[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　$\int$

0.1　円柱座標 (r,θ,z) が直交座標 (x,y,z) によって定義されるとき (1) から (3) の問いに答えよ．
円柱座標 (r,θ,z) と直交座標 (x,y,z) の関係は以下の通りである．

$$x=r\cos\theta\,,\ \ y=r\sin\theta\,,\ \ z=z\qquad (r\geq 0\,,\ 0\leq\theta\leq 2\pi)$$

(1) 円柱座標 (r,θ,z) が直交曲線座標であることを示せ．

(2) 円柱座標 (r,θ,z) の基本ベクトル $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ を求めよ．

(3) 曲面 $z=x^2+y^2$ と $z=18-(x^2+y^2)$ で囲まれた領域を V とするとき，
積分 $\displaystyle\int_V\sqrt{x^2+y^2}\,dV$ の値を求めよ．

(北海道大 2003)　　(m20030101)

0.2　(1) 1 階微分方程式　$\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$　の一般解が　$x=C\exp\left[\displaystyle\int^{y/x}\frac{du}{f(u)-u}\right]$　であることを示せ．ただし，C は任意定数，$u=\frac{y}{x}$ である．

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ．　$x\dfrac{dy}{dx}-y=xe^{y/x}$

(北海道大 2004)　　(m20040101)

0.3　ベクトルの面積分を次の手順に従って求めよ. ただし，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x，y，z 軸方向の単位ベクトルである. また，“$\cdot$” はベクトルの内積（スカラー積），“$\times$” は外積（ベクトル積）を表す．

$$\int_S\left(x\boldsymbol{i}+3y^2\boldsymbol{j}\right)\cdot d\boldsymbol{S}\qquad\qquad 曲面\ \boldsymbol{S}\ :\ 2x+y+2z=6\,,\ x\geq 0\,,\ y\geq 0\,,\ z\geq 0$$

(1) 曲面 $\boldsymbol{S}$ 上の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$ とするとき, a，b，c を求めよ.

(2) 曲面 $\boldsymbol{S}$ の接線ベクトル $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x}$，$\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial y}$ をそれぞれ求めよ.

(3) 面積素 $d\boldsymbol{S}$ は $d\boldsymbol{S}=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial y}dxdy$ で与えられる. $d\boldsymbol{S}$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_S\left(x\boldsymbol{i}+3y^2\boldsymbol{j}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$ を求めよ.

(北海道大 2005)　　(m20050104)

0.4　(1) 次の関数 $f(x)$ $(-\pi\leq x\leq\pi)$ のフーリエ級数を求めなさい.

$$f(x)=\begin{cases}0 & (-\pi\leq x<0)\\ 1 & (0\leq x\leq\pi)\end{cases}$$

(2) 次の関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(k)$ を

$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}dx$$

とし，$i=\sqrt{-1}$ とする．次の関数のフーリエ変換 $F(k)$ を求めなさい.

$$f(x)=\begin{cases}1-|x| & (|x|\leq 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$$

(北海道大 2008)　　(m20080104)

0.5　(1) 関数 $f(t)=\cos(\omega t)$ の（片側）ラプラス変換

$$F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt$$

を求めなさい．ただし，e は自然対数の底で，s はその実数部が正の複素数である.

(2) $s = c + i\phi$ とおく．ここで，i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ で，c, ϕ は実数とする．このとき，$G(\phi) = \lim_{c \to +0} cF(c + i\phi)$ を求めなさい．

(北海道大 2009)　　(m20090103)

0.6 以下の設問 (1)，(2) に答えよ．

(1) ベクトル場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = (y,\ -x,\ z)$ において, 位置 $A(1,1,1)$ から位置 $B(1,2,3)$ の線分 C の線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r}$ を求めよ. ここで, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r}$ は, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ と $d\boldsymbol{r}$ の内積を表す.

(2) 位置 $O(0,0)$ から位置 $D(2,4)$ の放物線 $y = x^2$ 上の曲線を曲線 C' とし, その曲線上の点を $(t,\ t^2)\quad [0 \le t \le 2]$ とする. このとき, スカラー場 $f(\boldsymbol{r}) = x^2 + y^2$ において, 位置 O から位置 D までの曲線 C' に沿った積分 $\displaystyle\int_{C'} f(\boldsymbol{r})\, dt$ を求めよ.

(北海道大 2010)　　(m20100102)

0.7 関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

とし, 関数 $F(\omega)$ のフリーエ逆変換 $f(t)$ を

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

とするとき．次の設問に答えよ．ただし, $i = \sqrt{-1}$ であり，途中の計算手順を詳しく記述すること.

(1) 関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が $e^{-a\omega^2}$ であるとき，もとの関数 $f(t)$ を求めよ．ただし，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

を利用せよ．ここで，$a > 0$ である.

(2) 以下の関係式を満たす関数 $f(t)$ を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) f(\tau) d\tau = e^{\frac{t^2}{2}}$$

(北海道大 2011)　　(m20110102)

0.8 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ をそれぞれ x, y, z 方面の単位ベクトルとして, 以下の設問に答えよ．途中の計算手順を詳しく記述すること.

(1) 積分経路 $C : \boldsymbol{r}(t) = \cos t\ \boldsymbol{i} + \sin t\ \boldsymbol{j} + 2t\ \boldsymbol{k}$（$t = 0$ から $t = 2\pi$）に沿った，ベクトル関数 $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ の線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ.

(2) $f(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{\sqrt{r^2 + 1}}$ （ $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，$r = ||\boldsymbol{r}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ）とし, 原点を中心とする半径が 2 の球の表面を S と表す．このとき，S 上の点 $\boldsymbol{p} = x_p\boldsymbol{i} + y_p\boldsymbol{j} + z_p\boldsymbol{k}$ における $\nabla f \cdot \boldsymbol{n}$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{p}$ における S の外向き単位法線ベクトルであり，$\nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$ とする.

(北海道大 2012)　　(m20120102)

0.9 f を周波数とするとき，時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

で与えられる．ここで，$i = \sqrt{-1}$ である．ある関数 $m(t)$ のフーリエ変換を $M(f)$ とするとき，オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を利用して，$m(t)\cos(2\pi f_0 t)$ のフーリエ変換が $M(f - f_0)$ および $M(f + f_0)$ を用いて表せることを示せ.

(北海道大 2014)　　(m20140103)

0.10 デカルト座標系 (x, y) と極座標 (r, θ) の関係が次のように与えられている．このとき，以下の設問に答えよ.

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ r \geq 0,\ ,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

(1) 次の行列 J のすべての成分を r, θ の式で表せ.

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

(2) 次の積分 A を求めよ．ただし $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ とする.

$$A = \int_D x^2\, dxdy$$

(3) 次の行列 G のすべての成分を r, θ の式で表せ．ただし $r > 0$ とする.

$$G = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

(北海道大 2015)　　(m20150101)

0.11 f を周波数とするとき，時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$F[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

で与えられる．ここで，$i = \sqrt{-1}$ である．このとき，以下の設問に答えよ.

(1) 下記の関数 $P(t)$ を横軸 t として図示し，そのフーリエ変換を求めよ.

$$P(t) = \begin{cases} 1 & ,\ |t| < t_0 \\ 0 & ,\ |t| > t_0 \end{cases} \qquad (t_0 > 0)$$

(2) 関数 $P(t + 4t_0) + P(t - 4t_0)$ を横軸 t として図示し，そのフーリエ変換を求めよ.

(北海道大 2015)　　(m20150104)

0.12 以下の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x + 6}{x^2 - 4} dx$　　(3) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\log x}{x^2} dx$

(北海道大 2017)　　(m20170102)

0.13 以下の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy$　　(2) $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2) dxdy\ ,\quad D = \left\{(x, y)\ \middle|\ x^2 + 3y^2 \leqq 1\right\}$

(北海道大 2017)　　(m20170104)

0.14 $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} x^n \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx$ （n は 0 または自然数，a は正の定数）とする．
以下の問いに答えなさい．

(1) $I_0 = \displaystyle\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx$ の値を a を用いて表しなさい．

(2) $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} x^n \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx$ の値を a と n を用いて表しなさい．

(北海道大 2017)　　(m20170110)

0.15 f を周波数とするとき，時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

で与えられる．また，時間 t の関数 $p(t)$ と $q(t)$ の畳み込みは

$$p(t) * q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau) q(t-\tau) d\tau$$

で与えられる．ここで $i = \sqrt{-1}$ である．このとき，以下の設問に答えなさい．

(1) 次の関数 $g(t)$ を横軸 t として図示しなさい．

$$g(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

(2) 次の関数 $h(t)$ を横軸 t として図示しなさい．

$$h(t) = g(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

(3) $g(t)$ のフーリエ変換を求めなさい．

(4) $h(t)$ のフーリエ変換を求めなさい．

(北海道大 2019)　　(m20190104)

0.16 次の定積分を求めよ．

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

（北見工業大 2004）　　(m20040202)

0.17 次の定積分を求めよ．

$$\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\ dxdy \qquad D\ :\ x^2 + y^2 \leqq\ a^2 \quad (a > 0)$$

(北見工業大 2004)　　(m20040204)

0.18 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 4} dx$　　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$

(北見工業大 2005)　　(m20050204)

0.19 (1) $\displaystyle\int x \log x dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ を， $x=\sin\theta$ という置換積分によって求めよ.

(北見工業大 2005)　　(m20050208)

0.20 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 (1+x)dx$　　(2) $\displaystyle\int \cos^3 x dx$　（ヒント：$t=\sin x$ という置換積分）

(北見工業大 2006)　　(m20060204)

0.21 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^3 (x-1)^2 dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

(北見工業大 2007)　　(m20070203)

0.22 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx$　($t=x^2+2x+2$ と置け)

(2) $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\,dx$

(北見工業大 2008)　　(m20080202)

0.23 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \tan x\,dx$ を計算せよ.　ヒント ： $t=\cos x$ とおくとよい.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 \log x\,dx$ の値を求めよ.

(北見工業大 2009)　　(m20090202)

0.24 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x}{\sqrt{y}}\,dxdy$ の値を求めよ．ただし，$D=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq 1,\ 2\leqq y\leqq 3\}$ とする.

(北見工業大 2009)　　(m20090204)

0.25 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 (x^2+2x+1)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\sin x\,dx$

(北見工業大 2010)　　(m20100203)

0.26 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x\cos 2x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 (x+1)^3\,dx$

(北見工業大 2011)　　(m20110203)

0.27 $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, $D: 1\leqq x^2+y^2\leqq 4$ を求めよ.

$$\left(\quad \begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \quad \text{とおくとよい.} \quad\right)$$

(北見工業大 2011)　　(m20110205)

0.28 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-1)}dx$ を求めよ.

(北見工業大 2012)　　(m20120203)

0.29 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx$ を求めよ.

(北見工業大 2012)　　(m20120204)

0.30 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{-x^2}\,dxdy,\ D: 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x$ を求めよ.

(北見工業大 2012) (m20120206)

0.31 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x\,dx$

(2) $\displaystyle\int x \log x\,dx$

(北見工業大 2013) (m20130204)

0.32 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int (3x-1)^5 dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin x\,dx$

(北見工業大 2014) (m20140202)

0.33 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \tan x dx$ $\left(\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}\text{である.}\right)$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx$

(北見工業大 2015) (m20150204)

0.34 次の積分の値を求めよ. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} 2x^3 e^{-x^2} dx$

(北見工業大 2016) (m20160203)

0.35 積分 $\displaystyle I = \int_1^e \frac{\log x}{x} dx$ を計算せよ.

(北見工業大 2017) (m20170203)

0.36 積分 $\displaystyle J = \iint_D (1-x-y)dxdy$ を計算せよ. ただし, $D\ :\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1$ とする.

(北見工業大 2017) (m20170205)

0.37 次の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\ dx$ (2) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{(\log x)^2}{x}\ dx$

(北見工業大 2018) (m20180201)

0.38 $D = \left\{(x,y)\,\middle|\,0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}\right\}$ とする.

(1) 領域 D を図示せよ.

(2) 積分 $\displaystyle\iint_D x^2 y\ dxdy$ を計算せよ.

(北見工業大 2018) (m20180204)

0.39 次の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} (\log x)^2 dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+4} dx$

(北見工業大 2019) (m20190201)

0.40 平面の部分集合 D を次で定める.

$D = \left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq x\right\}$

(1) D を図示せよ.

(2)　積分 $\displaystyle\iint_D x^2\,dxdy$ を計算せよ．

(北見工業大 2019)　　(m20190204)

0.41　積分 $\displaystyle I=\int_1^e x\log x\,dx$ を計算せよ．

(北見工業大 2019)　　(m20190208)

0.42　平面の部分集合 D を次で定める:

$$D=\{(x,y)\mid x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ 2x+y\leqq 2\}$$

(1)　D を図示せよ．

(2)　積分 $\displaystyle J=\iint_D xy\,dxdy$ を計算せよ．

(北見工業大 2019)　　(m20190211)

0.43　積分 $\displaystyle I=\int_0^1 xe^{2x}dx$ を計算せよ．

(北見工業大 2022)　　(m20220202)

0.44　平面の部分集合 D を次で定める:

$$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x\geqq 0,\ y\leqq 1,\ y\geqq x\right\}$$

(1)　D を図示せよ．

(2)　積分 $\displaystyle J=\iint_D xy^2dxdy$ を計算せよ．

(北見工業大 2022)　　(m20220205)

0.45　次の不定積分を求めよ．

(1)　$\displaystyle\int\sin^2 x\cos x dx$　　(2)　$\displaystyle\int(x+1)\log x\ dx$　　(3)　$\displaystyle\int e^{-3x}dx$

(岩手大 1994)　　(m19940306)

0.46　$-\infty<x<\infty$ で連続な関数の列

$f_1(x),f_2(x),f_3(x),\cdots,f_n(x),\cdots$

が次の (i) の関係式を満たし，$f_1(x)$ が (ii) で与えられている．

(i) $\displaystyle f_{n+1}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_n(t)\exp[-(x-t)^2]dt$, ここで $n=1,2,3,\cdots$,

(ii) $\displaystyle f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp[-x^2]$.

ここで，exp は指数関数を表し，必要があれば次の定積分の値を用いてもよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-x^2]dx=\sqrt{\pi}$$

次の問に答えよ．

(1)　関数 $f_2(x)$ を求めよ．

(2)　n に対応して定まる正定数 a_n,b_n を用いて，関数 $f_n(x)$ を次のようにおく．

$$f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi\,a_n}}\exp[-x^2/b_n]$$

a_{n+1},b_{n+1} をそれぞれ a_n,b_n で表す漸化式 $(n=1,2,3,\cdots)$ を求めよ．

(3)　$a_n, b_n\,(n=1,2,3,\cdots)$ を n で表す一般形を求めよ．

(4)　次の定積分の値を求めよ．　　$I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$

(岩手大 1994)　　(m19940307)

0.47　任意の実数 x を変数とする関数の列 $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ が次の関係式 (a),(b) を満たすものとする．

$$\text{(a)}\qquad f_0(x) = x^2$$

$$\text{(b)}\qquad f_n(x)\,e^{-x} = \int_x^{\infty} f_{n-1}(t)\,e^{-t}dt$$

次の問に答えよ．

(1)　次の積分 I, J, K のそれぞれを x の関数として求めよ．

$$I = \int_x^{\infty} e^{-t}dt\,,\quad J = \int_x^{\infty} t\,e^{-t}dt\,,\quad K = \int_x^{\infty} t^2\,e^{-t}dt$$

(2)　２つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を導入して，関数 $f_n(x)$ を次のようにおく．

$$f_n(x) = x^2 + a_n x + b_n \qquad (\,n=0,1,2,\cdots)$$

a_n, b_n のそれぞれを a_{n-1}, b_{n-1} を用いて表す漸化式を求めよ．なお，これらの漸化式において $n \geqq 1$ とする．

(3)　前問の２つの数列の一般項 $a_n, b_n(\,n=0,1,2,\cdots)$ を求めよ．

(岩手大 1996)　　(m19960301)

0.48　$f(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$　$(x>0)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$f(x+1) = xf(x)$ を部分積分を用いて証明せよ．

(2)　x が自然数 n のとき，$f(n) = (n-1)!$ を証明せよ．

(3)　$f(5)$ を求めよ．

(4)　$f(\frac{5}{2})$ を求めよ．ただし，$f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ である．

(岩手大 1997)　　(m19970302)

0.49　範囲 $-\infty < x < \infty$ で連続な関数 $f(x)$ が次の関係式を満たすとする．

$$f(x) = \sin x + x\int_0^{\infty} f(t)e^{-t}dt + \int_0^{\pi} f(t)\cos t\,dt$$

次の問いに答えよ．

(1)　次の定積分 I_1，I_2，I_3，J_1，J_2，J_3 の値を求めよ．

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-t}dt\,,\qquad I_2 = \int_0^{\infty} te^{-t}dt\,,\qquad I_3 = \int_0^{\infty} e^{-t}\sin t\,dt$$

$$J_1 = \int_0^{\pi} \cos t\,dt\,,\qquad J_2 = \int_0^{\pi} \sin t\cos t\,dt\,,\qquad J_3 = \int_0^{\pi} t\cos t\,dt$$

(2)　上記の関係式に含まれる２つの定積分を，次のように A，B とおく．

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-t}dt = A\,,\qquad \int_0^{\pi} f(t)\cos t\,dt = B$$

A，B の値を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ を求めよ.

(岩手大 1998) (m19980306)

0.50 次の問いに答えよ.

(1) 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$$

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{64}=1$ について, 次の問に答えよ.

(a) 楕円の内部の面積を求めよ.

(b) x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を求めよ.

(c) y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を求めよ.

（岩手大 2004） (m20040302)

0.51 重積分 $\displaystyle\int_0^1\int_0^x e^{x-y}dydx$ に関し, 次の問に答えなさい.

(1) この重積分の積分範囲を図示しなさい.

(2) この重積分の値を求めなさい.

(3) この重積分の積分順序を変更した式を示しなさい.

(4) 積分順序を変更した式から, 重積分の値を求める計算をしなさい.

(岩手大 2006) (m20060304)

0.52 区間 $[a,b]$ 上の関数 $f(x),\ g(x)$ は,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=0$$

が成り立つとき互いに直交しているという．以下の問いに答えよ.

(1) 次の (a)〜(e) に示した関数が区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上で互いに直交していることをそれぞれ示せ．ただし，k,l はともに自然数である.

(a) $\dfrac{1}{2}$ と $\cos kx$

(b) $\dfrac{1}{2}$ と $\sin kx$

(c) $\cos kx$ と $\sin lx$

(d) $\cos kx$ と $\cos lx \quad (k\neq l)$

(e) $\sin kx$ と $\sin lx \quad (k\neq l)$

(2) 区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上の任意の関数 $f(x)$ は，$\dfrac{1}{2}$, $\cos kx$, $\sin kx$ の線形和によって

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+a_3\cos 3x+b_3\sin 3x+\cdots \\ &= \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \end{aligned}$$

と表すことができる（これをフーリエ級数展開という）．係数 $a_0,\ a_k,\ b_k$ をそれぞれ $f(x)$ を用いて表せ.

(3) 次の関数 $f(x)$ を区間 $[-\pi\,,\ \pi]$ 上でフーリエ級数に展開せよ.

$$f(x)=\begin{cases} -1 & -\pi\leq x<0 \\ 1 & 0\leq x\leq \pi \end{cases}$$

(岩手大 2009) (m20090301)

0.53 重積分

$$I = \iint_D y\,dxdy$$

について次の問いに答えなさい. ただし, xy 平面上の領域 D は

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq 1$$

の共通部分である.

(1) 領域 D を図示しなさい.

(2) 重積分 I を求めなさい.

(3) $x,\ y$ を極座標に変換して重積分 I を求めなさい.

(岩手大 2010) (m20100304)

0.54 $D = \left\{(x, y)\,|\,x^2 + y^2 \leqq 2y\right\}$ とするとき，次の重積分について以下の問いに答えなさい.

$$I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$$

(1) 領域 D を図示しなさい.

(2) x , y を極座標変換したとき，領域 D が移る領域 G を求め，図示しなさい.

(3) (1) および (2) の結果を用いて，重積分 I を求めなさい.

(岩手大 2011) (m20110303)

0.55 球の体積を積分を用いて求めるとき，次の問いに答えよ.

(1) 次の文中の $\boxed{\text{（ア）}}$〜$\boxed{\text{（カ）}}$ に正しい式を入れなさい.

直交座標 (x, y, z) で原点 O を中心とする半径 a の球の方程式は, $\boxed{\text{（ア）}}$ であり，球の上半分は関数 $z = \boxed{\text{（イ）}}$ で表される.

その定義域 D は $\boxed{\text{（ウ）}}$ であり，球の体積 V は次の重積分で与えられる.

$$V = 2\iint_D \boxed{\text{（イ）}}\,dxdy \cdots\cdots\cdots ①$$

極座標 $(r,\,\theta)$ を用いると，D は $\boxed{\text{（エ）}}$, $\boxed{\text{（オ）}}$ と表され，関数 z は $z = \boxed{\text{（カ）}}$ で表される.

(2) ① 式を極座標に変換して表しなさい.

(3) (2) の結果を用いて，球の体積 V を求めなさい.

(岩手大 2012) (m20120303)

0.56 次の各問いに答えなさい.

(1) $D_1 = \{(x, y)\,|\,1 \leqq x \leqq 2\,,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$ のとき，領域 D_1 を図示し，次の 2 重積分の値を求めなさい.

$$\iint_{D_1} (x + 2y)dxdy$$

(2) $D_2 = \left\{(x, y)\,|\,0 \leqq y \leqq -x^2 + 4x\right\}$ のとき，領域 D_2 を図示し，次の 2 重積分の値を求めなさい.

$$\iint_{D_2} xdxdy$$

(3) $D_3 = \left\{(x, y) \,|\, 1 \leqq\ x^2 + y^2 \leqq\ 4\right\}$ のとき，領域 D_3 を図示しなさい，また，次の 2 重積分の値を極座標に変換して求めなさい．

$$\iint_{D_3} x^2\, dxdy$$

(岩手大 2013)　　(m20130303)

0.57 次の立体について，以下の問いに答えなさい．

曲面 $x^2 + y^2 = z^2$，平面 $z = 0$，平面 $z = 1$ で囲まれた立体

(1) この立体を図示しなさい．

(2) この立体の体積 V は，次の重積分で表せる．$\boxed{\text{（ア）}}$，$\boxed{\text{（イ）}}$ にあてはまる式を答えなさい．

$$V = \iint_D \left(1 - \boxed{\text{（ア）}}\right) dxdy \qquad D = \left\{(x, y) \,\middle|\, \boxed{\text{（イ）}}\right\}$$

(3) (2) の重積分を極座標になおして，この立体の体積を求めなさい．

(岩手大 2014)　　(m20140303)

0.58 曲面 $\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2 + z^2 = b^2 \ \ (a > b > 0)$ で囲まれる立体について，次の問いに答えなさい．

(1) 次の文中の $\boxed{\text{（ア）}}$ から $\boxed{\text{（エ）}}$ に正しい式を入れなさい．

この立体の xy 平面上の断面は．立体を囲む曲面の方程式に $z = 0$ を代入した際に，解として得られる 2 つの円 $\boxed{\text{（ア）}}$ 及び $\boxed{\text{（イ）}}$ で囲まれる領域 D_1 である．

この立体の xz 平面上の断面である領域 D_2 は 2 つの円 C_1 及び円 C_2 によって構成される．

円 C_1 及び円 C_2 は方程式 $\boxed{\text{（ウ）}}$ 及び $\boxed{\text{（エ）}}$ で与えられる．

(2) 領域 D_1 及び領域 D_2 を図示しなさい．

(3) 次の文中の $\boxed{\text{（オ）}}$ から $\boxed{\text{（キ）}}$ に正しい式を入れなさい．

この立体は円 C_1 または円 C_2 を z 軸まわりに回転して得られる回転体である．

この立体の体積 V は式 ① で与えられる．

$$V = \pi \int_{-b}^{b} \boxed{\text{（オ）}}\, dx \quad \cdots\cdots ①$$

① 式より，この立体の体積は $V = \boxed{\text{（カ）}}$ と求まる．

また，この立体を囲む曲面のうち，$z \geqq\ 0$ の部分は関数 $z = \boxed{\text{（キ）}}$ で表される．

この立体の体積 V は定義域 D_1 に関する積分として次式で与えられる．

$$V = 2 \iint_{D_1} \boxed{\text{（キ）}}\, dxdy \quad \cdots\cdots ②$$

(4) xy 平面上の極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて ② 式を極座標系の式に変換しなさい．

(岩手大 2015)　　(m20150303)

0.59 関数 $f(x) = x^2 e^{-x+2}$ に関する次の問いに答えなさい．

(1) $y = f(x)$ の増減と極値を調べ，そのグラフをかきなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めなさい．

(3) $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を求めなさい，

(岩手大 2017)　　(m20170303)

0.60 関数 $f(x) = x^2e^x$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点を求めなさい．

(2) 関数 $f(x)$ の極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ をそれぞれ求めなさい．

(3) 関数 $f(x)$ の増減表を作成し，概形を図示しなさい．また，(1) で求めた極値と変曲点の座標も示しなさい．

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ を求めなさい．

(岩手大 2019)　　(m20190303)

0.61 関数 $f(x) = e^{-x}\sin x$ について，次の問に答えなさい．

(1) $f(x)$ の第 1 次導関数と第 2 次導関数を求めなさい．

(2) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における $f(x)$ の増減表を作成し，この範囲における $f(x)$ のグラフの概形をかきなさい．また，極値と変曲点の座標も示しなさい．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めなさい．

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を求めなさい．

(岩手大 2020)　　(m20200303)

0.62 関数 $f(x) = 4x^4\log_e x$ について，次の問いに答えなさい．ただし，$x > 0$ とする．

(1) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点を求めなさい．

(2) 関数 $f(x)$ の $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ をそれぞれ求めなさい．

(3) 関数 $f(x)$ の増減表を凹凸を含めて作成しなさい．また，極値と変曲点の座標も示しなさい．

(4) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めなさい．

(岩手大 2021)　　(m20210303)

0.63 e を自然対数の底とする．次の問いに答えなさい．

(1) 次の関数 $g(x)$ を考える．ただし，a, b を定数とし，$a > 0$, $b < 0$ とする．

$g(x) = ae^{bx}$

広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty g(x)dx = 1$ が成り立つとき，$a = -b$ を示しなさい．

(2) $a = 2$, $b = -2$ のとき，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty xg(x)dx$ の値を求めなさい．

(岩手大 2022)　　(m20220304)

0.64 次の積分を計算しなさい．

(1) $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^2}\ \ (a > 0)$　　　(2) $\displaystyle\int_0^\pi x\sin^2 x dx$

(秋田大 2001)　　(m20010403)

0.65　次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^n}dx$　(ただし，n は 2 以上の自然数)

(秋田大 2001)　(m20010404)

0.66　次の $\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ．注意：log は自然対数で，π は円周率である．

(1) $\displaystyle\int_2^3 \frac{4(3+3x-x^2)}{(x-1)^2(x+1)}dx = \log\frac{3}{\boxed{(\mathrm{t})}} + \boxed{(\mathrm{u})}$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \log x dx = \boxed{(\mathrm{v})}$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^4 dx = \boxed{(\mathrm{w})}$　　(4) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-4x}\sin x dx = \frac{1}{\boxed{(\mathrm{x})}}$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{\boxed{(\mathrm{y})}}$

(秋田大 2002)　(m20020403)

0.67　次の問いに答えなさい．

(1) 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ (ただし, $r \geqq 0$, $0 \leqq \theta < 2\pi$) によって，xy 平面上の領域 D が $r\theta$ 平面上の領域 D' に対応しているとする．このとき，関数 f の重積分について，次の式が成り立つことを示しなさい．

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\theta\,,\, r\sin\theta)rdrd\theta$$

(2) xy 平面上の領域 D が $1 \leqq x^2+y^2 \leqq 9$ で与えられるとき，次の重積分の値を求めなさい．

$$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy$$

(秋田大 2003)　(m20030402)

0.68　a, b, R を定数（ただし,$R > 0$ ）とし, 積分

$$I = \iint_D (x^2+ay+b)dxdy$$

を次の手順で計算しよう. ただし, 領域は

$$D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq R^2\}\quad \text{である.}$$

(1) $I_1 = \displaystyle\iint_D (x^2+y^2+2b)dxdy$ を計算しなさい.

(2) $I_2 = \displaystyle\iint_D a(x+y)dxdy$ を計算しなさい.

(3) I_1, I_2 から,

$$I = \boxed{}$$

である. 当てはまる式を上の欄に答えなさい.

(秋田大 2004)　(m20040403)

0.69　積分 $S = \displaystyle\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}dr$ を計算せよ. ただし,R は正の定数である. 必要ならば変換 $r^2 = u$ を用いよ.

(秋田大 2005)　(m20050405)

0.70　(1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ のとき, 行列 $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$ と, その行列式 (determinant) を計算せよ.

(2) 積分 $I = \displaystyle\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$ を計算せよ. ただし,R は正の定数で,D は領域 $x^2+y^2 \leqq R^2$ を表す. 必要ならば問題 (1) の変数変換を用いよ.

(3) 半径 R の球の体積 V を, 上の問題 (2) の積分 I を用いて表せ. 理由も簡潔に述べること.

(秋田大 2005) (m20050406)

0.71 次の積分を計算せよ. $\displaystyle\int (\cos x)^r \sin x\,dx,\qquad r$ は実数

(秋田大 2006) (m20060405)

0.72 次の定積分を求め, $\square$ 内に当てはまる整数を入れよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx = \frac{1}{\square}\left(\frac{\pi}{2}+\square\right)$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x\cos x dx = \frac{\square}{12}$

(3) $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{\square}{3}$ (4) $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx = \frac{\square}{15}$

(5) $\displaystyle\int_1^e \sqrt{x}\log x dx = \frac{2}{\square}\left(e^{\frac{3}{2}}+\square\right)$ (6) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx = 1+\frac{\square}{e}$ (7) $\displaystyle\int_1^\infty x^2e^{-x}dx = \frac{\square}{e}$

(秋田大 2007) (m20070404)

0.73 次の積分を計算せよ. ただし, (2) では, $\displaystyle\int \log x dx = x\log x - x + C$ となることを使ってよい.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}dx$ (2) $\displaystyle\int \log\frac{x-1}{(x+1)^2}dx$

(秋田大 2008) (m20080404)

0.74 n を整数とし, $I_n = \displaystyle\int x^n e^x dx$ とおく.

(1) n が正の整数のとき, I_n を I_{n-1} を用いて表せ. (2) I_3 を求めよ.

(秋田大 2008) (m20080405)

0.75 (1) $x = u-w,\ y = u+w$ とおく. 行列 $J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \end{pmatrix}$ と, その行列式を求めよ.

(2) D は平面内の領域で, 次の 4 直線で囲まれているとする.

$y = x\ ,\quad y = -x\ .\quad y = x+2\ ,\quad y = -x+4$

このとき, 積分 $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ の値を求めよ.

(秋田大 2008) (m20080407)

0.76 不定積分 $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$ を求めよ.

(秋田大 2009) (m20090402)

0.77 （広義の）定積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ を求めよ.

(秋田大 2009) (m20090403)

0.78 2 重積分 $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ を求めよ. ここで, $D = \{(x,y)\mid 0\leqq\ x,\ 0\leqq\ y,\ x+y\leqq\ 1\}$ である.

(秋田大 2009) (m20090404)

0.79 次の定積分を求め, カッコ内に当てはまる整数を記入せよ.

以下の arcsin は逆正弦関数, π は円周率, log は底が e である自然対数を意味する.

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \boxed{(コ)}\,\pi$ (2) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\log 2}{\boxed{(サ)}}\,\pi$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2 \arcsin x\,dx = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{\boxed{(シ)}}$

(秋田大 2010) (m20100403)

0.80 $x = \tan t$ と置き換えて, 次の定積分を求めよ.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

(秋田大 2011) (m20110403)

0.81 次の定積分を求めよ.

$$\int_{0}^{1} \log\left(x^2+1\right) dx$$

(秋田大 2013) (m20130403)

0.82 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} |\sin(x-a)|dx$ (a は $0<a<\pi$の定数) (2) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$

(秋田大 2016) (m20160402)

0.83 次の積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\ dx$ （但し, $a>0$ とする. ）

(2) $\displaystyle\int_{1}^{e} \log_e x\ dx$ （e は自然数の底である. ）

(秋田大 2017) (m20170403)

0.84 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos x dx$ (2) $\displaystyle\int_{0}^{1} xe^x dx$

(秋田大 2019) (m20190401)

0.85 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x^2 \cos x dx$ (2) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2+x}}dx$ ただし, $t=\sqrt{x^2+x}-x$ と置換して求めよ.

(秋田大 2020) (m20200401)

0.86 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx$

(2) $I = \displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}} x^2\sqrt{2-x^2}dx$ について次に答えよ.

(a) $x=\sqrt{2}\sin\theta$ とおくとき $\dfrac{dx}{d\theta}$ を求めよ.

(b) (a) を用いて θ で置換積分をして, I を求めよ.

(秋田大 2021)　　(m20210401)

0.87 次の積分 (1), (2) を求めなさい．ここで，$|y|$ は y の絶対値を表す.

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\cos(x)\ \mathrm{dx}$　　(2) $\displaystyle\int_0^2 \left|\ 1-x^2\ \right| dx$

(秋田大 2022)　　(m20220401)

0.88 次の問いに答えよ．

(1) $\sin^4\theta\ \cos^2\theta = a_0 + a_2\cos 2\theta + a_4\cos 4\theta + a_6\cos 6\theta$ とおくとき，a_0 , a_2 , a_4 , a_6 を定めよ．

(2) 変数変換 $x = a\sin^2\theta \quad (a>0)$ を用いて，次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^a x\sqrt{ax-x^2}dx$$

(3) 円柱 $(x-a)^2+(y-a)^2 \leqq a^2$ が，2 平面 $z=ax$, $z=-ax$ により切り取られる部分の体積を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

(東北大 1995)　　(m19950501)

0.89 次の問いに答えよ．

(1) 次の微分方程式を $y(0)=a$ の条件の下に解け．

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}xy = x+\frac{1}{4}x^3 \qquad (*)$$

(2) x の関数 $y(x)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}(\cos xt + x^2 t)dt$ について，式 $(*)$ が成り立つことを示せ．ただし，微分と積分の順序は交換できるものとする．

(東北大 1996)　　(m19960502)

0.90 関数 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ を　$f_1(x)=\dfrac{1}{10}e^{2x}$,　$f_2(x)=x^2\log(x+1)$　と定義する．

(1) 定積分 $S_1=\displaystyle\int_0^a f_1(x)dx$,　$S_2=\displaystyle\int_0^b f_2(x)dx$ を求めよ．

(2) $a+b=1$ という関係があるとき，$S=S_1+S_2$ を b の関数として表せ．

(3) 変数 a と b は

$$a+b=1,\quad 0<a<1,\quad 0<b<1$$

を満たすと仮定する．$S=S_1+S_2$ が極値をとる条件を a と b により表せ．

(東北大 2001)　　(m20010502)

0.91 実数 y の関数:

$$f(y)=\frac{1}{1+e^{-\beta y}}\ , \qquad (-\infty<y<\infty)$$

を定義する. ここで, β は非負の実数値のみをとる定数である. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) β の値が以下の 3 つの場合:

a) $\beta \longrightarrow +\infty$,　b) $\beta=0$,　c) その他の場合.

の各々について，$x=f(y)$ のグラフを描け.

(2) 関数 $x=f(y)$ の逆関数 $y=f^{-1}(x)$ を求めよ.

(3) 以下の不定積分を求めよ.

$$\int \log(1-x)dx$$

ただし, log は自然対数を表す.

(4) 以下の定積分を求めよ.

$$g(x) \equiv \int_0^x f^{-1}(z)dz$$

ただし, x の定義域は $0 \leq x \leq 1$ であり, $\lim_{x\to 0} x\log x = 0$ の意味で $0\log 0 = 0$ とする.

(5) 関数 $g(x) - \alpha x$ を最小化する x を求めよ. ただし x の定義域は $0 \leq x \leq 1$, α は正の実数値のみをとる定数とする.

（東北大 2004） (m20040501)

0.92 x を実数として, 関数 $f(x)$ は微分方程式

$$f''(x) - f(x) = 0$$

の解であり, 初期条件「$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$」を満たすものとする. さらに, この微分方程式の解 $f(x)$ から関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \int_0^x tf(t)dt$$

により定義する.

(1) 与えられた微分方程式の解 $f(x)$ を求めよ.

(2) $g(1)$ および $g(-1)$ を求めよ.

(3) 関数 $h(x)$ を

$$h(x) = \frac{d}{dx}\int_{-x}^{x^2} g(t)dt$$

により定義する. このとき, $h(1)$ を求めよ.

(東北大 2005) (m20050503)

0.93 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{x} \neq 0$ において関数 f を

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|}, \quad |\boldsymbol{x}| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$$

で定義する. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$, および $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_3}^2}$ を求めよ.

(2) $\varepsilon > 0$ に対して, $S_\varepsilon = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\,;\, |\boldsymbol{x}| = \varepsilon\}$ とする. S_ε に沿う表面積分

$$\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S_ε 上の単位外向き法線ベクトルであり, $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} = \nabla f \cdot \boldsymbol{n}$ は f の $\boldsymbol{n}$ 方向への微分を表す.

(3) S を原点 O を内部に含む $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな閉曲面とするとき, S に沿う表面積分

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S 上の単位外向き法線ベクトルである.

(東北大 2005) (m20050505)

0.94 $D = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 < 4,\ x > 0,\ y > 0\}$ とするとき, 重積分 $\iint_D xy\,dxdy$ を計算せよ.

(東北大 2006) (m20060506)

0.95 領域 $D=\{(x,y)\mid x\geq 0\,,\ y\geq 0\}$ での広義重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(4+2x+y)^3}$ の値を求めよ.

(東北大 2007) (m20070504)

0.96 x を実数とし，関数 $f(x)$ を $f(x)=e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2}$ と定義する.

(1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(2) $f'(x)=0$ を満たすすべての実数 x および $f''(x)=0$ を満たすすべての実数 x をそれぞれ求めよ.

(3) 関数 $y=f(x)$ の区間 $-5\leqq x\leqq 5$ における増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べ，増減表を書き，グラフの概略を描け.

(4) 関数 $g(x)$ を $\displaystyle g(x)=\frac{d}{dx}\int_{-x+2}^{x}(t-1)(t-3)f(t)dt$ により定義する．このとき，$g(2)$ を求めよ.

(東北大 2008) (m20080501)

0.97 領域 $D=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1\,,\ x^2\leq y\leq 1\}$ で $\displaystyle\iint_D xe^{y^2}\,dxdy$ の値を求めよ.

(東北大 2008) (m20080508)

0.98 t, x, y を実数，A を実数の定数とし，以下の問いに答えよ.

(1) 置換 $t=x+\sqrt{x^2+A}$ を用い，不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx$ を求めよ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int\sqrt{x^2+A}\,dx$ を求めよ.

(3) $x\geqq 0$, $y\geqq 0$．曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ の長さを求めよ.

(東北大 2009) (m20090503)

0.99 領域 $D=\{(x,y)\ :\ 0\leq x+y\leq 2\,,\ 0\leq x-y\leq 2\}$ として，次の計算をせよ.

$$\iint_D (x-y)e^{x+y}dxdy$$

(東北大 2009) (m20090508)

0.100 xy 平面上の点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる.

$$\begin{cases} x(t)=-\dfrac{t}{\pi}\cos t \\ y(t)=\sin t \end{cases}$$

ここで, $0\leqq t\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $t=\dfrac{m}{2}\pi$（ただし $m=0,1,2,3$）における点 P の座標, およびそれらの点における曲線 C の接線の傾きを求めよ. さらに, 曲線 C の概形を描け.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int t\sin^2 t\,dt$ を求めよ.

(3) 曲線 C と x 軸 $(x\geqq 0)$ および y 軸 $(y\geqq 0)$ によって囲まれる領域の面積を求めよ.

(東北大 2010) (m20100502)

0.101 実数 t の関数 $f(t)$ のラプラス変換を

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

と定義する. ここで, s は $\mathrm{Re}(s) > 0$ を満たす複素数である.

関数 $f(t)$ に関する次の微分方程式を, 初期条件 $f(0) = f'(0) = 0$ のもとで, ラプラス変換を用いて解きたい. 以下の問に答えよ.

$$tf''(t) + (3t-1)f'(t) + (2t-3)f(t) = 0$$

(1) $f'(t)$, $f''(t)$ のラプラス変換を, それぞれ $F(s)$ を用いて表せ.

(2) $tf(t)$, $tf'(t)$, $tf''(t)$ のラプラス変換を, それぞれ $F(s)$ を用いて表せ.

(3) $F(s)$ に関する次の微分方程式が次のように与えられることを示せ.

$$(s+1)\frac{dF(s)}{ds} + 3F(s) = 0$$

(4) $F(s)$ に関する次の微分方程式を解いて, $f(t)$ を求めよ.

(東北大 2010) (m20100504)

0.102 重積分

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty x^2 e^{-x^2-y^2}\,dxdy$$

の値を求めよ.

(東北大 2011) (m20110507)

0.103 実数 t の関数 $f(t)$ のラプラス変換を

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

と定義する. ここで, s は $\mathrm{Re}(s) > 1$ を満たす複素数である.

以下の問いに答えよ. ただし, 関数 $f(t)$ は $f(0) = 0$ を満たすとする.

(1) $f'(t)$, $e^{-t}f'(t)$ のラプラス変換を, それぞれ s, $F(s)$ を用いて表せ.

(2) $\displaystyle\int_0^t e^{-\tau} f'(\tau)\,d\tau$, $\displaystyle e^t\int_0^t e^{-\tau} f'(\tau)\,d\tau$ のラプラス変換を, それぞれ s, $F(s)$ を用いて表せ.

(3) 次の微分積分方程式

$$f'(t) + e^t\int_0^t e^{-\tau} f'(\tau)\,d\tau = e^t$$

をラプラス変換により, s と $F(s)$ を用いて表せ.

(4) (3) の微分積分方程式の解 $f(t)$ を求めよ.

(東北大 2012) (m20120504)

0.104 z を正の実数とする. 実変数の関数 $f(x)$ に対し, 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xz} f(x)dx$ が存在するとき, これを $I[f](z)$ と書くことにする.

(1) f が区間 $[0, \infty)$ で連続かつ有界であれば, $I[f](z)$ が存在することを示せ.

(2) a を実数とする. $I[\sin ax](z)$, $I[\cos ax](z)$ をそれぞれ求めよ.

(東北大 2012) (m20120509)

0.105 (x, y) 座標平面において, 4 本の直線

$$y = x, \quad y = x-1, \quad y = -x+1, \quad y = -x+3$$

で囲まれた閉領域 D を考える．このとき，重積分

$$\iint_D \frac{x-y}{x+y}\,dxdy$$

を，変数変換 $u=x+y,\ v=x-y$ を用いて求めよ．

(東北大 2015)　　(m20150510)

0.106　領域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 1,\ \sqrt{2}x^2 \leqq y\right\}$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　領域 D の面積 S を求めよ．

(2)　領域 D の重心の座標を求めよ．ここで，領域 D の重心の座標 $(\overline{x},\ \overline{y})$ は以下の式で表される．

$$(\overline{x},\ \overline{y}) = \left(\frac{1}{S}\iint_D xdxdy\,,\ \frac{1}{S}\iint_D ydxdy\right) \qquad S: \text{領域 } D \text{ の面積}$$

(東北大 2016)　　(m20160502)

0.107　(1)　$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0\right\}$ に対して重積分 $\displaystyle\iint_D xy^2dxdy$ の値を求めよ．

(2)　$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ 0\le y\le x\le 1,\ 0\le z\le x^2+y^2+1\right\}$ の体積を求めよ．

(東北大 2016)　　(m20160507)

0.108　$\mathbb{R}^2$ 上で定義された 2 変数関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1)　$f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で連続であることを示せ．

(2)　$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ 0\le x^2+y^2\le 3 \text{ かつ } y\ge 0\right\}$ とするとき，積分 $\displaystyle\int_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ．

(東北大 2017)　　(m20170506)

0.109　(1)　0 以上の整数 n に対して，

$$\int_0^1 \frac{1-(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}$$

を示せ．

(2)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ が収束することを示し，その極限を求めよ．

(東北大 2017)　　(m20170508)

0.110　$\mathbb{R}$ 内の閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数 $f(x)$ は $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=1$ をみたすとする．正の整数 n に対し

$$b_n=\int_0^1 f(x)\cos\frac{x}{\sqrt{n}}dx$$

とおくとき，

$$(*)\qquad \lim_{n\to\infty}(b_n)^n = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)$$

が成り立つことを以下の設問に沿って証明せよ．

(1) 任意の $x \geq 0$ に対し

$$0 \leq \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^3}{6}$$

が成り立つことを示せ.

(2) 任意の n に対し

$$\left| b_n - 1 + \frac{1}{2n}\int_0^1 x^2 f(x)dx \right| \leq \frac{1}{6n\sqrt{n}}\int_0^1 x^3 \left| f(x) \right| dx$$

が成り立つことを示せ.

(3) 任意の実数 $\alpha,\ \beta$ に対し

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n\sqrt{n}}\right)^n = e^{\alpha}$$

が成り立つことを示せ.

(4) (2) および (3) の結果を利用して $(*)$ を結論せよ.

(東北大 2018)　　(m20180511)

0.111 不定積分 $\displaystyle \int \frac{x^3 - 3x + 1}{(x-1)^2(x+2)}dx$ を求めよ.

(東北大 2019)　　(m20190509)

0.112 重積分

$$\iint_D (3x^2 + y^2)dxdy \qquad \left(D = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\right\}\right)$$

の値を求めよ.

(東北大 2019)　　(m20190510)

0.113 任意の自然数 n に対する数列を以下の定積分により定義する.

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^{2n-1} x}$$

(1) I_1 を求めよ.

(2) I_2 を求めよ．必要であれば次の関係式を用いよ.

$$\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^3 x}$$

(3) I_n に成立する漸化式を求めよ.

(4) 以下に示す極限を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nI_n}{2^n}$$

(東北大 2020)　　(m20200502)

0.114 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 f を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

と定める．以下の問いに答えよ.

(1) f は $(0,0)$ において連続であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}^2$ の閉領域

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

に対し，重積分 $\displaystyle \iint_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ.

(東北大 2021)　　(m20210510)

0.115 極座標変換を用いて次に示す重積分を計算する．以下の問に答えよ．

$$I = \iint_D \frac{x-y}{(x^2+y^2)^2}dxdy, \qquad D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x\right\}$$

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) 次に示す極座標変換のヤコビ行列とその行列式（ヤコビアン）を求めよ．

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

(3) (2) の極座標変換によって，xy 平面内の領域 D は $r\theta$ 平面内の領域 $\overline{D}$ に対応づけられる．下図に示す点 $O(0,0)$ を原点とする r と θ の直交座標を用いて，領域 $\overline{D}$ を図示せよ．

(4) 重積分 I を計算せよ．

(東北大 2022)　　(m20220505)

0.116 点 $O(0,0,0)$ を原点とする xyz 空間において，中心を点 $C(0,0,1)$，半径を $1/2$ とする球面 S_1 がある．点 $A(0,0,2)$ を通る直線を z 軸まわりに回転して得られる円錐面 S_2 が，球面 S_1 に接している．ただし，$z \leqq 2$ とする．

(1) 円錐面 S_2 と球面 S_1 の接点のひとつを B とするとき，$\cos\angle CAB$ を求めよ．

(2) 円錐面 S_2 上の任意の点を $P(x,y,z)$ とするとき，円錐面 S_2 の方程式を求めよ．

(3) 円錐面 S_2 と xy 平面で囲まれた閉曲面を S とする．以下のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ の面積分 I を求めよ．

$$\boldsymbol{F} = (x^3z)\,\mathbf{i} + (x^2yz)\,\mathbf{j} + \{(x^2+y^2)z^2\}\,\mathbf{k}$$

$$I = \int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

ただし，**i, j, k** は x,y,z 軸方向の基本ベクトルであり，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は S 内部から外向きに取るものとする．

(東北大 2022)　　(m20220506)

0.117 n を非負整数 α を負の実数とし，広義積分

$$I(n,\ \alpha) = \int_0^1 x^\alpha(\log x)^n\,dx$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) $\alpha > -1$ ならばこの広義積分は収束し，$\alpha \leq -1$ ならば発散することを示せ．

(2) $\alpha > -1$ のとき，この広義積分の値を求めよ．

(東北大 2022)　　(m20220511)

0.118 $\displaystyle\int e^x\cos x dx$ を求めよ．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970603)

0.119 $D = \{(x, y)\ ;\ 0 \leq x + y \leq \pi, 0 \leq x - y \leq \pi\}$ としたとき，

$$\iint_D (x - y)\sin(x + y)\,dxdy$$

を求めよ．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970605)

0.120 m と n を整数として以下の定積分を考えましょう．

$$I(m, n) = \int_0^{2\pi} \sin(mx) \cdot \cos(nx)dx,$$

$$J(m, n) = \int_0^{2\pi} \sin(mx) \cdot \sin(nx)dx,$$

$$K(m, n) = \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cdot \cos(nx)dx,$$

(1) 任意の m, n に対して $I(m, n)$ を求めてください．

(2) m と n が異なるときに，$J(m, n), K(m, n)$ を求めてください．

(3) 周期 2π の関数 $f(x)$ を三角関数で次のように展開します：

$$f(x) = c_0 + c_1\cos(x) + c_2\cos(2x) + c_3\cos(3x) + \cdots + a_1\sin(x) + a_2\sin(2x) + \cdots$$

このとき，係数 c_1, a_2 を求めてください．

(お茶の水女子大 1998)　　(m19980602)

0.121 (1) $y^4 = x^4(1 - x^2)$ は x-y 平面で閉じた曲線になる．この曲線のおおよその形を描け．

(2) この曲線に囲まれた領域の面積を計算するには積分 $4\int_0^1 f(x)dx$ が必要である．関数 $f(x)$ を求めよ．

(3) 上の積分を実行せよ．

(お茶の水女子大 1999)　　(m19990604)

0.122 次の計算をせよ．ただし，$\log x$ は自然対数であり，$\ln x$ と同じである．

(1) $\displaystyle\int \sin 3x dx$　(2) $\displaystyle\int x\cos x dx$　(3) $\displaystyle\int \log x dx$　(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 1}dx$　(5) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-2x}dx$

(お茶の水女子大 1999)　　(m19990605)

0.123 次の各問に答えよ．

(1) $\tan x \left(\dfrac{-\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $\tan^{-1} x(-\infty < x < \infty)$ で表す．$\tan^{-1} x$ の導関数を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 - 6x + 13}dx$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + (n - 1)^2}\right) = \frac{\pi}{4}$ となることを示せ．

(お茶の水女子大 1999)　　(m19990606)

0.124 次の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^3 e^{-x}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x}$

(お茶の水女子大 2000)　　(m20000604)

0.125 ガンマ関数 $\Gamma(s)$ を次の積分で定義する．但し，$s>0$ とする．

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}\exp(-x)dx$$

(1) $\Gamma(1)$ を求めよ．

(2) 次の関係式を示せ．

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$$

（お茶の水女子大 2000）　(m20000605)

0.126 次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D \sqrt{x}dxdy, \qquad D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq x\}$$

（お茶の水女子大 2000）　(m20000608)

0.127 関数 $f(x)$ は実数の開区間 $I=(a,b)$ で連続，関数 $g_1(t),g_2(t)$ は実数の開区間 $J=(c,d)$ で微分可能であり，その値が開区間 I に属するとし，次のような関数を考える．

$$h(t)=\int_{g_1(t)}^{g_2(t)} f(x)dx$$

このような形で定義された関数について以下の問に答えよ．

(1) 次の関数の導関数を具体的に計算せよ．

$$\int_{t^2}^{t^3} x\log x dx \qquad \text{（log は自然対数関数を表す.）}$$

(2) 次の関数の導関数を計算できるまで計算せよ．

$$\int_{t^2}^{t^3} e^x\log x dx \qquad \text{（log は自然対数関数，}e\text{ は自然対数の底を表す.）}$$

(3) 次の関数の導関数を f,g_1,g_2 およびその導関数を用いて表せ．

$$h(t)=\int_{g_1(t)}^{g_2(t)} f(x)dx$$

（お茶の水女子大 2001）　(m20010602)

0.128 関数 f は実数の閉区間 $[a,b]$ で連続とし，

$$f_0(x)=f(x), \quad f_n(x)=\int_a^x f_{n-1}(t)dt$$

とおくとき，

$$f_n(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)dt$$

という式が成立することを，どういう事実を使ったか明確に説明しながら示せ．特に，

(1) $f(x)=c$（定数）　(2) $f(x)=e^x$

であるとき，$f_n(x)$ を計算せよ．

（お茶の水女子大 2001）　(m20010603)

0.129 変数変換 $t=\tan(\theta/2)$ を用いて三角関数の積分を計算してみよう．

(1) $\cos\theta$ と $\sin\theta$ は変数 t を用いて，以下のように表せることを示せ．

$$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$$

(2) 次の関数式を示せ. $\dfrac{dt}{d\theta}=\dfrac{1}{2}(1+t^2)$

(3) 次の不定積分を求めよ. $\displaystyle\int\frac{d\theta}{\sin\theta},\quad\int\frac{d\theta}{\cos\theta}$

ただし，もし必要であれば以下の公式を用いて良い.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

（お茶の水女子大 2001） (m20010604)

0.130 次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\int_0^x(x-t)\sin t\,dt$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx$

(お茶の水女子大 2003) (m20030604)

0.131 指数関数 $f(x)=e^x$ を考える.

(1) 任意の自然数 n と任意の実数 x に対して，

$$e^x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}x^k+\int_0^x\frac{e^t}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}dt$$

となることを示せ.

(2) $R_n(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{e^t}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}dt\quad(|x|<+\infty)$

と表すとき，$R_n(x)$ は実数の任意の有界閉区間 $[a,b]$ 上で一様に 0 に収束することを示せ.

(お茶の水女子大 2003) (m20030606)

0.132 (1) 実対称行列 $\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$ の固有値がすべて正である条件を書け.

(2) (1) の条件のもとで次の重積分を計算せよ．ただし，必要なら $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}=\sqrt{\pi}$ を用いてよい.

$$\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}dxdy$$

(お茶の水女子大 2003) (m20030608)

0.133 次の定積分を計算しなさい.

(1) $\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx$ (ただし, $\log x$ は自然対数とする.) (2) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$

(お茶の水女子大 2007) (m20070602)

0.134 (1) $(-1,1)$ を定義域とする関数 f を，$f(x)=\arctan x+\arctan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ で定める．ただし，$\arctan x$ は，$\tan x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数とする.

(a) $f'(x)$ を求めよ.

(b) $\arctan\dfrac{1}{2}+\arctan\dfrac{1}{3}=\dfrac{\pi}{4}$ を示せ.

(2) g を $(-1,1)$ 上で定義された C^2級関数とする ． g のテイラー展開あるいはロピタルの定理を用いて

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(h)+g(2h)+g(-3h)-3g(0)}{h^2}=7g''(0)$$

を示せ（ただし，ロピタルの定理を用いる際は，定理の仮定を満たしていると確認する事）.

(3) h を $(-2,2)$ 上で定義された C^1級関数とする ． $h(0)=0$ であれば，広義積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{h(x)}{x^{3/2}}dx$ が存在することを示せ.

(お茶の水女子大 2009) (m20090601)

0.135 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int xe^{x^2}\sin x^2\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^3+3}{x^2-2x+2}\,dx$

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090604)

0.136 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0$$

の独立な 2 つの解 $y_1(x)$, $y_2(x)$ を用いて，微分方程式

$$\frac{d^2z}{dx^2}+p(x)\frac{dz}{dx}+q(x)z=f(x)$$

の特解を

$$z(x)=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)$$

とおく．$\dfrac{dc_1}{dx}y_1+\dfrac{dc_2}{dx}y_2=0$ となるように $c_1(x)$, $c_2(x)$ を選ぶことにより，特解が

$$z(x)=-y_1(x)\int^x\frac{f(x')y_2(x')}{W(x')}\,dx'+y_2(x)\int^x\frac{f(x')y_1(x')}{W(x')}\,dx'$$

と与えられることを示せ．ここで，$W=y_1\dfrac{dy_2}{dx}-y_2\dfrac{dy_1}{dx}$ である.

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090609)

0.137 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{e^x+1}\,dx$

(お茶の水女子大 2010)　　(m20100602)

0.138 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-1}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx$

(お茶の水女子大 2010)　　(m20100610)

0.139 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ x^2+y^2\leq 1\right\}$ とするとき，D 上の連続関数 f の積分値

$$I(f)=\int_D f(x,y)\,dxdy$$

がどのように定義されるか述べよ．また，f が任意の $(x,y)\in D$ に対して $f(x,y)=-f(-x,-y)$ を満たすとき，$I(f)=0$ であることを定義に従って示せ.

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110601)

0.140 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{x^3-1}dx$ を求めよ.

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110605)

0.141 以下の各問いに答えよ.

(1) 次の実数値関数の不定積分を求めよ.

$$\int\frac{x^4}{x^3-1}\,dx$$

(2) $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ が，異なる 2 点 a, b を含む区間で連続であれば

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$$

となるような点 ξ が 2 点 a, b の間に必ず存在することを示せ.

(お茶の水女子大 2012)　　(m20120601)

0.142 $t > 0$ に対して,

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x}x^{t-1}dx$$

とする. このとき以下の各問に答えよ.

(1) 右辺の広義積分は収束することを示せ.

(2) $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ であることを示せ.

(3) 自然数 n について $\Gamma(n) = (n-1)!$ であることを示せ.

(お茶の水女子大 2012)　　(m20120605)

0.143 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 x^2 \log x\, dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x\, dx$　　ただし，arctan は正接 tan の逆関数の主値を表すものとする.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130601)

0.144 次の方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(\boldsymbol{r}) = a\delta(\boldsymbol{r}), \tag{a}$$

に関する以下の問いに答えなさい．ここで右辺の a は正の実数，$\delta(\boldsymbol{r})$ は 3 次元のデルタ関数

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^\infty d\boldsymbol{k}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{b}$$

である.

(1) 関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ のフーリエ変換を

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^\infty d\boldsymbol{k}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k}) \tag{c}$$

とした時，これが方程式 (a) を満たすということから関数 $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$ を求めなさい.

(2) 積分要素 $d\boldsymbol{k}$ の直交座標系 (k_x, k_y, k_z) から極座標系 (k, θ, ϕ) への変換は

$$\int_{-\infty}^\infty d\boldsymbol{k} = \int_0^\infty dk\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} d\phi|J| \tag{d}$$

で与えられる．このときのヤコビアン J を書きなさい．ここで $k = |\boldsymbol{k}|$ である．また (d) の右辺が

$$\int_0^\infty k^2 dk\int_{-1}^1 d\cos\theta\int_0^{2\pi} d\phi \tag{e}$$

と書けることを示しなさい.

(3) 問 (1) で求めた $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$ を使って，(c) から $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めなさい．必要があれば，公式

$$\int_0^\infty dx\frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2} \tag{f}$$

を用いてもよい.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130606)

0.145 $n \geq 0$ なる整数 n に対して,

$$I_n = \int_{-1}^{1} x^{2n}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

とおく．このとき，以下の問に答えよ.

(1) I_0 と I_1 を求めよ.

(2) I_{n+1} と I_n の関係を求めよ.

(3) I_n を求めよ.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130608)

0.146 (1) 正の実数 a と自然数 n に対して

$$I_n(a) := \int_0^a \frac{dx}{(1+x^2)^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

とおく．極限 $I_n = \lim_{a\to\infty} I_n(a)$ が存在することを確かめ，I_n を求めよ.

(2) 整数 k, n は $0 \leq k < n$ を満たすものとし，$a_0, \cdots, a_k$ は負の実数，$a_{k+1}, \cdots, a_n$ を正に実数とする．このとき x に関する方程式

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$$

は正の実数解を一つだけ持つことを示せ.

(お茶の水女子大 2015)　　(m20150601)

0.147 逆正接関数について以下の問に答えよ. ただし値域は $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ とする.

(1) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}(a-x) = \frac{\pi}{4}$ が実数解をもつ a の範囲を求めよ.

(2) $\left(\tan^{-1}x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$ を示せ.

(3) $\int \tan^{-1}x dx$ を求めよ.

(4) $\tan^{-1}x$ を x^{10} の項までマクローリン展開せよ.

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160609)

0.148 $-\infty < a < b < \infty$ とし，$f(x)$ は区間 $[a, b]$ で定義された連続関数で，かつ　$f(x) \geq 0$ を満たすものとする．もし　$\int_a^b f(x)dx = 0$ であるならば，$[a, b]$ 上の各点 c で $f(c) = 0$ であることを示せ.

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170602)

0.149 整数 n に対して，$x \neq 0$ のとき $f_n(x) = x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right)$，$f_n(0) = 0$ として $\mathbb{R}$ を定義域とする関数 f_n を定める.

(1) f_n の $x \neq 0$ における微分係数 $f_n'(x)$ を求めよ．また f_1 は $x = 0$ で微分可能でないことを確かめよ.

(2) 自然数 m に対して $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上定義された f_n の m 階導関数 $f_n^{(m)}$ が存在する．適当な多項式 P_m, Q_m に対して，$x \neq 0$ で

$$f_n^{(m)}(x) = x^{n-2m}\left(P_m(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) + Q_m(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

が成り立ち，$P_m(0)$, $Q_m(0)$ のうち一方だけが 0 でないことを示せ．また $n > 1$ のとき，$f_n^{(m)}$ が $\mathbb{R}$ 全体で定義されるための m の条件を求めよ.

(3) $n \leq 0$ のとき，広義積分

$$\int_0^1 f_n(x)dx$$

の収束，発散を調べよ．

(お茶の水女子大 2018)　　(m20180601)

0.150 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

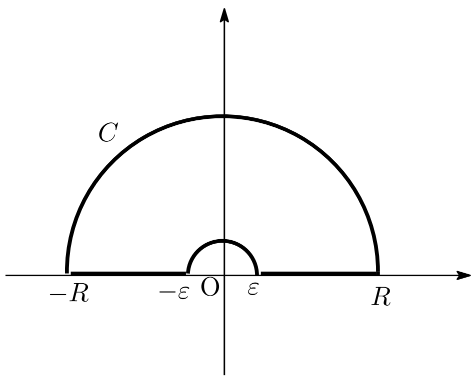
を計算することにより，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ を求めよ．

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190609)

0.151

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z}dz$$

を下図のような複素平面上の経路 C で計算することにより，$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ の値を求めよ．



(お茶の水女子大 2019)　　(m20190610)

0.152 次の積分を計算せよ．(ただし，n は正の整数)

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\cos x dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{2n+1}e^{-x^2}dx$

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200606)

0.153 関数 $\delta_y(x)$ と $g(y)$ を次の式で定義する．

$$\delta_y(x) = \begin{cases} y^{-1} & (|x| < \frac{1}{2}y) \\ 0 & (|x| \geq \frac{1}{2}y) \end{cases} \qquad g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_y(x)dx$$

ここで，$f(x)$ は何回でも微分可能であるとする．このとき，$g(y)$ を y の 2 次の項まで求めよ．

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200609)

0.154 (1) $t = x + \sqrt{x^2-1}$ のとき，$\dfrac{dt}{dx}$ を求めよ．

(2) 積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$ を，上記 (1) のように $t = x + \sqrt{x^2-1}$ とおいて，t の関数の積分に置換せよ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$ を求めよ．

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200612)

0.155 N を自然数とする．このとき，次の各問に答えよ;

(1) $y \geq 0$ に対して，次が成り立つことを示せ．

$$e^y \geq \frac{y^N}{N!}$$

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}(1+x)^N dx$ の収束・発散を調べよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ を $\displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} t\left(1+\log\frac{1}{t}\right)^N dt \quad (n=1,2,\cdots)$ で定める．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210604)

0.156 極座標に関する以下の各問に答えよ．

(1) 極座標を用いて $r = 1+\cos\theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$ で表される曲線の長さを求めよ．

(2) 次の広義積分 I について，極座標の考え方を用いることで I^2 を求めよ．また，I を求めよ．

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210607)

0.157 $a \neq 0,\ b \neq 0$ のとき，次の不定積分を求めよ．

$$\int e^{ax}\sin bx\, dx$$

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210610)

0.158 (1) (i) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$ は収束していることを示せ．

(ii) 0 より大きい実数 x に対し，$f(x) = \displaystyle\int_x^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$ とおく．

$0 < x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$ が成り立つことを示せ．

(iii) (ii) での $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ と記すと，その微分に関して

$g'(x)^2 = g(x)^3 + 1$ が成り立つことを示せ．

(2) 関数 $h(x)$ はすべての実数 x で $h(x) > 0$ をみたす連続関数とし，

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} h(x)$ もみたすと仮定する．

(i) $a > 0$ に対し，X_a は $h(x) \geq a$ をみたす実数 x の集合とする．

このとき，X_a は有界集合であることを示せ．

(ii) $h(x)$ は実数上の関数として最大値をもつことを示せ．

（閉区間上の連続関数に対する最大値の定理を用いてよい.）

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220603)

0.159 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx$ を計算せよ．

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220606)

0.160

$$x(t) + a\int_0^t x(t)dt = f(t) + b\int_0^t f(t)dt$$

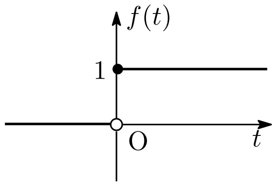
において $f(t)$ は下図のステップ関数とする．ただし，

$$a > b > 0 \ ,\ \lim_{t\to+0} x(t) = 1 \ ,\ \lim_{t\to-0} x(t) = 0$$

このとき

(1)　$x(t)$ を求めよ．

(2)　$x(t)$ の概形を図示せよ．



$$f(t) = 1 \qquad t \geqq 0$$
$$f(t) = 0 \qquad t < 0$$

(東京大 1997)　　(m19970701)

0.161　次の積分を計算せよ．

$$\int_0^1 \frac{2\pi j e^{2\pi jt}}{e^{2\pi jt} - \alpha} \cdot \left\{ \frac{2\pi j e^{2\pi jt}}{e^{2\pi jt} - \alpha} \right\}^* dt$$

ただし，α は $|\alpha| \neq 1$ なる任意の複素数，j は虚数単位，“ $*$ ” は複素共役を表すとする．

(東京大 1997)　　(m19970704)

0.162　(1)　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx$　を求めよ．なお計算過程も示せ．ただし，m, n は $m, n > 0$ の整数とする．

(2)　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx$　を求めよ．なお計算過程も示せ．ただし，m, n は $m, n > 0$ の整数とする．

(3)　フーリエ級数 $f(x) \approx \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$　について，

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[{a_n}^2 + {b_n}^2 \right]$$　を証明せよ．

(東京大 1998)　　(m19980704)

0.163　曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ を S とする．S に $(\pm\ 1, \pm\ 1, \pm\ 1)$ で内接する立方体を U とする．ただし，符号はすべての組み合わせをとる．曲面 S で囲まれた領域から立方体 U を除いた領域を V とする．領域 V に対する積分

$$I = \int_V (x^2 + 2y^2 + 3z^2) dx\, dy\, dz$$

を求めたい．以下の問いに答えよ．

(1)　立方体 U に対する積分

$$J = \int_U (x^2 + 2y^2 + 3z^2) dx\, dy\, dz$$

を求めよ．

(2)　球 $W : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ に対する積分

$$K = \int_W (x^2 + y^2 + z^2) dx\, dy\, dz$$

を極座標 $(x = r \sin\theta \cos\varphi,\ y = r \sin\theta \sin\varphi,\ z = r \cos\theta)$ を用いて求めよ．体積素片に対して，$dxdydz = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ が成立することを利用してよい．

(3)　上の (1) と (2) を利用して，積分 I を求めよ．

(東京大 2000)　　(m20000702)

0.164　(1)　複素変数の指数関数 e^x の級数展開は次式で表される．

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

上式を利用して, $\cos z$, $\sin z$ の級数展開を求めよ．

(2) 次の複素関数を特異点 $z=0$ のまわりでローラン展開し $f(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ の形で表せ. また, 特異点の種類を答えよ.

$$f_1(z) = z\sin\left(\frac{1}{z}\right), \qquad f_2(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}, \qquad f_3(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

(3) 次の積分を求めよ.

$$I = \oint_C f_3(z)dz$$

ただし, 積分路 C は複素平面上で原点を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を反時計回りに一周するものとする.

(東京大 2001) (m20010703)

0.165 関数 $f(x)$ のラプラス変換 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$ を $L\left[f(x)\right] = F(s)$ と表す.

(1) $L[x]$ を求めよ.

(2) $L\left[e^{ax}f(x)\right] = F(s-a)$ を示せ.

(3) 上記 (2) の定理を用いて, xe^{2x} のラプラす変換を求めよ.

(4) 上記 (2) の定理を用いて, $L\left[2e^{-2x} - xe^{-2x}\right]$ を求めよ.

(東京大 2001) (m20010704)

0.166 (1) 変数 t に関して周期 2π の周期関数 $f(t)$ が

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)) \tag{1}$$

と書けたときの a_n , b_n が

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt, \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{3}$$

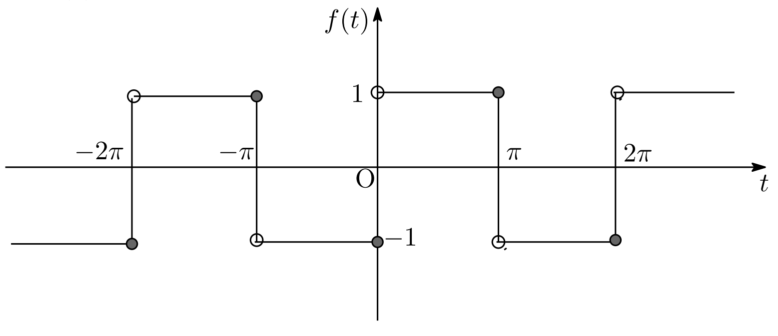
で与えられることを説明せよ．ただし，必要ならば三角関数の公式

$\sin A\sin B = -\dfrac{1}{2}\{\cos(A+B) - \cos(A-B)\}$, $\sin A\cos B = \dfrac{1}{2}\{\sin(A+B) + \sin(A-B)\}$

$\cos A\sin B = \dfrac{1}{2}\{\sin(A+B) - \sin(A-B)\}$, $\cos A\cos B = \dfrac{1}{2}\{\cos(A+B) + \cos(A-B)\}$

を用いよ．

(2) 下図は，値 1 と -1 をとる周期 2π の周期関数 $f(t)$ のグラフを示したものである．この関数 $f(t)$ を式 (1) の形に展開せよ．



(東京大 2003) (m20030704)

0.167 以下の設問に答えよ．ただし，$a > 0$ である．

(1) 次の定積分の値を求めよ．$\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-ax^2}dx$

(2) 次の定積分の値を求めよ．必要ならば，直交座標系 (x, y) を極座標系 (r, θ) に変換せよ．
$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}e^{-ay^2}dxdy$

(3) 次の等式を証明せよ．$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

(4) 次の定積分の値を求めよ．ただし，n は 2 以上の整数である．$\displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2}dx$

(東京大 2004)　　(m20040702)

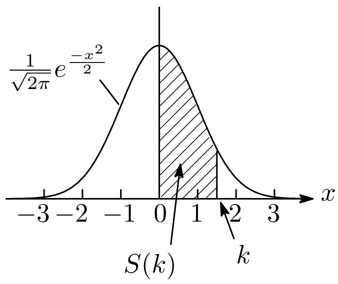
0.168 方程式 $ax^2 + 4bx + c = 0$ が相異なる 2 つの実根をもつ確率を，(1), (2) それぞれの場合に対して求めよ．

(1) a, b, c がそれぞれ無作為に 0, 1, 2 のいずれかの値をとるとき．

(2) a, c がそれぞれ無作為に 1, 2 のいずれかの値をとり，a, c と関係なく b は平均 0，標準偏差 1 の正規分布に従うとき．

ただし，$\sqrt{2} = 1.4$ とし，次の表を利用してよい．

k	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0	1.2
$S(k)$	0.117	0.191	0.258	0.316	0.341	0.385



ここに，$S(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^k e^{\frac{-x^2}{2}}dx$ とする．たとえば，平均 0，標準偏差 1 の正規分布に従う変数 x が 0.7 から 1.0 をとる確率は，$P(0.7 < x < 1.0) = S(1.0) - S(0.7) = 0.083$ である．

(東京大 2004)　　(m20040705)

0.169 $f(x) = x^2\sqrt{a^2 - x^2}$，$g(x) = x^2e^{-x}$ として下記の問いに答えよ．ただし，$a > 0$ で，$f(x)$ は区間 $-a \leqq x \leqq a$ で定義される関数である．

(1) $y = f(x)$ のグラフをかけ．　　(2) $y = g(x)$ のグラフをかけ．

(3) $\displaystyle\int_0^a f(x)dx$ を求め，結果を a を用いて表せ．

(4) $\displaystyle\int_0^a f(x)dx = \int_0^{\infty} g(x)dx$ のとき，a の値を求めよ．

(東京大 2006)　　(m20060701)

0.170 ２つの媒介変数 s, θ によって表される曲面 S

$$S\ :\ x(s, \theta) = (s\cos\theta,\ s\sin\theta,\ \alpha\theta)\ ,\ (0 \leq s \leq 1)\ ,\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

について，以下の設問に答えよ．α は 0 以上の定数とする．

(1) $x(s, \theta)$ の媒介変数 s を 1 と固定する事により，曲線 C

$$C\ :\ y(\theta) = x(1, \theta) = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ \alpha\theta)\ ,\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

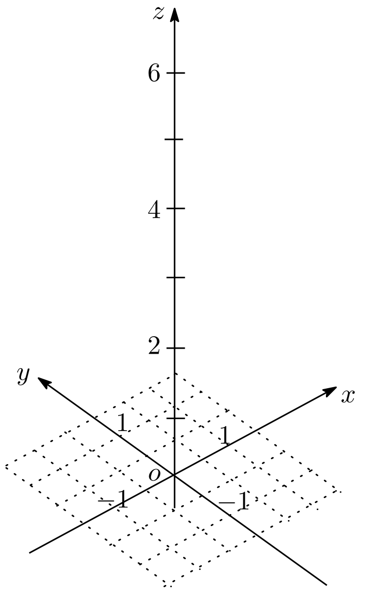
を得る．$\alpha = 1$ の場合について，下図の座標軸を参考にして曲線の概略を解答用紙に手描きせよ．

(2) C 上の点を $P(= y(\theta))$ とする．P における接線の方程式を導出せよ．

(3) (2) で求めた接線と xy 平面の交点を Q とする．θ が 0 から 2π まで連続的に変化するとき，Q が描く曲線の長さ ℓ を求めよ．

(4) $\alpha = 0$ のとき，曲面 S は xy 平面上の単位円盤に一致する．$\alpha = 1$ としたとき，曲面 S の面積は，単位円盤の面積の何倍になるかを求めよ．ただし，次の不定積分の公式を使ってよい．

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2} + \log_e\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right\} + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$



(東京大 2009)　　(m20090703)

0.171　関数 $f(x) = \dfrac{x^{m-1}}{1+x^n}$ について

$$\int_0^\infty f(x)\,dx$$

の値を求めたい. ただし, m, n は自然数で, $m < n$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 複素数平面上で, 図 1 に示す $C = C_1 + C_2 + C_3$ の扇形 $\left(\text{半径 } R, \text{ 中心角} \dfrac{2\pi}{n}\right)$ の積分路が与えられている. この平面上の複素数を $z = x + iy$ (i は虚数単位) とするとき, 積分路 C の内部にある $f(z)$ の極を求めよ. ただし, $R > 1$ とする.

(2) C に沿っての複素積分

$$\int_C f(z)\,dz$$

の値を求めよ.

(3) $R \to \infty$ のとき, C_2 に沿っての複素積分

$$\int_{C_2} f(z)\,dz$$

の値を導出過程とともに示せ.

(4) 虚数単位 i を含まない形で

$$\int_0^\infty f(x)\,dx$$

の値を求めよ.

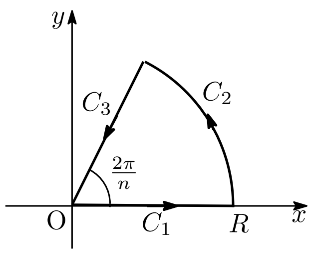


図 1

(東京大 2010)　　(m20100704)

0.172　(1) 閉曲面 S で囲まれた領域の体積 V は

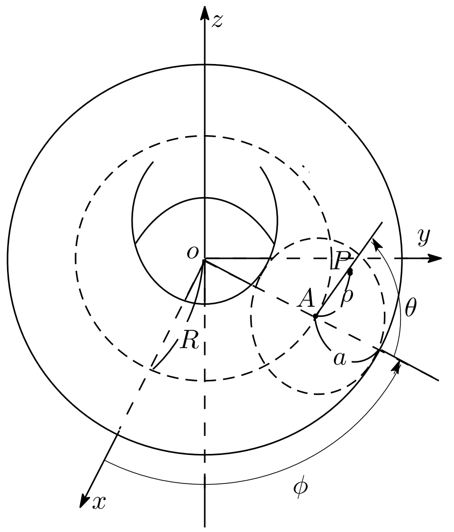
$$V = \frac{1}{3}\iint_S \boldsymbol{r} \cdot dS \qquad (*)$$

と与えられることをガウスの定理を用いて証明せよ．　ただし，$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル，dS はベクトル面積素である．

(2) 下図のように，あるトーラスの回転対称軸を z 軸にとり， z 軸に垂直でトーラスを 2 等分するような平面内に x 軸と y 軸をとる． このトーラスは z 軸を含んだ平面で切断すると，その断面は半径 a の円となり， この円の中心は z 軸から距離 R の円周上（トーラス中心軸と呼ぶことにする）にある $(R > a)$． トーラス表面および内部の任意の点を P とする．点 P と z 軸とを含んだ平面と， トーラス中心軸との交点を A とする．線分 AP の長さを ρ， x 軸と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のなす角を ϕ，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のなす角を θ とする． 点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の成分を R, ρ, ϕ, θ を用いて書き表せ．

(3) 同図のトーラスの表面 $(\rho = a)$ においてベクトル面積素 dS を，前問 (2) の結果を用いて，ϕ と θ を媒介変数にして表示せよ． この結果を用い，変数の範囲に注意して，このトーラスの表面積を求めよ． なお円周率を π とする．

(4) 式 $(*)$ と前問の結果からこのトーラスの体積を求めよ．



(東京大 2012)　　(m20120703)

0.173 以下の問いに答えよ．ただし，解とともに導出過程も示せ．

(1) 複素数 A_n を係数とする複素多項式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z-a)^n$$

を考える．ただし，z は複素変数，a は複素数，n は整数とする．複素平面上で a の周りを反時計回りに一周する経路 C に沿った積分について，以下の式が成り立つことを示せ． ここでは i を虚数単位とする．

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i A_{-1}$$

必要であれば以下のコーシーの積分定理を用いて良い．

複素関数 $g(z)$ が複素平面上の閉曲線 C' とその内部 D' で正則あれば．

C' を一周する経路に沿って $g(z)$ を積分すると，その結果はゼロである．

(2) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

(3) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

(4) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$$

(東京大 2012)　　(m20120704)

0.174 $f(x)$ を $-l \leqq x \leqq l$ で定義された関数とする．このとき，

$$a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\,dx \quad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\,dx \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

とすると，$f(x)$ は，

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\frac{m\pi}{l}x + b_m \sin\frac{m\pi}{l}x\right) \quad \cdots \quad ①$$

と展開できる．以下の問に答えよ．

(1) 次式で定義された関数 $f(x)$ の a_m，b_m を求め，① 式で $l = 1$ とした式に従い $f(x)$ を展開せよ．

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & (-1 \leqq x \leqq 0) \\ 1 - x & (0 < x \leqq 1) \end{cases}$$

(2) $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ で定義される関数 $f(x) = \cos x$ を ① 式で $l = \frac{\pi}{2}$ とした式に従い展開し，その展開式を利用し，以下の無限級数

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{15} + \frac{1}{35} - \frac{1}{63} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{4m^2 - 1} + \cdots$$

の値を求めよ．

(東京大 2013)　　(m20130701)

0.175 以下の問いに答えよ．i は虚数単位とする．

(1) 複素数の範囲で -4 の 4 乗根をすべて求めよ．

(2) 複素関数 $f(z) = z^2$ を複素平面上の点 $1 + i$ から点 $2 + 2i$ にいたる線分に沿って積分した結果を示せ．

(3) 実関数の定積分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta} \qquad (a > 1)$$

を求めたい．$z = \exp(i\theta)$ とし，I を複素積分の形で表せ．積分路も示すこと．

(4) 留数定理を用いて (3) の I の値を計算せよ．

(5) 複素関数 $f(z) = f(x + iy) = \left(x^2 - y^2\right) + ibxy$ が正則となるように係数 b を定めよ．また，そのときの $f(z)$ の導関数を求めよ．

(東京大 2013)　　(m20130704)

0.176 複素積分を利用して実数積分を求めることを考える．以下の問いに答えよ．

(1) まず，ガウス積分と呼ばれる実数積分 $I(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ を考える．α は正の定数であり; x は実数である．y を実数とするとき，$\{I(\alpha)\}^2$ は以下の式で表される．

$$\begin{aligned}\{I(\alpha)\}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2}dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)}dxdy\end{aligned}$$

この式を極座標 (r,θ) 表示に変換せよ．

(2) $I(\alpha)=\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$ となることを導出過程とともに示せ．

(3) 図 4.1 に示すように x 軸を実軸，y 軸を虚軸とする複素平面上において半径 R の扇形で C_1, C_2, C_3 からなる経路 C を反時計回りに一周することを考える．i を虚数単位とし，z を複素数とするとき，以下の積分を求めよ．

$$\oint_C e^{iz^2}dz$$

(4) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_2} e^{iz^2}dz=0$ となることを示せ．ただし，$0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$ において，$\sin\varphi\ge\dfrac{2\varphi}{\pi}$ を用いてよい．

(5) 上記のガウス積分と複素積分を用いて，実数積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\sin x^2dx$ の値を求めよ．

(6) 実数積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ の値を求めよ．

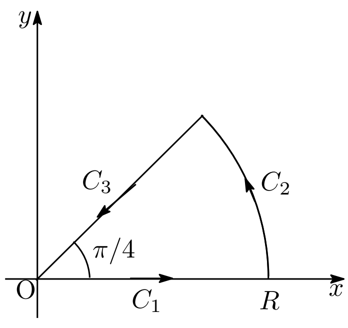


図 4.1

(東京大 2015)　　(m20150704)

0.177 以下の問いに答えよ．i は虚数単位とする．また, z は複素数とする．

(1) $\sin z=10$ を z について解け．

(2) i^i, 3^i それぞれについて実部と虚部を求めよ．

(3) ある周回経路 C に沿った複素平面上の周回積分

$$\oint_C \frac{1}{z^2+1}dz$$

を考える．経路 C の取り方によって積分値がどのように変化するか考えたい．極の配置を図示し，経路の例を 1 つずつ示しながらとりうる積分値を全て列挙せよ．

(4) z に関する関数

$$\frac{1}{z^2-3z+2}$$

の収束域 $1<|z|<2$, および $2<|z|$ に対するローラン級数を求めよ．

(5) 実積分
$$\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^4} dx$$
を，留数の定理を用いて求めたい．適切な複素平面での積分路を定めて図示し，積分値を求めよ．

(東京大 2016)　　(m20160704)

0.178 確率変数 X の累積分布関数 $F(x)$ が以下の微分方程式で表されるとする．
$$\frac{dF}{dx} = \frac{F(1-F)}{s}$$
今，$F(m) = 1/2$ である．ただし，m, s は実数である．このとき，設問 (1)〜(5) について答えよ．

(1) 累積分布関数 F，および F の密度関数 f をそれぞれ求めよ．

(2) f が偶関数となる m を求めよ．ただし，その導出過程，または理由を示すこと．

(3) 期待値 $E = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f dx$ を求めよ．ただし，その導出過程を示すこと．

次に，入力信号の値 x に応じた確率で信号を出力したりしなかったりするシステムを考える．今，n 種類の入力信号の値 $x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ に対して，信号が出力された頻度を調べたところ $r_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ を得た．以下の問いに答えよ．

(4) 関数 $\varphi(F(x)) = \log\left(\dfrac{F(x)}{1-F(x)}\right)$ を，x の一次式で表せ．

(5) $y_i = \varphi(r_i)$ としたとき，
$$Q = \sum_{i=1}^{n} \{y_i - \varphi(F(x_i))\}^2$$
を最小にする m と s を求め，それぞれ下記の統計量を用いて表せ．

平均： $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j$,　　$\overline{y} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j$

分散： $\mathrm{var}(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2$,　　$\mathrm{var}(y) = \overline{y^2} - \overline{y}^2$

共分散： $\mathrm{cov}(x, y) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j y_j - \overline{x} \cdot \overline{y}$

(東京大 2017)　　(m20170702)

0.179 以下の問いに答えよ．i は虚数単位はとする．

(1) 実数 a は $|a| < 1$ 満たすとする．留数定理を用いて，複素積分
$$\int_C \frac{dz}{(z+ai)(az+i)}$$
を求めよ．ただし，積分路 C は $|z| = 1$ であり，反時計回りに回るものとする．

(2) $0 < \gamma < \pi/2$ として，積分値
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\cos\gamma\sin\theta}$$
を次の手順で求めよ．

(a) $z = e^{i\theta}$ と変数変換を行うことにより複素積分に変形する．このとき，
$$I = \int_C f(z) dz$$
を満たす複素関数 $f(z)$ を求めよ．ただし，積分路 C は $|z| = 1$ であり，反時計回りに回るものとする．

(b) 複素関数 $f(z)$ の極を全て求めよ．

(c) 積分路 C 内に含まれる極を全て求めよ.

