- (3) 次の行列 B の 2 つの固有値を求めよ。ただし k は実数とする。また $|k| \leq 1$ として、大きさ 1 とした 2 つの固有ベクトルを求めよ。また 2 つの固有値を k の関数として、 $|k| \leq 1$ の範囲でグラフに描け。

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$$

(三重大 2018) (m20183112)

0.912 3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えなさい。

- (1) 行列 A の行列式を求めなさい。
- (2) 行列 A の固有値を求めなさい。
- (3) 行列 A について、1 次独立な固有ベクトルをすべて求めなさい。ただし、固有ベクトルの大きさを 1 としなさい。
- (4) (3) で求めた固有ベクトルが互いになす角度をすべて求めなさい。

(三重大 2020) (m20203107)

0.913 二次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ における $A\vec{u} = k\vec{u}$, $\vec{u} \neq \vec{0}$ を満たす定数 k とベクトル $\vec{u}$ について、以下の各問に答えなさい。

- (1) この定数 k の値を求めなさい。
- (2) このベクトル $\vec{u}$ を求めなさい。
- (3) A^n を求めなさい。
- (4) x - y 二次元平面上に存在しているある直線は、この行列 A を用いた一次変換
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
 によって x 軸に一致した。返還前の直線の式を求めなさい。

(三重大 2022) (m20223104)

0.914 次の行列の積を求め、その行列式の値を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(三重大 2022) (m20223111)

0.915 次の行列の逆行列を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(三重大 2022) (m20223113)

0.916 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ とする。

- (1) 行列 A を対角化しなさい。

(2) 数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を次の連立漸化式で定める.

$$\begin{cases} x_n &= x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ y_n &= 3x_{n-1} + 2y_{n-1} \end{cases} \quad (n \geq 2)$$

$x_1 = 0, y_1 = 1$ のとき, 一般項 x_n と y_n を (1) の結果を用いてそれぞれ求めなさい.

(三重大 2023) (m20233102)

0.917 点 $(2, -2), (-3, 4)$ をそれぞれ $(6, -6), (-10, 10)$ に移す 1 次変換を行うことができる 2 次の正方

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えなさい.

(1) 行列 A を求めなさい.

(2) 行列 A は $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = 0$ を満たす. このときの A^4 を求めなさい. ただし, E は単位行列である.

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(三重大 2023) (m20233108)

0.918 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき, 以下の問に答えなさい. ここで, E は単位行列を, $|\cdot|$ は行列式を, O は零行列を表す.

☒ 固有多項式 $f(x) = |A - xE|$ を求めなさい.

☒ 固有多項式 $f(x)$ の x を A で置き換え, 定数に E を乗じた $f(A)$ について $f(A) = O$ が成り立つ (ケイリー・ハミルトンの定理). これを用いて A^3 を A と E で表し, それを用いて A^3 を求めなさい.

☒ ケイリー・ハミルトンの定理を用いて A^{-1} を A と E で表し, それを用いて A^{-1} を求めなさい.

(三重大 2024) (m20243102)

0.919 3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} x-1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 \\ x & 0 & x+1 \end{pmatrix}$ は固有値 λ の一つに $\lambda = 3$ をもつものとする. x は実数とする. 次の問に答えなさい.

(1) x を求めなさい.

(2) A の $\lambda = 3$ 以外の固有値を求めなさい.

(3) A の固有ベクトルをすべて求めなさい. ただし, 固有ベクトルの大きさは 1 となるようにしなさい.

(三重大 2024) (m20243104)

0.920 2 次行列 A, B を次のように定めます.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) $AB = BA$ が成り立つことを確かめなさい.

(2) $AC = CA$ を満たすような行列 C をすべて求めなさい.

(奈良女子大 2001) (m20013210)

0.921 次の行列が逆行列を持つかどうか調べなさい。持つ場合にはその逆行列を求めなさい。

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2001) (m20013211)

0.922 n 行 n 列の正方行列 A の転置をとり，さらに全ての成分の複素共役をとった行列を行列 A のエルミート共役といい， $A^\dagger$ と書く。つまり，

$$(A^\dagger)_{ij} = A_{ji}^* \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

また， $A^\dagger = A$ であるとき，行列 A をエルミート行列と言う。エルミート行列に関して以下の問いに答えよ。

- (1) エルミート行列の固有値は実数であることを証明せよ。
- (2) エルミート行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交することを示せ。
- (3) 下に示す行列 A はエルミート行列である。行列 A の固有値と固有ベクトルを求め，上記 (1)，(2) が成り立つことを確かめよ。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2001) (m20013212)

0.923 2 次行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ。

- (1) $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めよ。
- (2) 零行列でない 2 次行列 B で $AB = O$ を満たすものを求めよ。
- (3) 零行列でない 2 次行列 C で $AC = CA = O$ を満たすものを求めよ。

(奈良女子大 2002) (m20023207)

0.924 次の行列について以下の問いに答えよ。

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- (1) 固有値を求めよ。
- (2) 得られた各々の固有値に対する固有ベクトルを求めよ。

(奈良女子大 2002) (m20023209)

0.925 2 次行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$ ， $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$

に対して， $AB \neq BA$ となるための a, b, c の条件を求めよ。

(奈良女子大 2003) (m20033208)

0.926 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。ただし， ε は実数で， $\varepsilon \neq \pm 1$ ， $\varepsilon \neq 0$ であるとする。

- (1) 逆行列 A^{-1} を求めよ。
- (2) 行列 A の固有値を求めよ。

(3) 各固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(奈良女子大 2003) (m20033209)

0.927 3 次の正方行列 A, S を次のように定める.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) AS を求めよ. (2) AS^2 を求めよ.

(奈良女子大 2004) (m20043208)

0.928 3 次行列 $A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -9 \\ 5 & -4 & 6 \\ 7 & 8 & -12 \end{pmatrix}$ と三つのベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$ に対して次の間に答えよ.

(1) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は 1 次独立か. (2) $\mathbf{a}, \mathbf{c}$ は 1 次独立か. (3) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は 1 次独立か.
(4) A の行列式の値を求めよ. (5) A は逆行列をもつか.

(奈良女子大 2005) (m20053201)

0.929 次の 2 行 2 列の行列 $F(\theta)$ について以下の間に答えよ.

$$F(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

(1) $F(\theta)$ について次の関係が成立することを示せ.

$$F(\theta_1)F(\theta_2) = F(\theta_1 + \theta_2)$$

(2) 行列 A を次の 2 行 2 列の行列であるとする.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき, $F(-\theta)AF(\theta)$ が対角行列 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ の形になる θ の値と, そのときの対角要素 λ_1, λ_2 を求めよ.

(奈良女子大 2005) (m20053204)

0.930 3 次行列と $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ と 4 つのベクトル

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ に対して次の間に答えよ.}$$

(1) A の行列式の値を求めよ. (2) A の逆行列を求めよ.

(1) $\mathbf{d}$ を $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の一次結合として $\mathbf{d} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$ (x, y, z は実数) の形で表せ.

(奈良女子大 2006) (m20063201)

0.931 実数 θ に対して $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ とおく. また, 2 次の単位行列を E とおく. 次の間に答えよ.

- (1) ${}^t A(\theta)A(\theta) = E$ となることを示せ. ただしここで, ${}^t A(\theta)$ は $A(\theta)$ の転置行列である.
- (2) $A(-\theta)$ が $A(\theta)$ の逆行列であることを示せ.
- (3) 実数 θ, θ' に対し, $A(\theta)A(\theta') = A(\theta + \theta')$ が成り立つことを示せ.

(奈良女子大 2006) (m20063204)

0.932 3 次行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と, ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (c は実数) に対して次の問いに答えよ.

- (1) A^2, A^3 を求めよ.
- (2) $A\mathbf{a}, A^2\mathbf{a}, A^3\mathbf{a}$ を求めよ.
- (3) ベクトル $\mathbf{a}$ が二つのベクトル $A\mathbf{a}, A^2\mathbf{a}$ の一次結合として表されるとき c の値を求めよ.

(奈良女子大 2007) (m20073201)

0.933 次の行列の行列式を求めよ. また, この行列の逆行列が存在するか否か判定せよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2007) (m20073204)

0.934 次の行列の全ての固有値とそれに属する規格化された固有ベクトルを求めよ.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2007) (m20073205)

0.935 3 次行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & k & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ と, ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

に対して次の問いに答えよ. ただし k は実数である.

- (1) $A\mathbf{a}, A\mathbf{b}$ を求めよ.
- (2) $A\mathbf{a}, A\mathbf{b}$ は一次独立であることを示せ.
- (3) $A\mathbf{c}$ が $A\mathbf{a}, A\mathbf{b}$ の一次結合として表されるとき, k の値を求めよ.

(奈良女子大 2008) (m20083201)

0.936 次の行列の逆行列を求めよ. ただし, a, b, c, d は実数であり, $ad - bc \neq 0$ である.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2008) (m20083204)

0.937 次の行列の固有値と規格化された固有ベクトルを求めよ.

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2008) (m20083205)

0.938 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と、ベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して次の問いに答えよ。ただし、 a は実数である。

- (1) 行列 A^2 および B^2 を求めよ。
- (2) 2つのベクトル $A^2\mathbf{v}$ と $B^2\mathbf{v}$ は一次独立であることを示せ。
- (3) 2つのベクトル $A\mathbf{v}$ と $B\mathbf{v}$ が一次従属となるときの a の値を求めよ。

(奈良女子大 2009) (m20093201)

0.939 次のような2つの行列 A と B があるとき、以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

- (1) 積 AB を求めよ。
- (2) 行列 A の逆行列を求めよ。
- (3) 2次元ベクトル $\mathbf{X}$ に行列 A をかけて、 $\mathbf{Y} = A\mathbf{X}$ を作った。このとき、2つのベクトル $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ はどのような関係になるか述べて。

(奈良女子大 2009) (m20093207)

0.940 3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と、ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$ (k は実数) に対して次の問いに答えよ。

- (1) 行列 A^2 , A^3 を求めよ。
- (2) 2つのベクトル $A\mathbf{a}$ と $A^2\mathbf{a}$ は一次独立であることを示せ。
- (3) ベクトル $\mathbf{a}$ が2つのベクトル $A\mathbf{a}$, $A^2\mathbf{a}$ の一次結合として表されるとき、 k の値を求めよ。

(奈良女子大 2010) (m20103201)

0.941 3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して、次の問いに答えよ。

- (1) 行列 A^2 を求めよ。
- (2) 2つのベクトル $A\mathbf{a}$ と $A^2\mathbf{a}$ は一次独立であることを示せ。
- (3) ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $A\mathbf{a}$ と $A^2\mathbf{a}$ の一次結合で表せ。

(奈良女子大 2011) (m20113201)

0.942 次の実対称行列 A について以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列式 $|A|$ を求めよ。
- (2) 行列 A の固有値を求めよ。
- (3) 行列 A の固有ベクトルをすべて求めよ。なお、固有ベクトルは規格化すること。

- (4) 行列 A は、直交行列 V とその転置行列 V^T を以下のように左右からかけることにより、対角行列 B に変換することができる.

$$B = V^T A V$$

行列 V と B を求めよ.

(奈良女子大 2012) (m20123205)

0.943 3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & a & 1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$

と、ベクトル

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して、次の問に答えよ. ただし、 a は実数である.

- (1) 3つのベクトル $A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2, A\mathbf{e}_3$ が一次従属となるとき a の値を求めよ.

- (2) (1) で求めた a の値に対し、

$$A^{2n-1} = (-2)^{n-1} A$$

が成り立つことを示せ. ただし、 n は1以上の整数である.

(奈良女子大 2012) (m20123206)

0.944 3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ と、ベクトル

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して、次の問に答えよ. ただし a は実数である.

- (1) 行列 A^2 を求めよ.

- (2) 3つのベクトル $A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2, A\mathbf{e}_3$ が一次従属となるとき a の値を求めよ.

(奈良女子大 2013) (m20133201)

0.945 次の行列 $A(\theta)$ について以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- (1) 行列式 $|A|$ を求めよ.

- (2) $A(\theta_1 + \theta_2) = A(\theta_1)A(\theta_2)$ であることを示せ.

- (3) $A(\theta)A(-\theta) = I$ を示せ. ここで I は単位行列である.

- (4) 行列 $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$ の固有値をすべて求めよ.

(奈良女子大 2013) (m20133208)

0.946 3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 3 \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}$ と, ベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

に対して, 次の問に答えよ. ただし, a は実数である.

- (1) $A\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{v}_2$ を求めよ.
- (2) 2つのベクトル $A\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{v}_2$ は a の値にかかわらず一次独立となることを示せ.
- (3) 3つのベクトル $A\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{v}_2, A\boldsymbol{v}_3$ が一次従属となるような a の値をすべて求めよ.

(奈良女子大 2014) (m20143205)

0.947 次の行列 A に関する以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ただし, a および b は実数であり, $b \neq 0$ とする.

- (1) 行列式 $|A|$ を求めよ.
- (2) 行列 A の固有値を求めよ,
- (3) 前問で得られた固有値に対する固有ベクトルを求めよ. なお, 固有ベクトルは規格化すること.
- (4) 適切な直交行列を使って, 行列 A を対角化せよ.

(奈良女子大 2015) (m20153205)

0.948 次の3次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ($\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$) とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の値を求めよ.
- (2) 次の等式が成り立つような正則行列 P を求めよ.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2016) (m20163201)

0.949 xy 座標で多項式 $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$ で表される曲線を考える.

- (1) この式は実数の定数 a, b, c を成分に持つ 2×2 対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

を使って,

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

と書き換えることができる. 行列 A を求めよ.

- (2) 行列 A は異なる 2 つの実数の固有値 λ_1, λ_2 をもつ ($\lambda_1 < \lambda_2$ とする). λ_1, λ_2 を求めよ.
- (3) 前問で得られた固有値 λ_1, λ_2 の固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ とする. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ が直交していることを示せ.
- (4) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ をそれぞれ長さ 1 になるように決めて,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2$$

によって新しく XY 座標を定義する. 問題で与えた多項式を XY 座標で表し, もとの xy 座標で曲線のグラフをかけ.

(奈良女子大 2016) (m20163208)

0.950 ベクトル

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ は直交することを示せ.
- (2) 3 つのベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は一次独立でないことを示せ,
- (3) 3 次正方行列 A に対して $A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ のとき, $A\mathbf{v}_3$ を求めよ. さらに

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ であるとき, } A \text{ を求めよ.}$$

(奈良女子大 2017) (m20173201)

0.951 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ として, $\mathbf{r}' = A\mathbf{r}$ を求めよ.
- (2) 行列式 A を求めよ.
- (3) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(奈良女子大 2017) (m20173208)

0.952 3 次正方行列 A とベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ を次で定める.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & a & b \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

さらに, $f_1 = A\mathbf{e}_1, f_2 = A\mathbf{e}_2, f_3 = A\mathbf{e}_3$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) f_1, f_2, f_3 が一次従属となる a, b の条件を求めよ.
- (2) $Bf_1 = \mathbf{e}_1, Bf_2 = \mathbf{e}_2, Bf_3 = \mathbf{e}_3$ となる 3 次正方行列 B が存在するための a, b を求めよ.

0.953 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ.

- (1) 行列式を求めよ.
- (2) 固有値を全て求めよ.
- (3) 前問で求めた固有値のそれぞれに対応する固有ベクトルを示せ. ここで固有ベクトルの長さは任意でよく、また必ずしも互いに直交せずともかまわない.

(奈良女子大 2018) (m20183207)

0.954 a, b, c を定数とし、3 次正方行列 A を次で定める.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ.

- (1) A の固有値をすべて求めよ. さらに A の固有値の異なる値の個数が 2 個になるための a, b, c の条件を求めよ.
- (2) A の一次独立な 3 つの固有ベクトルを求めよ.

(奈良女子大 2019) (m20193201)

0.955 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(奈良女子大 2019) (m20193210)

0.956 p を $0 < p < 1$ をみたす実数とする. 行列 A および数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

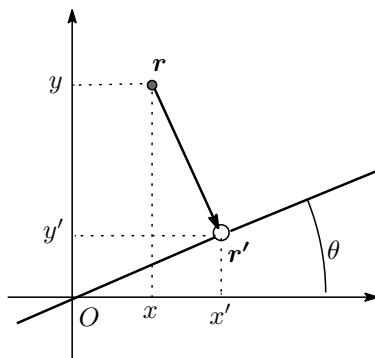
$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \quad a_1 = 1, \quad b_1 = 0, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 2)$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) A の固有値をすべて求めよ.
- (2) $k \geq 1$ に対し, A^k を求めよ.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}$ であることを示せ.

(奈良女子大 2022) (m20223202)

0.957 下図のように xy 平面上の任意の点 $\mathbf{r} = (x, y)$ を, x 軸から角度 θ 傾いた直線に垂直に射影した点 $\mathbf{r}' = (x', y')$ を求める変換を考える. 以下の問いに答えよ.



(1) ベクトル $\mathbf{r}$ と単位ベクトル $\mathbf{e} = (\cos \theta, \sin \theta)$ を使って、ベクトル $\mathbf{r}'$ を表せ.

(2) (x, y) と (x', y') の関係は 2×2 行列 A を使って一次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

として表すことができる. 行列 A を求めよ.

(3) 行列 A の 2 つの固有値を計算し、それぞれの固有値に属する固有ベクトルの方向を求めよ.

(奈良女子大 2022) (m20223209)

0.958 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような適当な P を選べ.

(京都大 1995) (m19953304)

0.959 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $T^T \cdot A \cdot T = D$

とするとき、直交行列 T と対角行列 D を一組求めよ. また、 $A = B^2$ となる正方行列 B を一組求めよ.

(京都大 1996) (m19963304)

0.960 行列 A が次のように定義されている. 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(2) A を対角化する正則行列 P を求めよ.

(京都大 1998) (m19983304)

0.961 (1) 行列 A , 固有値 λ , それに対応する固有ベクトル x の間の関係式を書け.

(2) 行列 A , 固有値 λ が満たすべき方程式を固有方程式という. 固有方程式を書け.

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき, A の固有値を求めよ.

(4) (3) の固有値に対する固有ベクトルの中で, 互いに直交な単位ベクトルを求めよ.

(京都大 2000) (m20003302)

0.962 n 行 n 列の行列 A が対角化可能とは, ある正則行列 P とその逆行列 P^{-1} , および, ある対角行列 Λ を用いて

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

と表現できることである.

(1) 対角化可能な行列 A があるとき, これを対角化する手順について説明せよ.

(2) 次で与えられる 3 行 3 列の行列 A を実際に対角化し、行列 P と対角行列 Λ を与えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(京都大 2002) (m20023303)

0.963 次の行列 A に対して、(1)~(3) に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ただし、 I は 3 次の単位行列、 $\mathbf{0}$ は 3 次元の零ベクトルを表す.

(1) 行列 A の固有値とその固有ベクトルの組 $(\lambda, \mathbf{p})$ の中で

$$(A - \lambda I)\mathbf{q} = \mathbf{p} \quad \text{かつ} \quad \mathbf{q} \neq \mathbf{0}$$

が成立するベクトル $\mathbf{q}$ が存在するような組を 1 つ求めよ.

(2) (1) の結果を用いて、 $AP = PB$ が成立するような上三角行列 B と正則行列 P を求めよ.

(3) (2) の結果を用いて、 A^n の各成分を n の式で表せ.

(京都大 2008) (m20083304)

0.964 2 次元ユークリッド空間の直交座標系を一つ定め、その x 軸および y 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ とする. また、 x 軸および y 軸をそれぞれ反時計方向に θ だけ回転して得られる座標軸を x' 軸, y' 軸とし、 x' 軸と y' 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{e}'_x$ および $\mathbf{e}'_y$ とする. このとき、以下の (1)~(5) に答えよ.

(1) 条件 $(\mathbf{e}'_x \ \mathbf{e}'_y) = (\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y)P$ を満足する 2 次の正方行列 P を θ を用いて表せ.

(2) 行列 P に対して $P^T P = P P^T = I$ が成り立つことを示し、この等式の幾何的な意味を、4 つのベクトル $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}'_x$, $\mathbf{e}'_y$ を用いて説明せよ. なお、 P^T は P の転置行列を、また、 I は 2 次の単位行列をそれぞれ表す.

(3) このユークリッド空間における任意のベクトル $\mathbf{u}$ は $\mathbf{u} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y = x'\mathbf{e}'_x + y'\mathbf{e}'_y$ のように、2 通りの座標を用いて表すことができる. これら 2 通りの座標間の関係を行列 P を用いて表せ. さらに、 $x^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2$ が成り立つことを示せ.

(4) このユークリッド空間におけるベクトル全体をそれ自身に写す変換 f が

$$f(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v})$$

なる関係を満たすとき、 f を一次変換という. ここに α と β は任意の実数、 $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ は任意のベクトルである. 一次変換 f と $\mathbf{e}_x$ $\mathbf{e}_y$ に対して、

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_x) = a_{xx}\mathbf{e}_x + a_{yx}\mathbf{e}_y \\ f(\mathbf{e}_y) = a_{xy}\mathbf{e}_x + a_{yy}\mathbf{e}_y \end{cases} \quad (4)$$

が成り立つとし、ベクトル $\mathbf{u}$ と $f(\mathbf{u})$ をそれぞれ $\mathbf{u} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$, $f(\mathbf{u}) = X\mathbf{e}_x + Y\mathbf{e}_y$ と表すとき、これら 2 組の座標間の関係を

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の形で表現する行列 A を求めよ.

(5) 一次変換 f に対して, (4) の条件④に加えて.

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}'_x) = a'_{xx}\mathbf{e}'_x + a'_{yx}\mathbf{e}'_y \\ f(\mathbf{e}'_y) = a'_{xy}\mathbf{e}'_x + a'_{yy}\mathbf{e}'_y \end{cases}$$

が成り立つとする. ベクトル $\mathbf{u}$ と $f(\mathbf{u})$ をそれぞれ $\mathbf{u} = x'\mathbf{e}'_x + y'\mathbf{e}'_y$, $f(\mathbf{u}) = X'\mathbf{e}'_x + Y'\mathbf{e}'_y$ と表せば, 2組の座標間の関係は (4) と同様に

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

と表現される. このとき, 行列 A と A' の関係を P を用いて表せ.

(京都大 2009) (m20093303)

0.965 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ で表される線形変換を f とする. 次の問に答えよ.

- (1) この線形変換 f によって動かない点をすべて求めよ.
- (2) この線形変換 f によって動かない直線をすべて求めよ.

(京都大 2014) (m20143303)

0.966 A, B, C, D は各々 $n \times n$ 実行列であり, D は正則であるとする. また, M は

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

として定義する $2n \times 2n$ 実行列である. M が正則であるとき, 次の (1)~(3) に答えよ.

(1)

$$\begin{pmatrix} I & F \\ 0 & I \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} I & 0 \\ G & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

を満たす $n \times n$ 実行列 F, G, H を A, B, C, D を用いて表せ. ここに, I は $n \times n$ 単位行列, 0 は $n \times n$ ゼロ行列である.

(2) (1) で求めた行列 H は正則であることを示せ.

(3) M^{-1} を A, B, C, D を用いて表せ.

(京都大 2015) (m20153304)

0.967 実数のパラメータ θ に依存する行列 $A(\theta)$ が

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{3}\cos^2\theta & -\frac{2}{3}\cos\theta\sin\theta \\ -\frac{2}{3}\cos\theta\sin\theta & 1 - \frac{2}{3}\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

で与えられている. $\mathbb{R}^2$ の点 $\mathbf{x}$ をデカルト座標系 $O - x_1x_2$ を用いて $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ と表す. これらを用いて, 集合 $\Omega(\theta)$ を

$$\Omega(\theta) = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \cdot A(\theta)\mathbf{x} \leq 1\}$$

と定義する. ここに, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ に対して

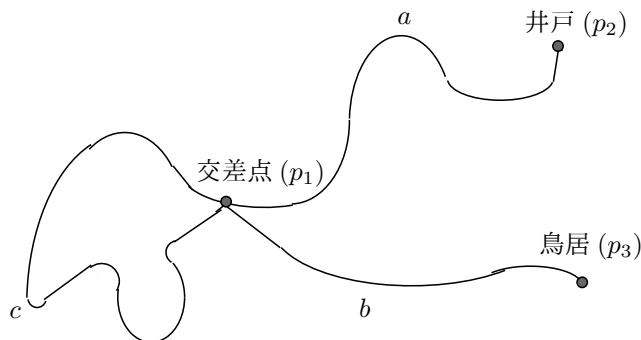
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^2 x_i y_i$$

である. このとき, 次の (1)~(4) に答えよ.

- (1) $A(\theta)$ のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ。ただし、固有ベクトルは正規化して単位ベクトルとせよ。
- (2) $\Omega(\theta)$ の概形を描け。
- (3) $\Omega(0) \cap \Omega(\pi/2)$ の面積を求めよ。
- (4) $\bigcup_{0 \leq \theta \leq \pi/2} \Omega(\theta)$ を図示し、その面積を求めよ。ここに、 $\mathbf{x} \in \bigcup_{0 \leq \theta \leq \pi/2} \Omega(\theta)$ とは、 $0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$ なる θ_0 があって、 $\mathbf{x} \in \Omega(\theta_0)$ となることである。

(京都大 2015) (m20153305)

0.968



上の図はある村の略図を表す。この村には三つの主要な場所として交差点 (p_1)、井戸 (p_2)、鳥居 (p_3) がある。 p_1 と p_2 は道 a で結ばれており、 p_1 と p_3 は道 b で結ばれている。また、 p_1 からは道 c を通って p_1 に戻ることができる。道 a, b, c の長さはいずれも 1 とする。

二つの場所 x と y があるとき (ただし、このとき一般に $x = y$ の場合も許す)、 x から一つ以上の道を通って y に至る経路を考えることにする。場所 x から場所 y に至る経路は、場所を表す記号と道を表す記号が交互に現れる記号列で表すことができる。また、ある経路中に現れる道の長さの合計をその経路の長さと呼ぶ。たとえば、 p_2 から道 a を通り p_1 に移動し、さらに道 b を通って p_3 に至る経路は、記号列 (p_2, a, p_1, b, p_3) で表すことができ、この経路の長さは 2 である。また、記号列 $(p_2, a, p_1, c, p_1, a, p_2)$ は長さ 3 の経路を表す。後者の例のように、経路中に同じ場所や同じ道が複数回現れても良い。

二つの場所 p_i と p_j が道で直接結ばれている場合は第 i 行第 j 列成分を 1 として、直接結ばれていない場合は第 i 行第 j 列成分を 0 とすることにより、この村の場所と道は、次のような 3 行 3 列の行列 A で表現できる。この行列を隣接行列と呼ぶ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき、行列 $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の第 i 行第 j 列成分は、 p_i から p_j に到達する長さ 2 の異なる経路の数を表す。たとえば、第 1 行第 1 列成分の値 3 は、 p_1 から p_2 に到達する (p_1, c, p_1, c, p_1) 、 (p_1, a, p_2, a, p_1) 、 (p_1, b, p_3, b, p_1) という 3 個の長さ 2 の経路が存在することを表す。

問 1~問 3 に答えよ。

- (1) A^3 を求めよ。
- (2) A^3 の第 1 行第 1 列成分の値に対応する経路をすべて列挙せよ。

(3) A^n を求めよ. (n は 1 以上の自然数である.)

(京都大 2017) (m20173304)

0.969 次の行列の逆行列を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(京都大 2019) (m20193301)

0.970 次の行列の行列式を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 & 3 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -8 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (n \text{ 次の正方行列, ただし } n \text{ は } 2 \text{ 以上の自然数})$$

(京都大 2019) (m20193303)

0.971 (1) 次の行列が正則行列となるための a の条件を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 上記の行列において $a = 1$ の場合の行列式の値を求めよ.

(3) $x_1 \sim x_4$ を変数とする 次の連立方程式を解け.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(京都大 2022) (m20223302)

0.972 行列 X を

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

とする.

(1) 行列 X の固有値を求めよ.

(2) 固有値がすべて正の整数になる a を求めよ.

(3) (2) で求めた a の値を用いた場合の行列 X を対角化せよ.

0.973 問1～問3に答えよ.

問1 次の行列が正則であるか調べ, 正則であるなら逆行列を求めよ.

$$(イ) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(ロ) \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

問2 次の行列の最大の固有値とそれに対応する固有ベクトルを1つ求めよ.

$$(イ) \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$(ロ) \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

問3 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ について以下を求めよ.

(イ) A^2

(ロ) B^3

(ハ) $A^{100}B^{100}$

0.974 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 4 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & 10 & 15 & 6 \\ 4 & 10 & 20 & 4 \end{pmatrix}$ の階数 (rank) を求めよ.

0.975 3次元ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対して, 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

を用いて, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t \mathbf{x} A \mathbf{y}$ と定める. ここで ${}^t \mathbf{x}$ は $\mathbf{x}$ の転置を表す.(1) A の逆行列 B を求めよ.(2) 任意の3次元ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ に対して, $f(\mathbf{x}, B\mathbf{y}) = f(C\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を満たす3次正方行列 C を求めよ.

0.976 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2k & 3 \end{pmatrix}$ について以下の各問に答えよ.

- (1) 行列 A が 2 を固有値として持ち、かつ正則行列となるように k を定めよ.
- (2) (1) で求めた k に対して、 A の固有値 2 に対応する固有ベクトルを求めよ.

(京都工芸繊維大 2000) (m20003411)

0.977 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(京都工芸繊維大 2001) (m20013408)

0.978 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 1 & 0 & a & 3 \\ 1 & 2 & a+2 & a \end{pmatrix}$ を考える. ただし, a は定数である.

- (1) 行列 A の階数を求めよ.
- (2) 次の連立 1 次方程式が解をもつように a の値を定め、その解を求めよ.

$$\begin{cases} x + y + (a+1)z = 2 \\ x + az = 3 \\ x + 2y + (a+2)z = a \end{cases}$$

(京都工芸繊維大 2001) (m20013409)

0.979 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ 2 & 1 & -1 \\ a^2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ が固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ を持つような a の値を求めよ. また、このとき行列 A のすべての固有値及びの行列式を求めよ.

(京都工芸繊維大 2001) (m20013410)

0.980 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないような実数 x の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2002) (m20023408)

0.981 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して, A^2, A^3 および, $E - A$ の逆行列 $(E - A)^{-1}$ を求めよ.

ただし, E は 3 次の単位行列である.

(京都工芸繊維大 2002) (m20023409)

0.982 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について, 次の各問いに答えよ. ただし, a は定数である.

- (1) A の行列式の値が -2 となるように定数 a を定めよ.
- (2) (1) で得られた定数 a の値に対して, A の固有値とその固有ベクトルをすべて求めよ.