(d) 留数定理を用いて，積分値 I を求めよ.

(東京大 2017)　　(m20170704)

0.180　3 つのベクトル場 $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ を考える．各ベクトル場は次のように定義する.

$$\vec{A} = rf(r,z)\vec{e}_\theta$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{C} = \vec{\nabla}\{zf(r,z)\}$$

ただし，$f(r,z)$ は

$$f(r,z) = (r^2 + z^2)^{-3/2}$$

とする．円柱座標系 (r,θ,z) における基底ベクトルを $(\vec{e}_r,\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e}_z)$ とし，以下の問いに答えよ．必要であればスカラー場 ϕ およびベクトル場 $\vec{V} = \vec{e}_r V_r + \vec{e}_\theta V_\theta + \vec{e}_z V_z$ に対する以下の勾配，発散，回転の式を用いてよい.

$$\vec{\nabla}\phi = \vec{e}_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \vec{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right) + \vec{e}_\theta\left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)$$

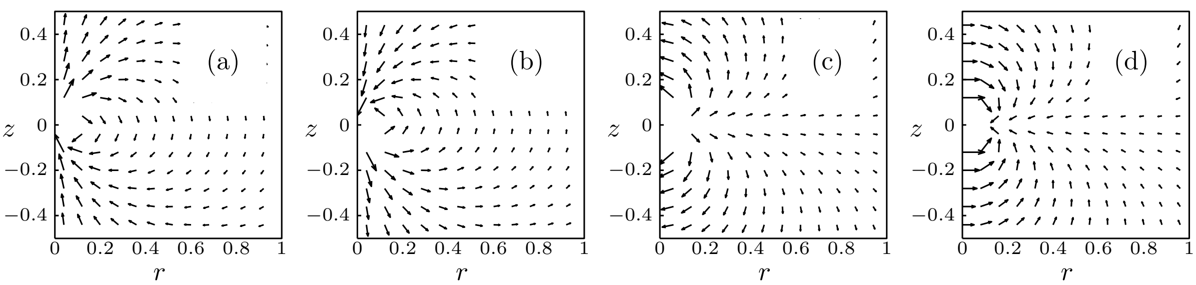
(1) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}$ を求めよ.

(2) $r \le r_0$ および $z = z_0$ により定義される円板面 S_0 を考える ($z_0 > 0$)．面の法線方向を $\vec{e}_z$ とするとき，この円板面における次の面積分 Φ を，必要があれば r_0, z_0 用いて，表わせ.

$$\Phi = \int_{S_0} \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

(3) $\vec{B}$ および $\vec{C}$ を求めよ.

(4) ベクトル場 $\vec{B}$ および $\vec{C}$ の分布の概略として正しい図を下の (a)-(d) からそれぞれ選べ.



(5) $r \le r_0$ および $z_1 \le z \le z_2$ により定義される円柱 ($z_1 > 0$) に対し，側面と両底面からなる閉曲面 S_1 を考える．面の法線方向を円柱外向きとする．この閉曲面における次の面積分 Q を，必要であれば r_0, z_1, z_2 を用いて，表わせ.

$$Q = \int_{S_1} \vec{C}\cdot d\vec{S}$$

(東京大 2018)　　(m20180703)

0.181　i を虚数単位とする．以下の問いに答えよ.

(1) $-i$ の 3 乗根

$$A = (-i)^{1/3}$$

を考える.

(a) A を全て求めて $a + ib$ の形で答えよ. a と b は実数とする. ただし, 最終的な a と b の表式に三角関数を用いてはならない.

(b) A の全ての点を複素平面上に図示せよ.

(2) x と y を実数として複素数 $z = x + iy$ を考える. 次の関数に関して以下の問いに答えよ.

$$u = \sin x \cosh y$$

(a) u を実数部分として持つ正則関数 $w(z)$ を求めよ.

(b) $\dfrac{dw(z)}{dz}$ を求めよ.

(3) 次の複素関数積分 I を考える.

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^5 - 3iz^4/2 + z^3} dz$$

ただし, 積分路は複素平面上の単位円周上を反時計回りに一周するものとする

(a) 全ての極と対応する次数と留数を求めよ.

(b) 積分 I を求めよ.

(東京大 2018) (m20180704)

0.182 i を虚数単位とし, z は複素数とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 次の複素数を $x + iy$ (x, y は実数) の形ですべて求めよ. ただし, x, y の表式に三角関数を含んではならない.

(a) $\left(1 - \sqrt{3}i\right)^3$ (b) $i^{1/2}$ (c) $\dfrac{(1-i)^6}{(1+i)^8}$

(2) 関数 $z = \tan\omega = \dfrac{\sin\omega}{\cos\omega}$ の逆関数を $\omega = \tan^{-1} z$ で表す.

(a) 次の式が成り立つことを示せ. $\tan^{-1} z = \dfrac{i}{2}\log\left(\dfrac{i+z}{i-z}\right)$

ただし, log は複素対数関数である.

(b) $\tan^{-1} z$ の z に関する微分を求めよ.

(3) 複素平面において, 曲線 C を $z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とする.

(a) 次の積分 $I(k)$ を求めよ. ここで, k は $0 < k < 1$ の定数とする. $I(k) = \displaystyle\int_C \frac{1}{k^2z^2+1} dz$

(b) $k = 2 - \sqrt{3}$ のとき, I の値を求めよ.

(4) 実積分 J の値を留数定理により求めることを考える. $J = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx$

(a) J の積分範囲を $[-\infty, \infty]$ と変形して, 被積分関数に e^{ix} を用いて J を表せ.

(b) 関数 $f(z) = 1/(z^2+1)^2$ とする. 複素平面において, 図 1 の半径 Γ (円弧 ADB) の半径 R が十分に大きい時, 次のことが成り立つことを示せ. $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z) dz = 0$

(c) 図 1 の C に関する周回積分を考えることにより, J の値を求めよ.

このとき, 複素平面の上半平面において,

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z) e^{iz} dz = 0$$

であることを用いてよい.

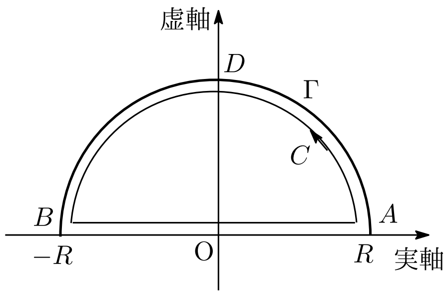


図 1

(東京大 2020)　　(m20200703)

0.183　以下の問いに答えよ．ただし，x は実変数，y は x に関する実関数であり，

$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．また，e は自然対数の底とする．

(1)　次の微分方程式について考える．ただし，y は，任意の x に対し $y > 0$ を満たすものとする．

$$y' - 2y\sin^2(x) = \frac{e^{2x}\cos(2x)}{y}$$

(a) 関数 $f(x)$ を次式により定義する．定積分を計算し，$f(x)$ を求めよ．

$$f(x) = \int_0^x \left[-2\sin^2(t)\right] dt$$

(b) $z = ye^{f(x)}$ とするとき，$\dfrac{dz}{dx}$ を x と z の関数として表せ．

(c) y の一般解を求めよ．

(2)　次の微分方程式について考える．ただし，α および n は実定数であり，α は $-1 \leq \alpha \leq 1$ を満たすものとする．

$$y'' - 2\alpha y' + y = 2e^x$$

(a) y の特解を求めよ．

(b) y の一般解を求めよ．

(c) $\alpha = 1$ とする．$y(0) = 1$ および $y'(0) = 2$ を満たす y に関して，次の極限の収束・発散を調べよ．収束する場合にはその極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to +0} y^{x^{-n}}$$

(東京大 2022)　　(m20220701)

0.184　i を虚数単位とし，w と z は複素数とする．また，e を自然対数の底とする．以下の問いに答えよ．

(1)　次の式を満たす複素数 A を考える．

$$A^6 = i$$

(a) A を全て求めて $x + iy$　(x, y は実数) の形で求めよ．x, y の表式は三角関数を用いて書き下せ．

(b) A を全て求めて $x + iy$　(x, y は実数) の形で求めよ．ただし，x, y の表式は三角関数や指数関数を含んではならない．

(c) A を全ての点を複素平面上に図示せよ．

(2)　a と t を実数として，以下の積分値を求めたい．

$$F(a) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{d}{dt}\log_e(1 + ae^{it})\right] dt$$

(a) $z = e^{it}$ と変数変換を行う事により，複素積分に変形せよ．また，被積分関数に対して全ての極と対応する次数，および留数を求めよ．

(b) a で場合分けして，$F(a)$ を求めよ．ただし，極が積分路上にある場合は考えなくて良い．

(c) 複素平面上で $1 + ae^{it}$ を t の関数として考え，$F(a)$ が a に対して変化する事を文章で説明せよ．

(3) 以下の関数で定義される w に関して，$z = x + iy$ が上半面 $y > 0$ を満たす範囲を動くとき，w が動く範囲を複素平面上に図示せよ．

$$w = \frac{i - z}{i + z}$$

(東京大 2022)　　(m20220703)

0.185 重積分

$$\iint_D (x+y)^2 dx\, dy \qquad , \qquad D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1 \qquad (a, b > 0)$$

を求めよ．

(東京工業大 1996）　　(m19960802)

0.186 (x, y) 平面内の領域 $D = \{\ 0 \leqq y \leqq x \leqq 1\ \}$ における重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{2x^2 - y^2}\, dx\, dy$ を計算せよ．

(東京工業大 1998）　　(m19980801)

0.187 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (\ x^{2n} + 2y^{2n} + 1\ )\, e^{x^2+y^2}\, dx\, dy$ の値を求めよ．

(東京工業大 1999）　　(m19990801)

0.188 極座標系で表された半直線

$\theta = \alpha\ ,\quad \theta = \beta \quad (0 \leqq \alpha < \beta < 2\pi)$

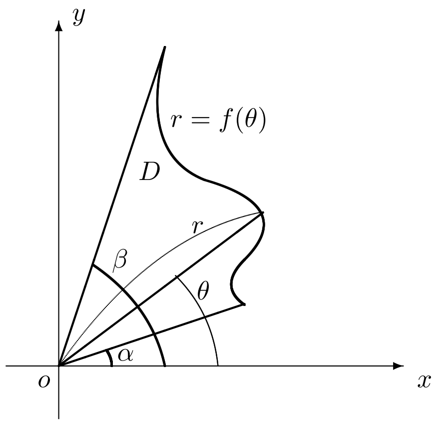
および，連続曲線

$r = f(\theta) \quad (\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$

で囲まれた閉領域 D の面積は

$\displaystyle\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2 d\theta$

で与えられることを示せ．



(東京工業大 2000）　　(m20000802)

0.189 $G(x, y, t)$ は次のように定義される関数である．

$$G(x, y, t) = \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4t}\right) \qquad (t > 0)$$

(1) 偏微分 $\dfrac{\partial G}{\partial x}$，$\dfrac{\partial G}{\partial t}$ をそれぞれ求めよ．

(2) 各 $t > 0$ に対して，次の積分 $I(t)$ を計算せよ．

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t)\, dx\, dy$$

(東京工業大 2001)　　(m20010803)

0.190 (1) 次の積分をせよ．　$\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy \qquad D : 0 \leq x \leq y \leq 1$

(2) 二つの曲面 : $z^2 = 4ay$, $x^2 + y^2 = ay$ に囲まれた立体の第 1 象限にある部分の体積を求めよ.

(東京工業大 2001) (m20010804)

0.191 (1) 次の積分を求めよ. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + 2e^{-x} + 3} dx$

(2) $\varphi(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \log(1 - 2a\cos x + a^2)dx$ なる積分において,

(a) $2\varphi(a) = \varphi(a^2)$ が成り立つことを示せ.

(b) $\varphi(a)$ を求めよ. ただし, $|a| \neq 1$ とする.

(東京工業大 2002) (m20020801)

0.192 $a > 0$ に対して積分 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$ の値を求めよ.

(東京工業大 2002) (m20020804)

0.193 積分 $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \left\{ \int_0^x (x+y)e^{-(x+y)} \frac{dy}{2y+1} \right\} dx$ の値を求めよ.

(東京工業大 2003) (m20030801)

0.194 次の 2 つの積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\lim_{M \to \infty} \int_1^M \frac{\log(a+x)}{x^2} dx$ ($a > 0$ は定数).

(2) $\displaystyle\int_1^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{1}{xy(x+y)} dxdy$

(東京工業大 2004) (m20040802)

0.195 a , b を正の数とするとき, 次の積分を計算せよ.

$$\iint_{x^2+y^2 \leqq 1} \left(\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} \right) dxdy$$

(東京工業大 2005) (m20050802)

0.196 次を示せ.

(1) $\boldsymbol{R}$ 上の実数値連続関数 f が周期 p を持つ周期関数ならば次式が成り立つ.

$$\int_x^{x+p} f(t)dt = \int_0^p f(t)dt \quad (x \in \boldsymbol{R}) .$$

(2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_a^b |\sin nx| dx = \frac{2(b-a)}{\pi} \quad (b > a)$.

(東京工業大 2006) (m20060802)

0.197 次の重積分の値を求めよ. ただし, $a > 0,\ b > 0$ とする. $\displaystyle\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (ax^2 + by^2) dxdy$

(東京工業大 2007) (m20070802)

0.198 $u(x,y) = xy^2,\ v(x,y) = x + y$ とおく. 次の積分 I の値を求めよ.

$$I = \iint_K \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy\ , \quad \left(K\ :\ \frac{x^2}{4} + y^2 \leq a^2 \right)$$

ただし, a は正の定数である.

(東京工業大 2008) (m20080802)

0.199 $\beta, \gamma < 0$ とする．次の広義積分の値を求めよ．ただし，広義積分が ∞ に発散する場合には，その値を ∞ とする．

(1) $\displaystyle\iint_{0<x^2+y^2\leq 1}(x^2+y^2)^{\beta}dxdy$ (2) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\geq 1}(x^2+y^2)^{\gamma}dxdy$

(東京工業大 2009) (m20090803)

0.200 n を整数として以下の設問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\,\cos nx\,dx$ を計算せよ．

(2) $f(x)$ を $[0,\ \pi]$ 上の連続関数とする．$f(x)$ が微分可能で導関数 $f'(x)$ が連続であれば

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^a f(x)\cos nx\,dx = 0$$

が成り立つことを示せ．（ ここで a は任意の実定数とする．）

(東京工業大 2010) (m20100801)

0.201 次の二重積分の値を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x^2-y^2+2xy}}{1+(x+y)^2}\,dxdy$$

(東京工業大 2010) (m20100802)

0.202 次の広義積分の値を求めよ． $\displaystyle\iint_{x\geq 0,\ y\geq 0} e^{-x^2-xy-y^2}\,dxdy$

(東京工業大 2012) (m20120802)

0.203 (x, y) 平面内の 4 個の曲線

$$y^2 = x, \quad y^2 = 3x, \quad xy = 1, \quad xy = 2$$

で囲まれた領域を D とする．

(1) $u = \dfrac{y^2}{x}$, $v = xy$ とするとき，D は (u, v) 平面内のどのような領域にうつるか.

(2) 積分

$$I = \iint_D e^{xy}\,dxdy$$

の値を求めよ．

(東京工業大 2015) (m20150802)

0.204 次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D e^{y^3}dxdy$, $D = \left\{(x, y)\ \middle|\ 0 \leqq\ x \leqq\ 1,\ \sqrt{x}\leqq\ y \leqq\ 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xdxdy$, $D = \left\{(x, y)\ \middle|\ x^2 + y^2 \leqq\ x\right\}$

(東京工業大 2016) (m20160804)

0.205 c を正の実数とする．次の重積分を計算せよ．

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}dxdy \qquad D\ :\ x^2+y^2 \leqq cx$$

(東京工業大 2017) (m20170804)

0.206 次の重積分を求めよ．ただし，a, b は正の実数とする．

$$\iint_D x^4 dxdy \qquad D : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqq 1$$

(東京工業大 2018)　　(m20180804)

0.207 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0\right\}$ とするとき，次の重積分を求めよ．

$$\iint_D (2x^2+y^2)^2 y^2 dxdy$$

(東京工業大 2019)　　(m20190804)

0.208 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ |x|+|y| \leqq \pi\right\}$ とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{e^{x+y}\cos(x+y)}{(x-y)^2+\pi^2} dxdy$$

(東京工業大 2020)　　(m20200804)

0.209 (1) xyz 空間内の xz 平面上の曲線 $x=e^z\cos z \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq z \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ と直線 $x=0$ で囲まれる領域を，z 軸のまわりに回転してできる回転体 A の体積を求めよ．

(2) 球 $x^2+y^2+z^2 \leqq 3$ と円柱 $x^2-2x+y^2 \leqq 0$ の共通部分を B とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iiint_B |z|\ dxdydz$$

(東京工業大 2022)　　(m20220802)

0.210 (1) $\displaystyle\int \frac{1}{2+\sin x}dx$ を求めよ．

(2) $\sqrt{x^2+1}=t-x$ とおいて $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を求めよ．

(東京農工大 1996)　　(m19960902)

0.211 $D=\left\{(x,y)\,|\,1<x<2,\ \frac{1}{2}<y<2\right\}$ で $\displaystyle\iint_D (x^2-8xy)dxdy$ を求めよ．

(東京農工大 1996)　　(m19960904)

0.212 定積分 $\displaystyle\int_1^e x\log x\,dx$ の値を求めなさい．

(東京農工大 2006)　　(m20060903)

0.213 累次積分 $\displaystyle\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}dy$ の値を，積分の順序を変更して求めなさい．

(東京農工大 2006)　　(m20060906)

0.214 xy 平面において曲線 $y=\log x$ と x 軸と直線 $x=2$ とで囲まれる領域を D とするとき，次の 2 重積分の値を求めなさい．　$\displaystyle\iint_D \frac{y}{x}dxdy$

(東京農工大 2007)　　(m20070903)

0.215 (1) 領域 D ： $0 \leqq x \leqq 1$, $x^2 \leqq y \leqq 2-x$ における次の重積分を求めなさい．　$\displaystyle\iint_D \frac{1}{x+1}\,dxdy$

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}\,dx$ を，$t=x-\frac{1}{x}$ と置いて求めなさい．

(東京農工大 2008)　　(m20080903)

0.216 次の定積分，二重積分の値を求めなさい．ここで，$\tan^{-1} x$ は，$\tan x$ の逆関数（アークタンジェント）のことである．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \tan^{-1} x\, dx$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{y^2}{(x^2+y^2)^3}\, dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0,\ x^2+y^2\geqq\ 1\}$

(東京農工大 2009)　　(m20090904)

0.217 領域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq\ 1\,,\ x\geqq\ 0\,,\ y\geqq\ 0\}$ における次の二重積分の値を求めなさい．

$$\iint_D \left(\sqrt{x^2+y^2}-x^3\right) dxdy$$

(東京農工大 2010)　　(m20100903)

0.218 領域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq\ y\leqq\dfrac{\pi}{4}\ ,\ 0\leqq\ x\leqq\ \sin y\right\}$ における次の重積分 A および B の値を求めなさい．

$$A=\iint_D \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\, dxdy\ ,\qquad B=\iint_D \sqrt{1-x^2}\, dxdy$$

(東京農工大 2011)　　(m20110903)

0.219 領域 $D=\left\{(x,y)|x^2+y^2\leqq\ x\right\}$ における次の二重積分 I の値を求めなさい．

$$I=\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\, dxdy$$

(東京農工大 2012)　　(m20120902)

0.220 以下の広義積分の値を求めなさい．

$\displaystyle\int_0^\infty \left(xe^{-x}+\frac{1}{1+x^2}\right) dx$

(東京農工大 2013)　　(m20130902)

0.221 以下の広義積分の値を求めなさい．ただし log は自然対数を表す．

$\displaystyle\iint_D (x-y)\log(x+y+1)dxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq\ x-y\leqq\ 1,\ 0\leqq\ x+y\leqq\ 1\right\}$

(東京農工大 2013)　　(m20130903)

0.222 (1) x が正の実数のとき $F(x)=\displaystyle\int_0^\infty (12\,t+1)e^{-xt}dt$ を x の式で表しなさい．

(2) (1) で求めた $F(x)$ について $\displaystyle\int_2^3 F(x)dx$ の値を求めなさい．

(東京農工大 2014)　　(m20140902)

0.223 2 重積分 $\displaystyle\iint_D xydxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq\ x\leqq\ 3,\ \frac{x^2}{9}\leqq\ y\leqq\sqrt{4-x}\right\}$ の値を求めなさい．

(東京農工大 2015)　　(m20150902)

0.224 領域 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqq\ x,\ y\geqq\ 0\}$ における次の 2 重積分 I の値を求めなさい．

$$I=\iint_D x^2y\, dxdy$$

(東京農工大 2016)　　(m20160902)

0.225 領域 $D = \left\{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 \leqq 2\right\}$ 上の 2 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{2-x^2-4y^2}dxdy$ の値を求めなさい．

(東京農工大 2018)　　(m20180902)

0.226 領域 $D = \left\{(x, y) \mid x^2 + 2xy + 5y^2 \leqq 1\right\}$ における，次の 2 重積分 I の値を求めなさい．

$$I = \iint_D (x + y)^2 dxdy$$

(東京農工大 2019)　　(m20190902)

0.227 累次積分 $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3} dx\right) dy$ の値を求めなさい．

(東京農工大 2020)　　(m20200902)

0.228 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)^2}dx$ 　の値を求めなさい．

(東京農工大 2022)　　(m20220902)

0.229 重積分 $\displaystyle\iint_D (x - y)e^{x+y}dxdy,\quad D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leqq x - y \leqq 2,\ 0 \leqq x + y \leqq 3\right\}$ 　の値を求めなさい．

(東京農工大 2022)　　(m20220903)

0.230 原点を中心とし，半径 2 の円周を C とするとき，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{9z^2 + \pi^2}\,dz$$

を計算せよ．

(電気通信大 1994)　　(m19941005)

0.231 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2}\,dx\right) dy$

(2) $\displaystyle\iint_D (x - y)\sin(x + y)\,dx\,dy,\quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leqq x - y \leqq \pi,\ 0 \leqq x + y \leqq \pi\}$

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{x^2 + y^2},\quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4\}$

(電気通信大 1998)　　(m19981002)

0.232 C_r は円 $z = re^{i\theta},\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ を正の向きに一周するものとする．次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z(z - \pi)}dz$　　(2) $\displaystyle\int_{C_4} \frac{1}{z(z - \pi)}dz$

(3) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{\cos z}{z(z - \pi)}dz$　　(4) $\displaystyle\int_{C_4} \frac{\cos z}{z(z - \pi)}dz$

(電気通信大 1998)　　(m19981005)

0.233 次の重積分および 3 重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy,\quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqq 2x\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xy\,dx\,dy,\quad D = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ （ただし，$a > 0,\ b > 0$）

(3) $\displaystyle\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{(1 + x + y + z)^3},\quad V = \{(x, y, z) : x + y + z \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0\}$

(電気通信大 1999)　　(m19991002)

0.234 次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy, \quad D=\{(x,y): y \leqq\ 3x,\ x \leqq\ 3y,\ x+y \leqq\ 4\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad D=\{(x,y): x^2+y^2 \leqq\ 1\}$

(電気通信大 2000)　　(m20001003)

0.235 次の重積分および 3 重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2 d, dy, \quad D=\{(x,y): x^2+y^2 \leqq\ 2x\}$

(2) $\displaystyle\iiint_V (x^2+y^2+z^2) dxdydz, \quad V=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 \leqq\ 1\}$

(電気通信大 2001)　　(m20011004)

0.236 次の問いに答えよ．

(1) $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{1+z^2}$ の特異点をすべて求め，そこでの留数を計算せよ．

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} dx$ の値を求めよ．

(電気通信大 2001)　　(m20011009)

0.237 確率変数 X, Y, U が互いに独立で，各々正規分布 $N(\mu_1, {\sigma_1}^2), N(\mu_2, {\sigma_2}^2), N(\mu_3, {\sigma_3}^2)$ に従うとする．

(1) 任意の定数 a, b, c に対して，$W=aX+bY+cU$ の分布を求めよ．

(2) $V=\left(\dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 \Big/ \left(\dfrac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2$ の分布を求めよ．

(3) $P\left(-3 \leq \dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1} \leq 3\right)$ を求めよ．

ただし，標準正規分布 $N(0,1)$ の分布関数を

$$\Phi(z)=P(Z \leq z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

とおくと，次表の値をとる．

z	0.0	1.0	2.0	3.0
$\Phi(z)$	0.5000	0.8413	0.9772	0.9987

(電気通信大 2001)　　(m20011011)

0.238 次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_3^8 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$

(電気通信大 2005)　　(m20051004)

0.239 次の重積分の値を求めよ．

$\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2} dxdy\ , \qquad D=\{(x,y)\ :\ 1 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 2\ ,\ y \geqq\ |x|\}$

(電気通信大 2005)　　(m20051005)

0.240 次の各複素積分の値を求めよ．

ただし, 積分路は原点を中心として半径 1 の円周上を反時計回りに一周するものとする．

(1) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{z^2} dz$　　(2) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{z(1+2z)} dz$

(電気通信大 2005)　　(m20051006)

0.241 次の実定積分について考える（ただし $a>1$ とする）.

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\cos^2\theta+a-1} \qquad (*)$$

以下の設問 (1)〜(4) に従って答えよ.

(1) $z=e^{2i\theta}$ とおくとき, $\cos 2\theta$ を z を用いて表せ.

(2) 設問 (1) で示した変数変換 $(z=e^{2i\theta})$ によって, 式 $(*)$ の右辺を変数 z による複素積分にせよ. その際, 積分経路はどうなるかを説明せよ.

(3) 設問 (2) で示した複素積分において, 積分経路内での被積分関数の極と位数ならびに留数を求めよ.

(4) 留数定理を用いて, 実定積分 I の値を求めよ.

(電気通信大 2005)　　(m20051007)

0.242 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{4(x-y)}{1+(x+y)^2}dxdy\,,\quad D: y\geqq\ 0,\ x-y\geqq\ 0,\ x+y\leqq\ 1\,.$

(2) $\displaystyle\iiint_E xydxdydz\,,\quad E: x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0,\ x^2+y^2+z^2\leqq\ 1\,.$

(電気通信大 2006)　　(m20061002)

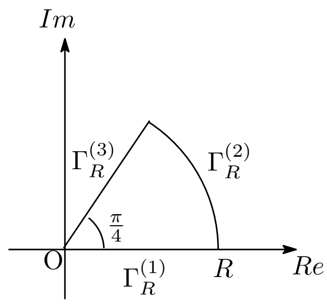
0.243 (1) 関数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z+1}$ の極をすべて求め，それらを複素平面上で図示せよ.

(2) (1) の関数 $f(z)$ について次の積分を計算せよ.

$(a)\quad \displaystyle\int_{|z-i|=\frac{1}{2}} f(z)dz\,. \qquad\qquad (b)\quad \int_{|z-i|=\frac{3}{2}} f(z)dz\,.$

(電気通信大 2006)　　(m20061005)

0.244 右図に示すように，複素平面上にある中心角 $\pi/4$，半径 $R(>0)$ の領域の周囲を反時計回りに 1 周する経路 Γ_R を考える．また，図にあるように経路 Γ_R の各部分を $\Gamma_R^{(1)},\Gamma_R^{(2)},\Gamma_R^{(3)}$, と名付ける.



以下の 3 つの問いに順に答えよ.

(1) 経路 Γ_R では式 ① が成立する.

$$\int_{\Gamma_R} e^{-z^2}dz=0 \qquad ①$$

次式のように $G_R,\ P_R,\ C_R,\ S_R$ を定義するとき，式 ① をこれらを用いて表せ.

$$G_R=\int_0^R e^{-x^2}dx\,, \qquad P_R=\int_{\Gamma_R^{(2)}} e^{-z^2}dz\,,$$

$$C_R=\int_0^R \cos r^2 dr\,, \qquad S_R=\int_0^R \sin r^2 dr\,,$$

(2) P_R について次の不等式 ② が成立することを示すとともに,

$$|P_R|\le\int_0^{\pi/4} e^{-R^2\cos 2\theta}Rd\theta \qquad ②$$

$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}$ では $0\le 1-\dfrac{4}{\pi}\theta\le\cos 2\theta$ となることを使って，$\displaystyle\lim_{R\to\infty}P_R=0$ を示せ.

(3) 小問 (1), (2) で求めた結果を使って，定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^2 dx$ と $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2 dx$ を計算せよ．ただし、$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明なしに用いてよい．

(電気通信大 2006)　　(m20061008)

0.245 複素平面の円 $|z+i| = \sqrt{3}$ を正の向きに 1 周する積分路を C とするとき，次の複素積分の値を求めよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2+1} dz$　　(2) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^4-1} dz$

(電気通信大 2007)　　(m20071005)

0.246 (1) $u = \tan\dfrac{x}{2}$ とおく．$\sin x$, $\cos x$ を u を用いて表せ．

(2) $\displaystyle I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\sin x}\, dx\,, \quad I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\cos x}\, dx$ を求めよ．

(電気通信大 2008)　　(m20081003)

0.247 $f(z) = \dfrac{z^4}{z^6+1}$ について次の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ の極を極形式 $(re^{i\theta})$ の形で表せ．

(2) $z = \alpha$ を $f(z)$ の極とするとき，$f(z)$ の $z = \alpha$ における留数が $\dfrac{1}{6\alpha}$ であることを示せ．

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ を求めよ．

(電気通信大 2008)　　(m20081005)

0.248 複素関数

$$f(z) = \frac{z^3+3}{z-2i}\,, \quad g(z) = \sin\left(f(z)\right)$$

について，以下の問いに答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする．

(1) $f(1)$, $f'(1)$, $g(0)$, $g'(0)$ のそれぞれの値の実部と虚部を求めよ．

(2) 次の積分値を求めよ．

$$\int_C \frac{f(z)}{z^2-1} dz$$

ただし，C は複素平面の原点を中心とし半径 $\dfrac{3}{2}$ の円を正の向きに 1 周する積分路である．

(電気通信大 2009)　　(m20091005)

0.249 次のそれぞれの重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2\, dxdy\,,$　ただし，$D = \{(x,y) \ : \ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\,,\ y \geq 0\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (x+3y)^2\, e^{x-y}\, dxdy\,,$　ただし，$D = \{(x,y) \ : \ |x+3y| \leq 1\,,\ |x-y| \leq 1\}$

(電気通信大 2010)　　(m20101004)

0.250 次の重積分について，以下の問いに答えよ．

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{1+(x+y)^4} \qquad (D : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1)$$

(1) $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ とおくとき，x, y の u, v に関するヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ．

(2) I の値を求めよ.

(電気通信大 2011) (m20111004)

0.251 定積分

$$I=\int_{o}^{2\pi}\frac{1}{5-4\sin\theta}\,d\theta$$

について，以下の問いに答えよ.

(1) $z=e^{i\theta}$ とおくとき，$\sin\theta$ を z で表せ．ただし，i は虚数単位である.

(2) $I=\displaystyle\int_C f(z)dz$ の形に表せ．ここで，積分路 C は円 $|z|=1$ を正の向きに一周するものとする.

(3) I の値を求めよ.

(電気通信大 2011) (m20111005)

0.252 次の重積分，3 重積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x+y)^2e^{2(x-y)}dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\ :\ |x+y|\leqq\ 1,\ |x-y|\leqq\ 1\}$

ただし，e は自然対数の底とする.

(2) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy\ ,\quad D=\big\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\leqq\ 2x,\ y\geqq\ 0\big\}$

(3) $\displaystyle\iiint_V \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz\ ,\quad V=\big\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2\leqq\ 1\big\}$

(電気通信大 2012) (m20121004)

0.253 複素関数 $f(z)=\dfrac{z^2}{z^4+1}$ について以下の問いに答えよ.

(1) $f(z)$ のすべての極を極形式 $\big(re^{i\theta}$の形$\big)$ で表せ.

(2) α を $f(z)$ の極とするとき，$f(z)$ の α における留数が $\dfrac{1}{4\alpha}$ であることを示せ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ を求めよ.

(電気通信大 2012) (m20121005)

0.254 関数 $u(x,y,t)=\dfrac{1}{4\pi t}e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}\quad(t>0)$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ および $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ を計算せよ.

以下では，$t>0$ を定数とする.

(2) $u(x,y,t)$ の $x.y$ に関するマクローリン展開

$$u(x,y,t)=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+\cdots$$

の係数 a_{00}，a_{10}，a_{01}，a_{20}，a_{11}，a_{02} を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\iint_{x^2+y^2\leq R^2}u(x,y,t)\,dxdy$ を計算せよ.

(電気通信大 2013) (m20131003)

0.255 次の重積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x+2y)\sin^2(x-2y)dxdy\quad D=\left\{(x,y)\ :\ 0\leq x+2y\leq\pi\,,\ 0\leq x-2y\leq\frac{\pi}{4}\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \log\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \quad D=\left\{(x,y)\ :\ 1\leq x^2+y^2\leq 4\,,\ 0\leq y\leq x\right\}$

(電気通信大 2013)　　(m20131004)

0.256 複素関数 $f(z)\ \dfrac{z^2}{z^4+z^2+1}$ について以下の問いに答えよ.

(1) $z^6=1$ を満たす複素数 z をすべて求めよ.

(2) 上半平面 $\mathbb{H}=\{x+iy\ :\ x,y\in\mathbb{R},\ y>0\}$ 上にある $f(z)$ の各特異点 α に対して，その留数 $\mathrm{Res}(\alpha)$ を求めよ．ただし，$i=\sqrt{-1}$ とする.

(3) 定積分 $I=\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ の値を求めよ.

(電気通信大 2013)　　(m20131005)

0.257 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy\,,\qquad D=\{(x,y):x^2+y^2\leqq\ y\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (x-y)^2\cos^2(x+y)\,dxdy\,,\qquad D=\{(x,y):|x|+|y|\leqq\pi\}$

(電気通信大 2014)　　(m20141004)

0.258 複素関数 $f(z)=\dfrac{8}{2z^4+1-\sqrt{3}i}$ に対して，　以下の問いに答えよ.

(1) $f(z)$ の特異点をすべて求めよ.

(2) $f(z)$ の各特異点 α に対して，その留数 $\mathrm{Res}(\alpha)$ を求めよ.

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_{|z-1|=\frac{2}{3}} f(z)dz$ を求めよ．ただし，積分路は正の向きに一周するものとする.

(電気通信大 2014)　　(m20141005)

0.259 次の重積分，3 重積分の値を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする.

(1) $\displaystyle\iint_D e^{(x+y)^2}dxdy\,,\qquad D=\{(x,y):0\leqq\ x-y\leqq\ x+y\leqq\ 1\}$

(2) $\displaystyle\iiint_V xy\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz\,,\qquad v=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leqq\ 1,\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0\}$

(電気通信大 2015)　　(m20151004)

0.260 以下の問いの答えよ．ただし，$i=\sqrt{-1}$ とする.

(1) $z=e^{i\theta}$ とおくとき，$\sin\theta$ を z の式で表せ.

(2) 複素関数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4iz-1}$ の極をすべて求め，各極における留数を計算せよ.

(3) 定積分 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\sin\theta}$ の値を求めよ.

(電気通信大 2015)　　(m20151005)

0.261 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{x-y}{(x^2-y^2)^2+1}dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\ :\ 0\leqq\ x+y\leqq\ 1,\ 0\leqq\ x-y\leqq\ 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xdxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\ :\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0,\ x\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 1\}$

(電気通信大 2016)　　(m20161004)

0.262 複素関数 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ に対して，以下の各問いに答えよ．ただし，$i=\sqrt{-1}$ で， e は自然対数の底とする．

(1) $f(z)$ のすべての極を求め，各極における留数を求めよ．

(2) $z=Re^{i\theta}$ $(R>1,\ 0\leqq\theta\leqq\pi)$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$|f(z)|\leqq\frac{1}{R^2-1}$$

(3) 広義積分 $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx$ を求めよ．

(電気通信大 2016)　　(m20161005)

0.263 (1) 積分順序を交換することにより，次の累次積分の値を求めよ．

$$\int_0^{\pi}dx\int_x^{\pi}\frac{x\sin y}{y}dy$$

(2) 次の 3 重積分の値を求めよ．

$$\iiint_V x^2dxdydz\ ,\qquad V=\Big\{(x,y,z)\,:\,y\leqq x,\ x\geqq0,\ y\geqq0,\ z\geqq0,\ x^2+y^2+x^2\leqq1\Big\}$$

(電気通信大 2017)　　(m20171004)

0.264 以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位を表す．

(1) 複素数平面において $|z|=1$ 上を正の向きに 1 から i に至る曲線を C_1 とし，i から 1 に至る積分を C_2 とする，このとき，次の複素積分 $I_1,\ I_2$ の値を求めよ．

$$I_1=\int_{C_1}\frac{dz}{z^2}\ ,\qquad I_2=\int_{C_2}\frac{dz}{z^2}$$

(2) 複素関数 $f(z)=\dfrac{1}{z^3-1}$ に対して，次の複素積分 I の値を求めよ．

$$I=\int_{|z-1|=1}f(z)dz\qquad \text{（積分路は正の向きに 1 周）}$$

(3) 複素関数 $g(z)=\dfrac{1}{z(1-\cos z)}$ の極 $z=0$ における位数と留数を求めよ．

(電気通信大 2017)　　(m20171005)

0.265 次の重積分，3 重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D\frac{x+y}{1+(x-y)^2}dxdy\quad D=\{(x,y)\ :\ x\geqq0,\ y\geqq0,\ x+y\leqq1\}$

(2) $\displaystyle\iiint_E xyzdxdydz,\quad E=\Big\{(x,y,z)\ :\ y\geqq x\geqq0,\ z\geqq0,\ x^2+y^2+z^2\leqq1\Big\}$

(電気通信大 2018)　　(m20181004)

0.266 複素関数 $f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ のすべての極を求めよ．

(2) $f(z)$ の極 $z=\alpha$ における留数 $\mathrm{Res}(\alpha)$ を α を用いた簡単な式で表せ．

(3) 広義積分 $I=\displaystyle\int_0^{\infty}f(x)dx$ の値を求めよ．

(電気通信大 2018)　　(m20181005)

0.267　C^1 級関数 $f(r)$ に対して，次の合成関数

$$u(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2}) \qquad (r = \sqrt{x^2+y^2})$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) xyz 空間内の曲面 $S : z = u(x,y)$ を考える． このとき，S 上の点 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ f(1))$ における S の接平面と z 軸との交点の z 座標 z_0 を $f(1),\ f'(1)$ を用いて表せ．ただし，α は定数とする．

(2) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ が r の関数として表されることを示せ．

(3) $f(r) = r^2 e^{-r^2}$ のとき，次の重積分 I の値を求めよ．

$$I = \iint_D u(x,y)\,dxdy\ , \qquad D = \left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 1\right\}$$

(電気通信大 2019)　　(m20191003)

0.268　$0 < a < 1$ を満たす実数 a に対して，以下の問いに答えよ．

(1) 次の複素関数 $f(z)$ の特異点をすべて求め，$f(z)$ の各特異点における留数を求めよ．
ただし，i は虚数単位とする．　　$f(z) = \dfrac{1}{az^2 - i(a^2+1)z - a}$

(2) 次の定積分 $I(a)$ を求めよ．　　$I(a) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 - 2a\sin\theta + 1}$

(電気通信大 2019)　　(m20191005)

0.269　次の重積分の値をそれぞれ計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy\ ,\quad D = \left\{(x,y) : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ \sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \sin(x^2)\,dxdy\ ,\quad D = \left\{(x,y) : 0 \leqq y \leqq x \leqq \sqrt{\pi}\right\}$

(電気通信大 2020)　　(m20201004)

0.270　(1) $z^4 + 1 = 0$ となる複素数 z を求めよ．

(2) $x = \sqrt{\tan\theta}\ \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して，導関数 $\dfrac{dx}{d\theta}$ を x の式で表せ．

(3) 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta}\,d\theta$ を求めよ．

(電気通信大 2020)　　(m20201005)

0.271　次の積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy\ ,\qquad D = \left\{(x,y)\ :\ 0 \leqq x \leqq y,\ x^2+y^2 \leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xy\ \sin(xy)\,dxdy\ ,\qquad D = \left\{(x,y)\ :\ 1 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2},\ x|y| \leqq \frac{\pi}{2}\right\}$

(電気通信大 2021)　　(m20211004)

0.272　(1) $z = e^{i\theta}$ とおくとき，$\cos\theta$ を z の有理式で表せ．ただし，i は虚数単位で，e は自然対数の底とする．

(2) 複素関数 $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+4z+1)^2}$ の極をすべて求めよ．更に，絶対値が 1 より小さい極における留数を計算せよ．

(3) 定積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2}$ の値を求めよ.

(電気通信大 2021) (m20211006)

0.273 xy 平面上の曲線 C : $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t\cos t \end{cases}$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ について考える. C 上で y は x の関数となるが, これを $y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ と表す. このとき以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ $(0 < x < 1)$ を t の関数として表せ.

(2) $f(x)$ の $x = \dfrac{1}{2}$ におけるテイラー展開

$$f(x) = a_0 + a_1\left(x - \frac{1}{2}\right) + a_2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \cdots$$

の係数 a_0, a_1, a_2 を求めよ.

(3) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分を D とするとき, 重積分 $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ の値を求めよ.

(電気通信大 2022) (m20221003)

0.274 次の重積分の値を求めよ.

(1) $I_1 = \displaystyle\iint_{D_1} e^y\,dxdy$, $\quad D_1 = \left\{(x, y) \ : \ 0 \leqq x + y \leqq 1,\ 0 \leqq x - y \leqq 1\right\}$

(2) $I_2 = \displaystyle\iint_{D_2} x\sqrt{x}\,dxdy$, $\quad D_2 = \left\{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leqq x\right\}$

(3) $I_3 = \displaystyle\iiint_V y\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$, $\quad V = \left\{(x, y, z) \ : \ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1\right\}$

(電気通信大 2022) (m20221004)

0.275 複素関数 $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2(z - i)}$ に対して, 以下の問いに答えよ. ただし, i は虚数単位を表す.

(1) $\sin i$ の実部と虚部を求めよ.

(2) $f(z)$ のすべての極とそれぞれの極の位数を求めよ.

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_{|z|=2} f(z)\,dz$ (積分路は正の向きに 1 周) の値を求めよ.

(電気通信大 2022) (m20221005)

0.276 次の積分を求めよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int x(\log x)^3 dx$

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + 1}$

(横浜国立大 2000) (m20001101)

0.277 (1) 1 階常微分方程式の一般形は以下のように与えられる.

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad ①$$

この式の解の公式を導く. 以下の記述の空欄を埋めなさい.

まず, 同次 (斉次) 方程式の解を求める. ① の同次方程式は以下のように表される.

$$y' + P(x)y = \boxed{\quad (ア) \quad}$$

この同次方程式は，変数分離形であるので，解は，任意の定数を C として，以下のように求められる．

$$y = C \cdot \boxed{\quad (イ) \quad} \qquad (\cdot \text{ は積を意味する.})$$

この結果を用いて，① の解を定数変化法で求める．従って，① の解を

$$y = C(x) \cdot \boxed{\quad (イ) \quad} \qquad ②$$

とおく．これを ① の左辺に代入して整理すると

$$y' + P(x)y = C' \cdot \boxed{\quad (イ) \quad} = Q(x)$$

すなわち，

$$C' = Q(x) \cdot \boxed{\quad (ウ) \quad}$$

両辺を積分して $C(x)$ を求め，② に代入すると，① の解の公式が以下のように求められる．

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

(2) (1) を参考にして，微分方程式を解く方法のひとつである，“定数変化法”について説明しなさい．

(3) 次の微分方程式を (1) の公式を用いて解きなさい．

$$y' - y = e^x$$

(横浜国立大 2008)　　(m20081103)

0.278 (1) m, n を整数とするとき，以下の式が成り立つことを示せなさい．

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

(2) 次の周期関数について解答しなさい．

$$f(x) = \begin{cases} -k & (-\pi < x < 0) \\ k & (0 < x < \pi) \end{cases} \quad , \quad f(x + 2\pi) = f(x) \qquad k > 0$$

この関数を以下のように無限級数で表すとき，その係数 a_0，a_n，b_n を求めなさい．さらに，求められる無限級数を $n = 7$ の項まで示しなさい．

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

(横浜国立大 2008)　　(m20081105)

0.279 次の定積分を計算しなさい．

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 2x dx$$

(横浜国立大 2016)　　(m20161106)

0.280 次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}}dx \ (\text{但し，} A \neq 0\ )$$

(千葉大 1995)　　(m19951202)

0.281 $D = \{(x, y)|\ x + y \leqq 1\ ,\ \ x, y \geqq 0\}$ とするとき，次の 2 重積分 I を求めよ．

$$I = \iint_D (2x + 3y^2)dxdy$$

(千葉大 1996)　　(m19961202)

0.282 複素数 α に対する複素関数 $f(\alpha)$ を次のように定義する．

$$f(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{z-\alpha}dz$$

ただし，C は複素平面上の単位円：$|z|=1$ である．このとき，$f(2)$ と $f(0.5+0.5i)$ を求めよ．

(千葉大 1997）　(m19971204)

0.283 次の積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

(千葉大 1998）　(m19981202)

0.284 次の二重積分を求めよ．

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\,dx\,dy$$

ここで，$D=\{(x,y):\ 1\le x^2+y^2\le 4\}$

(千葉大 1999）　(m19991202)

0.285 ３次元空間中に球 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ と円柱 $x^2+y^2=2ax$ がある．球が円柱によって切り取られる立体の体積 V を以下の設問に答えることによって求めなさい．

(1) V が次のような重積分になることを図を書いて示しなさい．

$$V=2\iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy\ ,\ D=\{(x,y)\,|\,(x-a)^2+y^2\le a^2\}$$

(2) x-y 座標系の原点を中心とする極座標 (r,θ) を用いると，領域 D が次のように表されることを示しなさい．

$$D=\left\{(r,\theta)\ \middle|\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\le r\le 2a\cos\theta\right\}$$

(3) 設問 (1) の重積分を極座標に変換して体積 V を求めなさい．

(千葉大 2001)　(m20011201)

0.286 x を変数とする関数を $f(x)$ とする．複素単位を $i=\sqrt{-1}$ として，

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\omega x}dx$$

によって決まる ω の関数 $F(\omega)$ を関数 $f(x)$ のフーリエ変換という． $F(\omega)$ から逆に $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,e^{i\omega x}d\omega$$

によって求めることができる．この逆を逆フーリエ変換という．

関数 $F(\omega)$ を ω で微分することを考える．

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\omega x}dx$$

より微分と積分を入れ換えると，

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\omega}\big(f(x)\,e^{-i\omega x}\big)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\big(-ixf(x)\,e^{-i\omega x}\big)dx$$

となり，関数 $(-ix)f(x)$ のフーリエ変換が $\dfrac{d}{d\omega}F(\omega)$ であることがわかる．このことを利用して以下の設問に答えなさい．ただし，ここで扱う全ての関数は微分と積分の順序を交換できる性質を満たしていることを仮定する．

(1) ω に関する $F(\omega)$ の決める関数 $\dfrac{d^2}{d\omega^2}F(\omega)$ が関数 $(-x^2)f(x)$ のフーリエ変換であることを示しなさい．

(2) 逆フーリエ変換が $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ になる関数を $F(\omega)$ によって表しなさい．

(3) 微分方程式

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}-x^2f(x)=-(2n+1)f(x)\ ,\ \lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0 \qquad (*)$$

の解 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が満たす微分方程式を導きなさい．ただし， n は零以上の整数である．

(4) 設問 (3) の結果から，式 $(*)$ の微分方程式の解のフーリエ変換に関する性質を５０字程度で述べなさい．

(千葉大 2001) (m20011204)

0.287 a をパラメータとして，次の定積分を求めなさい． $I(a)=\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$

ここで，$D=\{(x,y):0\le x\le 1\,,\ 0\le y\le 1\,,\ 0\le x+y\le a\}$

(千葉大 2002) (m20021202)

0.288 x を変数とする関数を $f(x)$ とする．複素単位を $i=\sqrt{-1}$ として，

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$$

によって決まる ω の関数 $F(\omega)$ を関数 $f(x)$ のフーリェ変換という．$F(\omega)$ から逆に $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

によって求めることができる．この変換を逆フーリェ変換という．

関数 $F(\omega)$ を ω で微分することを考える．

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$$

より微分と積分とを入れ換えると，

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\omega}\Big(f(x)e^{-i\omega x}\Big)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\Big(-ixf(x)e^{-i\omega x}\Big)dx$$

となり，関数 $(-ix)f(x)$ のフーリェ変換が $\dfrac{d}{d\omega}F(\omega)$ であることがわかる．このことを利用して以下の設問に答えなさい．ただし，ここで扱う全ての関数は微分と積分との順序を交換できる性質を満たしていることを仮定する．

(1) ω に関する $F(\omega)$ の決める関数 $\dfrac{d^2}{d\omega^2}F(\omega)$ が関数 $(-x^2)f(x)$ のフーリェ変換であることを示しなさい．

(2) 逆フーリェ変換が $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ になる関数を $F(\omega)$ によって表しなさい．

(3) 微分方程式

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}-x^2f(x)=-(2n+1)f(x)\ ,\quad \lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0 \qquad (*)$$

の解 $f(x)$ のフーリェ変換 $F(\omega)$ が満たす微分方程式を導きなさい．ただし，n は零以上の整数である．

(4) 設問 (3) の結果から，式 $(*)$ の微分方程式の解のフーリェ変換に関する性質を 50 字程度で述べなさい．

(千葉大 2002)　　(m20021205)

0.289 次の 2 重積分を求めなさい．ただし，$a>0$，$b>0$ とする．

$$V=\iint_D \frac{a}{(a^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy \qquad \text{ただし，} D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq b^2\}$$

(千葉大 2003)　　(m20031203)

0.290 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$D=\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\leq a^2\}$ として, 次の 2 重積分の値を求めなさい.

$$I=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

(千葉大 2005)　　(m20051203)

0.291 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int(x^2+3)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

(千葉大 2005)　　(m20051206)

0.292 重積分に関する以下の問いに答えなさい.

(1) 領域 $D=\{(x,y,z)\mid x,y,z\geq 0\,,\ x+y+z\leq \pi/2\}$ を図示しなさい.

(2) 次の不定積分を求めなさい．ただし，a は定数である.

$\displaystyle\int x\sin(a+x)dx$

(3) D を積分領域として，次の 3 重積分の値を求めなさい.

$\displaystyle\iiint_D z\sin(x+y+z)dxdydz$

(千葉大 2007)　　(m20071208)

0.293 三次元空間中に，球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ と円柱面 $x^2+y^2=2ax$ がある．球面に囲まれる領域が円柱により切り取られる立体の上半分 $(z\geq 0)$ の体積 V を求めたい.

(1) V が次のような重積分になることを図で示しなさい.

$$V=\iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy\,,\quad D=\{(x,y)\mid (x-a)^2+y^2\leq a^2\}$$

(2) 極座標を用いると，領域 D は次のように表されることを示しなさい.

$$D=\left\{(r,\theta)\mid -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\,,\ 0\leq r\leq 2a\cos\theta\right\}$$

(3) 極座標に変換して体積 V を求めなさい.

(千葉大 2008)　　(m20081203)

0.294 実数値関数 $f(x)$ は $-\infty<x<\infty$ で連続であり，次の関数方程式を満たすとする.

$$f(x)=1+\int_0^x (t-x)f(t)dt$$

(1) $f(0)$，$f'(0)$ を求めなさい．また $f(x)$ の満たす微分方程式を求めなさい.

(2) $f(x)$ の満たす微分方程式を解きなさい.

(千葉大 2008)　　(m20081204)

0.295 $a > 0$ として，次の重積分に関して各問いに答えなさい．

$$I(a) = \iint_D e^{-(x+y)} dxdy$$

$$D = \{(x, y) \mid x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ x + y \leq a\}$$

(1) 領域 D を図示しなさい．

(2) 重積分 $I(a)$ を求めなさい．

(3) $I(a)$ を a の関数と考え，定義域 $0 < a < +\infty$ に対して，極値，変曲点，極限を考慮して，そのグラフを書きなさい．

(千葉大 2009)　　(m20091203)

0.296 下記の重積分について以下の問いに答えなさい．

$I = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy \qquad D = \left\{(x, y) \ \middle|\ \left(x^2 + y^2\right)^2 \leq y^2 - x^2\,,\ y \geq 0\right\}$

(1) 極座標に変換して D を図示しなさい．

(2) I で示される積分領域の立体の外形を図示しなさい．

(3) I を極座標で書きなさい．

(4) I を求めなさい．

(千葉大 2012)　　(m20121204)

0.297 三次元空間中に，球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ と円柱面 $x^2 + y^2 = ax$ がある．ただし，$a > 0$．球面に囲まれる領域が円柱により切り取られる立体の上半分 $z \geq 0$ の体積 V を求めたい．

(1) V が次のような重積分になることを図で示しなさい．
$v = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy\,, \qquad D = \left\{(x, y) \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq ax\right\}$

(2) 極座標を用いると，領域 D が次のように表されることを示しなさい．
$D = \left\{(r, \theta) \,\middle|\, -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\,,\ 0 \leq r \leq a\cos\theta\right\}$

(3) 極座標に変換して体積 V を求めなさい．

(千葉大 2013)　　(m20131203)

0.298 三次元空間の中にデカルト直交座標系 $O - XYZ$ 座標系が定義されている．

$y = 0$ 平面（$z - x$ 平面）上の点 $A = (x_0, 0, z_0)$ を始点とし，一定方向で $y = 0$ 平面から遠ざかる点 B がある．線分 AB の長さは λ で，線分 AB の方向ベクトルは，球座標系にならって，水平角（緯度）θ，方位角（経度）φ とする．ただし，$-90^\circ < \theta < 90^\circ$，$0^\circ < \varphi < 180^\circ$．点 B の座標は，$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ から，

$$B = (\lambda\cos\theta\cos\varphi + x_0\,,\ \lambda\cos\theta\sin\varphi\,,\ \lambda\sin\theta + z_0)$$

で与えられる．定点 E を $E = (0, -a, h)$, $a > 0$ として，点 E と点 B を結ぶ直線が $y = 0$ 平面（$z - x$ 平面）と交わる点を P とする．$\lambda \to \infty$ の時の P の座標を求めなさい．

（ヒント ： $\lambda \to \infty$ の時の点 P を透視画法では消点 (Vanishing Point) と呼んでいる）

(千葉大 2015)　　(m20151205)

0.299 次の重積分に関して以下の問に答えなさい．

$I = \iint_D \dfrac{x + y}{y^2} \sin(x + y)\, dxdy$

$D = \left\{(x, y) \ \middle|\ 1 \leq y \leq 2\,,\ 0 \leq x \leq y\right\}$

(1) 積分領域 D を $u=x+y,\ v=\dfrac{x}{y}$ の関係で (u,v) へ変数変換した場合の D に対応する積分領域を D' とする．$O-xy$ 平面での D，および，$O-uv$ 平面での D' を図示しなさい．

(2) 関数行列式（ヤコビアン）$J(x,y)=\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}$ を求めなさい．

(3) 重積分 I の値を求めなさい．

(千葉大 2016)　　(m20161203)

0.300 実数 $t\geq 0$，実数 $a>0$ について定義された関数 $f(t)=\sinh at$ に対して，以下の式で定義される関数 $F(s)$ を求めなさい．

$$F(s)=\int_o^\infty f(t)\exp(-st)\,dt$$

(千葉大 2016)　　(m20161206)

0.301 実数直線 $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(t)$ が以下のように定義されているとする．

$$f(t)=\begin{cases} t^2, & 0\leq t\leq 1,\\ 1, & 1\leq t\leq 5,\\ (t-6)^2, & 5\leq t\leq 6.\end{cases}$$

以下の問に答えよ．

(1) 区間 $[0,6]$ 上の f のグラフを描け．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^6 f(t)dt$ を求めよ．

(3) $F(t)=\displaystyle\int_0^t f(s)ds$ とおくとき，すべての t に対して $F(t)$ を求め，区間 $[0,6]$ 上の F のグラフを描け．

(4) 区間 $(0,6)$ 内の t に対して一階の導関数 $F'(t)$ を求めよ．

(5) 関数 $F_1(t)$ と $F_2(t)$ を以下のように定義する．

$$F_1(t)=\int_2^t f(s)ds\ ,\ F_2(t)=\int_3^t f(s)ds\ .$$

このとき，$F_1(t)-F_2(t)$ を求めよ．

(筑波大 2000)　　(m20001301)

0.302 (1) 次の積分の値を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

$$\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \exp\{-a(x^2+y^2\}dxdy$$

(2) 関数 $f(a)$ を $f(a)=\displaystyle\int_0^\infty \exp(-ax^2)dx$ と定義する．$f(a)$ を微分することにより，次の積分の値を求めよ．ただし，n は正の整数とする．

$$\int_0^\infty x^2\exp(-x^2)dx \qquad\qquad \int_0^\infty x^{2n}\exp(-x^2)dx$$

(筑波大 2001)　　(m20011306)

0.303 定積分　$I(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_0^\infty \exp(-\alpha x)\frac{\sin\beta x}{x}dx\quad(\alpha\geq 0\,,\ \beta\neq 0)$

をパラメータ β について微分することにより　$\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin\beta x}{x}dx=\mathrm{sign}(\beta)\frac{\pi}{2}$　を導け．

ここで，$\mathrm{sign}(\beta)$ は β の符号 $(\pm)$(β が正値の場合は $+$，負値の場合は $-$) を意味する．

(筑波大 2003)　　(m20031303)

0.304 次の定積分を行え.
$$\int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$$
(筑波大 2003) (m20031306)

0.305 不定積分 $\int x^2 e^{-x} dx$ を計算しなさい.

(筑波大 2003) (m20031307)

0.306 $\sin x$ のマクローリン多項式を利用して $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ を計算したい. 誤差を 0.002 以下にするには，何次のマクローリン多項式を利用すればよいか示せ.

(筑波大 2003) (m20031308)

0.307 以下の設問 (1),(2) に答えなさい.

(1) $|x|<1$ のとき，$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x$ を証明しなさい．また，これを用いて $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ を計算しなさい.

(2) 次の不等式が成立することを証明しなさい．ただし，$n>2$ とする.
$$\frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} < \frac{\pi}{6}$$
(筑波大 2004) (m20041307)

0.308 (1) 不定積分 $\int xe^{-x}dx$ を計算しなさい.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$ を計算しなさい.

(筑波大 2004) (m20041310)

0.309 xy 平面上に 2 本の曲線 $y=x^2-1$ と $y=-(x-k)^2+(k+1)$ が与えられているとする.

(1) これらが 2 点で交わるような k の値の範囲を求めよ.

(2) k が上で求めた範囲の値のとき, 2 曲線で囲まれた図形の面積が最大となるような k の値, および面積の最大値を求めよ. ただし, $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を公式として用いてよい.

(筑波大 2004) (m20041311)

0.310 (1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を導け.

(2) $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-ax^2}dx \quad (a>0,\ n$ は自然数) を求めよ.

(筑波大 2004) (m20041314)

0.311 $g(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ なる関数を考える. ただし, $\ln x$ は x の自然対数を表す.

(1) $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ 及び $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ を求めよ. また, 点 $(2,1)$ における $g(x,y)$ の勾配の大きさを求めよ.

(2) $\displaystyle\iint_D g(x,y)dxdy$ を求めよ. ただし，$D: x^2+y^2 \leq 1$ とする.

(筑波大 2004) (m20041315)

0.312 $f(x)$ を $x \geq 0$ で定義された連続な単調増加関数とする. 以下の設問に答えよ.

(1) 任意の正整数 n に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ.
$$\int_0^n f(x)dx \leq \sum_{i=1}^n f(i) \leq \int_0^n f(x+1)dx$$

(2) 実数 s に対して, 数列 $\{a_n\}$ を

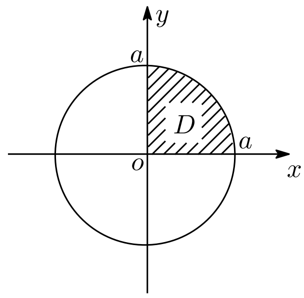
$$a_n = \frac{1}{n^s}\sum_{i=1}^{n} f(i)\,, \quad n = 1, 2, \cdots$$

と定義する. $f(x) = x^\alpha$（$\alpha > 0$ は定数）のとき, 数列 $\{a_n\}$ が収束する s の範囲を定めよ.

(筑波大 2005)　　(m20051309)

0.313 (1) 積分 $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ.
ただし, 積分領域 D は
$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq a^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ $(a > 0)$ とする.

(2) (1) の結果を利用し, 領域 $D_\infty = \{(x, y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ における
広義積分 $\displaystyle\iint_{D_\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ.



(筑波大 2005)　　(m20051311)

0.314 $f(x) = e^{-x}\sin x$ について以下の問いに答えなさい.

(1) $f'(x)$ を求め，$0 \le x \le 2\pi$ の範囲で $f'(x) = 0$ となる点をすべて挙げなさい.

(2) $y = f(x)$ の概略図をグラフで示しなさい.　(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を求めなさい.

(筑波大 2006)　　(m20061301)

0.315 積分 $\displaystyle\iint_D (4 - x - y)dxdy\,, \quad D = \{(x, y) \mid x + y \le 2,\ 0 \le x \le 1,\ y \ge 0\}$ の値を計算せよ.

(筑波大 2006)　　(m20061306)

0.316 2 次元 $x - y$ 直交平面上で原点を中心とする半径 a の円の第一象限内にある部分を D とする．このとき，次の二重積分を求めよ. $\displaystyle\iint_D xydxdy$

(筑波大 2006)　　(m20061310)

0.317 (1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x dx$ を求めなさい.

(2) $\displaystyle I(a) = \int_{-\pi}^{\pi}(x - a\sin x + 1)^2 dx$ を最小にするような a の値を求めなさい.

(筑波大 2006)　　(m20061323)

0.318 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ を求めよ.　(2) $\dfrac{\cos x}{x}$ の導関数を求めよ.

(3) 上記 (2) および $|\cos x| \le 1$ を利用し，不等式 $\displaystyle\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sin x}{x}dx\right| \le \frac{2}{x_1}$ が成り立つことを示せ.
ただし，$0 < x_1 < x_2$ とする.

(筑波大 2007)　　(m20071301)

0.319 (1) $g(x)$ が n 回微分可能であるとき
$\displaystyle\left(\frac{d}{dx}\right)^n (xg(x)) = xg^{(n)}(x) + ng^{(n-1)}(x)$ となることを示せ.

(2) $\boldsymbol{R}$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して
$\displaystyle u_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x - y)^{n-1}f(y)dy$ とおけば
$\displaystyle\left(\frac{d}{dx}\right)^n u_n(x) = f(x)\,, \quad n = 1, 2, \cdots$ をみたすことを示せ.

(筑波大 2007)　　(m20071308)

0.320 a, b を $a^2+b^2=1$ をみたす実数の定数とし，D を $D=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ で定めるとき，

積分 $\displaystyle\iint_D \frac{(ax+by)^2}{\sqrt{1-(ax+by)^2}}dxdy$ を求めよ．

必要なら次の変数変換を用いてよい． $\left\{\begin{array}{l} u = \ \ ax+by \\ v = -bx+ay \end{array}\right.$

(筑波大 2007) (m20071309)

0.321 (1) 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続であるとする．このとき， $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$ が成立する点 $x=c$ が区間 (a,b) に少なくとも一つは存在することを証明せよ．

(2) 関数 $f(x)$，$g(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続であるとする．このとき，閉区間 $[a,b]$ で $g(x)>0$ であるならば， $\displaystyle\frac{1}{\int_a^b g(x)dx}\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)$
が成立する点 $x=c$ が区間 (a,b) に少なくとも一つは存在することを証明せよ．

(筑波大 2007) (m20071311)

0.322 (1) 原点に中心をもつ楕円 $x^2-xy+y^2=1$ の，長軸および短軸の長さをそれぞれ求めよ．また，この楕円の概形を，主軸の方向がわかるように描け．

(2) 楕円 $x^2-xy+y^2=1$ の長軸を x 軸に一致させる回転（ただし，回転角は $-\dfrac{\pi}{2}$ より大きく $\dfrac{\pi}{2}$ より小さいとする）による変換 g と，y 軸方向の拡大による変換 f を合成した変換 $f\circ g$ により，元の楕円は円に変換される．行列 A を用いて $f\circ g$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すとき, A 及びその逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) 次の積分を求めよ． $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2-xy+y^2)}dxdy \quad \{(x,y) \mid -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty\}$

(筑波大 2007) (m20071312)

0.323 積分 $\displaystyle\iiint_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz$ を求めよ．ただし，積分領域 D は $D=\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ とする．

(筑波大 2007) (m20071316)

0.324 定積分 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$ の値を，以下の 2 通りの方法で計算せよ．

(1) (a) $I = 2\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$ を示せ．

(b) 積分変数を $x=\tan\dfrac{\theta}{2}$ に置換せよ $\left(\text{ヒント：}\cos\theta = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}\text{である}\right)$.

(c) 積分を実行して I を求めよ．

(2) (a) 複素数 $z=e^{i\theta}$ とおいたとき，$z+\dfrac{1}{z}$ を計算せよ．

(b) その結果を基に I を z に関する複素積分に変換せよ．

(c) 留数定理を用いて I を求めよ．

(筑波大 2008) (m20081311)

0.325 (1) $t=\sqrt{y^2-x^2}$ と置換することにより，次の積分を計算せよ．ただし，$x>0$ とする．

$$\int_x^{\infty}\frac{y}{1+y^2}\frac{dy}{\sqrt{y^2-x^2}}$$

(2) 次の累次積分を計算せよ． $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^\infty \frac{y}{1+y^2}\frac{dy}{\sqrt{y^2-x^2}}$

(筑波大 2008)　　(m20081316)

0.326 (1) 極座標変換により，次の積分を計算せよ． $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

(2) 上の結果を用いて，次の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

(筑波大 2008)　　(m20081317)

0.327 積分 $\displaystyle\iiint_D dxdydz \ \ln\left(\alpha\sqrt{x^2+4y^2+9z^2}\right)$ を求めよ．

ただし，α は正の定数であり，$\ln x$ は x の自然対数を表している．

さらに積分領域 D は，$D = \{(x,y,z) \mid 1 < x^2+4y^2+9z^2 < 4\}$ とする．

(筑波大 2008)　　(m20081321)

0.328 $\displaystyle\int_{-1}^1 (1-x^{2n})dx$（$n$ は 0 以上の整数）の値を n を使って表せ．

(筑波大 2008)　　(m20081331)

0.329 実変数 x の関数 $f_n(x) = x^n \log x$ （n は自然数）について，以下の問いに答えよ，

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f_n(x)$ （$f_n(x)$ の $x=0$ における右側極限値）を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ を求めよ．

(3) $f_n(x)$ の第 $n+1$ 階導関数を求めよ．

(筑波大 2009)　　(m20091306)

0.330 領域 $D = \left\{(x,y) \ \middle|\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$ 上での重積分 $I = \displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ を以下の設問に従って求めよ．ただし，$a > 0,\ b > 0$ とする．

(1) $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ により変数変換を行う．積分領域 D を変数 $r,\ \theta$ で表せ．

(2) 前問 (1) の変数変換を行ったときのヤコビアンを求めよ．

(3) 以上の結果を用い重積分 I を求めよ．

(筑波大 2009)　　(m20091309)

0.331 整数 $n \geqq 0$ に対して定義された不定積分を $I_n = \displaystyle\int \cos^n x\,dx$ とするとき，以下の漸化式を証明しなさい．

$$I_n = \frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n} + \frac{n-1}{n}I_{n-2} \quad (n \geqq 2)$$

(筑波大 2009)　　(m20091316)

0.332 連続な導関数をもつ関数 $f(x)$ は, $x \ge 1$ において次の 3 条件を満たすとする．

(a) $f(x) > 0$

(b) $f(x+1) = xf(x)$

(c) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ は単調増加する. ただし, $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする．

このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 積分 $\displaystyle\int_1^x \log t\,dt$ を求めよ.

(2) $\log t = \displaystyle\int_t^{t+1} \frac{f'(u)}{f(u)}\,du \quad (t \geq 1)$ が成り立つことを示せ.

(3) 不等式

$$\log \frac{f(x+1)}{f(2)} \geq x\log x - x + 1 \quad (x \geq 1)$$

が成り立つことを示せ.

(筑波大 2010)　　(m20101303)

0.333 $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y \geq 0\}$ と定めるとき, 積分

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$$

を求めよ.

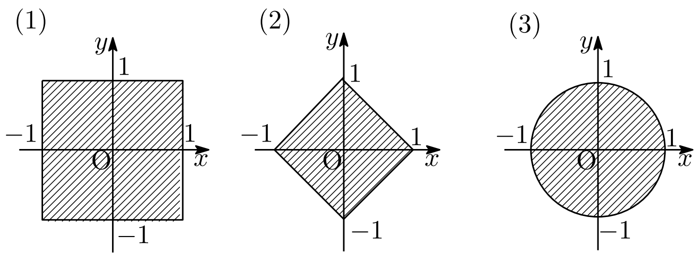
(筑波大 2010)　　(m20101304)

0.334 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)^2\,dxdy$ の値を, 積分範囲 D が次の 3 つの場合について, それぞれ計算せよ（図を参照）.

(1) $(1, 1),\ (-1, 1),\ (-1, -1),\ (1, -1)$ を頂点とする正方形の内部

(2) $(1, 0),\ (0, 1),\ (-1, 0),\ (0, -1)$ を頂点とする正方形の内部

(3) 原点を中心とする単位円の内部

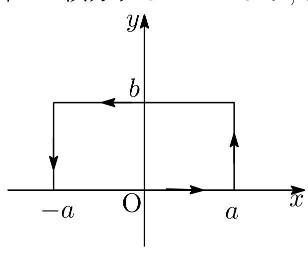


(筑波大 2010)　　(m20101306)

0.335 (1) 次の式が成り立つことを示せ.　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

(2) 複素関数 $f(z) = e^{-z^2}$ を下図の四角形に沿って積分することにより, 次の定積分の値を求めよ. ただし, $a > 0,\ b > 0,\ i = \sqrt{-1}$ である.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ibx-x^2}\,dx$$



(筑波大 2010)　　(m20101312)

0.336 $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ を求めなさい.

(筑波大 2010)　　(m20101314)

0.337 実数 R を係数とする変数 x に関する高々2 次の多項式の全体を V と表わす.

即ち, $V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \,|\, a_0,\ a_1,\ a_2 \in R\}$. 但し, $a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0$ は, $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ のとき, そして, そのときに限り成立すると仮定する. 以下の問いに答えなさい.

(1) $\beta = \{1, x, x^2\}$ は V の一つの基底なることを示しなさい.

(2) $f(x) \in V$ に対して, f の x に関する微分 $\dfrac{df(x)}{dx}$ を対応させる写像を D と表わす. D は V から V への線形写像であることを示しなさい.

(3) D に対して, 基底 β に関する行列表現を求めなさい. また, D の rank はいくつであるか答えなさい.

(4) V から R への線形写像全体を V^* と表す. V^* は V と同じ次元を持つ線形空間になることが知られているが, このとき, 以下の条件を満たす $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in V^*$ は V^* の一つの基底になることを示しなさい.

$$\alpha_0(1) = 1\,; \quad \alpha_0(x) = 0\,; \quad \alpha_0(x^2) = 0\,;$$
$$\alpha_1(1) = 0\,; \quad \alpha_1(x) = 1\,; \quad \alpha_1(x^2) = 0\,;$$
$$\alpha_2(1) = 0\,; \quad \alpha_2(x) = 0\,; \quad \alpha_2(x^2) = 1\,;$$

(5) $f(x) \in V$ に対して, $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx$ を対応させる写像を I と表わす. I は線形写像であることを示しなさい.

(6) I を α_0 , α_1 , α_2 の線形結合で表わしなさい.

(筑波大 2010)　　(m20101316)

0.338 整数 $n \geqq 0$ に対して定義された次の二重積分 I_n を求めなさい.

$$I_n = \iint_K xy^n\,dxdy\,, \quad K = \{(x,y)\,|\,y \geqq x^2\,,\ x \geqq y^2\}$$

(筑波大 2010)　　(m20101320)

0.339 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^\infty e^{-x}|\sin x|\,dx$$

必要があれば次の公式を用いてもよい.

$$\int e^{-x}\sin x dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + C \quad (C\ \text{は積分定数})$$

(筑波大 2011)　　(m20111302)

0.340 複素数 $z = x+iy$ (i は虚数単位) に対して定義される複素関数 $f(z)$ は正則であり, その実部 $u = u(x,y)$, 虚部 $v = v(x,y)$ は $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + x,\ v(0,0) = 0$ を満たすという. 以下の問いに答えよ.

(1) $v(x,y)$ を求めよ. 必要があれば, $f(z)$ が Cauchy − Riemann の関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

を満たすことを用いてよい.

(2) $f(z)$ を求めよ.

(3) C を複素平面上の単位円周, C の向きを反時計回りとするとき, 複素積分

$$\int_C \frac{f(z)}{z^2}\,dz$$

の値を計算せよ.

(筑波大 2011)　　(m20111303)

0.341 次の二重積分を求めなさい.

$$\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \log_e(x^2+y^2)\,dxdy\ , \quad D = \{(x,y) \mid 1 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 5,\ x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0\}$$

(筑波大 2011) (m20111309)

0.342 領域 D を $D = \left\{(x,y) \,|\, x^2 \leqq\ y \leqq\ 4x+5\,,\ -1 \leqq\ x \leqq\ 1\right\}$ とする．D を図示し，
重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)\,dxdy$ を求めよ．

(筑波大 2011) (m20111315)

0.343 次数が 2 以下の実係数多項式全体で構成される実線形空間 $P_2(R)$ において

内積 $\qquad (f,g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \qquad (f,g \in P_2(R))$

ノルム $\qquad ||f|| = \sqrt{(f,f)}$

を定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = 1$ のとき，ノルム $||f||$ を求めよ．

(2) $f(x) = 1,\ g(x) = x$ のとき，内積 (f,g) を求めよ．

(3) 基底 $\{1, x, x^2\}$ からグラム・シュミットの直交化法により正規直交基底を求めよ．

(筑波大 2011) (m20111318)

0.344 a, b は正の定数とし，D を

$$D = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$$

で定めるとき，積分

$$\iint_D |(ax+by)(-bx+ay)| e^{-(ax+by)^2} dxdy$$

を次のようにして求めよ．

(1) 次の変数変換のヤコビアンを計算せよ．

$$\begin{cases} u = ax+by, \\ v = -bx+ay \end{cases}$$

(2) 上の変数変換を用いて積分を計算せよ．

(筑波大 2011) (m20111322)

0.345 複素関数の閉曲線 C に沿っての積分

$$I = \int_C \frac{e^z}{2z-5}\,dz$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 閉曲線 C が $|z| = 2$ の場合について I を求めよ，導出過程も示せ．

(2) 閉曲線 C が $|z-3| = 2$ の場合について I を求めよ，導出過程も示せ．

(筑波大 2012) (m20121304)

0.346 領域 $K = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq\ 1\,,\ 0 \leqq\ z \leqq\ c\right\}$ とする．3 重積分

$$I = \iiint_K y^2 z^2\,dxdydz$$

を求めよ．ここで，a, b, c は正の定数である．

(筑波大 2012) (m20121311)

0.347 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$$

が収束するような実数 α の値の範囲を求めよ．

(筑波大 2012)　　(m20121326)

0.348 領域 D を

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 < x + y + z < 1,\ x, y, z > 0\right\}$$

と定める．このとき広義重積分

$$I = \iiint_D \frac{\log(x + y + z)}{\sqrt{xyz}}\,dxdydz$$

を以下の手順で求めよ．

(1) 変数変換

$$\begin{aligned} u &= x + y + z \\ uv &= y + z \\ uvw &= z \end{aligned}$$

により，D が領域 $E = \left\{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 < u, v, w < 1\right\}$ に写されることを示せ．

(2) 上の変数変換のヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ を求めよ．

(3) I の値を求めよ．

(筑波大 2012)　　(m20121327)

0.349 次の問いに答えよ．

(1) $\sinh x$ と $\cosh x$ をマクローリン展開せよ．

(2) 次の積分を計算せよ．

$$\int_0^1 \cosh x\,dx$$

(3) 次の積分を計算せよ．

$$\int_0^1 (1 - x)\cosh x\,dx$$

(4) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\int_0^1 (1 - x)^n \cosh x\,dx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n!}{(2m + n + 1)!}$$

(筑波大 2013)　　(m20131304)

0.350 関数 $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$ について以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x, y)$ の極値を求めよ．極値の極大，極小についても調べよ．

(2) 次の積分領域 D_a における関数 $f(x, y)$ の 2 重積分 $\displaystyle\iint_{D_a} f(x, y)dxdy$ を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

$$D_a = \left\{(x, y) \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq a^2\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\right\}$$

(3) 次の積分領域 E_a における関数 $f(x, y)$ の 2 重積分 $\displaystyle\iint_{E_a} f(x, y)dxdy$ の $a \to \infty$ における極限値を求めたい．その導出過程を (2) の結果等と図を用いて説明し，極限値を示せ．

$$E_a = \left\{(x, y) \,\middle|\, 0 \leq x \leq a\,,\ o \leq y \leq a\right\}$$

(4) (3) の結果を用いて次の積分値を求めよ．

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

(筑波大 2013)　　(m20131306)

0.351 2 変数関数 $f(x,y)$ を $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$ （ただし，$(x,y)\neq(0,0)$）と定義する．ここで，log は自然対数である．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の全微分を求めよ．

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ について，点 $(a,b,f(a,b))$ における法線および接平面の方程式を求めよ．

(3) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ を $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0<x^2+y^2\leq 1\right\}$ として求めたい．$f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において定義されていないので，
$D_\varepsilon=\left\{(x,y)\,\middle|\,\varepsilon^2<x^2+y^2\leq 1\,,\ \varepsilon\in\boldsymbol{R}\right\}$ として，$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{D_\varepsilon}f(x,y)dxdy$ を計算せよ．

(筑波大 2013)　　(m20131308)

0.352 領域 $D=\{(x,y)\,:\,0\leq x\leq 1\,,\ 0\leq y\}$ において，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D x^2e^{-y}dxdy$$

(筑波大 2013)　　(m20131316)

0.353 $\displaystyle\int\frac{1}{(e^x+e^{-x})^2}\,dx$ を求めよ．

(筑波大 2014)　　(m20141304)

0.354 半径 a の球体の領域 $D=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leq a^2\right\}$ を積分領域とする定積分 $\displaystyle\iiint_D z^2\sqrt{x^+y^2}dxdydz$ の値を以下の問いに従って求めよ．

(1) x,y,z を極座標 r,θ,φ の関数として表せ．r,θ,φ の定義を図示すること．

(2) x,y,z の r,θ,φ の関するヤコビアンを計算せよ．

(3) 極座標を用いて定積分の値を求めよ．

(筑波大 2014)　　(m20141310)

0.355 次の二重積分を求めなさい．ただし，$a>0$ とする．

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq a^2\,,\ xy\geq 0\right\}$$

(筑波大 2014)　　(m20141318)

0.356 $\phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ $(-\infty<x<\infty)$ とおく．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)dx=1$ を示せ．

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mu x}\phi(x)dx$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\int_{-\infty}^{y}\phi(x)dx\right)e^{\mu y-\frac{\mu^2}{2}}dy$ を求めよ．ただし，$\mu>0$ とする．

(筑波大 2015)　　(m20151304)

0.357 2変数関数 $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ について以下の問いに答えよ．

(1) 積分 $I=\iint_D f(x,y)dxdy,\ \ D=\{(x,y)\mid x\geq 0,\ y\geq 0\}$ を求めたい．そこで，$D_a=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq a^2,\ x\geq o,\ y\geq 0\}$，$a>0$ として，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\iint_{D_a} f(x,y)dxdy$ を極座標 $r,\ \theta$ を用いて計算することにより，I の値を求めよ．

(2) (7) の結果を用いて積分 $J=\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2dt}$ の値を求めよ．

(筑波大 2015)　　(m20151307)

0.358 $f(x)=a_0+a_1\cos x+a_2\sin x$　($a_0,\ a_1,\ a_2$ は実定数) の形の実関数全体が作る実線形空間 V に内積 $(g,h)=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x)h(x)dx$　$(g,h\in V)$ を導入する．以下の問いに答えよ．

(1) 3つの関数 $1,\ \cos x,\ \sin x$ は互いに直交することを示し，これらを正規化して正規直交基底を作れ．

(2) 線形変換 $F:f(x)\mapsto f(x+c)$ について，(1) で得られた正規直交基底に関する表現行列を求めよ．ここで，c は実定数である．

(筑波大 2015)　　(m20151308)

0.359 $x^2+3y^2=3$ で与えられる楕円 E について，以下の問いに答えよ．計算過程も示せ．

(1) $(x,y)\in R^2$ が楕円 E 上を動くとき，実関数 $f(x,y)=xy^3$ がとりうる最大値と最小値を求めよ．

(2) 楕円 E の周と内部 $(x^2+3y^2\leq 3)$ で $0\leq y\leq x$ を満たす領域の面積を求めよ．

(3) x 軸を実軸，y 軸を虚軸とする複素平面を考える．この複素平面において楕円 E を反時計回りに一周する閉路を C とする．このとき $z=x+iy$ に関する積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^5}e^{-z}dz$ の値を求めよ．

(筑波大 2015)　　(m20151310)

0.360 $D=\{(x,y)\mid 0\leq 2x+y\leq 1,\ -1\leq x-2y\leq 0\}$ 上の二重積分 $\displaystyle\iint_D xdxdy$ について以下の問いに答えなさい．

(1) $u=2x+y,\ v=x-2y$ と変数変換をしたとき，変数 (u,v) の D に対応する積分領域を示しなさい．

(2) 上記の変数変換の逆変換 $x=\varphi(u,v),\ \psi(u,v)$ を示しなさい．

(3) $x=\varphi(u,v),\ \psi(u,v)$ のヤコビアンを求めなさい．

(4) $\displaystyle\iint_D xdxdy$ を求めなさい．

(筑波大 2015)　　(m20151315)

0.361 次の2重積分を求めなさい．

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy,\quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq\ 2x\}$$

(筑波大 2015)　　(m20151319)

0.362 次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D ye^{xy}dxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0\leqq\ x\leqq\ 1,\ 0\leqq\ y\leqq\ 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}dxdy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ 0 \leqq y \leqq x\}$

(筑波大 2016) (m20161304)

0.363 関数 $f(x)$ と f の定義域に含まれる区間 $[0,1]$ を考える.

$$x_i = \frac{i}{n} \qquad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

で与えられる区間 $[0,1]$ の分割に対して,

$$I_k = (x_{k-1}, x_k] \qquad (k = 1, \cdots, n)$$

とし, 次の和を定義する.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sup_{x \in I_k} f(x)$$
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \inf_{x \in I_k} f(x)$$

この S_n, s_n がそれぞれ $n \to \infty$ において極限を持つとき,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n,$$
$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

とする. $S = s$ ならば関数 f が区間 $[0,1]$ で積分可能であるといい,

$$S = s = \int_0^1 f(x)dx$$

と書く. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $f(x) = x$ とするとき, (a) S_n, s_n を求め, (b) f が $[0,1]$ 上で積分可能かどうかを示せ.

(2) 以下の関数 f が $[0,1]$ 上で積分可能かどうかを示せ.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \text{ が無理数}) \\ x & (x \text{ が有理数}) \end{cases}$$

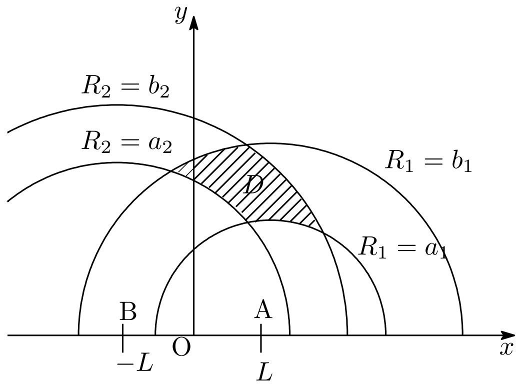
ただし, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ である.

(筑波大 2016) (m20161312)

0.364 xy 平面の $y > 0$ なる領域（上半面）の点 $P(x,y)$ に対して, 点 $A(L,0)$ および点 $B(-L,0)$ からの距離の二乗

$$R_1 = (x-L)^2 + y^2\ , \qquad R_2 = (x+L)^2 + y^2$$

を考える. ここで $L > 0$ とする. また, $f(x,y) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)$ とする.



(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

(2) c をゼロでない定数とし，xy 平面の上半面において $f(x,y)=c$ で表される曲線を考える．この曲線上の任意の点 (x_0,y_0) における法線の方程式を求めよ．そして，その法線と x 軸との交点が c と L だけで決まることを示せ.

(3) a_1,a_2,b_1,b_2 を正の定数とし，$R_1=a_1$ と $R_1=b_1$ で指定される円がそれぞれ $R_2=a_2$ と $R_2=b_2$ で指定される円と交わる場合を考える（図を参照）．ここで $a_1<b_1$, $a_2<b_2$ とし，xy 平面の上半面において $a_1\leq R_1\leq b_1$, $a_2\leq R_2\leq b_2$ で指定される領域を D とするとき，D を x 軸の周りに回転して出来る回転体の体積は

$$V=2\pi\int_D ydxdy$$

で与えられる．x,y に関する積分を R_1, R_2 に関する積分に変換することにより V を求めよ.

(4) xy 平面を複素平面と考え，点 $P(x,y)$ を複素数 $z=x+iy$ に対応させ,
複素関数 $g(z)=\log\left(\dfrac{z-L}{z+L}\right)$ を考える．$z-L=r_1e^{i\theta_1}$, $z+L=r_2e^{i\theta_2}$ とおくことにより，$g(z)$ の実部は $f(x,y)$ に一致することを示せ．ただし，$0<r_1$, $0<r_2$, $0<\theta_1<\pi$, および $0<\theta_2<\pi$ とする．さらに $g(z)$ の虚部は三角形 PAB のどの内角に対応するか答えよ.

(筑波大 2016)　　(m20161315)

0.365 関数 $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$ について，以下の設問に答えよ.

(1) 原点を除いた領域において，ラプラス方程式を満足することを示せ.

(2) 広い意味の積分 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq 1} f(x,y)dxdy$ は存在するか．存在するときはその値を求めよ.

(3) 複素数 $z=x+iy$ の関数 $f(x,y)+ig(x,y)$ が，領域 $\mathrm{Re}\,z>0$ $(x>0)$ において正則となるように，関数 $g(x,y)$ を定めよ.

(筑波大 2016)　　(m20161318)

0.366 領域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ (x+y)^2+4(x-y)^2\leq 1\right\}$ における重積分
$I=\displaystyle\iint_D \frac{\left|x^2-y^2\right|}{(x+y)^2+4(x-y)^2}dxdy$ の値を求めたい．以下の問いに答えよ.

(1) $x+y=r\cos\theta$, $x-y=\dfrac{r}{2}\sin\theta$ とするとき，x, y の r, θ に関するヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算せよ.

(2) I を (1) で与えられた変数変換を用いて求めよ.

(筑波大 2017)　　(m20171301)

0.367 $f(x,y)=xy$ について，以下の設問に答えよ.

(1) $f(x,y)$ の全微分 df を求めよ.

(2) x-y 平面において，c をパラメータとする曲線群 $f(x,y)=c$ と直交し，点 $(p,0)$ を通る曲線 C_p を求めよ．ただし，$p>0$ とする.

(3) C_p 上にあり $x>0$ を満たす点の集合を D_p と表す．領域 D を

$$D=\bigcup_{1\leq p\leq 2} D_p$$

によって定義するとき，積分

$$\iint_D \frac{1}{x^2}dxdy$$

の値を求めよ.

(筑波大 2017)　　(m20171304)

0.368 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}x}\exp\left\{-\dfrac{(\log_e x-\mu)^2}{2}\right\}$　　$(0<x<\infty\ ;\ -\infty<\mu<\infty)$ とおく.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^m f(x)dx = \frac{1}{2}$ となる m を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_0^\infty xf(x)dx$ を求めよ.

(筑波大 2017)　　(m20171316)

0.369 (1) 数列

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n \quad (n=1,2,\cdots)$$

が単調減少であることを示せ.

(2) 上の数列が，$C \geqq \dfrac{1}{2}$ を満たすある定数 C に収束することを示せ.

(3) 広義積分

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right)dx$$

の値を上の定数 C を用いて表せ．ただし，$[\alpha]$ は α を超えない最大の整数を表す.

(筑波大 2017)　　(m20171317)

0.370 図のような円柱座標系での微積分に関する以下の問いに答えよ.

(1) 直交座標 (x,y,z) を円柱座標 (r,θ,z) に変換する，x，y，$\dfrac{\partial x}{\partial r}$，$\dfrac{\partial x}{\partial \theta}$，$\dfrac{\partial x}{\partial z}$ を r，θ，z の関数として示せ.

(2) $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} & \dfrac{\partial r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} & \dfrac{\partial \theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = E$ が成り立つことに留意し，$\dfrac{\partial r}{\partial x}$，$\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を r，θ, z を用いて示せ．なお，E は単位行列である.

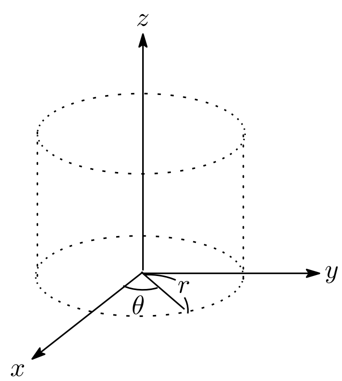
(3) (2) の結果を用いると円柱座標系のラプラシアンは
$\triangle = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ で表される．　関数 $f(r,\ \theta,\ z) = rz\cos\theta$ に対して $\triangle f$ を計算せよ.

(4) 円柱座標系で r だけを変数 $(r>0)$ とする関数 $g(r)$ が $\triangle g(r) = 0$，$g(1)=0$，$g(e)=2$ の条件を満たす．この $g(r)$ を求めよ．ただし，e は自然対数の底である.

(5) x，y，z の r，θ，z に対するヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算せよ.

(6) K を積分領域とする以下の三重積分を，円柱座標系への変数変換を用いて計算せよ．ただし，a は正の定数である.

$$\iiint_k y^2\sqrt{x^2+y^2}dxdydz, \qquad K = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq a\right\}$$



(筑波大 2018)　　(m20181301)

0.371　留数定理を用いて，以下の定積分の値を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2-2x+2} dx$$

ただし，m は実定数とする．

(筑波大 2018)　　(m20181305)

0.372　次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy\ ,\qquad D = \left\{(x,y) \mid 1/4 \leqq x^2+y^2 \leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (x+y)^3|x-y|e^{(x^2-y^2)(x-y)} dxdy\ ,\qquad D = \{(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1\}$

(筑波大 2018)　　(m20181320)

0.373　次の二重積分について，以下の問いに答えなさい．

$$V = \iint_D (x^2+xy) dxdy \quad \cdots\cdots (*)$$

ただし，$D = \left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 1\right\}$ とする．

(1) x と y を極座標変換し，式 $(*)$ の右辺を書き換えなさい．

(2) V の値を求めなさい．

(筑波大 2019)　　(m20191302)

0.374　$f(x,y) = x^2+y^2$ とし，xyz 直交座標系において曲面 $S : z = x^2+y^2$ を考える．この座標系上の点を (x,y,z) と表し，座標系の原点を $O(0,0,0)$ とする．

(1) 点 $A(1,1,2)$ における曲面 S の接平面を π とする．π の方程式を求めよ．

(2) (1) の接平面 π と平行で原点 O を通る平面を π_0 とし，平面 π_0 と曲面 S の交線の xy 平面への正射影を曲面 C とする．C はどのような図形になるか．

(3) (2) の平面 π_0 と曲面 S で囲まれた領域を D とする．このとき，3 重積分

$$I = \iiint_D (x^2+y^2) dxdydz$$

の値を求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191306)

0.375 下記の 2 重積分を変数変換によって求めることを考える.

$$I = \iint_D (4x^2 - y^2)e^{8xy}dxdy, \qquad D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leq 2x + y \leq 1\ ,\ 0 \leq x - \frac{1}{2}y \leq 1\right\}$$

(1) $u = 2x + y,\ v = x - \dfrac{1}{2}y$ と変数変換したとき, 変数の組 (u, v) の積分領域 E を示せ.

(2) E から D への写像関数のヤコビアンを求めよ

(3) I を求めよ.

(筑波大 2019) (m20191311)

0.376 (1) $f(x)$ は $x \geqq 0$ において定義された実数値連続関数であって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して広義積分 $\displaystyle\int_\varepsilon^\infty \frac{f(x)}{x}dx$ が収束すると仮定する. このとき, 任意の正の実数 a, b $(a < b)$ に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x}dx$$

(2) $f(x)$ は (1) の仮定を満たすとする. (1) の等式を用いて, 任意の正の実数 a, b $(a < b)$ に対して,

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}dx = f(0)\log\frac{b}{a}$$

が成り立つことを示せ.

(3) 次の広義積分の値を求めよ. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^2}dx$

(筑波大 2019) (m20191317)

0.377 次の 2 重積分を計算せよ.

$$I = \iint_D xe^{y^2}\,dxdy, \quad D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 1\right\}$$

(筑波大 2020) (m20201306)

0.378 次の定積分の値を求めなさい.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)}$$

(筑波大 2020) (m20201310)

0.379 $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leqq x \text{ かつ } 0 \leqq y \leqq x^2\right\}$ とし, α は $0 < \alpha < 1$ を満たす定数とする.

(1) 変数変換 $x = s,\ y = s^2 t$ を用いて, 広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^\alpha}{x^4 + y^2}dxdy$ を計算せよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^4 + y^2}\log(1 + x^\alpha)dxdy$ が収束することを示せ.

(筑波大 2020) (m20201316)

0.380 (1) 以下の広義積分の値を求めよ.

$$\int_0^\pi \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx$$

(2) 関数 $f(x)$ は閉区間 $[0, 1]$ で連続であり, $f(x) > 0$ $(x \in [0, 1])$ とする. このとき, 以下の広義積分が収束することを示せ.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1 - x)f(x)}}\,dx$$

(筑波大 2021) (m20211304)

0.381 次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D \sqrt{y^2 - x^2}\, dxdy, \qquad D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq y \leqq 1\}$$

(筑波大 2021) (m20211306)

0.382 (1) 関数 $g(x) = x^x$ $(x > 0)$ について, $\displaystyle\lim_{x \to +0} g(x)$ を計算せよ.

(2) 与えられた領域 D において, (1) の結果を用いて, 次の広義 2 重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{x \log(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}\, dxdy\ ,\ \ D = \left\{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\ ,\ x \geq 0\ ,\ y \geq 0\right\}$$

(筑波大 2021) (m20211312)

0.383 二重積分 $I_n = \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^n}\, dxdy$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は存在するか. 存在する場合は, その値を n を用いて表わせ. 存在しない場合は, 「存在しない」と答えること.

(筑波大 2021) (m20211317)

0.384 定積分 $I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1 + x^2)^n} dx$ $(n = 1, 2, \cdots)$ について, 以下の問いに答えよ.

(a) I_1 を求めよ.

(b) I_n $(n \geqq 2)$ を求めよ.

(筑波大 2022) (m20221303)

0.385 (1) $x > 0$ に対して, 次の関数を定義する.

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$$

任意の正の整数 n に対して, $\Gamma(n + 1) = n!$ が成り立つことを示せ.

(2) 次の定積分を $u = -(n + 1) \log x$ $(\Leftrightarrow x = e^{-\frac{u}{n+1}})$ とする置換積分により計算せよ. ただし, n は任意の正の整数を表す.

$$\int_0^1 x^n (\log x)^n dx$$

(3) 以下の恒等式を証明せよ.

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^\infty n^{-n} \quad \left\{= \lim_{n \to \infty} (1 + 2^{-2} + 3^{-3} + \cdots + n^{-n})\right\}$$

ただし, (2) の結果, および, 次のマクローリン展開の結果を用いること.

$$x^{-x} = e^{(-x \log x)} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-x \log x)^n}{n!}$$

また, 積分 $\int$ と和 $\sum$ の順序は交換してもよいとする.

(筑波大 2022) (m20221307)

0.386 次は, あるクラスのテストの点数である.

77 74 75 85 90 67 62 60 58

このデータの標本平均は 72.0, 標本不偏分散は 124.5 である. テストの点数は, 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う母集団から無作為に抽出した標本とみなせるものとする. このとき, 以下の各問に答えよ. なお, 計算の過程で適宜, 有効数字 3 桁に丸めてよい.

(1) 母分散 σ^2 の 95 % 信頼区間を求めよ.

(2) 母平均 μ の 95 % 信頼区間を求めよ.

(3) $\sigma^2 = 121$ と判明したとき, μ の 95 % 信頼区間を求めよ.

(筑波大 2022)　　(m20221309)

付表１

$\sqrt{2} = 1.414$	$\sqrt{3} = 1.732$	$\sqrt{5} = 2.236$	$\sqrt{7} = 2.646$	$\sqrt{11} = 3.317$

付表２

$e^1 = 2.718$	$e^2 = 7.389$	$e^3 = 20.09$	$e^4 = 54.60$	$e^5 = 148.4$

付表３　標準正規分布表 : $Q(z) = \displaystyle\int_0^z \phi(t)dt$, ただし, $\phi(\cdot)$ は標準正規分布の確率密度関数　（省略）

付表４　χ^2 分布表 : 自由度 m の χ^2 分布の上側 $100\alpha\%$ 点 $\chi^2_\alpha(m)$

α \ m	6	7	8	9	10
0.975	1.237	1.690	2.180	2.700	3.247
0.950	1.635	2.167	2.733	3.325	3.940
0.050	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31
0.025	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48

付表５　t 分布表 : 自由度 m の両側 $100\alpha\%$ 点 $t_\alpha(m)$

α \ m	6	7	8	9	10
0.10	1.943	1.895	1.860	1.833	1.812
0.05	2.447	2.365	2.306	2.262	2.228

0.387　次の 2 重積分について, 以下の問いに答えなさい.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{f(x,y)}dxdy$$

(1) $f(x,y) = -x^2 - y^2$ とし, I を求めなさい.

(2) $f(x,y) = -ax^2 - 2bxy - cy^2$ とし, I を求めなさい. ただし, $a > 0$, $b^2 - ac < 0$ とする.

(筑波大 2022)　　(m20221311)

0.388　D を xy 平面上の領域とするとき, 曲面 $z = f(x,y)$ $\big((x,y) \in D\big)$ の面積は

$$\iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\ dxdy$$

で表される. このことを用いて半径 R の球の表面積の公式を導け.

(埼玉大 1998)　　(m19981401)

0.389　a を正の実数とし, 次の不等式で定義された領域を D であらわす.

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \le \sqrt{a}\,, \qquad x \ge 0\,,\ y \ge 0$$

このとき, 次の値を求めよ.

$$\iint_D dxdy\ , \qquad \iint_D x\, dxdy$$

(埼玉大 1999)　　(m19991403)

0.390　$f(x) = \dfrac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}$ とする.

(1) 正数 R に対し，次が成り立つことを示せ.

$$\int_0^R\left(\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)dx\right)dy \leqq \int_0^R\left(\int_0^R f(x,y)dx\right)dy \leqq \int_0^{\sqrt{2}R}\left(\int_0^{\sqrt{2R^2-y^2}} f(x,y)dx\right)dy$$

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^R\left(\int_0^R f(x,y)dx\right)dy$ の値を求めよ.

(埼玉大 2000) (m20001402)

0.391 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3-3x^2-2x}{x^2-4x+3}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

(2) $\displaystyle\int (2x+1)\ln x dx$

（埼玉大 2001） (m20011404)

0.392 (1) 次の等式を満たす実数 a, b, c, d を求めよ. $\displaystyle\frac{1}{x^4+4} = \frac{ax+b}{x^2-2x+2} + \frac{cx+d}{x^2+2x+2}$

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+4}$ を求めよ.

（埼玉大 2001） (m20011405)

0.393 n は自然数とする．正の定数 a に対して

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + y^2 \leq a^2\ ,\ y \geq 0\right\}$$

とおく．このとき $\displaystyle\iint_D x^n y\,dxdy$ を求めよ.

(埼玉大 2002) (m20021402)

0.394 $a > 0$ とするとき，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\sin x dx$ を求めよ.

(埼玉大 2003) (m20031404)

0.395 $f(x) = \dfrac{3e^{2x}+4\sin x}{2e^{2x}+e^{-x}}$ とおく.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ. (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1} f(x)\ dx$ を求めよ.

（埼玉大 2004） (m20041402)

0.396 次の積分を求めよ.

$$\int \frac{x+1}{(2x^2+4x-7)^n}dx$$

（埼玉大 2004） (m20041403)

0.397 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ とし, Ω で定義された実数値関数 f を

$$f(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

とする．ただし，$\tan^{-1}$ は正接関数 $\tan$ の定義域を $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ に制限したものの逆関数である.
また, $D = \{(x,y) \in \Omega \mid 2 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 3,\ 0 \leqq\ y \leqq\ x\}$ とおく. 次の問に答えよ.

(1) f の 1 階の偏導関数をすべて求めよ.

(2) f の 2 階の偏導関数をすべて求めよ.

(3) D を図示せよ.

(4) 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ.

(埼玉大 2005)　　(m20051406)

0.398 (1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は次を満たすとする.

$$\text{すべての自然数 } n \text{ に対して } a_n \geqq 0 \text{ であり}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \text{ である}.$$

このとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ は成立するか. 成立するならば証明し, 成立しないならば反例をあげよ.

(2) 次の条件をすべて満たす関数 f の例を挙げよ.

- f は区間 $[0,\infty)$ で定義された連続関数である.
- すべての $x \in [0,\infty)$ に対し $f(x) \geqq 0$ である.
- $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx < \infty$ である.
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ が成立しない.

(埼玉大 2005)　　(m20051407)

0.399 (1) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とするとき，$\sin x,\ \cos x$ および $\dfrac{dt}{dx}$ を t の式で表せ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$ を求めよ.

(埼玉大 2006)　　(m20061402)

0.400 n を自然数とし、$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ とおく.

(1) I_2 を求めよ.　　(2) $n \geqq 3$ のとき，$I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ を示せ.

(埼玉大 2006)　　(m20061408)

0.401 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$

(埼玉大 2007)　　(m20071402)

0.402 (1) 次の等式を示せ。

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \qquad (t \neq -1)$$

(2) 上式を利用して，次の式を示せ.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x) \qquad (x > -1)$$

ただし, $R_n(x) = (-1)^n \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt$　とする.

(3) $0 \leq x \leq 1$ のとき $R_n(x) \to 0 \quad (n \to \infty)$ を示せ.

(4) $-1 < x < 0$ のとき $R_n(x) \to 0 \quad (n \to \infty)$ を示せ.

(埼玉大 2007)　　(m20071410)

0.403 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x + 2$ で囲まれる xy 平面内の有界領域を D とする.

領域 D を図示し，重積分 $\displaystyle\iint_D ydxdy$ を計算せよ.

(埼玉大 2007)　　(m20071411)

0.404 以下の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x(x-1)^3}\,dx$ (2) $\displaystyle\iint_D x dx dy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid y \leqq\ 2x,\ x \leqq\ 2y,\ x+y \leqq\ 6\}$

(埼玉大 2008) (m20081402)

0.405 n を自然数とする. 次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x(\log|x|)^n$ を求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 (\log x)^n\,dx$ の値を求めよ.

(埼玉大 2008) (m20081407)

0.406 n を自然数とし, $D_n=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ \middle|\ \frac{1}{n}\leqq\ x \leqq\ 1,\ 0 \leqq\ y \leqq\ x-\frac{1}{n}\right\}$ とおく. α を $0<\alpha<1$ を満たす定数とする. 次を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{dxdy}{(x-y)^\alpha}$ を求めよ.

(2) (1) の積分値を I_n とおいたとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ.

(埼玉大 2009) (m20091407)

0.407 $x>0$ に対して

$$F(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x)$ を求めよ.

(2) $F'(x)$ を求めよ. ただし, 等式

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{e^{-xt}\sin t}{t}\right\}dt$$

が成り立つことを用いてよい.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to +0} F(x)$ を求めよ.

(埼玉大 2010) (m20101403)

0.408 (1) 区間 $(0,1]$ で定義された実数値連続関数 $f(x)$ で

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx<\infty \quad \text{かつ} \quad \int_0^1 |f(x)|^2\,dx=\infty$$

を満たす例を一つ挙げよ.

(2) 区間 $[1,\infty)$ で定義された実数値連続関数 $g(x)$ で

$$\int_1^\infty |g(x)|\,dx<\infty \quad \text{かつ} \quad \sup_{1\le x<\infty}|g(x)|=\infty$$

を満たす例を一つ挙げよ.

(埼玉大 2010) (m20101404)

0.409 つぎの積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x^{11}e^{x^4}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+4}{(x-3)^2(x-2)}\,dx$

(埼玉大 2010)　　(m20101406)

0.410　次の不定積分を求めよ.

$$\int \left(2x^2 \tan^{-1} 2x\right) dx$$

(埼玉大 2011)　　(m20111402)

0.411　次の二重積分の値を求めよ.

$$\iint_D xydxdy\ ,\quad (\ D = \{\ (x,y)\,|\,x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2x+3y \leq 6\ \}\ )$$

(埼玉大 2011)　　(m20111403)

0.412　$\alpha > 0$ とする. $x \geqq 1$ で定義された関数 $f_\alpha(x)$ は,

$$x \in [n, n+1) \text{ において }\quad f_\alpha(x) = \frac{1}{n^\alpha}$$

となるものとする. ただし, n は自然数とする. このとき

$$\int_1^{N+1} f_\alpha(x)dx = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$$

となることを利用して次の問いに答えよ.

(1)　$\alpha > 1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ が収束することを示せ.

(2)　$\alpha \leqq 1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ が発散することを示せ.

(埼玉大 2011)　　(m20111410)

0.413　次の定積分を求めよ.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\, \sin nx\, dx \qquad (m, n \text{ は自然数})$$

(埼玉大 2012)　　(m20121402)

0.414　次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D e^{x+y}dxdy$$

ただし, 直線 $y = x,\ x = 1,\ y = 0$ で囲まれた領域を D とする.

(埼玉大 2012)　　(m20121403)

0.415　次の定積分を求めよ.

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$$

(埼玉大 2013)　　(m20131403)

0.416　次の 2 重積分を求めよ. ただし, $x \geq 0$, $\sqrt{x} \geq y \geq x$ で囲まれた領域を D とする.

$\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy \qquad D : x \geq 0\,,\ \sqrt{x} \geq y \geq x$　　(埼玉大 2013)　　(m20131404)

0.417　$-1 < x < 1$ に対し, $t = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) x を t の式で表し，さらに，導関数 $\dfrac{dx}{dt}$ を求めよ．

(2) 不定積分

$$\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$$

を t の不定積分で表せ．

(3) 広義積分

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$$

を求めよ．

(埼玉大 2013)　　(m20131410)

0.418 (1) $x = x_0$ 付近で連続な関数 $f(x)$ に対し，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$ が成り立つ関数 $\delta(x)$ がある．$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} 3\delta(x)e^{-ixy}dx$ の値を求めよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする．

(2) 関数 $f(x), g(x)$ があり，それぞれ $F(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx$， $G(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ixy}dx$ とするとき，次式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx\right)e^{-iyz}dz$ が収束するとして，これを，$F(y)$ および $G(y)$ を用いて表せ．ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx < \infty$ とする．

(埼玉大 2014)　　(m20141403)

0.419 $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2)^2 \leqq x^2 - y^2 \text{ , } x \geqq 0\right\}$ とする．極座標を用いて，積分

$$\iint_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

を計算せよ．

(埼玉大 2014)　　(m20141408)

0.420 次の定積分を求めよ．　$\displaystyle\int_0^1 \frac{3x}{x^2+1}\,dx$

(埼玉大 2015)　　(m20151403)

0.421 次の重積分を求めよ．ただし，$0 \leq x \leq 1$, $x \leq y \leq \sqrt{x}$ で囲まれる領域を D とする．

$$\iint_D (2x+y)\,dxdy$$

(埼玉大 2015)　　(m20151404)

0.422 次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{2x}{x^2-2x+3}dx$$

(埼玉大 2016)　　(m20161402)

0.423 次の 2 重積分を求めよ．ただし，3 つの直線 $x = 0$, $y = 2$, $-2x + y = 0$ で囲まれた領域を D とする．

$$\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^2}dxdy$$

(埼玉大 2016)　　(m20161403)

0.424 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ を基本ベクトルとする xyz 空間上のベクトル場 $\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 3z\boldsymbol{k}$ の面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{A}\cdot dS$ を，発散定理を用いて求めよ．S は原点を中心とする半径 1 の球面とする．

(埼玉大 2016)　　(m20161405)

0.425 xyz 空間上のスカラー場 $\varphi = x - \dfrac{2}{3}yz$ の曲線 C に沿う線積分 $\displaystyle\int_C \varphi ds$ を求めよ．C は原点 O から $(3, 3, 3)$ に至る線分とする．

(埼玉大 2016)　(m20161406)

0.426 次の不定積分を求めよ．
$$\int \frac{-x^2+10}{(x+1)(x-2)^2}dx$$

(埼玉大 2017)　(m20171402)

0.427 次の 2 重積分を求めよ．ただし，放物線 $y = x^2$ と直線 $y - x - 2 = 0$ で囲まれた領域を D とする．
$$\iint_D xydxdy$$

(埼玉大 2017)　(m20171403)

0.428 次の関数を積分せよ．

(1) $\displaystyle\int e^{kx}x^3dx$　(ただし，k は，0 でない定数)

(埼玉大 2018)　(m20181401)

0.429 次の関数を積分せよ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y \frac{x}{1+y^2}dxdy$

(埼玉大 2018)　(m20181402)

0.430 次の不定積分を求めよ．　$I = \displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$

(埼玉大 2019)　(m20191403)

0.431 次の積分をせよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)^4dx$　(2) $\displaystyle\int_{-1}^0 xe^{-x}dx$

(図書館情報大 1999)　(m19991608)

0.432 関数 $g(x) = xe^{-\frac{x}{2}}\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)$ について以下の $\boxed{ア}$～$\boxed{ク}$ にあてはまる値を求めよ．

(1) $g(x) = 0$ を満たす x の値は $\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$ である．

(2) $g(x)$ の傾きが 0 となる x の値は $\boxed{ウ}$, $\boxed{エ}$ である．

(3) $\displaystyle\int_0^\infty g(x)dx = \boxed{オ}$ である．

(4) $g(x)$ のマクローリン展開の第 3 次までの項は
$$g(x) \approx \boxed{カ}\,x + \boxed{キ}\,x^2 + \boxed{ク}\,x^3$$
となる．ただし関数 $f(x)$ のマクローリン展開は
$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \cdots$$
である．

(図書館情報大 2002)　(m20021607)

0.433 $D = \{(x, y) \mid y \geqq 0\,,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq \dfrac{2x}{a}\}$ のとき，
次の 2 重積分の値を求めよ．ただし，a , b は正の定数とする．
$$\iint_D y\,dx\,dy$$

(茨城大 1998)　(m19981701)

0.434 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$ を求めよ．ただし，$a>0$, $b>0$ である．

(茨城大 1999)　(m19991701)

0.435 定積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ を求めよ．

(茨城大 1999)　(m19991702)

0.436 $f_0(x)$ を値 1 をとる定数関数とするとき，次の各問に答えよ．

(1) $\displaystyle f_1(x) = \int_0^x f_0(t)dt$, $\displaystyle f_2(x) = \int_0^x f_1(t)dt$, $\displaystyle f_3(x) = \int_0^x f_2(t)dt$ を求めよ．

(2) $\displaystyle f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)dt$ (ただし，$n=1,2,3,\cdots$) を求めよ．

(3) $\displaystyle E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ とおくとき $\displaystyle\frac{d}{dx}E(x)$ を求めよ．

(茨城大 1999)　(m19991703)

0.437 複素関数 $\displaystyle f(z) = \frac{z^2+z+1}{z^2-1}$ について，

(1) $f(z)$ の各特異点における留数を求めよ．

(2) 次に示された曲線上を正の向きにとった積分路を C として，複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を求めよ．

(a) $C : |z-1| = 1$

(b) $C : |z-i| = 2$

(茨城大 1999)　(m19991708)

0.438 ２つの曲線

$$C_1 : z = e^{i\theta} \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$
$$C_2 : z = \frac{3}{2}e^{i\theta} - \frac{1}{2} \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

が与えられているとする．次の各問に答えよ．

(1) C_1, C_2 を図示せよ．

(2) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z}dz$ を求めよ．

(3) コーシーの積分定理を使って，$\displaystyle\int_{C_2} \frac{1}{z}dz$ を求めよ．

ただし，(2) と (3) における積分路の向きは，$\theta=0$ のときの点から $\theta=\pi$ のときの点にむかう向きを正の向きとする．

(茨城大 2000)　(m20001704)

0.439 (1) $\displaystyle y = 2\sqrt{1+x} + \log\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|$ について，$\displaystyle\frac{dy}{dx}$ を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\log x}{\sqrt{1+x}}\,dx$ を求めよ．

(茨城大 2001)　(m20011701)

0.440 次の定積分を求めよ．ただし，m と n は 0 以上の整数とする．

(1) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^n dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$

（ヒント：階乗を利用すると結果を簡潔に表示できる．$0! = 1$ である.）

(茨城大 2001)　　(m20011702)

0.441 (1) 次の等式が $x = -1$ を除くすべての実数 x について成立するように，４つの定数 A, B, C, D を求めよ．

$$\frac{3x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

(2) 次の定積分を求めよ．　$\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+1)^2}dx$

(茨城大 2002)　　(m20021702)

0.442 次の複素積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_C \mathrm{Re}(z)dz,\ C: 0$ から $1+i$ に至る線分，ただし，$\mathrm{Re}(z)$ は z の実部を表す．

(2) $\displaystyle\int_{|z+1|=1} \frac{1}{z^2-1}dz$, ただし，積分路は正の向きにとる．

(茨城大 2002)　　(m20021707)

0.443 (u, v) 平面における正方形 $A = \{(u, v)|0 \leqq\ u \leqq\ 1, 0 \leqq\ v \leqq\ 1\}$ が,

$$\begin{cases} x = u+v \\ y = u-v \end{cases}$$

で表される写像により,(x, y) 平面上に写される図形を B とするとき,

(1) B を (x, y) 平面上に図示せよ. さらに,B の面積は A の面積の何倍であるか, 答えよ．

(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_B xdxdy$ を求めよ.

(茨城大 2004)　　(m20041701)

0.444 複素平面上の曲線 $z(t) = \cos t + i(1+\sin t)\ \ (0 \leqq\ t \leqq \pi)$ を C とするとき,

(1) C を複素平面上に図示せよ.

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C zdz$ を求めよ．

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_C \overline{z}dz$ を求めよ．ただし,$\overline{z}$ は z の共役複素数を表す.

（茨城大 2004）　　(m20041704)

0.445 関数 $y = \tan x$ の定義域を $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ に制限すると, その逆関数 $y = \mathrm{Arctan}\, x$ を考えることができる. 次の各問に答えよ.

(1) $y = \mathrm{Arctan}\, x$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ は $\dfrac{1}{1+x^2}$ となることを示せ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \mathrm{Arctan}\, x\, dx$ を求めよ.

(茨城大 2005)　　(m20051702)

0.446 複素数 z の共役複素数を $\overline{z}$ とするとき, 次の各問に答えよ.

(1) 実数 h を 0 に近づけるときの極限　$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\left(\overline{z+hi}\right)^3 - \left(\overline{z}\right)^3}{hi}$　を計算せよ.

(2) 0 から i までにいたる線分を積分路とする複素積分　$\displaystyle\int_0^i \left(\overline{z}\right)^2 dz$　を求めよ.

(茨城大 2005)　　(m20051704)

0.447 $t>0$ とする．xy 平面内の領域 $D(t): t^2 \leqq x^2+y^2 \leqq 4t^2$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ 上の二重積分 $F(t)=\iint_{D(t)} \dfrac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy$ について，次の問に答えよ．

(1) 極座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ のヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算し，$F(t)$ を $r\theta$ 平面内の領域上の二重積分に変換せよ．

(2) $F'(t)$ を計算せよ．

(茨城大 2006)　　(m20061702)

0.448 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(e^{i\theta}-1\right)d\theta$　　(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|e^{i\theta}-1\right|d\theta$

(茨城大 2006)　　(m20061704)

0.449 (1) 2 次元ユークリット空間（即ち平面）$\mathbb{R}^2$ の部分集合に関する次の性質を考える：
(1) 開集合である；**(2)** 閉集合である；**(3)** コンパクトである；**(4)** 連結である．
次の条件を満たす空でない部分集合の例をひとつずつあげよ：

(a) **(1)** かつ **(2)**　　(b) **(1)** であるが **(2)** ではない

(c) **(1)** ではないが **(2)** である　　(d) **(1)** でも **(2)** でもない

(e) **(3)** でないがその閉包（closure）は **(3)**　　(f) **(4)** でないがその内部（interior）は **(4)**

(2) 整数全体からなる加法群 $\mathbb{Z}$ の部分群をすべてあげよ．

(3) 実数全体からなる集合 $\mathbb{R}$ の 2 つの部分集合 $[0,1]$ と $[0,1]\cup[2,3]$ の間には全単射対応（即ち 1 対 1 かつ上への対応）が存在し得るか否か，その理由もこめて，述べよ．
ここで，$[a,b]=\{x\in\mathbb{R} | a \leqq x \leqq b\}$ である．

(茨城大 2006)　　(m20061707)

0.450 関数 $y=\sin x$ の定義域を $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に制限すると，その逆関数 $y=\mathrm{Arcsin}\,x$ を考えることができる．次の各問に答えよ．

(1) $f(x)=(\mathrm{Arcsin}\,x)^2$ は，どのような 2 つの関数の合成関数とみなすことができるか答えよ．

(2) 合成関数の微分公式に従い，$f(x)=(\mathrm{Arcsin}\,x)^2$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた関数 $f'(x)$ に対して，定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f'(x)dx$ を求めよ．

(茨城大 2007)　　(m20071701)

0.451 (x,y) を平面上の直交座標，(r,θ) を極座標とする．以下の問に答えよ．

$\rho>0$ とする．関数 $f(x,y)=r\sin 2\theta$ の正方形 $A=\{(x,y) \mid 0<x<\rho,\ 0<y<\rho\}$ 上の積分

$$I(\rho)=\iint_A f(x,y)dxdy$$

と扇形 $B=\{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid 0<r<\rho,\ 0<\theta<\pi/2\}$ 上の積分

$$J(\rho)=\iint_B f(x,y)dxdy$$

の大小関係を積分計算によらずに論ぜよ．次に積分計算を行って $I(\rho)$ と $J(\rho)$ を ρ の式で表し，大小関係を比較せよ．

(茨城大 2007)　　(m20071705)

0.452 $x>0,\ y>0$ とする．$a>0,\ 0<b<1$ のとき，以下の各問に答えよ．

(1) 変数変換 $u=xy,\ v=\log\dfrac{y}{x}$ のヤコビ行列式 $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ．log は自然対数である．

(2) 直線 $y=ax,\ y=(a^2+1)x$，および曲線 $xy=b,\ xy=b^2$ で囲まれた領域 $D_{a,b}$ を xy–座標平面に図示せよ．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_{D_{a,b}} dxdy$ に (1) の変数変換を用いて，領域 $D_{a,b}$ の面積 $S(a,b)$ を求めよ．

(4) $\dfrac{\partial S}{\partial a}=\dfrac{\partial S}{\partial b}=0$ となる点 (a,b) を求めよ．その点で $S(a,b)$ が極値をとるかどうか判定せよ．

(茨城大 2008)　　(m20081702)

0.453 次の連立不等式で表される領域を D とする．　$x+y \leqq 2$，　$0 \leqq y \leqq \sqrt{x}$

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．　(2) 領域 D 上の 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (1+y)\,dxdy$ を求めよ．

(茨城大 2008)　　(m20081704)

0.454 n を正の整数とする．C は複素平面上の円 $|z|=\dfrac{1}{2}$ を正の向きに一周する閉曲線とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^n}\,dz$ を求めよ．

(2) $\dfrac{1}{z^n(z-1)}=\dfrac{a_1}{z}+\dfrac{a_2}{z^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{z^n}+\dfrac{b}{z-1}$ を満たすような定数 $a_1,a_2.\cdots,a_n,b$ を求めよ．

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^n(z-1)}\,dz$ を求めよ．

(茨城大 2008)　　(m20081707)

0.455 (1) 関数 $y=\cos(x^2)$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ と $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．

(2) 次の連立不等式で表される範囲を xy 平面に図示せよ．

$$0 \leqq y \leqq \frac{\sqrt{\pi}}{2},\quad y \leqq x \leqq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(3) 次の累次積分の順序を交換し，値を計算せよ．

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\left(\int_y^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\cos(x^2)dx\right)dy$$

(茨城大 2009)　　(m20091701)

0.456 複素数 $z=x+iy$（x,y は実数）の関数 $f(z)=x^2-y^2+y+i(2xy-x)$ について，次の各問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) $f(z)$ はすべての z で正則で，$f'(z)=2z-i$ となることを示せ．

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{f'(z)}dz$ の値を求めよ．ただし，C は複素平面上の円 $|z|=1$ を正の向きに一周する閉曲線とする．

(茨城大 2009)　　(m20091704)

0.457 $f(t)$ を $[0,\infty)$ 上で連続かつ広義積分可能な関数とする．また a,b は $a,b>0$ を満たす実数とし，$g(x,y)=f(a^2x^2+b^2y^2)$ とおく．以下の各問いに答えよ．

(1) $f(t)$ が $[0,\infty)$ 上で広義積分可能であることの定義を記述せよ.

(2) 変数変換

$$\begin{cases} x = \dfrac{r}{a}\cos\theta \\ y = \dfrac{r}{b}\sin\theta \end{cases}$$

によって，$r\theta$ 平面内の集合 $[\,0\,,\,1\,] \times \left[\,0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\,\right]$ は xy 平面内のどのような集合に写るか図示せよ.

(3) 等式

$$\iint_{[0,\infty)\,\times\,[0.\infty)} g(x,y)dxdy = \frac{\pi}{4ab}\int_0^\infty f(t)dt$$

が成り立つことを示せ.

(4)

$$I(a,b) = \iint_{[0,\infty)\,\times\,[0.\infty)} e^{-a^2(x^2+1)-b^2(y^2+1)}dxdy$$

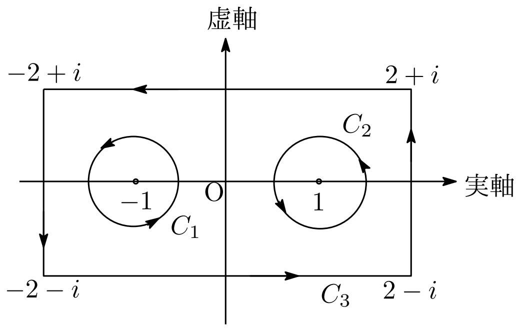
とする．(3) の結果を用いて，条件 $a^2+b^2=1$ の下での $I(a,b)$ の最小値を求めよ.

(茨城大 2009) (m20091706)

0.458 以下の各閉曲線 $C_k(k=1,2,3)$ に沿う複素積分

$$\int_{C_k} \frac{ze^z}{(z+1)(z-1)^2}\,dz \quad (k=1,2,3)$$

の値を求めよ. ただし, 各閉曲線 $C_k(k=1,2,3)$ はいずれも正の向きに一周するものとする.



(1) C_1 : -1 を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周

(2) C_2 : 1 を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周

(3) C_3 : 4 点 $-2-i,\ 2-i,\ 2+i,\ -2+i$ を頂点とする長方形の辺

(茨城大 2010) (m20101704)

0.459 座標平面内の領域 $D = \{(x,y)\,|\,x,\,y$ は実数で $x^2+y^2 \leqq 1$ をみたす $\}$ で定義された 2 変数の関数 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ について, 以下の各問いに答えよ.

(1) $x=0.01,\ y=0.02$ のとき, $f(x,y)$ の値を小数点以下 4 桁まで正確に求めよ.

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ における接平面を H とする.

3 つの座標平面 $x=0,\ y=0,\ z=0$ と H とで囲まれた立体の体積を求めよ.

(3) 二重積分

$$\iint_D x^n y^n f(x,y)\,dxdy$$

の値を, $n=1,\ 2$ についてそれぞれ求めよ.

(茨城大 2010)　　(m20101705)

0.460 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)=x^2+2xy-y^2$ について．以下の各問に答えよ．

(1) すべての $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対し，等式

$$f(x,y)=(\alpha x-y)(\beta x+y)$$

が成り立つように正定数 α, β を定めよ．

また $f(x,y)=0$, $f(x,y)=1$ の軌跡の概形を xy直交座標平面にそれぞれ図示せよ．

(2) 点 (x,y) が原点を中心とする単位円周上を動くとき，関数 $f(x,y)$ の最大値と最小値を求めよ．

(3) 点 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ を中心とする単位閉円盤を D とするとき，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{\pi}\iint_D f(x,y)dxdy=f(a,b)$$

(茨城大 2011)　　(m20111702)

0.461 xy直交座標平面において $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\leqq 1$ と $x\geqq 0$, $y\geqq 0$ とを満たす領域を D とする．二重積分 $\displaystyle\iint_D xydxdy$ の値を求めよ．

(茨城大 2012)　　(m20121702)

0.462 次の連立不等式の表す領域を D とする．

$$y\geqq x\,,\ y\geqq -x\,,\ 4\leqq x^2+y^2\leqq 9$$

以下の各問に答えよ．

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) 極座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ に対して，$J=\dfrac{\partial x}{\partial r}\dfrac{\partial y}{\partial\theta}-\dfrac{\partial x}{\partial\theta}\dfrac{\partial y}{\partial r}$ とおく．J を計算せよ．

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$ を計算せよ．

(茨城大 2012)　　(m20121704)

0.463 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x\tan^{-1}x\,dx$ を計算せよ．ただし，関数 $y=\tan^{-1}x$ は，$y=\tan x$ の定義域を $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ に制限するときに定義される $y=\tan x$ の逆関数を表す．

(茨城大 2013)　　(m20131702)

0.464 有理関数 $f(x)=\dfrac{5}{(x^2+1)(x+2)}$ について，以下の各問に答えよ．

(1) $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}+\dfrac{c}{x+2}$ を満たす定数 a,b,c を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ を求めよ．

(茨城大 2015)　　(m20151701)

0.465 複素関数 $f(z)=(x^2-2x+3)e^{z-1}$ について，以下の各問に答えよ．

(1) $f(z)$ の $z=1$ を中心にするテイラー展開を

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-1)^k$$

と書くとき，a_1, a_2 をそれぞれ求めよ．

(2) C は複素平面上の円 $|z|=2$ を正の向きに一周する閉曲線とする．次の複素積分を計算せよ．

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-1)^n}\,dz$$

ただし，n は 3 以上の自然数とする．

(茨城大 2015)　　(m20151704)

0.466 a を $0 \leq a$ を満たす定数とし，

$$f(x,y)=x^2+y^2-2axy$$

と定める．以下の各問に答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) 次の重積分の値が 0 になるように a を定めよ．

$$\iint_D f(x,y)dxdy\ ,\qquad \text{ただし，}\ D=\Big\{(x,y)\ \Big|\ x^2+y^2\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\Big\}.$$

(茨城大 2015)　　(m20151708)

0.467 xy 平面内の領域 $E=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq y,\ 1\leq y\leq 2\}$ 上の 2 重積分 $\displaystyle\iint_E \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy$ を計算せよ．

(茨城大 2016)　　(m20161703)

0.468 次の連立不等式で表される領域を D とする．　$\frac{1}{2}y \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2$

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) 累次積分 $\displaystyle\int_0^2\left(\int_{\frac{1}{2}y}^1 e^{x^2}dx\right)dy$ の順序を交換して，値を計算せよ．

(茨城大 2016)　　(m20161704)

0.469 $-\infty<x<\infty$ において，微分可能な関数 $y(x)$ が次の等式

$$y(x)=x^2+\int_0^x ty(t)dt$$

を満たしているとする．関数 $y(x)$ を求めよ．

(茨城大 2016)　　(m20161706)

0.470 複素平面において，0 を始点，π を終点とする曲線 $C: z(t)=t+i\sin t \quad (0\leqq t\leqq \pi)$ を考える．以下の各問に答えよ．

(1) 曲線 C を複素平面上に図示せよ．

(2) 導関数 $z'(t)$ を求めよ．

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_C \overline{z}dz$ を計算せよ．ただし，$\overline{z}$ は z の共役複素数を表す．

(茨城大 2016)　　(m20161707)

0.471 n を正の整数，a を正の実数とする．xy 平面内の領域 $D_a = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ x^2+y^2 \leq a^2\right\}$ 上の 2 重積分

$$I_a(n) = \iint_{D_a} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^n} dxdy$$

について，以下の各問いに答えよ．

(1) $I_a(1)$ を求めよ．

(2) $n \geq 2$ のとき，$I_a(n)$ を求めよ．

(3) $n \geq 2$ のとき，極限値 $\lim_{a\to\infty} I_a(n)$ を求めよ．

(茨城大 2017) (m20171703)

0.472 次の関数を考える．

$$f(x,y) = x^2+y^2-(x^2+y^2)^2$$

$0 \leqq t$ に対して $D(t) = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqq 1,\ f(x,y) \geqq t\right\}$ とするとき，次の小問 (1), (2) および (3) に答えよ．

(1) 極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta (r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ を用いて，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_{D(0)} f(x,y)dxdy$$

(2) 平面上の集合 $D(t)$ が表す領域の面積を $F(t)$ とするとき，$F(t)$ を求めよ．
ただし，平面上の集合 $D(t)$ が表す領域が空集合である場合や正の面積を持たない場合の t では $F(t) = 0$ とする．

(3) 次の等式を示せ．

$$\int_0^\infty F(t)dt = \iint_{D(0)} f(x,y)dxdy$$

(茨城大 2018) (m20181703)

0.473 実 2 変数関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

を考える．以下の各問に答えよ．

(1) 原点 $(0,0)$ における $f(x,y)$ の連続性を調べよ．

(2) 原点 $(0,0)$ における $f(x,y)$ の偏微分可能性を調べよ．

(3) 原点 $(0,0)$ における $f(x,y)$ の全微分可能性を調べよ．

(4) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1\right\}$ とする．
$\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ を計算せよ．

(茨城大 2020) (m20201701)

0.474 xy 平面内の領域 $D : 0 \leqq x \leqq 1,\ \sqrt{x^2+3} \leqq y \leqq \sqrt{x^2+8}$ における 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{y^2}dxdy$ を計算せよ．

(茨城大 2020) (m20201704)

0.475 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\}$ とする．このとき，つぎの小問 (1) および (2) に答えよ．

(1) D を xy 平面に図示せよ．

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{(\sqrt{25-6x^2+15y^2})^3}dxdy$ の値を求めよ．

(茨城大 2021)　　(m20211703)

0.476 $\displaystyle\int \frac{\sin^{-1}x}{x}dx$ を計算せよ．

(山梨大 2002)　　(m20021802)

0.477 $f(x,y)=x^2y$ として，次の問に答えよ．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) 領域 $D=\{(x,y)\mid y \geqq x,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ を xy–平面上に図示せよ．

(3) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dy\,dx$ を求めよ．

(4) D での $f(x,y)$ の最大値を求めよ．

(山梨大 2002)　　(m20021803)

0.478 (1) $1+x^3$ を実数の範囲で因数分解せよ．

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^3}dx$ を求めよ．

(3) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=(x+y+1)^3$ を解け．

(山梨大 2002)　　(m20021805)

0.479 (1) 領域 $D=\{(x,y)\mid 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4\}$ を図示せよ．

(2) $\displaystyle\iint_D xydydx$ を求めよ．

(山梨大 2003)　　(m20031803)

0.480 不定積分 $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}dx$ を求めよ．

（山梨大 2004）　　(m20041802)

0.481 (1) $f(x,y)=x^2\sin y+y^3\cos x$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \sin^3 x dx$ を求めよ．

(山梨大 2005)　　(m20051804)

0.482 不定積分 $\displaystyle\int xe^x dx$ を求めなさい．

(山梨大 2006)　　(m20061803)

0.483 (1) 領域 $D=\{(x,y)\mid 0 \leqq x \leqq 2,\ 1 \leqq y \leqq 3\}$ を xy– 平面に図示しなさい．

(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を求めなさい．

(山梨大 2006)　　(m20061804)

0.484 定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta \sin(\lambda x+\mu)dx$ を求め，定数 α, β, λ, μ の式で表しなさい．ただし，$\lambda \neq 0$ とする．

(山梨大 2007)　　(m20071805)

0.485 座標平面上の領域 $D=\left\{(x,y)\mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}\right\}$ を考えるとき，D における二重積分 $\displaystyle\iint_D e^x\sin y\,dxdy$ の値を求めなさい．

(山梨大 2007)　　(m20071806)

0.486 座標平面上に曲線 $y = \cos x$ の $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の部分と x 軸とで囲まれた領域を D とし，関数 $f(x) = e^{\sin x}$ を考える．ここに，e は自然対数の底とする．

(1) $\dfrac{df(x)}{dx}$ を求めなさい．

(2) α が定数のとき，定積分 $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\cos x\,dx$ を α の式で表しなさい．

(3) D における二重積分 $\displaystyle\iint_D f(x)\,dxdy$ の値を求めなさい．

(山梨大 2008)　　(m20081804)

0.487 α を正の定数として，座標平面上の領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq y \leqq \alpha\}$ を考える．このとき，D における二重積分 $\displaystyle\iint_D \cos x \sin y\,dxdy$ を求め，α の式で表しなさい．

(山梨大 2009)　　(m20091804)

0.488 定積分 $\displaystyle\int_2^6 x\sqrt{x-1}\,dx$ の値を求めなさい．

(山梨大 2010)　　(m20101804)

0.489 2 変数関数 $g(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int g(x, 1)dx$ を求めなさい．

(2) 領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$ とするとき，二重積分

$$\iint_D g(x, y)dxdy$$

の値を求めなさい．

(3) $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$ を満たす点 (x, y) を求めなさい．

(4) 上記の領域 D での $g(x, y)$ の最大値を求めなさい．

(山梨大 2011)　　(m20111802)

0.490 領域 $D = \{(x, y) \mid x - y \leqq 1,\ x + y \leqq 1,\ x \geqq 0\}$ に対し，2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y+2)^2}\,dxdy$ を求めなさい．

(山梨大 2011)　　(m20111807)

0.491 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1}\,dx$ の値を求めなさい．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx$ を求めなさい．

(山梨大 2012)　　(m20121801)

0.492 領域 $D = \left\{(x, y) \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq 4x\ ,\ y \geqq 0\right\}$ における二重積分

$$\iint_D y^2\,dxdy$$

の値を求めなさい．

(山梨大 2013)　　(m20131803)

0.493 $-\pi \leqq x \leqq \pi$ で定義された関数 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3)$ を考える．$f_i(x)$ と $f_j(x)$ との内積 $(f_i,\ f_j)$ を $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f_i(x) f_j(x) dx$ と定義するとき，$i,\ j$ をそれぞれ $1, 2, 3$ のいずれかとして，次の設問に答えよ．

(1) $f_1(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}x + 1\right)$，$f_2(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}x - 1\right)$ とすると，$(f_1,\ f_1) = (f_2,\ f_2) = 1$，$(f_1,\ f_2) = 0$ が成り立つことを示せ．

(2) $f_3(x) = ax^2 + b$ $(a,\ b$ は定数$)$ とするとき，$(f_1,\ f_3) = (f_2,\ f_3) = 0$，$(f_3,\ f_3) = 1$ となるような $a,\ b$ を求めよ．

(3) $f_i(-x) = M f_i(x)$ のように，x を $-x$ と変換する操作を M と書く．M によってベクトル $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ はどのように変換されるか，その行列表現を求めよ．

(4) 直交行列 A によってベクトル $\boldsymbol{f}$ が，ベクトル $\boldsymbol{g} = A\boldsymbol{f}$ に移るとする．操作 M によって $\boldsymbol{g}$ がその定数倍になるような A と $\boldsymbol{g}$ を求めよ．

(山梨大 2017)　　(m20171802)

0.494 開区間 $(-\pi,\ \pi)$ において，実関数 $f(x)$ が微分可能であり，その導関数 $f'(x)$ が連続であるとする．このような $f(x)$ を用いて，a_n（但し，n は自然数）が次式で定義されているとき，以下の小問に答えよ．

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

(1) $f(x) = \sin x$ のとき，微分の定義に従って，導関数 $f'(x)$ を導け．

(2) $f(x) = \sin 3x$ のとき，a_n を求めよ．

(3) $f(x) = x$ のとき，a_n を求めよ．

(山梨大 2018)　　(m20181801)

0.495 整数 n，正数 b に対して，$I_n = \displaystyle\int_{-b}^{b} e^x \sin nx\, dx$，$R_n = \displaystyle\int_{-b}^{b} e^x \cos nx\, dx$ とおく．次の小問に答えよ．

(1) $I_n + nR_n$ を求めよ．

(2) $R_n - nI_n$ を求めよ．

(3) I_n と R_n を求めよ．

(4) $b = \pi$ のとき，I_n と R_n を求めよ．

(山梨大 2019)　　(m20191801)

0.496 自然数 n に対して，$P_n(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}\{(x^2 - 1)^n\}$ とする．このとき，$n \neq m$ に対し，次が成立することを証明せよ．

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = 0$$

(信州大 1998)　　(m19981902)

0.497 円周 $x^2 + y^2 = 1$ ，直線 $y = x$ 及び y 軸によって囲まれた第 1 象限内の平面領域を D とする．次の 2 重積分を計算せよ．

$$\iint_D x^3 y\, dx\, dy$$

(信州大 1998)　　(m19981903)

0.498 極座標に変換することによって，次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_{x^2+y^2 \leqq 2y} (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

(信州大 1999) (m19991903)

0.499 $0 < R_1 < R_2$ とする. 次の定積分を求めよ.

$$\int_{R_1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq R_2} \log(x^2+y^2)\,dxdy$$

(信州大 2003) (m20031905)

0.500 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{e^x+e^y}\,dxdy$$

(信州大 2005) (m20051903)

0.501 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq \pi\}$ とする．次の積分の値を求めよ． $\displaystyle\iint_D x^2 \sin(x^2+y^2)dxdy$

(信州大 2007) (m20071903)

0.502 (1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$ を示せ.

(2) $f(x)$ を区間 $[-1,1]$ 上で定義された連続関数とする．このとき，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\int_{-1/n}^{1/n} |f(x)|^n dx \right)^{1/n} = |f(0)|$ となることを示せ.

(信州大 2008) (m20081904)

0.503 (1) $|x| \leq \dfrac{1}{2}$ ならば，$|\log(1+x)-x| \leq 2x^2$ が成立することを証明せよ.

(2) 次の等式を証明せよ.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \log\left(1+\frac{1}{n}\cos\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \cos x\,dx$$

(信州大 2012) (m20121903)

0.504 $\mathbb{R}^2$ の 2 つの閉領域 U, V を

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq 2x+y \leq 1\right\}$$
$$V = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2-3y^2+8xy+1 \geq 0\right\}$$

で定める．次の定積分を求めよ.

$$\iint_{U\cap V} |x-2y|\,dxdy$$

(信州大 2012) (m20121904)

0.505 次の問いに答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dr$ を計算せよ.

(2) 2 重積分 $I_n = \displaystyle\iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ を計算せよ.

ただし，$D_n = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2+y^2 \leqq \left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^2\right\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とする.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．また，$I_n > \pi$ を満たす最小の自然数 n を求めよ.

(信州大 2013) (m20131902)

0.506 重積分 $I = \displaystyle\iint_D \sin(x^2)dxdy$ を求めよ．ただし，$D = \{(x, y) \ : \ 0 \leqq \ y \leqq \ x \leqq \sqrt{\pi}\}$ とする．

(信州大 2014) (m20141902)

0.507 (1) $t = \tan\theta$ のとき，$\sin 2\theta$ を t を用いて表せ．

(2) $t = \tan\theta$ と置換して，不定積分 $\displaystyle\int \frac{d\theta}{1 + \sin 2\theta}$ を求めよ．

(信州大 2015) (m20151902)

0.508 2 重積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{x^2 + 2xy + y^2}$ の値を求めよ．

ただし，$D = \left\{(x, y) \ \middle| \ 1 \leqq \ x^2 + y^2 \leqq \ 4, \ x \geqq \ 0, \ y \geqq \ 0\right\}$ とする．

(信州大 2015) (m20151903)

0.509 $p > 2$ は実数とする．$D_n = \{(x, y) \,|\, 0 \leqq \ x \leqq \ n, \ 0 \leqq \ y \leqq \ n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおき，領域 D_n 上の 2 重積分 $\quad I_n(p) = \displaystyle\iint_{D_n} \frac{dxdy}{(1 + x + y)^p} \quad$ を考える．

(1) $I_n(p)$ を計算し，極限値 $I(p) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n(p)$ を求めよ． (2) $\displaystyle\int_3^\infty I(p)dp$ を計算せよ．

(信州大 2016) (m20161902)

0.510 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - x + 1}$ を求めよ．

(2) 等式 $\dfrac{1}{x^3 + 1} = \dfrac{a}{x + 1} + \dfrac{bx + c}{x^2 - x + 1}$ が x ついての恒等式となるように，定数 a, b, c の値を定めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + 1}$ の値を求めよ．

(信州大 2017) (m20171902)

0.511 $a, \ b$ は定数で $a < b$ とする．$a < p < q < b$ を満たす $p, \ q$ に対して，

$$I(p, q) = \int_p^q \frac{dx}{\sqrt{(b - x)(x - a)}}$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $t = \sqrt{\dfrac{x - a}{b - x}} \quad (p \leqq x \leqq q)$ とおいて，置換積分法により $I(p, q)$ を求めよ．

(2) 極値 $I = \displaystyle\lim_{p\to a+0} \left\{ \lim_{q\to b-0} I(p, q) \right\}$ を求めよ．

(信州大 2018) (m20181902)

0.512 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x + y \leq 2, \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$ とする．次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{x^2 + y^2}{(x + y)^3} dxdy$$

(信州大 2018) (m20181908)

0.513 閉区間 $[0, 1]$ で定義された連続関数 $f(x)$ が開区間 $(0, 1)$ で 2 回微分可能で，次の 2 つの条件

(i) $f(0) = f(1) = 0$

(ii) すべての $0 < x < 1$ に対して

$$(1 - x)f'(x) = 1 - x - 2x \int_1^x \frac{f(t)}{t^3} dt - \frac{f(x)}{x}$$

を満たしているとする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $f''(x)$ を x の有理式で表せ.

(2) $f(x)$ を求めよ.

(信州大 2019)　　(m20191901)

0.514　不定積分 $\int x^3 e^{x^2} dx$ を求めよ.

(信州大 2019)　　(m20191902)

0.515　2 重積分 $\iint_D (x+y)^2 e^{(x-2y)^2} dxdy$ の値を求めよ．ただし，$D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x+y \leqq x-2y \leqq 1\}$ とする.

(信州大 2019)　　(m20191903)

0.516　積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2 + 2xy - 4y^2) dxdy$$

を求めよ.

(信州大 2019)　　(m20191908)

0.517　実数 p は $0 < p \leqq 1$ を満たすとする．$D_n = \left\{(x,y) \;\middle|\; \frac{1}{n} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x - \frac{1}{n}\right\}$ $(n = 2, 3, \cdots)$ とおき，領域 D_n 上の 2 重積分

$$I_n(p) = \iint_{D_n} \frac{dxdy}{(x-y)^p}$$

を考える．このとき, 極限 $\lim_{n\to\infty} I_n(p)$ を調べ．それが存在する場合は極限値を求めよ.

(信州大 2020)　　(m20201902)

0.518　(1) 次の不定積分を求めよ.

$$\int \tan^{-1} \sqrt{x}\, dx$$

(2) $\mathbb{R}^2$ 内の領域 D を $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x+y \leq 1,\ 0 \leq x - 2y \leq 1\right\}$ で定めるとき，2 重積分

$$\iint_D (3x + 2y) dxdy$$

の値を求めよ.

(3) f は $[0,1]$ 上の実数値連続関数で，$\int_0^1 |xf(x)| dx < \infty$ であるとする．このとき，次の関数が $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを示せ.

$$g(x) := \int_0^1 \cos(xy) f(y) dy$$

(信州大 2020)　　(m20201906)

0.519　広義積分 $I = \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2 + \sin x} dx$ の収束・発散を調べよ.

(信州大 2021)　　(m20211902)

0.520　$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leqq x+y \leqq 2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}$ とする．積分 $J = \iint_E \frac{dxdy}{x^2+y^2}$ を求めよ.

(信州大 2021)　　(m20211903)

0.521　$\sqrt{x^2+a} = t - x$ とおいて，置換積分法により不定積分 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ を求めよ．ただし $a \neq 0$ とする.

(信州大 2022)　　(m20221902)

0.522 $D_n = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \leqq x \leqq y\ ,\ \dfrac{1}{n} \leqq y \leqq 1\right\}$ $(n = 2, 3, \cdots)$ とおき，領域 D_n 上の 2 重積分

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

を考える．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

(信州大 2022)　　(m20221903)

0.523 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ dx$ を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\ dx$ を求めよ．ただし，n は正の偶数とする．

(信州大 2023)　　(m20231902)

0.524 2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2\ dxdy$ を求めよ．ただし，$D = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2+y^2 \leqq 2x\right\}$ とする．

(信州大 2023)　　(m20231903)

0.525 自然対数の底を e とする．

(1) 任意の正整数 k に対して，$\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda}\lambda^k = 0$ を証明せよ．

(2) 任意の正整数 n に対して，$g_n(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} x^n e^{-x} dx$ と置くとき，$g_n(\lambda)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty} g_n(\lambda)$ を求めよ．

(新潟大 1998)　　(m19982003)

0.526 $[0,1]\times[0,1]$ 上の関数 f を

$$f(x,y) = \frac{(x+y)-|x-y|}{2}\ ,\quad (0 \leq x \leq 1\ ,\ 0 \leq y \leq 1)$$

と定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(\frac{1}{3}, y)$ 及び $f(\frac{2}{3}, y)$ の y に関するグラフを描け．

(2) $0 \leq x \leq 1$ のとき，$\displaystyle\int_0^1 f(x,y)dy$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dy\,dx$ を求めよ．

(新潟大 1999)　　(m19992003)

0.527 次の問いに答えよ．

(1) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とすると，$\sin x,\ \cos x,\ dx$ は，それぞれ次のように t で表されることを示せ．

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\ ,\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{3\sin x + 4\cos x}dx$ を求めよ．

(新潟大 2000)　　(m20002002)

0.528 非負の整数 n に対して，$\displaystyle I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ とする．このとき，$n > 1$ に対して I_n と I_{n-2} の関係式を求めよ．さらに I_3, I_4 の値を求めよ．

(新潟大 2001)　　(m20012002)

0.529 2重積分 $\displaystyle\iint_D (x^2+2y^2)dxdy$ の値を求めよ．ただし，領域 D は

$D = \{(x,y) : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ y \leqq -2x+1\}$ とする．

(新潟大 2001) (m20012005)

0.530 周期 2π の関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

と書かれた時，$f(x)$ はフーリエ級数展開されたという．一般に，係数 a_n, b_n は

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

として求められる．今，$f(x)$ が，区間 $-\pi < x \leq \pi$ で

$$f(x) = x$$

である時，フーリエ級数の係数 a_n, b_n を求めよ．

(新潟大 2001) (m20012010)

0.531 次の問に答えよ．

(1) 2変数実数値関数 $f(x,y) = x^3 - 6xy + y^3$ の極値を求めよ．

(2) $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 4\}$ とするとき，2重積分 $\displaystyle\iint_D x^2y^2 dxdy$ の値を求めよ．

(新潟大 2003) (m20032003)

0.532 次の問いに答えよ．

(1) 定積分を用いて，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$ を求めよ．

(2) $\beta > 2$ に対して，定積分 $\displaystyle\int_2^{\beta}\frac{dx}{x(\log x)^{\alpha}}$ を求めよ．ただし，$\alpha > 0$ とする．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\log x)^{\alpha}}$ は存在するかどうかを調べ，存在する場合はその値を求めよ．ただし，$\alpha > 0$ とする．

(新潟大 2004) (m20042002)

0.533 自然数 n に対して, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$ とおく. 次の問に答えよ.

(1) 任意の実数 x に対して, $1+x \leqq e^x$ を示せ.

(2) $(1-x^2)^n \leqq e^{-nx^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ および $e^{-nx^2} \leqq (1+x^2)^{-n}$ $(-\infty < x < \infty)$ を示せ.

(3) $x = \cos t$ とおくことにより, $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n dx = I_{2n+1}$ を示せ.

(4) $x = \tan t$ とおくことにより, $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}dx = I_{2n-2}$ $(n \geqq 2)$ を示せ.

(5) $\sqrt{n}\, I_{2n+1} \leqq \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx \leqq \sqrt{n}\, I_{2n-2}$ $(n \geqq 2)$ を示せ.

(新潟大 2005) (m20052003)

0.534 n を2以上の自然数とする．閉区間 $[0,1]$ で定義された関数 $f_n(x)$ と $g_n(x)$ を

$$f_n(x) = e^{-nx}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}, \qquad g_n(x) = e^{-(n-1)x} - e^{-nx}$$

により定める．このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ なる任意の実数 x に対して，不等式 $f_n(x) \leqq g_n(x)$ が成立することを示せ.

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ なる任意の実数 x に対して，不等式 $g_n(x) \leqq \dfrac{1}{n}$ が成立することを示せ.

(3) 不等式 $\displaystyle\int_0^1 f_n(x^2)dx \leqq \frac{1}{n}$ が成立することを示せ.

(新潟大 2006) (m20062005)

0.535 問 (1)〜(4) の不定積分および定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int x dx$ (2) $\displaystyle\int \cos x dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx$ (4) $\displaystyle\int_1^4 (2x^2+3x+1)dx$

(新潟大 2006) (m20062008)

0.536 以下の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int (x^2+1)(x-1)dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+q}dx$ $(q>0)$ (3) $\displaystyle\int e^{-x}\cos(ax)dx$ $(a>0)$

(新潟大 2006) (m20062010)

0.537 関数 $F(x)$ は $\displaystyle F(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$ で与えられるものとする.

また, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x) = \int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることがわかっている.

(1) $\dfrac{dF(x)}{dx}$ を求めよ. (2) $\displaystyle\int_x^\infty e^{-t^2}dt$ を $F(x)$ を用いて表せ.

(3) e^{-t^2} のマクローリン展開（$t=0$ の周りでのテイラー展開）を用いて, $x=0.1$ のときの $F(x)$ の値の近似値を有効数字４桁で求めよ.

(4) 次の定積分の値を求めよ. (a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-a^2t^2}dt$ （a は正の定数とする） (b) $\displaystyle\int_0^\infty t^2 e^{-t^2}dt$

(新潟大 2008) (m20082001)

0.538 $\displaystyle\int_0^\infty e^{ax}|\sin x|\,dx$（ただし $a<0$）を求めたい.

(1) $\displaystyle I_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{ax}|\sin x|\,dx$ としたとき, I_n と I_{n+1} が満たす関係式を求めよ.

(2) $\displaystyle S_n = \sum_{i=1}^{n} I_i$ としたとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を I_1 を用いて表現せよ.

(3) $\displaystyle\int_0^\infty e^{ax}|\sin x|\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$ となる理由を述べよ.

(4) I_1 を実際に計算し, $\displaystyle\int_0^\infty e^{ax}|\sin x|\,dx$ を求めよ.

(新潟大 2010) (m20102005)

0.539 次の二重積分の値を求めよ. ただし, $D_1 : x+y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0$ とする.

$$\iint_{D_1} \sqrt{x+y}\,dxdy$$

(新潟大 2010) (m20102014)

0.540 以下の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{x^3-1}{x^3+x^2+x+1}\,dx$$

(新潟大 2011) (m20112004)

0.541 以下の計算をせよ．

(1) $(xe^x \sin x)'$ (2) $\displaystyle\int xe^x \sin x dx$

(新潟大 2011) (m20112007)

0.542 次の関数 $f(x)$ が $x=0$ において微分可能であるとき以下の問に答えよ．ただし，e は自然対数の底であり，a, b は定数とする．

$$f(x) = \begin{cases} e^x & (x < 0 \text{ のとき}) \\ (ax+b)e^{-x} & (x \geqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(1) 定数 a, b を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，曲線 $y = f(x)$ の概形を描け．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ の値を求めよ．

(新潟大 2012) (m20122009)

0.543 次の定積分を計算せよ．

$$I = \int_D z^2 \, dxdydz \qquad D : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ x, y \geq 0$$

(新潟大 2012) (m20122012)

0.544 関数 $f(x) = x^2 e^{-2x}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点の x 座標を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ の概形を描け．

(3) 広義積分

$$\int_0^{\infty} f(x)dx$$

を求めよ．

(新潟大 2013) (m20132003)

0.545 以下の問に答えよ．

(1) $F(\omega) = \displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-j\omega t}dt$ を求め，$F(\omega)$ のグラフを描け．

(2) $F'(\omega) = \dfrac{dF(\omega)}{d\omega}$ を $\omega = 0$ 以外で求めよ．

(3) $y = \tan(a\omega)$ のグラフを，横軸を $a\omega$ 軸，縦軸を y 軸とする座標平面に，$-\dfrac{\pi}{2} \leq a\omega \leq \dfrac{5\pi}{2}$ の範囲で描け．

(4) $F(\omega) = 0$ となる $a\omega$ の値の位置を，問 (3) で描いた座標平面に $\bullet$ 印で示せ．

(5) $F'(\omega) = 0$ となる $a\omega$ の値の位置を，問 (3) で描いた座標平面に $\odot$ 印で示せ．

(新潟大 2014) (m20142004)

0.546 次の定積分を求めよ．

$$\int_{-1}^{1} (2x+1)^2 dx$$

(新潟大 2014) (m20142007)

0.547　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int (5x-4)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sqrt{x^5}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int x\cos x\,dx$

(新潟大 2014)　　(m20142014)

0.548　定積分 $\displaystyle -\int_{1/e}^{1} x\log x\,dx$ を計算せよ．

(新潟大 2015)　　(m20152002)

0.549　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx$ を求めよ．

(新潟大 2015)　　(m20152008)

0.550　次の (1)～(3) の不定積分を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $\displaystyle\int (6x-1)^3\,dx$　　(2) $\displaystyle\int x\sqrt{3x-1}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \log_e x\,dx$

(新潟大 2015)　　(m20152014)

0.551　不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+1}\,dx$ を求めよ．

(新潟大 2015)　　(m20152018)

0.552　自然数 n に対して，

$$I_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx\ ,\qquad J_n=\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx$$

とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　次の公式を利用して，$I_{n+2}=I_n$ を示せ．

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

(2)　I_n を求めよ．

(3)　数列 $\{J_n\}$ が等差数列になることを示せ．

(4)　J_n を求めよ．

(新潟大 2016)　　(m20162011)

0.553　$D=\left\{(x,y)\ ;\ x\geq 0,\ x\geq y,\ 1\leq x^2+y^2\leq 2\right\}$ のとき次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$$

(新潟大 2017)　　(m20172004)

0.554　次の定積分を求めよ．　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\ dx$

(新潟大 2017)　　(m20172010)

0.555　つぎの (a)～(c) の不定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+2}$　　(b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$　　(c) $\displaystyle\int \log_e x dx$

(新潟大 2017)　　(m20172013)

0.556　(1)　$\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ の導関数を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を求めよ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\,dx$ を求めよ．

(新潟大 2017)　　(m20172019)

0.557 次の (1)〜(3) の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \left(\frac{x+3}{x}\right)^2 dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(2x-1)^3}dx$　　(3) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos x dx$

(新潟大 2018)　　(m20182002)

0.558 原点を中心として球対称な密度分布 $\rho(r) = B\left(1-\dfrac{r}{R}\right)$ が存在する．ここで r は原点からの距離である．ただし，B は定数で，$R<r$ では $\rho(r)=0$ である．

(1) 半径 $r+\triangle r$ の球面と半径 r の球面に挟まれた領域の体積 $\triangle V$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\triangle r}{r} \ll 1$ とすると，近似的に $\triangle V$ は $\triangle r$ に比例し，$\triangle V = f(r)\triangle r$ と書ける．$f(r)$ を求めよ．

(3) $\triangle V$ の領域内の質量は $\rho(r)\triangle V = f(r)\rho(r)\triangle r$ となることから，半径 r の球面より内側に含まれる質量 $M(r)$ は，$M(r) = \displaystyle\int_0^r f(r')\rho(r')dr'$ となる．$r \leqq R$ に対して，$M(r)$ を求めよ．

(4) 密度分布が球対称である場合には，r の位置にある質点が受ける単位質量あたりの重力の大きさ F_G は，$F_G(r) = \dfrac{GM(r)}{r^2}$ となる．$r \leqq R$ と $R<r$ のそれぞれについて，$F_G(r)$ を求めよ．

(5) 横軸を r，縦軸を $F_G(r)$ とするグラフの概形を描け．

(新潟大 2018)　　(m20182006)

0.559 $a,\ b$ を $0<a<b<1$ となる実数とする．このとき，定積分 $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$ を求めよ．

(新潟大 2018)　　(m20182009)

0.560 自然数 n に対して，

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$

と定義する．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $H_1(x),\ H_2(x),\ H_3(x),\ H_4(x)$ を求めよ．

(2) $\dfrac{d}{dx}H_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$ を示せ．

(3) $H_n(x)$ は n 次の多項式であることを示せ．

(4) $n \geqq 3$ のとき，任意の実数 $T>0$ に対して

$$\int_0^T xH_n(x)e^{-x^2}dx = -TH_{n-1}(T)e^{-T^2} - H_{n-2}(T)e^{-T^2} + H_{n-2}(0)$$

なることを示せ．

(5) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty xH_6(x)e^{-x^2}dx$ を求めよ．

(新潟大 2018)　　(m20182011)

0.561 不定積分 $\displaystyle\int \sin^2 x\cos x dx$ を求めよ（積分定数は C とせよ）．

(新潟大 2019)　　(m20192002)

0.562 $D=\left\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\leq 1,\ 0\leq x\leq y\right\}$ のとき，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D 2y\ dxdy$$

(新潟大 2019)　　(m20192005)

0.563 整数 $n\geqq 0$ に対して，$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$ とする．次の各問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して $I_{2n-1}=\dfrac{(2^n\cdot n!)^2}{2n\cdot(2n)!}$，$I_{2n}=\dfrac{(2n)!}{(2^n\cdot n!)^2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}\cdot(n!)^2}{\sqrt{n}\cdot(2n)!}$ を求めよ．

(新潟大 2019)　　(m20192014)

0.564 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leq x\leq 1,\ x\leq y\leq 1\right\}$ のとき，次の重積分の値を求めよ．積分順序を変更してもよい．

$$\iint_D \sin(\pi y^2)dxdy$$

(新潟大 2020)　　(m20202005)

0.565 (1) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{x+3}{(x+1)^2(x-2)}dx$ を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{2+\cos x}dx$ を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222002)

0.566 次の重積分を，積分の順序を変えて，<u>2 通り</u> に計算せよ．

$$\iint_D 2x^2y\ dxdy,\qquad D=\{(x,y)\ ;\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq x\ \}$$

(新潟大 2022)　　(m20222010)

0.567 x がすべての実数の範囲を動くとき，次の関数の最大値，最小値を求めよ．

$$f(x)=\int_0^{\pi}\left\{\sin t-\sin(x-t)\right\}dt$$

(長岡技科大 1991)　　(m19912102)

0.568 次の定積分 I_n ($n=0,1,2,3,\cdots$) について，以下の問に答えよ．

$$I_n=\int_0^{\pi}\cos^{2n}\theta\, d\theta$$

(1) I_0 および I_1 を求めよ．

(2) $n=1,2,3,\cdots$ に対して，I_n を I_{n-1} で表せ（部分積分法を利用せよ）．

(3) I_n を n の式で表せ．

(長岡技科大 1992)　　(m19922101)

0.569 $D=\left\{\ (x,y)\ \middle|\ x+y\leqq 1\ ,\ x\geqq 0\ ,\ y\geqq 0\ \right\}$ とするとき，次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D xy\,dx\,dy$$

(長岡技科大 1992)　　(m19922104)

0.570 $n=0,1,2,\cdots$ に対して $I_n=\displaystyle\int_0^1(\log x)^n\,dx$ とおく．ここで，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x(\log x)^n$ を求めよ.