(京都工芸繊維大 2002) (m20023410)

0.983 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -x & 3 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ x & -x & 4 \end{pmatrix}$ に対して、行列の積 AB を求め、次に AB の行ベクトルが 1 次従属となるように x を定めよ。

(京都工芸繊維大 2003) (m20033409)

0.984 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ a & 2 & b \\ -1 & b & 2 \end{pmatrix}$ が固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ をもつとする。

- (1) 成分 a, b の値を求めよ。 (2) A の固有値をすべて求めよ。

(京都工芸繊維大 2003) (m20033410)

0.985 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値をすべて求めよ。

(京都工芸繊維大 2003) (m20033411)

0.986 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ の行列式の値が 1 となるように a の値を定めよ。

また、そのように a の値を定めたとき、 A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

(京都工芸繊維大 2004) (m20043404)

0.987 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値とその固有ベクトルをすべて求めよ。

(京都工芸繊維大 2004) (m20043405)

0.988 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ p & q & r \end{pmatrix}$ が直交行列となり、その行列式が 1 となるように p, q, r を定めよ。

(京都工芸繊維大 2005) (m20053404)

0.989 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 9 & -2 & 9 \\ 5 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。ただし、 E は 3 次の単位行列を表す。

- (1) A の固有多項式 $f_A(x)$ および A の固有値をすべて求めよ。ただし、 $f_A(x)$ は行列 $xE - A$ の行列式のことである。
 (2) 自然数 $n \geq 1$ に対して、多項式 $(x-1)^{n+2}$ を $f_A(x)$ で割った余りを求め、行列 $(A - E)^{n+2}$ を求めよ。

(京都工芸繊維大 2005) (m20053405)

0.990 a, b を異なる定数とするとき、行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & -b & a \\ b & a & x & -a \\ a & a & b & x \end{pmatrix}$$

が逆行列を持たないような x の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2005) (m20053406)

0.991 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値とその固有ベクトルをすべて求めよ.

さらに, A^n (n は自然数) の行列式の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2006) (m20063411)

0.992 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 行列 $xE - A$ の行列式を求めよ. ただし, x はスカラー, E は 4 次の単位行列を表す.

(2) A の固有値とその固有ベクトルをすべて求めよ.

(京都工芸繊維大 2007) (m20073401)

0.993 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の固有方程式の重解を λ_0 とする. 固有値 λ_0 に対応する 2 つの固有ベクトルで, 正規直交系をなすものを 1 組求めよ.

(京都工芸繊維大 2008) (m20083401)

0.994 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.

(2) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(京都工芸繊維大 2010) (m20103401)

0.995 E を 3 次の単位行列とし, $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の実固有値のうちで最小のものを λ とする. λ に対する固有ベクトル $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を 1 つ求めよ.

(3) $B = A^7 + 5A^4 + E$ とおく. (2) で求めたベクトル $\vec{v}$ が B の固有ベクトルになることを示し, $\vec{v}$ に対する B の固有値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2012) (m20123401)

0.996 一般に 3 次正方行列 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ に対して $\text{tr}(X) = x_{11} + x_{22} + x_{33}$ とおく.

$\text{tr}(X)$ を X のトレースという. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ -3 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $\text{tr}(X)$ の値を求めよ.
- (2) 任意の 3 次正方行列 X のたいして, $\text{tr}(XA) = \text{tr}(AX)$ となることを証明せよ.
- (3) $AX - XA = A$ となる 3 次正方行列 X は存在しないことを証明せよ.

(京都工芸繊維大 2013) (m20133401)

0.997 (1) a を実数とする. 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ a & 3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ

(2) 整数を成分とする 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ がある.

- (a) A の固有多項式の 1 次の項の係数を求めよ.
- (b) A が複素数の範囲でただ一つの固有値 α をもつとき, $3\alpha^2$ は整数であることを示せ.

(京都工芸繊維大 2014) (m20143401)

0.998 (1) 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) n を自然数とする. 3 次正方行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, B^n を求めよ.

(京都工芸繊維大 2015) (m20153401)

0.999 実数 a, b, c に対して 4 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & c & -b \\ 1 & -c & 0 & a \\ 1 & b & -a & 0 \end{pmatrix}$$

を考える.

(1) $a + b + c \neq 0$ のとき, A が正則行列であることを示せ.

(2) $a + b + c = 0$ のとき, 4 次の列ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ で, $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たすものをすべて求めよ.

(京都工芸繊維大 2017) (m20173401)

0.1000 a, b を実数とし, 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & -1 & b \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ は固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を持つとする.

(1) a, b を求めよ.

(2) A の固有値をすべて求めよ.

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & b & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ を求めよ.

(京都工芸繊維大 2019) (m20193401)

0.1001 a を実数とする. 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を考える. E は 3 次の単位行列を表す.

(1) 行列 $aE + A$ の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) 行列 $aE + A$ の階数を求めよ.

(3) 3 次正則行列 P で

$$P^{-1}(aE + A)P = aE + A^2$$

を満たすものは存在しないことを示せ.

(京都工芸繊維大 2020) (m20203401)

0.1002 4 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の固有ベクトルのみから成る $\mathbb{R}^4$ の正規直交基底を 1 組求めよ.

(京都工芸繊維大 2021) (m20213401)

0.1003 4 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ および, 数ベクトル空間 $\mathbf{R}^4$ のベクトル $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を考える.

(1) 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4$ をすべて求めよ.

(2) 行列 A の階数を求めよ. また, $\mathbf{R}^4$ の部分空間 $V = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ の次元を求め, V の基底を 1 組求めよ. ただし, $\mathbf{0}$ は $\mathbf{R}^4$ の零ベクトルである.

(3) $\mathbf{R}^4$ の部分空間 $W = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4\}$ の基底を 1 組求めよ.

(京都工芸繊維大 2023) (m20233401)

0.1004 以下では, 行列の成分はすべて実数であるとする. E を 2 行 2 列の単位行列とし, O を 2 行 2 列の零行列とする. 2 行 2 列の行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対し, 2 行 2 列の行列 $\tilde{A}$ と実数 $\text{tr}(A)$ を

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \text{tr}(A) = a + d$$

と定める. また, $|A|$ は A の行列式であるとする.

- (1) 行列の積 $A\tilde{A}$ および $\tilde{A}A$ を求めよ.
- (2) $A - \text{tr}(A)E + \tilde{A}$ を求めよ.
- (3) 等式 $A^2 - \text{tr}(A)A + |A|E = O$ が成り立つことを示せ.
- (4) 次の条件 (i) と条件 (ii) は同値であることを示せ.
 - (i) $A^2 = O$
 - (ii) $|A| = 0$ かつ $\text{tr}(A) = 0$

(京都工芸繊維大 2025) (m20253401)

0.1005 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して,

- (1) 固有値と単位固有ベクトルを求めよ.
- (2) 対角化するための直交行列 P とその逆行列 P^{-1} を求めよ.
- (3) $B = A^9 + 3A$ を求めよ.

(大阪大 1997) (m19973505)

0.1006 2 次曲線 $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 3$ を標準化して, そのグラフを書くことを考える.
以下の問に順次答えよ.

- (1) 2 次形式 $F = 2x^2 - 4xy + 5y^2$ の行列 A を求めよ.
- (2) 対称行列 A の固有値 α, β を求めると共に, それぞれに対応した大きさ 1 の固有ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ を計算せよ.
- (3) 直交行列の定義を述べよ. また, (2) で求めた列ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ より 2 次の正方行列 $P = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ を作成した場合, P が直交行列となっていることを示せ.
- (4) P を用いて, 行列 A を対角化せよ.
- (5) (3) で求めた P を用いて, 次式のようにもとの (x, y) 座標系から (x', y') 座標系に変換した場合, 新しい座標系ともとの座標系の関係はどのようなになっているか示せ.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

- (6) 2 次曲線 $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 3$ に対して, (5) の座標変換を行い, 新しい座標系 (x', y') で表現したときの式を求めよ.
- (7) 与えられた 2 次曲線 $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 3$ の図形を描け.

(大阪大 1999) (m19993503)

0.1007 行列 $A = \begin{pmatrix} -t & t+1 \\ -t+1 & t \end{pmatrix}$ とする.

- (1) A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(2) $C^{-1}AC$ が対角行列となるような正則行列 C , および, そのときの対角行列 $C^{-1}AC$ を求めよ.

(3) A^n を求めよ. ただし, n は正の整数である.

(大阪大 2001) (m20013505)

0.1008 X_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) は 3 次の正方行列で, $X_{k+1} = AX_k + E$ が成り立つとする.

$$\text{ここに, } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{である.}$$

このとき, X_n を求めよ.

(大阪大 2001) (m20013506)

0.1009 行列 $\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}$ が表す平面上の一次変換を f とする. 点 P, Q, R, S をそれぞれ $(1, 0), (0, 1),$

$(-1, 0), (0, -1)$, さらに円 $C: x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ とし, 円 C が f によって移される図形を C' とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $t = \frac{1}{2}$ のとき f によって四辺形 $PQRS$ はどのような図形に移されるか.

(2) (1) で求めた図形との位置関係に留意して, $t = \frac{1}{2}$ のときの図形 C' の概形を描け.

(3) t がすべての実数を動くとき C' が通過する点 (x, y) の集合を求めよ.

(大阪大 2002) (m20023504)

0.1010 次のような 4 つの未知変数 x_1, x_2, x_3, x_4 をもつ連立一次方程式を考える.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 & = & 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \end{cases}$$

次の (1), (2) に答えよ.

(1) 上述の連立一次方程式の係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の列ベクトルのうちで, なるべく少ない個数の列ベクトルを用いて, それらの一次結合 (線形結合) によって, その他の列ベクトルを表現せよ.

(2) 上述の連立 1 次方程式の解 x_1, x_2, x_3, x_4 のうちで,

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2$$

を最小にするものを求めよ.

(大阪大 2003) (m20033502)

0.1011 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(2)

$$(A^8 + 3A - 4I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

を満足する点 (x, y, z) の集合はどのような図形となるか. 図形の方程式を導出せよ. ただし, I は 3 次の単位行列である.

(大阪大 2004) (m20043507)

0.1012 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問に答えよ.

(1) λ を実数とすると, 行列式 $|\lambda A - B|$ を極大ないし極小とする λ の値をすべて求めよ.

(2) 方程式 $\lambda A \vec{x} = B \vec{x}$ が $\vec{x} = \vec{0}$ 以外のベクトルを解に持つときの λ の値と対応する解 $\vec{x}$ をすべて求めよ. ただし, $\vec{0}$ は零ベクトルである.

(大阪大 2005) (m20053501)

0.1013 行列 $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -16 \\ -6 & 1 & 12 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値, 単位固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) 行列 A の表す 1 次変換によって, 直線 $x = 3y = 3z$ が写される直線を示せ.

(3) 行列 A の表す 1 次変換によって自分自身に写される直線の中で, どの 2 組も平行でないものを 3 つ求めよ.

(大阪大 2006) (m20063501)

0.1014 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(2) 適当な変換行列 (対角化するための正則行列) P を求め, 行列 A を対角化せよ.

(3) 行列 A の n 乗を求めよ.

(大阪大 2007) (m20073503)

0.1015 (1) 空間上の直交座標 (x, y, z) を極座標 (r, θ, φ) :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (r > 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

に変換するとき, そのヤコビアン (関数行列式) を計算しなさい.

(2) 広義積分
$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} dx dy dz$$

について, $\alpha = \frac{1}{2}$ のときの値 $I\left(\frac{1}{2}\right)$ を求めなさい.

(3) $I(\alpha)$ が収束する α の範囲を求めなさい.

- (4) 広義積分 $J(\alpha, \beta) = \iiint_B \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha |\log(x^2 + y^2 + z^2)|^\beta} dx dy dz$
 が収束するような α, β の満たすべき条件を求めなさい.
 ただし, $B = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < \frac{1}{4} \right\}$.

(大阪大 2007) (m20073506)

0.1016 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{pmatrix}$ について, 以下の設問に答えよ. ただし, a は実数とする.

- (1) A の行列式の値を求めよ.
- (2) $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ が 1 次独立となるとき a の条件を求めよ.
- (3) A の固有値の一つが 0 であるとき, a の値を求めよ.
 また, その場合のすべての固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (4) A の固有値の一つが 1 であるとき, A^n を求めよ. ただし, $a < 0$ とする.

(大阪大 2007) (m20073507)

0.1017 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0.5 \\ 1 & a + 0.5 \end{pmatrix}$ について, 以下の設問に答えよ. ただし, a は実数とする.

- (1) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 以外の解をもつために, a が満たすべき条件を示せ.
- (2) x_1, x_2, b_1, b_2 を実数とする. $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ が存在するために, a, b_1, b_2 が満たすべき条件をすべて述べよ. また, それぞれの場合の解あるいは解集合を求めよ.
- (3) A の固有値と固有ベクトルを求めて, A を対角化せよ.
- (4) A^n を求めよ. ただし, n は自然数とする.
- (5) 任意の 2 次元列ベクトル $\mathbf{x}$ について, $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n \mathbf{x} = \mathbf{0}$ となるための a の範囲を求めよ. ただし, $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n \mathbf{x} = \mathbf{0}$ はベクトル $A^n \mathbf{x}$ の各成分が 0 に収束することをいう.

(大阪大 2008) (m20083502)

0.1018 対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ. ただし, a, b および c は実数であり, また, $b \neq 0$ である.

- (1) 実数の固有値が 2 個存在することを示せ.
- (2) 相異なる固有値に属する固有ベクトルが互いに直交することを示せ.
- (3) 行列 A は対称行列であるので, 適当な直交行列 U によって対角化される. この直交行列 U を使った $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ という一次変換によって, $(x \ y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が $\lambda_1 v^2 + \lambda_2 w^2$ となることを示せ. ただし, λ_1 および λ_2 は行列 A の相異なる固有値である.
- (4) (3) の関係を利用して $2x^2 - 2xy + 2y^2$ を $\lambda_1 v^2 + \lambda_2 w^2$ の形にしたい. このときの λ_1 および λ_2 を求めよ.

(大阪大 2008) (m20083508)

- 0.1019** (1) A および B を n 次実対称行列とする. n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ についての方程式 $\lambda A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}$ が実数 $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ のときに $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ である解をもつとする. λ_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) に対応する解を $\boldsymbol{x}_i$ とする. $\lambda_i \neq \lambda_j$ のとき, ${}^t\boldsymbol{x}_i A \boldsymbol{x}_j = 0$ となることを示せ. ただし, ${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す.

- (2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるとき, 上の方程式が $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ であるような解をもつ λ_1, λ_2 と, それに対応する解 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を一つずつ求めよ.

(大阪大 2009) (m20093501)

- 0.1020** 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ の指数関数 $\exp(A)$ を求める. ただし, a, b および c は実数ある. また, E を単位行列として, 行列 A の指数関数 $\exp(A)$ を

$$\exp(A) = E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

のように定義する.

- (1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.
 (2) 行列 A は対称行列であるので, 適当な直交行列によって対角化される. 行列 A を対角化する直交行列の中で対称行列となる直交行列 P を 1 つ求めよ.
 (3) 行列 A の指数関数 $\exp(A)$ を求めよ.
 (4) $\exp(A)$ の行列式 $|\exp(A)|$ を求めよ.

(大阪大 2010) (m20103501)

- 0.1021** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 2 & 2 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$ について考える. ただし, a は実数とする.

- (1) 行列 A の固有値の一つが 0 である場合, a の値を求めよ.
 (2) $a = -1$ の場合について, A の固有値と固有ベクトルを求めて, A を対角化せよ.
 (3) $\boldsymbol{x}$ を長さ 1 のベクトルとする. ベクトル $\boldsymbol{y}$ を, $\boldsymbol{x}$ の A による一次変換 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ とする.
 $a = -1$ の場合について, $\boldsymbol{y}$ の長さ $|\boldsymbol{y}|$ を最大とする $\boldsymbol{x}$ を求めよ. また, そのときの長さ $|\boldsymbol{y}|$ を求めよ.

(大阪大 2011) (m20113506)

- 0.1022** 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{x_n\}, \{y_n\}$ が, 行列 $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -11 & 4 \\ -30 & 11 \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \frac{1}{3^n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

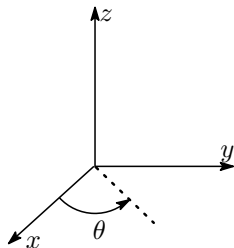
と定義される. ここで n は自然数とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) PAP^{-1} を求めよ.
 (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.
 (3) 第 n 項が $c_n = 2^n b_n$ で与えられる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ.

- (4) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ならびに $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ を求めよ.

(大阪大 2012) (m20123501)

0.1023 下図に示すように、3次元実ベクトル空間における直交座標系を考える。 z 軸回りの回転については、回転角 θ の正の方向を、下図の矢印の方向とする。 また、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ とする。 このとき、以下の問に答えよ。



- (1) 点 (x, y, z) を点 (x', y', z') へと移す xy 平面に平行な移動 $x' = x + az$, $y' = y + bz$, $z' = z$ を考える。 このとき、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

なる 3 次正方行列 A を求めよ。

- (2) 点 (x, y, z) を点 (x', y', z') へと移す z 軸周り角 θ の回転を考える。 このとき、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

なる 3 次正方行列 B を求めよ。

- (3) 問い (1), (2) における行列 A, B に関して、行列式 $|AB|$ を求め、 $(AB)^{-1}$ が存在することを示せ。
 (4) 問い (1), (2) における行列 A, B に関して、 $(AB)^{-1}$ を求めよ。
 (5) 問い (1), (2) における行列 A, B に関して、 $AB = BA$ となるための必要十分条件を示せ。

(大阪大 2012) (m20123504)

0.1024 以下の設問に答えよ。

- (1) 実数を要素とする行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ が異なる固有値を有するための条件を求めよ。 また、そのとき、異なる固有値に対する固有ベクトルが直交することを示せ。
 (2) 2 次曲線 $7x^2 - 4xy + 7y^2 = 9$ の概形を描け。
 (3) $x^2 + y^2 = 1$ のとき、関数 $f(x, y) = 2x^2 + dxy + 3y^2$ の最大値と最小値を求めよ。 ただし、 d は実数の定数とする。

(大阪大 2012) (m20123506)

- 0.1025** (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} b & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ c & 0 & b \end{pmatrix}$ のすべての固有値と、それぞれに対応する固有ベクトルを求めよ。

ただし、 a, b, c は実数である。

- (2) 行列 A を対角化する直交行列の中で、対称行列となる P を一つ求めよ。

(3) A^n を求めよ. ただし, n は自然数を表す.

(4) (2) で求めた P を用いて $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と 1 次変換することで, $x^2 + 2y^2 + z^2 + xz$

が $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 w^2$ と表せることを示せ. また, 定数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の値を求めよ.

(大阪大 2013) (m20133503)

0.1026 行列の対角化に関する以下の設問に答えよ.

(1) 次の対称行列 A を直交行列によって対角化せよ. ただし, a は実定数である.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列 B が正則行列によって対角化できるための実定数 b, c の必要十分条件を求めよ. また, 対角化出来る場合は対角化せよ.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

(大阪大 2015) (m20153506)

0.1027 $\mathbb{R}^2$ は 2 次元実数数列ベクトルの集合とする. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ の大きさを $|\mathbf{x}|$ とし, 実数を成分とする 2 次の正方行列 B に対して

$$\|B\| = \max_{|\mathbf{x}|=1} |B\mathbf{x}|$$

と定める. $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ のとき, $\|B\|$ の値を求めよ. また, その値を与える $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ をすべて求めよ.

(大阪大 2016) (m20163501)

0.1028 (1) 実数を成分とする 2 次の正方行列 A, B は対称行列とし, A は相異なる固有値を持つとする. このとき, $AB = BA$ ならば A と B は同じ直交行列によって対角化されることを示せ.

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ を同じ直交行列によって対角化せよ.

(大阪大 2016) (m20163502)

0.1029 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に関して以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A が対角化する直交行列 P の中で対称行列を求めよ.

(3) A の逆行列を, 問い (1), (2) で求めた A の固有値と P を用いて表せ.

(4) 問い (3) の結果を用いて, 連立方程式 $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ の解を求めよ.

(5) 問い (3) の結果および直交行列の性質 $P^T P = I$ を用いて, 正の整数 n に対する連立方程式

$A^n \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ の解 $\mathbf{x}_{(n)}$ を P, n および A の固有値を用いて表せ. , $n \rightarrow \infty$ としたときの $\mathbf{x}_{(n)}$

の極限を示せ. ただし, P^T は P の転置行列を, I は単位行列を表す.

0.1030 行列 $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) すべての固有値と、それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ。ただし、固有ベクトルの大きさは1とする。
- (2) 関数 $f(x, y, z)$ の x, y, z についての偏導関数をそれぞれ $f_x(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$, $f_z(x, y, z)$, 関数 $g(x, y, z)$ の x, y, z についての偏導関数をそれぞれ $g_x(x, y, z)$, $g_y(x, y, z)$, $g_z(x, y, z)$ とする。関数 $f(x, y, z)$ が条件 $g(x, y, z) = 0$ のもとで点 (a, b, c) において極値をとり、 $g_x(a, b, c) \neq 0$ または $g_y(a, b, c) \neq 0$ または $g_z(a, b, c) \neq 0$ ならば、次の式を満たす実数 λ が存在する。

$$f_x(a, b, c) - \lambda g_x(a, b, c) = 0$$

$$f_y(a, b, c) - \lambda g_y(a, b, c) = 0$$

$$f_z(a, b, c) - \lambda g_z(a, b, c) = 0$$

条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ のもとで、次の関数 $f(x, y, z)$ が最小値をとる (x, y, z) を求めよ。

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(大阪大 2017) (m20173503)

0.1031 次式で表される xyz 座標系の2次曲面について以下の問いに答えよ。

$$8x^2 + 2\sqrt{3}yz + 7y^2 + 5z^2 = 8$$

- (1) 与式の左辺の対称行列 A を用いて $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の形式で表せ。
- (2) A のすべての固有値を重複する場合も含めて求め、それぞれに対応する固有ベクトルを求めよ。ただし、固有ベクトルは互いに直交するものを示すこと。
- (3) A を対角化する直交行列を一つ示し、その直交行列で対角化せよ。
- (4) xyz 座標系の原点から小問(2)で求めた各固有ベクトルの方向に X 軸, Y 軸, Z 軸をとるとき、与えられた2次曲面の $X-Y$, $Y-Z$, $Z-X$ の各平面による切断面をそれぞれ図示せよ。その際、切断面の輪郭線と各軸との交点の座標を記入すること。

(大阪大 2019) (m20193503)

0.1032 $\mathbf{x} = {}^t(x, y, z)$ に対する線形変換

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x + 3y - z \\ 2x + y + 3z \\ 3x + 2y + 4z \end{pmatrix}$$

について、以下の問いに答えよ。ただし、 t は行列の転置を表すとする。

- (1) ある行列 A を用いて、 $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ と表すことができる。この行列 A を求めよ。
- (2) k を実数とし、 $\mathbf{b} = {}^t(5, 0, k)$ とする。 $\mathbf{x}$ についての方程式 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ が解を持つための k についての必要十分条件を求めよ。またその条件が満たされるとき解を求めよ。

- (3) $\mathbf{0} = {}^t(0, 0, 0)$ とする. $\mathbf{x}$ についての方程式 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ の解を求めよ.
- (4) E を 3 次の単位行列とし, 行列 B を $B = A - E$ で定める. 行列 B の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(大阪大 2019) (m20193506)

0.1033 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & a \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ. ただし, a, b は実数とする.

- (1) A の固有値と, それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求め, すべての固有値と固有ベクトルが実数であるための条件を述べよ.
- (2) A の逆行列が存在するための条件を述べ, 逆行列 A^{-1} を求めよ.
- (3) 問い (2) の結果を用い, 逆行列 A^{-1} が存在するときの連立方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ の解を求めよ.
- (4) A を対角化する行列 P を一つ示し, A を対角化せよ.
- (5) A^n を求めよ. また, $n \rightarrow \infty$ のとき A^n のすべての要素が実数を持ち, かつ発散しないための a, b の範囲を示せ.

(大阪大 2020) (m20203501)

0.1034 3 次の正方行列 $M = (m_{ij})$ に対して, 対角成分の和 $\sum_{i=1}^3 m_{ii}$ を $\text{tr}(M)$ で表すとする.

また, 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする. 以下の問に答えよ.

- (1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (2) (1) で求めた行列 A の 3 つの固有値を, それぞれ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とする. このとき,
 $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ が成り立つことを示せ.
- (3) 実数を成分とする 3 次の正方行列 B, C に対して, $\text{tr}(BC) = \text{tr}(CB)$ が成り立つことを示せ.
- (4) 実数を成分とする 3 次の正方行列 D は, 互いに異なる実数の固有値 μ_1, μ_2, μ_3 を持つとする. このとき, $\text{tr}(D) = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ が成り立つことを示せ.

(大阪大 2020) (m20203506)

0.1035 (1) 実数を成分に持つ対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ について, 以下の小問に答えよ.

- (a) A の固有値をすべて求めよ.
- (b) A を直交行列によって対角化せよ.
- (2) 実数を成分に持つ 3 次の対称行列 B が, 3 つの相異なる固有値を持つとする. B の異なる固有値に対応する固有ベクトルは, 互いに直交することを示せ.

(大阪大 2021) (m20213507)

0.1036 以下の問いに答えよ. ただし, A_n は n 次の実正方行列を, A_n^T は A_n の転置行列を表す.

- (1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & p & 0 \end{pmatrix}$ が正則ではないとき、実数 p の値を求めよ;
- (2) $A_3^T = -A_3$ である A_3 を任意の実数 a, b, c を用いて表し、正則かどうかを判定せよ.
- (3) $A_n^T = -A_n$ である A_n が正則かどうかを判定せよ. ただし、 n は 5 以上の奇数であるとする.

(大阪大 2022) (m20223501)

0.1037 $0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \phi < 2\pi$ とする. 3 次の正方行列 A, B を次式で定義し、 $C = AB$ とする.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix}$$

なお、虚数単位は $i (= \sqrt{-1})$ とする. 以下の設問に答えよ.

- (1) 行列 C の行列式の値を求めよ.
- (2) 行列 C のすべての固有値およびそれらの絶対値を求めよ.

(大阪大 2022) (m20223506)

0.1038 本問では、成分を実数とする実ベクトルおよび実行列を扱う. 3 次の列ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対して、 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積を $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^\top \mathbf{b}$ で表す. ここで、 $\mathbf{c}^\top$ はベクトル $\mathbf{c}$ の転置を表す.

ベクトル $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^\top$ を考える. $\mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^\top$ に対して写像 f を

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})\mathbf{v}$$

により定める. 以下の設問に答えよ.

- (1) ベクトル $\mathbf{e}_1 = (1 \quad 0 \quad 0)^\top$ に対して $f(\mathbf{e}_1)$ を求めよ.
- (2) 任意のベクトル $\mathbf{x}$ に対して $\mathbf{v}$ と $\mathbf{x} - f(\mathbf{x})$ が直交することを証明せよ.
- (3) 写像 f は、ある行列 P を用いて $f(\mathbf{x}) = P\mathbf{x}$ と表すことができる. この行列 P を求めよ.
- (4) 設問 (3) で定義された P について、等式 $P^2 = P$ が成り立つことを示せ.
- (5) 設問 (3) で定義された P の 0 でない固有値とその固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(大阪大 2023) (m20233506)

0.1039 実行列 A について、以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix} \quad (0 < p < 1, 0 < q < 1)$$

- (1) A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ. ただし、 $\lambda_1 > \lambda_2$ である.
- (2) λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトルをそれぞれ一つ示せ.
- (3) 正則行列 P により、 A は D のように対角化された. $\boxed{\mathcal{A}}, \boxed{\mathcal{I}}$ を示せ. また、逆行列 P^{-1} を求めよ.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{\mathcal{A}} \\ \boxed{\mathcal{I}} & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ を求めよ.

(大阪大 2024) (m20243501)

0.1040 m 次の正方行列 X に対して, 行列 e^X を

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots$$

と定める. ただし, I は m 次の単位行列, $0! = 1$, $X^0 = I$ であり, 行列の級数の収束は, 成分ごとの収束を意味するものとする. また,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

とする. 以下の設問に答えよ,

- (1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (2) 適当な正則行列 P によって行列 A を対角化せよ.
- (3) n を自然数とする. A^n を求めよ.
- (4) e^A を求めよ,

(大阪大 2024) (m20243506)

0.1041 $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & -6 & -3 \\ -2 & -2 & -2 & -4 & 4 \\ 5 & -6 & -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$ であるとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -2 & -2 & -2 \\ 5 & -6 & -3 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.
- (2) 行列 A の階数 (rank) を求めよ.

(大阪府立大 2003) (m20033602)

0.1042 次のような行列 A について, 以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (2) $(aI - A)$ が正則でないための必要条件を求めよ. ここで, a はスカラー数, I は 3×3 の単位行列とする.

(大阪府立大 2005) (m20053601)

0.1043 (1) 次の方程式を解け. なお, $|\cdot|$ は行列式を表す.

$$\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & -2 & x+3 \\ 3 & x+4 & x-4 & x+5 \\ 0 & x+1 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & x-8 \end{vmatrix} = 0$$

- (2) 以下の行列 A が逆行列を持つ条件を示せ. また, 行列 A の逆行列を求めよ. なお, a は実数と

する. $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

(大阪府立大 2008) (m20083601)

0.1044 行列 A をつぎのように定義する：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき、つぎの各問いに答えよ。

- (1) 行列 A の固有値を求めよ。
- (2) 問い (1) で求めた固有値に対応する行列 A の長さ 1 の固有ベクトルを、それぞれ求めよ。
- (3) 問い (1) と問い (2) の結果を使って、行列 A を対角化せよ。
- (4) 行列 A の n 乗、 A^n を求めよ。ただし n は自然数とする。

(大阪府立大 2010) (m20103604)

0.1045 行列 A, B を $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。ここで、 a, b, c, d は実数である。

このとき、実数 a, b, c, d がどのような条件を満たせば、 $AB = BA$ が成立するか。

(大阪府立大 2010) (m20103605)

0.1046 次の各行列が逆行列をもつかどうかを判定しなさい。また、逆行列をもつ場合、それを求めなさい。

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(大阪府立大 2010) (m20103610)

0.1047 関数 $X(r, \theta) = r \cos \theta$, $Y(r, \theta) = r \sin \theta$ の定義域はいずれも $D = (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 2つの集合

$$A = \{(X(r, \theta_0), Y(r, \theta_0)) \mid r \in (0, \infty)\}, B = \{(X(r_0, \theta), Y(r_0, \theta)) \mid \theta \in (-\pi, \pi)\}$$

を 1 つの座標平面上に図示せよ。ただし、 $\theta_0 \in (-\pi, \pi)$, $r_0 \in (0, \infty)$ は定数である。

- (2) 行列 $J(r, \theta) = \begin{pmatrix} X_r(r, \theta) & Y_r(r, \theta) \\ X_\theta(r, \theta) & Y_\theta(r, \theta) \end{pmatrix}$ とその行列式 $|J(r, \theta)|$ を求めよ。ただし、

$$X_r = \frac{\partial X}{\partial r}, Y_r = \frac{\partial Y}{\partial r}, X_\theta = \frac{\partial X}{\partial \theta}, Y_\theta = \frac{\partial Y}{\partial \theta}$$

である。

- (3) 2つのベクトル $(X_r(r, \theta), Y_r(r, \theta))$, $(X_\theta(r, \theta), Y_\theta(r, \theta))$ が直交することを示せ。

(大阪府立大 2011) (m20113602)

0.1048 次の問いに答えよ。

- (1) ある実対称行列は異なる固有値をもつとする。このとき、異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交することを示せ。

(2) 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする. このとき, A の固有値, 固有ベクトルを求め, A を対角化せよ.

(大阪府立大 2011) (m20113606)

0.1049 3次元空間内の点 A, B の位置ベクトルを $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ とする.

(1) 行列

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

の固有値を求めよ.

(2) (1) の行列 C を用いて,

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x}, \quad \|\mathbf{x}\| \leq 1$$

とするとき, 点 B 全体のなす図形の体積を示せ. ただし, $\|\mathbf{x}\|$ はベクトル $\mathbf{x}$ の大きさを表す.