(2) I_0 , I_1 を求めよ.

(3) I_n を n の式で表せ.

(長岡技科大 1995） (m19952101)

0.571 任意の 2 次関数 $f(x)$ に対して

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = af(-1) + bf(0) + cf(1)$$

となるような定数 a, b, c を求めよ.

(長岡技科大 1997) (m19972102)

0.572 $f(x)$ を連続関数とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x (x-t)f(t)dt$ を求めよ.

(2) 次の等式が成り立つような $f(x)$ を求めよ.

$$-f(x) = x + \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

(長岡技科大 1998) (m19982103)

0.573 (1) xy 平面における領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x + y \leqq 1 \, , \, 0 \leqq x - y \leqq 1\}$ を図示せよ.

(2) (1) の D に対して重積分 $\displaystyle\iint_D (x-y)\, e^{x+y}\, dxdy$ を求めよ.

(長岡技科大 1998) (m19982104)

0.574 関数 $f(x) = 2|x| + x$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $y = f(x)$ のグラフをかけ.

(2) $F(t) = \displaystyle\int_t^{t+1} f(x)dx$ とおく．t がすべての実数の範囲を動くとき，$F(t)$ の最小値を求めよ.

(長岡技科大 1999) (m19992102)

0.575 自然数 n について，定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos nx\, dx$ の値を求めよ.

(長岡技科大 2000) (m20002102)

0.576 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$ を求めよ.

(長岡技科大 2001) (m20012102)

0.577 (1) 1 周期が T である関数 $f(t)$ は, 以下のようにフーリエ級数展開される.

$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ として C_n および θ_n を, a_n および b_n で表せ. 但し, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ とする.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t\Big) \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\big(n\omega_0 t - \theta_n\big) \end{aligned}$$

(2) 上式におけるフーリエ係数 a_n および b_n は, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ として,

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt \quad , \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により計算できる. 1 周期において, 次式で定義される関数 $f(t)$ をフーリエ級数展開せよ.

$$f(t) = \begin{cases} -1 & , \quad -\dfrac{T}{2} \leq t < 0 \\ 1 & , \quad 0 \leq t \leq \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

(3) $\sin^2 t$ および $\sin^3 t$ を, それぞれフーリエ級数展開せよ.

(4) $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$ となることを証明せよ.

(長岡技科大 2005) (m20052106)

0.578 連続時間 $t[s]$ の関数 $f(t)$ のフーリエ変換は,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

により計算される．このことを利用して以下の問に答えよ．ただし，$j = \sqrt{-1}$ であり，ω [rad/s] は角周波数を表す．また，a は正の実数とする．

(1) 関数 $f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < t < a \\ 0 & , \quad t < 0,\ t > a \end{cases}$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，$f(t)$ と $|F(\omega)|$ をそれぞれ図示せよ．ただし，$|F(\omega)|$ は複素関数 $F(\omega)$ の絶対値を意味する．

(2) $f(t) = \begin{cases} \exp(-at) & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，$f(t)$ と $|F(\omega)|$ をそれぞれ図示せよ．

(3) $f(t-a)$ のフーリエ変換が $F(\omega)e^{-j\omega a}$ となることを証明せよ．

(4) $f(at)$ のフーリエ変換が $a > 0$ に対して $\dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$ となることを証明せよ．

(長岡技科大 2006) (m20062105)

0.579 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ の値を求めなさい.

(2) 区間 $[a, b]$ における連続関数 $f(x)$ の定積分 $S = \displaystyle\int_a^b f(x) dx$ の値を求めたい．$[a, b]$ を幅 $\dfrac{b-a}{n}$ の小区間に n 等分し，その分点を $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ とする．各小区間上に作られる台形の面積の和 $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{f(a_{k-1}) + f(a_k)}{2} \cdot \dfrac{b-a}{n} \quad$ を S の近似値とする．この近似法を台形公式という．区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ を 3 等分して，台形公式による $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ の近似値 S_3 を求めなさい.

(長岡技科大 2007) (m20072104)

0.580 (1) 不定積分 $\displaystyle\int xe^{-x^2} dx$ を求めなさい.

(2) xy 平面で，$t \leqq x^2 + y^2 \leqq 2t$ を満たす部分を D_t とする．D_t の概形をかき，その面積を求めなさい.

(3) t が正の実数の範囲を動くとき，2 重積分 $V(t) = \displaystyle\iint_{D_t} e^{-x^2-y^2} dxdy$ の最大値を求めなさい.

(長岡技科大 2009) (m20092103)

0.581 xy 平面上において, $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ で表される領域を D とし, $-x \leqq y \leqq -x+1,\ x \leqq y \leqq x+1$ で表される領域を E とする. 以下の問いに答えなさい.

(1) E の概形を描き, その面積を求めなさい.

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2\, dxdy$ を求めなさい.

(3)　2 重積分 $\displaystyle\iint_E (x+y)^2\,dxdy$ を求めなさい.

(長岡技科大 2010)　　(m20102103)

0.582　xy 平面において，$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1$ で表される領域を D とする．以下の問いに答えなさい.

(1)　D の概形をかき，その面積を求めなさい.

(2)　2 重積分 $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ を求めなさい.

(長岡技科大 2012)　　(m20122102)

0.583　xy 平面において，連立不等式 $\sqrt{y} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ で表される領域を D とする．下の問いに答えなさい.

(1)　領域 D を図示しなさい.

(2)　連立不等式 $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq f(x)$ で表される領域が D であるような $f(x)$ を求めなさい.

(3)　積分順序の変更をして，重積分 $V = \displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{1+x^3}\,dxdy$ を求めなさい.

(長岡技科大 2016)　　(m20162104)

0.584　x, y を実数とし，2 変数関数 $f(x,y)$ を累次積分

$$f(x,y) = \int_y^{y+1} \int_x^{x+1} (3u^2+3v^2)\,dudv$$

で定義する．下に問いに答えなさい.

(1)　$f(x,y)$ を求め，x, y で表しなさい.

(2)　$f(x,y)$ の x, y についての偏導関数 $f_x,\ f_y$ および第 2 次偏導関数 $f_{xx},\ f_{xy},\ f_{yy}$ を求めなさい.

(3)　$f(x,y)$ の極値を求めなさい.

(長岡技科大 2019)　　(m20192103)

0.585　xy 平面において，領域 $S,\ T$ を

$$S\ :\ x^2+y^2 \leqq 1$$

$$T\ :\ 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ 0 \leqq y \leqq x$$

と定義する．下の問いに答えなさい.

(1)　重積分 $\displaystyle\iint_S (x^2+y^2)dxdy$ を求めなさい.

(2)　重積分 $\displaystyle\iint_T \tan^{-1}\frac{y}{x}dxdy$ を求めなさい.

(長岡技科大 2020)　　(m20202103)

0.586　xy 平面において，D を不等式

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1$$

で表される領域とする．下の問いに答えなさい.

(1)　重積分 $\displaystyle\iint_D e^{x+y}dxdy$ を求めなさい.

(2)　$s = x+y,\ t = x-y$ とおくとき，行列式 $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}$ を求めなさい.

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{(x+y)^2}dxdy$ を求めなさい.

(長岡技科大 2021)　　(m20212103)

0.587 (1) 極限 $L=\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x$ を求めなさい.

(2) 広義積分 $I_1=\displaystyle\int_0^1\log x dx$ を求めなさい.

(3) 広義積分 $I_2=\displaystyle\int_0^1\left\{\int_0^1\frac{x}{1-xy}dy\right\}dx$ を求めなさい.

(長岡技科大 2022)　　(m20222102)

0.588 次の積分を行いなさい.　$a>0$ で a は定数.

(1) $\displaystyle\int x^2\cdot e^{ax}dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2}$

(金沢大 1999)　　(m19992202)

0.589 (1) 極座標変換 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ に対して，ヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ.

(2) 重積分

$$\iint_{x^2+y^2\leqq 1}\sqrt{x^2+y^2}\,\exp\Big(-\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^3\Big)dxdy$$

を求めよ．ただし， $\exp(t)=e^t$ である.

(金沢大 1999)　　(m19992204)

0.590 関数 $f(t)$ は 2 回連続的微分可能で， $f(t),f'(x),f''(x)$ は有界とする.

$s>0$ に対して $g(s)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$ とするとき，次の問に答えよ.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}f''(x)\,dt=s^2g(s)-sf(0)-f'(0)$ を示せ.

(2) ω は定数とする． $f(t)=\sin\omega t$ のとき， $g(s)$ を求めよ.

(金沢大 1999)　　(m19992212)

0.591 (1) マクローリンの展開

$$\sqrt{1-x}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

の係数 a_0,a_1,a_2,a_3 を求めよ.

(2) $\sqrt{1-x}\fallingdotseq a_0+a_1x$ を用いて，積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-c\sin^2\theta}\,d\theta\quad(0<c<1)$$

の値がおよそ $\dfrac{\pi}{2}\left(1-\dfrac{c}{4}\right)$ であることを示せ.

(金沢大 2000)　　(m20002201)

0.592 変数変換 $\begin{cases} x=ar\cos\theta \\ y=br\sin\theta \end{cases}$ (a,b は正定数) に対して，次の問いに答えよ.

(1) $0\leqq r\leqq 1$, $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，(x,y) の動く領域 D を図示せよ.

(2) ヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ.

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$ を求めよ．

(金沢大 2000)　　(m20002202)

0.593 重積分 $\displaystyle I=\iint_D \frac{x}{y\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dxdy$ について次の問に答えよ．

ここに　$D=\left\{(x,y)\ :\ y\geq x\geq 0\ ,\ \dfrac{1}{2}\leq x^2+y^2\leq 1\right\}$　とする．

(1) D の形を図示せよ．

(2) 極座標変換 $\left\{\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{array}\right.$ を用いて重積分 I の値を求めよ．

(金沢大 2001)　　(m20012202)

0.594 不等式 $\displaystyle\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy<\iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ を利用して次の問いに答えよ．

ただし，$D_1=\{(x,y):0\leqq\ x\leqq\ 1,\ 0\leqq\ y\leqq\ 1\}$，$D_2=\{(x,y):x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0,\ x^2+y^2\leqq\ 2\}$ とする．

(1) $\displaystyle\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy<\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$ を示せ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx<\sqrt{\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)}$ を示せ．

(金沢大 2002)　　(m20022202)

0.595 関数 $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(2) 閉領域 $D(a)=\big\{(x,y)|1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ a\big\}$ $(a>1)$ に対して　$\displaystyle\iint_{D(a)} f(x,y)dxdy=\frac{\pi}{2}$

であるとき，a の値を求めよ．

(金沢大 2003)　　(m20032202)

0.596 閉領域 $D(R)=\{(x,y)\mid 1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ R^2\}$ $(R>1)$ に対して，

$$I_a(R)=\iint_{D(R)}\frac{1}{(x^2+y^2)^a}dxdy\quad (a>0)$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $I_a(R)$ を求めよ.

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} I_a(R)$ を調べよ.

(金沢大 2004)　　(m20042202)

0.597 領域 $D(R)=\big\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\leqq\ R^2\ ,\ y\geqq\ |x|\big\}$ $(R>0)$ に対して

$$I(R)=\iint_{D(R)}(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)^2}dxdy$$

とおく. 次の問に答えよ.

(1) $I(R)$ を計算せよ.

(2) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} I(R)$ を求めよ.

(金沢大 2005)　　(m20052203)

0.598　a, b は正の実数とする.

(1)　$\dfrac{x}{a} = r\cos\theta,\ \dfrac{y}{b} = r\sin\theta \quad (0 < r,\ 0 < \theta < 2\pi)$　とおくとき, ヤコビアン

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$　を求めよ.

(2)　積分 $\displaystyle\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dxdy$　を計算せよ. ただし, $D = \left\{(x,y) \,\middle|\, y \geqq 0,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1\right\}$ とする.

(金沢大 2005)　　(m20052207)

0.599　３次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とします. x, y, z は直交座標系の座標で, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は, 規格化された基底ベクトルです. ３次元ベクトル場

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{grad}\ U(r)$

について以下の問に答えなさい. ここで,

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}\ ,\quad U(r) = \exp(-ar)$$

で, a は定数です.

(1)　div $\boldsymbol{A}$　　　　(2)　rot $\boldsymbol{A}$

(3)　３次元ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を, 中心が座標の原点で半径が R の球の球面上を面積分した値 B を求めなさい.

$$B = \oint \boldsymbol{A} \cdot da$$

(金沢大 2005)　　(m20052210)

0.600　関数 $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad ((x,y) \neq (0,0))$　について, 次の問に答えよ.

(1)　$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を計算せよ.

(2)　$0 < \varepsilon < 1$ とする. 積分　$I(\varepsilon) = \displaystyle\iint_{\varepsilon \leqq \sqrt{x^2+y^2} \leqq 1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dxdy$　を求めよ.

(3)　$\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} (\sin\varepsilon) I(\varepsilon)$ を求めよ.

(金沢大 2006)　　(m20062203)

0.601　領域 $D(\varepsilon) = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1 - \varepsilon,\ |y| \leqq x\} \quad (0 < \varepsilon < 1)$ に対して
$I(\varepsilon) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\iint_{D(\varepsilon)} \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$　とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

(1)　領域 $D(\varepsilon)$ を図示せよ.　　(2) $I(\varepsilon)$ を計算せよ.　　(3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\log I(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}$ の値を求めよ.

(金沢大 2007)　　(m20072203)

0.602　$D = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ とする. 次の積分の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy$　　　　(2) $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+2xy+4y^2)} dxdy$

(金沢大 2007)　　(m20072207)

0.603 n を自然数とし，I_n を次の広義積分で定める．$I_n = \displaystyle\int_1^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$ このとき，次の問いに答えよ．

(1) I_1 の値を求めよ．

(2) $n \geq 2$ のとき，次の漸化式が成り立つことを示せ． $I_n = \dfrac{1}{e} + (n-1)I_{n-1}$

(3) 次式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ． $I_n = \dfrac{(n-1)!}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$

(4) 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{(n-1)!}$

(金沢大 2007) (m20072210)

0.604 (1) 自然数 n に対して，集合 $D_n = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq n^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ における関数 $e^{-x^2-y^2}$ の積分 $\displaystyle\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ．

(2) 集合 $R_n = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \leq x \leq n,\ 0 \leq y \leq n\}$ に対して，
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\iint_{R_n} e^{-x^2-y^2}dxdy - \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy\right) = 0$ となることを示せ．

(3) 次の積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

(金沢大 2007) (m20072212)

0.605 (1) 変数変換 $x = u,\ y = uv$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ を求めよ．

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy,\ D = \{(x, y) \mid 1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq x\}$ を求めよ．

(3) $R > 1$ とし，$D_R = \{(x, y) \mid 1 \leqq x \leqq R,\ 0 \leqq y \leqq x\}$ とおく．実数 α について，極限値
$\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\iint_{D_R}\frac{x^\alpha}{x^2+y^2}dxdy$ が存在するかどうか調べよ．存在する場合はその値を求めよ．

(金沢大 2008) (m20082203)

0.606 $D = \{(x, y)\ ;\ 0 \leq y < x \leq 1\}$ とする．$0 < \alpha < 1$ のとき，広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{(x^2-y^2)^\alpha}dxdy$ の値を求めよ．

(金沢大 2008) (m20082207)

0.607 実数 x と正の整数 n に対して，$R_n(x)$ を

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} + R_n(x)$$

によって定める．ただし，$\arctan x$ は $y = \tan x\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数である．このとき，次に答えよ．

(1) $1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-t^2)^{n-1} = \dfrac{1-(-t^2)^n}{1+t^2}$ を用いて，$R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-t^2)^n}{1+t^2}dt$ となることを示せ．

(2) $|x| \leq 1$ のとき $R_n(x) \to 0\ (n \to \infty)$ となることを示せ．

(金沢大 2008) (m20082208)

0.608 次の問に答えよ．

(1) 変数変換 $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ．ただし，a, b は正の定数とする．

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(1+2x^2+y^2)^2}\,dxdy,\quad D = \{(x, y)\ :\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ を求めよ．

(金沢大 2009)　　(m20092203)

0.609 (1) $x = u\cosh v\,,\ y = u\sinh v$ とおく.

$$1 \leqq\ u \leqq\ 2\,,\ -\infty < v < \infty \text{ のとき } x \geqq\ 1\,,\ 1 \leqq\ x^2 - y^2 \leqq\ 4$$

となることを示せ. ただし, $\cosh v = \dfrac{e^v + e^{-v}}{2}$, $\sinh v = \dfrac{e^v - e^{-v}}{2}$ である.

(2) 変数変換 $x = u\cosh v\,,\ y = u\sinh v$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

(3) 重積分

$$\iint_D \frac{\log(x^2 - y^2)}{x}\,dxdy$$

を計算せよ. ただし $D = \left\{(x,y)\,|\,x \geqq\ 1,\ 1 \leqq\ x^2 - y^2 \leqq\ 4\right\}$ とする.

(金沢大 2010)　　(m20102203)

0.610 次の広義積分を計算せよ.

(1) $D = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2\,|\,x,y \geqq\ 0\right\}$ とするとき

$$\iint_D x^2 e^{-x^2-y^2}\,dxdy\ .$$

(2) $E = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2\,|\,x,y \geqq\ 0,\ x+y \leqq\ 1,\ (x,y) \neq (0,0)\right\}$ とするとき

$$\iint_E \log(x+y)\,dxdy\ .$$

(金沢大 2010)　　(m20102208)

0.611 次の不定積分をしなさい.

$$\int x\cos x\,dx$$

(金沢大 2010)　　(m20102210)

0.612 関数 $f(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ.

(2) $D_a = \{(x,y)\mid x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0,\ 2 \leqq\ x^2 + y^2 \leqq\ a^2\}$ とする.

$$\lim_{a\to\infty}\iint_{D_a}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy$$

を求めよ.

(金沢大 2011)　　(m20112203)

0.613 次の問に答えよ.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$ の値を求めよ.

(2) 自然数 n に対して $I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx$ とおくとき, 広義積分 I_n と I_{n+1} の間に成り立つ関係式を求めよ.

(3) I_n の値を求めよ.

(金沢大 2011)　　(m20112206)

0.614 (1) 変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0)$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ.

(2) 重積分

$$\iint_{x^2+y^2 \leqq 2} \log(1+x^2+y^2)\,dxdy$$

を計算せよ.

(金沢大 2012) (m20122203)

0.615 $x>0$ で定義された関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $f'(x) < 0$ となる x の範囲を求めよ.

(2) $N \geqq 3$ に対して,

$$\sum_{n=3}^{N} f(n) < \int_2^N f(x)dx$$

が成り立つことを示せ. ただし必要ならば, $e < 3$ であることは証明なしで用いてよい.

(3) $f(x)$ の不定積分を求めよ.

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ が収束することを示せ.

(金沢大 2012) (m20122206)

0.616 $x \geqq 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ が

$$0 \leqq f(x) \leqq \int_0^x f(t)dt$$

を満たすとする. 次の (1)〜(3) を示せ,

(1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\dfrac{d}{dx}\log\left(\varepsilon + \displaystyle\int_0^x f(t)dt\right) < 1$.

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $f(x) < \varepsilon e^x$.

(3) 任意の $x \geqq 0$ に対して $f(x) = 0$.

(金沢大 2013) (m20132203)

0.617 $a>0,\ t>0$ とする. $I_a(t) = \displaystyle\int_0^a t^x dx$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $I_a(1)$ を求めよ.

(2) $t \neq 1$ のとき $I_a(t)$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{t\to1} I_a(t)$ を求めよ.

(金沢大 2013) (m20132207)

0.618 $0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2}$ とし,

$$D_\varepsilon = \left\{(x,y)\,\middle|\, x \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq (\tan\varepsilon)x\right\},$$

$$I_\varepsilon = \iint_{D_\varepsilon} xy^2 dxdy$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) D_ε を図示せよ.

(2) I_ε を求めよ.

(3) $\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{-3}(I_\varepsilon - a) = b$ となる定数 a, b を求めよ.

(金沢大 2013)　　(m20132208)

0.619　関数 $\varphi(x) = x \log x \ (x > 0)$ について，次の問いに答えよ.

(1) $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ を求めよ.

(2) テイラーの定理を適用して，$\varphi(x)$ の $x = 1$ における 1 次の近似式 $p(x)$ および剰余項 R_2 を求めよ.

(3) (2) の $p(x)$ に対し，$x > 0$ において $\varphi(x) \geqq p(x)$ が成り立つことを示せ.

(4) 閉関数 $[0, 1]$ で定義された正の値をとる連続関数 $f(x)$ が $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ を満たすとする．このとき

$$\int_0^1 \varphi\left(f(x)\right)\,dx \geqq 0$$

が成り立つことを示せ.

(金沢大 2014)　　(m20142202)

0.620　$D = \left\{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leqq x,\ y \geqq 0\right\}$ とおく．次の問いに答えよ.

(1) D を図示せよ.

(2) 極座標による変数変換を用いて，2 重積分

$$\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy$$

を計算せよ.

(金沢大 2014)　　(m20142203)

0.621　$D\left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid -1 \leqq x + y \leqq 1,\ y - x \leqq 1\right\}$ とするとき, 広義積分

$$\iint_D (x^2 - y^2)^2 e^{y-x} dxdy$$

の値を求めよ.

(金沢大 2014)　　(m20142206)

0.622　実数 ℓ に対して，連続関数 $f_\ell : (-\pi,\ \pi) \to \boldsymbol{R}$ を

$$f_\ell(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\sin \ell\theta}{\sin\theta} & (\theta \neq 0), \\ a & (\theta = 0) \end{cases}$$

と定める．次の問いに答えよ.

(1) a を求めよ.

(2) f_ℓ は $\theta = 0$ で微分可能であることを示せ.

(3) 積分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_\ell(\theta)d\theta$ の値を $\ell = 2, 3$ の場合に求めよ.

(金沢大 2014)　　(m20142208)

0.623　(1) $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(-1 < x < 1)$ を示せ．ここで，$\sin^{-1} x$ は逆正弦関数を表す.

(2) 座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi)$$

に対するやコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ.

(3) 重積分

$$\iint_D \frac{y}{(x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy$$

を求めよ. ただし, $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; \dfrac{1}{4} \leqq\ x^2+y^2 \leqq \dfrac{3}{4},\ 0 \leqq\ y \leqq\ x\right\}$ とする.

(金沢大 2015) (m20152203)

0.624 次の広義積分の収束・発散を判定せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+3x}$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ (3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$

(金沢大 2015) (m20152206)

0.625 有界閉領域 D, E を

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 \;\middle|\; \frac{1}{2} \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ x\right\},$$

$$E = \left\{(r,\theta) \in R^2 \;\middle|\; -\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4},\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq\ r \leqq\ \cos\theta\right\}$$

とする. 次の問いに答えよ.

(1) D を図示せよ.

(2) 写像 $T : R^2 \to R^2$ を

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

とする. $(r,\theta) \in E$ のとき $T(r,\theta) \in D$ であることを示せ.

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$ の値を求めよ.

(金沢大 2015) (m20152208)

0.626 次の微分, 積分を計算しなさい.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(x^{\sin x}\right)$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

(金沢大 2015) (m20152209)

0.627 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = xi + yj + zk$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 曲面 S の面要素を dS, dS に垂直な単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ として以下の問いに答えなさい.

(1) $\nabla \cdot \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ を計算しなさい. ただし $y \neq 0$ とする.

(2) 原点 O を含まない閉曲面 S に対して, 以下の面積分を求めなさい.

$$\iint_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}dS$$

(3) 原点 O を含む半径 a の球面 S に対して, 次の式が成り立つことを示しなさい.

$$\iint_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}dS = 4\pi$$

(4) (3) の関係式が, 原点 O を含む任意の閉曲面 S に対して成り立つことを示しなさい.

(金沢大 2015)　　(m20152210)

0.628 $Q_0(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $Q_n(t)$ は n 次式 $(n=1,2,3)$ で

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(Q_n(t))^2\,dt=1$,

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1}Q_m(t)Q_n(t)dt=0\ \ (0\leqq\ m<n\leqq\ 3)$,

(c) $Q_n(t)$ の t^n の係数は正

とする．このとき $Q_n(t)\ \ (n=1,2,3)$ を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162203)

0.629 λ を実数，$t>0$ とする．このとき，閉領域

$$D_t=\left\{(x,y)\in R^2\mid x\geqq\ 0,\ x^2+y^2\leqq\ t^2\right\}$$

上の重積分

$$I(t)=\iint_{D_t}(1+x^2+y^2)^{\lambda}dxdy$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) $I(t)$ を具体的に t の式で表せ.

(2) $t\to\infty$ としたとき，$I(t)$ の収束・発散を調べ，収束する場合はその極限値を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162205)

0.630 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1\leqq\ x+y\leqq\ 5,\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0\right\}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) 変数変換 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}u+\dfrac{1}{2}v \\ y=\dfrac{1}{2}u-\dfrac{1}{2}v \end{cases}$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

(2) (1) の変数変換で，領域 D に対応する uv 平面の領域を E とする．領域 E を図示せよ.

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D\frac{x^2+y^2}{(x+y)^3}dxdy$ の値を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162208)

0.631 始点 $(0,0,0)$ と終点 $(1,1,1)$ を直線で結ぶ経路を C とする．経路 C に沿ったベクトル関数 $\boldsymbol{A}=(x^2+y)\boldsymbol{i}+(xy+z)\boldsymbol{j}-yz\boldsymbol{k}$ の線積分 $\displaystyle\int_C\boldsymbol{A}\cdot dr$ を計算しなさい.

(金沢大 2016)　　(m20162210)

0.632 平面 $x+y+z=1$ が座標軸と交わる点を A,B,C，3 点 A,B,C を結ぶ線分で囲まれた三角形を S とする．ベクトル関数 $\boldsymbol{A}=2x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$ の S 上での面積分 $\displaystyle\iint_S\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$ を計算しなさい．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の単位法線ベクトルで，原点から S へ引いた垂線の向かう向きとする.

(金沢大 2016)　　(m20162211)

0.633 n を自然数とし，I_n を次の広義積分で定める．　$I_n=\displaystyle\int_1^{\infty}x^{n-1}e^{-x}dx$

(1) I_1 の値を求めよ.

(2) $n\geq 2$ のとき，次の漸化式が成り立つことを示せ．　$I_n=\dfrac{1}{e}+(n-1)I_{n-1}$

(3) 次式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ. $I_n = \dfrac{(n-1)!}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$

(4) 次の極限値を求めよ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{(n-1)!}$

(金沢大 2016) (m20162214)

0.634 (1) 自然数 n に対して, 集合 $D_n = \left\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2 \leq n^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$ における関数 $e^{-x^2-y^2}$ の積分 $\displaystyle\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ.

(2) 集合 $\left\{(x,y)\in R^2 \mid 0 \leq x \leq n,\ 0 \leq y \leq n\right\}$ を R_n と表すとき,
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\iint_{R_n} e^{-x^2-y^2}dxdy - \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy\right) = 0$ を示せ.

(3) 次の積分の値を求めよ. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

(金沢大 2016) (m20162216)

0.635 函数 $y = \sin^{-1}x,\ x \in [-1,1]$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $y = \sin^{-1}x$ の導函数を求めよ.

(2) $y = \sin^{-1}x$ のグラフの概形をかけ.

(3) $\displaystyle\int_0^1 \sin^{-1}x dx$ を求めよ.

(金沢大 2016) (m20162219)

0.636 $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) $I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}\quad (n \geq 2)$ を示せ.

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\cos^5 x dx$ を求めよ.

(金沢大 2016) (m20162221)

0.637 x は $0 < x < 1$ を満たす実数とし, n は $n > 2$ を満たす整数とする.

(1) $f(x) = \sin^{-1}x$ の導関数を求めよ. ここで, $\sin^{-1}x$ は $\sin x$ の逆関数である.

(2) $\sqrt{1-x^2} < \sqrt{1-x^n} < 1$ を示せ.

(3) $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^n}}dx < \frac{\pi}{6}$ を示せ.

(金沢大 2016) (m20162222)

0.638 a,b,c は正の定数とし, x,y は次で定義される R^2 の領域 D の点とする.

$$D = \left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, 0 \leq \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq c^2\right\}$$

(1) 変数 r,θ を用いて $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$ と変数変換を行う. この時, 関数行列式（ヤコビアン） $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|$ を求めよ.

(2) (1) の変数変換を用いて重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{c^2-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$ を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162223)

0.639 重積分

$$I = \iint_D \frac{x}{y} dxdy, \qquad D = \left\{(x, y) \in R^2 \;\middle|\; 1 \leq xy \leq 6,\ 0 < y \leq x \leq 4y\right\}$$

を考える．次の各小問に答えよ．

(1) 変数 u, v を用いて，変数変換 $x = uv,\ y = u/v$ を行なう．このときヤコビアンを求めよ．

(2) (1) の変数変換を用いて I の値を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162224)

0.640 (1) 不等式 $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^3}} < \frac{\pi}{6}$ を示せ．

(2) n を自然数とする．広義積分

$$I_n = \int_1^\infty e^{1-t} \frac{1}{t^n} dt$$

は関係式

$$I_1 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! + (-1)^{n+1}(n+1)!\, I_{n+2}$$

を満たすことを示せ．

(金沢大 2017)　　(m20172205)

0.641 関数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)$ を求めよ．

(2) 領域 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x,\ x^2 + y^2 \geqq 1,\ x \leqq 1\right\}$ を図示せよ．

(3) (2) の領域 D 上の重積分

$$\iint_D \{f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)\}\, dxdy$$

を求めよ．

(金沢大 2017)　　(m20172208)

0.642 ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ が恒等的に $\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$ を満たすとき， 始点を P_1，終点を P_2 とする $\boldsymbol{A}$ の線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ は， P_1 から P_2 への経路によらないことを示しなさい．

(金沢大 2017)　　(m20172211)

0.643 実数 $t\,(0 < t < 1)$ に対して，集合 R_t を

$$R_t = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ t \leqq x + y \leqq 1\right\}$$

と定める．このとき次の問いに答えよ．

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_{R_t} \frac{dxdy}{x + y}$ の値を求めよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{t \to +0} \iint_{R_t} \frac{dxdy}{(x + y)^\lambda}$ が存在するような，実数 λ の範囲を求めよ．

(金沢大 2018)　　(m20182205)

0.644 定数 $a > 0$ を与えて，開区間 $\left(0, \dfrac{\pi}{a}\right)$ 上で関数 $f(x) = \dfrac{\cos(ax)}{\sin(ax)}$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) $x = 0$ での右側極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0+0} f(x)$ と $x = \dfrac{\pi}{a}$ での左側極限 $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{a} - 0} f(x)$ をそれぞれ調べよ．

(2) $f(x)$ は $\left(0, \dfrac{\pi}{a}\right)$ 上で，$f'(x) = -a\left(1 + f(x)^2\right)$ を満たすことを示せ．

(3) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在することを示し，その導関数 $(f^{-1})'(x)$ を求めよ．

(4) (3) の関数 $f^{-1}(x)$ と $f(b) = b$ を満たす定数 b $\left(0 < b < \dfrac{\pi}{a}\right)$ に対して，広義積分

$$\int_b^\infty \frac{1}{(1+x^2)\left\{1 + \left(f^{-1}(x)\right)^2\right\}} dx$$

を a と b を用いて表せ．

(金沢大 2018)　　(m20182207)

0.645 関数 $f(x, y) = (x+y)e^{-(x^2+y^2)}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 曲面 $z = f(x, y)$ 上で点 $(1, 0, f(1, 0))$ における接平面の方程式を $z = ax + by + c$ と表すとき，定数 a, b, c を求めよ．

(2) $f(x, y)$ の極値を調べよ．

(3) 次の広義重積分の値を求めよ．必要ならば，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを利用してよい．

$$\iint_D f(x, y) dxdy, \quad D = \{(x, y) \,|\, x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$$

(金沢大 2018)　　(m20182208)

0.646 被積分関数に自然対数を含んでいる定積分

$$I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$$

の値が $0.18 < I < 0.28$ となることを確かめる．次の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，不等式

$$\frac{\log(1+x)}{1+x^2} \geqq \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)(1-x^2)$$

が成り立つことを示し，これを用いて $I \geqq \dfrac{11}{60}$ であることを導け．

(2) 2 つの等式

$$1 + \tan\theta = \frac{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \theta)}{\cos\theta} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

および

$$\int_0^{\pi/4} \log\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right\} d\theta = \int_0^{\pi/4} \log(\cos\theta) d\theta$$

がそれぞれ成り立つことを示し，これらを用いて定積分 I を計算せよ．

(3) $\pi < 3.2$ および $\log 2 < 0.7$ であることと問題 (1)(2) の結果を合わせて，$0.18 < I < 0.28$ であることを確かめよ．

(金沢大 2019)　　(m20192202)

0.647 正接関数 $\tan x$ の逆関数を $\tan^{-1} x$ とし，$x \neq 0$ となる (x, y) に対して関数 $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ を定める．次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数を計算して，$f_y(x, y) - f_x(x, y)$ と $f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)$ を求めよ．

(2) $0 < a < 1$ に対し

$$D_a = \left\{ (x, y) \;\middle|\; a^2 \leqq x^2 + y^2,\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x \right\}$$

とするとき，重積分

$$I_a = \iint_{D_a} \{ f_y(x, y) - f_x(x, y) \}\, dxdy$$

を計算し，極限値 $\displaystyle\lim_{a \to +0} I_a$ を求めよ．

(金沢大 2019)　　(m20192203)

0.648 次の問いに答えよ．

(1) 実数 α に対し，広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ が存在するような α の値の範囲を求めよ．

(2) $L > 1$ に対し，集合 D_L を

$$D_L = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq L^2 \right\}$$

と定める．実数 β に対し，極限値

$$\lim_{L \to \infty} \iint_{D_L} \frac{dxdy}{1 + (x^2 + y^2)^{\frac{\beta}{2}}}$$

が存在するような β の値の範囲を求めよ．

(金沢大 2019)　　(m20192208)

0.649 $\boldsymbol{R}^2$ 上の関数

$$f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{2x}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ のすべての極値を求めよ．

(2) $\boldsymbol{R}^2$ の 4 点 $(2, 0)$，$(0, 2)$，$(-2, 0)$，$(0, -2)$ を頂点とする正方形の周および内部を D とする．このとき，重積分

$$\iint_D f(x, y) dxdy$$

の値を求めよ．

(金沢大 2020)　　(m20202204)

0.650 (1) 集合 $D = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; |x| + |y| \leq 1 \right\}$ の概形を描け．

(2) (1) で定義した D に対して積分 $\displaystyle\iint_D (x - y + 1)\, e^{x+y}\, dx\, dy$ を求めよ．

(3) $\max\{u, v\} = \begin{cases} u & (u \geq v) \\ v & (u < v) \end{cases}$ とする．積分 $\displaystyle\int_0^3 \left(\int_0^1 e^{\max\{x^2, 9y^2\}} dy \right) dx$ を求めよ．

(金沢大 2020)　　(m20202206)

0.651 自然数 k に対して V_k を x の k 次以下の実係数多項式全体からなる $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする．n を 2 以上の自然数とし，線形写像 $\varphi : V_n \to V_{n-1}$ と $\psi : V_{n-1} \to V_n$ を，それぞれ，

$$\varphi(v(x)) = v'(x) \quad (v(x) \in V_n), \qquad \psi(w(x)) = \int_0^x w(y) dy \quad (w(x) \in V_{n-1})$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Ker}(\varphi)$ および $\mathrm{Im}(\varphi)$ の次元を求め，次元が 1 以上の場合はその基底を求めよ．

(2) $\mathrm{Ker}(\psi)$ および $\mathrm{Im}(\psi)$ の次元を求め，次元が 1 以上の場合はその基底を求めよ．

(3) 合成写像 $\psi \circ \varphi : V_n \to V_n$ と $\varphi \circ \psi : V_{n-1} \to V_{n-1}$ は同型写像かどうか答えよ．同型写像の場合には証明を与え，そうでない場合には理由を述べよ．

(金沢大 2020)　　(m20202209)

0.652 関数

$$f(t) = \frac{1}{1+e^{-t}} \ \ (t \in \boldsymbol{R}), \qquad F(x) = \int_0^x f(t)dt \ \ (x \in \boldsymbol{R})$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 極限値 $\lim_{t\to\infty} f(t)$ および $\lim_{t\to-\infty} f(t)$ を求めよ．

(2) $y = f(t)$ のグラフの概形を図示せよ．

(3) $y = F(x)$ のグラフは下に凸であることを示せ．

(4) $a > 0$ に対して，極限値 $\lim_{x\to\infty} \dfrac{F(ax)}{x}$ を求めよ．

(金沢大 2021)　　(m20212201)

0.653 定積分

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin|x| - \sin x)dx$$

の値を求めよ．

(金沢大 2021)　　(m20212202)

0.654 領域 $D = \left\{(x,y) \ \middle|\ |y| \leq e^{-x^2}, x \geq 0\right\}$ に対して，重積分

$$\iint_D xy^2 dxdy$$

の値を求めよ．

(金沢大 2021)　　(m20212203)

0.655 $\boldsymbol{R}$ 上の関数 f は，任意の有界閉区間において積分可能であり

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \ \ (x, y \in \boldsymbol{R})$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(y)dy \ \ (x \in \boldsymbol{R})$ とするとき，f は

$$f(x) = F(x+1) - F(x) - F(1) \ \ (x \in \boldsymbol{R})$$

を満たすことを示せ．

(2) f は微分可能であり，任意の実数 x に対して，$f'(x) = f(1)$ が成り立つことを示せ．

(3) 任意の実数 x に対して，$f(x) = f(1)x$ が成り立つことを示せ．

(金沢大 2021)　　(m20212208)

0.656 $\boldsymbol{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + \sqrt{3}x - 3y$$

について，次の問いに答えよ．

(1) f のすべての極値を求めよ．

(2) 閉領域 $D = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 9,\ y \geqq 0\}$ における f の最大値と最小値を求めよ．

(3) (2) の D に対して，重積分

$$\iint_D f(x, y) dxdy$$

を求めよ．

(金沢大 2021)　　(m20212209)

0.657 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)) = (\cos t,\ \sin t,\ t)$ で表される曲線を考える．

(a) $\boldsymbol{r}(t)$ での単位接線ベクトルを求めなさい．

(b) $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲で，この曲線に沿って線積分 $\displaystyle\int_C xy^2 ds$ を求めなさい．ただし ds は曲線の線素とする．

(金沢大 2021)　　(m20212213)

0.658 $\boldsymbol{R}^2$ の領域を次で定義する．

$$D = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, |x| < \frac{\pi}{2},\ |y| < \cos^2 x\right\}$$

以下の問いに答えよ．

(1) D の概形を図示せよ．

(2) 関数 $g(x, y) = \dfrac{1}{(y-2)\cos x}$ は，D 上の連続関数であることを示せ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^2y^2}{\cos^6 x} dxdy$ の値を求めよ．

(金沢大 2022)　　(m20222202)

0.659 閉領域 $D = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0\right\}$ に対して，重積分

$$\iint_D y^2 e^{-x^2-y^2} dxdy$$

の値を求めよ．

(金沢大 2022)　　(m20222209)

0.660 ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x, y, z) = (x^2, y^2, 1)$ について，以下の各問いに答えなさい．

(1) $\boldsymbol{A}$ の発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ を求めなさい．

(2) 図 3 に示した一辺の長さが 1 の立方体の表面を S とする．閉曲面 S における面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ を求めなさい．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S 上の単位法線ベクトルである．

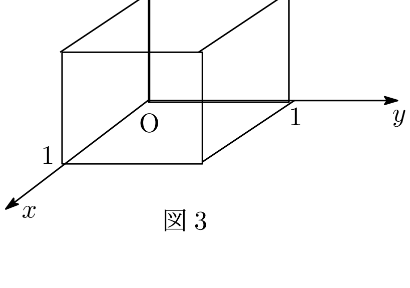


図 3

(金沢大 2022)　　(m20222213)

0.661 次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\int \sqrt{3x+1}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$

(富山大 2000) (m20002303)

0.662 次の各問いの計算をせよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{(x^2-1)^2}$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

(富山大 2001) (m20012303)

0.663 (1) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}dx$ を求めよ.

(2) 微分方程式 $\displaystyle\frac{dy}{dx} = -\frac{x(y^2+1)}{y(x^2+1)}$ の一般解を求めよ.

(富山大 2001) (m20012304)

0.664 次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\int x^2 \log x^2 dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{1+\sin x}dx$

(富山大 2003) (m20032302)

0.665 次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$ (2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)}$

（富山大 2004） (m20042302)

0.666 次の重積分の値を極座標を用いて求めよ.

$$\iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ x,y \geq 0}} xydxdy$$

(富山大 2004) (m20042304)

0.667 次の不定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int x(1+x^2)^2 dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2}$ (3) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$

(富山大 2005) (m20052302)

0.668 以下の問に答えよ.

(1) 変数変換

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \qquad (r \geq 0)$$

により, $(x,y)=(2,2)$ に対応付けられる (r,θ) 平面の点の座標を求めよ. また, この変数変換のヤコビ行列式を求めよ.

(2) xy 平面の領域 D を

$$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 4\}$$

と定める. 定積分

$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$$

を求めよ.

(富山大 2005) (m20052305)

0.669 $E = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 2x + 2y - 1\}$ とするとき, 次の重積分を求めよ.

$$\iint_E (xy - y)dxdy$$

(富山大 2005) (m20052310)

0.670 次の積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)} dx$$

(富山大 2005) (m20052312)

0.671 次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\, dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx$

(富山大 2006) (m20062303)

0.672 次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\int x \sin x dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 5} dx$

(富山大 2007) (m20072302)

0.673 次の二重積分を求めよ, $\displaystyle 1024 \iint_D xydxdy \quad \left(D\,;\, x^2 \leq y \leq \frac{x}{2}\right)$

(富山大 2007) (m20072306)

0.674 次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx} \log_e \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ (2) $\displaystyle\frac{d}{dx} x^{\frac{1}{x}}$

(3) $\displaystyle\int \sin^{-1} x dx$ (4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 2x}$

(富山大 2008) (m20082301)

0.675 変数変換 $t = x - y,\ s = x + y - 2$ により，重積分

$$\iint_D (x + y)dxdy \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq y,\ y \leq x \leq 2 - y\}$$

の値を求める．以下の問いに答えよ.

(1) x と y をそれぞれ，t と s で表し，$\dfrac{\partial x}{\partial t}, \dfrac{\partial x}{\partial s}, \dfrac{\partial y}{\partial t}, \dfrac{\partial y}{\partial s}$ を求めよ.

(2) $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial x}{\partial s} \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(3) (2) の結果を用いて，$\displaystyle\iint_D (x + y)dxdy$ を t と s で変数変換し，その値を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{2-y} (x + y)dxdy$ の値を求め，(3) の結果と一致することを確かめよ.

(富山大 2008) (m20082304)

0.676 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^3 + x - 3}{x^4 - x^3 - x^2 - x - 2} dx$ を求めよ.

(富山大 2008) (m20082306)

0.677 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}e^{2\log x}$ (2) $\dfrac{d}{dx}x^x$ (3) $\dfrac{d^2}{dx^2}\sin(e^x)$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+1}$ (5) $\displaystyle\int x\log|x|\,dx$

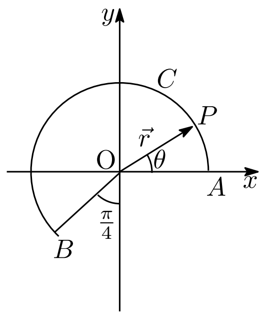
(富山大 2009) (m20092301)

0.678 次の計算をせよ.

(4) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x-3}\,dx$ (5) $\displaystyle\int x\cos^2 x\,dx$

(富山大 2010) (m20102302)

0.679 図のように円 $x^2+y^2=25,\ z=0$ の x 軸上の点 A から B までの円弧を C, C 上の点 P の位置ベクトルを $\vec{r}$, $\vec{r}$ と x 軸とのなす角を θ とする.



(1) $\displaystyle\int_C \vec{r}\cdot d\vec{r}$ の値を求めよ.

(2) $\displaystyle\left|\int_C d\vec{r}\right|$ の値を求めよ.

(3) $\displaystyle\left|\int_C \vec{r}\times d\vec{r}\right|$ の値を求めよ.

(富山大 2010) (m20102303)

0.680 (1) 直交座標の二重積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ を変数変換

$x=r\cos\theta\ ,\ \ y=r\sin\theta$

によって, 極座標 $(r,\ \theta)$ の二重積分に変換せよ.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ の値を求めよ.

(富山大 2010) (m20102305)

0.681 $A=\left\{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; 0\leqq\ z\leqq\ 1-x^2-y^2\right\}$ とするとき, 次の 3 重積分の値を求めよ.

$$\iiint_A 2z(2x^2-y^2)\,dxdydz$$

(富山大 2010) (m20102310)

0.682 次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\int \sin^5(2x)dx$ (2) $\displaystyle\int \log(3x-1)dx \quad (3x>1)$

(富山大 2012) (m20122302)

0.683 次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\int x^2e^x dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2+2\sqrt{3}x+2}dx$

(富山大 2013) (m20132302)

0.684 次の計算をせよ. ただし, (1) を解くにあたっては, $x+\sqrt{x^2+5}=t$ なる変数変換を用い, 積分計算結果は x の式で表すこと.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{x\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(富山大 2014) (m20142302)

0.685 $\phi(x,y,z)=e^{2x^2-4y^3+z^2}$, $\overrightarrow{A}(x,y,z)=2xyz^3\overrightarrow{i}+x^2z^3\overrightarrow{j}+3x^2yz^2\overrightarrow{k}$ について，次の問いに答えよ．ただし，$\overrightarrow{i}$，$\overrightarrow{j}$，$\overrightarrow{k}$ は直交座標の単位ベクトルである．

(1) $\mathrm{rot}\,\overrightarrow{A}=\overrightarrow{0}$ を示せ．

(2) 点 $(1,1,-1)$ において，$\phi\overrightarrow{A}$ の発散の値を求めよ．

(3) 点 $(1,1,-1)$ における ϕ の点 $(-3,5,6)$ に向かう方向の方向微分係数を求めよ．

(4) $\displaystyle\int_S \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{n}\,dS$ の値を求めよ．ただし，S は円柱面 ： $x^2+y^2=1$ の $x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ 0\leqq z\leqq 1$ を満たす部分とし，$\overrightarrow{n}$ は S の単位法線ベクトルとする．

(富山大 2014)　　(m20142303)

0.686 4 重積分

$$\iiiint_D x_1dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$$

の値を求めよ．

ただし，$D=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4\ \middle|\ {x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+{x_4}^2\leqq 1,\ x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0,\ x_3\geqq 0,\ x_4\geqq 0\right\}$ とする．

(富山大 2015)　　(m20152304)

0.687 次の計算をせよ．計算の概略も示すこと．

(1) $\displaystyle\int \arctan\frac{x}{2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^4 x-6cos^6x)\,dx$

(富山大 2015)　　(m20152306)

0.688 a を実数の定数とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 x^a\log x dx$ が収束する a の値の範囲を求めよ．

(2) (1) の広義積分が収束するとき，その値を求めよ．

(富山大 2016)　　(m20162301)

0.689 次の計算をせよ．ただし，計算の概略も示すこと．

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}dx$　　(2) $\displaystyle\int x\log_e x dx\qquad(x>0)$

(富山大 2017)　　(m20172302)

0.690 関数 $f(x)=(1+kx)e^{kx}\quad(x\geqq 0)$ について，次の各問いに答えよ．ただし，k は実数である．

(1) 次の積分 $I(X)$ を X を用いて表せ．ただし，$X>0$ とする．

$$I(X)=\int_0^X f(x)dx$$

(2) $k=-1$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{X\to\infty}I(X)$ を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{X\to\infty}I(X)$ が有限のとき，関数 $f(x)$ の広義積分は存在する．関数 $f(x)$ の広義積分が存在するための条件を，k についての不等式で表せ．

(富山大 2017)　　(m20172305)

0.691 不定積分 $\displaystyle\int e^x\sin x dx$ を求めよ．

(富山大 2018)　　(m20182303)

0.692 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \sin y,\ 0 \leq y \leq \pi\}$ のとき，二重積分 $\displaystyle\iint_D x dx dy$ の値を求めよ．

(富山大 2018)　　(m20182304)

0.693 直角座標系 xyz におけるベクトル場 $\overrightarrow{F}(x, y, z) = -y\,\overrightarrow{i} + (z - x)\,\overrightarrow{j} + y\,\overrightarrow{k}$,
スカラー場 $\phi(x, y, z) = axy + byz + czx$ (a, b, c は定数) について，次の問いに答えよ．
ただし，$\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ はそれぞれ x, y, z の各軸方向の単位ベクトルとする．

(1) 次の計算をせよ．
　(a) div $\overrightarrow{F}$　　　　(b) rot $\overrightarrow{F}$
　(c) grad ϕ　　　　(d) rot(grad ϕ)

(2) $a = 1,\ b = -1,\ c = 0$ のとき，
　ϕ がベクトル場 $\overrightarrow{F}$ のポテンシャル（スカラーポテンシャル）となることを示せ．

(3) $a = 1,\ b = -1,\ c = 0$ のとき，
　点 $P(1, 1, 1)$ から点 $Q(0, 2, 2)$ までの線積分 $\displaystyle\int_P^Q \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ を求めよ．
　ここで $\overrightarrow{r}$ は P から Q へ向かう経路上の点の位置ベクトルである．

(富山大 2018)　　(m20182305)

0.694 半径 $a(a > 0)$ の円が x 軸に接して滑らずに転がるとき，円周上の定点が描く曲線をサイクロイドといい，パラメータを t として

$$x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

で与えられる．このとき次の各問いに答えよ．

(1) 導関数 $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ を計算せよ．

(2) $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$ を求めよ．

(3) 一般に，パラメータ t が α から β まで変化したとき，点 $(x(t), y(t))$ が描く曲線の長さ l は次式で表される．

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

　サイクロイドにおいて，$t = t_0$ $(0 < t_0 < 2\pi)$ を初期値として
　円が一回転したとき $(t = t_0 + 2\pi)$ の曲線の長さを求めよ．

(富山大 2018)　　(m20182307)

0.695 次の計算をせよ．ただし，計算の概略も示すこと．

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 1}$　　　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 1}}$

(富山大 2019)　　(m20192302)

0.696 2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ が次の様に定義され，

$$f(x) = \int_0^x e^t(\sin t + \cos t)dt$$

$$g(x) = \int_0^x e^t(\cos t - \sin t)dt$$

また，$f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ を，それぞれ，$f(x)$, $g(x)$ の n 次導関数とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ．

(2) $f^{(1)}(x)$ と $g^{(1)}(x)$ を求めよ．

(3) $f^{(2)}(x)$ と $g^{(2)}(x)$，および，$f^{(3)}(x)$ と $g^{(3)}(x)$ を求めよ．

(4) $n \geqq 2$ として，$f^{(n)}(x)$ と $g^{(n)}(x)$ それぞれを $f^{(n-1)}(x)$ および $g^{(n-1)}(x)$ を用いた漸化式で表せ．

(富山大 2019)　　(m20192305)

0.697 次の式の値を求めよ．ただし，計算の概略も示すこと．

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy \quad (D\ :\ x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq y)$$

(富山大 2022)　　(m20222303)

0.698 スカラー場 $\phi(x,y,z)=x^2y+y^2z-xy\,e^{(z^2)}$，ベクトル場 $\overrightarrow{F}(x,y,z)=-y\,\overrightarrow{i}+x\,\overrightarrow{j}+xyz\,\overrightarrow{k}$ について，次の各問いに答えよ．ただし，$\overrightarrow{i}$，$\overrightarrow{j}$，$\overrightarrow{k}$ は直交座標系 x，y，z の各軸方向の単位ベクトルとする．また，点 P の座標を $(2,\ 1,\ 0)$ とする．

(1) 点 P における，ϕ の等位面の単位法線ベクトルを求めよ．

(2) 点 P における，$\overrightarrow{F}$ 方向に対する ϕ の方向微分係数を求めよ．

(3) $\mathrm{rot}\overrightarrow{F}$ を求めよ．

(4) 原点 O から点 P に至る線分 OP における，$\overrightarrow{F}$ の線積分 $\displaystyle\int_{OP} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$ を求めよ．ここで，$\overrightarrow{r}$ は位置ベクトルである．

(富山大 2022)　　(m20222304)

0.699 次の関数の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \log(x^2-1)\,dx$

(3) $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx$

(4) $\displaystyle\int \sqrt{x}\log x\,dx$

(福井大 2000)　　(m20002404)

0.700 関数 $f(X)=\sqrt{3}\sin X+\cos X$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 関数 $f(X)$ の導関数 $f'(X)$ を求めなさい．

(2) 関数 $f(X)$ の区間 $0 \leq X \leq \pi$ における最大値 f_M と最小値 f_m を求めなさい．

(3) 関数 $f(X)$ の定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(X)dX$ を求めなさい．

(4) 関数 $f(X)$ の区間 $0 \leq X \leq \pi$ でのグラフの概略を示しなさい．

(福井大 2000)　　(m20002406)

0.701 k を正の整数，α を複素数とするとき，微分方程式

$$x\frac{d}{dx}f(x)-\alpha\frac{d}{dx}f(x)+kf(x)=0$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) この微分方程式を解け．

(2) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx$ の値が有限となるような解 $f(x)$ をもつための，α の条件を求めよ．

(福井大 2000)　　(m20002407)

0.702 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x^3-x}dx$　　(2) $\displaystyle\int e^{kx}x^3dx$　　(3) $\displaystyle\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$

(福井大 2001)　　(m20012405)

0.703 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\log(1+\tan\theta)d\theta$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}}x\cos x^2dx$

(福井大 2001)　　(m20012406)

0.704 次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D 2x|y|\ dxdy,\quad D=\{(x,y):x^2+y^2\leqq 1,\ x^2+y^2\leqq 2x\}$$

(福井大 2001)　　(m20012409)

0.705 (1) 次の定積分を示せ．m と n は整数とする．

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin mxdx=0$, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos nxdx=0$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin mx\cos nxdx=0$

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin mx\sin nxdx=\begin{cases}0\,(m\neq n)\\ \pi\,(m=n)\end{cases}$

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nxdx=\begin{cases}0\,(m\neq n)\\ \pi\,(m=n)\end{cases}$

(2) $x(t)$ を周期 T の周期関数とするとき，$x(t)$ を次のように書くことができる．

$$x(t)=a_0+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{2\pi k}{T}t+b_k\sin\frac{2\pi k}{T}t\right)$$

このとき，(1) の知見を活用し，$a_k\,(k\geq 0)$，$b_k\,(k\geq 1)$ を $x(t)$ を用いて表せ．

(福井大 2003)　　(m20032417)

0.706 以下の積分 $I_1\sim I_4$ を求めなさい．

$I_1=\displaystyle\int\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx$　　$I_2=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin mx\,\sin nxdx$　(m,n は正の整数)

$I_3=\displaystyle\int x^2\sin axdx$　$(a\neq 0)$　　$I_4=\displaystyle\int_0^{\pi/2}x^2\sin 2xdx$　(I_4は有効数字 2 桁で求めなさい.)

（福井大 2004）　　(m20042408)

0.707 次の不定積分を求めなさい．

$$\int\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}dx$$

（福井大 2004）　　(m20042410)

0.708 定数 $a\neq 0$ のとき，次の定積分の値を求めなさい．

$$\int_0^{1/a}e^{-ax}dx$$

（福井大 2004）　　(m20042411)

0.709 次の不定積分を求めよ．

$$\int x^2 \sin x dx$$

(福井大 2005) (m20052403)

0.710 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$ (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{3x}\sqrt{1-e^{3x}}dx$

(福井大 2005) (m20052413)

0.711 次の不定積分および定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

(福井大 2005) (m20052418)

0.712 次の不定積分を求めよ． $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx\,,\quad a>0\,,\ |x|\leq a$

ただし，必要に応じて三角関数の 2 倍角の公式

“ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ および $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ ” を使え．

(福井大 2006) (m20062403)

0.713 次の積分を求めよ．（途中の計算式も書くこと） $\displaystyle\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ dx$ ($a>0$)

(福井大 2007) (m20072404)

0.714 (1) 次の関数を積分せよ． （途中の計算式も書くこと）

$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ ヒント ： $\sqrt{x^2+a}=t-x$ とおく．

(2) 次の定積分を求めよ． （途中の計算式も書くこと)}

$\displaystyle\int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2}dx$ $(a>0)$

なお，必要に応じて三角関数の二倍角の公式 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ を用いよ．

(福井大 2008) (m20082403)

0.715 定積分 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mt\cos nt\,dt$ を以下の手順で求めよ．ただし，m,n 自然数とする．

(1) $\sin mt\ \cos nt$ を三角関数の和または差の形に変形せよ．

(2) $m=n$ の時の定積分を求めよ．

(3) $m\neq n$ の時の定積分を求めよ．

(福井大 2008) (m20082417)

0.716 (1) 次の関数の導関数を求めよ．

$$f(x)=x\sqrt{x^2+a}+a\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$$

(2) 次の関数の不定積分を求めよ．

$$f(x)=\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

(福井大 2009) (m20092416)

0.717 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{1-2x^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \log x\,dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-9}$

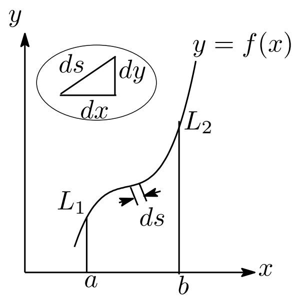
(福井大 2010) (m20102404)

0.718 不定積分を求めよ.

$$\int x\sin x\,dx$$

(福井大 2011) (m20112403)

0.719 次の各問にしたがって，半径 R の円の円周の長さを求めよ.



(1) 右の図のように，関数 $f(x)$ の L_1 から L_2 の長さは $\displaystyle\int_{L_1}^{L_2} ds$ で求めることができる.

$$\int_{L_1}^{L_2} ds = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

となることを導け.

(2) 点 (x,y) と x 軸との間の角度を θ とすると，x および y を θ の関数で表せ．また，dy/dx を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_{L_1}^{L_2} ds = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ の積分の式を用いて，半径 R の円の円周の長さが $2\pi R$ となることを示せ．ただし，計算の途中過程も必ず示すこと.

(福井大 2011) (m20112404)

0.720 累次積分 $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^{2-x} xydy \right\} dx$ の積分順序を変更して，積分の値を求めよ．また積分領域も図示せよ.

(福井大 2011) (m20112406)

0.721 不定積分を求めよ.

$$\int \log_e x\,dx$$

(福井大 2012) (m20122405)

0.722 次の定積分を求めよ.

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a \geq 0)$$

(福井大 2012) (m20122406)

0.723 $\displaystyle\iint_R \left(y-x^3\right) dxdy\,, \quad \left(R\,:\,0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 2\sqrt{x}\right)$ の値を求めよ.
また積分領域 R も図示せよ.

(福井大 2012) (m20122409)

0.724 次の式を計算せよ．なお，$\alpha > 1$ とする.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^\alpha}$$

(福井大 2013) (m20132402)

0.725 不定積分を求めよ.

< 公式 > 必要に応じて次の公式を使ってもよい.

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C \quad (a, C \text{ は定数})$$

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos x\, dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(2+x^2)}$

(福井大 2013)　　(m20132407)

0.726 累次積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left\{ \int_x^{2x} \sin(x+y)dy \right\} dx$ の<u>積分順序を変更</u>して，積分の値を求めよ．
また<u>積分領域も図示</u>せよ．

(福井大 2013)　　(m20132410)

0.727 $\displaystyle\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} (y+y^3)dydx$ の <u>積分順序を変更</u> して，その値を求めよ．また，<u>積分領域も図示</u> せよ．

(福井大 2014)　　(m20142408)

0.728 以下の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{2}} dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x} dx$　　(2) $\displaystyle\int e^x \cos x dx$

(福井大 2014)　　(m20142423)

0.729 $t<0$ で $f(t)=0$ である関数 $f(t)$ のラプラス変換は，以下のように与えられる．

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

次の関数のラプラス変換を求めよ．

(1) $f(t) = e^{at}$

(2) $f(t) = \displaystyle\int_0^t \cos(t-\tau)\cos\tau d\tau$

(福井大 2014)　　(m20142426)

0.730 $I = \displaystyle\iint_R e^{-(x^2+y^2)}dxdy$　$(R\ :\ 0 \leq x^2+y^2 \leq a^2)$ の値を求めよ．さらに，$a \to \infty$ としたときの I の値を用いて，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ の値を求めよ．

(福井大 2015)　　(m20152406)

0.731 y を x の関数とするとき，微分方程式

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' + a = 0 \quad （a \text{ は実数の定数}）$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) この微分方程式を，条件 $y(0)=1,\ y'(0)=0$ のもとで解け．

(2) 上の (1) で求めた解 y について $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} y^2 dx$ とおく．I が有限になるための a に関する必要十分条件を示せ．また，その必要十分条件が満たされるとき，a を用いて I を表せ．なお，正規分布（ガウス分布）の確率密度関数の性質を利用してもよい．

(福井大 2015)　　(m20152413)

0.732 領域 D を，$D = \left\{ (x,y) \ \middle|\ x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \right\}$ とする．このとき，$\displaystyle\iint_D dxdy$ の値を求めよ．

(福井大 2015)　　(m20152432)

0.733 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \left|\sin 3x\right| dx$ （必要であれば，変数変換 $3x = t$ を使用せよ.）

(福井大 2016) (m20162403)

0.734 $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 \sqrt{1+x^2}dxdy$ の積分順序を変更することによって，その値を求めよ． また積分領域も図示せよ．

(福井大 2016) (m20162405)

0.735 以下の積分をおこないなさい．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$

(福井大 2016) (m20162421)

0.736 以下の積分をおこないなさい．

$\displaystyle\iint_D dxdy$ ただし，$D = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 4\right\}$

(福井大 2016) (m20162422)

0.737 以下の積分をおこないなさい．ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする．

(1) $\displaystyle\int e^{-i\omega t}dt$ (2) $\displaystyle\int_0^{1-i}(iz+2)dz$ なお，積分経路は直線とする．

(福井大 2016) (m20162423)

0.738 $\displaystyle\int a^x dx = \frac{1}{\log a}a^x + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$ となることを示せ．ただし C は積分定数である．

(福井大 2018) (m20182402)

0.739 $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (y - x^3)dydx$ の 積分順序を変更し て，その値を求めよ． また積分領域も図示せよ．

(福井大 2018) (m20182403)

0.740 関数 $f(t)$ のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

について，以下の問に答えなさい．ただし，$\theta(t-\alpha)$ は単位階段関数で

$$\theta(t-\alpha) = \begin{cases} 1 & (t \geq \alpha) \\ 0 & (t < \alpha) \end{cases}$$

によって定義される．

(1) 単位階段関数 $\theta(t)$ および $\theta(t-1)$ のラプラス変換を求めなさい．

(2) $\mathcal{L}[e^{-(t-1)}\theta(t-1)]$ について，変数 s を用いて表しなさい．必要であれば以下の関係を用いてもよい．

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha)\theta(t-\alpha)] = e^{-s\alpha}F(s)$$

(福井大 2018) (m20182410)

0.741 (1) 積分方程式

$$f(t)+\int_0^t f(\tau)d\tau=\theta(t-1)$$

を満たす関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ を求めなさい.

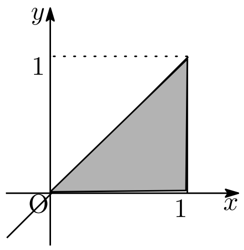
(2) (1) の積分方程式を解きなさい.

(福井大 2018) (m20182411)

0.742 $\displaystyle\int_0^\infty\left\{\int_0^1\sqrt{x}e^{-2y}dx\right\}dy$ を計算せよ.

(福井大 2018) (m20182417)

0.743 下図の灰色で塗られた領域の面積を式 (A) の形に表したとき, $\boxed{①}$ から $\boxed{④}$ にあてはまる値や式を答えよ（積分の計算を行う必要はない）.



$$\int_{\boxed{③}}^{\boxed{④}}\left\{\int_{\boxed{①}}^{\boxed{②}}dy\right\}dx \qquad (A)$$

(福井大 2018) (m20182421)

0.744 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int(\sin 3x+\cos x)^2dx$ (2) $\displaystyle\int\frac{1}{e^{5x-5}}dx$

(福井大 2018) (m20182425)

0.745 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^2(x^3+x^2+5x+3+4\pi\sin\pi x+e^{2x})dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^3\cos xdx$

(福井大 2018) (m20182426)

0.746 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle I=\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$ (2) $\displaystyle I=\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx$

(福井大 2020) (m20202403)

0.747 次の重積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

(福井大 2020) (m20202405)

0.748 関数 $f(x)$ が以下のように与えられている.

$$f(x)=\begin{cases}0 & |x|\geq 1\\ 1 & |x|<1\end{cases}$$

この関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $\displaystyle F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$ を求めよ.

(福井大 2020) (m20202413)

0.749 関数 $f(t)$ $(t \geq 0)$ のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \ (s > 0)$$

について考える．以下の問いに答えよ．

(1) $f(t) = \cos^2 t$ $(t \geq 0)$ のラプラス変換を求めよ．　　$\mathcal{L}[\cos^2 t]$

(2) $f(t) = t\sin at$ $(t \geq 0,$ 定数 $a \neq 0)$ のラプラス変換を求めよ．　　$\mathcal{L}[t\sin at]$

(福井大 2020)　　(m20202414)

0.750 非負の整数 n，および $-1 \leqq x \leqq 1$ を満たす任意の実数 x に対して，

$$T_n(x) = \cos nz,\quad ただし，\cos z = x \tag{1}$$

と定義する．式 (1) において，$n = 0$ とおくと

$$T_0(x) = \cos 0 = 1 \tag{2}$$

となり，$n = 1$ とおくと

$$T_1(x) = \cos z = x \tag{3}$$

となる．以下の問いに答えよ．

(a) 加法定理

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{4}$$

を利用し，$T_2(x)$ を x の多項式として表せ．

(b) $T_n(x)$ は，$T_{n+1}(x)$ と $T_{n-1}(x)$ によって

$$T_n(x) = \frac{T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)}{2x} \tag{5}$$

と表される．これを次のようにして証明したい．以下の下線部 (A)〜(C) を適当に埋めよ．

【証明】式 (1) の定義と式 (4) の加法定理を用いると

$$T_{n+1}(x) = \cos(nz + z) = \cos nz\cos z - \underline{\qquad\qquad}(\mathrm{A}) \tag{6}$$

$$T_{n-1}(x) = \cos(nz - z) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}(\mathrm{B}) \tag{7}$$

と書ける．式 (6) と式 (7) の各辺を加えると

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = \underline{\qquad\qquad\quad}(\mathrm{C}) \tag{8}$$

が得られる．式 (8) の右辺を変形すると

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \tag{9}$$

となり，これより式 (5) が導きられる．

(c) 式 (5) に基づいて，$T_3(x)$ を x の多項式として表せ．

(d) $T_3(x)$ を用いて，$\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ の多項式として表せ．

(e) (d) の結果を利用して，次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta \tag{10}$$

ちなみに，$T_n(x)$ は第一種チェビシェフ多項式と呼ばれ，cos の n 倍角の公式の導出やチェビシェフ展開に基づく関数の近似表現等に利用される有名な多項式である．

(福井大 2020)　　(m20202422)

0.751 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{2x^4 - 3x^2 + 4}{x^3} dx$ (2) $\displaystyle\int x \sin(x^2 + 1) dx$

(福井大 2020) (m20202424)

0.752 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^e x^2 \log x dx$ (2) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 2x dx$

(福井大 2020) (m20202425)

0.753 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx$ (2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

ただし，m および n は正の整数とする.

(福井大 2021) (m20212402)

0.754 次の重積分を計算せよ．ただし，D は $x^2 + y^2 = 2$ と $y = x^2$ で囲まれた領域である.

$$\iint_D y dx dy$$

(福井大 2021) (m20212405)

0.755 (1) 複素フーリエ級数展開を用いて以下の関数が成立することを示せ

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

(2) 関数 $f(t)$ 及び $g(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega)$ 及び $G(\omega)$ と表す．このとき，以下のフーリエ変換が $F(\omega)G(\omega)$ となることを示せ.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(t - u) du$$

(福井大 2021) (m20212412)

0.756 次の定積分を計算せよ.

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$$

(福井大 2021) (m20212415)

0.757 (1) 次の不定積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int \frac{e^{2x} - 16}{e^x - 4} dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x}} dx$

(2) 次の定積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int_6^{10} x(x - 6)^2 dx$

(b) $\displaystyle\int_0^\pi (\cos\theta + 1)^2 d\theta$

(福井大 2021) (m20212421)

0.758 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{4e^x}{(4e^x + 2)^2} dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x \log 3x}$

(福井大 2022)　　(m20222402)

0.759 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^2 e^{2x}\sqrt{e^x}\ dx$　　　　(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\ dx$

(福井大 2022)　　(m20222403)

0.760 次の定積分を求めよ,

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3-\cos 2x}\ dx$　　　　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\sin x\ dx$

(福井大 2022)　　(m20222414)

0.761 次の積分の値を計算せよ.

$$\iint_D \sin(x+y)\cos(x-y)dxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ 0\leq x+y\leq\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\leq x-y\leq\frac{\pi}{2}\right\}$$

(福井大 2022)　　(m20222416)

0.762 基本周期が 2π である関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開を考える．以下の問いに答えよ.

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \left(0<x\leq\dfrac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{\pi}{2}<x\leq\dfrac{3\pi}{2}\right) \\ 1 & \left(\dfrac{3\pi}{2}<x\leq 2\pi\right)\end{cases}$$

(1) 以下の積分を計算せよ.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\ dx\quad (n\neq 0)$$

(2) 以下の積分を計算せよ.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\ dx\quad (n\neq 0)$$

(3) 基本周期が 2π である関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開を求めよ.

(福井大 2022)　　(m20222423)

0.763 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ を含む定積分，あるいは不定積分に関し，以下の問いに答えよ．ただし,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\sqrt{2\pi}\tag{1}$$

であることを用いてよい．答えを導く思考過程あるいは計算過程を丁寧に記述すること.

(1) 式 (1) を利用して，定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{2}x)dx$ の値を求めよ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int xf(\sqrt{2}x)dx$ を求めよ.

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(\sqrt{2}x)dx$ の値を求めよ.

(福井大 2022)　　(m20222424)

0.764 半径 a の球面の xyz 座標を媒介変数 $(\theta,\ \phi)$ で

$$\boldsymbol{r}=(x,y,z)=(a\sin\theta\cos\phi,\ a\sin\theta\sin\phi,\ a\cos\theta)$$

と表す．ただし，$0\leq\theta\leq\pi,\ 0\leq\phi\leq 2\pi$ である．以下の問いに答えよ.

(1) 以下のベクトル積

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}$$

を求めよ．また，これは何を表すか答えよ．

(2) 次の積分を求め，何を表すか答えよ．

$$\iint_D \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} \right\| d\theta d\phi$$

ただし，$||\cdot||$ はベクトルの長さを表し，領域 D は $\theta,\ \phi$ の動く範囲，すなわち $D = \{(\theta,\ \phi \mid 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi)\}$ である．

(3) 球面の x 座標 $x = a \sin\theta \cos\phi$ に対して，次の積分を求めよ．

$$\iint_D x \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} \right\| d\theta d\phi$$

(福井大 2022)　　(m20222427)

0.765 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2(x^2+1)} dx$ を求めよ．

(静岡大 2004)　　(m20042501)

0.766 閉領域 $D = \{(x,y) | 4 \leqq x^2 + y^2 \leqq 9,\ y \leqq x\}$ を図示し，2 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{9 - x^2 - y^2} dxdy$ を求めよ．

(静岡大 2004)　　(m20042505)

0.767 (1) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2 + 4z + 1} dz$ を求めよ．ここで，C は複素数平面の原点を中心とする半径 1 の円周を正の向きに 1 周する積分路とする．

(2) 実定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos\theta} d\theta$ を (1) を利用して求めよ．

(静岡大 2004)　　(m20042507)

0.768 (1) 有理関数 $\dfrac{1}{x^3+8}$ を部分分数に分解し, 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+8}\, dx$ を求めよ.

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)(2x-y)^2 dxdy$,　$D = \{(x,y) \mid 1 \leqq\ x+y \leqq\ 2,\ -1 \leqq\ 2x - y \leqq\ 1\}$ の値を求めよ.

(静岡大 2005)　　(m20052502)

0.769 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{\sin z}{(z-i)^3}\, dz$ の値を求めよ. ここで i は虚数単位, C は複素平面上の原点を中心とする半径 2 の円周で向きは反時計回りとする.

(静岡大 2005)　　(m20052505)

0.770 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x} \sin 2x\, dx$ を求めよ．　(2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2}{x(x+2)}\, dx$ を求めよ．

(静岡大 2006)　　(m20062504)

0.771 $a > 0$ とし，$D(a) = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq a\,,\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}\}$ とおく．
このとき 2 重積分　$I(a) = \displaystyle\iint_{D(a)} \frac{y}{(1+x^2+y^2)^2}\, dxdy$　について，次の問いに答えよ．

(1) $D(a)$ を図示し，$I(a)$ の値を求めよ．　(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty} I(a)$ を求めよ．

(静岡大 2006)　　(m20062505)

0.772 次の不定積分を求めなさい． $I=\displaystyle\int e^{2x}\sin 2x\,dx$

(静岡大 2006) (m20062510)

0.773 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sin^{-1}2xdx$ を求めよ．

(静岡大 2007) (m20072504)

0.774 重積分 $\displaystyle\iint_D(-2x+y)dxdy$ を求めよ．ただし，$D=\{(x,y)\mid -1\leqq x,\ 2x+1\leqq y\leqq 3\}$ とする．

(静岡大 2007) (m20072505)

0.775 以下の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int_1^5\frac{\log x}{x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{5+x^2}$

(3) $\displaystyle\iint_D\log(x^2+y^2)\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid 4\le x^2+y^2\le 9\}$

(静岡大 2008) (m20082502)

0.776 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$ を求めよ．

(静岡大 2008) (m20082508)

0.777 以下の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^7 x\,dx$ (2) $\displaystyle\iint_D\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\ ,\ 0\le x\ ,\ 0\le y\}$

(静岡大 2009) (m20092504)

0.778 1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

の一般解は

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right\}$$

と表せることを示せ．ただし，C は積分定数とする．

(静岡大 2009) (m20092507)

0.779 (1) $\displaystyle\frac{7x^3-3x^2+5x-4}{x^4-2x^3+x^2-2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x^2+1}$ を満たす，A,B,C を求めなさい．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{7x^3-3x^2+5x-4}{x^4-2x^3+x^2-2x}\,dx$ を求めなさい．

(静岡大 2009) (m20092510)

0.780 次の 2 重積分を求めよ. また, 積分領域 D を図示せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D\frac{1}{x^2+1}\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\ :\ x-1\leqq y\leqq 1-x\ ,\ 0\leqq x\}$

(2) $\displaystyle\iint_D\log(x^2+y^2)\,dxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\ :\ 1\leqq x^2+y^2\leqq e^2\right\}$

(静岡大 2010) (m20102502)

0.781 次の 2 重積分を求めよ．また，積分領域 D を図示せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D xe^y\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\,|\,x^2\leqq y\leqq x\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x}\,dxdy$, $D=\{(x,y)\,|\,1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 2,\ 0\leqq\ y\leqq\ x\}$

(静岡大 2011) (m20112502)

0.782 次の重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D e^{\frac{y}{x}}\,dxdy$, $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqq\ y\leqq\ 1\,,\ \sqrt{y}\leqq\ x\leqq\ 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$, $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqq\ y\leqq\ 1\,,\ -1\leqq\ x\leqq\ -y\right\}$

(静岡大 2012) (m20122501)

0.783 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}\,dx$

(静岡大 2013) (m20132504)

0.784 次の積分を計算せよ. 積分領域 D を図示せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x}\sin(x^2+y^2)\,dxdy$, $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \frac{\pi}{3}\leqq\ x^2+y^2\leqq\ \frac{\pi}{2}\,,\ 0\leqq\ y\leqq\ x\right\}$

(静岡大 2013) (m20132505)

0.785 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy$, $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 4\right\}$ を求めなさい.

(静岡大 2013) (m20132509)

0.786 次の不定積分を求めなさい.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$$

(静岡大 2016) (m20162501)

0.787 変数 (r,θ) $(r\geq 0\,,\ 0\leq\theta\leq 2\pi)$ から変数 (x,y) への変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

を考える. また領域 D を

$$D=\{(x,y)\quad ;\ -x\leq y\leq x\}$$

によって定義する.

(1) (x,y) が領域 D を動くとき (r,θ) が動く範囲を求めよ. また, その対応が 1 対 1 であることを示せ.

(2) 次の積分の値を上記の変数変換を用いて求めよ.

$$\iint_D \exp(-x^2-y^2-xy)dxdy$$

ここで積分の範囲は領域 D である.

(岐阜大 1997) (m19972601)

0.788 次の不定積分, 定積分, 広義積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-x-2}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \log(1+x)dx$ (3) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx$

(岐阜大 2003) (m20032601)

0.789　3 点 $(0,0),(1,0),(1,1)$ を頂点とする三角形を D とする．次の重積分を求めよ．

$$\iint_D xy\ dxdy$$

(岐阜大 2003)　　(m20032604)

0.790　次の多重積分を計算せよ.

$$\iint_D |\ 3x\ |\ dxdy \qquad D\ :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad (a,b>0)$$

(岐阜大 2004)　　(m20042602)

0.791　次の積分値を求めよ. ただし, $a>0$ とする.

$$I=\int_0^\infty e^{-ax^2}dx$$

(岐阜大 2005)　　(m20052602)

0.792　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{9x^2+6}{x^3+2x+1}dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin 7x\ \cos x dx$

(岐阜大 2006)　　(m20062604)

0.793　関数 $y=-x^2+9$ のグラフと x 軸によって囲まれる部分を D とするとき，次の重積分を求めよ．

$$\iint_D (x^2+2y)dxdy$$

(岐阜大 2006)　　(m20062606)

0.794　関数 $p(x)$ が　$p(x)=\begin{cases} 0 & (x<-a) \\ \dfrac{x}{a^2}+\dfrac{1}{a} & (-a \leqq\ x<0) \\ -\dfrac{x}{a^2}+\dfrac{1}{a} & (0 \leqq\ x \leqq\ a) \\ 0 & (a<x) \end{cases}$

で与えられるとき，以下の問いに答えよ．ただし，$a>0$ である．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$ を求めよ．　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2p(x)dx$ を求めよ．

(岐阜大 2006)　　(m20062609)

0.795　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \cos(2\pi x)dx$　　(2) $\displaystyle\int \cos^2(2\pi x)dx$

(岐阜大 2006)　　(m20062615)

0.796　次の重積分を計算せよ．ただし，D は xy 平面上，原点中心で半径 1 の円板とする.

$$\iint_D |\,x+y\,|dxdy$$

(岐阜大 2007)　　(m20072604)

0.797　$f(x)=\dfrac{2x^2+15x+12}{(x+2)^2(x-3)}$ とするとき，不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ.

(岐阜大 2007)　　(m20072608)

0.798 不定積分 $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx$ を求めよ.

(岐阜大 2007) (m20072616)

0.799 次の不定積分を以下の指示に従い計算せよ．ただし，積分定数は C とする． $\displaystyle\int \sin x \sin 3x dx$

(1) 被積分関数 $(\sin x \sin 3x)$ を加法定理を用い，積を含まない cos 関数のみの式に書き換え，不定積分を計算せよ.

(2) 部分積分をすることで不定積分を計算せよ.

(岐阜大 2007) (m20072621)

0.800 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ (2) $\displaystyle\int_1^e \log x dx$

(岐阜大 2007) (m20072623)

0.801 (1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log_e x = 0$ となることを示しなさい. (2) $\displaystyle\int_0^1 \log_e x\, dx$ を求めなさい.

(岐阜大 2008) (m20082608)

0.802 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_x^1 y^2 e^{xy} dy\right) dx$

(岐阜大 2008) (m20082614)

0.803 実平面上の x-y で表される直交座標系がある． その上で定義される関数 $f = 3x^2 + 3y$ があり，点 $OABC$ をそれぞれ，$O(0,0)$，$A(2,0)$，$B(2,2)$，$C(0,2)$ とする． $OABC$ の 4 点で囲まれた領域と，OAB の 3 点で囲まれた領域のそれぞれの領域での f の面積分の比

$$\frac{\displaystyle\int_{OAB} f\, dS}{\displaystyle\int_{OABC} f\, dS}$$

は，いくらになるか計算せよ．なお式中の dS は面要素である.

(岐阜大 2009) (m20092601)

0.804 (1) n は自然数とする． a, b, c, d を $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$ を満たす定数としたとき，関数 $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ の n 階導関数を求めよ.

(2) $D = \{(x, y) \mid 1 \leqq\ x^2 \leqq\ y \leqq\ 4 - x^2\ ,\ 0 \leqq\ x\}$ としたとき，次の重積分を計算せよ.

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y}\, dxdy$$

(岐阜大 2009) (m20092603)

0.805 2 以上の整数 n に対して，不等式

$$\frac{1}{2} \leqq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^n}}\, dx \leqq \frac{\pi}{6}$$

が成り立つことを示せ.

(岐阜大 2009) (m20092607)

0.806 次の (1)〜(3) の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ （ヒント：極座標変換）

(岐阜大 2009) (m20092612)

0.807 (1) $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 4}$ とするとき，不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ.

(2) x-y 平面において，$x = a(t - \sin t)$，$y = a(1 - \cos t)$，$(a > 0,\ 0 \leq t \leq 2\pi)$（サイクロイド曲線）が描く曲線の長さを求めよ.

(岐阜大 2009) (m20092619)

0.808 重積分

$$I = \iint_D x\log(x^2+y^2)\,dxdy\ , \qquad D\ :\ x \geqq\ 0,\ 1 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 4$$

の値を求めよ．ただし，log は自然対数を表す.

(岐阜大 2011) (m20112602)

0.809 $F(x)$ はすべての x において 2 回微分可能な関数で，$F'(x) = f(x)$ とする．このとき置換微分法により

$$I = \int_a^b xf(x^2)dx$$

の値を F を用いて表せ．ただし，a, b は正の定数とする．また，重積分

$$J = \iint_D \frac{xyf(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy\ , \quad D\ :\ x, y \geqq\ 0,\ p^2 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ q^2$$

の値を F を用いて表せ．ただし，p, q は正の定数とする.

(岐阜大 2011) (m20112606)

0.810 a, b を正の実数とする．次の広義積分 I の値を求めよ.

$$I = \iint_D \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2}}\,dxdy\ , \qquad D\ :\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

(岐阜大 2012) (m20122602)

0.811 以下の式でガンマ関数 $\Gamma(t)$ を定義する.

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{t-1}dx\ ,\ t > 0.$$

次の問に答えよ．ただし， $t > 0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^t = 0$ となることは証明しなくても使ってよい.

(1) $t > 0$ に対して $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ となることを示せ.

(2) 自然数 n に対して $\Gamma(n+1) = n!$ となることを示せ.

(3) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$，すなわち

$$\left(\int_o^{\infty} e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx\right)\left(\int_o^{\infty} e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}dy\right)$$

を x, y の 2 変数関数の重積分で表せ.

(4) 変数 (x, y) から (r, θ) への変数変換

$$\begin{cases} \sqrt{x} = r\cos\theta, \\ \sqrt{y} = r\sin\theta \end{cases}$$

に対してヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

(5) 前問 (4) の変数変換を用いて (3) の重積分を計算し $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ を求めよ.

(岐阜大 2014) (m20142601)

0.812 自然数 m に対して

$$I(m)=\int_0^1 \frac{1}{x^m+1}\,dx$$

と定める．以下の問に答えよ.

(1) 定積分 $I(1)$, $I(2)$ の値を求めよ.

(2) 実数 $r \neq -1$, 自然数 N に対し,

$$\frac{1}{r+1}=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n r^n+\frac{(-1)^{N+1}r^{N+1}}{r+1}$$

となることを示せ.

(3) 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

の値を求めよ.

(岐阜大 2015) (m20152601)

0.813 次の重積分 I の値を求めよ.

$$I=\iint_D \frac{x^2y^3}{x^2+y^2}dxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\ :\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 5\right\}$$

(岐阜大 2017) (m20172603)

0.814 $a=\log 2$ とし，関数 f と g を

$$f(x)=ax-a-\log x$$
$$g(x)=x^2-ae^x$$

で定義する．ただし，$\log$ は e を底とする自然対数である．以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ と $g(x)$ の導関数を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の閉区間 [1, 2] における最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ.

(3) 次の累次積分 I の積分順序を変更せよ:

$$I=\int_1^2\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\sin(g(y))dy\right)dx\ ,$$

ただし,

$$\alpha(x)=ax$$
$$\beta(x)=a+\log x$$

とする.

(4) I の値を求めよ.

(岐阜大 2018) (m20182602)

0.815 恒等式

$$\frac{x^2+5x+14}{x(x^2+4x+7)}=\frac{a}{x}-\frac{bx+c}{x^2+4x+7}$$

が成立するような定数 a, b, c の値を求めよ．また，次の不定積分 I を求めよ．

$$I=\int\frac{x^2+5x+14}{x(x^2+4x+7)}dx$$

(岐阜大 2020)　　(m20202602)

0.816 e を自然対数の底とする．

(1) 次の不定積分 I を求めよ．　$I=\displaystyle\int\frac{dx}{9e^x+4e^{-x}+6}$

(2) 次の広義積分 J の値を求めよ．　$J=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{9e^x+4e^{-x}+6}$

(岐阜大 2022)　　(m20222606)

0.817 x を変数とする関数 $F(x)$ が

$$F(x)=\int_x^{\sqrt{3}x}\sqrt{1-t^2}\,dt$$

と与えられるとき，次の問に答えよ．ただし， $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とする．

(1) $\dfrac{dF}{dx}$ を求めよ．

(2) $F(x)$ の最大値を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}$ を求めよ．

(豊橋技科大 1996)　　(m19962705)

0.818 $0 \leqq x \leqq \pi$ で定義された関数 $f(x)$ が以下のように与えられている．

$$f(x)=\begin{cases}+1 & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)\\ -1 & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi\right)\end{cases}$$

$f(x)$ を $g(x)$ で近似するとき，近似誤差 I は以下の積分と考えるものとする．

$$I=\int_0^{\pi}\big(f(x)-g(x)\big)^2\,dx$$

(1) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}\cos x\,dx$ を計算せよ．

(2) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}(\cos x)^2\,dx$ を計算せよ．

(3) 定数 a を用いて， $g(x)=a\cdot\cos x$ で近似するとき，誤差 I を計算せよ．

(4) $g(x)=a\cdot\cos x$ で近似するとき，誤差 I を最小にする a を計算せよ．

公式 $\cos a\cdot\cos b=\dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$ を利用してもよい．

(豊橋技科大 1997)　　(m19972705)

0.819 以下の問いに答えよ．

(1) $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\,d\theta$ とする．この式の右辺に部分積分の公式を適用することにより， n が 2 以上の整数ならば $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$ なる関係が成立することを示せ．

(2) 解答用紙中に記したア～エのうち，次の媒介変数表示で与えられる曲線

$x = a\cos^3\theta$ ， $y = a\sin^3\theta$ （ただし， $a > 0$ ）の概略を描いた図として最も適当なものを選び，図の記号ア，イ，ウ，エのいずれかに○を付けよ．(図略)

(3) また，この曲線によって囲まれる図形の面積 S を求めよ．なお，問 (1) で求めた関係を利用すると計算が容易になる．

(豊橋技科大 1998) (m19982707)

0.820 $x > 0$ であるとき，以下の不等式が成り立つことを示せ．ただし，log は自然対数を表す．

(1) $\log(x+1) < x$

(2) $\log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - 1 < \displaystyle\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt$

(豊橋技科大 1998) (m19982708)

0.821 以下は微分方程式の解き方のあらすじである．それについて以下の (1)～(3) の各問に答えよ．

次の方程式を満たす y を求める．

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad （イ）$$

$P(x)$, $Q(x)$ は， x のみの関数である．まず u , v を x の関数として，

$$y = uv \qquad （ロ）$$

とおく．ここで

$$v = e^{-\int P(x)dx} \qquad （ハ）$$

とすると

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0 \qquad （ニ）$$

となる．次に du/dx を求め，これを $F(x)$ とすると

$$\frac{du}{dx} = F(x) \qquad （ホ）$$

これから

$$u = \int F(x)dx + C \quad (C \text{ は任意定数}) \qquad （ヘ）$$

と書けるので， y が求まる．

(1) （イ）（ロ）（ハ）を用いて

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0$$

であることを示せ．

(2) （イ）（ロ）（ハ）を用いて du/dx を求めることにより， $F(x)$ を $P(x)$, $Q(x)$ で表せ．

(3) $x\dfrac{dy}{dx} + y = \log x$ を満たす y を求めよ．ただし，log は自然対数を表す．

(豊橋技科大 1999) (m19992705)

0.822 $\displaystyle\int_0^1 x^2e^x dx$ を計算せよ．

(豊橋技科大 2005) (m20052702)

0.823 (1) $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は次の式で計算される．

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

この関係を用いて，以下に示す関数のラプラス変換を求めよ．
ただし，以下の計算では，$(\mathrm{Re}[s] > 0)$ とする．

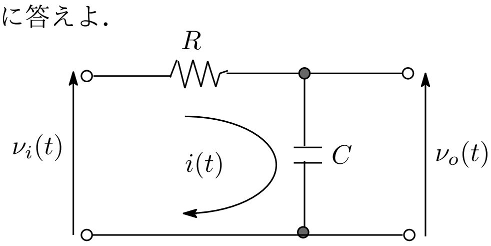
(a) $f(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$ 　ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$

(b) $f(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(c) $f(t) = t\,u(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(d) $f(t) = e^{-\alpha t}u(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t \geq 0 \quad (\alpha > 0) \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(2) 右図に示すように直列 RC 回路について以下の問いに答えよ．



(a) 図に示すように，入力電圧を $\nu_i(t)$，出力電圧を $\nu_o(t)$，ならびに，電流を $i(t)$ とするとき，これらの関係を示す回路方程式を記述せよ．
ただし，$t = 0$ のとき，$\nu_o(t) = 0$ である．

(b) $\nu_i(t)$, $\nu_o(t)$ ならびに $i(t)$ のラプラス変換を，それぞれ $V_i(s)$, $V_o(s)$ そして $I(s)$ と表すものとする．このとき，(a) で求めた回路方程式をラプラス変換して，次の伝達関数 $G(s)$ を求めよ．

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

(c) $\nu_i(t)$ が次のように与えられるとき

$$\nu_i(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

出力電圧 $\nu_o(t)$ のラプラス変換 $V_o(s)$ を求めよ．

(d) $V_o(s)$ をラプラス逆変換して出力電圧 $\nu_o(t)$ を求めよ．

(e) $G(s)$ をラプラス逆変換して，インパルス応答 $g(t)$ を求めよ．

(f) インパルス応答 $g(t)$ を用いて，(c) で定義した入力電圧があるときの出力電圧 $\nu_o(t)$ を求めよ．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062708)

0.824 不定積分 $I_n = \displaystyle\int \cos^n t\,dt \quad (n = 0, 2, 4, \cdots)$ とする．以下の問いに答えよ．ただし，積分定数は省略すること．

(1) I_0 と I_2 を求めよ．

(2) $I_4 = \dfrac{1}{4}\Big(\sin t\cos^3 t + 3I_2\Big)$ であることを示せ．

(3) $n \geq 2$ のとき，I_n を I_{n-2} を用いた式として求めよ．

(4) 定積分 $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt \quad (n = 0, 2, 4, \cdots)$ を求めよ．

(豊橋技科大 2008)　　(m20082703)

0.825 定積分 $I(n, a) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax^2}x^{2n}\,dx$ について以下の問いに答えよ．ただし，n は 0 または正の整数，a は実数とする．

(1) $n=0,\ a=1$ のとき，$I(0,1)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ である．

$a>0$ のとき，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ であることを証明せよ．

(2) 問 (1) の結果を用いて定積分 $I(n,a)$ を n と a の関数として表せ．ただし，n は 1 以上とする．

(豊橋技科大 2009)　　(m20092702)

0.826 (1) 次の不定積分を解け．

$$\int \frac{3x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$$

(2) $x=2(\theta-\sin\theta),\ y=1-2\cos\theta\quad(0\leqq\theta\leqq\ 2\pi)$ で表される曲線について以下の問いに答えよ．

(a) $y\geqq\ 0$ となる θ の範囲を求めよ．

(b) $y\geqq\ 0$ の範囲の曲線と x 軸とで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(豊橋技科大 2011)　　(m20112706)

0.827 以下の問いに答えよ．

(1) 次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{2x-9}{(x-2)(x+3)}\,dx$$

(2) 楕円 $9x^2+4y^2-18x-27=0$ の $x\geq 0,\ y\geq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれた領域の面積 S を求めたい．以下の問いに答えなさい．

(a) 領域における x の最大値を答えよ．

(b) 面積 S を定積分を含む式で表せ．

(c) 面積 S を計算せよ．

(豊橋技科大 2012)　　(m20122705)

0.828 次の不定積分を求めよ．

$$\int e^x\cos\pi x dx$$

(豊橋技科大 2013)　　(m20132702)

0.829 次の関数 $f(t)$ と $g(t)$ について，以下の問いに答えよ．ここで，e は自然対数の底である．

$f(t)=5e^{-t}$,　　$g(t)=t^2+t+1$

(1) $\dfrac{df}{dt},\ \dfrac{dg}{dt}$ をそれぞれ求めよ．

(2) t を媒介変数とする媒介変数方程式

$$\begin{cases} x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}$$

に対し，以下の問いに答えよ．

ア．$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数で表せ．

イ．$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数で表せ．

(3) $z(t)=f(t)g(t)$ とし，以下の問いに答えよ．なお，答えは e を含んだままでもよい．

ア．$z(t)$ に関して，すべての極値を求めよ．また，そのときの t も示せ．

イ．$\displaystyle\int_0^1 z(t)dt$ を求めよ．

(豊橋技科大 2016)　　(m20162701)

0.830 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \cos^2 x dx$　　(2) $\displaystyle\int x\cos x dx$

(豊橋技科大 2017)　　(m20172704)

0.831 以下に示した不定積分を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $\displaystyle\int \sin^3 x dx$　　(2) $\displaystyle\int x^2 e^x dx$　　(3) $\displaystyle\int x e^{-x^2} dx$

(豊橋技科大 2018)　　(m20182702)

0.832 次の重積分を計算せよ．

$$\iint_D e^{x+y} dxdy \quad \left(D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 1\right\}\right)$$

(豊橋技科大 2021)　　(m20212703)

0.833 $n = 1, 2, 3$ に対して，次のように定める関数 $A_n(x)$ と定積分 B_n がある．以下の設問に答えよ．

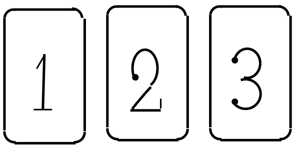
$$A_1(x) = \frac{1}{\sin^2 x},\ \ A_2(x) = \sin x,\ \ A_3(x) = \sin^3 x \quad (\pi/3 \leq x \leq \pi/2)$$

$$B_n = \int_{\pi/3}^{\pi/2} A_n(x) dx$$

(1) $\pi/3 < x_0 < \pi/2$ のとき，$A_1(x_0),\ A_2(x_0),\ A_3(x_0)$ を値の小さい方から順に並べよ．

(2) 定積分 $B_1,\ B_2,\ B_3$ をそれぞれ求めよ．

(3) 図のように，3 枚のカードに 1 から 3 までの数字が 1 つずつ書かれている．この 3 枚のカードの中から無作為にカードを 1 枚選び，そのカードに書かれている数字を n とする．この操作を 2 度行うとき，少なくとも 1 度は $B_n > 1/2$ となる数字 n が書かれているカードを選ぶ確率を求めよ．ただし，1 度目の操作後に選んだカードは元に戻し，2 度目でも 1 度目と同じ操作を行うものとする．



(豊橋技科大 2021)　　(m20212705)

0.834 次の重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2 y dxdy$,　　$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq y \leqq x,\ 0 \leqq x \leqq 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$,　　$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0\ \right\}$

(豊橋技科大 2022)　　(m20222703)

0.835 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D y\sin(x + y) dxdy,\quad D = \left\{(x,\ y) \;\middle|\; x + y \leqq \pi,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xy dxdy,\quad D = \left\{(x,\ y) \;\middle|\; \left|x - \frac{1}{\sqrt{3}}y\right| \leqq 1,\ \left|x + \frac{1}{\sqrt{3}}y\right| \leqq 2\right\}$

(豊橋技科大 2023)　　(m20232703)

0.836 領域 D : ${r_1}^2 \leq x^2+y^2 \leq {r_2}^2 \quad (0<r_1<r_2)$ における重積分

$\displaystyle\iint_D (a+bx+cx^2+fxy+cy^2)dxdy$ を求めよ. ただし, a, b, c, f は定数である.

(名古屋大 2005) (m20052803)

0.837 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x^2+2x}{x^3+3x^2-x-3}\,dx$ を求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \pi(x^3+x)\cos\left\{\frac{\pi}{4}(x^2+1)\right\}dx$ を求めよ.

(名古屋大 2006) (m20062803)

0.838 関数 $f(x)=\dfrac{\log(x+1)}{x+1}$ について, 以下の問いに答えよ. ただし, $x>-1$ とする.

(1) $f(x)$ の x に関する一次微分および二次微分を求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{e-1} f(x)dx$ を計算せよ. ただし, e は自然対数の底である.

(3) $f(x)$ の増減表を作成し, $y=f(x)$ のグラフの概略を図示せよ.

(名古屋大 2007) (m20072802)

0.839 次のサイクロイド曲線に対して, 以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases} \qquad (a>0,\ 0\leq\theta\leq 2\pi)$$

(1) 曲線の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(2) $\theta=\pi$ における接線の方程式を求めよ.

(3) 曲線を x 軸のまわりに回転させるときにできる立体の体積を求めよ. なお, 次の公式を用いてもよい.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\,\dfrac{\pi}{2} & (n:\text{偶数}) \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n:\text{奇数}) \end{cases}$$

$$\text{ただし, } n!!=\begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots 2 & (n:\text{偶数}) \\ n(n-2)(n-4)\cdots 1 & (n:\text{奇数}) \end{cases}$$

(名古屋大 2008) (m20082802)

0.840 以下の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos mx\,\cos nx\,dx$ （m,n は負でない整数）

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$ （ヒント : $x=\tan\theta$とおけ. また, $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$ である.）

(名古屋大 2011) (m20112803)

0.841 以下の問いに答えよ.

(1) 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2 x}dx$ の値を求めよ.

(2) 関数 $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ の導関数を求めよ.

(3) $y=\dfrac{1}{2}x^2$ によって表される曲線の $0\leq x\leq 1$ の部分の長さを求めよ.

(名古屋大 2014) (m20142803)

0.842 (1) x の関数に関する定積分 I_1 を，次のように x を s に変換して計算する場合を考える．

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \int_0^\beta s\,ds$$

ただし，$0 < a < 1$ とする．このとき，x を s の関数として表し，積分の上限 β を求めよ．

(2) 設問 (1) の変数変換を用いて，次の定積分 I_2 の計算を考える．

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,dx = \int_0^\beta f(s)\,ds$$

このとき $f(s)$ を求め，$f(s)$ が $0 \leq s \leq \beta$ において，極大値をただ 1 つ持つことを示せ．

(名古屋大 2015) (m20152804)

0.843 次の不定積分を求めよ． $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^3 x}dx$

(名古屋大 2016) (m20162804)

0.844 次の定積分を求めよ．ただし，$y = \tan^{-1} x$ とした場合，$x = \tan y$ であることを意味する．

$$\int_0^1 x\tan^{-1}x\;dx$$

(名古屋大 2017) (m20172802)

0.845 $\log x$ は自然対数とし，次の不定積分を求めよ． $\displaystyle\int x\log x dx$

(名古屋大 2018) (m20182803)

0.846 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ の値を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ の値を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ の値を求めよ．

(4) $I_n = \displaystyle\int (\log x)^n\,dx$ の漸化式を導き，I_3 を求めよ．なお，n は 0 以上の整数とする．

(名古屋大 2022) (m20222803)

0.847 $D = \{(x,y) : y^2 \leq x \leq y\}$ として次の積分の値を求めなさい．

$$\iint_D (x^2+y^2)\;dx\;dy$$

(名古屋工業大 1998) (m19982904)

0.848 関数 $f(x,y)$ が

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\ , & x^2+y^2 \leq 1 \\ 0\ \ , & x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

で与えられるとき，重積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$$

を求めよ．

(名古屋工業大 1998) (m19982905)

0.849 次の積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\;dx$

(名古屋工業大 1999) (m19992901)

0.850 次の積分の値を求めよ． $\displaystyle\iint_K (3x^2+2y)dx\,dy$,　$K : x^2 \leq y \leq 2-x$

(名古屋工業大 1999)　(m19992903)

0.851 (1) 二次元平面上の第一象限において $0 \leq x^2+y^2 \leq R$ によって定められる部分を A とする．次の A 上での重積分を求めよ． $a>0$ とする．

$$\iint_A e^{-(ax)^2-(ay)2}dx\,dy$$

ただし，次の変数変換を用いて計算を行うこと．

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

(2) (1) で求めたことを用いて次の積分を求めよ．

$$\int_0^{+\infty} e^{-(ax)^2}dx$$

(名古屋工業大 1999)　(m19992904)

0.852 (1) 逆三角関数 $y = \arcsin x$ (ただし，$-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$) の導関数は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

であることを示せ．

(2) 次の定積分の値を部分積分法を用いて求めよ．

$$\int_0^1 (\arcsin x)^2 dx$$

(名古屋工業大 2000)　(m20002902)

0.853 $\Gamma(a) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx$ をガンマ関数という．

(1) $a>0$ のとき，$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ が成り立つことを示せ．

(2) a が自然数である時，$\Gamma(a) = (a-1)!$ が成り立つことを示せ．

(名古屋工業大 2000)　(m20002903)

0.854 $D = \{(x,y)|0 \leq y \leq x,\ x^2+y^2 \leq a^2\}$ のとき，　$I = \displaystyle\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}\ dxdy$ を求めよ．ただし a は正の定数とする．

(名古屋工業大 2001)　(m20012904)

0.855 x の連続関数 y は次の等式を満たすとする．

$$y = -1 + \int_1^x (t-y(t))dt$$

(1) y は微分可能であることを示せ．

(2) y を求めよ．

(名古屋工業大 2001)　(m20012905)

0.856 xy 平面の 5 点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(3,1)$, $(2,2)$, $(0,2)$ を頂点とする 5 角形が作る閉領域を D とする. 重積分

$$\iint_D ydxdy$$

を求めよ.

(名古屋工業大 2004)　(m20042903)

0.857 次の重積分を変数変換の公式を用いて計算せよ.

$$\iint_D 2(x+y)^6(x-y)^8 dxdy\ , \qquad D = \{(x,y) : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1\}$$

(名古屋工業大 2006)　　(m20062904)

0.858 $D = \{(x,y)\,|\,0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ のとき，重積分　$V = \displaystyle\iint_D e^{\max(x^2,y^2)} dxdy$　を求めよ.
ただし，$\max(x^2, y^2)$ は x^2, y^2 の小さくない方を表す.
（ヒント：領域 D を $x > y$ と $x \leq y$ の二つの部分に分けて積分を考えること）

(名古屋工業大 2006)　　(m20062906)

0.859 次の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+y} (2x-y-z) dzdydx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y} dydx$

(名古屋工業大 2007)　　(m20072902)

0.860 $\{(x,y)\ ;\ x^2+y^2-ax=0,\ y>0\}$ $(a>0)$ 上の 1 点を P とし，原点を O とする.

(1) 直線 OP と x 軸のなす角を θ とした時，OP の長さを求めよ.

(2) 領域 $D = \{(x,y)\ ;\ x^2+y^2-ax \leq 0,\ y \geq 0\}$ を極座標で表せ.

(3) D を (2) の領域とした時，次の定積分を求めよ.　$I = \displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$

(名古屋工業大 2008)　　(m20082904)

0.861 (1) 次の不定積分 I を求めよ.　$I = \displaystyle\int \frac{3x^2-x+1}{(x+1)(x^2-2x+2)} dx$

(2) 次の 2 重積分 J の値を求めよ.　$J = \displaystyle\int_1^2 \left(\int_x^2 \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} \right) dx$

(名古屋工業大 2009)　　(m20092903)

0.862 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} \right)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$ を $x-3$ のべき級数に展開し，そのべき級数の収束範囲を求めよ.

(3) 次の重積分を求めよ.

$$V = \int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy$$

(名古屋工業大 2009)　　(m20092905)

0.863 (1) 次の累次積分 I を計算しなさい.

$$I = \int_0^2 \left\{ \int_0^{\sqrt{3(x^2+5)}} \frac{1}{x^2+y^2+5} dy \right\} dx$$

(2) 次の 2 重積分 J を指示に従って計算しなさい.

$$J = \iint_D e^{-(x^2-2xy+4y^2)} dxdy\ , \quad D = \{(x,y)\,|\,x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

(a) 変数変換 $s = x - y\ ,\ t = \sqrt{3}y$ により D が st 平面内の集合 K に移されるとき，J を (s,t) 変数の 2 重積分として表しなさい. ただし K を具体的に表示する必要はない.

(b) (a) の集合 K を求めなさい.

(c) さらに st 平面における極座標変換を行って J の値を計算しなさい.

(名古屋工業大 2010)　　(m20102904)

0.864 $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$ を計算しなさい.

(名古屋工業大 2010)　　(m20102905)

0.865 次の積分の値を求めよ.

$$I_1 = \int_0^1 \left(\sin^{-1} x\right)^2\,dx$$

(名古屋工業大 2011)　　(m20112904)

0.866 次の積分の値を求めよ.

$$I_2 = \iint_D \frac{1}{x^2+y^2+2}\,dxdy\ ,\quad D = \left\{(x,y)\mid x^2+y^2 \leqq 1\ ,\ x+y \geqq 0\right\}$$

(名古屋工業大 2011)　　(m20112905)

0.867 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1-\sin x}\,dx$ を計算せよ.

(名古屋工業大 2011)　　(m20112907)

0.868 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{x^2-x-2}{x^3-x^2+x-1}\,dx$$

(名古屋工業大 2012)　　(m20122904)

0.869 次の 2 重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \log(x+y)dxdy\ ,\quad D = \{(x,y)\mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 1 \leqq y \leqq 2\}$$

(名古屋工業大 2012)　　(m20122905)

0.870 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{9x-4}{(x-2)(x^2+3)}dxdy$$

(名古屋工業大 2013)　　(m20132901)

0.871 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D xye^{-(x^2+y^2)}dxdy\ ,\quad D = \left\{(x,y)\,\middle|\, 0 \leqq \sqrt{3}y \leqq x\ ,\ x^2+y^2 \leqq 5\right\}$$

(名古屋工業大 2013)　　(m20132902)

0.872 次の問いに答えよ.

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$ の値を求めよ.

(2) 関数 $F(x)$ が $F(x) = \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}}\left(2-\frac{1}{3t}\right)dt,\quad x>0$ によって定義される. このとき, $F(x)$ の増減範囲を調べ, 極値を求めよ.

(名古屋工業大 2013)　　(m20132907)

0.873 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$$

(名古屋工業大 2014) (m20142901)

0.874 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D xye^{x+y}dxdy\ , \quad D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0,\ x+y \leqq\ 1\right\}$$

(名古屋工業大 2014) (m20142902)

0.875 不定積分 $I=\displaystyle\int \frac{-x+2}{x^3+1}dx$ を求めよ.

(名古屋工業大 2015) (m20152902)

0.876 重積分 $I=\displaystyle\iint_D xdxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq\ 2x,\ y \geqq\ x-1\right\}$ を求めよ.

(名古屋工業大 2015) (m20152904)

0.877 次の不定積分を求めよ. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx$

(名古屋工業大 2016) (m20162902)

0.878 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\ , \qquad D=\left\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y-1)^2 \leqq\ 2\right\}$$

(名古屋工業大 2016) (m20162903)

0.879 次の定積分と 2 重積分を求めよ.

(1) $I_1=\displaystyle\int_0^2 \sqrt{|x^2-1|}dx$

(2) $I_2=\displaystyle\iint_D \frac{\sin y}{1+\sin^2 x}dxdy, \qquad D\left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leqq\ x \leqq\ y \leqq \frac{\pi}{2}\right\}$

(名古屋工業大 2017) (m20172902)

0.880 (1) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ と置くとき, t を用いて $\cos x$ を表せ. また $\dfrac{dx}{dt}$ を t で表せ.

(2) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ と置換して定積分 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi/3}\frac{1}{5+4\cos x}dx$ の値を求めよ.

(名古屋工業大 2018) (m20182902)

0.881 重積分 $I=\displaystyle\iint_D y^2\sqrt{1-x^2}dxdy, \qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0\right\}$ の値を求めよ.

(名古屋工業大 2018) (m20182904)

0.882 (1) 次の不定積分を求めよ. $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\cos x}$

(2) 次の広義積分が収束するかどうか判定せよ. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+1}}$

(名古屋工業大 2020) (m20202902)

0.883 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2-2y+4)^3}} \qquad \text{ただし}\quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 2x^2-1 \leqq y \leqq x^2\right\}$$

(名古屋工業大 2020) (m20202904)

0.884　領域 $D=\left\{(x,y)\;\middle|\;x^2+y^2\leqq 3,\ x+y\geqq 0\right\}$ において，重積分

$$\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2+1}dxdy$$

の値を求めよ．

(名古屋工業大 2021)　　(m20212903)

0.885　不定積分 $\displaystyle\int \frac{2}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$ を求めよ．

(名古屋工業大 2022)　　(m20222902)

0.886　xy 平面上で，$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフと y 軸，直線 $y=1$，直線 $y=2$ で囲まれる領域を D とする．このとき，次の重積分を計算せよ．

$$\iint_D (\log y)^2 dxdy$$

(名古屋工業大 2022)　　(m20222904)

0.887　不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x^2-2x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$ を求めよ．

(名古屋工業大 2023)　　(m20232902)

0.888　領域 $D=\left\{(x,y)\;\middle|\;x^2+y^2\leqq 1\right\}$ とする．

$\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy$ の値を求めよ．

(名古屋工業大 2023)　　(m20232903)

0.889　確率分布が以下の (1),(2) の場合について，確率変数 X の定める分布関数 $F(x)$ と $\alpha>0$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{F(x)-F(x-\alpha)\}\,dx=\alpha$$

が成り立つことを示せ．

(1)　$P(X=0)=p>0,\ P(X=1)=q>0,\ p+q=1$ の場合．

(2)　確率変数 X が連続型で，密度関数 $f(x)$ をもつ場合．

（愛知県立大 2000）　　(m20003004)

0.890　任意の 1 次関数 $g(x)$ に対して

$\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx=0$ および $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)dx=2$ の 2 つの条件を満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ．

(三重大 2002)　　(m20023109)

0.891　次の不定積分を計算しなさい．　$\displaystyle\int x^2e^x dx$

(三重大 2002)　　(m20023110)

0.892　区間 $-\pi\leq x\leq\pi$ で定義された 2 つの関数 $s_1(x),s_2(x)$ が次の性質をもつとしょう．

$$\int_{-\pi}^{\pi}\{s_1(x)\}^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}\{s_2(x)\}^2dx=1\ ,\quad \int_{-\pi}^{\pi}s_1(x)s_2(x)dx=0$$

(1)　定積分 $f(a,b)=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{x-as_1(x)-bs_2(x)\}^2dx$ を最小にする a,b を与える表式を求めなさい．(定積分の形になる．)

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{x-a\sin x-b\sin 2x\}^2dx$ を最小にする a, b の値を求めなさい.

(三重大 2002) (m20023112)

0.893 次の不定積分を求めなさい.

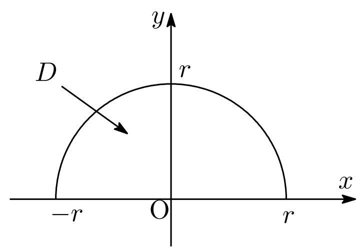
$$\int x^2e^{-x}dx$$

(三重大 2004) (m20043105)

0.894 平面図形 D が xy 平面内に存在するとき, 図形 D の図心の y 座標を $\overline{y}$ とすると,

$\displaystyle\overline{y}=\frac{1}{S}\iint_D ydxdy$ （ただし, S は図形 D の面積）

で与えられる. これを用いて, 図に示すような半円（半径 r）の図心の y 座標を求めよ.



(三重大 2004) (m20043107)

0.895 $\displaystyle\int_0^2\frac{x^2}{(x^3+4)^2}dx$ を計算せよ.

(三重大 2005) (m20053101)

0.896 次の不定積分を求めなさい. ただし, e は自然数の底, ω は実定数とする.

$$\int e^x\cos\omega x dx$$

(三重大 2005) (m20053108)

0.897 (1) $\displaystyle I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ であることを導け. ただし, $\alpha>0$ とする.

(2) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\alpha x^2}dx$ を求めよ.

(三重大 2005) (m20053111)

0.898 以下の (1)～(3) の設問に答えよ.

(1) $\displaystyle\int_1^e\frac{\log_e x}{x^2}dx$ の値を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$ の値を求めよ.

(3) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

$$f(x)=2\cdot x-\int_0^{\pi}f(t)\cdot\cos t\cdot dt$$

(三重大 2005) (m20053112)

0.899 次の不定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int\left(x^2+2x+3+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)dx$

(2) $\displaystyle\int\{\sin(\omega t+a)+\cos(\omega t+b)\}dt$ ただし, ω, a, b は定数である.

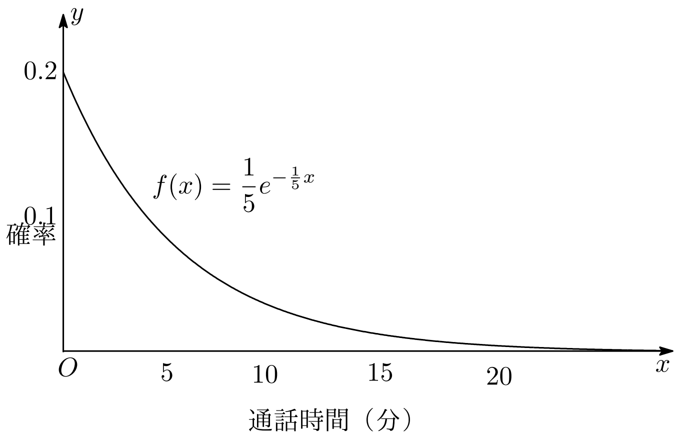
(3) $\displaystyle\int\sin^3\theta\ d\theta$

(三重大 2006) (m20063101)

0.900 ある人の電話の通話時間 x(分) との頻度確率との関係（確率分布）が

$$f(x) = \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x} \qquad (\ x > 0\,,\ e \text{ は自然対数の底})$$

で表されるものとする時，次の (1)〜(5) の問いに答えなさい.



(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ の値を求めなさい.

(2) 通話時間が 10 分である（ちょうど 10 分後に通話が終了する）確率を求めなさい.

(3) 通話が 10 分以内に終了する確率を求めなさい.

(4) 通話を始めてから 10 分が経過している時点において，さらにその後 10 分以内に通話が終了する確率を求めなさい.

(5) この人の平均通話時間を求めなさい。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \cdot e^{-ax} = 0$, $(a > 0)$ である.

(三重大 2006) (m20063109)

0.901 以下の不定積分を求めよ. $\displaystyle\int \frac{x}{2x^2 - 5x + 2}\,dx$

(三重大 2006) (m20063115)

0.902 (1) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ であることを導け．ただし，$\alpha > 0$ とする.

(2) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx$ を求めよ.

(三重大 2006) (m20063119)

0.903 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を $t = x + \sqrt{x^2+1}$ と置くことにより求めよ.

(三重大 2007) (m20073103)

0.904 以下の重積分の値を求めなさい. $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \qquad D\ :\ x^2+y^2 \leqq 1, \quad x > 0, \quad y > 0$

(三重大 2007) (m20073105)

0.905 以下の関数を x で微分せよ.

(1) a^x (2) xa^x (3) $\dfrac{x^3}{x^2-1}$ (4) $\displaystyle\int_0^x (x\cos t - \sin t)dt$

(三重大 2007) (m20073107)

0.906 以下の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^e \log_e x dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$

(三重大 2007) (m20073108)

0.907 xy 平面上の領域 $D = \{(x,y)\ :\ x+y<1,\ 0<x,\ 0<y\}$ で定義された関数 $f(x,y)=xy(1-x-y)$ について考える.

(1) D における $f(x,y)$ の最大値と最大値をとる点 (x_0,y_0) を求めよ.

(2) D での積分 $I=\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ.

(三重大 2007) (m20073118)

0.908 以下の微分方程式 (1) および積分方程式 (2) を解きなさい.

(1) $\dfrac{dy}{dx}=y$ を満たす関数 $y=f(x)$ を求めよ．ただし，$f(0)=1$ とする.

(2) $xf(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{1}{x}f(x)dx+1$ を満たす関数 $y=f(x)$ を求めよ.

(三重大 2009) (m20093101)

0.909 $p(x)=2xe^{-x^2}$,　$q(x)=\begin{cases}1 & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$ とする時，　$f(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}p(t)\cdot q(t-x)dt$ のグラフの概要を下の xy 平面に描きなさい．グラフの概要には最大値や変曲点を明示すること.

(三重大 2009) (m20093102)

0.910 以下の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 6x^5-\frac{2}{x}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty 9x^2e^{-3x}dx$

(三重大 2009) (m20093108)

0.911 (1) 次の微分方程式が完全 微分方程式であることを示しなさい.

$$(3x^2y-y^3)\,dx=(3y^2x-x^3)\,dy$$

(2) 完全微分方程式 $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ の一般解が

$$\int P(x,y)\,dx+\int\left\{Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx\right\}dy=c \quad \text{ただし } c \text{ は任意定数}$$

で与えられることを利用して,

$$(3x^2y-y^3)\,dx=(3y^2x-x^3)\,dy$$

の一般解を求めなさい.

(三重大 2010) (m20103101)

0.912 次の積分の値を求めなさい. ただし, 定数 a は $a>0$, e は自然対数の底とする.

$$\int_0^\infty xe^{-ax^2}\,dx$$

(三重大 2010) (m20103108)

0.913 (1) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ax^2)\,dx$ としたとき, I^2 を極座標を用いて計算し $I=\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$ となることを示せ. ただし, $a>0$ とする. 次に $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x^2\exp(-x^2)\,dx$ の値を求めよ.

(2) $f(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt$ とするとき, n を 0 または正の整数として

(i) $f(n+1) = n!$,　　(ii) $f(n+\frac{1}{2}) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$　　となることを示せ.

(三重大 2010)　　(m20103112)

0.914 以下の不定積分を求めよ. 積分定数は C とする.

(1) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{\sqrt{x}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin(\log x)\,dx$

(三重大 2010)　　(m20103114)

0.915 定積分の値を求めよ．自然対数は log で表す.

(1) $\displaystyle\int_0^\pi x\,\sin x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^2-1}{x}\,dx$

(三重大 2011)　　(m20113103)

0.916 xy 平面上の領域 $D = \{(x,y)\,|\,0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ x^2+y^2 \leqq 1\}$ で関数 $f(x,y) = xy(1-x^2-y^2)$ を考える.

(1) 領域 D における関数 $f(x,y)$ の最大値と最大値をとる点 $(x_0,\ y_0)$ を求めよ.

(2) 領域 D での積分 $I = \displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ.

(三重大 2011)　　(m20113108)

0.917 次の定積分を求めなさい.

$$\int_1^4 \frac{2x+7}{x^2+7x+10}\,dx$$

(三重大 2011)　　(m20113111)

0.918 次の 2 重積分を求めなさい.

$$\iint_R xy\,dxdy \quad (R : x^2+y^2 \leqq 9 \text{ かつ } x \geqq 0)$$

(三重大 2011)　　(m20113113)

0.919 以下の (1) については不定積分を, (2) と (3) については積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{4x+1}{4x^2+2x+6}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty t^2 e^{-at} dt$

(3) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

(三重大 2012)　　(m20123102)

0.920 次の重積分の値を求めなさい.

$$\iint_D xy^2\,dxdy \qquad \big(D : 0 \leqq x \leqq y \leqq 1\big)$$

(三重大 2012)　　(m20123105)

0.921 次の不定積分を求めよ.

$\displaystyle\int \frac{x+1}{x\sqrt{2x+1}}\,dx$　　$\displaystyle\int x\cos^2 x\,dx$

(三重大 2012)　　(m20123112)

0.922 以下の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \sqrt{2x-3}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int x^2 \sin x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx$

(三重大 2012)　(m20123117)

0.923 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x+1)^2}dx$ を求めよ．

(三重大 2013)　(m20133103)

0.924 変数 x に関する関数の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{3x+2}\,dx$

(三重大 2013)　(m20133111)

0.925 位置ベクトル $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ と定ベクトル $\boldsymbol{w}=(0,0,\omega)$ （ただし，ω は定数）を考える．以下の問に答えよ．

(1) これらのベクトルの外積で定義されるベクトル $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{w}\times\ \boldsymbol{r}$ を求めよ．

(2) C を反時計回りの向きをもつ xy 平面上の原点を中心とする半径 R の円とする．C に沿っての周回積分 $\displaystyle\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{I}$ を計算せよ．ただし $d\boldsymbol{I}$ は C に沿った微小線素ベクトルである．

(3) $\boldsymbol{A}$ の回転 $\nabla\times\ \boldsymbol{A}$ を求めよ．

(4) $\boldsymbol{e}_z$ を z 軸向きの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_z=(0,0,1)$ とし，D を上述の C で囲まれた半径 R の円盤領域とする．重積分 $\displaystyle\iint_D (\nabla\times\ \boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{e}_z\,dxdy$ を計算せよ．

(三重大 2013)　(m20133116)

0.926 微分可能な関数 $f(x)$ が，$f(x)=\cos^2(x)+\displaystyle\int_0^x f(t)\{\sin(x)\cos(t)-\sin(t)\cos(x)\}\,dt$ を満たすとき，以下の問に答えなさい．

(1) 与式の両辺を微分して $f'(x)$ を求めなさい．

(2) $f''(x)$ を求めなさい．

(3) $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$ をそれぞれ求めなさい．

(4) 問 (1)〜(3) の結果を用いて，$\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx$ を求めなさい．

(三重大 2014)　(m20143101)

0.927 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$　　(2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\log_e(1+x^2)}{1+x^2}dx$

(三重大 2014)　(m20143107)

0.928 (1) $y=f(x)$ と 2 直線 $x=a$，$x=b$ と x 軸で囲まれる面積は，次式の定積分の定義により求めることができる．

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\triangle x$$

ただし，$f(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続とし，$\triangle x=(b-a)/n$，$x_k=a+k\triangle x$ とする．上記の積分の定義を用いて，$\displaystyle\int_0^1 xdx$ を求めなさい．ただし，導出過程も示すこと．

(2) 問 (1) の定積分の定義を用いて,

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ を求めなさい.

(三重大 2015) (m20153101)

0.929 以下の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int\frac{(x^2+1)^2}{x^3}\,dx$ (2) $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$

(3) $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ ただし $|x|<a,\ a>0$ (4) $\displaystyle\int\sinh x\,dx$

(三重大 2015) (m20153104)

0.930 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int xe^{-2x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int\frac{b}{\sqrt{b^2-x^2}}\,dx$ (ここで b は $b\neq 0$ の実数であり, $|x|<|b|$)

(三重大 2015) (m20153106)

0.931 $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x}dx=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$ (C は定数) を証明せよ.

(三重大 2016) (m20163104)

0.932 関数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ に関して, 次の問いに答えなさい.

(1) 範囲 $0\leqq x\leqq a$ (a は 1 未満の正の定数) で $y=f(x)$ の描く曲線を xy 平面上に図示し,

$\displaystyle\int_0^a f(x)dx$ の示す意味を説明しなさい.

(2) 次の式が成り立つことを, 問 (1) を利用して図形を用いて説明しなさい.

$$\int_0^a\sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\left(a\sqrt{1-a^2}+\sin^{-1}a\right)$$

(三重大 2016) (m20163107)

0.933 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{e^x+1}dx$ (2) $\displaystyle\int x^2\sin x dx$

(三重大 2016) (m20163110)

0.934 広義積分 $\displaystyle\int_0^1(\log x)^2dx$ の値を求めよ.

(三重大 2016) (m20163116)

0.935 定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}2e^x\cos x dx$ を計算しなさい.

(三重大 2017) (m20173107)

0.936 次の不定積分および定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle y=\int x\log_e x\ dx$ (2) $\displaystyle y=\int_1^3\frac{2x^2+5x+4}{x^2}dx$

(三重大 2017) (m20173110)

0.937 微分方程式 $0=dy+aydx$ で表される関数 $y=f(x)$ について以下の (1)～(3) の問いに解答せよ. ただし, a は実数で $a>0$ とする.

(1) $f(0)=a$ の時, 与えられた微分方程式を解き, $f(x)$ を x のみの関数として表せ.

(2) $g(x)=xf(x)$ とする時, 極値や変曲点を示して $y=g(x)$ のグラフの概形を描け.

(3) 以下の極限値を求めよ．

$$\lim_{a\to\infty}\frac{\displaystyle\int_0^{\infty} g(x)dx}{\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx}$$

(三重大 2017)　　(m20173113)

0.938　2 重積分 $\displaystyle\int_0^2\int_0^x \sqrt{x^2-t^2}\,dtdx$ の値を求めよ．

(三重大 2017)　　(m20173116)

0.939　時間 t の関数 $f(t)=p(1-e^{-qt})$ について，以下の問いに答えよ．ただし，p, q は正の実数である．

(1) $g(t)=\displaystyle\int_0^t f(t)dt$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t)$ を求めよ．

(3) $0\leqq t$ に対する $f(t)$ の変化を図示せよ．ただし $\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t)$ がどうなるかも図示すること．

(4) $0\leqq t$ に対する $g(t)$ の変化を図示せよ．ただし $\displaystyle\lim_{t\to\infty} g(t)$ がどうなるかも図示すること．

(5) $f(t)$ が満たす微分方程式を求めよ．

(三重大 2018)　　(m20183103)

0.940　次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^e (\log x)^2 dx$

(三重大 2018)　　(m20183107)

0.941　以下の設問 (1) から (3) に答えよ．

(1) $A=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$,　$B=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ とすると，$A=B$ であることを示せ．

(2) (1) の結果を利用して A の値を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$ の値を計算せよ．

(三重大 2018)　　(m20183110)

0.942　次の不定積分，定積分を求めよ．（e は自然対数の底である.）

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+1}dx=$　　(2) $\displaystyle\int xe^{-x}dx=$

(3) $\displaystyle\int_1^2 (x-1)(x-2)dx=$　　(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x dx=$

(三重大 2020)　　(m20203102)

0.943　以下の問いに答えなさい．ただし，y は x の関数であり，$y'=\dfrac{dy}{dx}$, $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

(1) 初期条件を $y(1)=0$, $y'(1)=1$ とするとき，微分方程式　$xy''+y'=0$　を解きなさい．

(2) 区間 $\sqrt{3}\leqq x\leqq 2\sqrt{2}$ において，(1) の解である関数が描く曲線の長さ L を求めなさい．ただし，区間 $a\leqq x\leqq b$ の関数 $y=f(x)$ の曲線の長さ L は，$L=\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$　で与えられる．

(三重大 2020)　　(m20203109)

0.944 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^2 5^{2x}dx$　　　(2) $\displaystyle\int_0^\pi x^3\sin x\,dx$

(三重大 2022)　(m20223110)

0.945 任意の x に対して (1)，(2) を満たす関数 $f(x)$ をそれぞれ求めよ．

(1) $\displaystyle f(x)=x^2+\int_0^x f(t)\,dt$　　ただし，$f(x)$ は連続関数とする．

(2) $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=x+\int_0^x tf(x-t)\,dt\quad,\quad f(x)>0$　　ただし，$f(x)$ は微分可能な関数とする．

(三重大 2022)　(m20223114)

0.946 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^2(nx)dx$　（n は正の整数）　(2) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$

(奈良女子大 2001)　(m20013204)

0.947 $\displaystyle\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx\ (s>0)$ に対して以下の等式を証明せよ．

(1) $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$　　(2) $\Gamma(n)=(n-1)!$　（n は正の整数）

(2) $\displaystyle\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$　（必要ならば$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi}$を使ってもよい）

(奈良女子大 2001)　(m20013205)

0.948 次の定積分の値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int_0^1(5x+7x^3)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-2}^1|x|dx$

(奈良女子大 2001)　(m20013206)

0.949 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1(1+x)\sqrt{1-x}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}x\sin x dx$

(奈良女子大 2002)　(m20023203)

0.950 $t>0$ に対して，$\displaystyle F(t)=\int_0^t(2x^3-3x^2-x+1)dx$ とおく．

(1) $F(1)$ を求めよ．　　(2) 導関数 $F'(t)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle G(s)=\int_0^{e^{-s}}(2x^3-3x^2-x+1)dx$ とおく．導関数 $G'(s)$ を求めよ．

(奈良女子大 2002)　(m20023204)

0.951 m と n が整数のとき，次の式を証明せよ．

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\theta(m-n)}d\theta=\delta_{m,n}$$

ただし，$i=\sqrt{-1}$ である．また，$\delta_{m,n}$ はクロネッカーのデルタで，

$$\delta_{m,n}=\begin{cases}1 & (m=n)\\ 0 & (m\neq n)\end{cases}$$ と定義されている．

また，必要なら公式　$e^{ix}=\cos x+i\sin x$　を用いよ．

(奈良女子大 2003)　(m20033210)

0.952 次の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$

（奈良女子大 2004） (m20043203)

0.953 開区間 $(0,1)(=\{x\,|\,0<x<1\})$ 上の関数

$$f(x) = -x\log x$$

に対して次の問に答えよ.

(1) $0<a<1$ のとき微分係数 $f'(a)$ を求めよ.

(2) $(0,1)$ における関数 $f(x)$ の最大値を求めよ.

(3) $0<a<1$ のとき $f(a^2) = 2af(a)$ が成り立つことを示せ.

(4) $\displaystyle\lim_{a\to+0} f(a^2) = 0$ が成り立つことを示せ.

(5) $(0,1)$ における関数 $f(x)$ のグラフの概形を描け.

(6) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{1} f(x)dx$ を求めよ.

(奈良女子大 2005) (m20053203)

0.954 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$ の値を求めよ.

(奈良女子大 2006) (m20063203)

0.955 次の不定積分 I を求めよ. $\displaystyle I = \int x\cos x\,dx$

(奈良女子大 2007) (m20073207)

0.956 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2}\quad (a>0)$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\quad (a>0)$

(奈良女子大 2008) (m20083206)

0.957 次の不定積分と定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int xe^{-ax}dx$ （a は定数）

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{1-2a\cos\theta+a^2}}\quad (a>0)$

(奈良女子大 2009) (m20093205)

0.958 F_n が次のように定義されているとする.

$$F_n \equiv \int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx$$

このとき，以下の問いに答えよ．ただし，n は正の整数である.

(1) F_1 を求めよ.

(2) n が 2 より大きいときの漸化式は次のようになることを示せ.

$$F_n = \frac{n-1}{2}F_{n-2}$$

(奈良女子大 2009) (m20093206)

0.959 次の定積分 I に関する以下の問いに答えよ.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

(1) 次の定積分を求めよ.

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$$

(2) 変数を変えることで, I^2 は次のように書けることを示せ.

$$I^2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

(3) この 2 次元積分は直交座標 (x, y) から極座標 (r, θ) に変換することで求めることができる. 積分を実行して I^2 を求め, $I = \sqrt{\pi}$ であることを示せ.

ただし, $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ であり, $dxdy = rdrd\theta$ である.

(奈良女子大 2010) (m20103204)

0.960 次の定積分を求めよ. ただし, $a,\ b$ は正の定数であるとする.

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin(bx)\,dx$$

(奈良女子大 2010) (m20103207)

0.961 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-ax}dx \quad (a > 0)$ (2) $\displaystyle\int_0^{1} x^{\alpha}\log x\,dx \quad (\alpha > -1)$

(奈良女子大 2011) (m20113205)

0.962 次の積分を求めよ. ただし, a は実定数である.

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \exp(-ax)dx \qquad (a \neq 0)$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi+a}^{\pi+a} \sin(mx)\sin(nx)\,dx \qquad (m, n$ は正の整数$)$

(奈良女子大 2012) (m20123202)

0.963 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{1} xe^{x}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

(奈良女子大 2013) (m20133205)

0.964 次の積分を求めよ. ただし, a は正の実定数である.

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1+x^2}dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos x dx$

(奈良女子大 2014) (m20143202)

0.965 次の積分を求めよ. ただし, a は正の定数, n は正の整数である.

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} r^3\exp\!\left(-ar^2\right)dr\ 2$ (1) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^n x\,\cos x\,dx$

(奈良女子大 2015) (m20153202)

0.966 (1) 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{5x-4}{2x^2+x-6}dx$$

(2) 自然数 m, n に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, \sin nx \, dx = \begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

(奈良女子大 2016) (m20163202)

0.967 正の実数 a に対して，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ が成り立つことを利用して，

定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-1)^2 e^{-a(x^2-2x)} dx$ を計算せよ．

(奈良女子大 2016) (m20163206)

0.968 $x \geq 0$ 定義された関数 $f(x) = e^{-x} \sin x$ ついて，以下の問いに答えよ．

(1) f の増減おいび凹凸を調べ，$y = f(x)$ のグラフの概形を書け．

(2) f の最大値を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ であることを示せ．

(4) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} f(x) dx$ を求めよ．

(奈良女子大 2017) (m20173203)

0.969 次の 2 重積分

$$I = \int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy$$

を求めよ．ここで a は正の実定数とする．

(奈良女子大 2017) (m20173205)

0.970 a を正の定数として，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx$ の値を以下の手順で求めよう．

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ay^2) dy$$

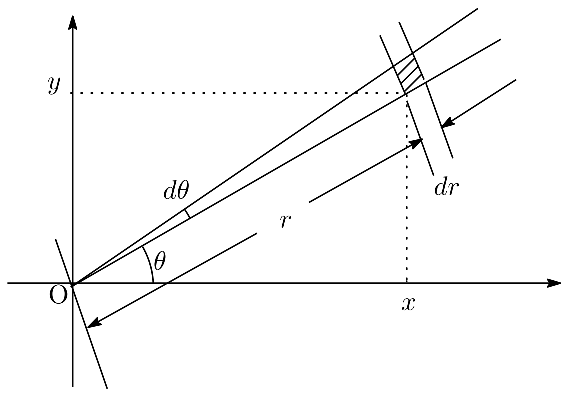
であるから，

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ay^2) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-a(x^2+y^2)\right] dx dy$$

という面積分を実行し，その結果の平方根をとればよい．このとき，点 (x, y) の位置ベクトルを $\overrightarrow{r}$ として，$r = |\overrightarrow{r}|$，$\overrightarrow{r}$ と x 軸のなす角を θ とおく．

(1) x および y を r と θ の式で表せ．

(2) 下図の斜線部の微小面積を，r, dr, θ, $d\theta$ のうち必要なものを用いて表せ．



(3)　I^2 を xy 直交座標による面積分から r と θ で表される極座標での面積分に変換せよ.

(4)　前問の面積分を実行し，それにより I の値を求めよ.

(奈良女子大 2018)　　(m20183205)

0.971　n を自然数，a を実数とし　$I_n = \displaystyle\int_0^a \frac{dx}{(x^2+1)^n}$　とおく．以下の問いに答えよ.

(1)　次の等式を示せ.　$I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^a x\frac{2x}{(x^2+1)^{n+1}}dx$

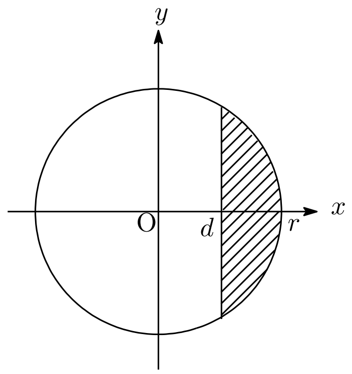
(2)　次の等式を示せ.　$I_{n+1} = \dfrac{1}{2n}\left\{\dfrac{a}{(a^2+1)^n} + (2n-1)I_n\right\}$

(3)　次の積分の値を求めよ.　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

(奈良女子大 2019)　　(m20193203)

0.972　(1)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\{ax+b(1-x)\}^2}$ を求めよ．ただし，$a \neq b$ とする.

(2)　下図のように，半径 r の球を中心から d 離れた平面で切り取るとき，斜線の凸レンズ状部分の体積を求めよ.



(奈良女子大 2019)　　(m20193207)

0.973　$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ とする．以下の問いに答えよ.

(1)　$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ を求めよ.　　(2)　$\displaystyle\lim_{M\to\infty}\int_0^M f(x)dx$ を求めよ.

(奈良女子大 2022)　　(m20223204)

0.974 2 次元の xy 平面内の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に関する以下の問いに答えよ.

ただし，$a>b>0$ であり，また楕円の離心率を

$$\tilde{e}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

とする.

(1) 楕円の周囲の長さ L は

$$L=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\tilde{e}^2\cos^2\theta}\ d\theta$$

で与えられることを示せ.

(2) 離心率 $\tilde{e}$ が 1 より十分小さいとき，長さ L は近似的に

$$L=2\pi a\left(1-\frac{1}{4}\tilde{e}^2\right)$$

となることを示せ.

(奈良女子大 2022)　　(m20223207)

0.975 時間 t $(t\geq 0)$ で関数 $x(t)$ についての次の微分方程式を考える.

$$\frac{dx(t)}{dt}=a\left(f(t)-x(t)\right)$$

ここで a は正の実数で，$f(t)$ は与えられた実関数とする．以下の問いに答えよ.

(1) $a=\log_e 2$ で，$t\geq 0$ で $f(t)=0$ である場合に，$x(0)=1$ をみたす解 $x(t)$ を求めよ.

(2) 一般に時間が十分に経った後の解は，$x(0)$ の値に関係なく

$$x(t)=a\int_0^t f(u)e^{a(u-t)}du$$

に近づくことを示せ.

(3) 次に，$a=\log_e 2$ で，関数 $f(t)$ が 0 以上の任意の整数 n について

$$f(t)=\begin{cases}1 & (2n\leq t<2n+1)\\ 0 & (2n+1\leq t<2n+2)\end{cases}$$

であ場合を考える．整数 N が十分大きくなったときに $x(2N)$ が近づく値を求めよ.

(奈良女子大 2022)　　(m20223208)

0.976 $D=\left\{(x,y,z)\ \middle|\ x^2+y^2+z^2\ \leqq a^2\right\}$ として，次式を求めよ.

$$\iiint_D z^n\,dx\,dy\,dz \qquad \text{（ n は自然数）}$$

(京都大 1995）　　(m19953303)

0.977 次の積分方程式を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\int_a^x y(t)\cdot(x-t)dt$$

(京都大 1999)　　(m19993302)

0.978 つぎの各問いに答えよ.

(1) i , $1+i$, $1-\sqrt{3}i$ を極形式で表せ.

(2) $e^z=4i$ なる z を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_C \frac{z-\frac{1}{3}}{z^3-z}dz$ ， $C:\left|z-\dfrac{1}{2}\right|=1$ の反時計を計算せよ.

(4) $\dfrac{1}{z(z-i)}$ を $z=i$ 近辺でローラン展開せよ．

(京都大 1999)　　(m19993304)

0.979 次の複素積分を行え．ただし，$i=\sqrt{-1}$（虚数単位）とする．

(1) $I=\displaystyle\int_C (z-z_0)^n dz \qquad C:|z-z_0|=r$

(2) 留数定理を用いて，次の積分を行え．

$$I_1=\int_{C_1}\frac{3z+1}{z^2+1}dz \qquad C_1:|z-i|=1$$

$$I_2=\int_{C_2}\frac{(z^2+2)^2}{(2z^2-z)(z+3)}dz \qquad C_2:|z|=1$$

(京都大 2000)　　(m20003303)

0.980 関数 $f(z)$ は $z=a$ において m 位の極 (m は正の整数) をもつとする．

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz=\lim_{z\to a}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big((z-a)^m f(z)\Big)$$

を証明せよ．ただし，C は $z=a$ を囲む適当なサイズの単純閉曲線である．

(京都大 2002)　　(m20023306)

0.981 以下の問に答えよ.

(1) $P(x)$ と $Q(x)$ は独立変数 x だけを含む関数とする. この時次のような 1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

の一般解は

$$y=e^{-\int P dx}\left[\int Qe^{\int P dx}dx+c\right]$$

になることを証明せよ.

(2) 上記の関係式を使って次の 2 つの微分方程式の一般解を求めよ．

(a) $\quad 2x\dfrac{dy}{dx}+y=2x^2$

(b) $\quad (1+x^2)\dfrac{dy}{dx}=xy+1$

(京都大 2004)　　(m20043302)

0.982 関数 $f(x),g(x)$ 区間 $[a,b]$ において連続で，かつ $g(x)>0$ であるとする．このとき，

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

をみたす ξ が区間 $[a,b]$ 内に存在することを示せ.

(京都大 2006)　　(m20063302)

0.983 次のラプラスの積分を考える．　$I(a)=\displaystyle\int_0^\infty \exp[-x^2]\cos 2ax\,dx$　以下の問に答えよ．

(1) 平面の直角座標 (x,y) から極座標 (r,θ) への変換公式を用いて，x^2+y^2 および $dxdy$ を極座標で表せ．

(2) 積分 $I(0)$ の値は $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ と求められることを，$I(0)^2$ を計算して示せ．

(3) 積分 $I(a)$ の値を求めよ．例えば，$I(a)$ を a に関して微分してみる．

(京都大 2006)　　(m20063304)

0.984 C を複素数平面上の単位円周 $C = \{z \mid |z| = 1\}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 原点を中心とする開円盤 $D_1 = \{z \mid |z| < 2\}$ で正則な関数 $f(z)$ に対し，積分 $I = \displaystyle\int_C \frac{f(z) - f(0)}{z} dz$ の値を求めよ．

(2) 関数 $g(z) = \dfrac{1}{z}$ に対し，積分 $\phi(z) = \displaystyle\int_C \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ で与えられる領域 $D_2 = \{z \mid |z| > 1\}$ 上の正則関数 $\phi(z)$ を求めよ．

(京都大 2006)　　(m20063306)

0.985 $x > 0$ に対して $\log x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ と定義して，$\log x$ の性質を定積分の性質から導きたい．(1)〜(2) に答えよ．

(1) 定積分の性質を用いて，等式 (a)〜(d) を示せ．

(a) $\log x_1 x_2 = \log x_1 + \log x_2 \qquad (x_1, x_2 > 0)$

(b) $\log x^{\frac{n}{m}} = \dfrac{n}{m} \log x \qquad (m, n$ は正整数$)$

(c) $\log e = 1 \qquad \left(e = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$

(d) $\dfrac{d}{dx} \log x = \dfrac{1}{x}$

(2) 上で定義した $\log x$ の逆関数を $\exp(x)$ とするとき，以下の等式 (e)〜(h) を示せ．

(e) $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1)\exp(x_2)$

(f) $\exp(1) = e$

(g) $\exp\left(\dfrac{n}{m}\right) = e^{\frac{n}{m}} \qquad (m, n$ は正整数$)$

(h) $\dfrac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x)$

(京都大 2008)　　(m20083301)

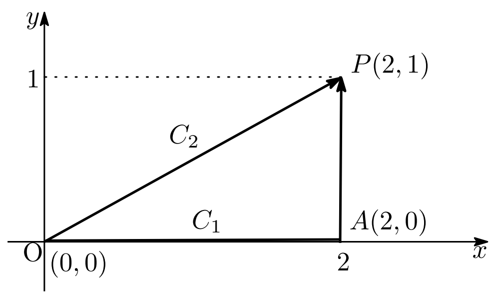
0.986 (x, y) 平面上に 2 つの関数：

$$F(x, y) = 2x + ay\ , \qquad G(x, y) = 2x + 5y$$

が定義されている．ここに a は定数である．(1)〜(4) に答えよ．

(1) 図に示すように，折れ線 OAP に沿う経路を C_1，また，直線 OP に沿う経路を C_2 とするとき，次の 2 つの線積分の値を求めよ．

$$I_1 = \int_{C_1} (Fdx + Gdy)\ , \qquad I_2 = \int_{C_2} (Fdx + Gdy)$$



(2) $F = \dfrac{\partial U}{\partial x}$，$G = \dfrac{\partial U}{\partial y}$ なる関数 $U(x, y)$ が存在するように定数 a を定めよ．また，そのときの $U(x, y)$ を求めよ．ただし定数項の差は無視してよい．

(3)　(2) の関数 $U(x,y)$ が存在する場合，点 O と点 P を結ぶいかなる経路 C を選んだとしても線積分：

$$I = \int_C (Fdx + Gdy)$$

は経路によらず同じ値をもつことを示せ.

(4)　(2) の関数 $U(x,y)$ が存在する場合，単位円周上 $(x^2+y^2=1)$ でのその極値を考える.

(a) 点 (x,y) が単位円周上に沿って動くとき，微分 dx と微分 dy の関係を示せ.

(b) 点 (x,y) が単位円周上に沿って動くとき，$Fdx+Gdy=0$ となる点において $U(x,y)$ は単位円周上で極値をとることを示せ.

(c) 関数 $U(x,y)$ が極値をとるときの x,y の値および $U(x,y)$ の値をそれぞれ求めよ.

(京都大 2008)　　(m20083302)

0.987　関数

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - a - ibx}$$

について，以下の設問に答えよ．ただし，x は実変数，a と b は正の実定数，$i = \sqrt{-1}$ である.

(1)　$f(x)$ を変形して

$$f(x) = A\left(\frac{1}{x - z_1} - \frac{1}{x - z_2}\right)$$

としたとき，z_1 および z_2 を求め，複素平面上に図示せよ．ただし，A, z_1, z_2 は複素数の定数である.

(2)　ζ を実数とし，積分

$$I(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-\zeta}\,dx$$

のコーシーの主値，すなわち

$$I(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{-\infty}^{\zeta-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-\zeta}\,dx + \int_{\zeta+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x-\zeta}\,dx\right) \qquad ①$$

を考える．式 ① の積分路は実数軸上にあるが，図 1 で示した複素平面内における積分路 C_1, C_2, C_3 に沿った複素積分を利用することにより，$I(\zeta)$ を求めることができる．ここで，C_1 は原点を中心とした半径 R の下半円周，C_2 は ζ を中心とした半径 ε の下半円周，C_3 はこれらの半円周とそれらを結ぶ実数軸の線分で構成される閉曲線であり，いずれも図中の矢印に沿って積分するものとする.

(a) C_1 に沿った積分路の $R \to \infty$ での極限値を求めよ.

(b) ε が十分小さいとき，C_2 に沿った積分値を求めよ.

(c) C_3 に沿った積分値を求めよ.

(d) 以上の結果から，$I(\zeta)$ を求めよ.

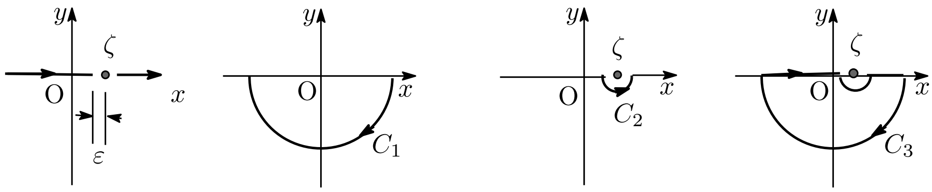


図 1　左から順に，式 ① の積分路，C_1, C_2, C_3 を示す.

(京都大 2008)　　(m20083305)

0.988 $f(z)$ が $z=a$ を中心とする単位円 C の内部および周上で正則であるとき，以下を証明せよ．

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-in\theta}f(a+e^{i\theta})d\theta\ , \qquad n=1,2,\cdots$$

(京都大 2008)　　(m20083306)

0.989 t を実変数とし，複素数平面上において $z=-1$ を内部に含む単純閉曲線を C とするとき，以下の積分を求めよ．

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{ze^{tz}}{(z+1)^3}\,dz$$

(京都大 2008)　　(m20083307)

0.990 複素数平面から実軸の $|x|\leq 1$ の部分を取り除いて出来る領域を D とする．$z\in D$ に対し，関数 $C(z)$ を　$C(z)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dt}{z-t}\,,\quad z\in D$（$t$ は実変数）　で定義する．

(1) $C(z)$ は $|z|>1$ において正則であることを示せ．（ [ヒント] $z\in D$ と実軸上の区間 $[-1,1]$ までの最短距離を d とするとき，$|h|\leq d/2$ なら，$|z+h-t|\geq d/2$ が成り立つ．）

(2) 被積分関数を t の冪級数に展開し，項別積分により，$|z|>1$ における $C(z)$ のローラン展開を求めよ．

(京都大 2008)　　(m20083308)

0.991 確率密度 X の確率密度関数が $f(x)$ で与えられているとき, 積率母関数 $M_X(t)$ を $M_X(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}f(x)dx$ で定義する．また, 2 つの関数 $p(x),\ q(x)$ の合成積 $p*q(x)$ を $p*q(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}p(u)q(x-u)du$ で定義する. 以下の (1)〜(3) に答えよ. ただし, 計算に必要となる確率密度関数の積分に関する仮定は適宜用いてよい.

(1) 確率変数 $X,\ Y$ は互いに独立で, 同時確率密度関数が $f(x)g(y)$ で与えられているとする. このとき, 確率変数 $Z=X+Y$ の確率密度関数 $h(z)$ が $h(z)=f*g(z)$ で与えられることを示せ.

(2) 独立な確率変数 $X,\ Y$ に対し, $M_{X+Y}(t)=M_X(t)M_Y(t)$ がなりたつことを示せ.

(3) 確率変数 X の平均 m_X と分散 σ_X^2 は, それぞれ次のように与えられることを示せ.

$$m_X=\left.\frac{dM_X}{dt}\right|_{t=0}\ ,\ \sigma_X^2=\left.\frac{d^2M_X}{dt^2}\right|_{t=0}-\left(\left.\frac{dM_X}{dt}\right|_{t=0}\right)^2$$

(京都大 2010)　　(m20103303)

0.992 $C(r)$ を複素平面内における原点を中心とする半径 $r>0$ の円周とし, $I(r)$ を

$$I(r)=\int_{C(r)}\frac{\overline{z}+1}{z+1}\,dz$$

と定義する. ただし, 積分の向きは反時計まわりにとるものとする. このとき，以下の問に答えよ.

(1) $0<r<1$ のとき, $I(r)$ を求めよ.

(2) $r>1$ のとき, $I(r)$ を求めよ.

(京都大 2010)　　(m20103307)

0.993 複素関数

$$g(z)=\frac{1}{e^{iz}-1}$$

について, 以下の各問に答えよ.

(1) $g(z)$ の全ての極とその位数, 及び留数を求めよ.

(2) 適切に正の実数 a を選ぶと, $g(z)$ は $0 < |z| < a$ において

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n z^n\ , \qquad c_n \in \mathbb{C} \qquad (n = m,\ m+1,\ m+2,\ \cdots)\ , \qquad c_m \neq 0\ , \qquad m \in \mathbb{Z}$$

の形にローラン展開できる. このような実数 a のうち, 最大のものを求めよ.

(3) (2) における整数 m と, 係数 $c_m,\ c_{m+1},\ c_{m+2}$ を求めよ.

(4) 次の積分を求めよ. ただし, 積分の向きは反時計まわりにとるものとする.

$$\int_{|z|=100} g(z)\, dz$$

(京都大 2010) (m20103308)

0.994 R^2 に直交座標系 $O - xy$ をとり，次式で定義される曲線 C を考える.

$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta + b\cos 2\theta \\ y &= a\sin\theta + b\sin 2\theta \end{aligned} \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

ここに，$a,\ b$ は正の数であり，$a \neq b$ を満たすものとする．このとき問 (1)〜(3) に答えよ.

(1) $\Phi(\theta)$ は，次式を満たす連続関数であるとする.

$$(a\cos\theta + b\cos 2\theta)\tan\Phi(\theta) = a\sin\theta + b\sin 2\theta \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

このとき，$\dfrac{d\Phi}{d\theta}$ を θ の関数として求めよ.

(2) $a = 2,\ b = 1$ のとき，C の概形を描け．また $\Phi(0) = 0$ であるとき，$\Phi(2\pi)$ を求めよ.

(3) $a = 2,\ b = 1$ のとき，次の積分を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$$

(京都大 2014) (m20143306)

0.995 次の定積分の値を求めよ．（ただし，e は自然対数の底）

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{3x^2 - 1}{x} dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2 dx$

(京都大 2017) (m20173305)

0.996 $a < b$ として，区間 $[a,\ b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ で定義された連続実数値関数 $x \mapsto f(x)$ の最大値を M, 最小値を m とすると,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)\ , \quad a < c < b$$

となる c が存在することを示せ.

(京都大 2017) (m20173306)

0.997 次の定積分の値を求めよ.

（イ）$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{5dx}{\sqrt{1-x^2}}$ （ロ）$\displaystyle\int_0^3 \frac{3dx}{x^2+3}$

(京都大 2018) (m20183301)

0.998 次の三角関数または指数関数を含む定積分の値を求めよ.（ただし，e は自然対数の底）

（イ）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos^3 x}{1+\sin x} dx$ （ロ）$\displaystyle\int_0^1 \frac{7e^x}{e^x+1} dx$

(京都大 2018) (m20183302)

0.999 次の (1)〜(6) に答えよ．ただし，log は自然対数を表す．

(1) k を自然数とし，$f(x)$ を $k \leq x \leq k+1$ で連続な狭義単調減少関数とする．このとき，不等式

$$\int_k^{k+1} f(x)dx < f(k)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n = 1, 2, \cdots$ に対して，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ とおく．$S_n > \log(n+1)$ が成り立つことを示せ．

(3) (2) で定義した S_n に対し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

(4) $x > 1$ において関数 $g(x) = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は狭義単調減少であることを示せ．

(5) k を 3 以上の自然数とする．(4) で定義した関数 $g(x)$ に対し，不等式

$$g(k) < \frac{1}{\log(k-1)} - \frac{1}{\log k}$$

が成り立つことを示せ．

(6) $n = 2, 3, \cdots$ に対して，$T_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\log k)^2}$ とおく．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n$ が存在することを示せ．

(京都大 2019)　　(m20193304)

0.1000 (1) 次の積分の値を求めよ．

（イ）$\displaystyle\int_e^3 x^2 \log_e x\ dx$　　（ロ）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x\ dx$　　（ハ）$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2+x}{4x^2+1}dx$

(2) 次の広義積分の値を求めよ．

（イ）$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$　　（ロ）$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2} \log_e(1+x^2)\ dx$

(京都大 2022)　　(m20223303)

0.1001 定積分 $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^2-2x+5}$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 1999)　　(m19993403)

0.1002 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$ を計算せよ．

(京都工芸繊維大 2000)　　(m20003404)

0.1003 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2000)　　(m20003405)

0.1004 領域 $D = \{(x, y) :\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 1 \leqq \sqrt{x^2+y^2} \leqq 2\}$ に対して重積分

$$\iint_D \frac{2xy}{x^2+y^2}dx\ dy$$

の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2000)　　(m20003407)

0.1005 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^2 \tan^{-1} x dx$ の値を求めよ．ただし $\tan^{-1}$ は tan の逆関数の主値である．

(京都工芸繊維大 2001)　　(m20013402)

0.1006 自然数 $n \geqq 2$ に対して， $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx,\ J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$
とおく．次の (1),(2) を証明せよ．

(1) $I_n = J_n$ (2) $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$

(京都工芸繊維大 2001) (m20013403)

0.1007 直線 $y = x$ と放物線 $y = -x^2 + 2x$ で囲まれた領域 D を図示し，D 上の重積分 $\iint_D y\ dxdy$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2001) (m20013406)

0.1008 不定積分 $\int \dfrac{dx}{x^4 - 1}$ を計算せよ．

(京都工芸繊維大 2002) (m20023403)

0.1009 実数 $p > 0$ について $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ とおく．次の (1), (2) を証明せよ．

(1) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^a}{e^x} = 0$ （ただし，a は実数） (2) $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$

(京都工芸繊維大 2002) (m20023404)

0.1010 媒介変数表示された曲線 $C : x = 3\cos t,\ y = 2\sin t\ \ (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ を図示し，この曲線で囲まれた図形 D 上の重積分 $\iint_D (xy+1) dxdy$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2002) (m20023406)

0.1011 積分 $\int_0^{\infty} \dfrac{2x}{(2x^2+1)(x^2+1)} dx$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2003) (m20033404)

0.1012 次の定積分の値を求めよ． $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

(京都工芸繊維大 2003) (m20033405)

0.1013 領域 $D = \{(x, y) : 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq \sqrt{x}\}$ 上で重積分 $\iint_D \sqrt{x}(x+y) dxdy$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2003) (m20033407)

0.1014 閉領域 $D = \{(x, y)\ :\ 1 \leqq x \leqq 2,\ x \leqq y \leqq x^2\}$ を図示して, 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D (x^2 + 2y) dxdy$$

(京都工芸繊維大 2004) (m20043403)

0.1015 (1) $\tan \dfrac{x}{2} = t$ とおく．$\sin x$ と $\dfrac{dx}{dt}$ を t を用いて表せ．

(2) 不定積分 $\int \dfrac{dx}{2 + \sin x}$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2004) (m20043409)

0.1016 (1) 次の極限値を求めよ． $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^3} \left\{ \log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - 2x \right\}$

(2) 次の不定積分を求めよ． $\int \dfrac{x}{x^2 + 2x + 2} dx$

(京都工芸繊維大 2005) (m20053401)

0.1017 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy\,, \qquad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2 \leqq 8\,,\ y \geqq 0\}$$

(京都工芸繊維大 2005) (m20053403)

0.1018 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x^4}{x^3+1}dx$ を求めよ.

(京都工芸繊維大 2005) (m20053409)

0.1019 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}dx$ を計算せよ.

(京都工芸繊維大 2006) (m20063404)

0.1020 次の定積分の値を求めよ. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

(京都工芸繊維大 2006) (m20063407)

0.1021 領域 $D=\{(x,y)\ :\ 0 \leqq x \leqq 1\,,\ 0 \leqq y \leqq x^2\}$ に対して重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x}{1+y}dxdy$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2006) (m20063409)

0.1022 次の積分の値を求めよ. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x+2e^{-x}+2}dx$

(京都工芸繊維大 2007) (m20073403)

0.1023 (1) α を正の定数とするとき, $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^\alpha \log x = 0$ を示せ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2008) (m20083402)

0.1024 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{xy^2}{1+x^2+y^2}\,dxdy$ の値を求めよ.
ただし, $D=\{(x,y)\mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1\}$ とする.

(京都工芸繊維大 2008) (m20083404)

0.1025 連続時間信号 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

で定義する. ただし, t は時間を表す実数, ω は角周波数を表す実数であり, $j=\sqrt{-1}$ とおいている.
このとき,

$$f(t)=\begin{cases} e^{-t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t<0) \end{cases}$$

で与えられる連続時間信号 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ と振幅スペクトル $|F(\omega)|$ を求めなさい.

(京都工芸繊維大 2008) (m20083405)

0.1026 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin x+\cos x-e^x}{x\sin x}$ を求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^3-3x+1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2009) (m20093402)

0.1027 正数 R について, $I(R)=\displaystyle\int_0^R x^3e^{-x^2}dx$ とおく.

(1) 積分 $I(R)$ の値を求めよ.

(2) 極限 $\lim_{R \to \infty} I(R)$ を求めよ.

(京都工芸繊維大 2010) (m20103402)

0.1028 xy 平面の領域

$$D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; \frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq x^2 \right\}$$

に対して，重積分 $\displaystyle\iint_D \sin\left(\frac{y}{x}\right) dxdy$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2010) (m20103404)

0.1029 (1) 極限 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x \log\left(1 + \frac{3}{x}\right)$ および $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x \log\left(1 + \frac{3}{x^2}\right)$ を求めよ.

(2) 積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \log\left(1 + \frac{3}{x^2}\right) dx$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2011) (m20113402)

0.1030 (1) 極限 $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} (\cos x) \log(\cos x)$ を求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x) \log(\cos x) dx$ を求めよ.

(京都工芸繊維大 2012) (m20123403)

0.1031 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dx$ の値を求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ の値を求めよ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}(2-x^2)^2} dx$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2013) (m20133403)

0.1032 xy 平面上の図形 D : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq r \leqq e^{\theta})$ に対して，

重積分 $\displaystyle\iint_D 1 dxdy$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2013) (m20133404)

0.1033 xy 平面の領域

$$D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq x^2 \right\}$$

に対して．重積分

$$I = \iint_D \sqrt{x^3 + 1}\, dxdy$$

の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2015) (m20153403)

0.1034 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$ を求めよ. (2) 広義積分 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$ を求めよ.

(京都工芸繊維大 2016) (m20163402)

0.1035 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x}}$ を求めよ.