(大阪府立大 2011) (m20113607)

0.1050 2×2 の行列 A をつぎのように定義する:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

このとき, つぎの各問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) 問い(1)で求めた固有値に対応する行列 A の長さ1の固有ベクトルを求めよ.

(3) 問い(1)で求めた固有値を λ , 対応する長さ1の固有ベクトルを $\mathbf{x}$ と置く. 次の等式を満たすベクトル $\mathbf{y}$ を求めよ.

$$(A - \lambda E)\mathbf{y} = \mathbf{x}$$

ただし E は 2×2 の単位行列であるとする.

(4) ベクトル $\mathbf{x}$ とベクトル $\mathbf{y}$ が次のように成分表示されたとする.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

このとき 2×2 の行列 B を次のように定義する:

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

次の等式を満たす 2×2 の行列 C を求めよ:

$$AB = BC$$

(大阪府立大 2013) (m20133604)

0.1051 4次の正方行列 A を $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ により定める.

- (1) 行列 A の階数を求めよ.
- (2) 行列 A の固有値をすべて求めよ. さらに, そのうちで絶対値が最小の固有値に対する固有ベクトルを 1 つ求めよ.

(大阪府立大 2016) (m20163603)

0.1052 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.
- (2) A を直交行列を用いて対角化せよ.

(大阪府立大 2016) (m20163605)

0.1053 4 次の正方行列 A と 4 次の実数ベクトル $\mathbf{b}$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

により定める.

- (1) 行列 A の階数を求めよ.
- (2) $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ を満たす 4 次の実数ベクトル $\mathbf{v}$ のうち, $\|\mathbf{b} + \mathbf{v}\|$ を最小にする $\mathbf{v}$ を求めよ. ただし, $\mathbf{0}$ は 4 次の零ベクトルとし, $\|\mathbf{b} + \mathbf{v}\|$ はベクトル $\mathbf{b} + \mathbf{v}$ の大きさ (ノルム) を表すとする.

(大阪府立大 2018) (m20183601)

0.1054 線形写像 $f: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$ に対して

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & +2x_3 \\ 2x_1 & +x_2 & +7x_3 & +x_4 \\ x_1 & +2x_3 & +x_4 \end{pmatrix}$$

と定める. ただし, $\mathbf{R}^n$ は実数を成分とする n 次元列ベクトルの全体を表す.

- (1) $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4$ に対して, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ を満たす行列 A の第 j 列ベクトルを $\mathbf{a}_j$ とする. $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ は 1 次従属であることを示せ.
- (2) f の像 $\text{Im } f = \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4\}$ の次元と 1 組の基底を求めよ.
- (3) f の核 $\text{Ker } f = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ の次元と 1 組の基底を求めよ.
- (4) f は全射か単射か示せ.

注意: 「全射」は「上への写像」, 「単射」は「1 対 1 写像」とも呼ばれる.

(大阪府立大 2018) (m20183608)

0.1055 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

とする.

- (1) A のすべての固有値を求めよ.
- (2) A の各固有値に対する固有空間の基底を 1 組ずつ求めよ.
- (3) 行列 A を対角化する直交行列 P を 1 つ求め, 対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ.

(大阪府立大 2018) (m20183609)

0.1056 2 次正方行列 A を $A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$ により定める. また, E を 2 次の単位行列とする.

- (1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.
- (2) 行列 A を対角化せよ.
- (3) 一般に, B を 2 次正方行列とし, P を 2 次の正則行列とする. さらに, $C = P^{-1}BP$ とおく. このとき, $k = 1, 2, \dots$ に対し,

$$(B + uE)^k = P(C + uE)^k P^{-1}$$

が成り立つことを示せ. ただし, u は実数とする.

- (4) $k = 1, 2, \dots$ に対し, $(A + 7E)^k(A + 2E)^3$ を計算せよ.

(大阪府立大 2019) (m20193601)

0.1057 $\mathbf{R}^3$ 上の 1 次変換 f を

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 9x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 8x_3 \end{pmatrix}$$

と定め, $\mathbf{R}^3$ の部分空間 W_1 を $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 - x_3 = 0 \right\}$ とする.

- (1) $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ に対して, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ をみたす行列 A を求めよ.
- (2) f の像 $\text{Im } f = \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3\}$ の次元と 1 組の基底を求めよ.
- (3) f の核 $\text{Ker } f = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ の次元と 1 組の基底を求めよ.
- (4) $W_2 = W_1 \cap (\text{Im } f)$ の次元と 1 組の基底を求めよ.

(大阪府立大 2019) (m20193609)

0.1058 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とし, 内積は標準内積とする.

- (1) A のすべての固有値を求めよ.

- (2) 固有値 0 に対する A の固有空間の正規直交基底を求めよ.
 (3) 行列 A を対角化する直交行列 P を 1 つ求め, 対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ.

(大阪府立大 2019) (m20193610)

0.1059 c, w, x, y, z を実数とし, 4 次正方行列 A と 4 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -c+1 & -1 & -2c+1 \\ -1 & 2c+1 & 2 & 3c-1 \\ 2 & -c+4 & 0 & -3c+2 \\ 0 & 0 & 1 & c^2-c \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

により定める.

- (1) A の行列式を求めよ.
 (2) A が正則にならない c の値をすべて求めよ.
 (3) c を, (2) で求めた値のうち最大のものとする. このとき, $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でない $\boldsymbol{x}$ を 1 つ求めよ. ただし, $\mathbf{0}$ は 4 次元零ベクトルとする.

(大阪府立大 2020) (m20203601)

0.1060 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) B の階数 (= rank) r を求めよ.
 (2) B の 4 個の列ベクトルから r 個の 1 次独立ベクトルの取り出し方は何通りあるか求めよ. ただし, r は (1) で求めた r である.

(関西大 2003) (m20033703)

0.1061 サイコロを 4 回投げて, 出た目の数を順に a_1, a_2, a_3, a_4 とする.

- (1) a_1, a_2 の最大値が 1 となる確率 p_1 を求めよ.
 (2) a_1, a_2 の最大値が 2 となる確率 p_2 を求めよ.
 (3) a_1, a_2 の最大値が 3 となる確率 p_3 を求めよ.
 (4) 2 次元ベクトル $\begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ のすカラー倍となる確率 p_4 を求めよ.
 (5) 2 次正方行列 $\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}$ が正則となる (すなわち, 逆行列をもつ) 確率 p_5 を求めよ.

(関西大 2005) (m20053703)

0.1062 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を余因子を使って求めよ.

(神戸大 1994) (m19943804)

0.1063 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を対角化せよ. (変換行列も示せ)

(神戸大 1994) (m19943805)

0.1064 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

について, 次の間に答えよ.

- (1) 行列 A は正則であるか.
- (2) 連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ に解があれば, その解を求めよ.

(神戸大 1996) (m19963805)

0.1065 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値及び固有ベクトルを求めよ.

(神戸大 1996) (m19963806)

0.1066 次の行列 A の固有値及び固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(神戸大 1997) (m19973811)

0.1067 $A = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき, 次の (1)~(4) に答えよ.

- (1) $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (n は任意の整数) を示せ.
- (2) $AT^n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ とするとき, $0 < d_1 < |c_1|$ をみたす n を求めよ.
(以下の (3), (4) ではこの n を使う)
- (3) $AT^nST^m = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ とするとき, $d_2 = 0$ となる m を求めよ.
- (4) A を S と T を用いて表せ.

(神戸大 1998) (m19983805)

0.1068 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

また $T^{-1}AT$ が対角行列になるような正則行列 T は存在するか. 存在するならそれを求め, 存在しないならその理由を述べよ.

(神戸大 2000) (m20003804)

0.1069 次の行列 A の余因子行列 $\tilde{A}$ を求めよ. また A が正則であれば, その逆行列 A^{-1} を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(神戸大 2001) (m20013808)

0.1070 行列 A を次のようにするとき、次の各問に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(2) A^n ($n \geq 2$) を求めよ。

(神戸大 2001) (m20013811)

0.1071 n を 2 以上の自然数とすると、次の行列の行列式を求めよ。ただし、 $a_1, a_2, \dots, a_n$ は実数とする。

$$\begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{pmatrix}$$

(神戸大 2002) (m20023805)

0.1072 $a_1, \dots, a_n$ を実数とすると、次の $n \times n$ 行列の行列式を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 + a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1 + a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1 + a_n \end{pmatrix}$$

(神戸大 2003) (m20033809)

0.1073 行列 A を次のように定めるとき、以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(2) A^n を求めよ。

(神戸大 2003) (m20033810)

0.1074 $\mathbf{R}^3$ の基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 、行列 B を次のように定める。

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

φ を基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ に関して B で表現される $\mathbf{R}^3$ 上の線形変換とすると、以下の問いに答えよ。

(1) 基底 $\{e_1 + e_2, e_2, e_3\}$ に関する φ の表現行列を求めよ。

(2) どの基底に関しても φ が B で表現されているときの a, b, c の値を求めよ。

(神戸大 2003) (m20033811)

0.1075 次の n 次正方行列の行列式を求めよ.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ a_1 & b_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ a_1 & b_2 & b_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ a_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & a_n \\ a_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

(神戸大 2004) (m20043807)

0.1076 次の各問に答えよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の余因子行列 $\tilde{A}$ を求めよ.

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} x & 1 & a & b \\ y^2 & y & 1 & c \\ yz^2 & z^2 & z & 1 \\ yzt & zt & t & 1 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det(B)$ を求めよ.

(神戸大 2004) (m20043808)

0.1077 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき, 次の問に答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A が対角可能か否か, 理由を述べて答えよ. また対角可能ならば, 対角化せよ.

(神戸大 2004) (m20043809)

0.1078 (1) 次の行列式を因数分解しなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

(2) 次の連立一次方程式の解を全部求めよ. 解全体を解空間と呼ぶ. この解空間の次元はいくらか?

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(神戸大 2005) (m20053801)

0.1079 a, b, c, d を $ad - bc = 1$, $0 < |c| < 1$ を満たす実数とし, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える. 次の漸化式で定義される行列の列を考える.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = A, \\ A_{n+1} = A_n A_0 A_n^{-1} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

とおく. $M = \frac{1}{1-|c|}$ において, 以下 $|a| < M$ を仮定する.

(1) $a_n d_n - b_n c_n = 1$ ($n = 1, 2, \dots$) が成り立つことを示せ.

(2) c_n を計算しなさい.

(3) $|a_n| < M$ を証明せよ.

(神戸大 2005) (m20053804)

0.1080 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を行列式が 1 の行列とする: $ad - bc = 1$. A のトレース $a + d$ を t とする: $t = a + d$. このとき

$$A^2 = f(t)A + g(t)I$$

を満たす関数 $f(t)$, $g(t)$ を求めよ. ここで, I は単位行列を表す. ただし, $A \neq \pm I$ と仮定しておく. さらに, $t = 0$ または $t = \sqrt{2}$ のとき, それぞれ $A^4 = I$ または $A^4 = -I$ となることを示せ.

(神戸大 2006) (m20063801)

0.1081 次の 2 次対称行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$ を直交行列 P を用いて対角化せよ.

(神戸大 2006) (m20063806)

0.1082 (1) $\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$ の行列式を因数分解せよ.

(2) n 次の正方行列 A が ${}^t A = -A$ を満たしているとする. ただし, ${}^t A$ は A の転置行列である. このとき, n が奇数ならば, A の行列式は 0 であることを示せ.

(神戸大 2008) (m20083806)

0.1083 $0 < a < 1$ を満たす実数 a に対して, $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 自然数 n に対して A^n を求めよ.

(2) 自然数 n に対して $S_n = E + A + A^2 + \dots + A^n$ とおく. ただし, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が存在し, $(E - A)^{-1}$ に等しいことを示せ.

(神戸大 2008) (m20083807)

0.1084 (1) 次の行列 A の行列式 $|A|$ は, x に関する高々 4 次の多項式で表される. このとき, x^2 の係数を A の成分を用いて表せ. ただし, A の $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ 成分以外の成分は x に無関係な定数とする.

$$A = \begin{pmatrix} x & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & x & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & x^2 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

- (2) $\{a, b, c\}$ を 3次元ベクトル空間 V の基底とし, f を次のような V の線形変換とする. このとき, 以下の各問に答えよ.

$$\begin{cases} f(a) = -a - c \\ f(b) = a \\ f(c) = a + b + 2c \end{cases}$$

(a) $\{a + b + c, a + b, a\}$ は V の基底であることを示せ.

(b) V の基底 $\{a + b + c, a + b, a\}$ に関する f の表現行列 A を求めよ.

(神戸大 2009) (m20093801)

0.1085 a, b を実数, $a \neq 0$ とする. 行列 A を $A = \begin{pmatrix} a-b & a & a \\ a & a-b & a \\ a & a & a-b \end{pmatrix}$ と定める.

- (1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
 (2) A を対角化する直交行列 P を求めて A を対角化せよ.
 (3) $A^{20} = E_3$ を満たす a, b の値を求めよ. ただし, E_3 は 3 次の単位行列とする.

(神戸大 2009) (m20093802)

0.1086 (1) 行列式 $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の値を求めよ.

(2) 次を満たす $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{v}$ を 1 つあげよ.

$$\boldsymbol{v} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ であり, } \boldsymbol{v} \text{ は 3 つのベクトル } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ のいずれとも直交する.}$$

(神戸大 2009) (m20093805)

0.1087 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) $n = 1, 2, \dots$ に対して, A^n を求めよ. (答えのみでよい).

(2) $S_n = I + \sum_{k=1}^n \frac{\pi^k A^k}{k!}$ とおくとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ.

(神戸大 2009) (m20093806)

0.1088 実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について次の問に答えよ.

- (1) A の固有値を求めよ.
 (2) 各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.
 (3) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を求めよ. なお ${}^tPP = E$ (単位行列) をみたす実正方行列を直交行列という.

(神戸大 2010) (m20103801)

0.1089 次の行列 X, Y の逆行列をそれぞれ求めよ (a は複素数とし空欄の成分は 0 とする.)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & a & & \\ & 1 & a & \\ & & 1 & a \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & a & & \\ & 1 & a & \\ & & 1 & a \\ a & & & 1 \end{pmatrix}$$

(神戸大 2011) (m20113801)

0.1090 行列 $A = \begin{pmatrix} u & -4 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}$ は正則でないという. 以下の問いに答えよ.

- (1) u の値を求めよ.
- (2) 行列 $A + E$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ と対応する固有ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ を求めよ.
- (3) $B\mathbf{x}_1 = \sqrt{\lambda_1}\mathbf{x}_1, B\mathbf{x}_2 = \sqrt{\lambda_2}\mathbf{x}_2, B\mathbf{x}_3 = \sqrt{\lambda_3}\mathbf{x}_3$ を満たす行列 B を求めよ.

(神戸大 2013) (m20133801)

0.1091 実係数行列

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ -1 & 0 & -a \\ a & -a & a^2 - 1 \end{pmatrix}$$

について次の問に答えよ.

- (1) M の固有値 λ と固有空間 $W(\lambda; M)$ を求めよ.
- (2) 固有空間 $W(\lambda; M)$ の正規直交基底を求めよ.

(神戸大 2015) (m20153801)

0.1092 実係数行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+t^2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

について, 次の問に答えよ.

- (1) A^2, A^3, A^4 を求めよ.
- (2)

$$B_n = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$$

を $B_n = x_n E + y_n A$ とするとき,

$$B = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) E + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right) A$$

を求めよ. ここで E は単位行列を表す.

- (3) $B = E$ を満たすような t を求めよ.

(神戸大 2015) (m20153803)

0.1093 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値 λ と固有空間 $W(\lambda; A)$ を全て求めよ.
- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P を 1 つ求めよ. なお, ${}^tPP = E$ (単位行列) を満たす実正方行列 P を直交行列という.
- (3) $n \in \mathbb{N}$ に対して, A^n のトレース $\text{Tr } A^n$ を計算せよ.

(神戸大 2016) (m20163801)

0.1094 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ に対して, $B = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n kA^{k-1}$ とする. ただし, A^0 は単位行列 E を表すものとする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) B を求めよ.
- (2) $(E - A)^2 B$ を計算せよ.

(神戸大 2016) (m20163802)

0.1095 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値をすべて求めよ.
- (2) (1) で求めたそれぞれの固有値に対して固有ベクトル空間を求めよ.
- (3) $B = P^{-1}AP$ となるような直交行列 P と対角行列 B の組を一つ求めよ.

(神戸大 2018) (m20183801)

0.1096 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ.

- (1) $A = B {}^tB$ をみだし, すべての対角成分が正の下三角行列 B を求めよ. ただし, tB は B の転置行列とする.
- (2) A の行列式の値を求めよ.
- (3) B の逆行列を求めよ.
- (4) A^{-1} の第 4 行を求めよ.

(神戸大 2018) (m20183802)

0.1097 実数 a, b に対し 3 次実正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

を考える. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値を求めよ.
- (2) A が相異なる 3 つの固有値をもつための a, b の条件を求めよ.
- (3) (2) の条件が成り立つとき, $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を一つ求めよ. また, そのときの $P^{-1}AP$ を求めよ.

(神戸大 2021) (m20213801)

0.1098 S を 2×2 実対称行列とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 行列 S が正定値 (すべての固有値が正) のとき, S の $(1, 1)$ 成分, $(2, 2)$ 成分は 0 でないことを示せ.
- (2) 積分 $\int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-x_1^2 - x_2^2) dx_1 dx_2$ を極座標に変換することにより求めよ.
- (3) 積分 $\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}x^T S x\right) dx_2$ を x_1 の関数として求めよ. ただし, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ であり, S は正定値とする.

(神戸大 2021) (m20213803)

0.1099 a を実数とし,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

とする.

- (1) $B = P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P が存在するための必要十分条件を, a を用いて表せ.
- (2) (1) の条件が成り立つとき, $B = P^{-1}AP$ となる直交行列 P と対角行列 B の組を一つ求めよ.

(神戸大 2022) (m20223806)

0.1100 行列 A とベクトル u を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

で定める. 次の問いに答えよ.

- (1) u は A の固有ベクトルであることを示せ.
- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正方行列 P を 1 つ求めよ.
- (3) 上記の P に対し, $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{-1}A^n P$ を求めよ.
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ を求めよ.

(神戸大 2023) (m20233801)

0.1101 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で定める. 次の問いに答えよ.

- (1) A の固有多項式を求めよ.
- (2) A の固有値 λ は $-2 < \lambda < 2$ をみたすことを示せ.
- (3) A の固有値を $2 \cos \theta$ ($0 < \theta < \pi$) の形で表示せよ. ただし, 3 倍角の公式

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

を証明せずに用いてもよい.

0.1102 整数 b_1, b_2, b_3 に対して行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

で定める。次の問に答えよ。

- (1) A のランクが 2 となるために b_1, b_2, b_3 がみたすべき必要十分条件を求めよ。
- (2) x, y, z についての連立一次方程式

$$x + y + z = 0, \quad b_1x + b_2y + b_3z = 0$$

の実数解をすべて求めよ。

- (3) (2) の連立一次方程式の解で各成分が整数となるものをすべて求めよ。

(神戸大 2024) (m20243804)

0.1103 次の行列 A に対して以下の設問 (1), (2) に答えよ。 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

- (1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ。固有ベクトルは第一成分 (x 成分) が 1 のものを求めよ。
- (2) 行列 A を用いて、2 変数関数 $f(x, y)$ を以下の式で定義する。

$$f(x, y) = (x \ y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (x, y \text{ は実数})$$

この 2 変数関数 $f(x, y)$ に対して $f(x, y) = a(x+y)^2 + b(x-y)^2$ となるように a, b を求めよ。

(鳥取大 2006) (m20063914)

0.1104 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ から $\mathbf{x}' \in \mathbf{R}^2$ への線形写像 (1 次変換) が次のように与えられた。ただし、 $\mathbf{R}^n$ は実数 $\mathbf{R}$ 上の n 次元ベクトル空間を表す。

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

- (1) 表現行列 A の行列式 $|A|$ の値を求めなさい。
- (2) 1 次変換 f の逆変換 f^{-1} における表現行列 A^{-1} を求めなさい。
- (3) 1 次変換 f について、 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ を満たす $\lambda (\in \mathbf{R})$ をすべて求めなさい。

(鳥取大 2008) (m20083908)

0.1105 5 つ行列の積 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ で与えられる行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。ただし、固有ベクトルは正規化すること。

(鳥取大 2009) (m20093904)

0.1106 正の数 a, b, c が $a + b + c = 1$ を満たすとき、行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

に対し、次の問に答えよ。

- (1) 1 は A の固有値であることを示せ.
- (2) 1 以外の A の固有値を求め, それらの絶対値は 1 より小さいことを示せ.
- (3) $\mathbf{x}$ を 3 次元のベクトルとすると, n を限りなく大きくすれば, $A^n \mathbf{x}$ はある 3 次元ベクトルに限りなく近づくことを示せ.

(岡山大 2001) (m20014003)

- 0.1107** (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 10 & 7 & 10 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して, $A^2 - 5A + 6E$ を計算せよ. ただし E は単位行列を表す.
- (2) 整式 $f(x) = x^8$ を 2 次式 $g(x) = x^2 - 5x + 6$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $R(x)$ とおく. このとき $f(x), g(x), Q(x), R(x)$ たちが満たす関係式を述べよ. また $Q(x)$ と $R(x)$ の次数はいくつか?
- (3) (1) の行列 A に対して A^8 を求めよ.

(岡山大 2005) (m20054001)

- 0.1108** (1) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ のすべての固有値および固有ベクトルを求めよ.
- (2) 一次方程式

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

が解をもつのは, a, b, c の間にどのような関係が成り立つときか答えよ.

(岡山大 2006) (m20064001)

- 0.1109** (1) 次の行列 A に対して, その階数 $\text{rank}(A)$ を求めよ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- (2) $m \geq 2, n \geq 1$ のとき, $m \times n$ 行列 A に対して, A の第 1 行を取り除いた $(m-1) \times n$ 行列を A' と書くことにする. $\text{rank}(A) - \text{rank}(A')$ は 0 または 1 であることを示せ.
- (3) $m \geq 2, n \geq 2$ のとき, $m \times n$ 行列 A に対して, A の第 1 行と第 1 列を取り除いた $(m-1) \times (n-1)$ 行列を A'' と書くことにする. A をさまざまな行列を動かしたときの $\text{rank}(A) - \text{rank}(A'')$ の最小値と最大値を求めよ.

(岡山大 2007) (m20074001)

- 0.1110** 行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

- (1) 行列 A の 3 つの列ベクトルが生成する $\mathbf{R}^3$ の部分ベクトル空間の次元を求めよ.
- (2) 連立一次方程式

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

が解をもつための a, b, c に関する条件を求めよ.

- (3) 行列 A の固有値および固有空間をすべて求めよ.

(岡山大 2008) (m20084004)

0.1111 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有方程式 $x^2 - (a+d)x + (ad-bc) = 0$ が相異なる2つの実数解 α, β をもつとする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $(A - \alpha E)(A - \beta E) = O$, $A \neq \alpha E$, $A \neq \beta E$ が成り立つことを示せ。ただし、 E は単位行列、 O は零行列とする。
- (2) $Ax = \alpha x$ と $Ay = \beta y$ をそれぞれ満たす零でない列ベクトル x と y が存在することを示せ。また、 x と y は一次独立であることを示せ。
- (3) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ を満たす2次正則行列 P が存在することを示せ。

(岡山大 2009) (m20094003)

0.1112 (1) 3次正方行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ の行列式を計算し、その逆行列を求めよ（答のみでよい）。
 (2) (x_1, x_2, x_3, x_4) に関する次の連立一次方程式が $(0, 0, 0, 0)$ 以外にも解をもつとき、 a の値を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & a & 2 & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(岡山大 2009) (m20094004)

0.1113 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ において、すべての成分 a, b, c, d が正数のとき、次の問いに答えよ。

- (1) A は異なる実数の固有値を持つことを示せ。
- (2) 固有ベクトルとして少なくとも一つは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ($x > 0, y > 0$) となるベクトルがとれることを示せ。

(岡山大 2011) (m20114003)

0.1114 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ。

- (1) A の逆行列を求めよ。
- (2) A の固有値をすべて求めよ。
- (3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P を求めよ。

(岡山大 2012) (m20124003)

0.1115 2次正方実行列 A であって ${}^tA = A$ を満たす行列全体からなる実ベクトル空間を V とする。ここで、 tA は A の転置行列を表す。

- (1) V は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ を基底として持つことを示せ。

(2) V の元 A に対して

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

を対応させる写像 f は、 V 上の線形変換であることを示せ。また、 f の階数を求めよ。

(岡山大 2012) (m20124004)

0.1116 a を実数とし、行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $A - E$ は逆行列を持たないことを示せ。(ただし、 E は単位行列とする。)

(2) ある正の実数 b に対して、 $A - bE$ も $A + bE$ も逆行列を持たないとする。このとき a の値を求めよ。

(3) ある正則な行列 P により

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

であるとする。このとき a の値を求めよ。また、このような行列 P を一つ求めよ。

(岡山大 2013) (m20134003)

0.1117 行列 X の階数を $\text{rank}(X)$ と表すことにする。 A, B を n 次正方行列としたとき以下の問いに答えよ。

(1) 不等式

$$\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$$

を示せ。また、 A が正則ならば等号が成立することを示せ。

(2) $AB = O$ (ゼロ行列) のとき、不等式

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n$$

を示せ。

(3) $n = 3$ とし、 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ とおく。 B の階数を求めよ。さらに

$$\text{rank}(AB) = \text{rank}(A) - 2$$

を満たす A は存在しないことを示せ。

(岡山大 2013) (m20134004)

0.1118 $\mathbb{R}^4$ 上の線形変換 f を $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$) で定める。ただし、 A は次で与えられる行列とする。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 行列 A の階数 (ランク) を求めよ。

- (2) 写像 f の像 $\text{Im}(f)$ の基底を一組求めよ.
 (3) 写像 f の核 $\text{Ker}(f)$ の次元を求めよ.
 (4) $\mathbb{R}^4 = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$ であるか判定せよ.

(岡山大 2015) (m20154003)

0.1119 3次正方行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad B = {}^tAA$$

により与えられる. ここで, tA は A の転置行列である. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) A および B の行列式を計算せよ.
 (2) $P^{-1}BP$ が対角行列となるような直交行列 P を一つ求めよ.
 (3) $B = C^2$ となる対称行列 C を求めよ.
 (4) C は正則行列であり, AC^{-1} は直交行列であることを示せ.

(岡山大 2015) (m20154004)

0.1120 実数を成分とする 3 次正方行列 A で次の条件を満たすものを考える.

$$(*) \quad A^2 \neq O, \quad A^3 = O$$

以下の問いに答えよ.

(1)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると, B は上記の条件 $(*)$ を満たすことを示せ.

- (2) $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ かつ $A^2\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ となる $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ が存在することを示せ.
 (3) 上記 (2) における $\mathbf{u}$ に対して, $\mathbf{u}, A\mathbf{u}, A^2\mathbf{u}$ は 1 次独立であることを示せ.
 (4) ある正則行列 P を用いて

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

と表されることを示せ.

(岡山大 2016) (m20164003)

0.1121 $t \in \mathbb{R}$ に対して, 3 次正方行列 A を次で定める.

$$A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ.

- (1) A の行列 $\det A$ を t の多項式で表し, かつ, $\det A = 0$ となる t を求めよ.
 (2) $\text{rank}(A)$ を t の値で場合分けして求めよ.

- (3) 3 個の列ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ を次のようにとる.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

そして、線形写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{a} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{b} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{c}, \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)$$

と定める. ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は, $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = {}^t(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ で与えられる $\mathbb{R}^3$ 上の標準内積である.

$\text{rank}(f)$ を t の値で場合分けして求めよ.

(岡山大 2016) (m20164004)

- 0.1122** 初期値 $F_1 = 1, F_2 = 1$ と漸化式 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ で定義される数列 $\{F_n\}$ をフィボナッチ数列という. 例えば, $F_3 = F_2 + F_1 = 2, F_4 = F_3 + F_2 = 3$ である. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) F_6 を求めよ. また, 行列式

$$\det \begin{pmatrix} F_4 & F_5 \\ F_5 & F_6 \end{pmatrix}$$

の値を求めよ.

- (2) $n \geq 1$ に対して, 2 次の正方行列 A_n を

$$A_n = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{pmatrix}$$

によって定めるとき, $\det A_n = (-1)^{n-1}$ が成り立つことを示せ.

- (3) $n \geq 1$ に対して, 3 次の正方行列 B_n を

$$B_n = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \\ F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} \\ F_{n+2} & F_{n+3} & F_{n+4} \end{pmatrix}$$

によって定めるとき, $\det B_n = 0$ が成り立つことを示せ.

- (4) 上の問い (3) で定義した B_n の余因子行列を $\tilde{B}_n$ とかくとき, $n \geq 1$ に対して, $\det \tilde{B}_n = 0$ が成り立つことを示せ.

(岡山大 2017) (m20174003)

- 0.1123** (1) 3 次正方行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

のすべての固有値および各固有値に属する固有ベクトルを求めよ.

- (2) x, y, z を変数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x - y - 2z = a \\ 2x + y + z = b \\ 3y + 5z = c \end{cases}$$

が解をもつための a, b, c の条件を答えよ. また, その一般解を求めよ.

(岡山大 2017) (m20174004)

0.1124 行列 P の転置を tP と表す. n 次正方行列 P が ${}^tP = P$ を満たすとき対称行列といい, ${}^tP = -P$ を満たすとき交代行列という. 次の問いに答えよ.

(1) n 次正方行列 A に対して, 次を示せ.

$$B = \frac{1}{2}(A + {}^tA), \quad C = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$$

とおくとき, B は対称行列, C は交代行列である.

(2) 次の正方行列 A を対称行列と交代行列の和で表せ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \\ 10 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

(広島大 2001) (m20014109)

0.1125 行列と複素数に関する次の問いに答えよ.

(1) 実数成分をもつ次の行列 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

は $a = b = 0$ でない限り正則である (逆行列をもつ) ことを示せ.

(2) A にその $(1,1)(2,1)$ 成分から構成された複素数 $a + ib$ ($i^2 = -1$) を対応させる. このとき, 行列の積, 逆行列には複素数の積, 逆数がそれぞれ対応することを示せ.

(広島大 2003) (m20034107)

0.1126 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ と定める. 次の答えよ.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) A を正則行列で対角化せよ.

(広島大 2003) (m20034108)

0.1127 (1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が一次独立であるための必要十分条件は, $ad - bc \neq 0$ であることを示せ.

(3) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ によって定まる線形写像

$$A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

に対し, 核空間 $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ の次元と, 像空間 $W = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4\}$ の次元を求めよ.