(京都工芸繊維大 2017) (m20173403)

0.1036 (1) 2 回微分可能な関数 $F(x)$ に対し，不定積分に関する関係式

$$\int (F''(x)+F(x))\sin x dx = F'(x)\sin x - F(x)\cos x + C$$

を示せ．ただし，C は任意定数とする．

(2) n を 3 以上の自然数とする．微分方程式

$$y'+y=e^{-x}\left\{x^n+n(n-1)x^{n-2}\right\}\sin x$$

の解 $y=y(x)$ で条件 $y(0)=0$ を満たすものを求めよ．

(京都工芸繊維大 2017) (m20173405)

0.1037 (1) 積分 $\displaystyle\int_0^T \frac{\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}}dx \quad \left(0 \leqq T < \frac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．

(2) a を正の実数とする．広義積分 $\displaystyle\int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\sin x}}{(1-\sin x)^a}dx$ が収束するような a の範囲．および a がその範囲にあるときの，この広義積分を求めよ．

(京都工芸繊維大 2019) (m20193402)

0.1038 広義積分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}}$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2020) (m20203403)

0.1039 広義積分 $\displaystyle\int_3^\infty \frac{6x-4}{x^3-4x}dx$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2021) (m20213403)

0.1040 xy 平面上の関数 $f(x,y)=x^3+6xy+3xy^2$ について，次の問いに答えよ．

(1) 重積分

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

の値を求めよ．ただし，$D=\{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq x,\ 0 \leqq x \leqq 1\}$ とする．

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2022) (m20223403)

0.1041 次の広義積分を求めよ． $\displaystyle\int_0^1 \log x dx$

(大阪大 1995) (m19953504)

0.1042 次の積分の積分値を求めよ．

$$\iint_D \frac{\log(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}}dxdy \qquad \text{（ただし，積分領域 } D: x^2+y^2 \leq 1 \text{ である.）}$$

(大阪大 1995) (m19953505)

0.1043 区間 $I=[-\pi,\pi]$ で連続な関数 $f(x)$ に対して

$$R(k)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx\ , \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

とするとき，次の問に答えよ．

(1) $|a| < 1$ なる実数 a に対して

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a^j \cos jx$$

としたとき

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} R(k)$$

を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ が I で非負であるとき

$$|R(k)| \leq R(0)\ , \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

が成り立つことを示せ．

(大阪大 1996） (m19963502)

0.1044 $I_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{(\sqrt{x})^{n-1}}{1+\sqrt{x}}dx$ に対し，

(1) I_0 , I_1 を求めよ．

(2) $I_n + I_{n-1}$ を求めて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ を示せ．

(3) (1),(2) より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2$ を証明せよ．

(大阪大 1997) (m19973502)

0.1045 S は $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq a^2$ となる領域である．ただし， $a > 0$ とする．

(1) 次の関係が成り立つことを示せ．

$$\iint_S f(x)\,dx\,dy = \iint_S f(y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_S \bigl(f(x) + f(y)\bigr)\,dx\,dy$$

(2) $\displaystyle\iint_S x^4\,dx\,dy$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\iint_S x^6\,dx\,dy$ を求めよ．
(大阪大 1998） (m19983501)

0.1046 実数値関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{1 - 2x\cos y + x^2}}\,dy$$

とするとき，次の問に答えよ．

(1) $f(0)$ の値を求めよ．

(2) 積分を用いずに $f(x)$ を表せ．

(3) $f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ を求めよ．

(大阪大 1999） (m19993502)

0.1047 関数 $a(t)$, $b(t)$ はある区間 I で連続であり，関数 $x_1(t) \neq 0$ は 2 階線形常微分方程式

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0$$

の区間 I における解である．このとき

(1) 下の関数 $x_2(t)$ もまた区間 I における解であることを示せ．

$$x_2(t) = x_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\{x_1(\tau)\}^2}\exp(-\int_{t_0}^{\tau} a(s)ds)d\tau.$$

(2) 2つの解 $x_1(t)$, $x_2(t)$ は互いに独立であることを示せ．

(大阪大 2001)　　(m20013503)

0.1048 区間 $(0,\infty)$ 上で定義された実数値関数 $x(t)$ が次の積分方程式

$$x(t) = \int_0^t \sin(2(t-u))\cdot x(u)du + t$$

を満たすとする．このとき，$x(t)$ を求めよ．

(大阪大 2001)　　(m20013504)

0.1049 C は複素数平面上の円 $|z-i|=1$ を表すとするとき，次の複素積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z-i}dz + \int_C \frac{1}{z+i}dz.$

(2) $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-i)^2}dz + \int_C \frac{i}{(z-i)(z+2i)}dz.$

(大阪大 2001)　　(m20013508)

0.1050 (1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ を用いて，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx-x^2}dx$ を計算せよ．

(2) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$ の値を求めよ．

(大阪大 2002)　　(m20023505)

0.1051 実数全体で定義された連続関数 $f(x)$ に対して $g(x)$ を $\displaystyle g(x) = \int_0^x tf(x-t)dt$
で定めるとき，次の (1), (2), (3) に答えよ．

(1) $f(x)$ が奇関数ならば $g(x)$ も奇関数であり，$f(x)$ が偶関数ならば $g(x)$ も偶関数であることを示せ．

(2) $f(x)=\cos x$ のとき，$g(x), g'(x), g''(x)$ を求めよ．

(3) $f(0)>0$ のとき，$g(x)$ は $x=0$ で極小値をとることを示せ．

(大阪大 2003)　　(m20033501)

0.1052 以下の設問に答えよ，ただし $\log x$ は自然対数, e は自然対数の底を表すものとする．

(1) 関数 $y(x)$ に関する微分方程式：

$$y'' + 2y' + y = 0$$

の一般解を求めよ．

(2) 関数 $z(x)$ $(x>0)$ に関する微分方程式

$$x^2z'' + 3xz' + z = 0 \qquad (*)$$

を考える. $x=e^t$, すなわち $t=\log x$ と変数変換したとき $z(e^t)=w(t)$ の満たす微分方程式を求めよ．

(3) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めよ．

(4) $(*)$ の解で更に条件：

$$z(1)=0\,,\quad \int_1^e z(x)dx = 1$$

を満たすものを求めよ．

(大阪大 2005)　　(m20053505)

0.1053　関数 $f(x)$ を近似する三角多項式

$$P_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

の中で誤差

$$E_N = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(P_N(x) - f(x)\right)^2 dx$$

を最小にする

$$\{a_0\,,\ a_1\,, \cdots\,,\ a_N\,,\ b_1\,, \cdots\,,\ b_N\}$$

は $f(x)$ のフーリエ係数であることを示せ.

(大阪大 2005)　　(m20053510)

0.1054　複素平面上の点 a を内部に含む領域で正則な関数 $f(z), g(z)$ が与えられ，$f(a) \neq 0$ とする.

(1)　a が $g(z)$ の 1 位の零点のとき，$\dfrac{f(z)}{g(z)}$ の a における留数を f, g の a における値とそれぞれの導関数の a における値を用いて表しなさい.

(2)　a が $g(z)$ の 2 位の零点のとき，$\dfrac{f(z)}{g(z)}$ の a における留数を f, g の a における値と，それぞれの 3 階までの導関数の a における値を用いて表しなさい.

(3)　n を自然数とするとき，　$\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^{2n}}{(z-1)^n}dz$　の値を求めなさい。

(大阪大 2006)　　(m20063509)

0.1055　閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上で定義された，1 階連続微分可能（1 階導関数が存在して連続）な奇関数 $f(t)$ が与えられている.

(1)　実数列 $\{a_k\}$ を次のように定める：　$a_k := \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\ dt,\quad k = 1, 2, \cdots.$

このとき　$\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = 0$　を示しなさい．また　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2 < \infty$　であることを示しなさい.

(2)　上記 (1) で定めた実数列 $\{a_k\}$ に対して，　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt\ =\ \sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2$　が成立したとすると，

$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t) - \sum_{k=1}^{N} a_k \sin kt\right|^2 dt = 0$　となることを示しなさい．また，この逆も成立することを示しなさい.

(大阪大 2006)　　(m20063510)

0.1056　(1)　空間上の直交座標 (x, y, z) を極座標 (r, θ, φ) ：

$x = r\sin\theta\cos\varphi,\quad y = r\sin\theta\sin\varphi,\quad z = r\cos\theta\quad (r > 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi < 2\pi)$

に変換するとき，そのヤコビアン（関数行列式）を計算しなさい.

(2)　広義積分　$I(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}} dx\,dy\,dz$

について，$\alpha = \dfrac{1}{2}$ のときの値 $I\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めなさい.

(3)　$I(\alpha)$ が収束する α の範囲を求めなさい.

(4) 広義積分 $\quad J(\alpha,\ \beta) = \iiint_B \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha \mid \log(x^2+y^2+z^2) \mid^\beta} dx\,dy\,dz$
が収束するような $\alpha,\ \beta$ の満たすべき条件を求めなさい．
ただし，$B = \left\{ (x, y, z)\ :\ x^2+y^2+z^2 < \dfrac{1}{4} \right\}$.

(大阪大 2007) (m20073506)

0.1057 次の積分の値を留数定理を用いて求めよ． $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx$

(大阪大 2007) (m20073510)

0.1058 X, Y を標準正規分布 $N(0,1)$ に従う独立な確率変数とし，その和を W，W の絶対値を Z とおく．すなわち， $W = X+Y$， $Z = |W|$ である．$N(0,1)$ の確率密度関数 $f(x)$ を使って，関数 $\Phi(t)$ を $\Phi(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$ で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 確率変数 W の分布を求めよ．

(2) 非負定数 z に対して，確率 $P(Z < z)$ を関数 Φ を用いて表せ．

(3) 確率変数 Z の平均を求めよ．

(大阪大 2007) (m20073512)

0.1059 n, k が自然数のとき，広義積分 $I_{n,k}$ を次のように定義する． $\displaystyle I_{n,k} = \int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{k+1}}\,dx$

(1) $I_{1,k}$ を求めよ．

(2) $n-1-k < 0$ のとき，次の関係が成り立つことを示せ． $\displaystyle I_{n,k} = \frac{n-1}{k} I_{n-1,k-1}$

(3) $n-1-k < 0$ のとき，$I_{n,k}$ を求めよ．

(4) $x \geq 1$ のとき，自然数 k に依存するある実数 C_k が存在して， $\dfrac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{k+1}} \geq \dfrac{C_k}{x^{2k-2n+3}}$ となることを示せ．

(5) 上記 (4) の不等式を使って $n-1-k \geq 0$ のとき, $\displaystyle I_{n,k} = \lim_{L\to\infty} \int_0^L \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{k+1}}\,dx = \infty$ を示せ．

(大阪大 2008) (m20083501)

0.1060 次の値を留数定理を用いて計算し，四捨五入で小数点以下第 1 位まで求めよ．ただし，$e = 2.718\cdots$ である．

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2\cos\theta} d\theta$$

(大阪大 2008) (m20083505)

0.1061 $|a| < 1$ とする．以下の式を示せ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a^n \cos nx + a^2 \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx = 2a\cos x \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx$
ただし $\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos nx \cos x$ を用いよ．

(2) $\displaystyle 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx = \frac{1-a^2}{1-2a\cos x + a^2}$

(3) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos nx}{1-2a\cos x + a^2}\,dx = \frac{\pi a^n}{1-a^2}$

(大阪大 2008) (m20083506)

0.1062 関数 $f(x) = e^{-x}\cos x$ について，以下の問いに答えよ．ただし，x は実数，e は自然対数の底とする．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ.

(2) (1) の結果を用いて, $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(x)|\,dx$ を求めよ. ただし, n は 0 または正の偶数とする.

(大阪大 2008) (m20083509)

0.1063 自然数 n に対して

$$I_n(t) = \frac{1}{\pi^n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\left(\dfrac{t}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k\right)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+{x_k}^2\right)}\,dx_1\cdots dx_n \quad (t\in\mathbb{R})$$

とおく.

(1) 留数定理を用いて $I_1(t)$ を求めよ.

(2) $I_n(t)$ を求めよ.

(大阪大 2009) (m20093506)

0.1064 閉区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x\sin x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

と定義する.

(1) $f(x)$ のフーリエ係数

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

を求めよ.

(2) (1) で求めた a_n $(n=0,1,2,\cdots)$ に対して,

$$\frac{{a_0}^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2 = \frac{\pi^2}{3}-\frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ.

(大阪大 2009) (m20093507)

0.1065 関数 f を, 実軸上で定義された周期 1 の連続微分可能な実数値関数とする. この f に対して $\hat{f}(k)$ を

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 e^{-2\pi ikt}f(t)\,dt$$

と定義する. このとき, 複素数 z に対して

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\hat{f}(k)z^k + \sum_{k=-\infty}^{-1}\hat{f}(k)\bar{z}^{|k|}$$

とおく.

(1) 任意の $r\in(0,1)$ に対して, $u(z)$ は $|z|\leq r$ で絶対かつ一様収束することを示せ.

(2) $u = u(z)$ は実数値関数で, $z = x + iy$ とするとき,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

となることを示せ.

(3) 任意の $r \in (0,1)$ に対して, $z = re^{2\pi i\theta}$ とするとき,

$$u(z) = \int_0^1 f(t) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi(\theta-t))+r^2}\, dt$$

となることを示せ.

(大阪大 2010) (m20103509)

0.1066 n が整数全体を動くとして, 級数が絶対収束する数列 $\{\alpha_n\}$ と $\{\beta_n\}$ を考える.
すなわち $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|$ と $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\beta_n|$ が収束するとする. これらの数列を用いて関数 $f,\ g$ を

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{2\pi inx}$$

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{2\pi inx}$$

とフーリエ展開する.

(1) $p(x) = f(x)g(x)$ を $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi inx}$ の形にフーリエ展開したときのフーリエ係数 c_n を求めよ.

(2) $q(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x-s)g(s)\, ds$ を $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{2\pi inx}$ の形にフーリエ展開したときのフーリエ係数 d_n を求めよ.

(大阪大 2010) (m20103510)

0.1067 実数を成分に持つ, 対称かつ正定値な n 次正方行列を B とする. その (i,j) 成分を B_{ij} と書くことにする. n 次元実ベクトルを $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$, $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$ と表し, その内積を $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$ と定める（ ^{t} は転置を表す）. 行列 B の行列式を $\det B$, 逆行列を B^{-1} と表すことにする.

(1) 任意の実数 s と $b > 0$ に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ts} e^{-\frac{t^2}{2b}}\, dt = e^{\frac{bs^2}{2}}$$

(2) 任意の n 次元実ベクトル $\boldsymbol{y}$ に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det B}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\ dx_1\, dx_2\, \cdots\, dx_n = e^{\frac{1}{2}(B\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}$$

(3) $1 \leqq\ j,k \leqq\ n$ に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det B}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_j x_k e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\ dx_1\, dx_2\, \cdots\, dx_n = B_{jk}$$

(4) n 次正方行列 A に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det B}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} \; dx_1\, dx_2 \, \cdots \, dx_n = \mathrm{Tr}(AB)$$

ここで, $\mathrm{Tr}(AB)$ は行列 AB の対角成分の和を表す.

(大阪大 2010) (m20103511)

0.1068 曲線 $y = f(x)$, x 軸, 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた領域の重心 $(\overline{x}, \overline{y})$ を考える．ただし，区間 $[a, b]$ で $f(x) \geq 0$ とする.

(1) 上記の領域を D とするとき, $\overline{x}$ は

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\iint_D x dx dy}{\displaystyle\iint_D dx dy}$$

で定義される.

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int_a^b x f(x) dx}{\displaystyle\int_a^b f(x) dx}$$

となることを証明せよ.

(2) 同様の形式で $\overline{y}$ を求めよ.

(3) $f(x) = \exp(-x/3)$ で区間が $[0, 1]$ となるときの重心 $(\overline{x}, \overline{y})$ を求めよ．ただし，exp は指数関数を表すものとする.

(大阪大 2011) (m20113505)

0.1069 次の複素積分を考える.

$$I = \int_C \frac{e^z}{(z-a)(z-b)^2} \, dz$$

ただし，積分路 C は単位円 $\{|z| = 1\}$（反時計まわり）を表し，複素数 a, b は C 上にないものとする.
以下の場合について I の値を求めよ.

(1) $a \neq b$ のとき.

(2) $a = b$ のとき.

(大阪大 2011) (m20113509)

0.1070 $g(x)$ を周期 2π の連続関数とする．以下を示せ.

(1) $\displaystyle\lim_{m \to -\infty} \int_0^{2\pi} g(x) \sin mx \, dx = 0$

(2) 有限三角級数

$$p_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \, . \quad n = 1, 2, \cdots$$

に対して

$$\lim_{m \to -\infty} \int_0^{2\pi} g(x) p_n(mx) dx = a_0 \int_0^{2\pi} g(x) dx$$

(3) 上の $p_n(x)$ が $n \to +\infty$ で $p(x)$ に $[0, 2\pi]$ 上一様収束するとき

$$\lim_{m \to -\infty} \int_0^{2\pi} g(x) p(mx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(x) dx \cdot \int_0^{2\pi} g(x) dx$$

(大阪大 2011)　　(m20113510)

0.1071 C は複素平面上の円周 $\{z\,;\,|z|=4\}$, D は $\{z\,;\,|z|<4\}$ とする.

(1) D に円周 C を付け加えた集合 $\overline{D}=C\cup D$ で正則な関数に対するコーシーの積分表示を書け.

(2) 次の複素積分を求めよ.

$$\int_C \frac{ze^z\cos z}{(z-\pi)^2(z+\pi)^2}\,dz$$

なおコーシーの積分表示では微分と積分が交換可能であることを用いてよい.

(3) 次の複素積分を求めよ.

$$\int_C \frac{ze^z\sin z}{(z-\pi)^2(z+\pi)^2}\,dz$$

(大阪大 2012)　　(m20123509)

0.1072 (1) 以下を示せ.

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{z}{z^2+1}e^{iz}dz=\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{z}{z^2-1}e^{iz}dz=0$$

ただし，正の実数 R に対し

$$\Gamma_R=\{Re^{i\theta}\,\Big|\,0\le\theta\le\pi\}$$

であり，積分の向きは反時計回りにとるものとする.

(2) 積分

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+1}\sin x\,dx$$

の値を求めよ.

(3) 積分

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2-1}\sin x\,dx$$

の値を求めよ.

(大阪大 2013)　　(m20133506)

0.1073 自然数 m,k に対して,

$$A_{m,k}=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^m x\,\cos kx\,dx\,,\quad A_{0,0}=2\pi$$

とおく.

(1) 任意の自然数 m,k に対して，以下の等式を示せ.

$$A_{m,k}=\frac{1}{1+\frac{k}{m}}A_{m-1,k-1}$$

ただし，$\cos(k-1)x=\cos kx\cos x+\sin kx\sin x$ を用いてもよい.

(2) 自然数 m が与えられたとき，$\cos^{2m-1}x$ のフーリエ級数が

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{m}a_{2k-1}\cos(2k-1)x$$

の形で表されることを示し，フーリエ級数 a_{2m-1} を求めよ.
ただし，$\cos^{2m-1}x=(\cos x)^{2m-1}$ とする.

(大阪大 2013)　　(m20133507)

0.1074 確率変数 X は確率密度関数

$$p(x) = C_k x^{k-1} e^{-x}\ , \quad (x \geqq 0)$$

を持つとする．ただし，k は自然数で，C_k は $\displaystyle\int_0^\infty p(x)dx = 1$ で定まる正の数とする．

(1) 正の数 C_k，および $E[e^{-tX}]$, $(t \geqq 0)$ を求めよ．

(2) 確率変数列 $X_1, \cdots, X_n$ は互いに独立に同一分布に従うとし，その確率密度関数を $p(x)$ とする，このとき，

$$q_n(t) = E[e^{-t(X_1+\cdots+X_n)}]\ , \quad (t \geqq 0)$$

を求めよ．

(3) 極限値

$$\lim_{n\to\infty} q_n\left(\frac{1}{n}\right)$$

を求めよ．

(大阪大 2013) (m20133508)

0.1075 m を自然数，k を 2 以上の自然数とする．x_0 を正の実数とし，関数 $x(t)$ に対する常微分方程式の初期値問題

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) + x(t) - t^m x(t)^k = 0 \quad (t > 0)\ , \\ x(0) = x_0 \end{array}\right. \qquad (*)$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) $y(t) = x(t)^{1-k}$ とおくとき，$y(t)$ が満たす常微分方程式を導け．

(2) 広義積分

$$\int_0^\infty t^m e^{-(k-1)t} dt$$

を求めよ．

(3) 初期値問題 $(*)$ の解 $x(t)$ に対して，$\displaystyle\lim_{t\to t_0-0} |x(t)| = \infty$ となる正の実数 t_0 が存在するとき解 $x(t)$ は爆発するということにする．解 $x(t)$ が爆発するような正の実数 x_0 の範囲を求めよ．

(大阪大 2014) (m20143504)

0.1076 正の実数 R に対して，複素平面上の原点を中心とする半径 R の円周上を反時計まわりに 1 周する閉曲線を C_R とする．以下の問いに答えよ．

(1) R を正の実数とし，α を $|\alpha| < R$ を満たす複素数とするとき，複素積分

$$\int_{C_R} \frac{z^2}{z-\alpha} dz$$

を求めよ．

(2) n を 2 以上の自然数とする．複素平面における領域 D 上で定義された n 個の複素関数 $h_j(z)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ を考え，各 $h_j(z)$ は D 上で正則とする．D 上の複素関数 $g(z)$ を $g(z) = h_1(z)h_2(z)\cdots h_n(z)$ と定義するとき，$g(z)$ の D における導関数 $g'(z)$ について

$$\begin{aligned} g'(z) &= h_1'(z)h_2(z)\cdots h_n(z) + h_1(z)h_2'(z)\cdots h_n(z) \\ &\quad + \cdots + h_1(z)\cdots h_{j-1}(z)h_j'(z)h_{j+1}(z)\cdots h_n(z) \\ &\quad + \cdots + h_1(z)h_2(z)\cdots h_n'(z) \end{aligned}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ．

(3) n を 2 以上の自然数とする．複素数 $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$ に対して複素関数 $f(z) = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \cdots + b_1 z + b_0$ を考える．n 次方程式 $f(z) = 0$ の n 個の複素数解を $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$ とし，R は $|\alpha_j| < R\ \ (j = 1, 2, \cdots, n)$ を満たす正の実数とする．このとき複素積分

$$\int_{C_R} \frac{z^2 f'(z)}{f(z)} dz$$

を $b_{n-2},\ b_{n-1}$ を用いて表せ.

(大阪大 2014)　　(m20143505)

0.1077 ベクトル $\boldsymbol{p} = (p_x,\ p_y,\ p_z),\ \boldsymbol{q} = (q_x,\ q_y,\ q_z)$ に対して，$\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q}$ の内積，外積をそれぞれ $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q},\ \ \boldsymbol{p}\times\ \boldsymbol{q}$ と表す．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x,\ A_y,\ A_z),\ \boldsymbol{B} = (B_x,\ B_y,\ B_z),\ \boldsymbol{C} = (C_x,\ C_y,\ C_z)$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ.

$$A\cdot(B\times\ C) = B\cdot(C\times\ A) = C\cdot(A\times\ B)$$

(2) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (4, 3, 5),\ \boldsymbol{b} = (3, 1, 4),\ \boldsymbol{c} = (8, 3, 2)$ が作る平行六面体の体積を求めよ.

(3) 空間内に直交座標系をとる．$\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ をそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルとする.

$$\boldsymbol{e}_r = \cos u\,\cos v\,\boldsymbol{i} + \sin u\,\cos v\,\boldsymbol{j} + \sin v\,\boldsymbol{k}$$

とおく．正の定数 R に対して，原点を中心とした半径 R の球面 S は，次の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ で表せる.

$$\boldsymbol{r} = R\mathbf{e}_r,\ \ 0 \leqq\ u \leqq\ 2\pi,\ \ -\frac{\pi}{2} \leqq\ v \leqq\ \frac{\pi}{2}$$

球面 S 上の各点 P における外向き法線ベクトルが，点 P の位置ベクトルと同じ向きをもつように S の向きを定める．このとき，ベクトル $\boldsymbol{F} = \dfrac{u}{R}\boldsymbol{e}_r$ に対して，S における次の面積分を求めよ.

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot dS$$

(大阪大 2015)　　(m20153503)

0.1078 以下のの問いに答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位であり，$a,\ b$ は $a > b > 0$ を満たす定数とする.

(1) 次の式で表される曲線 C を複素平面上に図示せよ.

$$C : z = z(t) = a\,\cos t + i\,b\,\sin t \qquad (0 \leqq\ t \leqq\ 2\pi)$$

(2) (1) で与えられた曲線 C に沿う次の積分の値を求めよ.

$$\int_C \frac{1}{z} dx$$

(3) 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt$$

(大阪大 2015)　　(m20153504)

0.1079 実数 x に対し $y = \sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ と定義すると $\sinh x$ は逆関数をもつ．そこで逆関数を $\mathrm{sh}^{-1}(x)$ と表す．以下の設問に答えよ.

(1) $\mathrm{sh}^{-1}(x)$ を求めよ.

(2) 正の実数 a について　$S(a) = \frac{1}{a}\int_0^a \mathrm{sh}^{-1}(x)dx$　と定義する．$S(a)$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{a \to 0} S(a)$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{a \to \infty} \{S(a) - \log a\}$ を求めよ．

(大阪大 2015)　　(m20153505)

0.1080 (1) 複素変数 z の関数 $f(z) = \overline{z}$ は正則であるか否かを判定せよ．ただし，$\overline{z}$ は z の複素共役とする．

(2) $a > b > 0$ となる実定数 a, b において，積分　$I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\cos t}$　の値を求めよ．

(3) 複素平面 C から 1 点 α だけを除いた領域 $D(\alpha) = C - \{\alpha\}$ において，複素変数 z の関数 $g(z) = 1/(z - \alpha)$ の原始関数を求めよ．もし存在しないならばその理由を述べよ．

(大阪大 2016)　　(m20163505)

0.1081 2 次元平面において，4 点 $(\sqrt{2}, 0)$，$(0, \sqrt{2})$，$(-\sqrt{2}, 0)$，$(0, -\sqrt{2})$ で囲まれた菱形を考える．その内部において，ランダムに点 P をとる．P から最も近い菱形の周上の点を Q とし，PQ の長さを X とする．PQ の長さを求める操作を独立に n 回繰り返し，X_1，X_2，$\cdots$，X_n を得た．ただし n は自然数とする．以下の設問に答えよ．

(1) X の分布関数，すなわち，$F(x) = P(X \leqq x)$ を求めよ．
また，$F(x) = \displaystyle\int_0^x f(y)dy$ を満たす確率密度関数 $f(x)$ も求めよ．

(2) PQ の長さの平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ の期待値 $E(\overline{X})$ を求めよ．

(3) 平均 $\overline{X}$ の分散 $V(\overline{X})$ を求めよ．

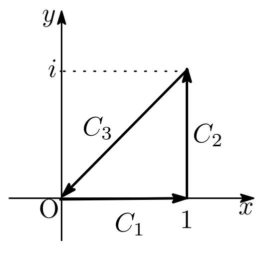
(大阪大 2016)　　(m20163507)

0.1082 以下の問いに答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) $\dfrac{(1 - \sqrt{3}i)^5}{(\sqrt{3} - i)^3}$ を $x + iy$ の形で表せ．

(2) 複素関数 $f(z) = f(x + iy) = x^2 - y^2 + 2xyi$ は正則であることを示し，
導関数 $f'(z)$ を求めよ．また，$f'(z)$ も正則であることを示せ．

(3) 図に示す複素平面上の積分経路 C_1，C_2，C_3 に沿って，
問い (2) の複素関数 $f(z)$ をそれぞれ積分した，
$\displaystyle\int_{C_1} f(z)dz$，$\displaystyle\int_{C_2} f(z)dz$，$\displaystyle\int_{C_3} f(z)dz$ を求めよ．
また，積分経路 $C = C_1 + C_2 + C_3$ に沿って
$f(z)$ を積分した $\displaystyle\int_C f(z)dz$ を求めよ．



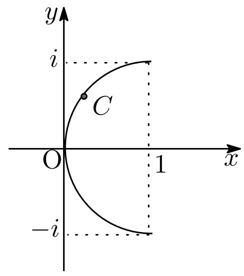
(大阪大 2016)　　(m20163511)

0.1083 複素数 $z = x + iy$，$w = u + iv$ について以下の問いに答えよ．ただし，x，y，u，v は実数，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{z \to i} \frac{e^{2\pi z} - 1}{z - i}$

(2) 複素関数 $w = f(z) = \dfrac{z - 1}{z - i}$ により，z 平面上の図形 $|z - 1| < \sqrt{2}$ は，
w 平面上でどのような図形に写されるかを図示せよ．

(3) 右図に示す通り，$z = 1$ を中心とする単位円の左半分に沿った
$z = 1 - i$ から $z = 1 + i$ に至るまでの曲線を経路 C とするとき，
$\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2 - 2z - 3}dz$ を求めよ．



(大阪大 2017)　　(m20173504)

0.1084　α を 1 以上の実数とする．1 回微分可能な関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_2^{2x} \left\{ f\left(\frac{t}{2}\right) \right\}^\alpha dt + 1 \qquad ①$$

を満たすという．以下の設問に答えよ．

(1)　$f(1) = A$ を満たす実数 A を求めよ．

(2)　$y = f(x)$ とおく．式 ① の両辺を x で微分することにより，微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y^\alpha \qquad ②$$

が成り立つことを示せ．

(3)　初期条件「$x = 1$ のとき $y = A$ （ただし A は (1) で求めた値)」のもとで微分方程式 ② の特殊解を Y とする．「1 以上の任意の実数 x に対して，Y の x における値が実数になる」ための，α に対する条件を求めよ．

(大阪大 2018)　　(m20183505)

0.1085　(1)　実 2 変数の実数値関数 $u(x,y)$ と $v(x,y)$ に対して，複素変数 z の関数 f を

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \qquad (z = x + iy)$$

で定める．$f(0) = 0$ かつ

$$v(x,y) = ye^x \cos y + (x+1)e^x \sin y$$

であるとき，f が複素平面上で正則となる $u(x,y)$ を求めよ．

(2)　$0 < a < 1$ とする．積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1 - a\cos\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} d\theta$ の値を求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193509)

0.1086　(1)　次の微分方程式を解け．ただし，$x = 0$ において $y(0) = 0$ とする．

$$\frac{dy(x)}{dx} - 2y(x) - 2e^x\sqrt{y(x)} = 0$$

(2)　ラプラス変換を用いて，次の微分方程式を解け．ただし，$t = 0$ において $x(0) = -1$ とする．

$$\frac{x(t)}{dt} + 2x(t) - 3\int_0^t x(\tau)d\tau = t$$

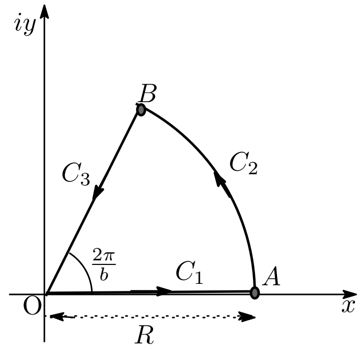
(大阪大 2020)　　(m20203502)

0.1087 積分 $I=\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^b+1}dx$ を考える．ただし，b は正の整数とする．この積分を計算するため，右下図に示す複素平面上の扇形の周に沿う単位閉曲線 C を考え，以下の図のように経路 C_1, C_2, C_3 を定める． ただし，x, y は実数で，AB は原点を中心とする半径 R $(R>1)$ で中心角が $\dfrac{2\pi}{b}$ の円弧である．

C_1 ：原点 O から線分 OA に沿って点 A に至る経路

C_2 ：点 A から円弧 AB に沿って点 B に至る経路

C_3 ：点 B から線分 BO に沿って原点 O に至る経路



このとき，複素数 $z=x+iy$ について以下の問に答えよ．

ただし，$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) $I_3=\displaystyle\int_{C_3}\frac{1}{z^b+1}dz$ を，$I_1=\displaystyle\int_{C_1}\frac{1}{z^b+1}dz$ を用いて表せ．

(2) 閉曲線 C で囲まれた領域内における $f(z)=\dfrac{1}{z^b+1}$ の特異点を求め，そこでの留数を計算せよ．

(3) 留数定理および $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}\frac{1}{z^b+1}dz=0$ を用いて，I を計算せよ．ただし，i を用いずに表せ．

(大阪大 2020)　　(m20203503)

0.1088 関数 $w(t)$ は初期条件「$t=0$ のとき $w=3$」をみたす微分方程式

$$\frac{dw}{dt}=\frac{t}{w}$$

の解とする．以下の問に答えよ．

(1) 関数 $w(t)$ を求めよ．

(2) 関数 $w(t)$ を用いて，2 変数関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=\frac{3}{7}w(x+y)+\frac{1}{17}w(x-2y)^2$$

と定める．次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D f(x,y)dxdy\ ,\qquad D=\big\{(x,y)\ \big|\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x+y\leqq 4\big\}$$

(大阪大 2020)　　(m20203505)

0.1089 原点を中心とした半径 r $(r\neq 0)$ の球面 S は媒介変数 u, v（ラジアン単位）を用いて，

$$\boldsymbol{r}\big(=\boldsymbol{r}(u,\ v)\big)=r\,\boldsymbol{i}_r=r\cos u\cos v\,\boldsymbol{i}_x+r\sin u\cos v\,\boldsymbol{i}_y+r\sin v\,\boldsymbol{i}_z$$

$$(0\leqq u\leqq 2\pi,\ -\pi/2\leqq v\leqq \pi/2)$$

と表すことができる． ここで，$\boldsymbol{i}_x$, $\boldsymbol{i}_y$, $\boldsymbol{i}_z$ は x, y, z 座標のそれぞれの基本ベクトルであり，$\boldsymbol{i}_r$ は $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトルである．

(1) $\dfrac{\partial r}{\partial u}\times\dfrac{\partial r}{\partial v}$ を r, $\boldsymbol{i}_r$, v で表せ．

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{R}=\dfrac{u^2}{r}\boldsymbol{i}_r$ とするとき，$\boldsymbol{R}$ の球面 S に沿う面積分,

$$\iint_S \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の外向きの単位法線ベクトルとする．

(大阪大 2021)　　(m20213502)

0.1090 複素数 z に関する以下の複素関数 $f(z)$ を考える.

$$f(z) = \frac{z^2+2z+1}{(3z^2-10z+3)(2z^2+5z+2)}$$

(1) $f(z)$ の孤立特異点を全て求めよ.

(2) (1) で求めた孤立特異点のうち, $|z|<1$ を満たすそれぞれの点における $f(z)$ の留数を求めよ.

(3) $|z|=1$ のとき，実数 θ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ を用いて $z=e^{i\theta}$ とおける．ただし，$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位を表す．このとき，$\cos\theta$ を z を用いて表せ.

(4) 以下の積分を複素積分に置き換えることにより，その値を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta+1}{(5-3\cos\theta)(5+4\cos\theta)}\,d\theta$$

(大阪大 2021)　　(m20213504)

0.1091 $D=\{(x,y)|0 \leq x \leq 1\ ,\ 0 \leq y \leq 1-x\}$ とするとき，次の積分を求めよ.

$$\iint_D e^{(x+y)^2}dxdy$$

（大阪府立大 2001）　　(m20013602)

0.1092 (1) 次の値をそれぞれ $re^{i\theta}$ の形で表せ.

(a) $\dfrac{5-i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+i3}$　　(b) $\sqrt[3]{1-i}$

(2) 次の積分の値を求めよ.　$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{2}{5+4\cos\theta}d\theta$

(大阪府立大 2003)　　(m20033603)

0.1093 (1) -1 の 5 乗根を求めよ.

(2) 次の積分を留数を用いて求めよ.　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)(x^2+4)}$

(大阪府立大 2006)　　(m20063603)

0.1094 (1) z を複素数とするとき，$e^z=3i$ を満たす z を求めよ．ただし，i は虚数単位である.

(2) $a>0$ の時，以下の積分値を留数解析を用いて求めよ.　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+a^4}\,dx$

(大阪府立大 2007)　　(m20073601)

0.1095 (1) $8i$ の 3 乗根をすべて求めよ．ただし，i は虚数単位である.

(2) 複素積分を用いて，次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta}$$

(大阪府立大 2008)　　(m20083603)

0.1096 累次積分

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^1 y^2 e^{x^4} dx\right) dy$$

の計算を実行しよう. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) I を二重積分とみたとき, 積分する領域（ただし, 境界を含む）を xy 平面上に図示せよ.

(2) 積分順序を交換することにより, I の値を求めよ.

(大阪府立大 2010)　　(m20103601)

0.1097 n を 0 以上の整数とし,

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x^2+y^2)^{n/2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

とおく. このとき, 次の問いに答えよ. ただし. 任意の自然数 ℓ に対して, $\lim_{t\to\infty} t^{\ell}e^{-t^2} = 0$ となることは証明なしに用いてもよい.

(1) 極座標への変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を用いて, J_n を r に関する積分のみで表示せよ.

(2) J_0 の値を求めよ.

(3) n を 2 以上の自然数とするとき, J_n と J_{n-2} の関係式を求め, さらに J_{10} の値を求めよ.

(大阪府立大 2010)　　(m20103602)

0.1098 留数解析を用いて, 次の積分値を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4}{1+x^6}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx$$

(大阪府立大 2010)　　(m20103609)

0.1099 次の問いに答えよ.

(1) 次の等式が任意の実数 t に対して成立することを示せ.

$$\int_0^t (s^2+1)^{-\frac{3}{2}}ds = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}(s^2+1)^{-\frac{3}{2}}ds$ の値を求めよ.

(大阪府立大 2011)　　(m20113601)

0.1100 次の積分 (1),(2) の値を求めよ. ただし, 集合 D, E を正の実定数 $R,\ a,\ b,\ c$ により

$$D = \left\{(x,y)\in R^2 \,|\, x^2+y^2 \le R^2\right\},\quad E = \left\{(x,y,z)\in R^3 \,|\, ax^2+by^2+cz^2 \le 1\right\}$$

と定める.

(1) $\displaystyle\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$　　(2) $\displaystyle\iiint_E dxdydz$

(大阪府立大 2011)　　(m20113603)

0.1101 (1) $\omega = \exp z$ により, z 平面の直線 $x = A$（定数）が ω 平面で描く図形を説明せよ.

(2) 次の定積分の値を求めよ. ただし, $|a| \neq 1$ とする.

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{1}{1-2a\,\cos\theta+a^2}\,d\theta$$

(大阪府立大 2011)　　(m20113609)

0.1102 次の値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$

(大阪府立大 2013)　　(m20133602)

0.1103 以下の問いに答えよ.

(1) $z=x+iy$ とするとき，実部が $u(x,y)=x^2-y^2$ で与えられる正則関数 $f(z)$ の虚部を求めよ. また，$f(z)$ を z の関数として表せ.

(2) 次の定積分値を求めよ.

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\cos\theta+5}d\theta$$

(大阪府立大 2013) (m20133609)

0.1104 (1) 次の方程式において，z についてすべての解を極形式で表せ. また，それを複素平面上に図示せよ. ただし，i は虚数単位である. $z^3=-2+2i$

(2) 留数定理を用いて，次の積分値を求めよ. $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^4+1}dx$

(大阪府立大 2016) (m20163601)

0.1105 自然数 n に対して，I_n を $I_n=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{n+1}}dx$ とおくとき，次の問いに答えよ.

(1) I_1 の値を求めよ.

(2) I_{n+1} を I_n と n を用いて表せ.

(3) I_n の値を求めよ.

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(I_{n+1}+I_{n+2}+\cdots+I_{2n})$ を求めよ.

(大阪府立大 2016) (m20163608)

0.1106 領域 D を $D=\left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\leqq 1\right\}$ とするとき，次の問いに答えよ.

(1) D を図示せよ. (2) 二重積分 $\displaystyle\iint_D(x^2+y^2)dxdy$ の値を求めよ.

(大阪府立大 2016) (m20163609)

0.1107 (1) z を複素数とする. 複素平面上において，原点を中心として半径 a の円 L を積分路とするとき，

$$\int_L\frac{dz}{z}$$

を計算せよ.

(2) 複素積分を用いて，次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^{2\pi}\frac{3}{4-\sin\theta}d\theta$$

(大阪府立大 2017) (m20173603)

0.1108 (1) z 平面上に領域 $0<y<2$ が $w=1/z$ により写像される w 平面上の領域を示せ.

(2) 複素積分を用いて，次の定積分の値を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+16}dx$$

(大阪府立大 2018) (m20183603)

0.1109 非負の整数 n に対して

$$S_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx$$

とおく. このとき，各問に答えよ.

(1) $n \geqq 2$ に対して等式 $S_n = \dfrac{n-1}{n} S_{n-2}$ を示し，n の偶奇で場合分けをして，S_n の値を求めよ．

(2) 比 $\dfrac{S_{2n}}{S_{2n-1}}$ を考え，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_{2n}}{S_{2n-1}}$ の値を求めることで，次を示せ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$$

(大阪府立大 2018)　　(m20183604)

0.1110　2 次元平面での領域 D を

$$D = \{(x, y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 0 \leqq x + y \leqq 1\}$$

とおく．このとき，各問に答えよ

(1) $x = u(1-v)$, $y = uv$ とおく．点 (x, y) が領域 D 上を動くとき，この変換により点 (u, v) はどのような領域を動くか．uv 平面上で動きうる範囲を図示せよ．

(2) (1) の変換のヤコビ行列式の値を求めよ．

(3) 積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)^{10} dxdy$ の値を求めよ．

(大阪府立大 2018)　　(m20183606)

0.1111　留数を用いて，次の定積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 3\sin\theta} d\theta$

(大阪府立大 2019)　　(m20193603)

0.1112　3 次元空間内の単位球を B とおく．すなわち，

$$B = \left\{(x, y, z) \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1\right\}$$

とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ とおく．この変数変換のヤコビ行列式を計算せよ．

(2) 定積分

$$\iiint_B (x^2 + y^2) e^{-(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} dxdydz$$

の値を求めよ．

(大阪府立大 2019)　　(m20193607)

0.1113　(1) 次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．　$\dfrac{s}{(s^2+3)^2}$

(2) 次の複素積分の値を求めよ．ただし，積分路 C は $|z + i| = 3$ で表される円周上を反時計回りに回るものとする．　$\displaystyle\int_C \frac{z^2 - 4z}{(z+1)^2(z^2+9)} dz$

(大阪府立大 2020)　　(m20203603)

0.1114　$I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x dx$　とするとき，I_{n+1} と I_n の関係を求めよ．

(神戸大 1996)　　(m19963801)

0.1115　積分 $\displaystyle\int_1^e \log x \, dx$ を計算せよ．

(神戸大 1997)　　(m19973803)

0.1116　次の積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 (x+y)^2\,dx\,dy$

(2) $\displaystyle\iint_A (\,|x|+|y|\,)\,dx\,dy \quad \big(A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \quad | \quad |x|+|y|\le 1\}\big)$

(神戸大 1997)　　(m19973806)

0.1117 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le x, y\ge 0\}$ とするとき，

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

を求めよ．

(神戸大 1997)　　(m19973807)

0.1118 関数 $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)(x+2)^2}$ について，積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の値を求めよ．

(神戸大 1998)　　(m19983803)

0.1119 $F(x)=\displaystyle\int_{-1}^x |\,t\,|\,dt \quad (x\in R)$ とおくとき，次の問に答えよ．

(1) $F(x)$ を求めよ（すなわち x の式で表せ）．そして，$y=F(x)$ のグラフを描け．

(2) $\dfrac{d}{dx}F(x)$ を求めよ．

(3) 実数全体 R で定義された関数 $G(x)$ で 2 次導関数 $G''(x)$ はあるが 3 回は微分可能でない点があるような関数を作れ．

(神戸大 1998)　　(m19983804)

0.1120 $I_n=\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x^2}dx$ 　I_n と I_{n+2} の関係を調べ，I_{2n+1} を求めよ．

(神戸大 1999)　　(m19993802)

0.1121 次のような変数変換について以下の問いに答えよ．

$$x=u^2-v^2 \quad y=2uv$$

ただし，$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$ $E=\{(u,v)|u^2+v^2\le 1\}$ とする．

(1) $u^2+v^2\le 1$ が $x^2+y^2\le 1$ に移ることを証明せよ．

(2) ヤコビアンを求めよ．

(3) $\displaystyle\int_D dxdy$, $\displaystyle\int_E \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\int_D dxdy=\int_E \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$ は成立しない．何故か．

(神戸大 1999)　　(m19993804)

0.1122 次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D (x+y)^4 dxdy, \quad D=\{(x,y)\,|\,x^2+2xy+2y^2\le 1\}$$

（神戸大 2001）　　(m20013806)

0.1123 R を正の実数とし，$D_R=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le R^2\}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の積分を計算せよ．　$I_R=\displaystyle\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

(2) $\lim_{R\to\infty} I_R$ を求め，それを用いて，次の積分の値を計算せよ． $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

(神戸大 2002) (m20023802)

0.1124 $L_n = \displaystyle\int \log^n x \, dx$ とする．

(1) $L_n = x\log^n x - nL_{n-1} \quad (n \geq 1)$ を示せ． (2) L_n を求めよ．

(神戸大 2003) (m20033803)

0.1125 次の積分を計算せよ．

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad \left(D = \{(x,y) \in \mathbf{R^2} \ : \ x^2+y^2 \leq 1\} \right)$$

(神戸大 2003) (m20033805)

0.1126 次の重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D xdxdy, \qquad D : \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \leq 1\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,$ ただし，$a, b > 0$

(2) $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)dxdy, \qquad$ D は 3 直線 $x = 0, y = 0, x+y = \pi/2$ で囲まれる三角形の内部

(3) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy, \qquad D : x^2+y^2 \leq a^2$

(神戸大 2003) (m20033806)

0.1127 $\varepsilon > 0$ とし，$D_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \varepsilon^2 \leq x^2+y^2 \leq 1\}$ とおく．このとき次の値を求めよ．

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{x^2-y^2}{x^4+y^4}dxdy$$

(神戸大 2004) (m20043804)

0.1128 次の各問に答えよ.

(1) 積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta d\theta$ の値を求めよ.

(2) 次の D 上の重積分を, $x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta$ と変数変換することにより求めよ.

$$\iint_D x^2dxdy\,,\ \ D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq x\}$$

(神戸大 2004) (m20043805)

0.1129 次の計算をしなさい.

(1) $\sin^{-1} x$ を $\sin$ の逆関数とするとき

$\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1})^2$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx\cos nxdx \quad (m, n \in Z)$

(3) $\displaystyle\iint_{x,y\geq 0,\, x+y\leq 1} xydxdy$

(4) $\displaystyle\iint_V e^{-x^2-y^2}dxdy$

ここで V は第 1 象限 $V = \{(x,y) \mid x \geq 0\,,\ y \geq 0\}$ を表す.

(神戸大 2005) (m20053802)

0.1130 次の重積分を求めよ． $\displaystyle\int_{0\leq y\leq\sqrt{1-x^2}} x^2y\,dxdy$

(神戸大 2006) (m20063803)

0.1131 $r:[a,b] \longrightarrow \boldsymbol{R}^+$ を連続微分可能な関数とし，$(x,y)-$ 平面上の曲線 $x=r(\theta)\cos\theta$，$y=r(\theta)\sin\theta$，$a \le \theta \le b$ を α とする．ここで $0 \le a \le b \le \pi/2$．曲線 α 上の各点と原点を結ぶ線分から出来る扇形領域の面積を $\mathcal{A}$，α の長さを $\mathcal{L}$ とするとき

$$\mathcal{A}=\int_a^b f(r)d\theta\,, \qquad \mathcal{L}=\int_a^b g(r,r')d\theta$$

となる $f(r)$ と $g(r,r')$ を与えよ．さらに $r(\theta)=1/\cos\theta$ の場合の $\mathcal{A}$ または $\mathcal{L}$ の上記公式を用いて

$$\int_0^{\pi/3}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\sqrt{3}$$

を説明せよ．

(神戸大 2006)　　(m20063804)

0.1132 次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dydx \qquad (D=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\})$

(2) $\displaystyle\iint_D (|x|+|y|)\,dydx \qquad (D=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \mid |x|+|y|\le 1\})$

(3) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)e^{(x^2+y^2)^2}\,dydx \qquad (D=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\})$

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\,dydx \qquad (D=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \mid y\ge x,\ 1\le x^2+y^2\le 2\})$

(神戸大 2007)　　(m20073804)

0.1133 $f(x)$ をすべての $x\ge 1$ に対して定義された単調増加な連続関数とする．$f(x)>0$ であるとするとき，次の各問いに答えよ.

(1) $\displaystyle f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)\le\int_1^n f(x)dx\le f(2)+\cdots+f(n-1)+f(n)$ を示せ.

(2) $\displaystyle F(x)=\int_1^x f(t)dt$ とする．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{F(n)}=0$ を仮定する．そのとき，
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(n)}{F(n)}=1$ 　を示せ.

(神戸大 2007)　　(m20073805)

0.1134 以下の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D xy^2\,dxdy\,, \qquad D\ :\ 0\leqq\ y\leqq\ x\leqq\ 1$

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy\,, \qquad D\ :\ x^2+y^2\leqq\ 1$

(3) $\displaystyle\iint_D (x-y)e^{x+y}\,dxdy\,, \qquad D\ :\ 0\leqq\ x+y\leqq\ 2,\ 0\leqq\ x-y\leqq\ 2$

(神戸大 2007)　　(m20073808)

0.1135 以下の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx$ 　(m,n は自然数)　　(2) $\displaystyle\int_1^e x(\log x)^2dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{Sin}^{-1}x\,dx$

(神戸大 2008)　　(m20083801)

0.1136 次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}} \quad (D=\{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3 | x^2+y^2+z^2\leq 1\})$

(2) $\displaystyle\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tan^{-1}\frac{y}{x}$

(神戸大 2008) (m20083808)

0.1137 (1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^4}$ を求めよ.

(2) 球 $x^2+y^2+z^2\leq 1$ と円柱 $x^2+y^2\leq x$ の共有部分の体積を求めよ.

(神戸大 2009) (m20093804)

0.1138 $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=0,1,\dots}$ を次式によって帰納的に定義する:

$$\begin{cases} f_0(x)=1\,, \\ f_{n+1}(x)=1+\displaystyle\int_0^x t\,f_n(t)\,dt\,, \quad n=0,1,\cdots \end{cases}$$

このとき, $\displaystyle f_n(x)=1+\sum_{k=1}^n \frac{x^{2k}}{2^k\,k!} \quad n=1,2,\cdots$ となることを数学的帰納法によって示せ.

(神戸大 2009) (m20093807)

0.1139 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$ とおく. 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D |x|\,dxdy$

(2) $\displaystyle\iint_D |x+y|\,dxdy$

(神戸大 2009) (m20093810)

0.1140 $D=\left\{(x.y) \;\middle|\; y\leq 3x\,,\ y\leq \frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\,,\ y\geq \frac{1}{2}x\,,\ y\geq 3x-10\right\}$

とするとき, D を図示し, 積分 $\displaystyle\iint_D (x-2y)\,dxdy$ を計算せよ.

(神戸大 2010) (m20103808)

0.1141 次の重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x+y)^2\sin(\pi\,|x-y|)dxdy\,, \quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,|x+y|\leq 1,\ |x-y|\leq 1\}.$

(2) $\displaystyle\iint_D \log(1+x^2+y^2)dxdy\,, \quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,x+y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 1\}.$

(神戸大 2011) (m20113806)

0.1142 重積分

$$V=\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy\,. \quad D=\{(x,y)\in R^2\,|\,1\leqq\ x\leqq\ 2,\ 0\leqq\ y\leqq\sqrt{3}x\}$$

に関する以下の問いに答えよ.

(1) D が変数変換 $x=u,\ y=uv$ によってどのような領域に写されるかを図示せよ.

(2) (1) の変数変換に対するヤコビアンを求めよ.

(3) V の値を求めよ.

(神戸大 2011) (m20113808)

0.1143 次の 2 重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy\,, \qquad D=\left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; 0\le y\le x\le 1\right\}$$

(神戸大 2012) (m20123804)

0.1144 以下の問いに答えよ.

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ の値を求めよ.

(2) 自然数 n に対して $f_n(x)=1-x^2+x^4-\cdots+(-x^2)^n$ とおく. 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\int_0^1 \left|f_n(x)-\frac{1}{1+x^2}\right|dx \leqq \frac{1}{2n+3}$$

(3) 級数の和

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$$

を求めよ.

(神戸大 2013) (m20133802)

0.1145 $D=\left\{(x,y,z)\;\middle|\;1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 4\ ,\ 1\leqq\ z\leqq\ x^2+y^2\right\}$ とおく. 積分

$$\int_D \frac{2x^2+y^2+x}{z}dxdydz$$

の値を求めよ.

(神戸大 2013) (m20133804)

0.1146 二重積分 $I=\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 15y\sqrt{2+x^5}dxdy$ について以下の問に答えよ.

(1) この二重積分に対応する積分領域を図示せよ.

(2) I の値を求めよ.

(神戸大 2014) (m20143804)

0.1147 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 2,\ y\ge x\right\}$ とするとき, 積分

$$\int_D x^2dxdy$$

の値を求めよ.

(神戸大 2014) (m20143807)

0.1148 領域 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ 1<x^2+y^2<4,\ x+y>0\right\}$ 上での積分

$$\iint_D \frac{x\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy$$

を計算せよ.

(神戸大 2015) (m20153804)

0.1149 $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(2x^2+2\sqrt{2}xy+3y^2)}dxdy$ の値を求めよ.

(神戸大 2016) (m20163804)

0.1150 $D_0(x) \equiv 1,\ D_n(x) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2\cos kx\ (n \geq 1)$, $F_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} D_k(x)\ (n \geq 0)$ で $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{D_n\}$ と $\{F_n\}$ を定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $D_n(x)\sin\dfrac{x}{2} = \sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x$ となることを示せ．

(2) $F_n(x)\sin^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2(n+1)}\Big\{1-\cos(n+1)x\Big\} = \dfrac{1}{n+1}\sin^2\dfrac{n+1}{2}x$ となることを示せ．

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)dy = 2\pi$ となることを示せ．

(4) $0 < \delta < \pi$ なる δ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\delta \leq |y| \leq \pi} F_n(y)dy = 0$ となることを示せ．

(神戸大 2016)　　(m20163805)

0.1151 自然数 n に対して，次数 n 以下の実数係数 1 変数多項式全体からなる実ベクトル空間 P_n を考え，

$$H_n(x) = e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$$

とおく．以下の各問に答えよ．

(1) $H_0(x),\ H_1(x),\ H_2(x)$ を具体的に求めよ．

(2) $H_n(x)$ が次数 n の多項式であることを示せ．

(3) $H_0(x),\ H_1(x),\ \cdots,\ H_n(x)$ が P_n の基底をなすことを示せ．

(4) $0 \leqq m < n$ を満たす任意の整数 m について，次の式が成り立つことを示せ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m H_n(x) e^{-x^2} dx = 0$$

(神戸大 2016)　　(m20163807)

0.1152 (1) $x = \sin^2\theta$ と変数変換して，次の積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$

(2) 次の xy 平面上の領域 D を図示せよ．　$D = \left\{(x, y)\ \middle|\ 1 \leqq x+y \leqq 4,\ 0 \leqq x,\ 0 \leqq y\right\}$

(3) 変数変換 $x = st,\ y = s(1-t)$ により，次の st 平面上の領域 E が (2) の領域 D に 1 対 1 に写されることを示せ．　$E = \left\{(s, t)\ \middle|\ 1 \leqq s \leqq 4,\ 0 \leqq t \leqq 1\right\}$

(4) 次の重積分の値を求めよ．ただし，D は (2) で定義した領域とする．　$\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{x}{y(x+y)}}dxdy$

(神戸大 2016)　　(m20163809)

0.1153 $a, b, c > 0,\ V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ \middle|\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$ とするとき，積分　$I = \displaystyle\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz$ の値を求めよ．

(神戸大 2017)　　(m20173802)

0.1154 xz 平面において，曲線 $z = \sqrt{8-x^2}$　(ただし $0 \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$)，直線 $z = x$，および z 軸で囲まれた領域を D とする．また，xyz 空間内において，z 軸を回転軸として D を 1 回転して得られる立体を V とする．以下の各問いに答えよ．

(1) D の概形を描け．

(2) D の面積を求めよ．

(3) V の体積を求めよ．

(4) $\displaystyle\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ の値を求めよ.

(神戸大 2017)　　(m20173810)

0.1155 積分 $\displaystyle\iint_{x^2-xy+y^2\leqq 1}(x-y)^2dxdy$ の値を求めよ.

(神戸大 2018)　　(m20183804)

0.1156 $(-1,1)$ で定義された C^∞-級関数 $f(x)$ は次の微分方程式を満たすとする：

$$(1-x^2)f'(x)-xf(x)=1,\quad f(0)=0.$$

自然数 n に対し，$a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ とおく.

(1) a_n を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^n dx \leqq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$ が成り立つことを示せ．ただし，不等式 $1-x\leqq e^{-x}\quad(0\leqq x\leqq 1)$ および等式 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明せずに用いてよい.

(3) $n\to\infty$ のとき数列 $\{a_n\}$ の収束・発散を判定せよ．また，収束するときは極限値を求めよ.

(神戸大 2018)　　(m20183805)

0.1157 (1) $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ を求めよ.

ただし，$D=\left\{(x,y)\mid x,y\in R,\ 0\leqq x^2+y^2<\infty\right\}$ とする.

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ となることを示せ.

(神戸大 2018)　　(m20183809)

0.1158 xy 平面の第 1 象限（$x\geq 0$ かつ $y\geq 0$ を満たす領域）において，2 本の曲線 $xy=1,\ xy=9$ と 2 本の直線 $y=x,\ y=4x$ で囲まれた領域を R とする．以下の各問に答えよ.

(1) R の概形を書け.

(2) 変数変換 $x=\dfrac{u}{v},\ y=uv$ により R と 1 対 1 に対応する uv 平面の第 1 象限（$u\geq 0$ かつ $v\geq 0$ を満たす領域）に含まれる領域 S を求め，S の概形を書け.

(3) (2) の変数変換を用いて，次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_R\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{xy}\right)dxdy$$

(神戸大 2019)　　(m20193804)

0.1159 S を 2×2 実対称行列とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 行列 S が正定値（すべての固有値が正）のとき，S の $(1,1)$ 成分，$(2,2)$ 成分は 0 でないことを示せ.

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty \exp(-x_1^2-x_2^2)\,dx_1\,dx_2$ を極座標に変換することにより求めよ.

(3) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}x^TSx\right)dx_2$ を x_1 の関数として求めよ．ただし，$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ であり，S は正定値とする.

(神戸大 2021)　　(m20213803)

0.1160 xy 平面上の閉領域 D を

$$D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\right\}$$

と定め,

$$z = x^2 - y^2 \quad ((x, y) \in D)$$

で表される xyz 空間内の曲面を S とする．以下の各問いに答えよ．

(1) S と D で挟まれた部分の体積

$$V = \int_D |x^2 - y^2| dxdy$$

を求めよ．

(2) S の曲面積を求めよ．

(神戸大 2021) (m20213806)

0.1161 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x + y \leq 1\ .\ 1 \leq 3x - 2y \leq 2\}$ とする．次の各問いに答えよ．

(1) 領域 D の概形を図示せよ．

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x + y) \{\log(3x - 2y)\}^2\, dx\, dy$ の値を求めよ．

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{13x - 7y}}\, dx\, dy$ の値を求めよ．

(神戸大 2022) (m20223804)

0.1162 n を正整数とする．積分

$$\iint_A (x + y)^2 (x - y)^n dxdy\ , \qquad A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -\frac{1}{2} \leq y \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}$$

を求めよ．

(神戸大 2022) (m20223808)

0.1163 (1) $D = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 2,\ \ y \geq x,\ \ y \geq 0\right\}$ とする．積分 $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2} dxdy$ を求めよ．

(2) $D = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, xy \geq 0\right\}$ とする．積分 $\displaystyle\iint_D e^{-x^2 - y^2} \cos(ax^2 + ay^2) dxdy$ を求めよ．ただし，a は実数である．

(3) D は $\boldsymbol{R}^2$ 内の有界閉領域で直線 $y = x$ について線対称であるとする．積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^2 - y^2}{1 + x^4 + y^4} dxdy$ を求めよ．

(神戸大 2023) (m20233804)

0.1164 $I = \displaystyle\int_0^{\log 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$ を求めよ．

(鳥取大 1997) (m19973903)

0.1165 次の積分を計算せよ．ただし，a は定数で，$a > 0$ である．

$$\iint_D x^2 y\ dxdy \qquad D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

(鳥取大 1997) (m19973906)

0.1166 次の不定積分を計算せよ.（積分定数は省略してよい）

(1) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x(x^2-1)}dx$　　　　(2) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx$

なお，必要であれば，公式 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$ $(a \neq 0)$ を用いてもよい．

(鳥取大 2000)　　(m20003901)

0.1167 次の重積分 I の値を求めよ．

$$I = \iint_K y\, dxdy\ , \quad K : 0 \leq y - x \leq 1,\ 0 \leq x + y \leq 1$$

(鳥取大 2000)　　(m20003905)

0.1168 次の各積分を求めよ．ただし $a > 0$ とする．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^a}$　　　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

(鳥取大 2001)　　(m20013901)

0.1169 自然数 n に対し，$P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ とおく．このとき次の各問いに答えよ．

(1) $P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x)$ を求めよ．

(2) 自然数 n を固定する．各 $j = 0, 1, ..., n-1$ に対し，多項式 $\dfrac{d^j}{dx^j}(x^2-1)^n$ は x^2-1 で割り切れることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) 次の関係式が成り立つことを示せ．

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1} & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

ただし必要ならば $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\ dt = \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}$

を用いてよい．

(鳥取大 2001)　　(m20013902)

0.1170 次の積分を求めよ．ただし $a > 0$ とする．$\displaystyle\int_{x^2+y^2 \leqq 2ax} (x^2+y^2)^2\ dxdy$

(鳥取大 2001)　　(m20013905)

0.1171 次の積分を計算しなさい．

(1) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx$　　ただし，L は正で，n, m は正の整数をとるものとする．

(2) $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-ax+b}dx$　　ただし，a は正とする．

（鳥取大 2004）　　(m20043902)

0.1172 $x=0$, $y=0$, $2x+y=2$ の 3 つの直線に囲まれた領域で次の積分を計算しなさい．

$$\iint \left(x^2 - xy\right) dxdy$$

(鳥取大 2004)　　(m20043903)

0.1173 次の計算をせよ．

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

(鳥取大 2005)　　(m20053902)

0.1174 次の計算をせよ.

$$\iint_D (1-x^2-y^2)dxdy \quad \big(ただし\ D=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\le 1\}\big)$$

(鳥取大 2005) (m20053903)

0.1175 負でない整数 n に対し, $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^n x dx$ とおくとき, 以下の問に答えよ.

(1) I_0 および I_1 を求めよ.

(2) $n\ge 2$ に対し, $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ が成り立つことを示せ.

(3) I_n を求めよ.

(鳥取大 2005) (m20053906)

0.1176 次の積分を計算せよ.

(1) $I_1=\displaystyle\int \frac{1}{a^2x^2-b^2}dx\,,\ a>0\,,\ b>0$ (2) $I_2=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx\,,\ a>0$

(鳥取大 2006) (m20063903)

0.1177 $I_n=\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx\ \ (a>0)$ とおくとき, 以下の問に答えよ.

(1) I_1 を求めよ.

(2) $n\ge 2$ に対し, $I_n=\dfrac{1}{2(n-1)a^2}\left\{\dfrac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}\right\}$ が成り立つことを示せ.
（ヒント：I_{n-1} を部分積分すれば, I_n との関係が求まる.）

(3) 上の結果を用いて, I_3 を求めよ.

(鳥取大 2006) (m20063904)

0.1178 次の定積分の値を求めよ. (注 ： 対数の底は e（自然対数）とする.)

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x dx$

(鳥取大 2007) (m20073904)

0.1179 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1 \quad (a,b>0)\right\}$ のとき, 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2dxdy$ の値を求めよ.

(鳥取大 2007) (m20073906)

0.1180 次の平面領域 D における二重積分 $\displaystyle\int_D y^2dxdy$ を計算せよ.

(1) $D\ :\ x>0,\ y>0,\ \dfrac{1}{2}x+y<1\ .$ (2) $D\ :\ x>0,\ y>0,\ x^2+y^2<1\ .$

(鳥取大 2008) (m20083904)

0.1181 2 次式 $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ を考える. 任意の $a_2,\ a_1,\ a_0$ に対し, 以下の式が成立するように実数 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ の値を定めよ.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=f(\alpha)+f(\beta)$$

(鳥取大 2009) (m20093910)

0.1182 次の各積分を求めよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \tan x\,dx$

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_{|x|\leq y\leq 1} \sqrt{y^2-x^2}\,dxdy$

(鳥取大 2009) (m20093913)

0.1183 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \log x\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{4x+2}{x^2-4x+7}\,dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x}}$

(鳥取大 2010) (m20103904)

0.1184 関数 $\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx$ は広義積分を用いて定義された実変数 s の関数である。これについて, 以下の問に答えよ.

(1) $\Gamma(1)$ を求めよ.

(2) $\Gamma(s)$ に対して, x について部分積分をすることによって, 任意の $s>1$ に対して $\Gamma(s)=(s-1)\Gamma(s-1)$ となることを示せ.

(鳥取大 2010) (m20103906)

0.1185 次の不定積分を求めよ. ただし, log は自然対数である.

(1) $\displaystyle\int x\,\log x\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^3}\,dx$

(鳥取大 2011) (m20113903)

0.1186 不定積分 $\displaystyle\int e^x \sin x dx$ を求めよ.

(鳥取大 2011) (m20113906)

0.1187 (1) n を正の整数とする. このとき,

$$\sin^{2n+1} x \leqq \sin^{2n} x \leqq \sin^{2n-1} x \quad (0 \leqq x \leqq \pi/2)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $\sin^0 x=1$ $(0\leqq x\leqq\pi/2)$ と定め, $n=0,1,2,\cdots$ に対して $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx$ とおく. このとき, $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ $(n\geqq 2)$ が成り立つことを示せ.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\right)^2$ を求めよ.

(岡山大 2003) (m20034001)

0.1188 (1) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\tan^{-1}x}{x^2}dx$ を求めよ.

(2) 2 つの関数 $\dfrac{\tan^{-1}x}{x}$ と $\dfrac{\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x}{x}$ は各々区間 $[1,\infty)$ で広義積分可能かどうかを答えよ.

(岡山大 2005) (m20054002)

0.1189 $n=1,2$ に対して, 極座標で与えられた曲線 $C_n: r^n=\cos n\theta$ を考える。次の問に答えよ。

(1) 曲線 C_1 を xy 平面に描き, x 軸のまわりに回転してできる図形の表面積を求めよ.

(2) 曲線 $C_2 (0\leq\theta\leq\pi/4)$ の長さ l は, $l=\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ で与えられることを示せ.

(岡山大 2006) (m20064002)

0.1190 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続な増加関数であるとき，区間 $(a,b]$ 上の関数 $F(x)$ を $F(x)=\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ 　で定義する．このとき次の各問いに答えよ．

(1) $F(x)$ の x による微分 $F'(x)$ を $f(x)$ と $F(x)$ を使って表せ．

(2) 区間 $(a,b]$ において $f(x)-F(x)\geqq 0$ であることを示せ．

(3) 区間 $(a,b]$ において $F(x)$ は増加関数となることを示せ．

(4) 区間 $(0,\infty)$ で定義される関数 $F(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ は増加関数であることを示せ．

(岡山大 2007) (m20074002)

0.1191 (1) $\displaystyle\int\frac{dy}{y\sqrt{1-y^2}}$ を計算せよ．

(2) $p\dfrac{dp}{dy}=y-2y^3$ $(0\leqq y<1)$, $p(0)=0$ の解 $p\in C^1(\,[0,1)\,)$ をすべて求めよ．

(3) (1) と (2) を利用して $\begin{cases} y''-y+2y^3=0,\ 0\leqq y<1,\ x\in\boldsymbol{R}, \\ \displaystyle\lim_{x\to 0}y(x)=1, \end{cases}$ の解を求めよ．

(岡山大 2007) (m20074003)

0.1192 (1) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{x}{x^2+1}+\int\frac{2x^2}{(x^2+1)^2}dx$ が成り立つ理由を説明せよ．

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx=\frac{1}{2}\left\{\frac{x}{x^2+1}+\int\frac{1}{x^2+1}dx\right\}$ を示し，$\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$ を求めよ．

(岡山大 2008) (m20084002)

0.1193 数直線 $(-\infty,\infty)$ 上の関数 $F(x)$ と $f(x)$ を

$$F(x)=x^2\log(1+x^2)\ ,\quad f(x)=F'(x)$$

によって定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $g(x)=\displaystyle\int_0^x(tf'(t)-f(t))\,dt$ を求めよ．

(2) $f'(x)>\dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{2F(x)}{x^2}>0\quad(x\neq 0)$ が成り立つことを示せ．

(3) $g(x)$ は下に凸な関数であることを示せ．

(岡山大 2009) (m20094001)

0.1194 区間 $[0,\infty)$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対する広義積分

$$\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx=\lim_{M\to\infty}\int_0^M f(x)e^{-sx}dx\quad(s>0)$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して，

$$\int_0^\infty x^ne^{-sx}dx=\frac{n}{s}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-sx}dx$$

が成り立つことを示せ．

(2) 非負の整数 n に対して，$\displaystyle\int_0^\infty x^ne^{-sx}dx$ の値を求めよ．

(3) $s>1$ のとき，

$$\int_0^\infty\sum_{n=0}^\infty\frac{(-x)^n}{n!}e^{-sx}dx=\sum_{n=0}^\infty\int_0^\infty\frac{(-x)^n}{n!}e^{-sx}dx$$

が成り立つことを示せ．

(岡山大 2009)　　(m20094002)

0.1195 (1) n を整数とするとき, $\dfrac{x}{(1+x^2)^n}$ の原始関数を求めよ.

(2) n が 2 以上の整数のとき, 次の不等式を示せ.

$$\frac{1}{2(n-1)}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) \leqq \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx \leqq \frac{\pi}{4}$$

(岡山大 2010)　　(m20104002)

0.1196 (1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^x}\,dx$ を求めよ.

(2) 自然数 n に対して，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x}\,dx$ を求めよ.

(3) $x \geqq 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ が有界ならば，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(x)}{e^x}\,dx$ は収束することを証明せよ.

(岡山大 2011)　　(m20114002)

0.1197 関数 $f(x)$, $f_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ を，閉区間 $[a,b]$ 上で微分可能であり，それらの導関数は $[a,b]$ 上で連続とし,

(i) すべての n について　$f_n(a) = f(a)$,

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n'(x) - f'(x)|\,dx = 0$,

を満たすものとする．このとき次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ を $f(a)$ と $f'(x)$ を使って表せ.

(2) $f_n(x)$ は $f(x)$ に各点収束することを示せ.

(3) $f_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束することを示せ.

(岡山大 2012)　　(m20124001)

0.1198 $|x| \neq 1$ なる実数 x に対して

$$f(x) = \int_0^\pi \log(1 - 2x\cos t + x^2)dt$$

で関数 $f(x)$ を定義する．次の各問いに答えよ.

(1) $f(x) = f(-x)$ を示せ.

(2) $f(x) + f(-x) = f(x^2)$ を示せ.

(3) $x \neq 0$ のとき，$f(x) = 2\pi\log|x| + f(\frac{1}{x})$ を示せ.

(4) $|x| < 1$ のとき，$f(x)$ を求めよ.

(5) $|x| > 1$ のとき，$f(x)$ を求めよ.

(岡山大 2012)　　(m20124002)

0.1199 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^x \frac{t+1}{t^2+1}dt$$

により定める．以下の問いに答えよ.

(1) $f(1)$ の値を求めよ.

(2) 導関数 $f'(x)$ の $x = 0$ におけるテイラー展開を求め，その収束半径を答えよ.

(3) 正の整数 n に対して，n 階微分係数 $f^{(n)}(0)$ を求めよ．

(岡山大 2013)　　(m20134002)

0.1200 (1) 整式 $x^4(1-x)^4$ を整式 $1+x^2$ で割った商と余りを求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}$ を求めよ．

(3) 不等式 $\pi < \dfrac{22}{7}$ を示せ．

(4) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$x(1-x) \leqq \dfrac{1}{4}$ が成り立つことを用いて，不等式 $\pi > \dfrac{22}{7} \cdot \dfrac{1024}{1025}$ を示せ．

(岡山大 2014)　　(m20144002)

0.1201 開区間 $(-1, 1)$ 上で定義されたなめらかな関数 $f(x)$ を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = f(0) + f'(0)x + \displaystyle\int_0^x (x-t)f''(t)dt$ を示せ．

(2) $f(x) = (1+x)^{1/3}$ のとき，

$$\left|\int_0^x (x-t)f''(t)dt\right| \leqq \frac{x^2}{9} \qquad (x \geqq 0)$$

が成り立つことを示せ．

(3) $7^3 = 343$ に注意して，$(345)^{1/3}$ の値を小数第 3 位まで求めよ．

(岡山大 2015)　　(m20154001)

0.1202 関数 $f_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ を

$$f_n(x) = c_n \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^n$$

で定める．ただし，c_n は正の定数で

$$\int_0^\pi f_n(x)dx = 1$$

となるように選ぶ．以下の問いに答えよ．

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_0^\pi \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^n \sin x dx$$

を求めよ．

(2) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $c_n < \dfrac{n+1}{2}$ が成り立つことを示せ．

(3) $0 < x \leqq \pi$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．

(岡山大 2016)　　(m20164001)

0.1203 関数 $f(x)$ を　$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$　で定める．以下の問いに答えよ．

(1) e^x のマクローリン展開を書け．

(2) a_k $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ を　$f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$　により定める．a_k $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ の値を求めよ．

(3) $f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ で表す．$f^{(99)}(0)$ を求めよ．

(4) 広義積分　$\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(x)dx$　が収束するか発散するかを判定せよ．

(岡山大 2016)　　(m20164002)

0.1204 (1) 自然数 n に対して，$f_n(x) = nxe^{-nx^2} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ とするとき，関数列 $\{f_n(x)\}$ はある連続関数に収束することを示せ．また，

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \quad \text{および} \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$$

の値を求めよ．

(2) $\lambda > 0$ とする．自然数 n に対して，$g_n(x) = n^\lambda xe^{-nx^2} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ とするとき，関数列 $\{g_n(x)\}$ はある連続関数に収束することを示せ．また，

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)dx$$

が成り立つための λ の条件を求めよ．

(岡山大 2017) (m20174002)

0.1205 (1) 次の積分を計算せよ．ただし，n, m は自然数である．

$$\int_{-1}^1 x\sin n\pi x dx \qquad \int_{-1}^1 \sin n\pi x \sin m\pi x dx$$

(2) 次の等式を示せ．

$$\int_{-1}^1 \left\{x - \sum_{k=1}^n \frac{2(-1)^{k-1}}{k\pi}\sin k\pi x\right\}^2 dx = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

(広島大 2001) (m20014102)

0.1206 $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}(x > 0)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $F(x)$ は $x > 0$ において強い意味での単調増加関数であることを示せ．

(2) $F(xy) = F(x) + F(y)$, $F(x/y) = F(x) - F(y)$ を示せ．

(3) $F(x^n) = nF(x)$（n : 有理数）を示せ．

(広島大 2001) (m20014103)

0.1207 次の積分をせよ． $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4}$

(広島大 2001) (m20014104)

0.1208 $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対し，$I_n = \displaystyle\int_0^\pi \cos^n x dx$ とおく．次に答えよ．

(1) I_2, I_3 を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ に対し，$I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ を示せ．

(3) $n \geqq 4$ に対し，I_n を求めよ．

(広島大 2003) (m20034103)

0.1209 (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \leqq 1 + \int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt$ を示せ．

(2) 正の実数 x に対し，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right)$ が収束することを示せ．

(3) 正の実数 x に対し $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right)$ とおく．r を正の整数とするとき

$f(r) = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{r-1} + \dfrac{1}{r}$ を示せ．

(広島大 2003) (m20034105)

0.1210 次の定積分を導け（計算せよ）．ただし，$a>0$ とする．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

ヒント ： $\displaystyle\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx\right)^2=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2}dy$ であるから，
x,y の 2 重積分を求めればよい．

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-ax^2}dx$

(広島大 2003)　　(m20034106)

0.1211 次の問に答えよ. ただし, 被積分関数が連続になる範囲のみを考えればよい.

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$（$C$ は積分定数）を示せ.

(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+1}=\tan^{-1}x+C$（$C$ は積分定数）を示せ.
ただし, $y=\tan^{-1}x$ $\left(|y|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ は $x=\tan y$ の逆関数を表す.

(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-\alpha)^2}$ を求めよ.

(4) $\alpha<\beta$ のとき $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ を求めよ.

(5) $a>0$, $D=b^2-4ac<0$ のとき $\displaystyle\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ を求めよ.

(広島大 2005)　　(m20054101)

0.1212 $n=0,1,2,\cdots$ とし, 積分 $\displaystyle I_n(t)=\int_0^t e^{-x}(1+x)^n dx$ を考える. 次の問に答えよ.

(1) すべての n に対して, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)^n}{e^x}=0$ を示せ.

(2) すべての n に対して, 極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}I_n(t)$ が存在することを示せ.

(3) $a_n=\displaystyle\lim_{t\to\infty}I_n(t)$ とおく. $n\geqq 1$ のとき, $a_n-na_{n-1}=1$ が成り立つことを示せ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n!}$ を求めよ.

(広島大 2005)　　(m20054102)

0.1213 次の積分を以下の手順に従って求めよ.

$$\int_0^1\frac{x^\alpha-1}{\ln x}dx$$

ここで $\alpha>-1$ は定数，ln は自然対数である.

(1) 求める積分を $I(\alpha)$ とおき,

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}$$

を求めよ.

(2) 上の答えを利用して $I(\alpha)$ を求めよ.

(広島大 2005)　　(m20054109)

0.1214 a,b は実定数で $a\neq 0$ とするとき，次の問いに答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx$,　$\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx$ を求めよ.

(2) 1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+ay=\cos bx \qquad (*)$$

の一般解を求めよ．

(3) 初期値 $y(0)$ がどのような値であっても，$x\to\infty$ のとき微分方程式 $(*)$ の解 $y(x)$ が収束するための必要十分条件を a と b を用いて表せ．

(広島大 2006)　　(m20064105)

0.1215 次の定積分を計算せよ． $\displaystyle\int_0^\infty \cos(ax)e^{-x}dx$ (ただし，a は正定数)

(広島大 2006)　　(m20064107)

0.1216 (1) 実数 t に対して，　$t=\tan\theta$ かつ $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

を満たす θ として，関数 $\theta=\arctan t$ を定める．このとき，$\dfrac{d}{dt}(\arctan t)$ を求めよ．

(2) 不定積分　$\displaystyle\int\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n dx$　を $x=\sinh t$ と変数変換することにより求めよ．

ただし，n は 2 以上の自然数とし，$\sinh t$ は　$\sinh t=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$　とする．

(3) α と R を実数とし，$R\geqq 1$ と仮定する．　領域 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leqq x^2+y^2\leqq R^2\}$ における重積分　$\displaystyle\iint_D x^2(x^2+y^2)^\alpha dxdy$　の値を求めよ．

(広島大 2008)　　(m20084101)

0.1217 (1) 曲線 $y=\cosh x$ $(0\leqq x\leqq \log 3)$ の長さを求めよ．ただし，$\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ である．

(2) $\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq 1\}$ のとき，$\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$ を求めよ．

(広島大 2009)　　(m20094101)

0.1218 $f(x,y)=(x-1)(y+1)$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) グラフ $z=f(x,y)$ の $(x,y)=(0,1)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた接平面，yz 平面，zx 平面，xy 平面の 4 つの平面によって囲まれる四面体の体積を求めよ．

(3) (2) の四面体の 4 つの面のうち xy 平面上にある面を Ω とする．
このとき，$\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)dxdy$　を求めよ．

(広島大 2009)　　(m20094105)

0.1219 (1) 関数 e^x , $\sin x$, $\log(1+x)$ をそれぞれ $x=0$ のまわりでテイラー展開せよ．

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$ を求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)=x^3-3xy+y^3$ の極値を求めよ．

(広島大 2010)　　(m20104101)

0.1220 (1) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを示せ．

(3) 積分 $I(c)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2cx\,dx$ について，$\dfrac{dI(c)}{dc}$ を c, $I(c)$ を用いて表せ．

(4) 積分 $I(c)$ を求めよ.

(広島大 2010)　　(m20104102)

0.1221 定積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x-y}\,dxdy$ を求めよ.

(広島大 2011)　　(m20114103)

0.1222 以下の問いに答えよ.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{e} \frac{1}{r\sqrt{\log r}}\,dr$ の値を求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{r(\log r)^2}\,dr$ の値を求めよ.

(広島大 2012)　　(m20124105)

0.1223 以下の問いに答えよ.

(1) 次の広義重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\,dxdy$$

ただし，積分領域 D を次で定める.

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 > e^2\}$$

(2) 関数

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)\left\{\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^{1/2} + \left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\right\}}$$

についての広義重積分 $\displaystyle\iint_E f(x,y)dxdy$ が収束することを示せ．ただし．積分領域 E を次で定める.

$$E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 > 1\}$$

(広島大 2012)　　(m20124106)

0.1224 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{ax+b}\,dx$　　（a, b はいずれも 0 でない定数）

(2) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(広島大 2012)　　(m20124110)

0.1225 $\vec{F} = \begin{pmatrix} a_1 & b_3 & b_2 \\ b_3 & a_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$ とするとき，以下の経路に沿って

$\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(X,Y,Z)} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ を求めよ.　　$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, X, Y, Z$ はすべて実定数とする.

(1) $(0,0,0) \to (X,0,0) \to (X,Y,0) \to (X,Y,Z)$.

(2) $(0,0,0)$ と (X,Y,Z) を直線上で結ぶ線分 .

(広島大 2013)　　(m20134104)

0.1226 以下の各命題について，正しければ証明し，正しくなければ反例を用いてそのことを説明せよ.

(1) 区間 $(0,\infty)$ 上で微分可能な関数 $f(x)$ が $x=a$ で最大値を取るならば，$f'(a)=0$ を満たす.

(2) 区間 $[0,\infty)$ 上で微分可能な関数 $f(x)$ が $x=a$ で最大値を取るならば，$f'(a)=0$ を満たす.

(3) 区間 $I=[0,1]$ 上の非負値連続関数 $f(x)$ が $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=0$ を満たすならば，任意の $x\in I$ に対し $f(x)=0$ となる.

(4) 区間 $I=[0,1]$ 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ と I 上の関数 $f(x)$ に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ が任意の $x\in I$ で成り立つとする．このとき，$f(x)$ も I 上の連続関数である.

(5) $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

は，原点 $(0,0)$ において連続である.

(広島大 2013)　　(m20134106)

0.1227 以下の問いに答えよ.

(1) e^x の $x=0$ のまわりでのテイラー展開

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

の係数 a_n $(n=0,1,2,\cdots)$ を書け，（答だけでよい）

(2) k を自然数とするとき，$\displaystyle\lim_{t\to+0} t(\log t)^k=0$ であることを示せ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$ の値を求めよ.

(4) 自然数 k に対して，広義積分 $I_k=\displaystyle\int_0^1 (\log x)^k\,dx$ の値を求めよ.

(広島大 2013)　　(m20134110)

0.1228 次の積分 I_n について以下の問いに答えよ.

$$I_n=\int_0^{\infty} e^{-x}x^n dx \quad (n \text{ は零または正の整数})$$

(1) I_0 を求めよ.

(2) I_n と I_{n+1} の間に成り立つ漸化式を求めよ.

(3) 漸化式を利用することにより I_n を求めよ.

(広島大 2014)　　(m20144103)

0.1229 関数 $f(x)=x^2(x-1)(4-x)$ を考える．定積分

$$I=\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

に関して，以下の問いに答えよ.

(1) $t=\sqrt{\dfrac{x-1}{4-x}}$ とするとき，x を t の関数として表し，$\dfrac{dx}{dt}$ を計算せよ.

(2) 定積分 I において，積分変数を x から t に変換せよ.

(3) 定積分 I の値を求めよ.

(広島大 2014)　　(m20144106)

0.1230 実数 ℓ に対して $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ を次で定める．

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^\ell}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

以下の問いに答えよ．

(1) f が原点 $(0,0)$ において連続であるための ℓ の条件を求めよ．

(2) f が原点 $(0,0)$ で x について偏微分可能であるための ℓ の条件を求めよ．

(3) $\ell=1$ のとき，極限

$$J=\lim_{R\to\infty}\iint_{x^2+y^2\leq R^2} f(x,y)dxdy$$

を考える．変数変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ により，J は

$$J=\lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R\frac{\sin\left(r^4\varphi(\theta)\right)}{r}dr\right)d\theta$$

となることを示せ．ここで，$\varphi(\theta)=\cos^4\theta+\sin^4\theta$ である．

(4) $\ell=1$ のとき (3) の極限 J が存在することを示し，その値を求めよ．
その際，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx$ は収束し，その値が $\dfrac{\pi}{2}$ であることを用いても良い．

(広島大 2014)　　(m20144110)

0.1231 (1) 広義積分 $I=\displaystyle\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}$ の値を求めよ．

(2) $J=\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x^2)}{x}$ とおく．J を求めよ．

(3) 定数 $C>0$ と $R>0$ が存在して $x\geq R$ ならば $\log(1+x^2)<C\sqrt{x}$ となることを示せ．

(4) 広義積分 $K=\displaystyle\int_0^\infty\frac{\log(1+x^2)}{x^2}dx$ の値を求めよ．

(広島大 2015)　　(m20154102)

0.1232 (1) 2 以上の自然数 n に対して，

$$\int\cos^n\frac{x}{3}dx=\frac{3}{n}\cos^{n-1}\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}\frac{x}{3}dx$$

が成り立つことを示せ．

(2) $f(\theta)=\cos^3\dfrac{\theta}{3}$ とし，xy平面上の曲線

$$C\ :\ \begin{cases}x=f(\theta)\cos\theta\\ y=f(\theta)\sin\theta\end{cases}\qquad(0\leq\theta\leq2\pi)$$

を考える．次の (i)，(ii)，(iii) に答えよ．

(i) C の概形を図示せよ（x 軸，y 軸との交点の座標も記すこと）．

(ii) C の長さを求めよ．

(iii) C で囲まれた部分の面積を求めよ．

(広島大 2016)　　(m20164102)

0.1233 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$ について，$t = \tan\dfrac{x}{2}$ と置換することによって計算せよ．

(広島大 2016)　　(m20164110)

0.1234 実数 x に対し，

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

と定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = \tanh x$ のグラフを描け．増減表を書き，変曲点があればすべて求めること．

(2) $|f(x)| \leq \dfrac{4}{5}$ を満たす x からなる区間を求めよ．

(3) $f''(x) + 2f(x)\Big(1 - f(x)^2\Big) = 0$ が成り立つことを示せ．

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)^2 dx$ を求めよ．

(広島大 2017)　　(m20174102)

0.1235 積分 $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ を考える．重積分 I^2 を，二次元極座標を用いて計算することにより，I を求めよ．

(広島大 2018)　　(m20184107)

0.1236 s を正の実数とするとき，ガンマ関数 $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$ について，$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ を示せ．

(広島大 2018)　　(m20184108)

0.1237 a を正の実数とする．以下の問いに答えよ．ただし，任意の正整数 k に対し，

$$\lim_{t\to\infty} t^k e^{-t} = 0$$

が成立することは証明なしに用いてもよい．

(1) 任意の非負整数 n に対し，ある正の実数 C が存在して，$x \geqq 1$ において

$$x^n e^{-ax^2} \leqq Cx^{-2}$$

が成立することを示せ．さらに，任意の非負整数 n に対し，広義積分

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx$$

が収束することを示せ．

(2) 非負整数 n に対し，

$$I_n(a) = \int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx$$

とおく．$I_1(a)$ および $I_3(a)$ を a を用いて表せ．

(3) $I_n(a)$ を (2) で定めた値とする．非負整数 m に対し，$I_{2m+1}(a)$ を a と m を用いて表せ．

(4) $I_n(a)$ を (2) で定めた値とする．$I_4(a)$ を a を用いて表せ．ただし，

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

であることは証明なしに用いてもよい．

(広島大 2021)　　(m20214103)

0.1238 次の積分を計算せよ.

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \, \cos nx \, dx \qquad \text{ただし，} m, n \text{ は整数とする．}$$

(広島大 2021) (m20214108)

0.1239 $D = \{(x, y) \mid 1 \leqq\ x^2 + y^2 \leqq\ 4,\ y \geqq\ x,\ y \geqq\ -x\}$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) xy 座標平面上に D を図示せよ．

(2) 極座標変換により，D は D' にうつされる．D' を極座標を用いて表せ．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2 y \, dxdy$ の値を求めよ．

(広島市立大 2001) (m20014203)

0.1240 xy 平面上の領域 $D = \{(x, y) \mid x \geqq\ 0, y \geqq\ 0, x^2 + y^2 \leqq\ 1\}$ に対し，重積分

$\displaystyle\iint_D (x + y) dxdy$ の値を求めよ．

(広島市立大 2002) (m20024204)

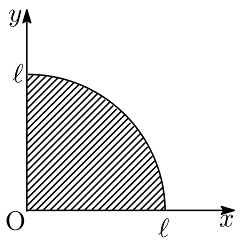
0.1241 (1) 次の定積分が収束するかどうかを判定し, 収束する場合はその値を求めよ.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \qquad \text{（ } \alpha \text{は正の定数とする）}$$

(2) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\,,\ x + y \geq 2\}$ とするとき, 重積分 $\displaystyle\iint_D x dxdy$ の値を求めよ.

(広島市立大 2005) (m20054201)

0.1242 下図のように，半径 ℓ の円の 1/4 である扇形の一様な板片を，円の中心であった部分が原点と重なり，直線部分が x 軸と y 軸に重なるように置いてある．このとき，この板片の重心の位置座標（x 座標と y 座標の値）を求めよ．



(広島市立大 2006) (m20064203)

0.1243 $I_n(x)$ が次の式で定義されるとき，以下の問いに答えよ．ただし，n は 0 以上の整数とする．

$$I_n(x) = \int_0^x \sin^n t \, dt$$

(1) $I_0(x),\ I_1(x),\ I_2(x),\ I_3(x)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 等式 $\sin^n t = \sin^{n-1} t \cdot \sin t$ を用いて，n が 2 以上のとき，$I_n(x)$ の漸化式を求めよ．

(広島市立大 2007) (m20074202)

0.1244 2 重積分 . $S = \displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy\,, \quad D = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$ を求めることによって，

$I = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ を求めたい．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $S = I^2$ を示せ．

(2) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と変数変換して S を求めよ．また，I を求めよ．

(広島市立大 2008)　　(m20084201)

0.1245　2 次以下の実数係数多項式全体からなる線形空間 V において,

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad (f, g \in V)$$

により内積を定義する．ことのき，グラム_シュミットの直交化により，V の基底 $\{1, x, x^2\}$ から正規直交基底を求めよ.

(広島市立大 2008)　　(m20084204)

0.1246　累次積分 $I = \displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_x^1 e^{y^2} dy \right\} dx$ に関して以下の問いに答えよ

(1)　積分領域を図示せよ.

(2)　積分順序の変更を行う．　$I = \displaystyle\int_a^b \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} e^{y^2} dx \right\} dy$ と書き換えたとき，a, b, $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ を求めよ.

(3)　I を計算せよ.

(広島市立大 2009)　　(m20094202)

0.1247　$\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-x} |\sin x| \, dx$ を求めよ.

(広島市立大 2010)　　(m20104202)

0.1248　変数変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を用いて, 2 重積分

$$S = \iint_D e^{x^2+y^2} \, dxdy \ , \quad D = \left\{ (x, y) \,|\, 1 \leqq \ x^2 + y^2 \leqq \ 4 \right\}$$

の値を求めよ.

(広島市立大 2010)　　(m20104203)

0.1249　3 次元ユークリッド空間の三つの点 $O(0,0,0)$, $A(3,0,0)$, $B(3,0,4)$ について以下の問に答えよ.

(1)　点 $(x, y, 0)$ で xy 平面に垂直に交わる直線を l とする．　ただし，$x^2 + y^2 \leq 9$ である．　線分 OB を z 軸に関して 360 度回転させたときに線分 OB が描く曲面と直線 l の交点を (x, y, z) と表す．このとき，z を x, y の関数で表せ.

(2)　問 (1) で求めた関数を $f(x, y)$ とおく．　三角形 OAB を z 軸に関して 360 度回転させたときに三角形 OAB が描く立体の体積 V は,

$$V = \iint_D f(x, y) dxdy$$

と書くことができる．ただし，$D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 9\}$ である．この 2 重積分を計算することにより，V の値を求めよ.

(広島市立大 2011)　　(m20114203)

0.1250　無限積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$,　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{1+x^2} \, dx$ の収束発散を調べ，収束する場合はその値を求めよ.

(広島市立大 2012)　　(m20124201)

0.1251　2 変数関数 $f(x, y) = \sin(x + 2y)$ について，以下の問いに答えよ.

(1)　f の勾配ベクトル $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} \right)$ を求めよ.

また，勾配ベクトルの具体的な値を $(0, 0)$, $(0, \pi/4)$, $(0, \pi/2)$ において求めよ.

(2) 座標平面上の 4 点 $(0,0)$, $(0,\pi/2)$, $(\pi,0)$, $(\pi,-\pi/2)$ を頂点とする平行四辺形が定める領域を D とする（図 1）. 2 重積分 $\displaystyle\iint_D |f(x,y)|\,dxdy$ の値を求めよ.

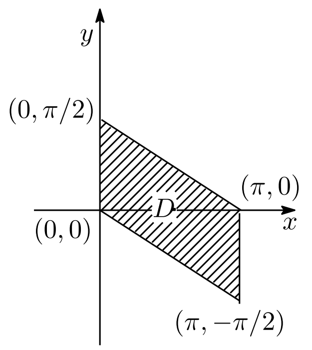


図 1

(広島市立大 2012) (m20124204)

0.1252 $D=\left\{(x,y)\in R^2\,\middle|\,x^2+y^2\leq 1\,,\ x\leq\sqrt{3}y\right\}$ とおく.
変数変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を用いて,

$$\iint_D xy^2dxdy$$

を求めよ.

(広島市立大 2013) (m20134202)

0.1253 (1) 不定積分 $\displaystyle\int x\log x\ dx$ を求めなさい.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos^3 x\,dx$ を求めなさい.

(山口大 2001) (m20014310)

0.1254 積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x}\sin x\,dx$ を求めなさい.

(山口大 2002) (m20024301)

0.1255 (1) 不定積分 $\displaystyle\int\tan x dx$ を求めなさい.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int x\cos ax dx$ を求めなさい.

(3) 不定積分 $\displaystyle\int dx/(x^2(1-x))$ を求めなさい.

(山口大 2003) (m20034306)

0.1256 定積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}x^2e^{-x}\,dx$ を計算しなさい.

（山口大 2004） (m20044303)

0.1257 次の等式を満たす $f(x)$ を求めよ.

$$f(x)=\sin x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\cos t\,dt$$

（山口大 2004） (m20044304)

0.1258 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int\sin^3 x\cos x dx$

(2) $\displaystyle\int x\cos ax dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$

(山口大 2005)　(m20054306)

0.1259 定積分

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}xdx \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

を求めなさい.

(山口大 2005)　(m20054309)

0.1260 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$ を求めなさい.

(山口大 2006)　(m20064306)

0.1261 (1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx$ （ n：整数）をそれぞれ求めなさい.

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx$ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx$ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx$ （n,m：正整数）をそれぞれ求めなさい.

(3) 周期 2π をもち，$f(x)=\begin{cases} -\pi/4 & (-\pi<x<0\text{ のとき}) \\ \pi/4 & (0<x<\pi\text{のとき}) \end{cases}$ で定義される関数をフーリエ級数に展開しなさい.

(山口大 2007)　(m20074301)

0.1262 (1) $\log(1+x)$ を x の無限級数に展開しなさい.

(2) $f(x)=x^{\log x}$ の導関数を求めなさい.

(3) 半径 a の円の面積を積分を使って求めなさい.

(4) $0\leq x\leq 1$ において $0\leq x^4\leq x^2$ であることを用い， $\displaystyle\frac{\pi}{4}<\int_0^1\frac{1}{1+x^4}dx<1$ を示しなさい.

(山口大 2008)　(m20084301)

0.1263 次の定積分の値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int_1^4\frac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt{x}}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

(山口大 2009)　(m20094305)

0.1264 次の定積分を計算しなさい．ただし，$0<a<\dfrac{\pi}{2}$ とする.

$$\int_0^a \tan x\,dx$$

(山口大 2009)　(m20094313)

0.1265 次の不定積分を求めなさい.　$\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+5x+6}$

(山口大 2015)　(m20154304)

0.1266 次の問に答えよ.

(1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とする．このとき，行列式 $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を r, θ で表せ．

(2) (1) で求めた J に対して，$I = \displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} f(r\cos\theta, r\sin\theta)Jdr$ であることを用いて，$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ のとき I の値を求めよ．

(徳島大 1999) (m19994402)

0.1267 $D = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2\ ,\ 1 \leq xy \leq 2x\}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) D を xy 平面に図示せよ．

(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_D ye^{xy}\,dxdy$ の値を求めよ．

(徳島大 2000) (m20004402)

0.1268 自然数 n に対し，$f_n(x) = nx^n - nx^{2n}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ とする．

(1) $f_n(x)$ の最大値を求めよ．　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\ dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ が成立することを示せ．

(徳島大 2001) (m20014401)

0.1269 (1) $f(x)$ は $0 \leqq x \leqq a$ において連続として

$$\iint_{D_a} f(x+y)dxdy = \int_0^a xf(x)dx,\quad D_a = \{(x,y);\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq a\}$$ を示せ．

(2) 次の積分を計算せよ．

$$\iint_{D_1} e^{-(x+y)^2}dxdy,\quad D_1 = \{(x,y);\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1\}$$

(徳島大 2001) (m20014402)

0.1270 $D = \{(x,y)\ :\ y \geqq\ x^2\ ,\ y \leqq\ x+2\}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) D を xy 平面に図示せよ．

(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ の値を求めよ．

(徳島大 2003) (m20034402)

0.1271 原点を中心とする半径 $a > 0$ の閉円板を $D(a) = \{(x,y) \in R^2\ ;\ x^2+y^2 \leqq\ a^2\}$ とする．

(1) 2 重積分 $I(a) = \displaystyle\iint_{D(a)} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^4}$ を求めよ．

(2) 平面の全体における広義積分 $I = \displaystyle\iint_{R^2} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^4}$ を求めよ．

(徳島大 2004) (m20044402)

0.1272 累次積分 $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 y^2e^{x^2}dx\right)dy$ について, 次の問に答えよ．

(1) 2 重積分を用いると $I = \displaystyle\iint_D y^2e^{x^2}dxdy$ と書ける. このときの積分領域 D を図示せよ．

(2) I を求めよ．

(徳島大 2005) (m20054403)

0.1273 平面上の図形 $D = \{(x,y)\ :\ -1 \leqq\ x \leqq\ 1,\ -2 \leqq\ y \leqq\ 2\}$，$S = \{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \leqq\ 4\}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\iint_D dxdy$ と $\displaystyle\iint_S dxdy$ を求めよ. (2) $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を求めよ. (3) $\displaystyle\iint_S xydxdy$ を求めよ.

(徳島大 2007) (m20074403)

0.1274 $D = \{(x,y) \ : \ y \geqq \ x, \ x \geqq \ 0, \ y \leqq \ 2\}$ に対して，二重積分 $I = \displaystyle\iint_D y^2 e^{-y^4}\, dxdy$ を考える.

(1) I を累次積分で表せ.

(2) (1) の累次積分の積分順序を変更せよ.

(3) I の値を求めよ.

(徳島大 2008) (m20084403)

0.1275 (1) $f(x,y) = x + y + \sin(x^2 + y^2)$ に対して偏導関数 $f_x(x,y), \ f_y(x,y)$ を求めよ.

(2) $a > 0$ に対して $D = \{(x,y) \ ; \ x^2 + y^2 \leq a^2\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D f_y(x,y)\, dxdy$ を求めよ.

(徳島大 2009) (m20094403)

0.1276 変数変換 $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ を利用して，$\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin\theta}\, d\theta$ を求めよ.

(徳島大 2010) (m20104403)

0.1277 $0 < a < 1, \ D_a = \left\{(x,y) \ ; \ a^2 \leqq \ x^2 + y^2 \leqq \dfrac{1}{a^2}\right\}$ とする.

(1) $x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta$ とする. 行列式 $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を $r, \ \theta$ で表せ.

(2) $I(a) = \displaystyle\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{a \to 0} I(a)$ を求めよ.

(徳島大 2010) (m20104404)

0.1278 $\alpha > 1$ とする．広義積分 $I_\alpha = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^\alpha}\, dx$ に対して，次の問いに答えよ.

(1) $x^{1-\alpha}\log x$ を微分せよ.

(2) $R > 1$ とする．$\displaystyle\int_1^{R} \frac{\log x}{x^\alpha}\, dx$ を求めよ.

(3) I_α を求めよ.

(徳島大 2011) (m20114402)

0.1279 $D = \{(x,y) ; 1 \leqq \ x + y \leqq \ 2, \ x \geqq \ 0, \ y \geqq \ 0\}$ とする． 二重積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}\, dxdy$ に対して，次の問いに答えよ.

(1) $u = x - y, \ v = x + y$ とおく．x, y を $u, \ v$ で表せ.

(2) 行列式 $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(3) (1) の変換で D に対応する uv 平面の集合を D' とする．D' を図示せよ.

(4) I を求めよ.

(徳島大 2011)　　(m20114403)

0.1280　広義積分 $I=\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$t=x+\sqrt{x^2+1}$ おいたとき，x を t で表せ．

(2)　(1) の変数変換により，I を t の積分に変換せよ．

(3)　I の値を求めよ．

(徳島大 2012)　　(m20124403)

0.1281　$a>0$ に対して，次の問いに答えよ．

(1)　$\displaystyle\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$ を求めよ．

(2)　$D=\left\{(x,y)\,;\,x^2+y^2\leqq\ a^2\,,\ x\geqq\ 0\,,\ y\geqq\ 0\right\}$ とするとき，$\displaystyle\iint_D\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy$ を求めよ．

(徳島大 2012)　　(m20124407)

0.1282　n は自然数とする．

(1)　$\sin(n+1)x-\sin(n-1)x=2\cos nx\sin x$ を示せ．

(2)　$I_n=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+1)x-\sin(n-1)x}{\sin x}dx$ を求めよ．

(3)　$J_n=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx$ を求めよ．

(徳島大 2013)　　(m20134403)

0.1283　$I=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{-\log x}}dx\ ,\quad J=\int_0^1\sqrt{-\log x}\ dx$ を考える．次の問いに答えよ．

(1)　$0<x<1$ において $\sqrt{-\log x}$ を微分せよ．

(2)　J を I で表せ．

(3)　$\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を利用して J を求めよ．

(徳島大 2014)　　(m20144402)

0.1284　$0<a<\dfrac{1}{2}$ とし，xy 平面上の領域を $D=\left\{(x,y)\,;\,y\leqq\ x\leqq\dfrac{1}{2},\ a\leqq\ y\leqq\dfrac{1}{2}\right\}$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　D を図示せよ．

(2)　$I_a=\displaystyle\iint_D\cos\left(\pi(x-a)^2\right)dxdy$ を求めよ．

(3)　(2) の I_a について，$\displaystyle\lim_{a\to\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-a\right)^{-2}I_a$ を求めよ．

(徳島大 2014)　　(m20144403)

0.1285　$D=\{(x,y)\ :\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0,\ x+y\geqq\ 1\}$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　$u=x+y,\ v=\dfrac{y}{x+y}$ とおく．x,y を u,v の式で表せ．また，行列式 $J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 v\sin(\pi v)dv$ を求めよ.

(3) $f(x,y) = \dfrac{y}{x+y}e^{-(x+y)}\sin\left(\dfrac{\pi y}{x+y}\right)$ に対して，$I = \displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ を求めよ．ここで，(1) の変換により $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dv\int_1^\infty f\big(x(u,v),\ y(u,v)\big)|J(u,v)|du$ となることを用いてよい.

(徳島大 2015)　　(m20154403)

0.1286 xy 平面上の領域を $D = \left\{(x,\ y)\ ;\ x^2+y^2 \leqq 2x,\ y \geqq \dfrac{x}{\sqrt{3}}\right\}$ とする.

(1) D の概形を図示せよ.

(2) 変数変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ (r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ により，D に対応する $r\theta$ 平面上の領域を E とする．E は，定数 $\alpha,\ \beta$ および関数 $f(\theta)$ を用いて $\{(r,\ \theta)\ ;\ \alpha \leqq \theta \leqq \beta,\ 0 \leqq r \leqq f(\theta)\}$ と表される．$\alpha,\ \beta,\ f(\theta)$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を求めよ.

(徳島大 2018)　　(m20184403)

0.1287 $x = x(t)$ が微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} + 3x = 0$ を満たす．$x(0) = 2$ であるとき，次の問いに答えよ.

(1) $x(t)$ を求めよ.

(2) $y = y(t)$ に関する微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} + y = 3x$ の一般解を求めよ.

(3) (2) の $y(t)$ に対して，$y(0) = y(1)$ が成り立つとする．このとき，$x(1) + \displaystyle\int_0^1 y(t)dt = x(0)$ となることを示せ.

(徳島大 2018)　　(m20184404)

0.1288 実数 x の関数 $\varphi(x)$ および $\varphi_N(x)$ を

$$\varphi(x) = e^{-x^2},\quad \varphi_N(x) = N\varphi(Nx)\qquad (N = 1,2,3,\cdots)$$

で定義する．実係数の多項式 $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$ が与えられたものとして，次の各問いに答えなさい.

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_N(x)p(x)dx$ の値を求めなさい.

(2) 実数 c に対して，極限 $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_N(x-c)p(x)dx$ の値を求めなさい.

なお，解答に必要なら $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx = \sqrt{\pi}$ を用いてもよい.

（高知大 2001）　　(m20014501)

0.1289 $f(x)$ を閉区間 $I = [a,b]$ 上の連続関数とする. I 上に $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$ を

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

となるように選び, I の分割と呼び Δ で表す. また

$$|\Delta| = \max_{1\leq i\leq n}(x_i - x_{i-1})$$

とする. さらに $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ を満たす ξ_i をとり, $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ をこの分割の代表系と呼び,

$\xi(\Delta)$ で表す. このとき

$$S(f, \xi(\Delta)) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

を分割 Δ とその代表系 $\xi(\Delta)$ に関するリーマン和と呼ぶ. 任意の分割の列と任意の代表系に対して

$$\lim_{|\Delta| \to 0} S(f, \xi(\Delta))$$

が一意に存在する. その極限 S を $f(x)$ の I における積分といい

$$\int_a^b f(x)dx = S$$

とかく. この定義を用いて次の問に答えよ. ただし, 以下において $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で正値連続な関数とし

$$f_{in} = f(a + i\delta_n), \qquad \delta_n = \frac{b-a}{n}$$

とする.

(1) 次の式を示せ.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_{1n} + f_{2n} + \cdots f_{nn}}{n} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

(2) 次の式を示せ.

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{f_{1n} f_{2n} \cdots f_{nn}} = \boldsymbol{e}^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f(x)dx}$$

(3) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1^2}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right)}$$

(高知大 2005) (m20054501)

0.1290 n を自然数とし

$$f_n(x) = \max\left\{-\frac{3}{4n^3}x^2 + \frac{3}{2n^2}x\,,\ 0\right\}$$

とする．ここで $\max\{a, b\}$ は a と b の小さくない方を表すとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^\infty f_n(x)dx$

(2) $x \in [0, \infty)$ に対して，次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{n \to \infty} f_n(x)$

(3) 次を示せ． $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty f_n(x)dx \neq \int_0^\infty \lim_{n \to \infty} f_n(x)dx$

(高知大 2006) (m20064502)

0.1291 関数 $x = \log t$, $y = \dfrac{2t+1}{t^2}$ について，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ および $\displaystyle\int y dx$ を t で表せ．

(高知大 2006) (m20064505)

0.1292 $\alpha > 0$ のとき，広義積分 $f(t) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^{t-1} dx$ は $t > 0$ に対して定義される．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $f(1)$ を求めよ.

(2) $t > 0$ に対して，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} e^{-\alpha x} x^t = 0$ を示せ.

(3) $t > 0$ に対して，$\alpha f(t+1) = t f(t)$ が成り立つことを示せ.

(4) 正の整数 n に対して，$f(n+1)$ を求めよ.

(高知大 2007)　　(m20074503)

0.1293 (1) $D=\{(x,y)\mid y\leq 2x,\ x\leq 2y,\ x+y\leq 3\}$ とする，D を図示せよ．

(2) 次の 2 重積分の値を求めよ．　$\displaystyle\iint_D y\,dxdy$

(高知大 2008)　　(m20084502)

0.1294 R^3 で，球 $S\ :\ x^2+y^2+z^2\leqq\ 5^2$ と円柱 $C\ :\ x^2+z^2\leqq\ 4^2$，$-5\leqq\ y\leqq\ 5$ を考える．S と C の共通部分を V とするとき，3 重積分 $\displaystyle\iiint_V dxdydz$ は何を表すかを述べよ．また，この値を求めよ．

(高知大 2009)　　(m20094502)

0.1295 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を次で定義する．

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y\leq 2x\,,\ x\leq 2y\,,\ x+y\leq 3\}$$

D における重積分

$$\iint_D x\,dxdy \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ①$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) 累次積分を用いて①の値を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への変換 Φ を

$$u=\varphi(x,y)=\frac{2x-y}{3}\ , \qquad v=\psi(x,y)=\frac{-x+2y}{3}$$

としたときに $\Phi(x,y)=(\varphi(x,y),\ \psi(x,y))$ で定義する. xy 平面上の集合 D を変換 Φ によりうつした uv 平面上の像 D' を図示せよ.

(3) (2) の変換 Φ を用いて①を

$$\iint_{D'} f(u,v)\,dudv$$

と表したときの f を求めよ.

(4) (3) の重積分の値を求めよ.

(高知大 2010)　　(m20104502)

0.1296 べき級数 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ を考える．次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の項別微分を求めよ.

(2) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ は収束することを示せ.

(3) $f(x)$ は開区間 $(-1,1)$ で収束することを示せ.

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} f(x)dx$ の値を求めよ.

(高知大 2011)　　(m20114502)

0.1297 $f(x)=\displaystyle\int_0^x \sin t^2 dt$ について，次の問いに答えよ.

(1) $f'(x)$ を求めよ.

(2) 実数 a に対して，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{e^x-e^a}$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}$ を求めよ.

(4) 任意の実数 x に対して，$|f(x)| \leqq |x|$ を示せ．

(高知大 2012)　　(m20124502)

0.1298 次の問いに答えよ．

(1) 微分可能な関数 $f(x)$ が微分可能な逆関数 $f^{-1}(x)$ を持つとする．このとき，次の式を示せ，

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

(2) $f(x) = \tan x$ とし，$\tan x = t$ とおく．(1) を用いて次の式を示せ．

$$(f^{-1})'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

(3) (2) を用いて次の式を示せ．

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{3}$$

(4) 次の値を求めよ．

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

(高知大 2013)　　(m20134501)

0.1299 $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ とする．関数

$$f_n(x) = \frac{x^n(x-\pi)^n}{n!}$$

に対し，

$$a_n = \int_0^{\pi} f_n(x) \sin x dx$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の式を示せ．

$$f_{n+1}(x) = \frac{x(x-\pi)}{n+1} f_n(x)$$

(2) 次の式を示せ．

$$f''_{n+2}(x) = 2f_{n+1}(x) + (2x-\pi)^2 f_n(x)$$

(3) 次の式を示せ．

$$a_{n+2} = (-4n-6)a_{n+1} - \pi^2 a_n$$

(4) a_3 を求めよ．

(高知大 2013)

0.1300 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{x^2} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $x \neq 0$ のとき，$f'(x)$ を求めよ．

(2) 任意の実数 x に対して，$|f(x)| \leqq x^2$ であることを示せ．

(3) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能かどうかを理由を挙げて答えよ．

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x f'(x)$ を求めよ．

(高知大 2014)　　(m20144501)

0.1301　次の問いに答えよ．

(1)　実数 s に対して，不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{s+x}dx$ を求めよ．

(2)　正の整数 n と正の実数 t に対して　$f_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t+\frac{k}{n}}$　とおく．
t を固定したとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(t)$ を求めよ．

(3)　(2) で求めた極限を $f(t)$ とおく．$\displaystyle\lim_{t\to+0} \frac{f(t)}{\log(1-e^{-t})}$ を求めよ．

(高知大 2015)　　(m20154501)

0.1302　不定積分　$\displaystyle\int \sin^3\theta d\theta$　を求めよ．

(高知大 2015)　　(m20154505)

0.1303　$f(x)$ は開区間 $(-1,1)$ 上で連続な正値関数で，

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = 1$$

を満たすとする．さらに，正の整数 n ごとに実数直線 $\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f_n(x)$ を，

$$f_n(x) = \begin{cases} nf(nx) & \left(x \in \left(-\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n}\right) \text{のとき}\right) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

で与える．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$ を求めよ．

(2)　N を正の整数とし，ε を正の数とする．$\mathbb{R}$ 上で定義された連続関数 $g(x)$ が閉区間 $\left[-\dfrac{1}{N},\ \dfrac{1}{N}\right]$ 上で $\Big|g(x)\Big| < \varepsilon$ を満たせば，$n > N$ を満たす任意の整数 n に対して，

$$-\varepsilon \leqq \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x)dx \leqq \varepsilon$$

であることを示せ．

(3)　$\mathbb{R}$ 上で定義された任意の連続関数 $h(x)$ に対して，$a_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)h(x)dx$ とおく．

このとき，$g(x) = h(x) - h(0)$ に対して (2) の結果を利用することにより，
数列 $\{a_n\}$ は $n\to\infty$ のとき $h(0)$ に収束することを示せ．

(高知大 2016)　　(m20164502)

0.1304　(1)　任意の $x>0$ に対して

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

が成り立つような定数 a,b,c を求めよ．

(2)　$r>0$ のとき，次の広義積分の値を r を用いて表せ．

$$\int_r^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)^2}$$

(3)　(2) で求めた広義積分の値を $I(r)$ とおく．$\displaystyle\lim_{r\to\infty}\left(r^2 I(r)\right)$ を求めよ．

(高知大 2017)　　(m20174502)

0.1305　$0<a<1$ とする．

(1) $\displaystyle\int_a^1 \log x dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_a^1 \log x dx$ を求めよ．ただし，計算途中で不定形の極限ができた場合，その計算過程も明記すること．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log k-\log n\right)$ を求めよ．

(愛媛大 2000)　　(m20004602)

0.1306　$D=\left\{(x,y); y^2\leqq x\leqq y, 0\leqq y\leqq 1\right\}$ とする．

(1) D を図示せよ．

(2) $\displaystyle\iint_D x^2 y dxdy$ を求めよ．

(愛媛大 2000)　　(m20004604)

0.1307　次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^2)}$　　(2) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{4-\cos^2 x}dx$

（愛媛大 2004）　　(m20044602)

0.1308　$f(x)$ を連続関数とし，　$F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$　とする．

(1) 関数　$g(x)=\displaystyle\int_{3x}^{x^2} f(t)\ dt$　を積分記号を使わず，$f(x)$, $F(x)$ を用いて表せ．

(2) 関数 $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を積分記号を使わず，$f(x)$, $F(x)$ を用いて表せ．

(3) 関数　$h(x)=\displaystyle\int_{3x}^{x^2} tf(t)\ dt$　の導関数 $h'(x)$ を積分記号を使わず，$f(x)$, $F(x)$ を用いて表せ．

(愛媛大 2004)　　(m20044603)

0.1309　$D=\{(x,y)\ ;\ x^2+y^2\leqq \pi^2\}$ とするとき, 次の重積分を求めよ．

$$\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

(愛媛大 2004)　　(m20044606)

0.1310　次の積分を計算せよ．　$\displaystyle\iint_D xy\ dxdy$　　$D: x^2+y^2\geqq 1,\ 0\leqq y\leqq x+2,\ 0\leqq x\leqq 1$

(愛媛大 2004)　　(m20044607)

0.1311　関数 $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x^3+x}$ について, 次の問に答えよ．

(1) 等式 $f(x)=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ が成り立つように定数 A, B, C を定めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} f(x)dx$ の値を求めよ．

(愛媛大 2005)　　(m20054602)

0.1312　(1) 関数 $f(x,y)=x-x^3-2xy^2$ の極値を求めよ．

(2)　$D=\{(x,y)\,:\,0 \leqq\ x,\,0 \leqq\ y,\,2 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 3\}$ のとき, 次の積分の値を求めよ.

$$\iint_D x^2 y dxdy$$

(愛媛大 2005)　　(m20054603)

0.1313　$a>0,\ x>0$ のとき, 関数 $f(x)$ は等式

$$\int_a^{\sqrt{x}} f(t)dt = -2+\log x$$

を満たす. このとき, $f(x)$ と定数 a の値を求めよ.

(愛媛大 2005)　　(m20054609)

0.1314　次の積分 I の値を求めよ.

$$I=\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x}$$

(愛媛大 2005)　　(m20054610)

0.1315　(1)　不定積分 $\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx$ を求めよ。　(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1+3t^2}\,dt$ を求めよ。

(愛媛大 2006)　　(m20064602)

0.1316　$D=\{(x,y)\,;\,1 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 4\}$ とするとき，次の積分の値を求めよ.　$\displaystyle\iint_D \frac{\log\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$

(愛媛大 2006)　　(m20064604)

0.1317　関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\tan^{-1}x$ について，次の各問に答えよ.

(1)　$f(x)$ は区間 $(0,\infty)$ 上単調減少であることを示せ.

(2)　次の定積分の値を求めよ.　$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} x^3 f\left(\frac{1}{2}x^2\right)dx$

(愛媛大 2006)　　(m20064606)

0.1318　n を自然数とするとき，関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{t^n}{t^{2n}+2}dt$ について次の問いに答えよ.

(1)　$f(x)$ が $x=1$ で極値を持つように n の値を定めよ.

(2)　(1) の n に対して $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x),\ \lim_{x\to-\infty} f(x)$ を求めよ.

(愛媛大 2006)　　(m20064610)

0.1319　次の極限を求めよ.

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{(x+a)(x+b)}-\sqrt{(x-a)(x-b)}\right\}$　（a,b は定数）　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x \tan(t^2)dt$

(愛媛大 2006)　　(m20064611)

0.1320　積分の順序を交換することにより，次の反復積分の値を求めよ。　$\displaystyle\int_0^1\int_y^1 y^2 e^{x^2}dxdy$

(愛媛大 2006)　　(m20064613)

0.1321　(1)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x dx$ を求めよ.　(2) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{x-x^3}dx$ を求めよ.

(愛媛大 2007)　　(m20074602)

0.1322 $f(x, y) = \displaystyle\int_0^{\frac{y^2}{x}} e^{-t}dt$ とおく．$\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ を求めよ．

(愛媛大 2007)　(m20074603)

0.1323 a を正の定数として，$D = \{(x, y) : -a \leqq x \leqq a,\ -a \leqq y \leqq a\}$ とするとき，次の重積分の値を求めよ．$\displaystyle\iint_D e^{|x-y|}dxdy$

(愛媛大 2007)　(m20074604)

0.1324 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \log x dx$ を計算せよ．

(2) $0 < a < 1$ とし，$f(a) = \displaystyle\int_1^e |\log x - a|dx$ とおく．

(a) $f(a)$ を計算せよ．

(b) a が $0 < a < 1$ の範囲を動くとき，$f(a)$ を最小とする a の値を求めよ．

(愛媛大 2007)　(m20074606)

0.1325 すべての実数 x に対して，$f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^3+1}{t^2+1}dt$ とする．

(1) $f(x)$ を計算せよ．　(2) $x > 0$ のとき $f(x) > 0$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2}$ の値を求めよ．

(愛媛大 2007)　(m20074608)

0.1326 次の不定積分を計算せよ．$\displaystyle\int \log x\, dx \quad (x > 0)$

(愛媛大 2007)　(m20074615)

0.1327 次の定積分を計算せよ．$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\, d\theta$

(愛媛大 2007)　(m20074616)

0.1328 $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の 1 階導関数を求めよ．

(2) $f(x)$ の逆関数を求めよ．

(3) $g(x)^2 - f(x)^2$ を求めよ．

(4) $a > 0$ とする．このとき $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$ を求めよ．

(愛媛大 2008)　(m20084603)

0.1329 (1) 次の不定積分を計算せよ．ただし，$x > 0$ で n は自然数とする．$\displaystyle\int x^n \log x\, dx$

(2) 次の定積分を計算せよ．$\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin x\, dx$

(3) 3 点 $A = (-x_1, x_2, 0)$, $B = (0, x_2, x_3)$, $C = (x_1, 0, x_3)$ を頂点とする三角形の面積を求めよ．

(4) 次の極限値を求めよ．ただし，a は定数とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k+a}$

(愛媛大 2008)　(m20084607)

0.1330 (1) 次の広義積分を求めよ．$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)\tan^{-1} x}$

(2) 次の不定積分を求めよ. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)^2}$

(愛媛大 2008) (m20084609)

0.1331 (1) $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ が偏微分可能であるとき, $J(u,v) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\psi}{\partial v} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial\psi}{\partial u}$ とおく. 次の φ, ψ に対して $J(u,v)$ を求めよ.

(a) $\varphi(u,v) = e^u \cos v$, $\psi(u,v) = e^u \sin v$

(b) $\varphi(u,v) = \sqrt{u^2+v^2}$, $\psi(u,v) = \tan^{-1}\dfrac{v}{u}$

(2) $D = \{(x,y)\ ;\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1\}$ とするとき, 次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D x\sqrt{y}\,dxdy$$

(愛媛大 2008) (m20084610)

0.1332 (1) 次の曲線の長さを求めよ.

$$y = \frac{1}{2}\log x - \frac{1}{4}x^2 \quad (1 \leqq x \leqq e)$$

(2) $a > 0$ のとき, 次の広義積分が収束するための a の条件を求め, そのときの積分の値を求めよ.

$$\int_e^\infty \frac{1}{x(\log x)^a}\,dx$$

(愛媛大 2009) (m20094602)

0.1333 (1) 関数 $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2$ の極値を求めよ.

(2) $D = \{(x,y) \mid -\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2},\quad 0 \leqq y \leqq 1\}$ とするとき, 次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D x\sin(xy)\,dxdy$$

(愛媛大 2009) (m20094603)

0.1334 (1) $x = \sin t\left(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおいて, 次の不定積分を求めよ. ただし, 最終的な答えは x の関数で表わすこと.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

(2) $S(x) = \displaystyle\int_1^x \log t\,dt$ とする. 次の値を求めよ.

(a) $S'(e)$ (b) $S(e)$ (c) $\displaystyle\int_1^e e^{S(x)}\log x\,dx$ (d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{S(x)}}{x^x}\,dx$

(愛媛大 2010) (m20104602)

0.1335 次の累次積分の値を求めよ. $\displaystyle\int_0^1\left(\int_y^1 e^{x^2}\,dx\right)dy$

(愛媛大 2010) (m20104604)

0.1336 以下の問に答えよ.

(1) 次の累次積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{2y}{\pi}}^1 \cos\frac{y}{x}dx\right)dy$$

(2) $D=\{(x,y):x,y\geq 0,\ 0\leq x^2+y^2\leq 2\}$ とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2+1}\,dxdy$$

(愛媛大 2011)　　(m20114605)

0.1337 (1) 次の不定積分を求めよ．

$$\int e^{2x}\cos x\,dx$$

(2) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおいて，次の定積分を求めよ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2+\cos x}\,dx$$

(愛媛大 2011)　　(m20114608)

0.1338 $D=\{(x,y)\,;\,0\leqq\ x+y\leqq\ 1,\ 0\leqq\ x-y\leqq\ 1\}$ とするとき，次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D x\,dxdy$$

(愛媛大 2011)　　(m20114610)

0.1339 (1) 次の定積分を求めよ．

$$\int_1^{e^2}(\log x)^2dx$$

(2) 次の媒介表示で表される曲線の長さを求めよ．

$$x=\frac{t^3}{3}-t\,,\qquad y=t^2\qquad (0\leqq\ t\leqq\ 2)$$

(愛媛大 2013)　　(m20134602)

0.1340 (1) 次の不定積分を求めよ．

$$\int\frac{x^3-x-1}{x^2+1}dx$$

(2) 次の広義積分を求めよ．

$$\int_1^{\infty}\frac{2}{e^x-e^{-x}}dx$$

(愛媛大 2014)　　(m20144602)

0.1341 次の累次積分を求めよ．

$$\int_0^1\left(\int_{\sqrt{x}}^1\sqrt{1+y^3}\,dy\right)dx$$

(愛媛大 2014)　　(m20144604)

0.1342 (1) 次の不定積分を求めよ．　$\displaystyle\int\frac{1}{x(x^2-1)}dx$

(2) 次の広義積分を求めよ．ただし，$\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いてよい．

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty}xe^{-x^2}dx$　　(b) $\displaystyle\int_0^{\infty}x^2e^{-x^2}dx$　　(c) $\displaystyle\int_{-1}^{\infty}x^2e^{-x^2-2x-2}dx$

(愛媛大 2015)　　(m20154602)

0.1343 $D=\left\{(x,y) \mid 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ 0 \leqq y \leqq x\right\}$ とするとき，次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D xydxdy$$

(愛媛大 2015)　　(m20154604)

0.1344 次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 \sqrt{y^2+y}\,dydx$$

(愛媛大 2015)　　(m20154607)

0.1345 (1) 次で定義される関数 $f(x,y)$ の原点 $(0,0)$ での連続性を調べよ．

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(2) C^1 級の関数 $f(x,y)$ は

$$x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

を満たすとする．このとき，$z=f(x,y)$ と $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ の合成関数 $z=f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ は r だけの関数であることを示せ．

(3) 連続関数 $f(x)$ について，次の等式を示せ．

$$\int_0^x dy\int_0^y dz\int_0^z f(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt$$

(愛媛大 2016)　　(m20164603)

0.1346 (1) 次の不定積分を求めよ．　$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

(2) 次の定積分を求めよ．　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^{-1}2x\ dx$

(3) 曲線 $y=\sin^{-1}2x \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\right)$，直線 $y=\dfrac{\pi}{2}$ および y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

ただし，$\sin^{-1}x$ の値域は $\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ とする．

(愛媛大 2017)　　(m20174602)

0.1347 $D=\{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 2,\ x \leqq 2y \leqq 2\}$ とする．

(1) D を図示せよ．

(2) 次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D \log(1+y^2)dxdy$$

(愛媛大 2017)　　(m20174604)

0.1348 (1) $\tan^{-1}x=\sin^{-1}\dfrac{3}{5}$ を満たす x の値を求めよ．　ただし，$\tan^{-1}x$ は逆正接関数とし $\sin^{-1}x$ は逆正弦関数とする．

(2) $y=(x^2+1)e^{-3x}$ の n 次導関数をライプニッツの公式を用いて求めよ．

(3) 自然数 n に対して $I_n = \displaystyle\int \sin^n x dx$ と定める．このとき次の漸化式を示せ．

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}I_{n-2} \qquad (n \geq 3)$$

(愛媛大 2017)　　(m20174614)

0.1349 (1) 次の不定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$　　(b) $\displaystyle\int e^{\cos x}\sin 2x dx$

(2) 次の広義積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+3}$$

(愛媛大 2018)　　(m20184602)

0.1350 $D = \left\{(x,\ y)\ \middle|\ 0 \leqq y \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}\right\}$ とする．

(1) D を図示せよ．

(2) 次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D \sin(x+y)dxdy$$

(愛媛大 2018)　　(m20184604)

0.1351 次の不定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+\sin^2 x)\tan x}dx$　　(b) $\displaystyle\int x^9 e^{-x^{10}} dx$

0.1352 次の広義積分が収束するように定数 a を定め，そのときの広義積分の値を求めよ．

$$\int_1^{\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1} - \frac{a}{\sqrt{x}}\right)dx$$

(愛媛大 2021)　　(m20214602)

0.1353 $D = \left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq y\right\}$ とする．

(1) D を図示せよ．

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$ を求めよ．

(愛媛大 2021)　　(m20214604)

0.1354 変数 $a,\ b$ は各々$\{1,2,3,4,5,6\}$ に値をとる．

$$\int_{a-b}^{a+b}(x-b)\big(x-(a+b)\big)dx = 2b^3$$

となる $(a,\ b)$ の組をすべて求めよ．

(愛媛大 2022)　　(m20224604)

0.1355 関数

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x + 1$$

がある．

(1) 曲線 $y = f(x)$ の変曲点を求めよ．

(2) 直線 ℓ が以下の条件 (i), (ii) の両方をみたすとする．

(i) 直線 ℓ と曲線 $y = f(x)$ は 3 点で交わり，そのうち 1 点は (1) で求めた変曲点である．

(ii) 直線 ℓ と曲線 $y=f(x)$ の 3 つの交点の x 座標を小さい値から順に $a,\ b,\ c$ としたとき,

$$\int_a^c f(x)dx=20$$

である.

このとき，直線 ℓ を表す方程式を求めよ.

(3) 曲線 $y=f(x)$ と (2) の直線 ℓ で囲まれる 2 つの部分の面積の和を求めよ.

(愛媛大 2022)　　(m20224605)

0.1356 (1) 次の極限値を求めよ．ただし，$[x]$ は，実数 x を超えない最大の整数とする.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+3x^2)}{\log(5+7x)}$　(b) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{x^2-[3x]x+2}{x-1}$　(c) $\displaystyle\lim_{x\to0}\int_0^{x/2}\frac{dt}{(\sin x)\sqrt{1-t^2}}$

(2) 次の関数の導関数を求めよ.

(a) $\sqrt{1+\cos^2 x}$　(b) $\sin^{-1}(\log x)$

(愛媛大 2022)　　(m20224606)

0.1357 (1) 次の不定積分と定積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$　(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}x\sin^2 x\,dx$

(2) 次の広義積分を求めよ.

$$\int_0^\infty\frac{dx}{2x^2+3}$$

(愛媛大 2022)　　(m20224607)

0.1358 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x\geqq1,\ y\geqq2,\ xy\leqq4\right\}$ とする.

(1) D を図示せよ.

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D xe^{xy}dxdy$ を求めよ.

(愛媛大 2022)　　(m20224609)

0.1359 $V: x^2+y^2+z^2\leq a^2$, $(a>1)$ において，次の積分を求めよ.

(1) $$\int_V\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

(2) $$\int_V\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}}$$

(九州大 1996)　　(m19964702)

0.1360 $P_n(x)=\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$,　$-1\leq x\leq1$, $n=0,1,2,3,\cdots$　と定義する．このとき次の問に答えよ.

(1) $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ を計算して求めよ.

(2) 任意の　$0\leq k\leq n$　について　$\displaystyle\int_{-1}^1 x^kP_{n+1}(x)\,dx=0$　を示せ.

(3) 任意の n 次多項式 $Q(x)$ について　$\displaystyle\int_{-1}^1 Q(x)P_{n+1}(x)\,dx=0$　を示せ.

(4) $P_n(1)$ の値を計算せよ.

(九州大 1997)　　(m19974701)

0.1361 (1) 領域 $D=\{(x,y)\mid 0\leq x+y\leq1\ ,\ 0\leq x-y\leq1\}$ を座標平面に図示せよ.

(2) 積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x-y}{1+x+y}\,dx\,dy$ の値を計算せよ．

(九州大 1997）　(m19974703)

0.1362 不定積分 $\displaystyle\int te^{-t^2}dt$ を求めよ．

(九州大 1998）　(m19984702)

0.1363 重積分 $\displaystyle\iint_D (y^2-x^2)e^{-(x+y)^2}\,dx\,dy$ の値を求めよ．

ただし，$D=\{\,(x,y)\mid 0\leq y-x\leq y+x<+\infty\,\}$ である．

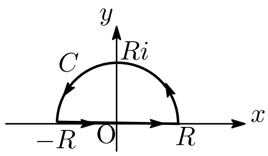
(九州大 1998）　(m19984705)

0.1364 次の各問に答えよ．

(1) 次の問に答えよ．

(a) $z^4+\alpha^2=0$ を満たす複素数 z を求めよ．ただし，$\alpha>0$ とする．

(b) 積分 $\displaystyle\int_C \frac{z^4}{1+z^4}dz$ の値を求めよ．ただし，C は図のような線分と半円をつないだ曲線であり，$R>1$ とする．



(2) $u(x,y)=x^2+\alpha xy+\beta y^2$ とする．複素平面全体で正則関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ が存在する条件を示し，そのときの $v(x,y)$ を求めよ．ただし，i は虚数単位であり，$z=x+yi$，また，α,β は定数とする．

(九州大 1998)　(m19984710)

0.1365 $\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases}$ $\quad(0\leq\theta\leq\pi\,,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi\,,\ r\geq 0)$ 　とする．

(1) ヤコビヤンが $r^2\sin\theta$ になることを示せ．

(2) $D\ :\ \{x^2+y^2+z^2\leqq R^2 \quad x\geqq 0\,,\ y\geqq 0\,,\ z\geqq 0\,\}$

D は半径 R の球の $\dfrac{1}{8}$ である．このときの

$$\iiint_D xy\,dx\,dy\,dz$$

を求めよ．

(九州大 1999）　(m19994703)

0.1366 次の各問いに答えよ．

(1) $f(z)$ は単位円 $|z|\leqq 1$ で正則で，円周 $|z|=1$ 上で $|f(z)|\leqq M$ を満たす．コーシーの積分公式

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z-a}dz,\qquad (|a|<1)$$

を用いて，$|f(0)|\leqq M$ を示せ．

(2) $g(z)=\dfrac{a-z}{1-\overline{a}z}$ は円周 $|z|=1$ 上で $|g(z)|=1$ を満たすことを示せ．

(3) この $g(z)$ との合成関数を用いることにより，上の (1) の条件を満たす関数 $f(z)$ は単位円内のすべての点で $|f(z)|\leqq M$ を満たすことを示せ．

(九州大 1999)　(m19994707)

0.1367 次の問いに答えよ．

(1) z を複素数とし，複素平面上の閉曲線 C を $|z-a|=r$ （r は正の実数, a は複素数) とする．このとき積分

$$\oint_C \frac{dz}{(z-1)^n}$$

を $n=1, n=2, n=3$ の各々の場合について計算せよ．ただし，一周積分は正の向き（反時計回り）とする．

(2) 上の結果を用いて $\displaystyle\oint_C \frac{3z^2-4z}{(z-1)^3}dz$ を計算せよ．ただし，C は $|z-1|=2$ とする．

(九州大 2000)　　(m20004703)

0.1368 次の積分の計算をしなさい．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x}\log(1+\sin x)dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} t^2 e^{-t}dt$

（九州大 2001）　　(m20014701)

0.1369 次の積分の計算をしなさい．

$$\iint_D (x^2+y^2)^{1/4}dxdy, \quad \text{ただし}, D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 4\}.$$

（九州大 2001）　　(m20014702)

0.1370 次の積分の値を求めたい．

$$I(p)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-2p\cos\theta+p^2}d\theta, \quad 0<p<1$$

(1) 関係式

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) \quad \text{および} \quad \frac{d}{d\theta}e^{i\theta}=ie^{i\theta}$$

を利用して，$I(p)$ を複素平面内の単位円周 C に沿っての線積分

$$I(p)=\int_C F(z)dz$$

と書き換えるには，$F(z)$ をどう定めたらよいか．

(2) 積分 $I(p)$ の値を求めよ．

(九州大 2001)　　(m20014708)

0.1371 次の問いに答えよ．

(1) $\cos\omega t$ のラプラス変換を求めよ．

(2) $e^{at}\sin\omega t$ のラプラス変換を求めよ．

(3) 上記の結果を利用して，方程式

$$\int_0^t f(t-\tau)\cos\omega\tau d\tau = e^{at}\sin\omega t$$

を満たす関数 $f(t)$ を求めよ．

(九州大 2001)　　(m20014709)

0.1372 z を複素数とする．複素平面上の経路 C に沿う積分 $\displaystyle\int_C \frac{e^{az}}{1+e^z}dz$　$(0<a<1)$ について次の問に答えよ．

(1) 積分路 C を 4 点 $-R, R, R+i2\pi, -R+i2\pi$　$(R>0)$ を頂点とする長方形にとるとき，C で囲まれる領域内にある特異点，およびその点における留数を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx \quad (0 < a < 1)$ を計算せよ.

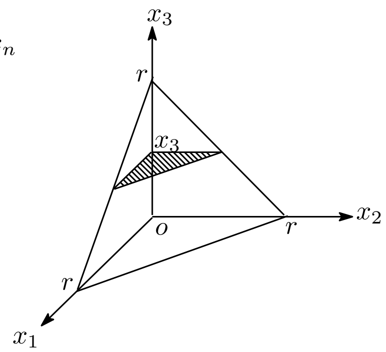
(九州大 2003)　　(m20034708)

0.1373 正の数 r と整数 $n \geq 1$ に対して

$$K_n(r) = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \geq 0 \ \ (1 \leq i \leq n)\ , \ \sum_{i=1}^{n} x_i \leq r\}$$

とおくと, $K_n(r)$ の体積 $|K_n(r)|$（ただし, $n=1$ のときは長さであり, $n=2$ のときは面積）は次で与えられる.

$$|K_n(r)| = \int_{K_n(r)} \cdots \int 1 \ dx_1 \cdots dx_n$$



次の問に答えよ.

(1) $|K_1(r)|$, $|K_2(r)|$ を求めよ.

(2) 右図を参考にして $|K_3(r)|$ を求めよ.

(3) $|K_n(r)|$ を求めよ.

(九州大 2004)　　(m20044701)

0.1374 (1) 次の線形非同次微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

の一般解は

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right)$$

で与えられることを示せ. ただし, $P(x), Q(x)$ は x の連続関数であり, c は任意の定数である.

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$x\frac{dy}{dx} - y = x(1+2x^2)$$

(3) 適切な変数変換を利用して, 次の微分方程式の一般解を求めよ. さらに, $x=1$ のとき $y=1$ となるような解を求めよ.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} = \frac{\log x}{2x}y^3$$

(九州大 2004)　　(m20044702)

0.1375 複素平面上の中心 a, 半径 r の半円 $C_r(a)$ を $C_r(a) = \{z = a + re^{i\theta}\ ;\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$ で定める. ただし, $i = \sqrt{-1}$ である.

(1) 正則関数 $f(z)$ に対して次式を示せ. $z = a + \varepsilon e^{i\theta}$ とおいて考えよ.

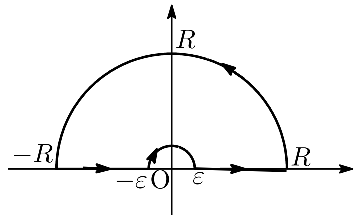
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{z-a}dz = i\pi f(a)$$

(2) 不等式 $\dfrac{2}{\pi}\theta \leq \sin\theta \left(0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が成立つことを示せ.

(3) (2) の結果を用いて次式を証明せよ.

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R(0)} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$

(4) 関数 $\dfrac{e^{iz}}{z}$ の積分を図の矢印に示す道に沿って考えることにより, 定積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ の値を計算せよ.



（九州大 2004） (m20044708)

0.1376 複素変数の関数 $f(z) = \dfrac{1}{2z^2 - 5z + 2}$ について次の問いに答えよ. ただし, 積分路 C は, 単位円周 $|z| = 1$ を反時計回りに一周する閉曲線とする.

(1) $f(z)$ の各極における留数を求めよ.

(2) 積分 $I = \displaystyle\int_C f(z) dz$ の値を求めよ.

(3) $z = e^{i\theta}$ (θ : 実数, i : 虚数単位) のとき, $\cos\theta = \alpha z + \beta z^{-1}$ を満たす実数 α, β を求めよ.

(4) 積分路 C のパラメータ表示 $C\ :\ z = e^{i\theta},\ 0 \leqq \theta \leqq\ 2\pi$ を用いることにより, (2) の積分 I は, 次のように変換できる.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{a}{b\cos\theta + c} d\theta \quad (a, b, c\ :\ \text{定数})$$

a, b, c を求めよ.

(九州大 2005) (m20054703)

0.1377 (1) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - ay = 0$ を解け.

(2) 区間 $[0, \ell\,]$ での $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0$ の解で $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\ell) = 0 \end{cases}$ を満たす恒等的に 0 でない解を求めよ.

また，a がどのような値のときにそのような解が存在するか答えよ.

(3) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a^2y = f(x)$ （ただし，$f(x)$ は既知関数）の一般解を定数変化法により求めることを考える.

同次形 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0$ の一般解は，$y = c_1 \sin ax + c_2 \cos ax \cdots$ ①

であるとし，c_1 および c_2 を x の関数と考えて方程式の特殊解を求めた結果，一般解が

$$y = \frac{1}{a}\left\{\sin ax \int f(x)\cos ax dx - \cos ax \int f(x) \sin ax dx\right\} + c_1 \sin ax + c_2 \cos ax$$

となることを示せ.

(九州大 2006) (m20064702)

0.1378 複素平面上の原点を中心とする半径 a の円 C に沿った積分（方向は C の正方向，範囲は一周）について，次の問に答えよ.

(1) ある複素数 z_0 ($|z_0| \neq a$) に対して，(a) $|z_0| > a$ の場合 および (b) $|z_0| < a$ の場合における $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z - z_0)^n} dz$ を求めよ．ただし，n は正の整数である.

(2) 複素関数 $f(z) = \log(z-b) + \log\left(z - \dfrac{a^2}{b}\right) - \log z$ （b は実数で，$b > a$）に対して，$\displaystyle\int_C \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz$ を求めよ.

(九州大 2006) (m20064703)

0.1379 (1) 2 つの任意の自然数 m, n について，次をそれぞれ示せ.

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$ (b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0\ ;\ m \neq n \\ \pi\ ;\ m = n \end{cases}$

(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0\ ;\ m \neq n \\ \pi\ ;\ m = n \end{cases}$

(2) 周期 2π の関数 $f(x)$ がフーリエ級数に展開できる，つまり $\displaystyle f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ と表現できるとき，

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos pxdx$ (c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin pxdx$ $(\ p = 1, 2, \cdots)$

をそれぞれ計算せよ．

(3) 周期 2π の関数 $f(x) = |x|\ ;\ -\pi < x \leq \pi$ をフーリエ級数に展開せよ．

(4) (3) の結果を用いて，

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ をそれぞれ計算せよ．

(九州大 2006) (m20064704)

0.1380 有名な公式 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\quad (a > 0)$

の両辺を a に関して微分して，「形式的に微分と積分の順序を交換」すれば

$$-\frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}} = \frac{d}{da}\left(\int_0^{\infty} e^{-ax^2}dx\right) = \int_0^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial a}e^{-ax^2}\right)dx = -\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2}dx\ ,$$

すなわち

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}} \tag{$*$}$$

となる．この問題の目的は，$(*)$ が実際に成立することを上の手順で示すことである．

(1) 任意の $h > 0$ に対して，不等式 $\displaystyle 0 \leqq \frac{e^{-hx^2}-1}{h} + x^2 \leqq \frac{hx^4}{2}\ ,\quad x \in \mathbb{R}$ を示しなさい．

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^4 e^{-ax^2}dx < \infty$ を示しなさい．

(3) (1), (2) を用いて $(*)$ を示しなさい．

(九州大 2006) (m20064705)

0.1381 $\mathcal{P}$ を 3 次以下の実係数多項式のつくるベクトル空間とする．すなわち

$$\mathcal{P} = \{f \mid f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ ,\quad a, b, c, d \in \mathbb{R}\}\ ,$$

$A : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ を $\displaystyle (Af)(x) = \int_0^x f(y)dy - \frac{f'''(0)}{24}x^4$ と定める．

(1) A は線形写像であることを示し，$f_n(x) = x^n\ ,\ n = 0, 1, 2, 3,$ に対し $(Af_n)(x)$ を求めなさい．

(2) W の基底 f_0, f_1, f_2, f_3 に関する A の行列表示を求めなさい．

(3) A^4 を求めなさい．

(4) A は対角化不可能であることを示しなさい．

(九州大 2006) (m20064708)

0.1382 e を自然対数の底とするとき，関数 $f(x) = e^{-x^2}$ と，その n 次 (n 階) 導関数 $f^{(n)}(x)$ を考える．以下の問に答えよ．

(1) $f^{(n)}(x) = p_n(x)e^{-x^2}$ と表すとき，多項式 $p_1(x)$, および $p_2(x)$ を求めよ．

(2) 任意の非負整数 k に対して， $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^k f(x) = 0$ となることを示せ．

(3) 次の広義積分 $I = \displaystyle\int_o^{+\infty} p_1(x)p_2(x)f(x)dx$ の値を求めよ．

(九州大 2006) (m20064713)

0.1383 正の実数 $p > 0$ に対して，定積分 $f_n(p) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+nx^p}\,dx\,,\quad n = 1, 2, \cdots$ を考える．

(1) 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, f_n(2)$

(2) $0 < \varepsilon < 1$ に対して $f_n(p)$ の積分区間を $[0,\ \varepsilon]$ と $[\varepsilon,\ 1]$ に分けることにより次の不等式を示せ．

$$0 < f_n(p) < \varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{1+n\varepsilon^p}$$

(3) (2) を用い $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(p) = 0$ であることを示せ．

(九州大 2007) (m20074705)

0.1384 3 次元空間内で

$$S\ :\ (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))\,,\quad (u,v) \in D$$

の形で表される曲面を考える．ただし，D はパラメータ (u,v) の動く 2 次元平面の領域である．このとき，S の面積 $\mu(S)$ は

$$\mu(S) = \int_D \sqrt{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}^2}\ dudv$$

で与えられる．ただし，$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ は行列式を表す．これを用いて以下の問いに答えよ．

(1) 曲面 S が $z = f(x,y)\,,\quad (x,y) \in D$ で与えられるときは

$$\mu(S) = \int_D \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}\ \ dxdy$$

であることを示せ．

(2) 半径 1 の球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の面積は 4π であることを (1) の公式を用いて確かめよ．

(九州大 2007) (m20074707)

0.1385 (1) $n = 0, 1, 2$ に対して，次の不定積分を求めよ． $\displaystyle\int \frac{x^n}{x^2+1}dx$

(2) n を負でない整数とするとき，次の広義積分は収束するか発散するか，いずれであるかを判定せよ．収束する場合は広義積分の値を求め，発散する場合はその理由を示せ．

$$\int_1^{\infty} \frac{x^n}{x^2+1}dx$$

(九州大 2007) (m20074711)

0.1386 積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a\cos\theta}\,d\theta$ を複素平面の積分に変換して計算する．ただし，a は $0 < a < 1$ の実数である．

(1) 単位円上の任意の点，$z = e^{i\theta}$ に対して，$d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ であることを示せ．

(2) $\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ であることから，I を積分経路を単位円 $|z| = 1$ とする複素積分へ変換せよ．

(3) (2) で得られた複素積分の被積分関数の特異点のうち，単位円内部に含まれる点を書け．

(4) 留数計算によって，$I = \dfrac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$ となることを示せ．

(九州大 2008)　　(m20084703)

0.1387 xyz 空間において，　$z = e^{-(x^2+y^2)}$　で表される曲面 Σ がある．以下の問いに答えよ．

(1) 曲面 Σ と　$z=0,\ x^2+y^2=na^2$　によって囲まれる部分の体積 V_n を求めよ．ただし，n は自然数である．

(2) 曲面 Σ と　$z=0,\ x=a,\ x=-a,\ y=a,\ y=-a$　によって囲まれる部分の体積を V とする．xy 平面において，　$y=e^{-x^2},\ y=0,\ x=a,\ x=-a$　で囲まれる部分の面積を S とした時，V と S の関係を示せ．

(3) V を $V_1,\ V_2$ と比較することによって，　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$　を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084708)

0.1388 $G(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4t}\right)$ とおく．ただし，$\exp z = e^z$ である．

(1) $t>0$ のとき

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0$$

であることを示せ．

(2) $t>0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x,t)\,dx = 1$$

であることを示せ．ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ を用いてよい．

(3) f を $\boldsymbol{R} = (-\infty,\ \infty)$ 上の有界な連続関数とするとき，すべての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$\lim_{t\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t)f(y)\,dy = f(x)$$

であることを証明せよ．

(九州大 2008)　　(m20084712)

0.1389 (1) 区間 $I=(0,1)$ で定義された微分可能な非負関数 $g(x)$ が区間 I で $f(x)=e^{-x^2}$ に対して $f(g(x))=x$ を満たすとき，区間 I において，$g(x)$ および導関数 $g'(x)$ を求めよ．

(2) 次の広義積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{xg'(x)}$

ただし，　$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$　を用いてよい．

(九州大 2008)　　(m20084717)

0.1390 (1) 実数 $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq 1$ に対して，等式　$\dfrac{1+t^2}{t(1+t-t^2)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b+ct}{1+t-t^2}$　が成り立つように a,b,c を定めよ．

(2) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくとき，　$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$，　$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$　と表せることを示せ．

(3) 変数変換 $t=\tan\dfrac{x}{2}$ を行い，次の定積分　$\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)\sin x}$　の値を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084718)

0.1391 $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}\,,\quad a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx\,,\quad b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\,,$

$g(x) = \dfrac{1}{2}a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ とおく．ただし，n を自然数とする．

(1) フーリエ係数 a_n , b_n を計算せよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ は発散することを示せ．

(3) フーリエ級数 $g(x)$ は $x = \dfrac{\pi}{2}$ で収束することを示せ．

(4) $x = \pm\pi$ で $f(x)$ と $g(x)$ がどのような関係にあるか述べよ．

(九州大 2009)　　(m20094703)

0.1392 次の定積分を計算せよ．

(1) $2^4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cos^4 x\,dx$

(2) $2^4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\cos^4 x\,dx$

(九州大 2009)　　(m20094705)

0.1393 $x \neq 0$ に対して,

$$f(x) = -\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{x}$$

とおく. ただし, $\mathrm{Tan}^{-1}y \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ は, $y = \tan x$ の逆関数である.

(1) $x \neq 0$ で

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

であることを示せ.

(2) 次の計算には誤りがある. 誤りの原因を指摘し, 正しい積分値を求めよ.

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[f(x)\Big]_{-1}^{1} = f(1) - f(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

(九州大 2010)　　(m20104707)

0.1394 a を正の定数とするとき, 以下の各問いに答えよ. ただし, e は自然対数の底とする.

(1) 任意の自然数 n に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-ax} = 0$$

(2) 次の広義積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax}\,dx$$

(3) 次の広義積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax^2}\,dx$$

(九州大 2010)　　(m20104709)

0.1395 $a = 4,\ 0,\ -4$ のそれぞれの場合に対して, 以下の問いに答えよ.

(1) 次の不定積分をを求めよ.

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx$$

(2) 次の広義積分について, 収束する場合には広義積分の値を求め, 発散する場合にはその理由を示せ.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{|x^2+a|}\,dx$$

(九州大 2010)　　(m20104710)

0.1396 次の各問いに答えよ.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^3}}$ を求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{|x-2|}}$ は収束するか発散するか，いずれであるかを判定せよ.

(九州大 2011)　　(m20114701)

0.1397 (1) 次の周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \left(-\pi \leqq x < -\dfrac{\pi}{4}\right) \\ 1 & \left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq x < \dfrac{3\pi}{4}\right) \\ -1 & \left(\dfrac{3\pi}{4} \leqq x < \pi\right) \end{cases} \quad , \quad f(x+2\pi)=f(x)$$

(2) 関数 $f(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$ で定義する．次式で定義される関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，関数 $y=F(\omega)$ のグラフの概形を描け．なお，T は正の実数とする.

$$f(t)=\begin{cases} a & (|t| \leqq T) \\ 0 & (|t|>T) \end{cases}$$

(3) 関数 $f(t)$ は $t>0$ で定義されているものとし，$f(t)$ のラプラス変換を $F(s)=\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$ で定義するとき，以下の問いに答えよ.

(a) $f(t)=\sin\omega t$ のラプラス変換が $F(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ であることを示せ.

(b) $f(t)=\cos\omega t$ のラプラス変換が $F(s)=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ であることを示せ.

(c) $f(t)=a+bt$ のラプラス変換が $F(s)=\dfrac{as+b}{s^2}$ であることを示せ.

(九州大 2012)　　(m20124704)

0.1398 関数 $f(x)=\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$ $(-\infty<x<\infty)$ を考える．ただし，e は自然対数の底とする．以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の値域を求めよ.

(2) 定積分 $I=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の値を求めよ．ただし，$a=\dfrac{1}{4}\log 2$, $b=\dfrac{1}{4}\log 3$ とする.

(九州大 2012)　　(m20124706)

0.1399 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; -x-1\leq y\leq -x+1,\ x-1\leq y\leq x+1\right\}$ とおく.

(1) 1 次変換 $u = x + y$, $v = x - y$ によって D が移される uv平面上の集合を図示せよ .

(2) (1) の変数変換において，ヤコビ行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

を求めよ.

(3) 重積分

$$\iint_D (x+y)^2 e^{x-y} dxdy$$

を求めよ.

(九州大 2012)　　(m20124710)

0.1400 (1) 周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を次のように定める．以下の問いに答えよ.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 0, 1, \cdots), \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

(a) 任意の実数 α に対して $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\cos nx dx = a_n$ が成立することを示せ.

(b) 整数 n と実数 x に対して $\cos n(x+\pi) = \begin{cases} \cos nx & (n \text{ が偶数}) \\ -\cos nx & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$ が成立する.

このことを踏まえ，関数 $g(x) = f(x+\pi)$ のフーリエ係数 $a_n' = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx dx$,

$b_n' = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx dx$ を a_n，b_n を用いて表せ.

(2) 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$ とおく．以下の問いに答えよ.

(a) $f(x) = e^{-|x|}$ のフーリエ変換を求めよ.

(b) フーリエの積分定理（逆フーリエ変換）を利用して，次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos u}{1+u^2} du$$

(九州大 2013)　　(m20134703)

0.1401 (1) 次の周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = |x| \quad (-\pi \leqq x < \pi), \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ であることを示せ.

(3) $t > 0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ とする．以下の問いに答えよ.

(a) a を定数とするとき，$\mathcal{L}[e^{at}](s)$ を求めよ．また，$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = F(s-a)$ を示せ.

(b) $\dfrac{dF(s)}{ds} = \mathcal{L}[-tf(t)](s)$ が成り立つことを示せ．また，これを用いて $F(s) = \log\left(\dfrac{s+1}{s}\right)$ のラプラス逆変換を求めよ.

(九州大 2014)　　(m20144703)

0.1402 定積分 $I = \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx$ の値を求めよ．

(九州大 2014) (m20144706)

0.1403 次の重積分を求めよ．

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{y}}\,dxdy \qquad D\,:\,x^2+y^2 \leqq\ y$$

(九州大 2015) (m20154704)

0.1404 a は $a \geqq\ 0$ なる定数とする．$0 < x \leqq\ 1$ において関数 $f(x)$ を次の式で定義する． $f(x) = x^a \log x$

(1) $\lim_{x \to 0} f(x)$ を求めよ．

(2) $0 < x \leqq\ 1$ における $f(x)$ の増減表を与えよ．さらに，$f(x)$ の最大値および最小値が存在する場合には，それらを求めよ．

(3) 次の積分（広義積分）を求めよ． $\int_0^1 f(x)\,dx$

(九州大 2015) (m20154708)

0.1405 a, b, c は $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ なる定数とする．$x > 0,\ y > 0$ において 2 変数関数 $f(x, y)$ を次の式で定義する．

$$f(x, y) = \frac{cy}{ax^2 + by^2}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ．

(2) $x > 0$ なる x を固定するとき，次の積分（広義積分）を求めよ．

$$\int_0^1 f(x, y)\,dy$$

(3) $y > 0$ なる y を固定するとき，次の積分（広義積分）を求めよ．

$$\int_0^{\infty} f(x, y)\,dx$$

(九州大 2015) (m20154709)

0.1406 (1) (a) 周期 $2L$ の区分的に連続な関数 $f(x)$ をフーリエ級数で表現した式を示し，そのフーリエ係数を求める式を示せ．

(b) 次の関数 $f(x)$ $(-2 \leqq\ x \leqq\ 2)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 4 & (-2 \leqq\ x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 4 - 2x & (0 < x \leqq\ 2) \end{cases}$$

(2) $t > 0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \mathfrak{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ とする．必要ならば下記の表にある関係式を用いて，次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．また (b) については，$f(t)$ $(t > 0)$ のグラフをかけ．

(a) $F(s) = \dfrac{2}{s(s+1)(s+2)}$

(b) $F(s) = \dfrac{-s+2}{s^2+2s+4}$

表：
$$\boxed{\begin{array}{l}\mathfrak{L}[1]=\dfrac{1}{s},\quad \mathfrak{L}[t^n]=\dfrac{n!}{s^{n+1}}\ (n=1,2,\cdots),\quad \mathfrak{L}[e^{at}]=\dfrac{1}{s-a},\quad \mathfrak{L}[\sin\omega t]=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2},\\ \mathfrak{L}[\cos\omega t]=\dfrac{s}{s^2+\omega^2},\ \mathfrak{L}[f(at)]=\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right),\ \mathfrak{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a),\ \mathfrak{L}[f(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s)\end{array}}$$

(九州大 2016)　　(m20164703)

0.1407 a, b は $a>1,\ b>0$ なる定数とする．$x \geqq 0$ において関数 $f(x)$ を次の式で定義する．　$f(x)=a^{-bx}$

(1) $f(x)$ の導関数を求めよ．

(2) 次の積分（広義積分）を求めよ．　$\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$

(3) 次の積分（広義積分）を求めよ．　$\displaystyle\int_0^{\infty} a^{-x}\cos x dx$

(九州大 2016)　　(m20164707)

0.1408 a, b は $a>0,\ b>0$ なる定数とする．$x>0,\ y>0$ において 2 変数関数 $f(x,y)$ を次の式で定義する．

$$f(x,y)=\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{b}{y}}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ．

(2) $y>0$ なる y を固定する．このとき，次の積分（広義積分）は収束するか発散するかを理由を示して答えよ．さらに，収束する場合には，積分の値を求めよ

$$f(y)=\int_0^1 f(x,y)dx$$

(九州大 2016)　　(m20164708)

0.1409 (1) 「部分分数への分解」を用いて，任意の自然数 n に対して次の関数 $f(x)$ の n 次（n 階）導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．ただし，$x \neq 3,\ x \neq -1$ とする．

$$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$$

(2) 次の積分を求めよ．　$\displaystyle\int_1^2 \frac{4x^3-6x^2-16x-5}{x^2-2x-3}dx$

(九州大 2017)　　(m20174703)

0.1410 a は $a>0$ なる定数とする．xy-平面内の領域 D と，D 上の 2 変数関数 $f(x,y)$ を，次のように定義する．

$$D=\{(x,y)\mid 0<y<x<a\}$$
$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ．

(2) $0<x<a$ なる x を固定するとき，次の積分（広義積分）を求めよ．

$$\int_0^x f(x,y)dy$$

(3) 領域 D における $f(x,y)$ の 2 重積分（広義積分）を求めよ．

(九州大 2017)　　(m20174705)

0.1411 (1) $f(x) = \begin{cases} 1\ , & (0 \le x \le 1) \\ 0\ , & (\text{上記以外}) \end{cases}$ とする．以下の設問に答えよ．

(a) $f(x)$ 自身の畳み込み積分 $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)dy$ を求めよ．

(b) $f(x)$ のフーリエ変換 $F(u)$ を求めよ．

(c) $g(x)$ のフーリエ変換 $G(u)$ が $F(u)^2$ で与えられることを示せ．

(2) $f(x)$ が $f(x) = x\ ,\quad (-\pi \le x \le \pi)$ で与えられる周期関数とする．ここで周期 T は 2π である．$f(x)$ を $f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$ によりフーリエ級数展開し，$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$ であることを示せ．なお，i は虚数単位を表す．また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ である．

(九州大 2017)　　(m20174708)

0.1412 確率変数 X が次の形の確率密度関数を持つ．

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2} & (|x| \leqq 2) \\ 0 & (|x| > 2) \end{cases}$$

(1) 確率 $P(-1 \leqq X \leqq 1)$ を求めよ．

(2) $I_n = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$ は次の漸化式 $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}\quad (n \geqq 2)$ を満たすことを示せ．

(3) 期待値 $E[X^4]$ を求めよ．

(九州大 2018)　　(m20184703)

0.1413 z を複素数とし，$a > 2$ とする．次の問いに答えよ．

(1)

$$\int_C \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2-az+1)} dz$$

を求めよ．ただし，C は原点を中心とする半径 1 の円周を反時計回りに進む積分路とする．

(2)

$$\int_0^{2\pi} \frac{4\sin^2\theta}{a-2\cos\theta} d\theta$$

を求めよ．

(九州大 2018)　　(m20184704)

0.1414 $x \geqq 1$ において，関数 $f(x)$ を次の式で定義する．

$$f(x) = \sin(\log x)$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $y \geqq 1$ なる y を固定するとき，次の積分を求めよ．

$$g(y) = \int_1^y f(x)dx$$

(2) $1 \leqq y \leqq e^{2\pi}$ における $g(y)$ の最大値および最小値を求めよ．ただし，e は自然対数の底，π は円周率である．

(九州大 2018)　　(m20184707)

0.1415　$x \geqq 0,\ y \geqq 0$ において，2 変数関数 $f(x,y)$ を次の式で定義する．

$$f(x,y) = \frac{y}{(xy+1)^2(y^2+1)}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $y > 0$ なる y を固定し，a を任意の正の定数として，

$$g(y,a) = \int_0^a \frac{1}{(xy+1)^2}dx$$

とおく．このとき，$g(y,a)$ を求めよ．

(2) 領域 $D_1 = \{(x,y) \mid x > 0,\ y > 1,\ xy < 1\}$ における $f(x,y)$ の 2 重積分を求めよ．

(3) 領域 $D_2 = \{(x,y) \mid 0 < x < y < 1\}$ における $f(x,y)$ の 2 重積分を求めよ．

(九州大 2018)　　(m20184708)

0.1416　区間 $(0,\infty)$ 上の関数　$f(x) = e^{-(\log x)^2}$　について以下の問いに答えよ．

(1) 導関数 $f'(x),\ f''(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $y = f(x)$ の増減，凹凸を調べグラフの概形を描け．

(3) 広義積分　$\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$　を求めよ．

(九州大 2019)　　(m20194705)

0.1417　2 次元実平面上の閉区間 $D,\ D_+$ を

$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ x^2 - 4 \leqq y^2 \leqq x^2 - 1 \ \text{かつ}\ 4 \leqq x^2 + y^2 \leqq 9\right\}$

$D_+ = D \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqq 0 \ \text{かつ}\ y \geqq 0\right\}$

とするとき，次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_{D_+} xydxdy$　　　(2) $\displaystyle\iint_D xydxdy$

(九州大 2019)　　(m20194706)

0.1418　(1) a を $a \neq 0$ なる実数とするとき，次の定積分を求めよ．ただし，逆正接関数 : $\mathrm{Arctan}\,x$ が $\dfrac{1}{x^2+1}$ の原始関数であることは既知として用いてよい．　$\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a}dx$

(2) 次の積分を求めよ．　$\displaystyle\int_2^4 \frac{2x-1}{x^2-2x+4}$

(九州大 2019)　　(m20194711)

0.1419　$x > 0,\ y > 0$ において，2 変数関数 $f(x,y)$ および $g(x,y)$ を次の式で定義する．

$$f(x,y) = \log\left(x^2+y^2\right)\ , \qquad g(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{1/3}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の x に関する 2 次偏導関数 $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)$ を求めよ．

(2) 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\lim_{t \to +0} t \log t = 0$$

(3) 領域 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 < x^2 + y^2 < 1,\ 0 < y < x\right\}$ における次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D \frac{f(x,y)}{g(x,y)} dxdy$$

(九州大 2019)　　(m20194712)

0.1420 領域 $R = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leq y \leq 2x\right\}$ に対する積分　$I = \iint_R (x^2 - y^2) e^{-x^2-y^2-3xy}\, dxdy$　を求めよ.

(九州大 2020)　　(m20204704)

0.1421 直交座標系において，x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とする.
ベクトル場 $\boldsymbol{a} = (1 - 2x^2) e^{-x^2-y^2}\,\boldsymbol{i} - 2xye^{-x^2-y^2}\,\boldsymbol{j} + 2z\,\boldsymbol{k}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $\nabla \times \boldsymbol{a}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a} = \nabla\phi$ となるようなスカラー関数 ϕ が存在するか否かを答えよ．存在する場合は，ϕ を求めよ．ただし，原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ において $\phi = 0$ とする.

(3) 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = 2\cos t\,\boldsymbol{i} + 2\sin t\,\boldsymbol{j} + t\,\boldsymbol{k}$　$(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ で与えられる曲線 C 上で，線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r}$ の値を求めよ.

(九州大 2021)　　(m20214703)

0.1422 次の定積分および広義積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

(九州大 2021)　　(m20214707)

0.1423 $0 < A < B \leq 1$ とするとき，領域 D を $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; A \leq x \leq B,\ x^2 \leq y \leq x\right\}$ とし，
$f(x, y) = \dfrac{y + y^2}{x^2 + y^2}$ とする．このとき，次の各問に答えよ.
ただし，逆正接関数 $\arctan(x)$ が $\dfrac{1}{x^2 + 1}$ の原始関数であることは既知として用いてよい.

(1) 関数 $g(x, y) = y - x\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ を y で偏微分した偏導関数を求めよ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x, y) dx$ を求めよ．ただし，$x > 0,\ y > 0$ とする.

(3) 関数 $h(x) = 2\ \arctan(x) - 2x + x\log(x^2 + 1)$ の微分を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_D f(x, y) dxdy = H(B) - H(A)$ を満たす関数 $H(x)$ を求めよ.

(九州大 2021)　　(m20214708)

0.1424 以下の問いに答えよ．ただし，$\mathbb{R}$ は実数全体を表すとする.

(1) 次の広義積分は収束することを示せ.