(広島大 2005) (m20054104)

0.1128 正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値と対応する固有ベクトルをすべて求めよ。
 (2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を一つ求めよ。
 (3) 零ベクトルではないベクトル $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ に対して、次のように帰納的に $\mathbf{x}_n$ を定義する。

$$\mathbf{x}_{n+1} = \frac{1}{\|A\mathbf{x}_n\|} A\mathbf{x}_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$n \rightarrow \infty$ とするとき、 $\mathbf{x}_n$ が A の絶対値が一番大きな固有値に対する固有ベクトルに収束するならば、 $\mathbf{x}_0$ は絶対値が一番大きな固有値に対する固有ベクトルと直交しないことを示せ。ただし、 $\|\cdot\|$ は、ベクトルの大きさを表すものとする。

(広島大 2005) (m20054105)

- 0.1129** (1) P は $P^2 = P$ を満たす $n \times n$ 実行列とする。 $Q = I - P$ とおくと、次を満たすことを示せ。

$$PQ = QP = O \quad Q^2 = Q$$

- (2) (1) の P, Q に対して $V = \{P\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$, $W = \{Q\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ とおく。このとき、 $\mathbb{R}^n$ は V と W の直和に分解される、すなわち、任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ は、

$$\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \quad \mathbf{v} \in V, \quad \mathbf{w} \in W$$

と一意的に表されることを示せ。

- (3) (2) における V と W の任意の元は $\mathbb{R}^n$ の内積

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n x_j y_j \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

に関して互いに直交しているとする。このとき、 P は対称行列であることを示せ。

(広島大 2005) (m20054106)

- 0.1130** $n \times n$ 複素行列に対し、

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

を証明せよ。ただし、 $A^\dagger = ({}^t A)^*$ (A の転置かつ複素共役) である。

(広島大 2005) (m20054108)

- 0.1131** $\mathbb{R}^n$ に属する m 個のベクトルの組 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ に対して、次の命題 (*) が真であるとき $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ は 1 次独立であるといい、偽であるとき $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ は 1 次従属であるという。

(*) 「 $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ が $\sum_{j=1}^m c_j \mathbf{a}_j = \mathbf{0}$ を満たせば $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$ となる」

- (1) 命題 (*) の否定命題を述べよ。
 (2) 次で与えられるベクトルの組 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ が 1 次独立であるか、1 次従属であるかを判定せよ。

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- (3) A は相異なる実数の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ をもつ 3 次の実正方行列で、 $\mathbf{e}_j \neq \mathbf{0}$ ($j = 1, 2, 3$) は λ_j に対応する固有ベクトルとする。このとき、 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ。

0.1132 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ。ただし、 a は実数とする。

- (1) 行列 A の階数を求めよ。
 (2) 三つの平面

$$\begin{aligned}\pi_1 &: x - y + z = 0 \\ \pi_2 &: 2x + y - 4z = 0 \\ \pi_3 &: x + 2y + az = 0\end{aligned}$$

の交点全体はどのような図形になるかを述べ、その理由を説明せよ。

- (3) $a = -5$ のとき、 A の固有値と固有ベクトルを求めよ。

0.1133 次の 3×3 行列の固有値を求めよ。 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

0.1134 実数 a に対して行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & -1 & a & -2 \\ 2 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) A の行列式 $\det A$ を求めよ。
 (2) $\det A = 0$ となるような非負の実数 a を求め、その時の A の階数を計算せよ。
 (3) 前問における a に対して、 $A\mathbf{v} \neq 0$ かつ $A^2\mathbf{v} = 0$ となるようなベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ を 1 つ求めよ。

0.1135 実数を成分とする 3 次正方行列全体のなすベクトル空間を V とする。また、行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と定義し、線形写像 $f: V \rightarrow V$ を $f(X) = AX - XA$ ($X \in V$) で定義する。

- (1) 線形写像 f に関して、

$$E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が固有ベクトルであることを示せ。また、その固有値を求めよ。

- (2) 線形写像 f に関して、 X が固有値 k を持つ固有ベクトルであるとき、転置行列 tX が固有値 $-k$ を持つ固有ベクトルであることを示せ。
 (3) 線形写像 f に関して、固有値と対応する固有空間をすべて求めよ。

0.1136 次の 4×4 行列の逆行列が存在しないための条件を求めよ。ただし、 x は実数とする。

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 0 & x \\ x & 1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 & x \\ x & 0 & x & 1 \end{pmatrix}$$

(広島大 2008) (m20084108)

0.1137 2 次の実正方行列全体のなすベクトル空間を V とし、その任意の元 A, B に対して

$$(A, B) = \text{tr}({}^tAB),$$

とおく。ただし、 tA は A の転置行列とし、 $\text{tr} C$ は行列 C のトレースとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) (A, B) は内積であることを示せ。

(2) A と B が

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

で与えられているとき、 (A, B) を求め、さらに A と B のなす角 θ を求めよ。

ただし、 $0 \leq \alpha - \beta \leq \pi$ とする。

(3) (2) で定義した A に対して、線形写像 $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(X) = (A, X)$ ($X \in V$) で定義する。このとき $\text{Ker } f$ の次元を求め、 $\text{Ker } f$ の正規直交基底を 1 組求めよ。

(広島大 2009) (m20094104)

0.1138 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ を対角化せよ。すなわち、 $P^{-1}AP = D$ を満たす正則行列 P および対角行列 D を一組求めよ。

(広島大 2013) (m20134103)

0.1139 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。

(1) A の逆行列が存在する条件を求めよ。

(2) (1) が満たされるとき、 A の逆行列を求めよ。

(広島大 2014) (m20144104)

0.1140 2 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ において、ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ で表す。一つの単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ を固定して、写像 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を次のように定義する。

$$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{u}$$

以下の問いに答えよ。

(1) 写像 T は線形写像であることを示せ。

(2) ベクトル $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{u}$ と平行であるとき、 $T(\boldsymbol{x})$ を求めよ。また、ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ が直交するとき、 $T(\boldsymbol{x})$ を求めよ。 $\boldsymbol{u}$ を用いない形で表すこと。

(3) ベクトル $\boldsymbol{u}$ と直交する単位ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とする。 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ とするとき、 $T(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の一次結合で表し、 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}, T(\boldsymbol{x})$ の関係を図示せよ。

(4) ベクトル $\mathbf{u}$ を

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

と表すとき、写像 T の標準基底に関する表現行列 A を求めよ。

(広島大 2014) (m20144107)

0.1141 2×2 行列 A は、固有値 1 に属する固有ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ と固有値 4 に属する固有ベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を持つとする。また、 2×2 行列 B を $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ により定義する。以下の問いに答えよ。

- (1) 2×2 行列 P で $A = PBP^{-1}$ が成り立つようなものをひとつ見つけよ。(答だけで良い.)
- (2) 行列 A を求めよ。
- (3) 2×2 行列 X で $X^2 = B$ となるようなものを全て求めよ。
- (4) 2×2 行列 Y で $Y^2 = A$ となるようなものはいくつあるか。また、そのような Y をひとつ見つけよ。
- (5) 2×2 行列 Z で $Z^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるようなものを全て求めよ。

(広島大 2015) (m20154101)

0.1142 $a \in \mathbb{R}$ に対し

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

で定義される $\mathbb{R}^4$ の線形変換 f を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) f の像および核の次元を求めよ。
- (2) $a = 0$ のとき、 f の逆写像に対応する行列を求めよ。
- (3) 次の基底に関する f の表現行列を求めよ。

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(広島大 2015) (m20154103)

0.1143 実行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) A の階数を求めよ。
- (2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ。
- (3) 実 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の中で、次の図形 S を考える。

$$S = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{v} \cdot A\mathbf{v} = \sqrt{2} \right\}$$

ただし、 $\mathbf{v} \cdot A\mathbf{v}$ は $\mathbf{v}$ と $A\mathbf{v}$ との内積を表す。 S の概形を図示せよ。

(4) S の点で、原点との距離が最小のものをすべて求めよ.

(広島大 2016) (m20164101)

0.1144 実行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 9 \\ -2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$ を考える. 以下の問いに答えよ.

- (1) A の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.
- (2) A^{-1} の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.
- (3) 実 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の基底 $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ を任意にとり, $\mathbb{R}^3$ のベクトルの列 $\{\mathbf{v}_n\}$ に対して $\mathbf{v}_n = a_n \mathbf{x} + b_n \mathbf{y} + c_n \mathbf{z}$ とする. ただし, a_n, b_n, c_n は実数である. このとき, $\{\mathbf{v}_n\}$ が有界であることと, $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ がすべて有界数列であることが同値であることを示せ. ただし, $\{\mathbf{v}_n\}$ が有界であるとは, $\mathbf{v}_n$ の長さからなる数列 $\{\|\mathbf{v}_n\|\}$ が有界であることと定義する.
- (4) $W = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 \mid \{A^n \mathbf{w} \mid n = 1, 2, 3, \dots\} \text{ は有界} \right\}$ とおく. W が $\mathbb{R}^3$ の部分線形空間になることを示し, その基底を求めよ.

(広島大 2016) (m20164105)

0.1145 行列 A , ベクトル $\mathbf{b}$ を

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とし, 写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定義する.

$$f(\mathbf{x}) = (A\mathbf{x} - \mathbf{b}) \cdot (A\mathbf{x} - \mathbf{b})$$

ただし, $\cdot$ はベクトルの内積を表す. 以下の問いに答えよ.

- (1) A の階数を求めよ.
- (2) $f(\mathbf{x})$ の最小値を求めよ.
- (3) A の固有値 0 に対する固有ベクトルを一つ求めよ.
- (4) $f(\mathbf{x})$ の最小値を与える $\mathbf{x}$ の中で最も原点に近い $\mathbf{x}$ を求めよ.

(広島大 2017) (m20174103)

0.1146 a, b を実数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & a & -6 \\ 2 & -6 & b \end{pmatrix}$ によって表される

$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像をそれぞれ f, g とおく. 以下の問いに答えよ.

- (1) f の像 $\text{Im } f$ の次元を求めよ.
- (2) g の核 $\text{Ker } g$ の次元を求めよ.
- (3) $\text{Im } f = \text{Ker } g$ となるために a, b が満たすべき必要十分条件を求めよ.

(広島大 2018) (m20184101)

0.1147 A, B を n 次正方複素行列とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ i & -1 & i \end{pmatrix}$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ. ただし i は虚数単位である.

- (2) ある n 次正則行列 P が存在して $P^{-1}AP = B$ が成り立つとき, A と B の固有値の集合は一致することを示せ.
- (3) A が正則であるとき, AB と BA の固有値の集合は一致することを示せ.
- (4) $AB = BA$ が成り立つとき, A と B は少なくとも 1 つの共通の固有ベクトルを持つことを示せ.

(広島大 2018) (m20184105)

0.1148 3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) A が正則行列であることを示し, A の逆行列 A^{-1} を求めよ.
- (2) A のすべての固有値を求め, さらにそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを一つずつ求めよ.
- (3) 3 次正則行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列になるものを一つ求め, さらにそのときの対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ.
- (4) $B = A^{-1} + A^2 + A^3$ とおく. B のすべての固有値を求め, さらにそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを一つずつ求めよ.

(広島大 2021) (m20214102)

0.1149 複素数を成分とする 2 次正方行列全体のなす集合を $M(2, \mathbb{C})$ で表す. E_2 を 2 次の単位行列とする.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C})$ に対し, A の随伴行列 A^* を

$$A^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

により定める. ただし, 複素数 z に対し $\bar{z}$ は z の複素共役を表す. また

$$H(2) = \{A \in M(2, \mathbb{C}) \mid A^* = A\}$$

$$U(2) = \{A \in M(2, \mathbb{C}) \mid A \text{ は正則で } A^{-1} = A^*\}$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

- (1) $A \in H(2)$ とする. A の固有値は実数であることを示せ.
- (2) $A \in H(2)$ とする. A がただ一つの固有値をもつならば, ある実数 λ が存在して $A = \lambda E_2$ となることを示せ.
- (3) $A \in H(2)$ は異なる二つの固有値をもつとする. $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ をそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルとすると,

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$$

が成り立つことを示せ. ただし, $(\ , \)$ は $\mathbb{C}^2$ の標準エルミート内積である.

- (4) $A \in H(2)$ に対し, ある $P \in U(2)$ が存在して P^*AP が対角行列となることを示せ.

(広島大 2021) (m20214104)

0.1150 次の行列を計算せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^5 \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \quad \text{ただし, } n \text{ は自然数とする.}$$

0.1151 2次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

により定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.
- (2) (1) で求めた固有値 a に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}$ を一つ与えよ.
- (3) (1) で求めた固有値 a , および (2) で与えた固有ベクトル $\boldsymbol{p}$ に対し, 方程式

$$(A - aE)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{q}$ を一つ与えよ. ただし, E は 2 次単位行列とする.

- (4) 2 次正則行列 P で $P^{-1}AP$ が上三角行列になる P を一つ与えよ. また, そのときの $P^{-1}AP$ を答えよ.
- (5) 正整数 n に対して, A^n を求めよ.

0.1152 3 次以下の x に関する実数係数 1 変数多項式全体のなす実ベクトル空間を V とする.

写像 $\varphi: V \rightarrow V$ を

$$\varphi(f(x)) = f(x+1) - f(x) \quad (f(x) \in V)$$

により定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) φ は線形写像であることを示せ.
- (2) V の基底 $\{x^3, x^2, x, 1\}$ に関する φ の表現行列を求めよ.
- (3) $g(x) = ax^2 + bx + c \in V$ とする. ただし, a, b, c は実定数である. このとき,

$$\varphi(f(x)) = g(x)$$

をみたす $f(x) \in V$ を一つ与えよ.

- (4) φ の核 $\text{Ker } \varphi$ を求めよ.

0.1153 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めよ.

0.1154 実数 $a \geq -3$ に対し, 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -2 \\ -5 & -a & 5 \end{pmatrix}$$

により定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) A の固有値をすべて求めよ.

- (2) A が三つの異なる固有値を持つための a に対する条件を求めよ.
 (3) a が (2) の条件を満たすとき, A の各固有値に対する固有ベクトルをそれぞれ一つずつ与えよ.
 (4) $a = -1$ とする. $\{A^n \mathbf{v}\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するような $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ.

(広島大 2024) (m20244107)

0.1155 行列

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

に対し, $B\mathbf{x} = \lambda C\mathbf{x}$ をみたす $\lambda \in \mathbb{R}$ および $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ の組をすべて求めよ.

(広島大 2024) (m20244111)

0.1156 次の行列 A について, 以下の問い答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & x \\ -5 & a & -2 \\ x & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列式 $|A|$ を求めよ.
 (2) すべての実数 x に対して, A が正則であるための実数 a の範囲を求めよ.
 (3) $a = 3, x = -2$ のときの A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(広島市立大 2001) (m20014205)

0.1157 次の行列 A について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & a \\ 3 & 3 & a \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

- (1) A の固有値の 1 つが 3 であるとき, a を求めよ.
 (2) (1) で求めた a に対し, A の固有値をすべて求めよ.
 (3) (2) で求めた A のそれぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(広島市立大 2002) (m20024207)

0.1158 次の対称行列について以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) A の固有値をすべて求めよ.
 (2) (1) で求めた各固有値に対する A の正規化された固有ベクトルを求めよ.
 (3) tPAP が対角行列となる直交行列 P を求め対角化せよ. (tP は P の転置行列を表す)

(広島市立大 2005) (m20054203)

0.1159 行列 $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問に答えよ.

- (1) 固有値, 固有ベクトルの組を求めよ.
 (2) (1) で求めた固有値に対する大きさ 1 の固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ とおく. 列ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ を並べてできる行列 $P = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ が直交行列であることを示せ.

- (3) (2) の P に対して, P^tAP が対角行列であることを示せ. (ただし, P^t は P の転置行列を表すものとする.)

(広島市立大 2006) (m20064205)

0.1160 次の行列に対し, P が正則ならば Q も正則であることを示せ.

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ c & 0 & d & 0 \end{pmatrix}$$

(広島市立大 2007) (m20074203)

0.1161 次の行列 A に対し, 以下の問いに答えよ. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

- (1) 固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (2) 正則行列 P で, $P^{-1}AP$ が対角行列となるものを求めよ. なお, P^{-1} も求めること.
- (3) n を正の整数とすると, A^n を求めよ.

(広島市立大 2007) (m20074205)

0.1162 次の行列 A に対して, 以下の問いに答えよ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

- (1) A の固有値の 1 つが 2 であるとき, a を求めよ.
- (1) で求めた a に対して, 以下の (2),(3),(4) の問いに答えよ.
- (2) A の固有値をすべて求めよ.
- (3) (2) で求めた各固有値に対する, A の固有ベクトルを求めよ.
- (4) 正則行列 P で, $P^{-1}AP$ が対角行列となる P を求めよ.

(広島市立大 2008) (m20084203)

0.1163 (1) 次の 3 次正方行列 A の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- (2) 上の正則行列 A を対角化する正方行列 P を求めよ. また, 対角化された行列 $P^{-1}AP$ も答えよ.
- (3) n 次正方行列 B の固有値の一つが $b(b \neq 0)$ であるとき, b^2 および b^{-1} がそれぞれ行列 B^2 および B^{-1} の固有値となることを証明せよ. ただし, B は正則であるとする.

(広島市立大 2009) (m20094203)

0.1164 2 次実正方行列 A, B, C, D

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

に対して, 4 次実正方行列 M, N を次で与える.

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} B & A \\ C & D \end{pmatrix}$$

ここで、 O は 2 次の零行列である。

実正方行列 X に対して行列式を $|X|$ で表す。以下の問いに答えよ。

(1) $|M| = |A||C|$ であることを示せ。

(2) $B = sA, D = tC$ (s, t は実数) のとき、 $k = \frac{|N|}{|M|}$ を求めよ。ただし、 $|M| \neq 0$ とする。

(広島市立大 2009) (m20094204)

0.1165 次の 3 次正方行列 A に対し、以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値および固有ベクトルを求めよ。

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P 、およびその逆行列 P^{-1} を求めよ。

(広島市立大 2010) (m20104205)

0.1166 転置行列が逆行列となる正方行列を直交行列という。以下の問いに答えよ。

(1) 直交行列の行列式は 1 または -1 であることを示せ。

(2) A, B を n 次正方行列とす。このとき $2n$ 次正方行列 $T = \begin{pmatrix} A & O \\ B & A \end{pmatrix}$ が直交行列であれば、 A は直交行列であり、かつ B は正則行列でないことを示せ。ただし、 O は n 次の零行列を表す。

(広島市立大 2010) (m20104206)

0.1167 次の 3 次正方行列 A について以下の問に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ。

(2) A の各固有値に対応する固有ベクトル空間の基底をそれぞれ求めよ。

(3) $D = P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P およびそれに対応する D を求めよ。

(4) 問 (3) で求めた D に対し、 D^n を求めよ。ただし、 n は正の整数とする。

(5) A^n を求めよ。ただし、 n は正の整数とする。

(広島市立大 2011) (m20114204)

0.1168 次の 3 次正方行列 A について、以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ。

(2) A の各固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ。

- (3) $D = P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ.
 (4) (3) で求めた P に対し, P^{-1} を求めよ.
 (5) (3) で求めた P に対応する D を示せ.

(広島市立大 2012) (m20124205)

0.1169 次の 3 次正方行列 A について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

- (1) A の固有値をすべて求めよ.
 (2) A の各固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ.
 (3) $D = P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ.
 (4) 問 (3) で求めた P に対応する D を示せ.

(広島市立大 2013) (m20134204)

0.1170 次の行列の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(山口大 1999) (m19994304)

0.1171 次の行列の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(山口大 2000) (m20004304)

0.1172 次の行列の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(山口大 2001) (m20014317)

0.1173 次の行列の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(山口大 2001) (m20014318)

0.1174 行列 $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ について

- (1) 逆行列 $A(\theta)^{-1}$ を求めなさい.
 (2) $A(\theta_1 + \theta_2) = A(\theta_1)A(\theta_2)$ を示しなさい.
 (3) $A(\theta)A(-\theta) = I$ (I は単位行列) を示しなさい.

(山口大 2002) (m20024303)

- 0.1175 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ に対する固有値 λ および固有ベクトル $\vec{v}$ を求めよ。ただし、固有ベクトル $\vec{v}$ は 1 つ示せばよい。

(山口大 2003) (m20034311)

- 0.1176 $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ の逆行列を求めなさい。

(山口大 2004) (m20044308)

- 0.1177 行列 $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対する固有値および固有ベクトルを求めよ。固有ベクトルはひとつの固有値に対してひとつ求めればよい。

(山口大 2004) (m20044310)

- 0.1178 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい。ただし、固有ベクトルはひとつの固有値に対してひとつ求めればよい。

(山口大 2005) (m20054304)

- 0.1179 行列 $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい。固有ベクトルは一つの固有値に対して一つ求めればよい。

(山口大 2006) (m20064304)

- 0.1180 行列 $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい。なお、固有ベクトルは、一つの固有値に対して一つ求めること。

(山口大 2008) (m20084306)

- 0.1181 次の行列の固有値を求めなさい。

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(山口大 2009) (m20094307)

- 0.1182 以下に示す行列 A について、行列式 $|A|$ の値を求めなさい。さらに逆行列 A^{-1} の $(1, 1)$ 成分を求めなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

(山口大 2015) (m20154302)

- 0.1183 次に示す行列 A の固有値および対応する固有ベクトルを求めなさい。固有ベクトルは、いずれか一つの固有値に対して求めればよい。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(山口大 2016) (m20164302)

0.1184 次に示す行列 A の固有値が全て負の実数となるとき, x のとりうる範囲を求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & x^2 - 1 & -1 \\ 0 & 0 & x - 0.5 \end{pmatrix}$$

(山口大 2017) (m20174302)

0.1185 次の行列 A を対角化した行列 B を求めなさい. また, A を対角化させる正則行列 C を求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(山口大 2018) (m20184302)

0.1186 以下に示す行列 A および B それぞれについて, 固有値および固有ベクトルを求めなさい. なお, 固有値は全て求め, 固有ベクトルは絶対値が最も小さい固有値に対して 1 つ求めればよい. 固有ベクトルの長さは 1 とする.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 \\ 3 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(山口大 2024) (m20244302)

0.1187 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトル (ただし, 長さ 1 のもの) を求めよ.

(徳島大 1999) (m19994404)

0.1188 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ と行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ.

(1) 行列式 $|A - \lambda E|$ の値を求めよ. ただし, λ は定数とする.

(2) $|A - \lambda E| = 0$ を満たす λ の値をすべて求めよ.

(3) (2) で求めたそれぞれの λ に対して, $Ax = \lambda x$ を満たす 3 次元列ベクトル x のうち長さ 1 であるものを求めよ.

(徳島大 2000) (m20004404)

0.1189 (1) 次の行列の固有値を求めよ.

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(2) 最小な固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(徳島大 2001) (m20014404)

0.1190 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問に答えよ.

(1) A の固有値 λ と, それに対応する長さが 1 の固有ベクトル $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(2) 上で求めた λ と x に対して, $Ay = \lambda y + x$ となるベクトル $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ で x と直交するものを求めよ.

(3) このとき $P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ とおいて, $\Lambda = P^{-1}AP$ を求めよ.

(徳島大 2004) (m20044404)

0.1191 次の問に答えよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 10 \\ 15 & 42 & 46 \\ 21 & 66 & 85 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ とする. $A = BC$ となる 3 次正方行列 C を求めよ. また行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(2) 次の方程式を解け. ここで左辺は行列式を表す.

$$\begin{vmatrix} x^2 & 1-x & x^2-2x & x^3 \\ 0 & x-2 & 1-x & x^2-2x \\ x^2 & 1-x & 1-2x & 1-x+x^3 \\ -x^2 & x-1 & 2x-x^2 & 2-x^3 \end{vmatrix} = 0$$

(徳島大 2005) (m20054401)

0.1192 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ について答えよ.

(1) 固有値を求めよ.

(2) 各固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(3) 直交行列 P を求めて tPAP を対角行列にせよ. ここで, tP は P の転置行列を表す.

(徳島大 2006) (m20064401)

0.1193 a を実数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ 1-2a & 2a \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $a = 3$ のとき, A の固有値を求めよ.

(2) A の固有値が重複するように, a の値を定めよ.

(3) (2) で求めた a の値に対して, A の固有ベクトルで大きさが 1 であるものをひとつ求めよ.

(徳島大 2007) (m20074401)

0.1194 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & a & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) A が逆行列を持たないような a の値を求めよ.

(2) 2 が A の固有値となるような a の値を求めよ.

(3) 1 が A の重複した固有値となるような a の値を求めよ.

(徳島大 2008) (m20084401)

0.1195 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ.

- (1) 固有値を求めよ.
- (2) 最大である固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(徳島大 2010) (m20104401)

0.1196 $0 \leq a \leq 1$ に対して, 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a & 1 & -1 \\ 0 & 9a & 3 \\ \frac{3}{4}a & 1 & -a \end{pmatrix}$ とする. 次の問いに答えよ. ここで, $\det(M)$ は正方行列 M の行列式を表す.

- (1) $\det(A)$ を求めよ.
- (2) $f(a) = \det(A)$ とする. $f(a)$ のグラフを図示せよ.
- (3) n を自然数とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} \det(A^n)$ を求めよ.

(徳島大 2011) (m20114401)

0.1197 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (2) $A = B^2$ となる行列 B をすべて求めよ.

(徳島大 2012) (m20124401)

0.1198 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値を求めよ.
- (2) $A\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる列ベクトル $\mathbf{p}$ の中で, 大きさ $|\mathbf{p}|$ が最小となる $\mathbf{p}$ を求めよ. また, そのときの $|\mathbf{p}|$ を求めよ.

(徳島大 2012) (m20124405)

0.1199 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) 固有値を求めよ.
- (2) 各固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ.
- (3) 直交行列 P を求めて tPAP を対角行列にせよ. ここで, tP は P の転置行列を表す.

(徳島大 2013) (m20134401)

0.1200 次の問いに答えよ.

- (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ とする. B が A の逆行列となるような a を求めよ.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & \frac{1}{2} & c \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ とする. B が A の逆行列となるような a, b, c を

求めよ.

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(徳島大 2015) (m20154401)

0.1201 $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq 1\}$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) $u = x + y, v = \frac{y}{x + y}$ とおく. x, y を u, v の式で表せ. また, 行列式 $J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を

求めよ.

(2) $\int_0^1 v \sin(\pi v) dv$ を求めよ.

(3) $f(x, y) = \frac{y}{x + y} e^{-(x+y)} \sin\left(\frac{\pi y}{x + y}\right)$ に対して, $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ を求めよ. ここで, (1)

の変換により $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dv \int_1^\infty f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du$ となることを用いてよい.

(徳島大 2015) (m20154403)

0.1202 3 次実正方行列 A は, -2 と 7 を固有値にもつ. $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ は固有値 -2 に対応

する A の固有ベクトル, $\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 7 に対応する A の固有ベクトルである. 3 つのベク

トル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ が, どの 2 つも直交するとき, 次の問いに答えよ.

(1) 実数 a, b, c を求めよ.

(2) $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ を並べた 3 次正方行列を $P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix}$ とする. P^{-1} を求めよ.

(3) A を求めよ.

(徳島大 2018) (m20184401)

0.1203 3 次元数ベクトル e_1, e_2, e_3 (基本ベクトル) および a, b, c を

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

できめる. このとき, 次の各問いに答えなさい.

(1) 実数を成分にもつ 3 次正方行列 A が,

$$Aa = e_1, \quad Ab = e_2, \quad Ac = e_3$$

を満たすとする. このとき, A, A^{-1} を求めなさい.

(2) 実数を成分にもつ 3 次正方行列 B が,

$$Ba = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Bb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Bc = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を満たすとする. このとき, B を求めなさい.

(高知大 2001)

(m20014504)

0.1204 以下の問に答えよ. ただし, 計算過程は書かなくともよい.

(1) 2 次行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めよ.

(2) 2 次行列 $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めよ.

(3) 4 次行列 $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めよ.

(高知大 2001)

(m20014505)

0.1205 A を複素数を成分とする 2 次正方行列とし, ω を 1 の 3 乗根の一つとする. さらに

$$Ax_1 = \omega x_1, \quad Ax_2 = \omega^2 x_2$$

を満たすベクトル $x_1, x_2 (\neq 0)$ があったとする. このとき, 次の各問いに答えなさい.

(1) $AP = P \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$ を満たす行列 P があることを示しなさい.

(2) $\omega \neq 1$ のとき, x_1, x_2 は一次独立であることを示しなさい.

(3) $\omega \neq 1$ のとき, A^3 を求めなさい.

(高知大 2001)

(m20014506)

0.1206 4 次行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 1 & y \\ x & 1 & y & 1 \\ 1 & y & 1 & x \\ y & 1 & x & 1 \end{pmatrix}$$

の行列式を計算し, その結果を因数分解せよ.

(高知大 2005)

(m20054502)

0.1207 次の問に答えよ. ただし, I は n 次単位行列, O は n 次零行列である.

(1) n 次正方行列 A に対して, $(I - A)B = I - A^4$ を満たす B を一つ求めよ.

(2) $A^4 = O$ を満たす n 次正方行列 A に対して, $I - A$ の逆行列を求めよ.

(3) $X = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対して, X^k ($k \geq 2$) を求めよ.

$$(4) \quad \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ の逆行列を求めよ.}$$

(高知大 2005) (m20054504)

- 0.1208** 実数を成分とする 2×2 行列全体の集合を V とする. さらに V から $\mathbf{R}$ への写像 f_1 と f_2 を次のように定義する. V の元 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$f_1(M) = ad - bc \quad f_2(M) = a + d$$

このとき, f_1 と f_2 が線形写像であるか否かを調べよ. 線形写像である場合には, その核の一組の基底を求めよ. ただし, V と $\mathbf{R}$ はそれぞれ $\mathbf{R}$ 上の自然なベクトル空間とし, 線形写像の核が V の部分空間になることは証明しなくてもよい.

(高知大 2006) (m20064504)

- 0.1209** $M_3(\mathbf{R})$ を実数を成分とする 3 次正方行列全体のなす集合とし, $A \in M_3(\mathbf{R})$ とする. また,

$$\mathfrak{L}_A = \{B \in M_3(\mathbf{R}) \mid B \neq O, AB = O\}$$

$$\mathfrak{R}_A = \{C \in M_3(\mathbf{R}) \mid C \neq O, CA = O\}$$

と定義する. ただし, O は 3 次零行列を表す. 今, $\mathfrak{L}_A$ は空集合でないと仮定する. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) A は正則でないことを示せ.

さらに, $A = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 6-a \\ a+12 & 7 & 2 \\ 8 & -a & -2 \end{pmatrix}$ としたときに, 次の (2)~(4) に答えよ,

- (2) a の値を求めよ.

- (3) $P \in \mathfrak{L}_A$ となる 3 次正方行列 P をひとつ与えよ.

- (4) $\mathfrak{R}_A = \{{}^tQ \mid Q \in \mathfrak{L}_A\}$ を示せ. ただし, tQ は Q の転置行列を表す.

(高知大 2007) (m20074504)

- 0.1210** 実数を成分とする 2 次正方行列全体のなす集合 $M_2(\mathbf{R})$ は行列の和, 行列の実数倍をそれぞれ, 線形和, スカラー倍とみなすと実ベクトル空間になる. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ は $M_2(\mathbf{R})$ の基底であることを示せ.

(2) $\text{tr} : M_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ を $\text{tr} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = a + d$ で定義するとき, tr は線形写像であることを示せ.

(3) $\text{Ker tr} = \{A \in M_2(\mathbf{R}) \mid \text{tr}(A) = 0\}$ は $M_2(\mathbf{R})$ の部分ベクトル空間であることを示せ.

(4) Ker tr の次元を求めよ.

(高知大 2007) (m20074505)

- 0.1211** $\det(A)$, $\text{rank}(A)$ はそれぞれ行列 A の行列式, 階数を表す. 次の問いに答えよ.

(1) 3 次正方行列 A と 3 次単位行列 I を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき, $\det(\lambda I - A) = 0$ を満たす λ をすべて求めよ.

(2) (1) で求めたそれぞれの λ について, $\text{rank}(\lambda I - A)$ を求めよ.

(3) A を n 次正方行列, I を n 次単位行列とし, $f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ とおく. λ_0 が方程式 $f(\lambda) = 0$ の単根であるとき, $\text{rank}(\lambda_0 I - A) = n - 1$ であることを示せ.

(高知大 2008) (m20084503)

0.1212 3 次行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ のすべての固有値・固有ベクトルを求めよ.

(高知大 2008) (m20084506)

0.1213 $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^3$ への線形写像 f は, $\mathbf{R}^2$ の元 $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{R}^3$ の元 $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して,

$$f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad f(\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$$

を満たしている. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ は $\mathbf{R}^2$ の基底, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は $\mathbf{R}^3$ の基底であることを示せ.

(2) $\mathbf{R}^2$ の基底 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ と $\mathbf{R}^3$ の基底 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ に関する f の表現行列 A を求めよ.

(3) $\mathbf{R}^2$ の基底 $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{R}^3$ の基底 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ に関する f の表現行列 B を求めよ. また, B と (2) における行列 A との関係述べよ.

(高知大 2009) (m20094503)

0.1214 $n \times n$ 行列 A が n 個の 1 次独立な固有ベクトルをもてば, A は対角化可能であることを示せ. また,

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求め, A を対角化せよ.

(高知大 2009) (m20094504)

0.1215 3 次行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ の階数が 2 となるとき a の値を求めよ.

(高知大 2009) (m20094505)

0.1216 3×3 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (2) 次の関数式を満たす直交行列 T をひとつ求めよ.

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (3) α と β を定数とし, 3×3 行列 B を次で定義する.

$$B = T \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}$$

このとき, B と B^2 を計算せよ.

- (4) $C^2 = A$ を満たす行列 C をひとつ求めよ.

(高知大 2010) (m20104504)

0.1217 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ とする. A の固有値は τ と $\bar{\tau} = -\frac{1}{\tau}$ であることを示せ.
- (2) $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ \tau \end{pmatrix}$ は固有値 τ と $\bar{\tau}$ に対する固有ベクトルで, 単位ベクトルとなることを示せ.
- (3) $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_n = A^n \mathbf{v}_0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とするとき, $\mathbf{v}_n = \frac{\tau^n \mathbf{u}_1 - \bar{\tau}^{n-1} \mathbf{u}_2}{\sqrt{1+\tau^2}}$ を示せ.

(高知大 2011) (m20114503)

0.1218 線形写像 $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ は基本ベクトル $\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} \delta_{i,1} \\ \delta_{i,2} \\ \delta_{i,3} \\ \delta_{i,4} \end{pmatrix}$ に対して $f(\mathbf{e}_i) = \sum_{k=1}^i i \mathbf{e}_k$ となっている. た

だし, $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ である. このとき次の問いに答えよ.

- (1) $f(\mathbf{e}_4)$ はどんなベクトルか, 成分表示せよ.
- (2) $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), f(\mathbf{e}_3), f(\mathbf{e}_4)$ は1次独立であることを示せ.
- (3) $\mathbb{R}^4$ の基底を $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4$ とするとき, f の表現行列 A を求めよ.
- (4) A は正則であることを示せ.
- (5) f の逆写像はあるか. あれば求め, 無ければその理由を述べよ.

(高知大 2011) (m20114504)

0.1219 a を正の実数とし, 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ a & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 行列 A の行列式の値が6となるような a の値を求めよ.

(2) 行列 A の固有値が二つの実数となるような a の値を求めよ.

(3) (2) で求めた a に対し, 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(高知大 2011) (m20114505)

0.1220 3 次実正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ. ただし, a は定数とする.

(1) A の階数 ($\text{rank } A$) を求めよ.

(2) A が正則行列であるための定数 a に対する条件を求めよ.

(3) 方程式

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ の他にも解をもつための定数 a に対する条件を求め, その条件のもとで一般解を求めよ.

(高知大 2012) (m20124503)

0.1221 2 次正方行列 A と 4 次正方行列 B を

$$A = \begin{pmatrix} -27 & 75 \\ -10 & 28 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -27 & 75 & 0 & 0 \\ -10 & 28 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で定める. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) A の行列式を求めよ.

(2) B の行列式を求めよ.

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(4) B の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(高知大 2012) (m20124504)

0.1222 4 次行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(高知大 2012) (m20124505)

0.1223 次の平面の線形変換に対応する行列を求めよ. 求める過程も述べよ.

(1) 直線 $2x + y = 0$ に関する対称移動となる変換.

(2) 原点を中心として時計回りに $\frac{\pi}{3}$ 回転する変換.

(3) 直線 $x + 2y = 0$ へ正射影する変換.

(4) $y = x$ 上の各点 (p, q) は同じ直線上の点 $(2p, 2q)$ に移る. また, $y = -x$ 上の各点 (p, q) は同じ直線上の点 $\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$ に移る. これらの 2 条件を満たす変換.

(高知大 2013) (m20134503)

0.1224 $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) J のすべての固有値を求めよ.
- (2) J の異なる固有値に対して, それぞれの固有空間の基底を求めよ.
- (3) J は対角化可能かどうか, 理由をつけて答えよ. また 対角化可能である場合には, $P^{-1}JP$ が対角行列となるような P を求めよ.

(高知大 2013) (m20134504)

0.1225 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.
- (2) $A = PDP^{-1}$ を満たす正則行列 P とその逆行列 P^{-1} , および対角行列 D を求めよ.
- (3) 正の整数 n に対し, A^{2n} を求めよ.

(高知大 2013) (m20134505)

0.1226 実数を成分とする n 次正方行列全体の集合を $M_n(\mathbb{R})$ とおく. $M_n(\mathbb{R})$ は通常の和とスカラー倍で $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になっている. $M_n(\mathbb{R})$ の元 A に対し,

$$L(A) = \{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$$

とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $L(A)$ は $M_n(\mathbb{R})$ の部分空間であることを示せ.
- (2) $L(A)$ は行列の積について閉じていること, つまり任意の $B, C \in L(A)$ に対し, $BC \in L(A)$ となることを示せ.
- (3) $n = 2$ として, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の場合にベクトル空間 $L(A)$ の基底を 1 組求め, $L(A)$ の次元を答えよ.

(高知大 2014) (m20144504)

0.1227 4 次の正方行列 A が 2 次の正方行列 P, Q, R を用いて

$$A = \begin{pmatrix} P & Q \\ O_2 & R \end{pmatrix}$$

のように表されているとする. ただし, O_2 は 2×2 の零行列である. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) A が正則なら, P, R も正則であることを示せ.
- (2) P, R は正則であるとする. このとき

$$A \begin{pmatrix} P^{-1} & X \\ O_2 & R^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \\ O_2 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & X \\ O_2 & R^{-1} \end{pmatrix}$$

が 4 次の単位行列と等しくなるような 2 次の正方行列 X を, P, Q, R を用いて書き表せ.

(3) 次の4次の正方行列 B の逆行列を求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(高知大 2015)

(m20154503)

大 2015)

0.1228 2次の実正方行列全体の集合を $M_2(\mathbb{R})$ とおく. $M_2(\mathbb{R})$ は通常の和とスカラー倍で $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になっている. 写像 $f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ を

$$f(A) = {}^tA \quad (a \in M_2(\mathbb{R}))$$

で定める. ただし, tA は A の転置行列を表す. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) f は一次写像であることを示せ.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は $M_2(\mathbb{R})$ の基底となることを示せ.

(3) (2) の基底に関する f の表現行列を求めよ.

(高知大 2015)

(m20154504)

0.1229 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 10 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A の各固有値に対して, 固有空間の基底を一組求めよ.

(3) A は対角化可能かどうかを理由を付けて答えよ

(高知大 2016)

(m20164503)

0.1230 3次行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値・固有ベクトルを求めよ.

(高知大 2017)

(m20174501)

0.1231 A を $A^2 = O$ (零行列) を満たす複素数を成分とする4次の正方行列とする. さらに, $A\mathbf{p}, A\mathbf{q}$ が一次独立となる4次元複素ベクトル $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ があるとすると. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\mathbf{p}, \mathbf{q}, A\mathbf{p}, A\mathbf{q}$ は一次独立であることを示せ.

(2) 行列 A の固有値と階数を求めよ.

(3) $P = (A\mathbf{p} \ \mathbf{p} \ A\mathbf{q} \ \mathbf{q})$ とおくと P は正則であることを示し, さらに

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となることを示せ.

(高知大 2017) (m20174505)

0.1232 n は正の整数とする. A は n 次実正方行列で, $A^2 = O_n$ をみたすとする. また, $\alpha = \det(A + I_n)$, $\beta = \det(A - I_n)$ とおく. ただし, O_n と I_n はそれぞれ n 次の零行列と単位行列を表すものとし, $\det(M)$ は行列 M の行列式とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $\left(\det\left(\frac{1}{2}A + I_n\right)\right)^2$ を α または β を用いて表せ.
- (2) $\left(\det\left(I_n - \frac{1}{2}A\right)\right)^2$ を α または β を用いて表せ.
- (3) n が奇数のとき, $\alpha \geq \beta$ を示せ.

(高知大 2019) (m20194503)

0.1233 3 次の正方行列 A が

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

で与えられているとし, A を $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への一次写像とみなす. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) A の階数を求めよ.
- (2) A の像 $\text{Image}(A)$ を求めよ.
- (3) A の転置行列 tA の核 $\text{Ker}({}^tA)$ を求めよ.
- (4) $\text{Ker}({}^tA)$ の元は $\text{Image}(A)$ の元と $\mathbb{R}^3$ の標準内積に関して直交することを示せ.

(高知大 2019) (m20194504)

0.1234 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) A^2 を求めよ.
- (2) A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.
- (3) A^{10} を A の対角化を利用して求めよ.
- (4) $a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+1} = 3a_{n+1} - 2a_n$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を A^n を利用して求めよ.

(高知大 2023) (m20234501)

0.1235 次の行列 M の固有値と規格化された固有ベクトルを求めよ

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(高知大 2023) (m20234503)

0.1236 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = a_2 = 0, a_3 = 1, a_{n+3} = -2a_{n+2} + a_{n+1} + 2a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) により定義する. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ とおく. すべての正の整数 n に対して $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n$ を満たす 3 次正方行列 A を求めよ.
- (2) (1) で求めた行列 A の固有値をすべて求めよ. さらに, それらに対応する固有ベクトルも求めよ.
- (3) (1) で求めた行列 A を対角化せよ.

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(高知大 2024) (m20244503)

0.1237 行列 A を $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A の行列式を計算せよ.

(2) A の逆行列の成分がすべて整数となるような整数 k の値を求めよ.

(愛媛大 2000) (m20004605)

0.1238 (1) 行列 $\begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(2) 次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} 10x + 4y + z = 10 \\ 10x + 6y + 3z = 0 \\ 5x + 4y + 3z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

(愛媛大 2004) (m20044609)

0.1239 零ベクトルを $\vec{0}$ と記す.

(1) A を n 次正方行列とする. 実数 λ に対して, n 次元数ベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ が条件

$$\vec{u} \neq \vec{0}, A\vec{u} = \lambda\vec{u}, A\vec{v} = \vec{u} + \lambda\vec{v} \quad (*)$$

を満足していると仮定する. このとき, $\vec{u}, \vec{v}$ は 1 次独立であることを示せ.

(2) a, b, c, d を実数とする. 2 次方程式 $x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$ が, a とは異なる実数 λ を 2 重解としてもつと仮定する. 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について, (1) の条件 (*) を満足する 2 次元数ベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ が存在することを示せ.

(3) (2) における $\vec{u}, \vec{v}$ を $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ とおく. 行列 $P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ は正則であることを示し, $P^{-1}AP$ を求めよ.

(愛媛大 2004) (m20044610)

0.1240 行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & a & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は 0 を固有値として持つとする. ただし, a は定数とする.

(1) 定数 a を求めよ.

(2) A の 0 でない固有値をすべて求めよ.

(3) 固有値 0 に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

(愛媛大 2005) (m20054604)

0.1241 a, b, c を実数とし, 行列 A, B, C を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a+b & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a-2b & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{で定める.}$$

(1) $AB + C$ を求めよ.

(2) $AB + C$ が対称行列となるとき, a, b, c の値を求めよ.

- (3) $({}^tB)C = ({}^tC)B$ が成り立つとき, a, b, c の値を求めよ. ただし, tB は B の転置行列を表し, tC は C の転置行列を表す.

(愛媛大 2008) (m20084601)

- 0.1242** a を実数とし, 行列 A およびベクトル $\mathbf{b}$ を $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ で定める. さらに, $\mathbf{b}, A\mathbf{b}, A^2\mathbf{b}$ を列ベクトルにもつ 3 次正方行列を B とする. すなわち $B = (\mathbf{b}, A\mathbf{b}, A^2\mathbf{b})$ とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $A\mathbf{b}, A^2\mathbf{b}$ を求めよ. (2) B の行列式 $|B|$ を求めよ.
 (3) B の逆行列 B^{-1} が存在するための必要十分条件を, a を用いて表せ.

(愛媛大 2008) (m20084602)

- 0.1243** 次の行列を, 行の基本変形を使って上 3 角行列に変形せよ. また, これらの行列の階数 (ランク) と行列式を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ただし, 上 3 角行列とは $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ という形の行列である.

(愛媛大 2008) (m20084605)

- 0.1244** $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ とする.

- (1) $AB = C$ となる行列 B を求めよ.
 (2) 行列 C の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

(愛媛大 2008) (m20084611)

- 0.1245** $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{a}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{a}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{a}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$ とする. (ただし, $a > 0$)

- (1) 行列式 $|A|$ を求めよ.
 (2) 逆行列 A^{-1} が存在しないときの a の値を求めよ.
 (3) 行列 A の固有値をすべて求めよ.
 (4) 行列 A の最大の固有値に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

(愛媛大 2009) (m20094604)

- 0.1246** 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix} \text{ とする.}$$

(1) A^2 を計算せよ.

(2) 次の行列式の値をゼロにする a, b, c をすべて求めよ.

$$\begin{vmatrix} b^2 + c^2 & ab & ca \\ ab & c^2 + a^2 & bc \\ ca & bc & a^2 + b^2 \end{vmatrix}$$

(愛媛大 2010) (m20104605)

0.1247 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 56 & 4 & -2 \\ 6 & 54 & -2 \\ 180 & 120 & -10 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 106 & 4 & -2 \\ 6 & 104 & -2 \\ 180 & 120 & 40 \end{pmatrix}$ の固有値をすべて求めよ.

(愛媛大 2013) (m20134604)

0.1248 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ とする.

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.

(2) (1) で求めた行列 A の固有値に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

(愛媛大 2014) (m20144605)

0.1249 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする, また, n を自然数とする.

次の行列の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

(i) E (ii) A (iii) A^n

(愛媛大 2015) (m20154605)

0.1250 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ とする.

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) 行列 A の固有値をすべて求めよ.

(3) (2) で求めた行列 A の固有値に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

(愛媛大 2017) (m20174605)

0.1251 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ a & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ は 0 を固有値として持つとする. ただし, a は定数とする.

(1) 定数 a を求めよ.

(2) A の 0 でない固有値をすべて求めよ.

(3) 固有値 0 に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

(愛媛大 2018) (m20184605)

0.1252 次の行列の積を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(愛媛大 2021) (m20214605)

0.1253 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

(愛媛大 2021) (m20214607)

0.1254 $A(k) = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ とする. ただし, k は実数とする.

- (1) $A(k)$ が正則でないように k の値を定めよ.
- (2) 3 が $A(k)$ の固有値であるように k の値を定めよ. またそのときの $A(k)$ の固有値 3 に対応する固有ベクトルをすべて求めよ.
- (3) $A(k)$ が逆行列 $A(k)^{-1}$ をもち, $A(k)$ および $A(k)^{-1}$ のすべての成分が整数となるように k の値を定めよ.

(愛媛大 2023) (m20234606)

0.1255 a, b, c を実定数とすると

$$Q = Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad -\infty < x, y < +\infty$$

について, 次の問に答えよ.

- (1) $Q = (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる実対称行列 A を求めよ.
- (2) $(x, y) \neq (0, 0)$ ならば $Q < 0$ となる a, b, c の条件を求めよ.
- (3) (2) で求めた条件のもとで A の固有値がすべて負になることを示せ.

(九州大 1997) (m19974704)

0.1256 線形写像 $T: R^4 \rightarrow R^2$ について

$$\text{Ker } T = \{ x \in R^4 \mid T(x) = 0 \}$$

$$\text{Im } T = \{ T(x) \mid x \in R^4 \}$$

と定義する. T が条件

$$\text{Ker } T = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 + 2x_3 = x_2 - x_4 = 0 \right\}$$

$$\text{Im } T = R^2$$

を満足するとき, 次の問に答えよ.

- (1) $\text{Ker } T$ の基底を 1 組求めよ.
- (2) 上で求めた $\text{Ker } T$ の基底を含む R^4 の基底を 1 組求めよ.

(3) $T(x) = Ax$ となる 2 行 4 列の行列 A を一個求めよ.

(4) 上の A について $\text{rank } A$ を求めよ.

(九州大 1997) (m19974705)

0.1257 次の 4×4 型行列 A と, $\mathbf{R}^4$ のベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{0}$ について, 以下の間に答えよ. ただし, 行列 A の成分 a は実数の定数である.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) A の行列式を求めよ.

(2) x_1, x_2, x_3, x_4 を未知数とする方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が自明でない解を持つための a の条件を求めよ.

(3) 次の集合は $\mathbf{R}^4$ の部分線形空間となることを証明せよ.

$$V = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}, \quad W = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4\}$$

(九州大 1998) (m19984709)

0.1258 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A の固有値と重複度を求めよ.

(2) 直交行列を使って A を対角化せよ.

(九州大 1999) (m19994706)

0.1259 $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 3x_2 + x_3 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

について次の間に答えなさい.

(1) $\varphi(x) = Ax$ となる 3 次平方行列 A を求めなさい.

(2) A の行列式 $\det A$ を求めなさい.

(3) $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする. $\varphi(e)$ を求めなさい.

(4) $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる $x \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めなさい.

(5) $V = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$ とする. $\varphi(V) = \{\varphi(x) \mid x \in V\}$ は部分空間であることを示し, さらにその次元を求めなさい.

(九州大 2001) (m20014706)

0.1260 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

が与えられている。次の問に答えなさい。

(1) 4次元複素ベクトル $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$ に対し,

$$z^* A z = |z_1|^2 + |z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_4|^2 + |z_4|^2$$

となることを示しなさい。ただし、 $\bar{z}_i$ を z_i の共役複素数とすると、 $z^* = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4)$ 。

(2) 行列 A は正定値行列であることを示しなさい。

(九州大 2001) (m20014707)

0.1261 次の問に答えよ。

(1) 行列 A の階数の定義について、以下の下線部に適切な単語を記入せよ。

- (a) A の 0 でない小行列式の _____。
 (b) A の _____ な列ベクトルの最大個数。
 (c) A の _____ な行ベクトルの最大個数。
 (d) A で定まる線形変換の値域の _____。

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ。

(3) 次の連立方程式に解があれば、そのすべてを求めよ。

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

(九州大 2003) (m20034706)

0.1262 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、正則行列 $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ で、

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

を満たすものが存在すると仮定する。次の各設問に答えよ。

- (1) λ, μ は A の固有値でなければならないことを示せ。
 (2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき、 A の固有値と固有ベクトルを求めよ。
 (3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して上の条件を満たす P を直交行列で求めよ。

(九州大 2003) (m20034707)

0.1263 次の連立1次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を考える。ただし、

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 6 & 14 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix}$$

である. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 上三角行列 U と, 対角成分が 1 の下三角行列 L を用いて, $A = LU$ と書くとき, L と U を求めよ.
- (2) $Ax = b$ の解は以下の 2 つの問題を解くことで求まることを説明せよ.

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

- (3) (2) の方法で $Ax = b$ を解け.

(九州大 2004) (m20044704)

0.1264 3 変数 x, y, z の 2 次形式 $f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy - 2yz + 2zx$ は, 適当な直交行列 P で変換変数

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

すれば, $f(x, y, z) = aX^2 + bY^2 + cZ^2$ (a, b, c は実数) になるという, ただし tP は行列 P の転置行列である. 次の問いに答えよ.

- (1) 等式 $f(x, y, z) = (x, y, z)A {}^t(x, y, z)$ を満たす実対称行列 A を求めよ.
- (2) 上の直交行列 P と実数 a, b, c を求めよ.

(九州大 2004) (m20044705)

0.1265 ベクトル y がベクトル x と行列 A によって次のように関係づけられる.

$$y = Ax \quad \text{ここで, } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- (1) 次の 3 つのベクトルが行列 A の固有ベクトルであることを示せ.

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ z_0 \\ z_0^2 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ z_0^2 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{ここで, } z_0 = e^{i2\pi/3} \text{ である.} \\ (i: \text{虚数単位}) \\ (\text{ヒント: } z_0^3 = 1) \end{array}$$

- (2) 行列 A の固有値 λ_k ($k = 1, 2, 3$) を求めよ.
- (3) a, b, c を行列 A の固有値 λ_k と z_0 を用いて表せ. (ヒント: $1 + z_0 + z_0^2 = 0$)
- (4) $a = c = 0, b = 1$ となる場合の, 行列 A の (イ) 固有値, (ロ) 固有ベクトル を求めよ.
- (5) (イ) ベクトル $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を固有ベクトル p_1, p_2, p_3 の線形和で表せ.
(ロ) 上記のベクトル p を x とするとき, ベクトル y を求めよ.

(九州大 2005) (m20054701)

0.1266 次の連立定数係数線形同次微分方程式

$$\frac{dy_1(x)}{dx} + 2y_1(x) - y_2(x) = 0$$

$$\frac{dy_2(x)}{dx} - y_1(x) + 2y_2(x) = 0$$

を, 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ を用いて,

$$\frac{dy(x)}{dx} + Ay(x) = 0 \quad \text{ただし, } y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

のように表現する. 解 $y(x)$ を行列 A の対角化を利用して以下の設問に沿って求めよ.

- (1) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 と固有ベクトル c_1, c_2 を求めよ.
- (2) c_1, c_2 を列ベクトルとする行列を $P = (c_1, c_2)$ とする. $P^{-1}AP$ を求めよ.
- (3) $z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} = P^{-1}y(x)$ とするとき, $z(x)$ に関する微分方程式を導き, $z(x)$ の一般解を求めよ.
- (4) $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき, $y(x)$ を求めよ.

(九州大 2005) (m20054702)

0.1267 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & c & c \\ c & 1 & c \\ c & c & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ.

- (1) 行列 A の行列式の値を求めよ.
- (2) A が逆行列を持たないときの c の値は
 - (a) $c = \boxed{}$ のときと
 - (b) $c = \boxed{}$ のときである.
- (3) (2) の 2 つの場合 (a),(b) それぞれについて, 行列 A の階数 (ランク) を求めよ.
- (4) (2) の 2 つの場合 (a),(b) それぞれについて, 行列 A の固有値をすべてを求めよ.

(九州大 2006) (m20064701)

0.1268 a, b, c を実数とし, 3×3 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a+b+c & -a-c & a+b-c \\ -a-c & a+c & -a+c \\ a+b-c & -a+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

と定めるとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $abc \neq 0$ のとき $|A| \neq 0$ となることを示せ. ただし, $|A|$ は行列 A の行列式を表すものとする.
- (2) $a = b = c = 1$ のとき, 行列 A の逆行列を求めよ.

(九州大 2006) (m20064710)

0.1269 $A = (a_{ij}) \ (i, j = 1, 2)$ を 2×2 実行列とする. A^T で A の転置行列を表すとする. ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ に対して内積を $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$ で定める.

- (1) 任意のベクトル $\mathbf{x}$ に対して, $(A\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$ が成立する時, $A^T A = A A^T = E$ が成り立つことを示せ. ただし, E は単位行列とする.
- (2) (1) の行列 A の行列式は 1 もしくは -1 であることを示せ. さらに行列 A の固有値は絶対値が 1 であることを示せ.

(3) (2)において A の行列式が -1 であるとき, ある実数 θ が存在して

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{と書けることを示せ.}$$

(九州大 2007) (m20074708)

0.1270 次の 4 次正方行列 A の逆行列を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(九州大 2007) (m20074712)

0.1271 xy 平面上の任意の点の 1 秒ごとの移動の様子が, 次の行列 A で表される一次変換によって与えられるとする.

$$A = \begin{pmatrix} 5/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

xy 平面上の点 (x_0, y_0) が n 秒後に到達する点 (x_n, y_n) は, 次の漸化式によって与えられる. ただし, n は $n \geq 1$ の整数.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

(1) 原点から見たいくつかの方向では, 時間と共に向きが変化しない. すなわち, ゼロベクトルでない $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し, 次の関係式が成り立つ.

$$A\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}$$

上式を満たす固有値 λ の値 a, b と, それぞれに対する固有ベクトル $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ を求めよ. ただし, $a < b$ とし, $(p, q), (r, s)$ はそれぞれ整数の組で, $p > 0, r > 0$ とする.

(2) 前問の結果を用いて, $P = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ とおくと, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ.

(3) 座標 (x_n, y_n) を (x_0, y_0) と n を用いて表せ.

$$(\text{ヒント}) (P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \cdots (P^{-1}AP) = P^{-1}A^nP$$

(4) 前問の (x_0, y_0) が, 媒介変数 s を用いて $(x_0, y_0) = (s, s)$ で表される直線上の任意の点であるとする. s が実数全体を動くとき, (x_n, y_n) の描く図形の方程式を求めよ. また, $n \rightarrow \infty$ のとき, この図形はどのような図形に近づくか答えよ.

(九州大 2008) (m20084701)

0.1272 あるセルフサービスのカフェテリアでは, 昼に 3 種類のランチメニューがある. 客は順番に並んで, メニュー 1, メニュー 2, メニュー 3 のどれか一つのメニューを選ぶとする. N 番目の客がメニュー j を選んだとき $N+1$ 番目の客がメニュー i を選ぶ確率は a_{ij} であるとする. ($i, j = 1, 2, 3$, a_{ij} は N に依存しない.) 一方, N 番目の客がメニュー j を選ぶ確率を $p_j(N)$ と置く.

(1) N 番目の客がメニュー j を選んだとき $N+2$ 番目の客がメニュー i を選ぶ確率を a_{ij} を使って表せ.

(2) $i \neq j$ である時 $a_{ij} = q$ (q は i, j によらない正の数, $q > 0$) $a_{ii} = p$ (p は i によらない正の数, $p > 0$) とする. このとき q と p が満たすべき関係式を述べよ.

(3) (2) の仮定をする. 3 行 3 列の行列 A を ij 成分が a_{ij} となる 3 行 3 列の行列とする. A^2 を単位行列と F で表せ. ただし, F は次で定まる行列とする.

$$F = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (4) (2) の仮定のもとで行列 A のべき乗 A^N を求めよ. これを使い N 番目の客がメニュー 1 を選ぶ確率 $p_1(N)$ を $p_i(1)$ ($i = 1, 2, 3$) と q で表す公式を求めよ.
- (5) (2) の仮定のもとで $\lim_{N \rightarrow \infty} p_j(N)$ を求めよ.

(九州大 2008) (m20084704)

0.1273 (1) 実数からなる行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(a) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^2$ および $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^3$ を求めよ.

(b) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n$ を求めよ. ただし, n は自然数である.

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(a) ベクトル $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ について $B\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_1$ が成り立つ.

$\mathbf{v}_1$ と一次独立な大きさ 1 のベクトル $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$ を用いて, $B\mathbf{v}_2$ を $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ の一次結合

$$B\mathbf{v}_2 = \alpha\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$$

と表したい. $\mathbf{v}_2$ と α の組み合わせを 1 つ, 具体的な数値で求めよ.

(b) $P = \begin{pmatrix} 1 & v_{21} \\ -1 & v_{22} \end{pmatrix}$ とすると, $BP = PC$ と表すことができる. 行列 C を記せ.

(c) B^n を求めよ.

(九州大 2008) (m20084709)

0.1274 A を $n \times n$ 実行列とする. V を n 実ベクトル $\mathbf{v}$ で

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A^m \mathbf{v} = 0 \quad (m \text{ は自然数})$$

となるものの全体とする.

(1) V は $\mathbf{R}^n$ の線形部分空間であることを示せ.

(2) $n = 3$ で

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -9/4 & 1/2 \\ -3/2 & 1 & 1/2 \\ 3/2 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

とするとき, A の固有値は $-1, 2 \pm \sqrt{2}$ であることを示せ.

(3) A が (2) で与えられるとき V を求めよ.

(九州大 2008) (m20084713)

0.1275 n_1, n_2 を自然数, $n = n_1 + n_2$ とする. $n \times n$ 実対称行列 A が

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}^T \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & O_{12} \\ L_{21} & I_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & O_{12} \\ O_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{11} & L_{21}^T \\ O_{21} & I_{22} \end{pmatrix}$$

と表されているとする. ただし, 一般に, C_{ij} は $n_i \times n_j$ 行列, O_{ij} は零行列, I_{ii} は単位行列で, 添え字の T は転置をとることを意味する.

A_{11} は正則行列であるとして, 次の問いに答えよ.

- (1) 行列 L_{21} と行列 B_{22} を A の小行列 A_{ij} を用いて表せ.
 (2) A が正定値なら A_{11} , B_{22} も正定値であることを示せ.

(九州大 2008) (m20084714)

0.1276 次の連立 1 次方程式について、各問いに答えよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- (1) 係数行列の逆行列を求めよ.
 (2) 上で求めた逆行列を用いて方程式の解を求めよ.

(九州大 2008) (m20084715)

0.1277 次の行列 A の行列式を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(九州大 2008) (m20084716)

0.1278 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を 2×2 行列とする. 以下の問いに答えよ. なお、行列やベクトルの要素は全て実数とする.

- (1) 全ての 2 次元ベクトル $\mathbf{p}$ にたいし $|\mathbf{Ap}| = |\mathbf{p}|$ となるための A の条件を a, b, c, d で表せ.
 (2) A が (1) の条件を満たすとき, $(ad - bc)^2 = 1$ であることを示せ.
 (3) $\mathbf{Aq} = \mathbf{q}$ となる 0 ではない 2 次元ベクトル $\mathbf{q}$ が存在するための A の条件を a, b, c, d で表せ.
 (4) A が (1) と (3) の条件を満たし, かつ $ad - bc = 1$ のとき, A を求めよ.
 (5) A が (1) の条件を満たし, かつ直線 $y = \sqrt{3}x$ 上の点 $\mathbf{p}$ が A による変換で移動しないとき, A を求めよ.

(九州大 2009) (m20094701)

0.1279 4×4 実行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) A の行列式が 0 となる a の値を求めよ.
 (2) 行列 A の階数を求めよ.

(九州大 2009) (m20094707)

0.1280 行列 V_2, V_3, V_4 を次のように定義する:

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{pmatrix}$$

- (1) V_2, V_3, V_4 の行列式を求めよ.
 (2) V_2, V_3, V_4 の逆行列が存在する条件を述べ, その条件下で逆行列を求めよ.

(九州大 2009) (m20094709)

0.1281 $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ を実数とすると, 次の n 次正方行列 A を考える:

$$A = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_0 \end{pmatrix}$$

ζ を $\zeta^n = 1$ を満たす複素数とすると, ベクトル $\mathbf{u}_\zeta = \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^{n-1} \end{pmatrix}$ を考える.

- (1) $A\mathbf{u}_\zeta$ を求めよ.
 (2) $A\mathbf{u}_\zeta = \alpha\mathbf{u}_\zeta$ となる複素数 α が存在することを示せ.
 (3) A の固有値を全て求めよ.
 (4) A の行列式を因数分解された形で求めよ.

(九州大 2009) (m20094711)

0.1282 3×3 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とし, E を 3×3 単位行列とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) x についての多項式として, $|xE - A| = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ が成立するように, 定数 a_0, a_1, a_2, a_3 を定めよ. ただし, $|xE - A|$ は行列 $xE - A$ の行列式を表す.
 (2) (1) で求めた定数 a_0, a_1, a_2 に対し, $a_0A^2 + a_1A + a_2E$ を求めよ.

(九州大 2011) (m20114703)

0.1283 3×3 行列 B, C をそれぞれ

$$B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

とし, 点 $P_n(x_n, y_n, z_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を $x_1 = y_1 = z_1 = 1$,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 行列 C の逆行列 C^{-1} を求めよ.

(2) ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ はそれぞれ行列 B の固有ベクトルであることを示せ.

(3) a_n, b_n, c_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

によって定めるとき, a_{n+1}, a_n の間に成立する関係式を求めよ.

(4) $n \rightarrow \infty$ としたとき, 点 P_n はある点 P_∞ に近づくことを示し, 点 P_∞ を求めよ.

(九州大 2011) (m20114704)

0.1284 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -12 & 1 \end{pmatrix}$ に対し以下の問いに答えよ.

- (1) A の行列式を求めよ.
- (2) A の逆行列を求めよ.
- (3) A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(九州大 2012) (m20124701)

0.1285 $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 2 & 13 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 A の固有値を求めよ.
- (2) それぞれの固有値に対する第 2 成分が 1 の固有ベクトルを求めよ.

(九州大 2012) (m20124707)

0.1286 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値を求めよ.
- (2) 各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.
- (3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P と $P^{-1}AP$ を求めよ.

(九州大 2012) (m20124709)

0.1287 n 次実正方行列 $A = (a_{ij})$ は, どの行についても $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$ とする, 以下の問いに答えよ.

- (1) 1 は A の固有値であることを示せ.
- (2) 2 は $2A$ の固有値であることを示せ.
- (3) 行列 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (4) B が対角化可能かどうか判定せよ.

0.1288 次の行列 A, B について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & c \end{pmatrix}$$

- (1) A の階数が 1 となる条件, 2 となる条件をそれぞれ求めよ.
- (2) AB が正則であるための条件を求めよ.
- (3) BA の逆行列が存在するならその条件を求めよ. 存在しないならその理由を述べよ.

(九州大 2014) (m20144701)

0.1289 次の行列 A について, 以下の問いに答えよ. ただし, a は実数値とする.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) A の逆行列が存在するための a の必要十分条件を示せ.
- (2) a が小問 (1) の条件を満たす時, A の逆行列を求めよ.
- (3) A の固有値を求めよ.
- (4) A が対角化可能であるための a の必要十分条件を示せ.

(九州大 2015) (m20154701)

0.1290 a を実数として, 4 次正方行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a & 1 \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \\ 1 & a & 0 & a \end{pmatrix}$$

このとき, 以下の各問いに答えよ.

- (1) A の行列式を求めよ.
- (2) A の行列式が 0 (ゼロ) となるような a の値をすべて求めよ.
- (3) 前問 (2) の解のうちの最小値を a_0 とおく. (前問 (2) の解がただ一つの場合は, それを a_0 とおく.) $a = a_0$ の場合に, A の階数 (rank) を求めよ.

(九州大 2015) (m20154706)

0.1291 x, y を実数とし, 行列 A, B および $\boldsymbol{p}$ を下記のように定義する.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

また, $C = AB({}^tA)$ とする. ここで tA は A の転置行列である. 以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 A^{-1} を求めよ.
- (2) 行列 C の固有値を求めよ.
- (3) 行列 C の行列式 $\det(C)$ を求めよ.

- (4) $x > 0$, $x^2 + y^2 = 1$ および $\mathbf{p} \cdot (C\mathbf{p}) = 1$ を満たす x と y を求めよ.

(九州大 2016) (m20164701)

0.1292 3次正方行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -2 \\ -5 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

このとき, 以下の各問いに答えよ.

- (1) A の固有値をすべて求めよ.
- (2) A の固有値のうちで最小なものを λ_0 とおく. (固有値がただ一つの場合には, それを λ_0 とおく.) λ_0 に対応する固有ベクトルで, 「ベクトルの長さ (大きさ) は 1」かつ「第 1 成分は負ではない」という条件を満たすものを求めよ.

(九州大 2016) (m20164706)

0.1293 4次正方行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき, 以下の各問いに答えよ.

- (1) A の行列式を求めよ.
- (2) A の逆行列を求めよ.

(九州大 2017) (m20174701)

0.1294 a, b を実数として, 次の行列 A について考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ a & b & 3 \end{pmatrix}$$

- (1) A が正則であるための条件を求めよ.
- (2) A に掃き出し法 (ガウスの消去法) を適用して次の行列 U を得たとする.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

この時, a, b を用いて c を表せ.

- (3) U の各列ベクトルが直交するように a, b, c を求めよ.
- (4) a, b, c が小問 (3) を満たすとき, $A = LU$ が成り立つような行列 L を求めよ.
- (5) a, b, c が小問 (3) を満たすとき, U の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(九州大 2017) (m20174704)

0.1295 4次正方行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

このとき, 以下の各問いに答えよ.

- (1) A の固有値をすべて求めよ.
- (2) A の固有値のうち最大のものを λ_0 とおく. λ_0 に対応する固有ベクトルで, 第1成分が1であるものを求めよ.

(九州大 2018) (m20184705)

0.1296 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問に答えよ.

- (1) A の固有値, および, それぞれの固有値に属する固有空間の基底を一組ずつ求めよ.
- (2) A を直交行列により対角化せよ, すなわち, $P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求め, $P^{-1}AP$ がどのような対角行列となるかを表示せよ.

(九州大 2019) (m20194707)

0.1297 3次の実正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

について, 以下の問に答えよ.

- (1) A のトレースが0のとき, A の行列式を求めよ.
- (2) $BA = AB$ のとき, 行列 A の固有値を求めよ.

(九州大 2019) (m20194708)

0.1298 3次正方行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき, 以下の各問いに答えよ.

- (1) A の固有値をすべて求めよ.
- (2) A の固有値のうちで最小なものを λ_0 とおく. (固有値がただ一つの場合には, それを λ_0 とおく.) λ_0 に対応する固有ベクトルで, 「ベクトルの長さ (大きさ) は1」かつ「第1成分は負ではない」という条件をみたすものを求めよ.

(九州大 2019) (m20194709)

0.1299 a を $a \neq 0$ なる実数として、4 次正方行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

このとき、 A の階数 (rank) を求めよ.

(九州大 2019) (m20194710)

0.1300 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

について考える. このとき次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値を求めよ.
- (2) A の固有値のうちで最大なものを λ_0 とおく (固有値がただ一つの場合には、それを λ_0 とおく). このとき λ_0 に対応する固有ベクトルで、「ベクトルの長さ (大きさ) は 1」かつ「第 1 成分は負でない」という条件を満たすものを求めよ.

(九州大 2020) (m20204701)

0.1301 3 次正方行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- (1) A の固有値をすべて求めよ.
- (2) A の固有値のうちで最小のものを λ_0 とおく. λ_0 に対応する固有ベクトルで、「ベクトルの長さ (大きさ) は 1」かつ「第 1 成分は負ではない」という条件を満たすものを求めよ.

(九州大 2021) (m20214705)

0.1302 (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) , (X_3, Y_3) を xy 平面上の相異なる 3 点とする. また、 $|M|$ は正方行列 M の行列式を表すこととする. このとき、次の各問に答えよ.

- (1) 正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

とする. 3 点 (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) , (X_3, Y_3) が同一直線上に存在するとき $|A| = 0$ となることを示せ.

- (2) 変数 x, y に対して、正方行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ X_1^2 + Y_1^2 & X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2^2 + Y_2^2 & X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3^2 + Y_3^2 & X_3 & Y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

とする. さらに、 $\Delta_{i,j}$ を B の (i, j) -小行列式、つまり、 B の第 i 行と第 j 列をとり除いて得られる 3×3 行列の行列式とする. B の第 1 行に関する余因子展開により、小行列式を用いて B の行列式を表せ.

(3) 前問の行列 B が $|B| = 0$ を満たすとき、変数 x, y が満たす方程式を xy 平面上に図示せよ.

(九州大 2021) (m20214706)

0.1303 $a \geq 0$ として、行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について、以下の問いに答えよ.

- (1) A の固有値を求めよ.
- (2) $a = 4$ のとき、 A の各固有値に対する固有空間を求めよ.
- (3) A が対角化可能でないような a の値をすべて求めよ.

(九州大 2021) (m20214709)

0.1304 $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$ とする. 点 $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$ は円 $C_1 = \{(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + y_1^2 = 1\}$ 上を動き、点 $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2)$ は円 $C_2 = \{(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_2 - a)^2 + y_2^2 = r^2\}$ 上を動くものとする.

2 点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 間のユークリッド距離に関する極値問題について、以下の問いに答えよ. ただし、 $\mathbb{R}$ は実数全体を表すとする.

(1) 関数

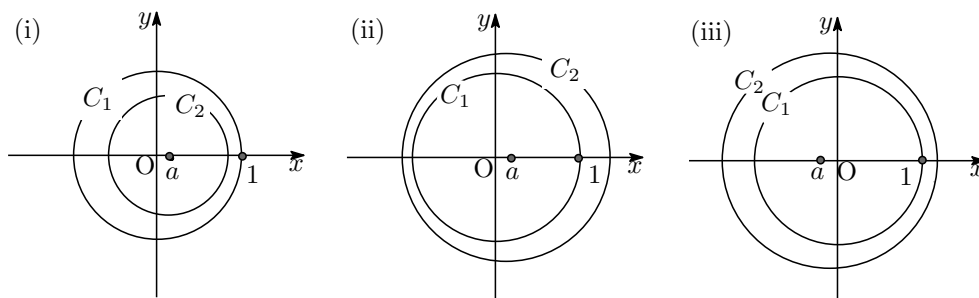
$$f(\theta_1, \theta_2) = (r \cos \theta_2 + a - \cos \theta_1)^2 + (r \sin \theta_2 - \sin \theta_1)^2, \quad (\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R})$$

の $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ におけるヘッセ行列

$$H = \begin{pmatrix} f_{\theta_1 \theta_1}(0, 0) & f_{\theta_1 \theta_2}(0, 0) \\ f_{\theta_2 \theta_1}(0, 0) & f_{\theta_2 \theta_2}(0, 0) \end{pmatrix}$$

を求めよ.

- (2) (1) で求めたヘッセ行列が正定値になるための条件を a と r で表せ.
- (3) 図 (i)(ii)(iii) それぞれについて、点 $\mathbf{x}_1^* = (1, 0)$, $\mathbf{x}_2^* = (a + r, 0)$ が極値問題の極小解であるかどうか判定せよ.



(九州大 2021) (m20214712)

0.1305 3 次正方行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -9 \\ -20 & -3 & 10 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき、以下の各問いに答えよ.

- (1) A の固有値をすべて求めよ.

- (2) A の固有値のうちで最小のものを λ_0 とおく. λ_0 に対応する固有ベクトルで, 「ベクトルの長さ (大きさ) は 1」かつ「第 1 成分は負ではない」という条件を満たすものを求めよ.

(九州大 2022) (m20224704)

0.1306 以下のように XY 平面上の点 (x_1, y_1) を点 (x_2, y_2) へうつす線形変換 $(*)$ を考える.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdots (*)$$

- (1) ア) 行列 M の行列式の値 $(\det M)$ を求めよ.
 イ) x_2, y_2 を用いて, x_1, y_1 をそれぞれ書き表せ.
- (2) 原点を中心とした単位円 $C: x^2 + y^2 = 1$ を, 線形変換 $(*)$ を用いて変形した閉曲線 D を考える. D を表す x, y の方程式を求めよ.
- (3) 原点を中心とし, x 軸と y 軸に長短径をもつ楕円 E は以下の方程式で表される.

$$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

E を原点まわりに反時計方向に角度 θ だけ回転した楕円 E' を表す式を求め, 以下の空白ア〜ウを埋めよ.

$$E': \left(\boxed{\text{ア}} \right) x^2 + \left(\boxed{\text{イ}} \right) xy + \left(\boxed{\text{ウ}} \right) y^2 = 1$$

- (4) (3) の結果を用いて閉曲線 D が楕円であることを示し, その面積を求めよ.

(九州大 2022) (m20224705)

0.1307 次の行列 A について, 以下の問いに答えよ. a, b は実数である.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の固有値が 2 つの異なる実数で得られることを示せ.
- (2) 以下に示す行列 P を用いると $P^{-1}AP$ は対角行列となった. このとき, a, b の満たすべき条件を示せ.

$$P = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

(九州大 2022) (m20224708)

0.1308 n を自然数とし, n 次の実交代行列 A によって定まる関数 $\beta_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$) と, β_A に関する次の性質 $(*)$ を考える.

$(*)$ 任意の $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\beta_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ ならば $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

ここで T は行列の転置を表し, A が n 次の実交代行列であるとは, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ かつ $A^T = -A$ を満たすことである. 以下の問いに答えよ.

- (1) 実交代行列 $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対する関数 β_{A_1}, β_{A_2} がそれぞれ性質 $(*)$ を満たすか答えよ.

- (2) 関数 β_A が性質 $(*)$ を満たすことと行列 A のすべての行ベクトルが一次独立であることが同値であることを示せ.

- (3) 関数 β_A が性質 $(*)$ を満たすとき, 行列 A の次数 n は偶数であることを示せ.

0.1309 以下に答えよ.

- (1) 次の行列が直交行列になるような a, b, c の値を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & a \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ b & c & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

- (2) 次の行列の行列式と逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

また, 次式を満たす x, y, z を求めよ.

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(九州芸術工科大 2000) (m20004806)

0.1310 E を 4 次単位行列とし, A を $A^2 = O$ (O は零行列) なる 4 次正方行列とする. このとき, 次の各問いに答えよ.

- (1) 行列 $E + A$ が逆行列を持つことを示し, その逆行列が $E - A$ で与えられることを示せ.
 (2) 上の問 (1) を利用して, 次の行列 B の逆行列を求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ただし, } a, b, c \text{ は定数とする.}$$

(九州芸術工科大 2001) (m20014805)

0.1311 以下が成り立つことを示せ.

- (1) A が正則のとき, $(A + B)A^{-1}(A - B) = (A - B)A^{-1}(A + B)$.
 (2) 正方行列 A が正則行列 P によって対角化され, $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ となるとき, 自然数 n に対して, $P^{-1}A^n P = D^n$.
 (3) 正方行列 A, B に対し $AB = A, BA = B$ のとき自然数 n に対して, $A^n = A$.

(九州芸術工科大 2001) (m20014806)

0.1312 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して固有値と固有ベクトルを求め, A を対角化せよ. また, A^n を求めよ.

(九州芸術工科大 2001) (m20014809)

0.1313 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(九州芸術工科大 2005) (m20054810)

0.1314 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ とする. このとき, 次のものを計算せよ.

(1) $A + B$

(2) $B {}^tA$

(佐賀大 2003)

(m20034924)

0.1315 次の行列 $A = (0, 1)$, $B = (2, 3)$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ に関して, 行列の計算を行え.

ただし, t は転置, C^{-1} は逆行列を表す.

また, 行列の演算が約束されていないものについては ‘不能’ とかくこと.

(1) $A + B$

(2) AB

(3) $(A {}^tB)$

(4) $A(B {}^t)$

(5) C^{-1}

(佐賀大 2003)

(m20034925)

0.1316 次の行列の行列式を求めよ.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2003)

(m20034926)

0.1317 次の行列 B について, 以下の問いに答えよ.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|B|$ を計算せよ.

(2) 2つのベクトル $(1, -2, 4)$, $(-2, 4, -3)$ が 1 次独立であることを示せ.

(3) B の階数 $\text{rank} B$ を求めよ.

(佐賀大 2003)

(m20034927)

0.1318 次の行列 A について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) A^2 および A^3 を計算せよ.

(2) 上の計算結果より, 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) 次の連立方程式を解け.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2003)

(m20034928)

0.1319 F の直交行列 P を求めて, $P^{-1}FP$ を対角行列にする.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

以下の手順に従って求めよ.

(1) F の固有値を求め,

- (2) 長さ 1 の固有ベクトルを求め、
 (3) 直交行列 P を求め、
 (4) 対角行列 $P^{-1}FP$ を求めよ。

(佐賀大 2003) (m20034930)

0.1320 次の問いに答えよ。

- (1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ のすべての固有値と、各固有値に対する固有空間の基底を求めよ。
 (2) 複素数 λ が実正方行列（すなわち実数を成分とする正方行列） A の固有値ならば、 λ の共役複素数 $\bar{\lambda}$ も A の固有値になることを証明せよ。
 (3) 実対称行列のすべての固有値は実数になることを証明せよ。
 (4) n を偶数とすると、すべての固有値が 0 でない純虚数になるような n 次実正方行列の例を与えよ。また n が奇数ならばそのような例が存在しないことを証明せよ。

(佐賀大 2003) (m20034931)

0.1321 実数を成分とする n 次縦ベクトルのなす線形空間を $\mathbf{R}^n$ とし、 $\mathbf{R}^4$ から $\mathbf{R}^3$ への写像 f を

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ 11x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 5x_4 \end{pmatrix}$$

で定義するとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\mathbf{R}^4$ の任意のベクトル x に対して $f(x) = Ax$ を満たす行列 A を求めよ。
 (2) 写像 f が線形写像になることを証明せよ。
 (3) $\text{Ker}(f) = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid f(x) = \mathbf{0}\},$
 $\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbf{R}^4\}$

がそれぞれ $\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^3$ の線形部分空間になることを証明せよ。ただし、 $\mathbf{0}$ は $\mathbf{R}^3$ の零ベクトルを表す。

- (4) $\text{Ker}(f)$ と $\text{Im}(f)$ の次元と基底をそれぞれ求めよ。

(佐賀大 2003) (m20034932)

0.1322 正則行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

の逆行列を A^{-1} とするとき、 A と A^{-1} の関係式を書け。また A^{-1} を求めよ。

(佐賀大 2004) (m20044927)

0.1323 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を A^{-1} を求めよ。

(佐賀大 2004) (m20044928)

0.1324 以下の各問に答えよ。ただし、 $\text{adj } A$ は行列 A の余因子行列、 E は単位行列、 $\det A$ は行列 A の行列式を表すものとする。

(1) n 次行列 A について

$$(\operatorname{adj} A)A = A(\operatorname{adj} A) = (\det A)E$$

となることを利用して

$$\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}$$

が成り立つことを示しなさい.

(2) 次の 3 次行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

について, $\det A$, $\operatorname{adj} A$, $\det(\operatorname{adj} A)$, A^{-1} を求めなさい.

(佐賀大 2004)

(m20044929)

0.1325 次の問に答えよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & a \end{pmatrix}$ が正則であるための条件を求めよ.

(2) a は $|A|$ を満たす整数であるとき, 次の連立方程式を逆行列を用いて解け.

$$\begin{cases} (a+2)x + y = 1 \\ 3x + ay = -3 \end{cases}$$

(佐賀大 2004)

(m20044930)

0.1326 次の対称行列の階数および行列式を求め, この行列が正則であるかどうか判断せよ. 正則な場合は, 逆行列を求めよ. さらに, 固有値と対応する固有ベクトルを求めて, この行列を対角化せよ.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2004)

(m20044932)

0.1327 R^3 を実の 3 次列ベクトル全体のなすベクトル空間とする. 3 次正方実行列 A と 3 次列ベクトル $a \in R^3$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

とする. さらに, $f: R^3 \rightarrow R^3$ を $f(x) = Ax$ ($x \in R^3$) で定義された R^3 の線形変換とする.

(1) A^2 および逆行列 A^{-1} を計算せよ.

(2) ベクトル $f(f(a))$ を計算せよ.

(3) $f(u) = a$ となるベクトル $u = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in R^3$ を求めよ.

(4) $f(x) = x$ となるベクトル $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3$ を求めよ.

(5) A の固有値とそれぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ.

0.1328 行列の基本変形（掃き出し法）を用いて、連立方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

を解け.

(佐賀大 2005) (m20054903)

0.1329 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & c \end{pmatrix}$ について、次の (1),(2),(3) に答えよ. ただし, $a \neq 0$ または $c \neq 0$ とする.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) ベクトル

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$$

は A の固有ベクトルであることを示し、それぞれのベクトルに対する固有値を答えよ.

(3) $a + c \neq 0$ のとき, A は対角化可能であることを示せ.

(佐賀大 2005) (m20054907)

0.1330 次の間に答えよ.

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(3) (2) の行列を直交行列によって対角化せよ.

(佐賀大 2005) (m20054909)

0.1331 以下の間に答えよ.

(1) 次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列式を計算せよ. 答えはなるべく簡単に因数分解した形で書け.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

(佐賀大 2005) (m20054918)

0.1332 平面上の直線 l を $l: y = (\tan \theta)x$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) とし, f を平面上の与えられたベクトル $\mathbf{a}$ を l と線対称な位置に移すという線形写像とする. このとき以下の問に答えよ.

- (1) $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするとき, $f(\mathbf{e}_1)$, $f(\mathbf{e}_2)$ を求めよ.
- (2) 線形写像 f を表す行列を求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054919)

0.1333 次の問に答えよ.

- (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ.
- (2) 行列 A を対角化せよ.
- (3) (2) で得られた対角行列を B とすると $P^{-1}AP = B$ (ただし P は正則行列) の関係が成り立つ. この関係を利用して A^n を求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054926)

0.1334 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値を a, b, c を用いて表せ.
- (2) a, b, c が実数のとき, A の固有値も実数になることを証明せよ. また, A が対角化できることを証明せよ.
- (3) $a = 1 + i$, $b = 1 - i$, $c = 0$ のとき, A を対角化せよ. ただし, i は虚数単位とする.
- (4) $a = 1$, $b = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, $c = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ のとき, A の固有値がすべて 0 になること, および A は対角化できないことを証明せよ. ただし, i は虚数単位とする.

(佐賀大 2006) (m20064904)

0.1335 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

(佐賀大 2006) (m20064912)

0.1336 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ のとき

- (1) $2A - B$ の値を求めよ.
- (2) ${}^tA {}^tB$ の値を求めよ.
- (3) 行列 A の逆行列 A^{-1} の値を求めよ.
- (4) tB の行列式 $\det({}^tB)$ の値を求めよ.

${}^tA, {}^tB$ はそれぞれ行列 A の転置行列, 行列 B の転置行列を表す.

(佐賀大 2006) (m20064932)

0.1337 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ について,

- (1) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ.

(2) 固有値 λ_1, λ_2 に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(3) 行列 A を対角化する行列を示し, 対角化せよ.

(佐賀大 2006)

(m20064934)

0.1338 (1) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) (1) の行列を対角化する直交行列を求め, 対角化せよ.

(佐賀大 2007)

(m20074905)

0.1339 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ について,

(1) $A^2 + 2A - 8E = O$ を示せ. (2) (1) を利用して, A^{-1} および A^{-2} を求めよ.

ここで, E, O, A^{-1} は, それぞれ単位行列, 零行列, A の逆行列である. また, $A^{-2} = (A^{-1})^2$ である.

(佐賀大 2007)

(m20074920)

0.1340 (1) $x-y$ 平面上の直線 $x+y-1=0$ は次の行列 A で表される 1 次変換によってどのように移されるか. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $x-y$ 平面上のすべての点は次の行列 B で表される 1 次変換によってどのように移されるか.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 一般に, 平面上のすべての点は 1 次変換によって平面内の別の点に移される. しかし (2) の場合はそうはならない. この理由を一つ示せ.

(4) 次の行列 C が対角化できない場合の t の値を求めよ. ただし t は実数とする.

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2008)

(m20084902)

0.1341 N 次元複素数ベクトルと N 次元複素数正方行列 A を考える. 今, A の行列要素 a_{kl} が

$$a_{kl} = e^{\frac{2\pi}{N}(k-1)(l-1)i}$$

で与えられるとき, 次の問いに答えよ. ただし, i は虚数を表す.

(1) $N=4$ のとき, 行列 A を書き下せ.

(2) 4 次元ベクトル $\mathbf{x}$ が

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

であるとき, $\mathbf{x}$ に前問の行列 A をかけて作られるベクトル $\mathbf{y}$ を求めよ. また,

$$(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 4(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

であることを示せ. ここで, $(\ , \)$ は複素数ベクトルの内積を表す.

(3) 行列 A の随伴行列（共役転置行列）を B とするとき、その行列要素 b_{kl} を書き下し、

$$A \cdot B = B \cdot A = NE$$

であることを示せ。ここで行列 E は N 次元単位行列である。

(4) $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ のとき、

$$(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = N(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

が成立することを示せ。ただし、 $\mathbf{x}$ は任意の N 次元複素数ベクトルとする。

(佐賀大 2009) (m20094904)

0.1342 行列 $A = \begin{pmatrix} 13 & -30 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$ に対して、 A^n を計算せよ。

(佐賀大 2009) (m20094919)

0.1343 次の行列の逆行列を求めよ。

$$(1) A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2010) (m20104905)

0.1344 次の行列は対角化可能か。対角化が可能ならば対角化し、不可能ならばその理由を述べよ。

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (a \neq 0)$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -6 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2010) (m20104906)

0.1345 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

(1) 行列 P の行列式 $\det P$ を求めよ。

(2) 行列 P の逆行列 P^{-1} を求めよ。

(3) PAP^{-1} を計算せよ。

(4) 行列 A の固有値を求めよ。

(5) 行列 A が対角化可能かどうか理由を述べて答えよ。

(佐賀大 2010) (m20104912)

0.1346 次の対称行列を対角化せよ。対角化するための直交行列も求めよ。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2011) (m20114916)

0.1347 $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ のとき、次の等式が成り立つことを示しなさい。

(1) $A(\theta)^{-1} = A(-\theta)$

(2) $A(\alpha + \beta) = A(\alpha)A(\beta)$

(佐賀大 2012)

(m20124915)

0.1348 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ は正則であるか確かめ、正則であれば逆行列を求めなさい。

(佐賀大 2012)

(m20124917)

0.1349 次の行列の逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(佐賀大 2013)

(m20134908)

0.1350 次の行列 A について、以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(2) A に対して、 $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を求めよ。

(3) $A^n = PXP^{-1}$ となるような行列 X を求めよ。ただし、 n は自然数とする。

(佐賀大 2013)

(m20134909)

0.1351 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

に対して、 $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を一つ求めよ。さらに、対角行列 $P^{-1}AP$ も書け。

(佐賀大 2014)

(m20144908)

0.1352 次の行列について、問いに答えよ。ただし E は単位行列、 O はゼロ行列である。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(2) 行列 A が $A^2 - 2A - 3E = O$ を満たすことを示せ。

(3) (2) で求めた結果を使って ($A^4 = A^2 A^2$ の計算を行うことなく) A^4 , A^{-1} を求めよ。

(佐賀大 2015)

(m20154903)

0.1353 次の行列 A について以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A のすべての固有値を求めよ。

- (2) 3つの固有値に対応する規格化された（長さが1の）固有ベクトルをそれぞれ求めよ。
 (3) 行列 A を対角化した行列 A_d を求めよ。
 (4) 次の関係式を満たす直交行列 O を求めよ。ここで、 O^T は O の転置行列である。

$$A_d = O^T A O$$

(佐賀大 2015) (m20154911)

0.1354 2次元 xy 平面を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ を原点の回りに角 ϕ だけ回転して $(x', y') = (r \cos(\theta + \phi), r \sin(\theta + \phi))$ に移すときの回転行列 $R(\phi)$ を求めよ。
 (2) $\Delta\phi$ が十分小さいとき、 $R(\phi)$ が次のように表されることを示せ。

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\phi \\ \Delta\phi & 1 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2015) (m20154913)

0.1355 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ とするとき、以下の問いに答えよ

- (1) $AX = 0$ を満たす2次正方行列 X をすべて求めよ。
 (2) $AX = XA = 0$ を満たす X をすべて求めよ。

(佐賀大 2015) (m20154921)

0.1356 次の行列が直交行列となるように、 a, b, c を決めよ。

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & b & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ c & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2015) (m20154924)

0.1357 次の行列 A, B について以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の逆行列を求めよ。
 (2) 行列 AB の積を求めよ。

(佐賀大 2016) (m20164918)

0.1358 次の行列 P について以下の問いに答えよ。

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -4 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 P の固有値を求めよ。
 (2) 行列 P の固有ベクトルを求めよ。

(佐賀大 2016) (m20164920)

0.1359 次の行列 A, B, C について以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (1) $A + B$ を求めよ.
- (2) $A^T B$ を求めよ.
- (3) C の逆行列を求めよ.

(佐賀大 2017) (m20174904)

0.1360 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2017) (m20174906)

0.1361 次の行列 A について以下の問いに答えよ.

- (1) AA を求めよ.
- (2) A の逆行列を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2018) (m20184914)

0.1362 次の行列 A について以下の問いに答えよ.

- (1) 固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (2) 正則行列 P を求め, 対角化せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2018) (m20184915)

0.1363 次の 2 次正方行列 A について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の行列式の値を求めよ.
- (2) 行列 A の逆行列を求めよ.
- (3) 行列 A の固有値をすべて求めよ.
- (4) (3) で求めた行列 A の各固有値に属する固有ベクトルを求めよ.
- (5) 行列 A が対角化可能か調べ, 対角化可能であれば適当な正則行列 P を求め, 対角化せよ.

(佐賀大 2021) (m20214905)

0.1364 4次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -8 & 8 \\ 0 & 6 & -9 & 8 \\ -9 & -1 & -4 & -6 \\ 6 & 8 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

の行列式に関する以下の問いに答えよ.

- (1) 行列式 $|A|$ の変形と余因子展開を行って,

$$|A| = c|B|$$

となる3次正方行列 B と実数 c を一組求めよ.

- (2) 行列式 $|B|$ の値を求めて, 行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(佐賀大 2022)

(m20224911)

0.1365 次の2次正方行列に関する以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$$

- (1) A の固有値をすべて求めよ.

- (2) ある直交行列 P に対して ${}^tPAP = B$ が対角行列になるとき, 対角行列 B を求めよ.

ただし, tP は P の転置行列である.

- (3) $\boldsymbol{x}$ を2次元実ベクトルとして,

$$\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|A\boldsymbol{x}\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|B\boldsymbol{x}\|$$

を示し, その値を求めよ.

(佐賀大 2022)

(m20224912)

0.1366 (1) 次の行列の階数 (ランク, rank) を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (2) 次の連立1次方程式の解を求めよ.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - y + z = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

(佐賀大 2023)

(m20234913)

0.1367 次の対称行列 A を対角化する直交行列 T を求め, A を対角化せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2023)

(m20234922)

0.1368 次の行列 A, B について以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) AB を求めよ.
- (2) BA を求めよ.
- (3) ${}^tA + 2B$ を求めよ. tA は行列 A の転置行列を意味する.

(佐賀大 2024) (m20244908)

0.1369 次の行列が対角化可能であるかどうか調べ, 対角化可能であれば, 正則行列 P を求めて対角化せよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2024) (m20244911)

0.1370 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2024) (m20244931)

0.1371 次のベクトルに関して以下の問いに答えよ.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

- (1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が一次従属系であることを示せ.
- (2) 連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解を持つためには, a, b, c にはどのような条件が必要か.
但し, 行列 A は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ を, それぞれ第 1, 2, 3 列とする行列である.
- (3) 連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解 $\mathbf{x}$ を全て求めよ.

(長崎大 2004) (m20045012)

0.1372 次の行列 A について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の固有値を求めよ.
- (2) 行列 A の固有ベクトルを求めよ.
- (3) 行列 A を以下のように

$$B = P^{-1}AP$$

対角化する行列 P と対角行列 B を求めよ.

(長崎大 2005) (m20055009)

0.1373 次の行列 A について以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の固有値を求めよ.
- (2) 固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.
- (3) 大きさを 1 に規格化した固有ベクトルを列ベクトルとして並べてできる行列 P の逆行列 P^{-1} を求めよ.

(4) $P^{-1}AP$ を計算せよ.

(長崎大 2005) (m20055013)

0.1374 次の行列の逆行列を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(長崎大 2005) (m20055021)

0.1375 a, b を任意の実数とする次の対称行列 A について、以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & b & 2 \\ a & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A が逆行列を持たないとき、 $b > 0$ であるような a の範囲を示せ.
- (2) 行列 A の固有値の一つが 1 であるとき b の値を求めよ. また、1 以外の固有値を a を用いて表せ. ただし、 $a \neq 0$ とする.

(長崎大 2007) (m20075001)

0.1376 次の行列の固有値および固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$$

(長崎大 2007) (m20075008)

0.1377 行列 $A = \begin{pmatrix} \alpha & 4 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ の固有値が 1 と 6 であるとき、実数 α 及び β の値を求めよ. なお、 $\alpha \geq \beta$ とする. 求める過程も記述すること.

(長崎大 2008) (m20085010)

0.1378 2 行 2 列の行列 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ とする. 0 以上の整数 n に対して、 A のべき乗 A^n を考える. このとき以下の問いに答えなさい. ただし、 a は $0 < a < 1$ の実数とする. また、 $n = 0$ に対して、 $A^0 = I$ とする.

- (1) $n = 2, 3, 4$ のそれぞれについて A^n を求めなさい.
- (2) 行列 $I - A$ の逆行列を求めなさい.
- (3) 行列 T_n を次式で定義する. このとき、 $(I - A)T_n = I - A^n$ が成り立つことを示しなさい.

$$T_n = I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} A^k$$

- (4) (3) の行列 T_n の各要素を a, n を用いて表しなさい.

(長崎大 2009) (m20095002)

0.1379 (1) $N \times M$ の行列 A と $P \times Q$ の行列 B があるとき、行列の積 AB が定義できる条件を述べよ.
(2) 連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 以外の解を持つための条件を述べよ. ただし、 A は $N \times N$ の正
方形行列、 $\mathbf{x}$ は N 次元の列ベクトル、 $\mathbf{0}$ は N 次元の 0 ベクトルである.

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & z & 1 \\ x & 1 & z & 2 \\ 1 & 0 & b & c \\ 2 & 0 & b & c \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

- (4) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2a & 1-2a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ. また, A^n が $n \rightarrow \infty$ のとき収束するための条件および $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ を求めよ. ただし, $a \neq 1$ である.

(長崎大 2009) (m20095010)

- 0.1380** 2つの実数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) が $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$, $b_n = 3a_{n-1} - b_{n-1}$ を満たすとき, 以下の手順に従って $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を求めよ. ただし, $a_0 = 1, b_0 = -1$ である.

- (1) $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$ を満たす行列 A を求めよ,
- (2) 行列 A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.
- (3) A を対角化する行列 P を求めよ.
- (4) A^n を求めよ. ただし, n は正の整数である.
- (5) 実数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(長崎大 2009) (m20095014)

- 0.1381** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルが $\lambda_1 = -1, \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}, \lambda_2 = 2, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} d \\ 1 \end{pmatrix}$ となるように, a, b, c, d を求めよ.

(長崎大 2010) (m20105018)

- 0.1382** 以下の $A, \mathbf{b}, \mathbf{X}$ について次の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の逆行列を求めよ.
- (2) 逆行列を用いて $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ を満たす x, y, z (未知の実数) の値を求めよ.

(長崎大 2011) (m20115006)

- 0.1383** 以下の行列 A の固有値, および長さ 1 の固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(長崎大 2011) (m20115007)

- 0.1384** 次式で与えられるベクトルと行列に対して, 積が定義できる組を選びその積を求めよ.

$$\text{ベクトル} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{行列} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(長崎大 2011) (m20115013)

- 0.1385** 行列 $A = \frac{1}{\alpha\beta+3} \begin{pmatrix} \alpha & -2 \\ 1.5 & \beta \end{pmatrix}$ の逆行列の固有値が 2 と 2.5 であるとき、実数 α 及び β の値を求めよ。なお、 $\alpha \geq \beta$, $\alpha\beta \neq -3$ とする。求める過程も記述すること。

(長崎大 2011) (m20115017)

- 0.1386** 次の行列の逆行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(長崎大 2011) (m20115021)

- 0.1387** 行列 A が

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

と与えられている。ただし、 a は正の実数とする。

- (1) A の行列式を求めなさい。
- (2) A の余因子 $\tilde{a}_{ij}$ ($i = 1, 2; j = 1, 2$) を求めなさい。
- (3) A の逆行列が存在するための条件と、そのときの逆行列を求めなさい。
- (4) A の固有値と長さ 1 の固有ベクトルを求めなさい。

(大分大 2011) (m20115107)

- 0.1388** 3 行 2 列行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

で定め、その転置行列を A^T で表す。さらに、行列 B と行列 P を

$$B = A^T A, \quad P = AB^{-1}A^T$$

により定める。ここで、 B^{-1} は B の逆行列を表す。また、 A の転置行列 A^T とはその i 行 j 列成分が A の j 行 i 列成分であるような 2 行 3 列行列のことである。

- (1) B を求めなさい。
- (2) P を求めなさい。
- (3) 連立方程式

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解きなさい。

(大分大 2011) (m20115108)

- 0.1389** 2 次の対称な正方行列 $A = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$ を考える。このとき、行列 A と 2 次元のベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

を用いて、2 次式 $f(x, y)$ を $f(x, y) = \mathbf{v}^T A \mathbf{v}$ と定義する。ただし、記号 T は、行列やベクトルの転置を示し、 $\mathbf{v}^T$ はベクトル $\mathbf{v}$ の転置を示すものとする。

- (1) 行列 A の固有値、固有ベクトル（ベクトルの大きさは 1 とする）を求めなさい。

(2) 適当な直交行列 U により行列 A を対角化し, $U^T A U = D$ と表現する. ただし, D は 2 次の対角行列とする. 行列 U と D を求めなさい.

(3) (2) の結果を利用して, $f(x, y)$ は負の値をとらないことを証明しなさい.

(大分大 2012) (m20125108)

0.1390 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 3a \end{pmatrix}$, ($a \neq 0$), 行列 $B = P^{-1}AP$ とする.

ここで, P^{-1} は P の逆行列を表す. このとき, 次の問いに答えなさい.

(1) 行列 P^{-1} を求めなさい.

(2) 行列 B を求めなさい.

(3) n を正の整数とすると, $A^n = PB^nP^{-1}$ が成り立つことを証明しなさい.

(大分大 2014) (m20145101)

0.1391 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 行列 A が逆行列をもつための $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ の条件を求めよ.

(2) A の逆行列を求めよ.

(3) A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(熊本大 2001) (m20015205)

0.1392 n 次の実正方行列 A について, ${}^tAA = E$ が成り立つとき, A は n 次の直交行列であるという. ここで, tA は A の転置行列, E は n 次の単位行列である. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) A, B が共に n 次の直交行列であれば, AB, A^{-1} も n 次の直交行列であることを示せ.

(2) 2 次の直交行列 A は次の 2 つの行列のいずれかの形をしていることを示せ.

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

(熊本大 2004) (m20045203)

0.1393 3 次の実正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる 3 次の正則行列 P を 1 つ求めよ.

(熊本大 2004) (m20045204)

0.1394 $\mu \neq \lambda > 0$ として, 3 つの行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$$

が, $AP = PB$ を満たすような λ, μ, x, y を求めよ.

(熊本大 2006) (m20065204)

0.1395 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ. (熊本大 2007) (m20075203)

0.1396 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. $B = \lambda I_2 - A$ とする. ただし, λ は定数で, I_2 は 2 次の単位行列である. 次の問いに答えなさい.

(1) B を求めなさい.

(2) $B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に自明でない解 ($x = y = 0$ ではない解) が存在するような λ を全て求め, それぞれの λ に対して, $B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の自明でない解を求めなさい.

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(4) A の対角化により, A^n を求めなさい. ただし, n は自然数とする.

(熊本大 2008) (m20085201)

0.1397 次の行列は対角化可能かどうか判定しなさい. ただし, α, β, γ はいずれも 0 でない実数であり, かつ, $\alpha \neq \beta$ とする.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

(熊本大 2009) (m20095202)

0.1398 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ に関して, 次の問いに答えなさい.

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) それぞれの固有ベクトルからなる空間を V とし, V の正規直交基底を求めなさい.

(3) 設問 (2) の結果を用いて, 行列 A を $R^T A R$ により対角化する直交行列 R を求めなさい. ただし, R^T は R の転置行列である.

(熊本大 2011) (m20115201)

0.1399 xy 平面上の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を同じ平面上の点 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ に移す写像

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{①}$$

について, 以下の問いに答えなさい.

(1) この写像を表す行列の固有値と固有ベクトルの組は, 次を示す ② と ③ の二つであることを示しなさい. なお, 固有ベクトルの大きさは, $\sqrt{2}$ に選んである.

$$\text{固有値 } \lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad \text{固有ベクトル } \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{②}$$

$$\text{固有値 } \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \text{固有ベクトル } \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{③}$$

- (2) 二つの固有ベクトル $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ は 1 次独立なので, xy 平面上の点を表すベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は

$\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ の 1 次結合によって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2$$

のように表現できる. α および β を, x および y を用いて表しなさい.

- (3) この写像によって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が移る点 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ を, $\alpha, \beta, \mathbf{x}_1$ および $\mathbf{x}_2$ を用いて表しなさい.

(熊本大 2013) (m20135202)

0.1400 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ に対して, 以下の間に答えなさい.

- (1) A の逆行列を求めなさい.
- (2) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.
- (3) A は対角化可能かどうか調べ, その理由を示しなさい.
- (4) A^n を求めなさい.

(熊本大 2017) (m20175201)

0.1401 下記の行列 A の逆行列を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(熊本大 2019) (m20195202)

0.1402 次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ を考える.

$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$$

この漸化式は行列を用いて次のように表現できる.

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えなさい.

- (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値および対応する固有ベクトルを求めなさい.
- (2) $B = P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P を用いて, 対角行列 B を求めなさい.
- (3) 行列 A^n を求めなさい. ただし, A^n は次式で定義される.

$$A^n = \underbrace{AAA \cdots A}_n$$

- (4) 上記 (3) の結果を利用して, $a_0 = 0, a_1 = 1$ を初期値としたときの数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めなさい.

(熊本大 2020) (m20205203)

0.1403 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ および行列 $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対して、以下の問いに答えなさい。

- (1) A の固有値を全て求めなさい。
- (2) B の逆行列を求めなさい。
- (3) 行列 $(AB)^n$ を求めなさい。ただし、 n は自然数である。
- (4) 行列 $(BA)^n$ を求めなさい。ただし、 n は自然数である。
- (5) (4) の結果を用いて、 A の逆行列を A と B を使って表しなさい。

(熊本大 2022) (m20225203)

0.1404 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ に対して、以下の問いに答えなさい。

- (1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい。
- (2) 行列 A は対角化可能かどうか調べ、その理由を示しなさい。
- (3) 行列 A のべき乗 A^n を求めなさい。

(熊本大 2023) (m20235201)

0.1405 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ について、次の各問に答えよ。

- (1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ。
- (2) ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を 2 つの固有ベクトルの和で表せ。
- (3) (2) の結果と固有ベクトルの性質を用いて、 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ を示せ。

(宮崎大 2004) (m20045305)

0.1406 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ。

- (1) A の固有値 λ_1 と λ_2 を求めよ。
- (2) λ_1 と λ_2 に対応する固有ベクトル $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ をそれぞれ求めよ。

(宮崎大 2006) (m20065301)

0.1407 $x > 0, y > 0$ に対して $u(x, y) = x^y, v(x, y) = x^2 + y^2$ とおく。

このとき、ヤコビ行列 $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ とその行列式 $|J|$ の値を求めよ。

(宮崎大 2006) (m20065302)

0.1408 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ について、次の各問に答えよ。

- (1) 行列 A の固有値を全て求めよ。
- (2) 行列 A の固有ベクトルを全て求めよ。

(宮崎大 2008) (m20085301)

0.1409 次の連立一次方程式について、次の各問に答えよ.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 \quad \quad - 2x_3 = 2 \\ \quad \quad x_2 + 3x_3 = -7 \end{cases}$$

- (1) この連立一次方程式を、行列 A とベクトル $\mathbf{b}$ を用いて $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ とあらわしたときの、係数行列 A を記せ. ただし、 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とする.
- (2) 係数行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.
- (3) 上の連立一次方程式を解け.

(宮崎大 2010) (m20105301)

0.1410 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ について、次の各問に答えよ.

- (1) $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を満たす列ベクトル $\mathbf{x}$ を求めよ.
- (2) 行列 A の固有値の 1 つは 0 である. この固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(宮崎大 2011) (m20115301)

0.1411 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について、次の各問に答えよ.

- (1) 行列 A の固有値を求めよ.
- (2) (1) で求めた固有値に対応する固有ベクトルをすべて求めよ.

(宮崎大 2012) (m20125303)

0.1412 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ.

- (1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.
- (2) 行列 A の固有ベクトルをすべて求めよ.

(宮崎大 2013) (m20135301)

0.1413 連立一次方程式 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 \quad \quad + x_3 = 0 \end{cases}$ について、次の各問に答えよ.

- (1) この連立一次方程式を、行列 A を用いて $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と表したときの A を求めよ. ただし、 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{b}$ はベクトルであり、 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする.
- (2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.
- (3) 連立一次方程式を解け.

0.1414 連立一次方程式

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

について、次の各問に答えよ。

- (1) この連立一次方程式を、行列 A を用いて $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と表したときの A を求めよ。ただし、 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{b}$ はベクトルであり、 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。
- (2) この連立一次方程式を解け。

(宮崎大 2015) (m20155302)

0.1415 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ について、次の各問に答えよ。

- (1) A の固有値をすべて求めよ。
- (2) A の固有ベクトルをすべて求めよ。
- (3) A^{99} を求めよ。

(宮崎大 2016) (m20165303)

0.1416 連立一次方程式 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$ について、次の各問に答えよ。

- (1) この連立一次方程式を、行列 A を用いて $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と表したときの A を求めよ。ただし、 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{b}$ はベクトルであり、 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ とする。
- (2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ。
- (3) 連立一次方程式を解け。

(宮崎大 2018) (m20185303)

0.1417 k を実数の定数とする。連立一次方程式

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -2x + 3y - z = 0 \cdots \cdots (*) \\ -x + ky + z = 0 \end{cases}$$

について、次の各問に答えよ。

- (1) $(*)$ を、行列 A を用いて $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ と表したときの A を求めよ。ただし、 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{0}$ はベクトルであり、 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。
- (2) (1) で求めた行列 A に対して、行列式 $|A|$ の値を求めよ。
- (3) $(*)$ が自明解 $x = y = z = 0$ 以外の解をもつような k の値を求めよ。
- (4) (3) で求めた k の値に対する $(*)$ の解を、すべて求めよ。

0.1418 連立一次方程式
$$\begin{cases} 2x & -y & -3z & = & 2 \\ x & -3y & -2z & = & 5 \\ -x & +y & +z & = & -3 \end{cases}$$
 について、次の各問に答えよ.

- (1) この連立一次方程式を、行列 A を用いて $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と表したときの A を求めよ. ただし、 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{b}$ はベクトルであり、 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ とする.
- (2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.
- (3) この連立一次方程式を解け.

0.1419 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ について、次の各問に答えよ.

- (1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を計算せよ.
- (2) 1 次変換 f による、正方形 $\{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$ の像を座標平面上に図示せよ.
- (3) 1 次変換 f による、直線 $x + y = 3$ の像を座標平面上に図示せよ.

0.1420 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ について、次の各問に答えよ.

- (1) A の固有値をすべて求めよ.
- (2) (1) で求めたそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.
- (3) 適当な直交行列 P により、 $P^{-1}AP$ は対角行列となる. そのような直交行列 P を 1 つ求めよ.

0.1421 A を、複素数を成分とする 2 次正方行列とし、 λ を複素数とする. E は 2 次単位行列で、 $|\lambda E - A|$ は、行列 $\lambda E - A$ の行列式を表すものとする. このとき、つぎの (1)~(4) に記述されたそれぞれの文章について、その文章が正しいならば「正しい」と、正しくないならば「正しくない」と答えよ.

- (1) λ が A の固有値ならば、次の (*) を満たす p_1 と p_2 が存在する.
- $$(*) \quad A\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}, \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
- (2) $|\lambda E - A| = 0$ を満たす λ は、 A の固有値である.
- (3) A の成分がすべて実数であり、 λ が A の固有値であるならば、 λ はつねに実数である.
- (4) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 3 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ならば、 λ は A の固有値である.

0.1422 k を実数の定数とする. 連立一次方程式

$$\begin{cases} x & +y & -2z & = & 0 \\ 2x & -y & +z & = & 0 \\ 5x & -4y & +kz & = & 0 \end{cases} \quad \cdots (*)$$

について、次の各問に答えよ.

- (1) (*) を, 行列 A を用いて $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ と表したときの A を求めよ. ただし, $\mathbf{x}$ と $\mathbf{0}$ はベクトルであり,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ とする.}$$

- (2) (1) で求めた行列 A に対して, 行列式 $|A|$ の値を求めよ.
 (3) (*) が自明解 $x = y = z = 0$ の他にも解をもつような k の値を求めよ.
 (4) (3) で求めた k の値に対する (*) の解を, すべて求めよ.

(宮崎大 2024) (m20245301)

- 0.1423** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & 4 \end{pmatrix}$ のとき, A と B が可換 (すなわち $AB = BA$) であるように a, b の値を定めよ. このとき $C = (AB)^2 - A^2B^2$ の値を求めよ.

(鹿児島大 2001) (m20015417)

- 0.1424** (1) ベクトル $\mathbf{a} (3, -1, -2)$ とベクトル $\mathbf{b} (2, 4, 1)$ があるとき, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は直交しているかどうかを説明しなさい. また, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を求めなさい.

- (2) 行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, 行列 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ があるとき, $\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2$ と $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ を求めなさい.

(鹿児島大 2005) (m20055408)

- 0.1425** 平面内にある直交直線座標系で規定したベクトルの変換行列 $\mathbf{A}$ において, 次の問に答えなさい.

- (1) 原点の周りに反時計回りに $\frac{\pi}{6}$ ラジアン回転させるベクトルの変換行列 $\mathbf{A}$ (直交行列) は次のように与えられる.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

行列 $\mathbf{A}$ を用いてベクトル $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を回転変換させるには, $\mathbf{Ar}$ の演算をすればよい. 回転変換によって得られるベクトルを求めよ.

- (2) ベクトル $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ をベクトル $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$ に変換する 2 行 2 列の変換行列 $\mathbf{A}$ を求めよ. ただし, a, b は実数とする.

(鹿児島大 2005) (m20055411)

- 0.1426** 次の行列式と行列に関する問いに答えよ.

$$(1) \text{ 次の行列式の値を求めよ. } \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

- (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする. A^2, A^3, A^4, A^5 を求め, A^n を一般形で表せ.

(鹿児島大 2007) (m20075404)

0.1427 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ のとき, AC , BC , BA を求めなさい.
(鹿児島大 2007) (m20075405)

0.1428 次の行列を計算しなさい.
(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$
(鹿児島大 2007) (m20075411)

0.1429 2 行 2 列の行列 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ がある.
(1) J の逆行列を求めなさい.
(2) $A^T J A = J$ を満たすとき, $A J A^T$ を求めなさい. 但し, A^T は A の転置行列である.
(鹿児島大 2008) (m20085408)

0.1430 行列 A , P を次の様にする時, 以下の問いに答えなさい.
 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
(1) $P^{-1}AP$ を計算しなさい.
(2) (1) の結果を用いて, A^n を求めなさい. (n は正の整数.)
(鹿児島大 2009) (m20095406)

0.1431 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が,
$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\lambda : \text{定数}) \quad \dots\dots (a)$$
を満たす時, 以下の問いに答えなさい.
(1) (a) 式を満たす 2 つの定数 λ (固有値) と 2 つのベクトル (x, y) (固有ベクトル) を求めなさい.
(2) (1) で求めた固有ベクトルを用いて, 行列 A を対角化しなさい.
(鹿児島大 2009) (m20095418)

0.1432 2 つの行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ がある時, 以下の問いに答えなさい.
(1) 行列 P の逆行列 P^{-1} を求めなさい.
(2) $(P^{-1}AP)^n$ (n : 整数) を求めなさい.
(3) (2) の結果を用いて A^n を求めなさい.
(鹿児島大 2010) (m20105408)

0.1433 以下の問いに答えなさい. なお, 一般の 2×2 の正方行列: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して
 $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = 0$ が成り立つこと (ハミルトン・ケーリーの定理) を参考にしても構いません.

- (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, $A^2 = A$ が成り立つとする. $a + d = 1$ のとき, $ad - bc$ の値を求めなさい.
- (2) 行列 $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$ について, B^2, B^3, B^{100} を求めなさい.

(鹿児島大 2011) (m20115411)

0.1434 行列 $A = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, 行列 $B = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ がある. このとき, 以下の各問に答えよ.

- (1) AB ならびに BA を求めよ.
- (2) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = 2BA - C$ とするとき, D を求めよ.
- (3) n を正の整数, $r = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$ とするとき, $D^n r = \begin{pmatrix} \cos(-n\pi/2 + 2n\theta + \phi) \\ \sin(-n\pi/2 + 2n\theta + \phi) \end{pmatrix}$ であることを証明せよ.
- (4) $R = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$ とするとき $D^n = R$ の形に書けることを示し, β を求めよ. また, このことを利用して逆行列 $(D^n)^{-1}$ を求めよ.

(鹿児島大 2012) (m20125404)

0.1435 2×2 の正方行列: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ がある. $A \neq O$, $A^2 = O$ とするとき, 以下の問いに答えなさい. ただし, O は零行列を表わす.

- (1) $ad - bc$ の値と, その値を導出した過程を示しなさい.
- (2) $a + d$ の値と, その値を導出した過程を示しなさい.

(鹿児島大 2012) (m20125413)

0.1436 2×2 の正方行列: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ があるとき, 以下の問いに答えなさい.

- (1) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めなさい.
- (2) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(鹿児島大 2012) (m20125418)

0.1437 次の行列の積を計算しなさい.

$$(1) \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & c & d \\ 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3$$

(鹿児島大 2012) (m20125427)

0.1438 正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ がある. 以下の問いに答えなさい.

- (1) 行列 A の行列式を求めなさい.
- (2) 行列 A の逆行列を求めなさい.

0.1439 次の設問に答えなさい.

(1) 列ベクトル $A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ と行ベクトル $B = [d \ e \ f]$ を用いて, 次の行列積を計算しなさい.

① AB ② BA

(2) 次の行列の階数を求めなさい.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 3 & 16 \end{pmatrix}$$

(3) 次の行列の逆行列を求めなさい.

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$$

ただし, ω は $x^3 = 1$ の 1 つの虚数解とする.

(鹿児島大 2014) (m20145403)

0.1440 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$ の固有値は $\frac{4}{5}$ であり, 固有単位ベクトルは $\vec{a} = (a_x, a_y) = \frac{\sqrt{5}}{5}(1, 2)$ であ

る. 以下の問いに答えなさい.

(1) $\vec{a}$ と直交する単位ベクトル $\vec{b} = (b_x, b_y)$ を求めなさい. ただし, $b_x < 0$ とする.

(2) 行列 P を $\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{pmatrix}$ とおく. ${}^t P P$ と $P {}^t P$ を求めなさい. ただし, ${}^t P$ は P の転置行列とする.

(3) ${}^t P A P$ を求めなさい.

(鹿児島大 2014) (m20145414)

0.1441 下記の行列 A について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A を構成する三つの縦ベクトルは線形独立かどうかを調べよ.

(2) 直交座標系 $O-xy$ において, 行列 A の各要素からなる三直線: $a_i x + b_i y = c_i$ ($i = 1, 2, 3$) の交点を求めよ.

(鹿児島大 2015) (m20155405)

0.1442 次のように行列 A が定義されている. A^6 を求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} -a & \frac{1}{2} \\ 2 & a \end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2015) (m20155410)

0.1443 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ が, 逆行列と転置行列の等しい直交行列 ($A^T = A^{-1}$) であることを示せ.

(鹿児島大 2015) (m20155415)

0.1444 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ が正則であるかどうかを調べよ.

(2) $x - y$ 平面上において, 次に示す三直線の交点の座標 (x, y) を求めよ.

$$l_1: x + y = 5$$

$$l_2: x + 2y = -1$$

$$l_3: x + 3y = -7$$

(鹿児島大 2016) (m20165405)

0.1445 (1) 次の行列式の値を求めなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

(2) 次の行列 A に対して $A = A^{-1}$ が成り立つとする. このときの x と y を求めよ. ただし, x は自然数であり, y は整数であるとする.

$$A = \begin{pmatrix} x & -3 \\ 8 & y \end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2016) (m20165409)

0.1446 下記の行列 A について以下の問いに答えよ. ただし, 虚数単位は i とする.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) A の行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) A の 2 つの固有値 λ_1, λ_2 を求めよ.

(鹿児島大 2017) (m20175405)

0.1447 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ のとき, $A + B, AB, A^2, B^T A^T$ をそれぞれ求めよ.

(2) 行列を用いて, 次の連立一次方程式を解け (計算過程を示すこと).

$$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ x + y + z = 6 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$$

(3) 行列 A, B が正則な行列であるとする. このとき, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ となることを示せ.

(鹿児島大 2017) (m20175415)

0.1448 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(鹿児島大 2018) (m20185410)

0.1449 (1) 次の行列を計算しなさい.

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列の積を計算しなさい.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めなさい.

(鹿児島大 2018) (m20185415)

0.1450 次の行列 A がある. 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2) 以下の連立方程式の解を求めよ.

$$4x + 6y = 8, \quad 4x + 2y = 24$$

(3) 行列 A の固有値を求めよ.

(鹿児島大 2018) (m20185424)

0.1451 行列 A を $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ とする. 以下の問いに答えなさい.

(1) A^2 を求めなさい.

(2) 行列式 $|A|$ が $|A| = 0$ となる a の値を求めなさい.

(鹿児島大 2018) (m20185428)

0.1452 (1) 次の行列の計算をせよ.

$$5 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \\ -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列の計算をせよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2018) (m20185434)

0.1453 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の転置行列を tA とするとき, tAB を計算せよ.

(2) 行列 B の逆行列 B^{-1} を求めよ.

(3) 行列 B の固有値 λ を求めよ.

(鹿児島大 2021) (m20215405)

0.1454 行列 $A = \begin{pmatrix} a & -1 & a \\ -1 & a & 1 \\ -2 & a & -2 \end{pmatrix}$ の行列式が 4 となるときの a の値を求めなさい.

(鹿児島大 2021) (m20215409)

0.1455 行列 $B = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有ベクトル $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対応する固有値 λ_1 を求めなさい. また, 行列 B の固有値 $\lambda_2 = 2$ に対応する大きさが 1 の固有ベクトル $\vec{v}_2$ をすべて求めなさい.

(鹿児島大 2021) (m20215410)

0.1456 下記の行列 A について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A を構成する 3 つの縦ベクトルは線形独立であるかどうかを調べよ.
- (2) 直交座標系 $O - xyz$ において, 行列 A の転置行列を行列 B として, $(x \ y \ z)B = (10 \ 5 \ 1)$ の解を求めよ.

(鹿児島大 2022) (m20225405)

0.1457 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えなさい.

- (1) 行列 A の行列式の値を求めなさい.
- (2) 行列 A の逆行列を求めなさい.

(鹿児島大 2022) (m20225409)

0.1458 次の行列 A の行列式 $|A|$ を求めよ. また, 行列 A が正則であるかどうかを調べよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2023) (m20235405)

0.1459 次の行列 B の固有値ならびに固有ベクトルを求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2023) (m20235406)

0.1460 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ について, A^2, A^3, A^8 を求めなさい.

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} a & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & a-3 \end{pmatrix}$ の行列式が 0 となる a の値を全て求めなさい.

(鹿児島大 2023) (m20235410)

0.1461 次の行列 A がある。以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ。
- (2) 以下の式を満足する x と y を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \end{pmatrix}$$

- (3) 行列 A の固有値を求めよ。

(鹿児島大 2024) (m20245405)

0.1462 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & a \end{pmatrix}$ の行列式が a^2 となる a の値を求めなさい

(鹿児島大 2024) (m20245409)

0.1463 行列 $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい。

(鹿児島大 2024) (m20245410)

0.1464 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 9 & 14 \\ 8 & 16 & 33 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 92 \\ 209 \\ 449 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{とする.}$$

方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を次の手順に従って解け。

- (1) $A = LU$ を満たすような行列 L および U を求めよ。
- (2) $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ を満たすような $\mathbf{y}$ を求めよ。
- (3) $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ を満たすような $\mathbf{x}$ を求めよ。

(室蘭工業大 2005) (m20055505)

0.1465 行列 E および J を以下のように定義する。

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき、行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$ および $B = \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix}$ として、以下が成り立つことを示しなさい。

- (1) $J^2 = -E$
- (2) $AB = (a_1b_1 - a_2b_2)E + (a_1b_2 + a_2b_1)J$
- (3) $A^t A = (a_1^2 + a_2^2)E$ (ただし、 A^t は、 A の転置行列を表す)

(室蘭工業大 2005) (m20055511)

0.1466 行列 $C = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 10 & a \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ。

(1) C が正則であるための条件を求めよ.

(2) C が正則のとき C の逆行列を求めよ.

(室蘭工業大 2005) (m20055515)

0.1467 $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ のとき AB , BA を求めよ.

(室蘭工業大 2005) (m20055516)

0.1468 以下のような行列 A, B が与えられている. AA^t および BB^t を求めなさい.

ただし, A^t は行列 A の転置行列, B^t は行列 B の転置行列を表す.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2006) (m20065503)

0.1469 行列 C の固有値とその固有ベクトルを求めなさい. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(室蘭工業大 2006) (m20065504)

0.1470 つぎの行列 A に関し, 以下の問に答えよ. $A = \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & ab & ca \\ ab & c^2 + a^2 & bc \\ ca & bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$

(1) 次式が成り立つことを示せ.

$$\begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix}^2 = A$$

(2) A の行列式を求めよ.

(室蘭工業大 2006) (m20065512)

0.1471 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $2A + 3B$ を計算しなさい.

(2) AB , BA を求めなさい.

(室蘭工業大 2006) (m20065516)

0.1472 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ ($a > 1$).

(室蘭工業大 2007) (m20075501)

0.1473 (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ のとき, BA を求めなさい.

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ のとき, $AX = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ を満たす行列 X を求めなさい.

(室蘭工業大 2007) (m20075503)

0.1474 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ が直交行列であることを示しなさい.

(室蘭工業大 2007) (m20075506)

- 0.1475 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と各々の固有値に対応する固有ベクトルを求めなさい.
- (2) P を正則な正方行列として $B = P^{-1}AP$ のときに A の固有値と B の固有値は一致することを示しなさい.
- (3) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき $B = P^{-1}AP$ として B の固有値と各々の固有値に対応する固有ベクトルを求めなさい.

(室蘭工業大 2008) (m20085509)

0.1476 行列に関する以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 A, B, C, D を,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

として, 行列の積 AB, CD, DC を計算せよ.

- (2) 行列 X を,

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

として, その転置行列 tX , および, 固有和 (トレース) $\text{tr}(X)$ を,

$${}^tX = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{tr}(X) = x_{11} + x_{22}$$

と定義する. このとき, $\text{tr}({}^tXX)$ を求めよ.

(室蘭工業大 2009) (m20095502)

0.1477 3 行 3 列の正方行列 A を以下のように定める.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ a & b & 3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

- (1) 以下の 3 つの基本変形に関連して, 行列式は以下の性質をもつ.

- (a) 2 つの行を入れ換えると, 行列式の値は -1 倍される.
- (b) ある行の定数倍をほかの行に加えても, 行列式の値は変わらない.
- (c) ある行を c 倍すると, 行列式の値も c 倍される.

上記の基本変形を利用して, A を上三角行列に変形せよ. ここで, 上三角行列とは, 行列の i 行 j 列成分 (ただし, $i > j$) がゼロである行列のことである.

- (2) A の行列式を求めよ.

(室蘭工業大 2009) (m20095503)

0.1478 行列 A を $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ としたとき、次の問いに答えよ.

- (1) 行列式 $|A|$ の値を求めよ.
- (2) 逆行列 A^{-1} を求めよ.
- (3) 行列 A の 2 乗 A^2 を求めよ.
- (4) 行列 A の N 乗 A^N を求めよ.

(室蘭工業大 2010) (m20105502)

0.1479 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について、 $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$ が成り立つことを証明しなさい. ただし、 a, b, c, d は実数であり、 E を 2 次単位行列、 O を 2 次零行列とする.

- (2) 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ に対して B^5 を求めよ.
- (3) 実数 x の n 次式を $x^n = (x^2 - x - 2)Q(x) + ax + b$ と表したときの係数 a および b を求めよ. ただし、 $Q(x)$ は多項式であり、 n は自然数とする.
- (4) 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ に対して B^n を求めよ. なお、(1) の証明および (3) の答えを利用すること.

(室蘭工業大 2010) (m20105505)

0.1480 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2011) (m20115501)

0.1481 以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と各々の固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.
- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような、正則な正方行列 P を求めよ. ただし、行列 P は直交行列 (逆行列と転置行列が等しい行列) とする.

(室蘭工業大 2011) (m20115508)

0.1482 以下の (1),(2),(3) に答えよ.

- (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ としたとき、行列の積 AB を求めなさい.

- (2) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & 8 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の階数を求めなさい.

- (3) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -x \\ 1 & -6 & 11 & 6 \end{vmatrix}$ が正となる実数 x の条件を求めなさい.

(室蘭工業大 2011) (m20115511)

0.1483 行列 $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ.

(室蘭工業大 2015) (m20155501)

0.1484 3つの行列が, 以下のように与えられているとする.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき, 次の行列積をそれぞれ求めよ.

$$AB, \quad CAB, \quad BC$$

(室蘭工業大 2015) (m20155508)

0.1485 3つのベクトルが, 以下のように与えられているとする.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

このとき, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ を求めよ. さらに, 次の行列式を計算せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(室蘭工業大 2015) (m20155509)

0.1486 行列に関する設問に答えよ.

(1) 下記に示す行列 A の固有値, 固有ベクトルを全て求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 下記に示す行列 B の固有値, 固有ベクトルを全て求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2015) (m20155515)

0.1487 以下の行列 A の行列式を求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2016) (m20165504)

0.1488 行列に関する以下の問いに答えよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ の逆行列を計算せよ.

(2) (1) で求めた逆行列を利用して,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

の x, y, z を求めよ.

(室蘭工業大 2016) (m20165507)

0.1489 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2016) (m20165513)

0.1490 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ に関する以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求め, 各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) $AX = BA$ を満足する行列 X を求めよ.

(室蘭工業大 2017) (m20175506)

0.1491 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に関する以下の問いに答えよ.

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ.

(2) 行列式 $|A|$ を計算せよ.

(室蘭工業大 2018) (m20185509)

0.1492 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき, 以下の行列

$$2A^3 - 9A^2 + 10A + 8E$$

を求めなさい. ただし, E は単位行列とする.

(室蘭工業大 2018) (m20185513)

0.1493 次の行列 A の固有値及び固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2022) (m20225503)

0.1494 以下の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2022) (m20225507)

0.1495 行列 $A = \begin{pmatrix} a^5 & 0 & a^5 & a^5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ a^5 & 1 & a^5 & 2a^5 \\ a^5 & 1 & 2a^5 & a^5 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ.

(1) A の行列式を求めよ.

(2) $a = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、 A の行列式の値を示せ. ただし、 $j = \sqrt{-1}$ である.

(室蘭工業大 2022) (m20225511)

0.1496 $A_1 = \begin{pmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(室蘭工業大 2023) (m20235503)

0.1497 以下の行列 A の逆行列を求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2023) (m20235510)

0.1498 以下の行列 B の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2023) (m20235511)

0.1499 次の行列 A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2023) (m20235514)

0.1500 2次元ベクトル空間 R^2 上の線形変換 f は、ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ に移し、ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ をベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$ に移すとする. ただし、 t は定数である. このとき、 f を表す行列を求めよ. また、その行列が逆行列をもたないような t の値を求めよ.

(岡山県立大 2005) (m20055602)

0.1501 行列 $\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$ の階数を求めよ. ただし、 a, b は実数とする.

(岡山県立大 2006) (m20065602)

0.1502 行列 A について、以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (1) $|A|$ の値を求めよ.
- (2) A の逆行列を求めよ.
- (3) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(香川大 2005) (m20055702)

0.1503 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) P の逆行列を求めよ.
- (2) $P^{-1}AP$ を求めよ.
- (3) (2) の結果を用いて, A^n (n は自然数) を求めよ.

(香川大 2010) (m20105702)

0.1504 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = (1 \quad -2)$ のとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $AX = B$ を満たす行列 X を求めよ.
- (2) $YA = C$ を満たす行列 Y を求めよ.

(香川大 2016) (m20165704)

0.1505 以下の行列 A は, 適当な正則行列 P を用いて $P^{-1}AP = B$ のように相似変換し, 行列 B を対角行列にすることができる. 対角行列となる B を求めよ. また, P の一例を示せ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(香川大 2022) (m20225706)

0.1506 行列 $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$ の階数が 1 となる (a, b, c) の組を, すべて求めよ.

(島根大 2005) (m20055803)

0.1507 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ について, 以下の設問に答えよ.

- (1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルの第 1 成分の大きさが 1 となるように定めよ.
- (2) 設問 (1) で求めた固有ベクトルと, それらを行列 A によって 1 次変換したベクトルを, 直交座標系 $O - xy$ 上に原点 O を始点として描け.
- (3) ある四辺形を行列 A によって 1 次変換した像が, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$ を頂点とする正方形になった. 変換前の四辺形のすべての頂点を求め, その四辺形を直交座標系 $O - xy$ 上に描け.
- (4) 設問 (3) で求めた四辺形の面積を求めよ.

(島根大 2005) (m20055809)

0.1508 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ について, 以下の設問に答えよ.

- (1) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ.
- (2) 固有値 λ_1, λ_2 それぞれに対応する固有ベクトル p_1, p_2 を, 長さ 1 となるように求めよ.
- (3) 設問 (2) で求めた p_1, p_2 を列ベクトルとみなして構成された行列 $P = (p_1 \ p_2)$ と, その逆行列 P^{-1} を求めよ.
- (4) P, P^{-1} を用いて A を対角行列に変換せよ.

(島根大 2005) (m20055815)

0.1509 a, b, c を 0 でない実数とする. このとき, 行列 $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ の階数が 2 となるための必要十分条件を求めよ.

(島根大 2006) (m20065804)

0.1510 (1) 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ -5 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

(2) a を実数とし,

$$A = \begin{pmatrix} a & -3 & 1 & 1 \\ 5 & -8 & 3 & a \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (a) A の階数が 2 となるような a の値を求めよ.
- (b) $V = \{v \in \mathbf{R}^4 \mid Av = 0\}$, $W = \{Av \mid v \in \mathbf{R}^4\}$ とおく. このとき, V は $\mathbf{R}^4$ の部分空間, W は $\mathbf{R}^3$ の部分空間であることを示せ.
- (c) (a) のとき, V, W の基底を一組ずつ求めよ.
- (d) (a) のとき, $\{v_1, v_2\}$ を V の任意の基底とする. また, W の任意の基底 $\{w_1, w_2\}$ に対して, $v_3, v_4 (\in \mathbf{R}^4)$ を

$$w_1 = Av_3, \quad w_2 = Av_4$$

となるような任意のベクトルとする. このとき, $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ は $\mathbf{R}^4$ の基底であることを示せ.

(島根大 2008) (m20085801)

0.1511 (1) 次の行列 A の固有値と, それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルを大きさが 1 になるように規格化すること.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 設問 (1) の行列 A に対し, tPAP が対角行列となるような直交行列 P を求めよ. ただし, tP は P の転置行列を表す.

(島根大 2010) (m20105807)

0.1512 次の行列 A について以下の設問に答えよ. ただし, $0 < a < 1/2$ とする.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$

- (1) A^2 を計算せよ.
- (2) $|A|$ を計算せよ.
- (3) A^{-1} を求めよ.
- (4) A の固有値と、それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルを大きさが 1 になるように規格化すること.
- (5) A^{-1} , A^2 および A^n の固有値を求めよ. ただし, n は自然数とする.
- (6) A^n を求めよ.
- (7) $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ を求めよ.

(島根大 2010) (m20105812)

0.1513 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (2) A を直交行列を用いて対角化せよ.

(島根大 2012) (m20125806)

0.1514 次の (1), (2), (3) に答えよ. $\mathbb{R}^n$ は n 次列ベクトルのなす実ベクトル空間を表すことにする.

- (1) (a) 「実ベクトル空間 V の n 個のベクトル $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ が V の基底である」ことの定義を述べよ.
 (b) 実ベクトル空間 V のベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ が 1 次独立であるとき, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ が 1 次従属であるならば, $\mathbf{v}_4$ が $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ の 1 次結合で表せることを示せ.

- (2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, 写像 $f_A : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $f_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \in \mathbb{R}^5$) と定める. このとき,

(a) 写像 f_A は線形写像であることを示せ.

(b) f_A の核 $\ker f_A$ の基底を求めよ.

(c) $\mathbb{R}^5$ の標準基底と $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{ w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ に関する f_A の表現行列を求めよ.

- (3) n 次実正方行列 B に対して, 線形写像 $f_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を $f_B(\mathbf{v}) = B\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$) と定める. このとき, f_B が全射であれば, B は正則行列であることを証明せよ.

(島根大 2013) (m20135801)

0.1515 (3, 4) 型行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, 写像 $f_A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ と定める. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) f_A は線形写像であることを示せ.
- (2) f_A の核 $\text{Ker} f_A$ に属するベクトルをすべて求めよ.
- (3) f_A の像 $f_A(\mathbb{R}^4)$ の基底を求めよ.

- (4) $f_A(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ を満たすベクトル $\mathbf{y}$ をすべて求めよ. もしそのような $\mathbf{y}$ が存在しない場合はその理由を述べよ.

(島根大 2014) (m20145801)

- 0.1516** (1) 次の行列 A と行列 A' の階数を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4a+13 \\ 3 & 0 & 4 & a \end{pmatrix}$$

- (2) 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x - y + 3z = 4a + 13 \\ 3x + 4z = a \end{cases}$$

の解が存在するための必要十分条件を (1) で求めた階数を用いて述べよ. さらに, 解が存在するような a の値をすべて求めよ.

- (3) (2) の連立 1 次方程式が解をもつとき, その一般解を求めよ.

(島根大 2015) (m20155803)

0.1517 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値を求めよ.
 (2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を求めよ.

(島根大 2017) (m20175803)

0.1518 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) A の行列式の値を求めよ.
 (2) A の階数を求めよ.
 (3) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
 (4) $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f を次のように定める.

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - z \\ -x - y + z \\ 3x + y - 2z \end{pmatrix}$$

- (a) f は線形写像であることを示せ.
 (b) $f(\mathbb{R}^3)$ の一組の基底を求めよ.

(島根大 2019) (m20195804)

0.1519 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき.

- (1) 行列式 $\det \mathbf{A}$ を求めよ.
- (2) 逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ を求めよ.
- (3) 平面 $-3x + 2y + 2z = 1$ は、一次変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

によって、どのような図形に移るか. その方程式を示せ.

(首都大 2003) (m20035901)

0.1520 行列 $\mathbf{A}$ を $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき.

- (1) 行列 $\mathbf{A}$ の固有値及び固有ベクトルを求めよ.
- (2) 行列 $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ が対角行列となるような、行列 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ を求めよ.
- (3) $\mathbf{A}^k$ を求めよ.

(首都大 2003) (m20035903)

0.1521 $m \times n$ 行列のランク (階数) はその行列の線形独立 (一次独立) な列ベクトルの最大個数等しい.
このとき

行列 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ のランクを求めよ. 解答には、その理由も述べよ.

(首都大 2004) (m20045902)

0.1522 $n \times n$ 正方行列 A の特性多項式は

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

である. (ただし、係数 $a_{n-1}, \dots, a_0$ は定数であり、 I は単位行列である.)

ここでこの多項式の λ に行列 A を代入した行列多項式は

$$f_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_1A + a_0I = 0$$

となる. (これをケイリーハミルトンの定理という)

この定理を用いて

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ のときに、次の行列をそれぞれ求めよ.

- (1) A^3
- (2) A^{-1}

注意：この定理を用いたことがわかるように解答すること

(首都大 2004) (m20045903)

0.1523 (1) 行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式の値を求めよ.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ が与えられたとき, $AB = I$ を満たす行列 B を求めよ.

ただし, I は単位行列である.

(首都大 2005) (m20055901)

0.1524 V が 2×2 行列のベクトル空間であるとき, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A, B, C \in V$ が線形従属であるか, または線形独立であるかを判定せよ (その理由も記述せよ).

(首都大 2005) (m20055902)

0.1525 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ が与えられているとき, 次の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値を全て求めよ.

(2) その全ての固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) 二次形式 $\Phi = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ の標準形が $\Phi = a\xi_1^2 + b\xi_2^2$ で与えられるとき, 係数比 $\frac{b}{a}$ を求めよ.

ただし, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^T$ は直交行列 U を用いて $\mathbf{x} = U\boldsymbol{\xi}$ で表されるベクトルとする.

(首都大 2005) (m20055903)

0.1526 次の行列が逆行列をもつかどうか判定し, もつ場合はそれを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(滋賀県立大 2005) (m20056003)

0.1527 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 4 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ が正則か否かを行列式の値を計算して判定し, 正則であればその逆行列を求めよ.

(滋賀県立大 2007) (m20076003)

0.1528 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ.

(滋賀県立大 2008) (m20086003)

0.1529 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(滋賀県立大 2009) (m20096003)

0.1530 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & k \end{pmatrix}$ が正則行列となるための k に対する条件を求めよ. また, $k = 0$ とした

ときの A の逆行列を求めよ.

(滋賀県立大 2010) (m20106003)

- 0.1531** 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないような k の値を求めよ. また, $k = 2$ のとき A の逆行列を求めよ.

(滋賀県立大 2011) (m20116003)

- 0.1532** $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ただし, a, b, c, d は実数) に対して, A が正則になるための条件を求め, A の余因子行列を用いて A^{-1} を求めよ.

(滋賀県立大 2015) (m20156003)

- 0.1533** 行列 $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ は対角化可能である. 対角化のための正則行列 P を求めて, A を対角化せよ.

(滋賀県立大 2021) (m20216004)

- 0.1534** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 2 & a & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ とする.
- (1) 行列式 $|A|$ を求めよ.
 - (2) A の階数 ($\text{rank } A$) を求めよ.

(滋賀県立大 2024) (m20246003)

- 0.1535** 以下の問に答えよ.

- (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ とする. A が正則行列かどうか調べ, 正則ならば A^{-1} を求めよ.
- (2) $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ -3 & 9 & -3 \end{pmatrix}$ とする.
 - (a) B の固有値および固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルの第 1 成分が 1 となるようにせよ.
 - (b) $P^{-1}BP$ が対角行列となるような P , およびそのときの $P^{-1}BP$ を求めよ.

(宇都宮大 2004) (m20046101)

- 0.1536** (1) 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする. A の階数 (ランク) を求めよ.
- (2) 行列 B を $B = \begin{pmatrix} \alpha & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ とする.
- (a) $\det B = 0$ となるように α を求めよ.
 - (b) この α に対する B の固有値および対応する固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルの第 1 成分が 1 となるようにせよ.

(宇都宮大 2005) (m20056101)

- 0.1537** (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ a & a & 1 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$ としたとき, $|A| = -2$ となった. この時の a の値を求めよ.
- (2) a が (1) の条件を満たすとき, A の固有値および固有ベクトルを求めよ. ただし, a が 2 つ以上の値を取るときは最も小さい値を採用する. また, 固有ベクトルの第 1 成分が 1 となるようにせよ.
- (3) (2) で求めた固有値および固有ベクトルを用いて, A を対角化せよ. その時の対角化行列も求めよ.
- (宇都宮大 2010) (m20106102)

- 0.1538** 行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えなさい.
- (1) $A^2 - A + 4E = O$ が成り立つことを示しなさい. ただし, E および O はそれぞれ, 2 次の単位行列および 2 次の零行列とする.
- (2) A^6 を求めなさい.
- (3) A^{-1} を求めなさい.
- (宇都宮大 2019) (m20196104)

- 0.1539** 次の行列について, 下の問いに答えよ. なお, 計算過程も記入せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- (1) $A^2 - 5A + 6E = O$ が成り立つことを示せ. ここで, E と O は, それぞれ, 2 次の単位行列と 2 次の零行列である.
- (2) A^6 を求めよ.
- (3) A^n を求めよ. ただし, n は自然数である.

(宇都宮大 2022) (m20226101)

- 0.1540** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ において以下の値をそれぞれ求めよ.

- (1) $A^2 + B^2$
- (2) $(A + B)(A - B)$

(工学院大 2004) (m20046206)

- 0.1541** (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ.
- (2) 求められた逆行列 A^{-1} を用いて, 次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

(工学院大 2005) (m20056205)

- 0.1542** 行列 $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ において次の計算を行え.

- (1) AB
- (2) BA

(3) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(工学院大 2005) (m20056207)

0.1543 2次実行列 $A = \begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ. (2) $p = q = \frac{1}{2}$ のとき, A^n ($n = 2, 3, 4, \dots$) を求めよ

(はこだて未来大 2007) (m20076301)

0.1544 2次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ に対して, 以下の問いに答えよ.

(1) A の対角成分の和と A の固有値の和は等しいことを示せ.

(2) A をその固有値と固有ベクトルを用いて対角化せよ.

(はこだて未来大 2008) (m20086301)

0.1545 次の行列 A について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の階数 $\text{rank} A$ を求めよ.

(3) $\{Ax \mid x \in \mathbb{R}^3\}$ が平面となることを示せ.

(はこだて未来大 2009) (m20096301)

0.1546 次の行列 A について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) A^4 を求めよ.

(2) A^{-1} を求めよ.

(はこだて未来大 2009) (m20096302)

0.1547 3次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) (1) で求めた固有値に対応する固有ベクトルのうち, 成分がすべて整数であるものをそれぞれ一つ求めよ.

(はこだて未来大 2010) (m20106301)

0.1548 3次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 1 & b^2 & (c+a)^2 \\ 1 & c^2 & (a+b)^2 \end{pmatrix}$$

について、以下の問いに答えよ。

(1) $a+b+c=0$ のとき、 A の行列式の値を求めよ。

(2) A の行列式を因数分解せよ。

(はこだて未来大 2010) (m20106302)

0.1549 行列 $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値をすべて求めよ。

(はこだて未来大 2011) (m20116301)

0.1550 線形写像 $f: R^3 \rightarrow R^3$ は、 ${}^t(1, 0, 0)$ を ${}^t(1, 0, -1)$ へ、 ${}^t(0, 1, 1)$ を ${}^t(0, 1, 0)$ へ、 ${}^t(0, 1, 2)$ を ${}^t(2, 1, -2)$ へ、それぞれ移すものとする。ここで ${}^t\mathbf{a}$ はベクトル $\mathbf{a}$ の転置を表す。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 3つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

が1次従属であることを示せ。

(2) $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in R^3$) となるような行列 A を求めよ。

(3) (2) で求めた行列 A について、行列 A の階数を求めよ。

(はこだて未来大 2011) (m20116303)

0.1551 次の行列 A について、以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ただし、 $a \neq 3$ とする。

(1) 逆行列 A^{-1} の成分がすべて整数となるような a の条件をすべて示せ。

(2) (1) で求めた条件における逆行列をすべて求めよ。

(はこだて未来大 2012) (m20126301)

0.1552 2次実対称行列について、以下の問いに答えよ。

(1) 2次実対称行列 $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(2) 2次実対称行列 S が正定値であるとは、すべての $\mathbf{x} \in R^2$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) に対して ${}^t\mathbf{x}S\mathbf{x} > 0$ が成立することをいう。ここで ${}^t\mathbf{x}$ は $\mathbf{x}$ の転置である。(1) の行列 B が正定値であることを示せ。

(3) 2次実対称行列 $C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ の固有値をそれぞれ λ_1, λ_2 とする。行列 C が正定値となるための λ_1, λ_2 の条件を求めよ。

0.1553 次の行列 A について、以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- (1) A の固有値をすべて求めよ.
- (2) A の階数を求めよ.
- (3) $\{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in R^3\}$ の基底を求めよ. ただし, R^3 は実 3 次元数ベクトル空間を表す.

(はこだて未来大 2013) (m20136303)

0.1554 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$ で定まる線形写像 $f: R^3 \rightarrow R^3$, $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ について,

以下の問いに答えよ. ただし, a は実数とする.

- (1) A の階数 $\text{rank} A$ を求めよ.
- (2) A の核 $\text{Ker}(f)$ の基底を求めよ.
- (3) A の像 $\text{Im}(f)$ の基底を求めよ.

(はこだて未来大 2014) (m20146301)

0.1555 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ および, 実ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって ${}^t\mathbf{x}B\mathbf{x} = 1$ で表される 2 次曲線 C

について, 以下の問いに答えよ. ここで, ${}^t\mathbf{x}$ は $\mathbf{x}$ の転置を表す.

- (1) 行列 B を対角化せよ.
- (2) 2 次曲線 C を座標平面上に図示せよ.

(はこだて未来大 2014) (m20146302)

0.1556 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.
- (2) (1) で求めた固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ.
- (3) 行列 A が対角化可能かどうか調べよ. さらに, 対角化可能であれば行列 A を対角化せよ.

(はこだて未来大 2015) (m20156301)

0.1557 実数 $a > 0$ に対して, 行列 A, P, B を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = P^{-1}AP$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) P^{-1} を求めよ.
- (2) B が異なる 3 個の固有値をもたないとき, a の値を定めよ.
- (3) a が (2) で求めた値であるとき, $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し

$$B^n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満たす x, y, z を求めよ.

(はこだて未来大 2016) (m20166301)

0.1558 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ -5 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ で定まる線形写像

$$f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

- (1) A の階数 $\text{rank } A$ を求めよ.
- (2) f の核 $\text{Ker}(f)$ の基底を求めよ.
- (3) f の像 $\text{Im}(f)$ の基底を求めよ.

(はこだて未来大 2017) (m20176301)

0.1559 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.
- (2) (1) で求めた固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ.
- (3) 行列 A が対角化可能かどうか調べよ. さらに, 対角化可能であれば行列 A を対角化せよ.

(はこだて未来大 2018) (m20186301)

0.1560 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ で定まる線形写像

$$f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

- (1) A の階数 $\text{rank } A$ を求めよ.

(2) A の核 $\text{Ker}(f)$ の基底を求めよ.

(3) 行列 A とその転置 A^t の積 AA^t が対角化可能かどうか調べ, 対角化可能なら $P^{-1}AA^tP$ が対角行列となるような直交行列 P を求めよ.

(はこだて未来大 2021)

(m20216301)

0.1561 i は虚数単位とする. 3 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i & 1+i \\ 1+i & 1-i & 1+i \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.

(2) (1) で求めた各固有値に対し固有空間の基底を求めよ.

(3) 行列 A が対角化可能かどうか調べよ. さらに, 対角化可能ならば $P^{-1}AP$ が対角行列になるような行列 P と P^{-1} を求めよ.

(はこだて未来大 2022)

(m20226301)

0.1562 実数関数

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{r}) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 10x + 6y - 3$$

について, 以下の問いに答えよ. ただし, ${}^t\mathbf{r}$ は, $\mathbf{r}$ の転置を表す.

問1 $f(\mathbf{r}) = {}^t\mathbf{r}A\mathbf{r} + {}^t\mathbf{b}\mathbf{r} + c$ を満たす対称行列 A , 定数を成分とするベクトル $\mathbf{b}$, および定数 c をそれぞれ求めよ.

問2 行列 P は非対称で, ${}^tPP = I$ (I は 2 次の単位行列) を満たすとする. このとき行列 A を対角化する行列 P を求めよ. さらにこの行列 P を用いて $\mathbf{r}$ を

$$\mathbf{r} = P\mathbf{R}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

と変換する. このときの $f(P\mathbf{R})$ を X と Y で表せ.

問3 $f(\mathbf{r}) = 0$ で表される曲線を C とする. 曲線 C の概形を x, y 平面上に描け.

問4 曲線 C で囲まれた領域の面積を求めよ.

(はこだて未来大 2024)

(m20246301)

0.1563 行列 $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \\ 9 & 10 & 8 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(東京海洋大 2007)

(m20076402)

0.1564 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(東京海洋大 2007)

(m20076403)

0.1565 行列 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(東京海洋大 2008)

(m20086402)

0.1566 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(東京海洋大 2009)

(m20096402)

0.1567 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 7 & 5 \\ 5 & 8 & 16 & 1 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(東京海洋大 2010)

(m20106401)

0.1568 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(東京海洋大 2010)

(m20106402)

0.1569 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & 11 & 8 & 13 \\ 2 & 8 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ の値を求めよ

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(東京海洋大 2011)

(m20116401)

0.1570 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -8 \\ -1 & 2 & 14 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(東京海洋大 2011)

(m20116402)

0.1571 行列 $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(東京海洋大 2012)

(m20126402)

0.1572 行列 $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -6 \\ -3 & 5 & -6 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(東京海洋大 2012)

(m20126403)

0.1573 行列 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(東京海洋大 2016)

(m20166406)

0.1574 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ に対して, $B = P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P と対角行列 B を求めよ.

(東京海洋大 2021) (m20216407)

0.1575 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, $B = P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P と対角行列 B を求めよ.

(東京海洋大 2022) (m20226402)

0.1576 $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 6 \\ 6 & -7 & 6 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ に対して, $B = P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P と対角行列 B を求めよ.

(東京海洋大 2023) (m20236406)

0.1577 $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して, $B = P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P と対角行列 B を求めよ.

(東京海洋大 2024) (m20246403)

0.1578 行列 $\begin{pmatrix} 17 & -15 \\ -15 & 17 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(和歌山大 2007) (m20076501)

0.1579 次の行列 A について, 以下の各問いに答えなさい. ただし, k は実数である.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & k & 5 \end{pmatrix}$$

(1) 逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(2) 行列 A のすべての固有値と, 絶対値が最大の固有値に対する固有ベクトルを求めなさい.

(3) 行列 A の第 2 列, 第 3 列をそれぞれ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ とするとき, ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角が $\frac{\pi}{4}$ となるような k の値を求めなさい.

(和歌山大 2008) (m20086501)

0.1580 $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ とするとき, 次の問いに答えよ. ただし, $a \neq b$ である.

(1) P の行列式の値と逆行列とを求めなさい.

(2) PQP^{-1} の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(和歌山大 2010) (m20106501)

0.1581 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ のとき, 次の各問いに答えなさい.

(1) 行列 P の行列式の値と逆行列を求めなさい.

(2) $P^{-1}Q$ の値と固有値を求めなさい.

(和歌山大 2013) (m20136501)

0.1582 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき, 次の各問いに答えなさい.

(1) A のすべての固有値を求めなさい.

(2) A の各固有値に対する固有ベクトルを求めなさい.

(3) A を対角化する正則行列 P を求め, A を対角化しなさい.

(和歌山大 2016) (m20166504)

0.1583 次式を満たす x, y, z の値を求めなさい.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & z \\ x & 3 \\ 2 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 10 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

(和歌山大 2017) (m20176504)

0.1584 以下の (1), (2) に示す行列の逆行列をそれぞれ求めなさい.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(和歌山大 2017) (m20176505)

0.1585 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ について, 以下の (1), (2) を求めなさい.

(1) この行列の固有値

(2) この行列の固有ベクトル

(和歌山大 2017) (m20176506)

0.1586 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の (1)~(3) に答えなさい.

(1) 固有値を求めなさい.

(2) 固有ベクトルを求めなさい.

(3) 固有値 α, β に対して, 次式が成り立つように, 正則行列 P を求めなさい. ただし, $\alpha > \beta$ とする.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

(和歌山大 2018) (m20186501)

0.1587 次の行列 A, B について, あとの問いに答えなさい. 解答は途中の式も省略せずに書きなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A, B の階数 (ランク) をそれぞれ答えなさい.

(2) 行列式 $|A|, |B|$ をそれぞれ答えなさい.

(岩手県立大 2013) (m20137003)

0.1588 次のベクトル $\boldsymbol{v}$ と行列 A, B, C について, あとの問いに答えなさい. 回答は途中の式も省略せずに書きなさい.

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ -7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) $A\boldsymbol{v}, B\boldsymbol{v}, C\boldsymbol{v}$ について, 定義されるときは, それぞれの値を計算しなさい. 定義されないときはその理由を答えなさい.
- (2) 行列式 $|A|, |B|$ をそれぞれ答えなさい.
- (3) 行列 A, B の逆行列をそれぞれ答えなさい.
- (4) 行列 B の固有値と固有ベクトルをそれぞれ答えなさい.

(岩手県立大 2014) (m20147001)

0.1589 次の行列 A, B, C, D について, あとの問いに答えなさい. 解答は途中の式も省略せずに書きなさい.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- (1) AB を答えなさい.
- (2) 行列 A, B の階数 (ランク) をそれぞれ答えなさい.
- (3) 行列式 $|A|, |C|$ をそれぞれ答えなさい.
- (4) 行列 A, C の逆行列をそれぞれ答えなさい. 定義されないときには「定義されない」と答えなさい.
- (5) 行列 D の固有値と固有ベクトルを答えなさい.

(岩手県立大 2016) (m20167001)

0.1590 次の行列 A, B, C とベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ について, あとの問いに答えなさい. 解答は途中の式も省略せずに書きなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

- (1) AB と BA をそれぞれ答えなさい. 定義されないときには「定義されない」と答えなさい.
- (2) 行列式 $|A|, |C|$ をそれぞれ答えなさい.
- (3) 行列 A, C の逆行列をそれぞれ答えなさい. 定義されないときには「定義されない」と答えなさい.
- (4) ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の組が線形独立か線形従属か 理由とともに 答えなさい.

- (5) 次の連立一次方程式の解を 行列を使用して 求めなさい. 行列を使用したことが分かるように, 途中経過を示しなさい.

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 5 \\ x + y + z = -7 \\ x + 3y + 9z = -5 \end{cases}$$

(岩手県立大 2017) (m20177001)