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}\, dx$$

(2) $D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x,\ 0 \leq y \leq 1\right\}$ として，次の広義積分の収束・発散を調べよ.

$$I_1 = \iint_{D_1} e^{-x^2 y}\, dxdy$$

(3) $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y\}$ として，次の広義積分の収束・発散を調べよ．

$$I_2 = \iint_{D_2} e^{-x^2 y}\, dxdy$$

(九州大 2021)　　(m20214710)

0.1425 (1) 式 ① を x で微分せよ．

$$f(x) = 2x + 3 + \int_0^x f(t)dt \quad \cdots ①$$

(2) 式 ① を満たす $f(x)$ を求めよ．

(3) a, b を実定数として，式 ② の微分方程式

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx} + by = 0 \quad \cdots ②$$

は $x = e^t$ とおくことにより式 ③ になることを示せ．

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = 0 \quad \cdots ③$$

(4) 式 ④ の微分方程式の一般解 y を x の関数として求めよ．

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 6x\frac{dy}{dx} + 6y = 0 \quad \cdots ④$$

(九州大 2022)　　(m20224701)

0.1426 互いに異なる正の定数 a, b, c を考える．空間内の点 $O(0,0,0)$, $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ $C(0,0,c)$ を頂点とする 4 面体を V とする．また V 内部にある点を $P(x,y,z)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 A, B, C, P を頂点とする 4 面体を V_1, 点 O, B, C, P を頂点とする 4 面体を V_2, 点 O, C, A, P を頂点とする 4 面体を V_3, 点 O, A, B, P を頂点とする 4 面体を V_4 とする．4 面体 V_1, V_2, V_3, V_4 の体積比 $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$ を a, b, c, x, y, z を用いて表せ．ただし，λ_j $(j = 1,2,3,4)$ は $0 \leq \lambda_j \leq 1$ および $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$ を満たす実数とする．

(2) 関数 $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(x,y,z)$, $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(x,y,z)$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{\phi} = \lambda_1 \nabla \lambda_2 - \lambda_2 \nabla \lambda_1 \qquad \boldsymbol{\psi} = \lambda_2 \nabla \lambda_3 - \lambda_3 \nabla \lambda_2$$

で定める．関数 $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(x,y,z)$, $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(x,y,z)$ を，a, b, c, x, y, z を用いて表せ．

(3) 関数 $f = f(x,y,z)$ を $f(x,y,z) = e^{x+y+z}\sin(x-z)\boldsymbol{\phi}(x,y,z) + x^2\sin(-x+y)\psi(x,y,z)$ で定める．このとき，積分

$$\int_{\ell_{AB}} f \cdot d\boldsymbol{r}$$

を求めよ．ただし，ℓ_{AB} は点 A から B に進む方向を正とする線分，$\boldsymbol{r}$ は線分 ℓ_{AB} 上にある点の位置ベクトルである．

(4) 関数 f を前問で定めた関数とする．このとき，積分

$$\int_S (\nabla \times f) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

を求めよ．ただし，S は点 O, B, A を頂点とする 3 角形，$\boldsymbol{n}$ は z 成分が負となる S の単位法線である．

(九州大 2022)　　(m20224702)

0.1427 n を正の整数として以下のように $f(x)$ と G_n を定義する．

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$G_n = \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+e^x} dx & for \ \ n=1 \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^{n-1}}{1+\exp(x^n)} dx & for \ \ n=2,3,4,\cdots \end{cases}$$

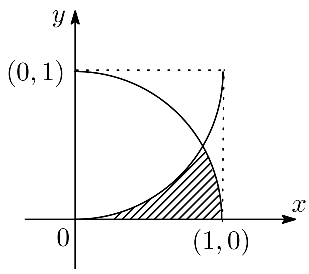
(1) $f(x)$ の不定積分 $F(x)$ を求めよ．ただし積分定数を C とせよ．

(2) 定積分 G_1 の値および定積分 G_2 の値を求めよ．

(3) 一般の正の整数 n について，定積分 G_n を求めよ．

(九州大 2022)　　(m20224706)

0.1428 第 1 象限において，円 $x^2+y^2=1$, $x^2+(y-1)^2=1$ および x 軸で囲まれる部分を A とする（図の斜線部）．



(1) 2 つの円の第 1 象限内の交点を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int x \cdot e^{2x} dx$ を求めよ．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_A x^3 \cdot e^{x^2+y^2} dxdy$ を求めよ．

(九州大 2022)　　(m20224707)

0.1429 x の関数 $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{|\,t-x\,|}\,dt$ について，次の問に答えよ．

(1) $f(x)$ の微分 $f'(x)$ を求めよ．

(2) $-1 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大・最小値を求めよ．

(九州芸術工科大 1999)　　(m19994802)

0.1430 次の問に答えよ．ただし，log は自然対数を表す．自然対数の底は $e=2.718\cdots$ である．

(1) 次の積分（広義積分）の値を求めよ．

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon>0,\ \varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

(2) 極限値に関する次の二つの等式が成り立つことを証明せよ．

$$\lim_{x>0,\ x\to 0} x\log x = 0 \quad , \qquad \lim_{x>0,\ x\to 0} x^x = 1$$

(3) 閉区間 $[0,1]$ 上の関数 f,g を次のように定義する．

$$0<x\leq 1 \text{ のとき } f(x)=x\log x, \quad g(x)=x^x, \quad f(0)=0, \quad g(0)=1$$

このとき，f,g の各々について，$[0,1]$ における最大値と最小値を求めよ．

(4) 次の積分（広義積分）は有限値に収束するか，それとも無限大に発散するか，いずれであるか判定せよ．その理由も示せ．

$$\int_0^1 \frac{x^x}{\sqrt{x}} dx$$

（九州芸術工科大 2000 ）　　(m20004802)

0.1431 以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2} |2-x-x^2|dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int x\log x dx$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$ を証明せよ．

(4) $\displaystyle F(x)=\int_a^{-x^2} f(t)dt$ のとき，$F'(x)$ を求めよ．

（九州芸術工科大 2000） (m20004803)

0.1432 (1) $x^n\log x$ を積分せよ．ただし，log は自然対数．

(2) $\displaystyle I_1=\int e^{ax}\sin bx dx,\quad I_2=\int e^{ax}\cos bx dx$ を求めよ．

(3) 次を証明せよ． $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

（九州芸術工科大 2001） (m20014803)

0.1433 (1) 次の関数 $F(x)$ を x で微分せよ． $\displaystyle F(x)=\int_a^x (x-t)^2 f(t)dt$

(2) 次を求めよ． $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+3x+2}dx$

(九州芸術工科大 2003) (m20034802)

0.1434 積分 $\displaystyle\int_0^1 \log x dx$ は広義積分である. これを計算せよ.

(九州芸術工科大 2005) (m20054802)

0.1435 (1) $\displaystyle F(x)=\int_a^x (x-t)^2 f(t)dt$ のとき $\dfrac{dF}{dx}$ を求めよ.

(2) $\sin(\pi-x)=\sin x$ を利用して
$\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$ を証明せよ.

(九州芸術工科大 2005) (m20054807)

0.1436 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-4x^2}$ (2) $\displaystyle\int e^x \sin 2x dx$ (3) $\displaystyle\int \sin^2 x dx$

（佐賀大 1999） (m19994903)

0.1437 以下の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \sin(3x+3)dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+3}dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{dx}{4+x^2}$

(4) $\displaystyle\int x\log x dx$ (5) $\displaystyle\int e^x \sin 2x dx$

（佐賀大 2000） (m20004904)

0.1438 以下の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \sin(2x+1)dx$ (2) $\displaystyle\int e^{2x}\sin(3x)dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$

(4) $\displaystyle\iint e^{(3x+2)}dxdx$ (5) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$ (6) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$

（佐賀大 2001） (m20014903)

0.1439 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x\log x dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx$

(佐賀大 2003)　(m20034908)

0.1440 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x^2}dx$ が収束することを示せ.

(佐賀大 2003)　(m20034911)

0.1441 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^3+x}dx$ を計算せよ.

(佐賀大 2003)　(m20034912)

0.1442 置換積分法を用いて，次の定積分を計算せよ．ただし，逆三角関数 $\tan^{-1}x = \mathrm{arctan}x$ について，$(\tan^{-1}x)' = 1/(1+x^2)$ となることに注意する.

(1) $\displaystyle\int_{2/\pi}^{6/\pi} \frac{\cos(1/x)}{x^2}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{1+x^4}dx$

(佐賀大 2003)　(m20034913)

0.1443 次の 2 重積分を求めよ.　$\displaystyle I = \iint_D y\,dxdy$　$D = \{(x,y)\ :\ y^2 \leq x \leq y+2\}$

(佐賀大 2003)　(m20034919)

0.1444 重積分　$\displaystyle\iint_{\{-1\leq x+y\leq 1\ ,\ -1\leq x-y\leq 1\}} (x^2-y^2)e^{-(x+y)}dxdy$　を計算せよ.

(佐賀大 2003)　(m20034920)

0.1445 以下の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int x^4e^{3x}dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$　(3) $\displaystyle\int 2^x dx$　(4) $\displaystyle\int_1^e 4x\log x dx$

(佐賀大 2004)　(m20044908)

0.1446 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x dx$ を計算せよ.

(佐賀大 2004)　(m20044909)

0.1447 次の不定積分を求めなさい．ただし, $\exp(z)$ は $\exp(z) = e^z$ を意味する.

(1) $\displaystyle\int (3x^2+5x+2)dx$

(2) $\displaystyle\int 2/(1-2x)dx$

(3) $\displaystyle\int x\ \exp(-x^2)dx$

(佐賀大 2004)　(m20044910)

0.1448 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$　$\left(\text{ヒント : } \tan\frac{x}{2} = t \text{ とおく}\right)$

(2) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$　$(a>0)$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cos nx\,dx$　(m,n : 0 以上の整数)

(佐賀大 2004)　(m20044911)

0.1449 $\displaystyle I = \int \frac{x}{(x+1)(x+2)}dx$　を求めよ.

(佐賀大 2004)　(m20044912)

0.1450 以下の重積分を計算せよ.

$$\iint_D 3xdxdy \qquad D = \{\ x^2 + y^2 \leq 1\ ,\ x \geq 0\}$$

(佐賀大 2004) (m20044919)

0.1451 $\displaystyle\iint_D (x+y)e^{x-y}dxdy\ , \qquad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x + y \leq 1\ ,\ 0 \leq x - y \leq 1\}$
を計算せよ.

(佐賀大 2004) (m20044920)

0.1452 次の 2 重積分を求めよ.

$$I = \iint_D (px^2 + qy^2)dxdy \qquad D = \{(x, y)\ :\ x^2 + y^2 \leq a^2\} \quad (p, q\ \text{は定数})$$

(佐賀大 2004) (m20044921)

0.1453 次の定積分を求めよ, a は正の定数である.

(1) $\displaystyle\int_1^2 dx\ \log x$ (2) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ax^2}$ (4) $\displaystyle\int_0^{\infty} dx\ \frac{\sin x}{x}$

(佐賀大 2005) (m20054910)

0.1454 次の定積分を求めよ.

$$\iint_D dxdy\ x^2y \qquad D = \{(x, y) \mid x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ x + y \leq 1\}$$

(佐賀大 2005) (m20054911)

0.1455 $\displaystyle\int_0^1 x \log x\, dx$ を計算せよ.

(佐賀大 2005) (m20054914)

0.1456 重積分 $\displaystyle\iint_D y\, dxdy\ , \quad D = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq y + 2\}$ を計算せよ.

(佐賀大 2005) (m20054916)

0.1457 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int (3x^2 + \frac{1}{x})\, dx$ (2) $\displaystyle\int x \cos(x^2 + 1)\, dx$ (3) $\displaystyle\int 10^x\, dx$

(4) $\displaystyle\int \log x\, dx$ (5) $\displaystyle\int x \sin(2x + 1)\, dx$ (6) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + e^x}\, dx$

(佐賀大 2005) (m20054922)

0.1458 次の問に答えよ.

(1) r を中心からの距離, θ を x 軸とのなす角とする. いま曲線が極座標 $r = f(\theta)$ で与えられる場合, 曲線と直線 $\theta = \theta_1$ および $\theta = \theta_2$ とで囲まれる図形の面積 S が次式で与えられることを証明せよ.

$$S = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \{f(\theta)\}^2\, d\theta$$

(2) 曲線 $r = a(1 + \cos\theta)\ ,\ a > 0$ の囲む面積を求めよ. ただし $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ とする.

(3) 極座標 r の直交座標の微分量（変分）について, その二乗和の平方根を考慮することにより $r = a(1 + \cos\theta)\ ,\ a > 0$ の境界線の全長を求めよ. ただし $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ とする.

(佐賀大 2005) (m20054925)

0.1459 (1) 不定積分 $\int \sin^2 x\,dx$ を求めよ.

(2) 定積分 $\int_0^1 xe^x\,dx$ を計算せよ.

(佐賀大 2005) (m20054931)

0.1460 $\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおく. 以下の問に答えよ.

(1) $\dfrac{dx}{dt}$ を求めよ. ただし, 答えは t の関数として表せ.

(2) $\cos x$ を t で表せ.

(3) 変数変換 $\tan\dfrac{x}{2}=t$ を行って, 積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx$ を求めよ.

(4) 曲線 $y=-\log|\cos x|$, $\left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}\right)$ の長さを求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054932)

0.1461 以下の各問に答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$ を計算せよ.

(3) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=-30\sin 4x$ の一般解を求めよ.

(4) $y=2Cx-C^2$ が解となるような微分方程式を作れ. ただし, C は任意の定数とする.

(佐賀大 2005) (m20054933)

0.1462 (1) 不定積分 $\int (\log x)^2 dx$ を求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 (\log x)^2 dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^1 (\log x)^2 dx$ の値を求めよ.

(佐賀大 2006) (m20064901)

0.1463 $f(x), g(x)$ は無限回微分可能な実数値関数で，$g(x)\geq 0$ とする．

$D=\{(x,y)\,;\,0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq g(x)\}$ とするとき，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{d\,g(x)}{dx}\,\frac{d^2f(y)}{dy^2}\,dxdy$$

ただし，$f'(0)=0,\ f(g(1))=3,\ f(g(0))=0$ である．

(佐賀大 2006) (m20064903)

0.1464 次の積分を求めよ． $\displaystyle\int_1^e x\log x\,dx$

(佐賀大 2006) (m20064909)

0.1465 次の積分を求めよ． $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)\,dxdy \qquad (\ D\ :\ x^2+y^2\leq 1\ )$

(佐賀大 2006) (m20064910)

0.1466 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$ を計算せよ.

(佐賀大 2006) (m20064915)

0.1467 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x-y}}\,dxdy$, $D=\{(x,y)\mid 0\leq y<x\leq 1\}$ を計算せよ.

(佐賀大 2006) (m20064918)

0.1468 次の不定積分を求めよ．ただし積分定数は C とする．

(1) $\displaystyle\int (3x+2)\sin x\,dx$ (2) $\displaystyle\int \sin^2 x\,\cos^3 x\,dx$ ($t=\sin x$ と置いて考えよ)

(佐賀大 2006) (m20064937)

0.1469 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy$, $D\ :\ 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4$ を計算せよ．

(佐賀大 2006) (m20064940)

0.1470 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int x^{-3/7}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \cos(3x)\,dx$ (3) $\displaystyle\int \tan x\,dx$

(4) $\displaystyle\int 2x\cdot\log x\,dx$ (5) $\displaystyle\int \frac{1}{1-4x^2}\,dx$

(佐賀大 2007) (m20074903)

0.1471 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x\log x\,dx$ (不定積分．積分定数を C とせよ．)

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3x^2}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$

(4) $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy$ $\Big($ 但し，$D=\big\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq 1,\ x\leqq y\leqq \sqrt{x}\ \big\}\Big)$

(佐賀大 2007) (m20074907)

0.1472 $f(x)=e^{-x}\sin x$ について，次の問いに答えよ．

(1) 定数 $a>0$ に対して，定積分 $I_a=\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$ を部分積分法で求めよ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ を求めよ．

(佐賀大 2007) (m20074911)

0.1473 次の不定積分を求めよ．但し，積分定数は C とする．

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2}$

(佐賀大 2007) (m20074924)

0.1474 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{4x^2+3x-7}{2x^2-5x+3}$ を求めよ．

(2) $y=\log\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$ を微分せよ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int x^2e^{2x}\,dx$ を計算せよ．

(4) 二変数関数 $f(x,y)=x^2-5xy^2+3y^2$ に関して，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．また，点 $(3,2)$ における x 方向，y 方向の偏微分係数を求めよ．

(佐賀大 2007) (m20074926)

0.1475 次の不定積分を行え．

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x-e^{-x}}\,dx$

(佐賀大 2008) (m20084901)

0.1476 $a,\ b$ を実数とし，次の問いに答えよ．

(1) 次の等式を証明せよ．

$$\int_0^{2\pi} f(a\sin x + b\cos x)dx = \int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\,\sin x\right)dx$$

(2) 前問の結果を用いて，次の定積分を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} (a\sin x + b\cos x)^2 dx$$

(佐賀大 2009) (m20094901)

0.1477 $0 < a < b$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 区間 $[a, b]$ で連続な実関数 $f(x),\ g(x)$ について以下の不等式を証明せよ．

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2 \leqq \int_a^b f(x)^2dx \cdot \int_a^b g(x)^2dx$$

(2) 前問の結果を用いて，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\log\frac{b}{a}\right)^2 \leqq \frac{(a-b)^2}{ab}$$

(佐賀大 2009) (m20094902)

0.1478 $x > 0$ で次の定積分で定義された関数 $f(x)$ について，以下の問いに答えよ．

$$f(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

(1) 次の等式を証明せよ．ただし，$x > 1$ とする．

$$f(x) = (x-1)f(x-1)$$

(2) x が自然数 n のとき，次式を示せ．

$$f(n) = (n-1)!$$

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ を示し，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ．

(佐賀大 2009) (m20094903)

0.1479 $f(x) = -\dfrac{2\tan^{-1}x}{x^3}$ とおく．ただし，$\tan^{-1}x$ は $\tan x$ の逆関数である．

(1) $\displaystyle\int f(x)dx = \frac{\tan^{-1}x}{x^2} + \frac{1}{x} + \tan^{-1}x + C$ を示せ．ただし，C は積分定数である．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ を求めよ．

(佐賀大 2009) (m20094907)

0.1480 (1) 導関数の定義 $f'(x) = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ を利用して $\left(\sqrt{2x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ であることを示せ．

(2) $x = 3\sin t$ として $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算せよ．

(佐賀大 2009) (m20094910)

0.1481 次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2(2x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

(佐賀大 2009) (m20094916)

0.1482 不定積分 $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx$ （a, b は定数）を計算せよ.

(佐賀大 2009) (m20094922)

0.1483 $\displaystyle\int_1^2 dy \int_0^{5-\frac{5}{2}y} f(x,y)dx$ の積分領域を示し，積分順序を変更せよ.

(佐賀大 2009) (m20094923)

0.1484 (1) 次の関数を積分しなさい.

(a) $\dfrac{1}{16x^2-9}$

(b) $\dfrac{1}{(5x+7)^5}$

(2) 次の関数を置換積分法で積分しなさい.

$-\tan x$

(3) 次の定積分を求めなさい.

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

(佐賀大 2009) (m20094931)

0.1485 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 x^3\log x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 (2+x)\sqrt{1-x^2}\,dx$

(佐賀大 2010) (m20104903)

0.1486 次の積分を求めよ.

$$\iint_D x\,dxdy \qquad (D : x^2+y^2 \leq 4,\ x+y \geq 2)$$

(佐賀大 2010) (m20104904)

0.1487 積分に関する, 以下の問いに答えよ. ただし, $\sin^{-1}x$ は $\sin x$ の逆関数とする.

(1) $\left(x\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}x\right)' = 2\sqrt{1-x^2}$ を示せ.

(2) $f(x) = x^2\sin^{-1}x$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(3) 不定積分 $\displaystyle\int x\,\sin^{-1}x\,dx$ を求めよ.

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{1/2} x\,\sin^{-1}x\,dx$ を計算せよ.

(佐賀大 2010) (m20104910)

0.1488 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad (a>0)$

(佐賀大 2010)　　(m20104914)

0.1489 次の不定積分を求めよ. ただし積分定数は C とする.

(1) $\displaystyle\int (x+4)\cos x\,dx$

(2) $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx \qquad (t=\sin x$ と置いて考えよ)

(佐賀大 2010)　　(m20104920)

0.1490 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int (x+1/x)\,dx$　(2) $\displaystyle\int \sin x\,dx$　(3) $\displaystyle\int xe^x\,dx$　(4) $\displaystyle\int x\log x\,dx$

(佐賀大 2010)　　(m20104924)

0.1491 次の不定積分または定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \left(2x-\frac{1}{x}\right)^2 dx$　(2) $\displaystyle\int x\sec^2 x dx \quad (\sec^2 x = 1/\cos^2 x)$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{7/2} dx$　(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\cos x)\,dx$

(佐賀大 2011)　　(m20114903)

0.1492 $\displaystyle\int 2x\sin x\,\cos x\,dx$ を求めよ.

(佐賀大 2011)　　(m20114906)

0.1493 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x^2-x-2}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$　ただし, $a>0$ とする.

(佐賀大 2011)　　(m20114907)

0.1494 次の不定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \left(\frac{3x+5}{x^2+4x+3}\right) dx$　(2) $\displaystyle\int \left(x^3e^{-x^2}\right) dx$　(3) $\displaystyle\int (\sin 2x\,\cos 3x)\ dx$

(佐賀大 2011)　　(m20114911)

0.1495 図 1 に示す三角形の面密度が $\rho(x,y)=\dfrac{y}{x+1}$ で与えられるとき, この三角形の質量 M と重心の座標 $(g_x,\,g_y)$ を求めよ. ただし, 重心の座標は, 三角形の領域を S としたとき,

$$g_x=\frac{\displaystyle\iint_S x\rho(x,y)\,dx}{M}, \quad g_y=\frac{\displaystyle\iint_S y\rho(x,y)\,dx}{M}$$ で与えられる.

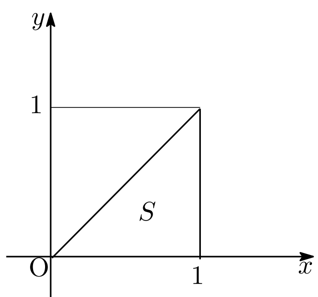


図 1 三角形

(佐賀大 2011)　　(m20114913)

0.1496 (1) $t=\sin^{-1}x$ とおいて，置換積分法で不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{(\sin^{-1}x)^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$ を求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{1}{(\sin^{-1}x)^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$ を求めよ.

(佐賀大 2012) (m20124902)

0.1497 $D=\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq x\}$ のとき，重積分 $\displaystyle\iint_D \log(x+y+1)dxdy$ を求めよ.

(佐賀大 2012) (m20124903)

0.1498 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int\left(x^2+\frac{2}{x}\right)dx$ (2) $\displaystyle\int(\log x)\,dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{x-1}dx$ (4) $\displaystyle\int\frac{1}{(3-x)(3-2x)}dx$

(佐賀大 2012) (m20124908)

0.1499 次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+x^2-1}{x+1}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\sin(\pi x)\,dx$

(佐賀大 2012) (m20124912)

0.1500 次の重積分を計算せよ.

$$\int_0^2\left\{\int_0^4(4-x^2-y)dy\right\}dx$$

(佐賀大 2012) (m20124914)

0.1501 次の 2 重積分を変数変換を用いて求めよ.

$$\iint_{1\leqq x^2+y^2\leqq 4}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^3}$$

(佐賀大 2013) (m20134906)

0.1502 次の定積分を求めよ; ただし，$\sin^{-1}x$ は $\sin x$ の逆関数である．また，(2) は $t=\cos x$ とする置換積分法を用いよ.

(1) $\displaystyle\int_{1/2}^{1}\sin^{-1}x\ dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin}{2-\sin^2 x}\ dx$

(佐賀大 2013) (m20134912)

0.1503 $\displaystyle\int_0^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\frac{dy}{\sqrt{y^3+1}}$ の積分順序を変更して計算せよ.

(佐賀大 2013) (m20134918)

0.1504 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int(3x+1)^{1/3}dx$ (2) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x}dx$ (3) $\displaystyle\int\frac{x^3}{x^4+2}dx$

(4) $\displaystyle\int x^2\sin x dx$ (5) $\displaystyle\int xe^{3x}dx$

(佐賀大 2013) (m20134925)

0.1505 次の不定積分を求めよ．ただし，積分定数は C とする.

(1) $\displaystyle\int e^{ax}dx\quad(a\neq 0)$ (2) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+a^2}dx\quad(a\neq 0)$

(佐賀大 2014) (m20144903)

0.1506　次の $\nu(t)$ で表される正弦波交流

$$\nu(t) = V_m \sin \omega t$$

の実効値 $|V|$

$$|V| = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \nu(t)^2 dt}$$

を求めよ．ここで $\omega T = 2\pi$ とする．

(佐賀大 2014)　　(m20144904)

0.1507　$n \geq 1$ について $I_n = \displaystyle\int_1^e x(\log x)^n dx$ とおく．ただし，$\log x$ は自然対数とする．

(1)　部分積分法で I_1 を求めよ．

(2)　部分積分法で I_{n+1} と I_n の関係式を求めよ．

(3)　I_2，I_3 の値を求めよ．

(佐賀大 2014)　　(m20144914)

0.1508　$D = \left\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\right\}$ のとき，重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{y(e^x - 1)}{x} dxdy$ を求めよ．

(佐賀大 2014)　　(m20144915)

0.1509　$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$　について，以下の積分を計算せよ．ただし，$\lambda > 0,\ x > 0$ である．

(1)　$\displaystyle\int_0^\infty xf(x)dx$　　(2)　$\displaystyle\int_0^\infty x^2 f(x)dx$

(佐賀大 2015)　　(m20154902)

0.1510　次の不定積分を求めなさい．

(1)　$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}$　　(2)　$\displaystyle\int x \log_e x dx$　　(3)　$\displaystyle\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$　　(4)　$\displaystyle\int \sin^3 x dx$

(佐賀大 2015)　　(m20154906)

0.1511　次の関数について答えよ．　　$f(x) = x - 1 - \log x$　　$(x > 0)$

(1)　関数の増減，凹凸，極値などを調べ，グラフの概形を描け．

(2)　極値をとる点の回りでテイラー展開をし，ゼロでない最低次の項を求めよ．

(3)　次の広義の積分を求めよ．　　$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$

(佐賀大 2015)　　(m20154910)

0.1512　次の 2 重積分を 2 つの方法を使って計算せよ．

$$\iint_D ydxdy, \qquad D = \{x^2 + y^2 \leq a^2,\ y \geq o \quad (a > 0)\}$$

(1)　逐次積分（累次積分）を使って計算せよ．

(2)　2 次元極座標に変換して計算せよ．

(佐賀大 2015)　　(m20154914)

0.1513　関数 $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　$f(x) = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{Cx + D}{x^2 + x + 1}$ を満たす係数 A, B, C, D を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を求めよ.

(佐賀大 2015)　　(m20154916)

0.1514 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-3x}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$

(佐賀大 2015)　　(m20154919)

0.1515 次の積分について，問いに答えよ．ただし，log は自然対数である.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^4+x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1}dx$ を求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 x^2 \log x dx$ を求めよ.

(3) $D=\left\{(x,y)\ :\ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$ として，2 重積分 $\displaystyle\iint_D \cos(x+y)dxdy$ を求めよ.

(佐賀大 2016)　　(m20164903)

0.1516 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int (x^5-3x^2+2x)dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$　　(3) $\displaystyle\int \sin^3 x dx$　　(4) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$

(佐賀大 2016)　　(m20164908)

0.1517 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{2x^2-6}{(x-1)^2(x+1)}dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$

(佐賀大 2016)　　(m20164912)

0.1518 次の二重積分について以下の問いに答えよ.

ただし，$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1 \leqq\ x-2y \leqq\ 3,\ 0 \leqq\ x+y \leqq\ 1\right\}$ とする.

$$\iint_D (x-2y)e^{x+y}dxdy$$

(1) 積分領域 D を図示せよ.　　(2) 二重積分を求めよ.

(佐賀大 2016)　　(m20164915)

0.1519 次の積分をせよ．ただし，$\lambda > 0$ である.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}dx$　　(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}dx$

(佐賀大 2016)　　(m20164922)

0.1520 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2+4)}$ を求めよ.　　(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$ を求めよ.

(3) $D=\left\{(x,y)\ :\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2\right\}$ として，2 重積分 $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を求めよ.

(佐賀大 2016)　　(m20164927)

0.1521 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+3x+1}{x^2+1}dx$ (2) $\displaystyle\int \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$

(3) $\displaystyle\int \cos^4 x\,\sin x dx$ (4) $\displaystyle\int xe^{x^2}dx$

(佐賀大 2016) (m20164932)

0.1522 次の定積分の値を求めよ. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(1+\sin^2 x\right)\cos x\,dx$

(佐賀大 2017) (m20174901)

0.1523 次の重積分の値を求めよ.

$\displaystyle\iint_D \frac{1}{2+x^2+y^2}dxdy$ （ただし，D は $1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4$ で表される領域とする．）

(佐賀大 2017) (m20174902)

0.1524 広義積分 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)dx$ について，次の問いに答えよ．ただし，log は自然対数である.

(1) この広義積分が収束することを示せ.

(2) $I=-\dfrac{\pi}{2}\log 2$ であることを示せ.

(佐賀大 2017) (m20174918)

0.1525 xy 平面上の集合 $\left\{(x,y)\mid x^2+y^2<R^2\right\}$ で定義された関数 $f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ について，下記の問いに答えなさい．ただし，定数 R は $R>2$ を満たすとする.

(1) $\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$ を求めなさい.

(2) 集合 D を $D=\left\{(x,y)\mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\right\}$ とし，極座標を利用して，

重積分 $I=\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy$ を求めなさい.

(佐賀大 2018) (m20184903)

0.1526 次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$$

(佐賀大 2018) (m20184910)

0.1527 次の問いに答えよ．ただし，log は自然対数であり，e は自然対数の底である.

(1) 次の不定積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\cos x}$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$

(2) 次の定積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int_1^e x\log x dx$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(佐賀大 2018) (m20184917)

0.1528 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{1+x}{x^2}dx$ (2) $\displaystyle\int e^{-2x+2}dx$ (3) $\displaystyle\int (2x-5)^4dx$ (4) $\displaystyle\int xe^x dx$

(佐賀大 2018) (m20184922)

0.1529 つぎの関係を示せ.

(1) n が正の奇数 $n=1,3,5,\cdots$ のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}$$

(2) n が正の偶数 $n=2,4,6,\cdots$ のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{\pi}{2}\frac{(n-1)!!}{n!!}$$

ここで !! は 1 つ飛ばしの階乗を表す．たとえば $4!!=4\cdot 2=8,\ 5!!=5\cdot 3\cdot 1=15$ である.

(佐賀大 2018) (m20184927)

0.1530 次の重積分を計算せよ.

$$\iint_D x^2 dxdy\ , \qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \frac{x^2}{4}+y^2 \leq 1,\ y \geq 0\right\}$$

(佐賀大 2021) (m20214902)

0.1531 次の積分をせよ.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \sin 2x e^{-x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty \cos 2x e^{-x}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^1 x(x^2+1)^5\,dx$

(佐賀大 2021) (m20214912)

0.1532 次の積分を求めよ．ただし，log は自然対数であり，e は自然対数の底である.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^{2x}\,dx$

(佐賀大 2021) (m20214916)

0.1533 $D=\{(x,y)\,|\,1 \geq x+y,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ とするとき，$\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ の値を求めよ.

(佐賀大 2021) (m20214918)

0.1534 重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)^2\,dxdy$ $\quad D=\{(x,y)\ |\ x^2+y^2 \leq 4\}$ について $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ として計算せよ.

(佐賀大 2021) (m20214926)

0.1535 つぎの積分をせよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \log(x^2+1)\,dx$

(佐賀大 2022) (m20224902)

0.1536 次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_{-2}^2 (3x^3-4x^2+2x-5)\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x}{(1+3x)^3}\,dx$

(佐賀大 2022) (m20224907)

0.1537 次の重積分を計算せよ.

$$\iint_D \left(x+\frac{2}{y}\right) dxdy \qquad (D: 1 \leq x \leq 4,\ 1 \leq y \leq e^2)$$

(佐賀大 2022) (m20224908)

0.1538 $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ を求めよ.

(佐賀大 2022)　　(m20224915)

0.1539 (1) $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 1\}$ とするとき, $\displaystyle\iint_D \frac{2x}{1+y^4}\,dxdy$ を求めよ.

(2) $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ とするとき, $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2+1)\,dxdy$ を求めよ.

(佐賀大 2022)　　(m20224917)

0.1540 次の不定積分を求めなさい. 積分定数を C とする. 必要な計算過程も記すこと.

(1) $\displaystyle\int (\cos x + 3x^3)dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin^2(x)dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-3)(x+2)}dx$　　(4) $\displaystyle\int x^3 \log(x)dx$

(佐賀大 2022)　　(m20224921)

0.1541 重積分 $\displaystyle\iint_D \sin 2x\,dxdy \quad D = \left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leq x+y \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq x-y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ を求めなさい.

<u>答えだけでなく途中経過</u> も記載すること.

(佐賀大 2022)　　(m20224929)

0.1542 次の設問 (1),(2) に答えよ.

(1) 次の不定積分を求めよ.

$$\int e^{2x} \sin 3x dx$$

(2) 次の曲線で囲まれた図形を x 軸に関して回転してできる回転体の体積を求めよ.

$$y = \frac{1}{x+1} \quad , \qquad x \text{ 軸},\quad y \text{ 軸},\quad \text{直線 } x = 2$$

（長崎大 2004）　　(m20045004)

0.1543 行列 A, T を $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ とし, ベクトル $\boldsymbol{s}$ を $\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする. また, t を $t \geq 0$ の実数とし, 指数関数 e^{-3x}, e^{-t} を用いて行列 $E(t)$ を $E(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$ とする. これらの行列やベクトルに関して以下の問いに答えなさい.

(1) $\boldsymbol{x}(t) = TE(t)T^{-1}\boldsymbol{s}$ とする. この $\boldsymbol{x}(t)$ を求めなさい.

(2) $y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t)$ とする. このとき

$$J = \int_0^\infty y(t)^2 dt$$

を求めなさい.

(3) 行列 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とする. また, 未知数 p, q, r を用いて未知の対称行列を $P = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$ とする. この P を

$$PA + A^T P = -Q$$

を満足するように決定し, $W = \boldsymbol{s}^T P \boldsymbol{s}$ を求めなさい. ただし, A^T は行列 A の転置行列を表し, $\boldsymbol{s}^T$ はベクトル $\boldsymbol{s}$ を転置したものを表す.

（長崎大 2004）　　(m20045011)

0.1544 x を $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$ の実数とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ を用いて, 次の公式

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

を導きなさい.

(2) $y = \tan^{-1} x$ に対して, 逆関数の微分の公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)}$$

を用いて, $\dfrac{dy}{dx}$ を x を用いて表しなさい.

(3) n を自然数とし,

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$$

とおく. この I_n に対して, $n=1$ のときの I_1 を求めなさい.

(4) (3) で与えられた I_n を

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = \int 1 \times \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$$

と考え, 部分積分法を用いて

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) I_n$$

が成り立つことを示しなさい.

(5) (3) で与えられた I_n に対して, $n=3$ のときの I_3 を求めなさい.

(長崎大 2005) (m20055001)

0.1545 $a > 0$ の範囲で定義された関数 $f(x) = x + \sqrt{a^2+x^2}$ について以下の問に答えよ.

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(2) $\sqrt{a^2+x^2}$ を $f(x)$ と $f'(x)$ で表せ.

(3) 定積分 $I = \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ を計算せよ.

(4) 定積分 $J = \displaystyle\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2+x^2}dx$ を (3) で求めた I を用いて表せ.

(長崎大 2005) (m20055003)

0.1546 関数 $f(t)$ に関するフーリエ変換を $F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$ で定義するとき, 以下の問に答えよ.

(1) $f(t)$ が実数で偶関数の時 $F(\omega)$ が実数になることを証明せよ.

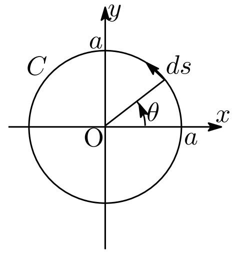
(2) $f(t)$ が $f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad |t| \leq T \\ 0 & , \quad |t| > T \end{cases}$ ただし T は正の実数 で与えられるとき, フーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ.

(3) 上で求めたフーリエ変換 $F(\omega)$ を, 横軸を ω, 縦軸を $|F(\omega)|$ として図示せよ.

(長崎大 2005) (m20055007)

0.1547 ベクトル関数 f が $f = 4y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$ で与えられるとき，
右に示す円 $C\left(x^2 + y^2 = a^2\,,\ z = 0\right)$ 上で次の線積分を行え．
ただし，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ は，それぞれ，
x，y，z 方向の単位ベクトルである．

$$I = \oint_C f \cdot ds$$



(長崎大 2005)　　(m20055008)

0.1548 不定積分 $\int x^2 \log x dx$ を計算せよ．

(長崎大 2005)　　(m20055011)

0.1549 次の定積分を求めよ．

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$$

(長崎大 2005)　　(m20055016)

0.1550 太さを無視できる糸を巻き付けた半径 R の円柱がある．糸を張りながら円柱から外すとき以下の問いに答えよ．

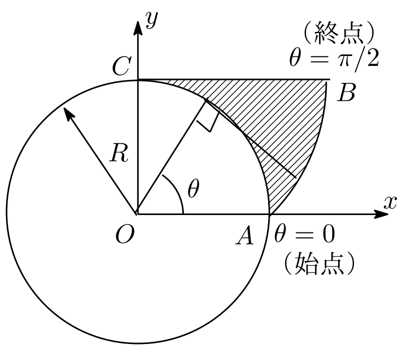
(1) 図のように $\theta = 0$ の位置からはじめて $\theta = \pi/2$ まで糸が外れた．円柱から外れた糸の長さ BC はいくらか．

(2) θ の位置まで糸が外れたとき，糸の先端の x および y 座標を R と θ を用いて表せ．

(3) $\theta = \pi/2$ まで糸を外す間に，糸の先端が描く曲線の長さ AB は次式で計算できる．

$$AB = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

上式を計算して曲線 AB の長さを求めよ．



(4) 図中の斜線部分の面積 $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = R^2\left\{\int_0^{\pi/2}\left(\theta\sin\theta\cos\theta + \theta^2\sin^2\theta\right)d\theta - \frac{\pi}{4}\right\}$$

で与えられる．右辺に含まれる定積分 $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\theta\sin\theta\cos\theta\,d\theta$ の値を求めよ．

(長崎大 2007)　　(m20075002)

0.1551 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\,\sin x\,dx$ を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{x^2}\,dx$ を求めよ．

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy\,,\quad D = \{(x,y)\mid 0 \le x \le y \le 1\}$ を計算せよ．

(4) 平面曲線が $\begin{cases} x = e^t\sin t \\ y = e^t\cos t \end{cases}$ ，$\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$ で与えられるとき，曲線の長さ L を求めよ．

(長崎大 2007)　　(m20075004)

0.1552 次の関数を x について不定積分せよ．

$$I = \int x \log x \, dx$$

(長崎大 2007) (m20075009)

0.1553 (1) 次の不定積分を求めよ． $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$

(2) 次の方程式で囲まれる面積を求めよ．ただし，a, b は定数である． $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

(長崎大 2007) (m20075011)

0.1554 次の値を求めよ．

(1) $I(R) = \displaystyle\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$

(2) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx$ 注：問 (1) の結果を引用してもよい．

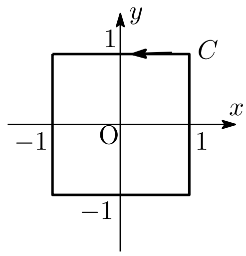
(長崎大 2008) (m20085005)

0.1555 点 (x, y, z) での位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とし，$r = |\boldsymbol{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ とするとき，以下の問いに答えよ．ここで，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は，それぞれ，$x, y.z$ 方向の単位ベクトルを表す．

(1) $\nabla \cdot \left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} \right)$ を計算せよ．

(2) 右図の閉曲線 $C(z = 0)$ に沿って，次の線積分を計算せよ．

$$\oint_C \boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r}$$



(長崎大 2008) (m20085007)

0.1556 $D = \{(x, y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \leqq 1\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2) \, dxdy$ を求めよ．

(長崎大 2008) (m20085009)

0.1557 次式で定義される I_n について，以下の問いに答えよ．

$$I_n = \int_0^n e^{-st} \cos \omega t \, dt$$

ただし，s, ω, n は正の実数である．

(1) I_n を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} I_n$ を求めなさい．

(長崎大 2009) (m20095003)

0.1558 (1) $y = x^3 - 3x$ のグラフを描き，x 軸との交点を示せ．

(2) $y = x^3 - 3x$ の極値の位置と極値を示せ．

(3) 変曲点の位置を示せ．

(4) $f = \displaystyle\int_0^z y dx$ のグラフを，(f, z) 座標に描け．

(5) $y = x^3 - 3x$ の導関数を求めそのグラフを描け

(長崎大 2009) (m20095006)

0.1559 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ を求めよ.

(2) $D=\left\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1\,,\ x^2\leq y\leq 1\right\}$ とするとき，領域 D を図示し，2 重積分 $\displaystyle\iint x\sqrt{y}\,dxdy$ を求めよ.

(3) xy 平面上での曲線が次式で与えられるとき，曲線を図示し，その長さを求めよ.

$$\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\sin t \end{cases} \qquad (0\leq t\leq 2\pi)$$

(長崎大 2009) (m20095008)

0.1560 (1) 不定積分 $\displaystyle\int(1+x)\sqrt{1-x}\,dx$ を求めよ.

(2) $D=\{(x,y)\mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\,,\ x\geq 0\}$ とするとき，領域 D を図示し，次の 2 重積分を求めよ.

$$I=\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$$

(3) xy 平面上での曲線が次式で与えられるとき，その長さを求めよ.

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases} \qquad (0\leq t\leq 2\pi\,,\ a>0)$$

(長崎大 2009) (m20095012)

0.1561 次の定積分を求めよ.

$$\int_2^3 \frac{1}{(2x-9)^3}\,dx \qquad\qquad \int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2}$$

(長崎大 2010) (m20105004)

0.1562 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx$ を求めよ.

(2) 次の 3 つの曲線で囲まれた図形を x 軸に関して回転してできる回転体の体積を求めよ.

$$y=\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,, \qquad x \text{ 軸}\,, \qquad \text{直線 } x=2$$

(長崎大 2010) (m20105013)

0.1563 2 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{3x+2y}\,dxdy\,,\quad D=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1\,,\ 0\leq y\leq 1\}$ を求めよ.

(長崎大 2010) (m20105014)

0.1564 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int\frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx\ \ (a>0)$

(長崎大 2011) (m20115010)

0.1565 次の積分を計算せよ.

$$\iint_D xy(x-y)dxdy\,,\quad D:0\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq 1$$

(長崎大 2011) (m20115011)

0.1566 次の積分を計算せよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx$$

(長崎大 2011) (m20115019)

0.1567 次の積分を求めなさい.

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\ , \qquad (a>0)$$

（大分大 2004） (m20045101)

0.1568 W を荷重, ρ を密度, g を重力の加速度, $A(x)$ を面積とするとき, ある工学の問題において次式を満足する $A(x)$ を求めることが必要になる. 次の問に答えなさい. ただし, W , ρ および g は一定とする.

$$\sigma_0 A(x) = W + \int_0^x \rho g A(t)dt\ ,\ \ A_0 = A(0) > 0\ ,\ \ \sigma_0 = \frac{W}{A(0)}$$

(1) 上式の両辺を x で微分した式を求めなさい.

(2) (1) で得られた式を解いて, $A(x)$ を求めなさい.

(大分大 2004) (m20045103)

0.1569 次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x)dx$$

(大分大 2005) (m20055102)

0.1570 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{x+6}{x^2-3x-4}dx$$

(大分大 2005) (m20055103)

0.1571 次の二重積分を求めなさい.

$$\iint_D xydxdy \qquad \text{ただし,}\quad D\ :\ x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0,\ x^2+y^2 \leqq\ 4$$

(大分大 2005) (m20055104)

0.1572 (1) 次の不定積分を求めよ. $\displaystyle\int x^2 e^{2x}dx$

(2) 次の定積分の値を求めよ. $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{3+2x-x^2}\,dx$

(大分大 2008) (m20085101)

0.1573 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \log x\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

(大分大 2009) (m20095101)

0.1574 次の不定積分を求めよ.

$$\int (2x-3)^{10}dx$$

(大分大 2011) (m20115101)

0.1575 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ (1) $\displaystyle\int \sqrt{1-4x^2}\,dx$

(大分大 2011) (m20115104)

0.1576 次の不定積分を求めよ.

$$\int \sin(2x+1)dx$$

(大分大 2012) (m20125101)

0.1577 次の不定積分を求めよ．

$$\int e^{2x}dx$$

(大分大 2012)　(m20125104)

0.1578 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x(x+1)}dx$　(2) $\displaystyle\int \sin^2 x dx$　(3) $\displaystyle\int xe^{2x}dx$

(大分大 2014)　(m20145103)

0.1579 $\displaystyle\int_0^1 \sin^{-1} x dx$ の値を求めよ．

（熊本大 2001）　(m20015203)

0.1580 $\displaystyle\iint_D \frac{1+x-y}{1+x+y}dxdy$ の値を求めよ．$D=\{(x,y)\,|\,0\leqq x+y\leqq 1,\ 0\leqq x-y\leqq 1\}$

（熊本大 2001）　(m20015204)

0.1581 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{2r}{\sqrt{1-r^2}}dr$ を求めよ．

(熊本大 2006)　(m20065202)

0.1582 xy 平面上の集合 $D=\left\{(x,y)\;\middle|\; x^2+\dfrac{y^2}{4}\leq 1\right\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-\dfrac{y^2}{4}}}dxdy$ を求めよ．

(熊本大 2006)　(m20065203)

0.1583 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x^2+y^2\leqq a^2\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy$ を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

(熊本大 2007)　(m20075202)

0.1584 ガンマ関数は，$\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx \quad (s>0)$ で定義される．次の問いに答えなさい．

(1) 部分積分法を用いて，$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ が成り立つことを示しなさい．

(2) $\Gamma(n+1)=n!$ となることを示しなさい．ただし，n は負でない整数である．

(熊本大 2008)　(m20085202)

0.1585 関数 $y=e^{-3x}$ において, 次の問いに答えなさい.

(1) この関数のグラフを描きなさい.

(2) グラフ曲線上の任意の点 A より x 軸に下ろした垂線の足を B とし, 点 A における接線と x 軸との交点を C とするとき, 線分 BC の長さを求めなさい.

(3) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-3x}\,dx$ と $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-3x}\,dx$ を求めなさい.

(熊本大 2010)　(m20105203)

0.1586 関数 $f(x)=e^{-x}\sin x \quad (x\geqq 0)$ において，次の問に答えなさい．

(1) a と b を実数とし，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ を求めなさい．

(2) n を自然数とし，区間 $(n-1)\pi\leqq x\leqq n\pi$ において，曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めなさい．

(3) $f(x)$ の極大値を与える x を小さい順に $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$ とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ の値を求めなさい．

(熊本大 2011)　　(m20115202)

0.1587 次の重積分の値を求めるために，以下の小問 (1) と (2) について答えなさい．

$$\iint_{4\leq x^2+y^2\leq 9} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \qquad ①$$

(1) 変数 x, y を $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ のように変数 $r,\ \theta$ を用いて変数変換をする，この変数変換のヤコビアン $J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$ を求めなさい．

(2) 変数 $r,\ \theta$ とヤコビアン J を用いて，式 ① の重積分の値を求めなさい．

(熊本大 2014)　　(m20145203)

0.1588 $S = \displaystyle\int_0^{\pi} (x - a\cos x - b)^2 dx$ とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $A = \displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x dx,\ \ B = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx$ をそれぞれ求めなさい．

(2) S を最小とする a と b を求めなさい．

(熊本大 2015)　　(m20155202)

0.1589 (1) t の有理関数 $\dfrac{1}{(t+1)(t+5)}$ を部分分数に分解しなさい．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)(e^x+5)}dx$ の値を計算しなさい．

(熊本大 2016)　　(m20165202)

0.1590 以下の積分を計算せよ．ただし，領域 D は図 4 に示す通りである．

$$I = \iint_D xydxdy$$

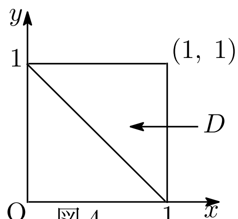


図 4

(熊本大 2018)　　(m20185202)

0.1591 次の積分について，以下の問に答えなさい．

$$I = \iiint_D \frac{xz}{(y+z)(x+y+z)^4}\,dxdydz$$

$$D\ :\ a \leq x+y+z \leq b,\ 0 \leq x, y, z \quad (0 < a < b)$$

(1) $t = x+y+z,\ u = y+z,\ z = z$ と変換した場合のヤコビアン

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,u,z)} \qquad \left(= \frac{\partial(x,y)}{\partial(t,u)}\right)$$

を求めなさい．

(2) D の範囲の概略を $x,\ y,\ z$ からなる直交座標に $a,\ b$ を用いて図示しなさい．

(3) I を $a,\ b$ を用いて求めなさい.

(熊本大 2021) (m20215202)

0.1592 $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}dx$ の一般解を求めよ.

(熊本大 2022) (m20225201)

0.1593 重積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{x}{(x^2+y)^2}dxdy$ に対して，次の各問に答えよ．
ただし，$D = \{(x,y)|\max(1,x^2) \leqq\ y \leqq\ 4, x \geqq\ 0\}$ とする．

(1) D を図示せよ． (2) I の値を求めよ．

(宮崎大 2001) (m20015303)

0.1594 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}$, $D\ :\ 1 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 2$ の値を，次の指示に従って求めよ.

(1) 積分領域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) (x,y) を極座標 (r,θ) で表し，積分領域 D に対する (r,θ) の範囲を求めよ.

(3) ヤコビアン $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|$ を求めよ.

(4) (3) で求めたヤコビアンを用いて，重積分の値を求めよ.

(宮崎大 2004) (m20045303)

0.1595 以下の各問に答えよ.

(1) 平面内の集合 D を

$$D = \left\{(x,y)\ \middle|\ 1 \leq x \leq e,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}$$

と定義する. 集合 D を xy 座標平面上に図示せよ. ただし，e は自然対数の底である.

(2) (1) の集合 D 上で次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D xydxdy$$

(宮崎大 2005) (m20055304)

0.1596 平面内の集合 D を $D = \{(x,y)\mid x-1 \leqq\ y \leqq\ x+1,\ -1 \leqq\ x \leqq\ 1\}$ と定義する．

(1) D を xy 座標平面上に図示せよ． (2) 次の重積分の値を求めよ． $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy$

(宮崎大 2006) (m20065304)

0.1597 (1) 平面内の集合 D を， $D = \{(x,y)\mid 0 \leqq\ y \leqq\ 1,\ y^2 \leqq\ x \leqq\ y\}$ と定義する.
集合 D を座標平面上に図示せよ.

(2) (1) の集合 D 上での次の重積分の値を求めよ. $\displaystyle\iint_D \sqrt{xy}\,dxdy$

(宮崎大 2007) (m20075304)

0.1598 (1) 平面内の領域 $D = \left\{(x,y)\ \middle|\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqq\ 1,\ x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0\right\}$
を xy 平面上に図示せよ．ただし，a,b は正の定数とする.

(2) $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta\ \ (r \geqq\ 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ と変換したとき，領域 D に対応する $r\theta$ 平面上の領域 E を不等式で表し，またそれを図示せよ.

(3) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ.

(4) (3) で求めたヤコビアンを用いて，重積分 $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ の値を求めよ.

(宮崎大 2008)　　(m20085303)

0.1599 重積分

$$I=\iint_D(1+xy)dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid y^2\leqq\ x\leqq\ 2y\}$$

について，次の各問に答えよ.

(1) 集合 D を xy 座標平面上に図示せよ.

(2) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2009)　　(m20095304)

0.1600 xy 平面上で $x=2,\ y=1,\ y=x^2$ によって囲まれた領域を D とするとき, 次の各問に答えよ.

(1) 領域 D を xy 座標平面上に図示せよ.

(2) 重積分 $I=\displaystyle\iint_D(x+y)\,dxdy$ の値を求めよ.

(宮崎大 2010)　　(m20105304)

0.1601 重積分

$$I=\iint_D\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqq\ 1\}$$

について，次の各問いに答えよ.

(1) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とおいたときのヤコビアン $\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}$ を求めよ.

(2) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2011)　　(m20115304)

0.1602 次の 2 重積分 I の値を求めよ.

$$I=\iint_D(x^3+y^3)dxdy,\quad ただし,\ D=\left\{(x,y)\,\middle|\,-1\leqq\ x\leqq\ 1\ ,\ -1\leqq\ y\leqq\ 1\right\}$$

(宮崎大 2012)　　(m20125302)

0.1603 重積分

$$I=\iint_D(x+y^2)dxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ y\geqq\ x^2,\ x-y\geqq\ 0\right\}$$

について，次の各問に答えよ.

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2013)　　(m20135303)

0.1604 重積分

$$I=\iint_D\frac{1}{x^2+y^2}dxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\mid 1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 4,\ y\geqq\ x\right\}$$

について，次の問いに答えよ.

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2014) (m20145302)

0.1605 重積分

$$I=\iint_D xy\,dxdy\,,\quad D=\left\{(x,y)\,|\,x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0,\ x^2+\frac{y^2}{4}\leqq\ 1\right\}$$

について，次の各問に答えよ.

(1) 値域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2015) (m20155304)

0.1606 $y=y(x)$ に関する微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+3y}{3x-y}\qquad\cdots\cdots(*)$$

について，次の各問に答えよ.

(1) $y=xu$ とおいて，$(*)$ を $u=u(x)$ についての微分方程式に書き直せ.

(2) $(*)$ の一般解を求めよ．ただし，$\displaystyle\int\frac{1}{1+u^2}du=\tan^{-1}u+C$ （C は積分定数）を用いてもよい.

(宮崎大 2015) (m20155305)

0.1607 重積分

$$I=\iint_D\sin\frac{2x+y}{9}dxdy\,,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq\ y\leqq\ x,\ x+\frac{y}{2}\leqq\ 3\pi\right\}$$

について，次の各問に答えよ.

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) 等式 $I=\displaystyle\int_{\boxed{ア}}^{\boxed{イ}}\left(\int_{\boxed{ウ}}^{\boxed{エ}}\sin\frac{2x+y}{9}dx\right)dy$ の空欄 $\boxed{ア}$〜$\boxed{エ}$ に当てはまる数値あるいは数式を答えよ.

(3) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2016) (m20165305)

0.1608 重積分

$$I=\iint_D xdxdy\,,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \frac{1}{4}x^2\leqq y\leqq\frac{1}{2}x\right\}$$

について，次の各問に答えよ.

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2017) (m20175305)

0.1609 座標空間において，原点を中心とした半径 a の球 B の体積 V を，以下の手順で求める.

球 B を xy 平面で切ったときの断面のうち，$x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$ を満たす部分を D と表す.

また，球 B の表面（球面）のうち $z\geqq 0$ を満たす部分を表す方程式を $z=f(x,\ y)$ とする.

さらに，D を xy 平面内の領域とみなし，重積分 $I=\displaystyle\iint_D f(x,\ y)dxdy$ を考える.

このとき，次の各問に答えよ.

(1) 方程式 $z = f(x,\ y)$ を具体的に書き下せ.

(2) 領域 D を xy 平面に図示せよ.

(3) 領域 D を極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて表すと, I は

$$I = \int_{\boxed{\text{ア}}}^{\boxed{\text{イ}}} \left(\int_{\boxed{\text{ウ}}}^{\boxed{\text{エ}}} \boxed{\quad\text{オ}\quad}\, d\theta \right) dr$$

と書き直せる. 空欄 $\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{オ}}$ に当てはまる数または式を答えよ.

(4) I を計算することによって, $V = \dfrac{4}{3}\pi a^3$ であることを示せ.

(宮崎大 2018)　　(m20185305)

0.1610　重積分

$$I = \iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy, \qquad D = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 2\right\}$$

について, 次の各問に答えよ.

(1) 領域 D を, xy 平面上に図示せよ.

(2) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2020)　　(m20205304)

0.1611　2 変数関数 $f(x,y) = \sqrt{x}\,y^2$ について, 次の各問に答えよ.

(1) 2 階までの偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, $f_{xx}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$ をすべて求めよ.

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\ dxdy, \qquad D = \left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2x\right\}$ の値を求めよ.

(宮崎大 2021)　　(m20215303)

0.1612　重積分 $I = \displaystyle\iint_D e^{x^2} dxdy, \quad D = \left\{(x,y)\ \middle|\ y \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\right\}$ の値を求めよ.

(宮崎大 2022)　　(m20225303)

0.1613　置換積分法を用いて, 次の不定積分を求めよ. ただし, $a \neq 0$

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$　　($x = a\sin\theta$とおく)　　(2) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}dx$　　($x = a\sin\theta$とおく)

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}dx$　　($t = \tan\dfrac{x}{2}$とおく)

（鹿児島大 2001）　　(m20015407)

0.1614　定積分 $\displaystyle\int_0^2 |e^x - e|dx$ を求めよ.

（鹿児島大 2001）　　(m20015409)

0.1615　積分 $\displaystyle\int t^2 \cos t dt$ を求めよ.

（鹿児島大 2001）　　(m20015410)

0.1616　$\tan\dfrac{x}{2} = t$ と置くとき, 積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx$ を求めよ.

（鹿児島大 2001）　　(m20015411)

0.1617　次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int (ax+b)^n dx \quad (n \neq -1)$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} \quad (a \neq b)$

(3) $\displaystyle\int \sin^2 dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2}$

(鹿児島大 2005) (m20055401)

0.1618 次の微分, 積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\frac{\log x}{\sqrt{x^2+2}}\right)$

(2) $\displaystyle\frac{d^2}{dx^2}\left(\sin^3 x\right)$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x^4-2\sin x\right)dx$

(4) $\displaystyle\int xe^{-x}dx$

(鹿児島大 2005) (m20055405)

0.1619 次の定積分を実施しなさい.

(1) $\displaystyle\int_0^1\left(4x^3-6x^2+1\right)dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{x+1}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2 x\ dx$

(鹿児島大 2005) (m20055410)

0.1620 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int xe^x dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{(x+c)dx}{(x+a)(x+b)} \quad (a \neq b)$ (3) $\displaystyle\int \frac{1-\cos 2x}{2}\cos x dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (-a < x < a,\ a > 0)$

(鹿児島大 2006) (m20065401)

0.1621 次の関数を積分せよ.

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x(1+x)}$

(鹿児島大 2006) (m20065412)

0.1622 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2 x dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x dx$

(鹿児島大 2006) (m20065414)

0.1623 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int xe^{-2x}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{(x+1)}{x^2+2x+3}dx$ (3) $\displaystyle\int \sin x\cos x\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} \quad (a > 0)$

(鹿児島大 2007) (m20075401)

0.1624 次の関数を積分せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{3(x+2)^3}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin^2(\theta)\,d\theta$

(鹿児島大 2007)　(m20075410)

0.1625 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4x^2+6x+3}$ を求めよ.　(鹿児島大 2007)　(m20075414)

0.1626 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x^2 e^x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+3}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$　$(a>0,\ -a<x<a)$

(鹿児島大 2008)　(m20085401)

0.1627 次の微分・積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\log\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|\right)$　　(2) $\displaystyle\int e^x \cdot \sin x\,dx$

(鹿児島大 2008)　(m20085405)

0.1628 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle I = \int_0^1 xe^x\,dx$　　(2) $\displaystyle I = \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

(鹿児島大 2008)　(m20085410)

0.1629 (1) $\displaystyle\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)$ を x で微分せよ.　(2) x^x を x で微分せよ.

(3) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2-x-2}\,dx$ を求めよ.　(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$ を求めよ.

(鹿児島大 2008)　(m20085414)

0.1630 微積分に関する以下の問に答えよ.

(1) 次の微分を計算し，簡単な式で表せ.

(a) $\displaystyle\frac{d}{dx}\sin(\tan(x))$　　(b) $\displaystyle\frac{d}{dx}(\sin 2x \cdot \tan 2x)$

(2) 次の不定積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2-x-3}\,dx$　　(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1}$

(鹿児島大 2009)　(m20095401)

0.1631 次の微分・積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\tan\frac{1}{x}\right)$　　(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx$

(鹿児島大 2009)　(m20095405)

0.1632 (1) x^x を x で微分せよ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2-x-2}\,dx$ を求めよ.

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$ を求めよ.

(鹿児島大 2009)　(m20095410)

0.1633 (1) $\displaystyle\int (2x^2 - 1/x)^2 dx$ を求めなさい.

(2) $\displaystyle\int \cos^3 x dx$ を求めなさい.

(3) 楕円（長軸 a, 短軸 b, $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$）の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2009) (m20095412)

0.1634 微積分に関する以下の問に答えよ.

(1) 次の微分を計算し，簡単な式で表せ.

(a) $\dfrac{d}{dx}\sin(\tan x)$ (b) $\dfrac{d}{dx}\left(\log 2x \cdot \tan x^2\right)$

(2) 次の不定積分を求めよ．ただし，a, b は任意定数とする.

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + (a-b)x - ab}\, dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$

(鹿児島大 2009) (m20095413)

0.1635 次の微分・定積分を求めなさい.

(1) $\dfrac{d}{dx}(\log|\cos x|)$ (2) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x} dx$

(鹿児島大 2009) (m20095417)

0.1636 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x^2 e^x dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2+5x+6} dx$

(鹿児島大 2010) (m20105402)

0.1637 次の定積分を求めなさい.

$$\int_0^{\pi} x\sin x\, dx$$

(鹿児島大 2010) (m20105407)

0.1638 以下の問に答えよ.

(1) x の関数 $f(x)$, $g(x)$ について，以下の部分積分法の公式

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

が成り立つことを示せ.

(2) 上記の公式を利用して，不定積分 $\displaystyle\int \log x\, dx$ を求めよ.

(3) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とする．このとき，$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$ であることを示せ.

(4) 前問の結果を利用して，不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$ を求めよ.

(鹿児島大 2011) (m20115401)

0.1639 次の不定積分を求めなさい.

$$\int x(x-2)^9 dx$$

(鹿児島大 2011) (m20115410)

0.1640 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x\cos x\, dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+1}\, dx$

(鹿児島大 2012) (m20125402)

0.1641 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^2-2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$

(鹿児島大 2012)　(m20125407)

0.1642 次の不定積分を求めなさい.

$$\int x^2 \cos x\,dx$$

(鹿児島大 2012)　(m20125412)

0.1643 次の定積分を求めなさい.

$$\int_0^2 \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}\,dx$$

(鹿児島大 2012)　(m20125417)

0.1644 以下の問いに答えなさい.

(1) 関数 $y=\cos x \quad (-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2)$ と x 軸で囲まれた面積を求めなさい.

(2) t の関数 $F(t)=\displaystyle\int_0^{10} z(x)\cos(t-x)dx$ の最大値が $\sqrt{\left\{\displaystyle\int_0^{10} z(x)\cos x dx\right\}^2+\left\{\displaystyle\int_0^{10} z(x)\sin x dx\right\}^2}$ となることを示しなさい．ただし，$z(x)$ は，x に関する任意の関数である.

(鹿児島大 2012)　(m20125422)

0.1645 以下の問題に答えなさい.

(1) 加法定理 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ を用いて $\cos^2 t=\dfrac{1+\cos 2t}{2}$ が成立することを示しなさい.

(2) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ を，$x=a\sin t$ とおくことにより計算しなさい．ただし，$a>0$ とする.

(鹿児島大 2012)　(m20125426)

0.1646 以下の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2\sin x\,dx$

(鹿児島大 2013)　(m20135402)

0.1647 次の不定積分を求めなさい.

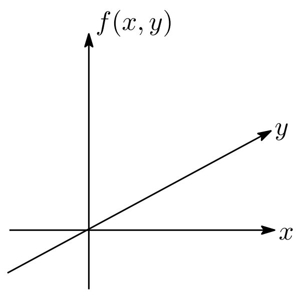
$$\int \frac{1+x+x\sqrt{x}+x^3}{x^2}\,dx$$

(鹿児島大 2013)　(m20135407)

0.1648 以下の重積分 I について，次の問いに答えなさい.

$$I=\iint_D f(x,y)dxdy,\quad D=\{x+y \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\},\quad f(x,y)=x$$

(1) この重積分 I に相当する集合を以下の座標空間上に図示しなさい.



(2)　この重積分 I の値を積分計算により求めなさい.

(鹿児島大 2013)　　(m20135412)

0.1649　以下の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+2}{3x^2+4x+1}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx$

(鹿児島大 2014)　　(m20145407)

0.1650　次の不定積分を求めなさい.

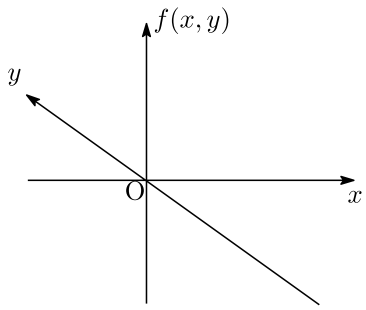
$$\int \frac{1}{x^2-6x+5}dx$$

(鹿児島大 2014)　　(m20145412)

0.1651　以下の重積分 I について，次の問いに答えなさい.

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy\ , \quad D = \left\{x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0\right\}\ , \quad f(x,y) = x$$

(1)　この重積分 I に相当する集合を以下の座標空間上に図示しなさい.



(2)　この重積分 I の値を積分計算により求めなさい.

(鹿児島大 2014)　　(m20145417)

0.1652　以下の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}dx$

(鹿児島大 2015)　　(m20155402)

0.1653　次の不定積分を求めなさい.

$$\int x^2 \log x dx$$

(鹿児島大 2015)　　(m20155407)

0.1654　次の定積分を求めなさい．ただし，$m.n$ は自然数とする.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx$$

(鹿児島大 2015)　　(m20155418)

0.1655　以下の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^\pi e^x \sin x dx$

(鹿児島大 2016)　　(m20165402)

0.1656　次の不定積分を求めなさい.　$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x-21}$

(鹿児島大 2016)　　(m20165407)

0.1657 以下の不定積分，定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ (2) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x dx$

(鹿児島大 2017) (m20175402)

0.1658 次の不定積分を求めなさい． $\displaystyle\int x\sin x dx$

(鹿児島大 2017) (m20175407)

0.1659 次の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x dx$ (2) $\displaystyle\int_1^3 (9x^2+4x)\log x dx$

(鹿児島大 2018) (m20185402)

0.1660 次の不定積分を求めなさい．

$$\int x^2\sqrt{x^3+2}dx$$

(鹿児島大 2018) (m20185407)

0.1661 $\displaystyle\int \log x dx$ $(x>0)$ の不定積分を計算しなさい．

(鹿児島大 2018) (m20185413)

0.1662 次式を満たす $f(x)$ を求めなさい．ただし，$f(x)$ は連続な関数である．

$$f(x)=x\int_1^x f(t)dt+x$$

(鹿児島大 2018) (m20185419)

0.1663 次の定積分を計算しなさい．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{4+x^2}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(5x+4)^3}dx$

(鹿児島大 2018) (m20185421)

0.1664 以下の不定積分を求めなさい．

$$\int x\cos 2x dx$$

(鹿児島大 2018) (m20185426)

0.1665 次の定積分を求めよ．

$$\int_0^1\int_{-2}^4 \left(x^3\cdot\sqrt{3y+1}\right)dxdy$$

(鹿児島大 2018) (m20185433)

0.1666 次式を満たす $f(x)$ を求めなさい．ただし，$f(x)$ は連続な関数である．

$$f(x)=x^2+\int_0^1 \{t\cdot f(t)\}\,dt$$

(鹿児島大 2018) (m20185437)

0.1667 微分可能な関数 $f(x)$ がすべての実数 x に対して次式を満たすとき，$f(x)$ を x の関数として表しなさい．

$$\int_0^x \{2f(t)-1\}\,dt=f(x)-1$$

(鹿児島大 2018) (m20185439)

0.1668 以下の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_1^2 x^3 \log x\,dx$

(鹿児島大 2021) (m20215402)

0.1669 不定積分 $\displaystyle\int x\sin 2x\cos 2x\,dx$ を求めなさい.

(鹿児島大 2021) (m20215407)

0.1670 $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx$ の定積分を求めよ.

(鹿児島大 2021) (m20215414)

0.1671 次の積分を計算せよ.

$$\iint_D (-x+2y)(2x+2y)\,dxdy\,, \qquad D=\left\{\,(x,y)\;\middle|\;1\le x\le 2,\ 2\le y\le 4\,\right\}$$

(鹿児島大 2021) (m20215416)

0.1672 曲線 C : $x=\cos(t)$, $y=\sin(t)$, $z=\sqrt{3}\cdot t$ $(0\le t\le 2\pi)$ のとき，次式を求めなさい.
ただし，s は曲線の長さを表す.

$$\int_C (xy+z)ds$$

(鹿児島大 2021) (m20215420)

0.1673 以下の不定積分，定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \sin x\sin 3x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

(鹿児島大 2022) (m20225402)

0.1674 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x^2+3x+1}{x+2}\,dx$ を求めなさい.

(鹿児島大 2022) (m20225407)

0.1675 次の不定積分を求めよ.

$$\int x\sin x dx$$

(室蘭工業大 2005) (m20055504)

0.1676 以下の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle I=\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx$

(室蘭工業大 2005) (m20055509)

0.1677 次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2e^x+\cos x\right)dx$$

(室蘭工業大 2005) (m20055514)

0.1678 次の不定積分を求めなさい. $\displaystyle\int x(ax^2+1)^n dx$ (ただし，$a\ne 0$，$n\ne -1$)

(室蘭工業大 2006) (m20065506)

0.1679 次の定積分を計算せよ. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^4+1}dx$

(室蘭工業大 2006) (m20065511)

0.1680 以下の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)dx$　　(2) $\displaystyle\int_a^b (x-a)(b-x)dx$

(室蘭工業大 2006)　(m20065514)

0.1681 次の定積分の値 I を求めなさい．　$I=\displaystyle\int_0^t e^x \sin\omega x\,dx \quad (t>0)$

(室蘭工業大 2008)　(m20085505)

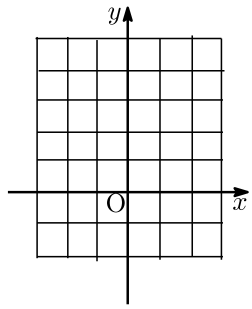
0.1682 (1) $a>0$ のとき，$\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\pi$ を満たす a の値を求めよ．

(2) 関数 $g(x)$ は，関数 $f(x)$ に対して，　$g(x)=f(0)+\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$　，$(m=1,2,3,\cdots)$

と定義される．ここで，$f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の n 階の導関数を表す．$f(x)=e^{2x}$ とするとき，$g(x)$ を，$m=3$ として求めなさい．

(室蘭工業大 2008)　(m20085508)

0.1683 定積分 $\displaystyle\int_0^a |x^2-1|\,dx$, $(a>0)$ を以下の手順で求めよ．



(1) 関数 $f(x)=|x^2-1|$ の，$x=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ における値を求めよ．

$f(-2)=$　　$f(-1)=$　　$f(0)=$　　$f(1)=$　　$f(2)=$

(2) 関数 $f(x)=|x^2-1|$ を $-2\leq x\leq 2$ の範囲で，右のグラフにかけ．
$x=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ の時の $f(x)$ の値がわかるように書く事．

(3) 積分 $\displaystyle\int_0^1 |x^2-1|\,dx$ を求めよ．

(4) $a>1$ のときの定積分の値を求めよ．

(室蘭工業大 2008)　(m20085512)

0.1684 方程式 $f(x)=1+\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ を満たす微分可能な関数 $f(x)$ を，以下の手順で求めよ．

(1) $f(0)$ の値を求めよ．

(2) 上の方程式の両辺を x で微分し，$f(x)$ に関する微分方程式を求めよ．

(3) $A,\ k$ を定数として，x の関数 Ae^{kx} を x で微分せよ．ただし $e=2.718\cdots$ である．

(4) (1), (2), (3) の結果を用い，$f(x)$ を求めよ．

(室蘭工業大 2008)　(m20085513)

0.1685 次の微分，不定積分を計算せよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(xe^{-2x}\right)$

(2) $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x(x^2+12)}{x^4-16}\,dx$

(室蘭工業大 2009)　(m20095501)

0.1686 (1) 次の不定積分を計算せよ．

$$\int 2x\ \ln(x)\,dx$$

(2) 次の定積分を計算せよ．

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{5-x^2}}\,dx$$

(室蘭工業大 2010)　　(m20105506)

0.1687 次の不定積分を計算せよ．

$$\int \frac{1}{x^2-3x-10}\,dx$$

(室蘭工業大 2011)　　(m20115506)

0.1688 置換積分法を用いて，関数 $f(x)=x^3\sqrt{1+x^2}$ の不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めなさい．

(室蘭工業大 2011)　　(m20115513)

0.1689 次の不定積分を求めよ．

$$\int x^2\cos x dx$$

(室蘭工業大 2014)　　(m20145503)

0.1690 不定積分 $I=\displaystyle\int e^{-px}\cos(kx)dx$ を求めよ．ただし，p と k はゼロでない定数とする．

(室蘭工業大 2015)　　(m20155506)

0.1691 以下の不定積分を求めよ．ただし，不定積分では積分定数は省略してよい．

(1) $\displaystyle\int \frac{3x+3}{x^2+x-2}$　　(2) $\displaystyle\int xe^{2x}dx$

(室蘭工業大 2015)　　(m20155511)

0.1692 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x dx$ を計算しなさい．

(室蘭工業大 2016)　　(m20165501)

0.1693 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(2x+1)(x+1)}dx$ を計算しなさい．

(室蘭工業大 2016)　　(m20165505)

0.1694 直交座標系の任意の点 $P(x,y,z)$ において，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を考える．

$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A}=(A_x,\ A_y,\ A_z)=(x,y,z)$ とし，原点を中心として半径 a の球面を閉曲面 S とした時，以下の問いに答えよ．

(1) 閉曲面 S 上の任意の点における法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ $(|\boldsymbol{n}|=1)$ を求めよ．

(2) 閉曲面 S 上全体にわたる面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ．

(3) 閉曲面 S 内全体にわたる体積分 $\displaystyle\iiint \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\,dV=\iiint \bigtriangledown\cdot\boldsymbol{A}\,dV$ を求めよ．

(室蘭工業大 2016)　　(m20165508)

0.1695 以下の不定積分を計算せよ．なお，積分定数は省略してよい．

$$\int \frac{-x^2+2x+1}{x^3-x^2+x-1}dx$$

(室蘭工業大 2016)　　(m20165510)

0.1696 以下の不定積分を計算せよ．なお，積分定数は省略してよい．

$$\int xe^{-jx}dx \qquad (j \text{ は虚数単位を表す})$$

(室蘭工業大 2016)　　(m20165511)

0.1697 $D\ :\ 0 \leqq\ y \leqq\ x \leqq\ 1$ により定義される領域を D として，次の重積分を計算せよ．

$$I = \iint_D \left(2x + 3y^2\right) dxdy$$

(室蘭工業大 2016)　　(m20165515)

0.1698 $\displaystyle\int_0^T e^{i\frac{2\pi mt}{T}} e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}\ dt$ を計算しなさい．
ただし，i は虚数単位，m と n は正の整数，T は正の実数とする．

(室蘭工業大 2017)　　(m20175504)

0.1699 以下の不定積分を計算せよ．なお，積分定数は省略してよい．

(1) $\displaystyle\int e^{-3x} \cos(4x) dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x}+1} dx$

(室蘭工業大 2017)　　(m20175508)

0.1700 直交座標系において，スカラー関数 $f = yz^2$ とベクトル関数 $\boldsymbol{A} = (A_x,\ A_y,\ A_z) = (-y,\ x,\ 1)$ が与えられているとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}$ を求めよ．

(2) $\mathrm{div}(f\boldsymbol{A})$ を求めよ．

(3) 4 点 $P(1,1,0),\ Q(-1,1,0),\ R(-1,-1,0),\ S(1,-1,0)$ を頂点とする四角形の辺に沿って

$P \to Q \to R \to S \to P$ の順に一周する線積分 $\displaystyle\oint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．ただし，$d\boldsymbol{r}$ は線積分における微小線素ベクトルを表す．

(室蘭工業大 2017)　　(m20175509)

0.1701 積分せよ．

$$\iint_D 2ydxdy \quad , \quad D\ :\ 1 \leqq x \leqq 2,\ x \leqq y \leqq 2x^2$$

(室蘭工業大 2017)　　(m20175512)

0.1702 次の不定積分を求めよ．

$$\int (\log x)^2 dx$$

(室蘭工業大 2018)　　(m20185502)

0.1703 次の積分の値を求めよ．

$$I = \iint_D \frac{1-3y^2}{x^2} dydx \qquad D = \{1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq x\}$$

(室蘭工業大 2018)　　(m20185506)

0.1704 積分に関する以下の問いに答えよ．ただし，不定積分では積分定数は省略してよい．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-2x-8} dx$ を計算せよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 4x dx$ を計算せよ．

(室蘭工業大 2018)　　(m20185508)

0.1705 以下の積分の値を求めなさい．ただし，$\mathbb{R}$ はすべての実数の集合とする．

$$\iint_A xy\,dx\,dy, \qquad \text{ただし，} A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2x+y \leq 2\right\}$$

(室蘭工業大 2018)　　(m20185514)

0.1706 つぎの微分，積分を計算せよ．なお，不定積分では積分定数を省略してよい．

(1) $\dfrac{d(e^{-2x^2})}{dx}$　　(2) $\displaystyle\int \frac{2x^2-4}{x^3-2x^2}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

(室蘭工業大 2021)　　(m20215501)

0.1707 直交座標系において，ベクトル関数 $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z) = (2y, -2x, z)$ が与えられているとき，以下の問いに答えよ．ただし，$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ である．

(1) $\nabla(A \cdot A)$　$(= \mathrm{grad}(A \cdot A))$ を求めよ．

(2) $\nabla \cdot (xyzA)$　$(= \mathrm{div}(xyzA))$ を求めよ．

(3) $\nabla \times A$　$(= \mathrm{rot}A)$ を求めよ．

(4) 4 点 $P(1,1,0)$, $Q(-1,1,0)$, $R(-1,-1,0)$, $S(1,-1,0)$ を頂点とする四角形の辺に沿って $P \to Q \to R \to S \to P$ の順に一周する線積分 $\displaystyle\oint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．
ただし，$d\boldsymbol{r}$ は線積分における線素ベクトルを表す．

(室蘭工業大 2021)　　(m20215504)

0.1708 次の不定積分を求めよ．

$$\int x\cos(4x)dx$$

(室蘭工業大 2021)　　(m20215506)

0.1709 次の不定積分を求めよ．

$$\int xe^x dx$$

(室蘭工業大 2022)　　(m20225502)

0.1710 不定積分 $\displaystyle\int x^2 e^{\frac{x}{2}}\,dx$ を計算しなさい．積分定数は省略してよい．

(室蘭工業大 2022)　　(m20225505)

0.1711 つぎの積分を計算せよ．なお，不定積分では積分定数を省略してよい．

(1) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$

(室蘭工業大 2022)　　(m20225509)

0.1712 直角座標系 (x,y,z) において，スカラー関数 $f = x^2 + y^2 + 2z$ が与えられているとき，

以下の問いに答えよ．ただし，$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ である．

(1) ∇f $\left(= \mathrm{grad}(f)\right)$ を求めよ．

(2) $\nabla \cdot (\nabla f)$ $\left(= \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f))\right)$ を求めよ．

(3) $\nabla \times (\nabla f)$ $\left(= \mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f))\right)$ を求めよ．

(4) 点 $A(1,0,0)$ から点 $B(0,1,0)$ に向かう経路 C 上の線積分 $\displaystyle\int_C (\nabla f)\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ.

ただし, $d\boldsymbol{r}$ は線積分における線素ベクトルを表す. また, 経路 C は任意に設定してよい.

(室蘭工業大 2022) (m20225512)

0.1713 次の各問に答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x$ を求めよ.

(2) $f(x)=\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ を微分せよ.

(3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$ を求めよ.

(岡山県立大 2005) (m20055601)

0.1714 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)$ を求めよ. (2) $f(x)=e^{\sin^{-1}x}$ を微分せよ.

(3) $\displaystyle\int \log(1+x^2)dx$ を求めよ.

(岡山県立大 2006) (m20065601)

0.1715 次の累次積分の順序を交換し，その値を求めよ. $\displaystyle\int_0^1 dy\int_y^1 e^{x^2}dx$

(岡山県立大 2006) (m20065604)

0.1716 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を求めよ.

(岡山県立大 2007) (m20075602)

0.1717 変数変換を用いて次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D x^2y^2dxdy \qquad D=\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\leqq\ 1,\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0\}$$

(岡山県立大 2007) (m20075605)

0.1718 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x^2)}{\sin x}$ を求めよ. (2) $f(x)=\log\left|\dfrac{x}{x+1}\right|$ を微分せよ. (3) $\displaystyle\int x\log x\,dx$ を求めよ.

(岡山県立大 2008) (m20085601)

0.1719 次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D e^{x-y}dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\ :\ 0\leqq\ x\leqq\ 1,\ 0\leqq\ y\leqq\ 1\}$$

(岡山県立大 2008) (m20085604)

0.1720 以下の設問に答えよ. なお, 解答には導出過程を含むこと.

領域 $D: |x-2y|\leq 1\,,\ |x+3y|\leq 1$ のとき, 次の手順にしたがって, $\displaystyle\iint_D (x+y)^2dxdy$ を求めよ.

(1) $x-2y=u\,,\ x+3y=v$ とし, $x,\ y$ を, u と v を用いて表せ.

(2) $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_E f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J|dudv$ の関係を用いて, $\displaystyle\iint_D (x+y)^2dxdy$ を求めよ.

(香川大 2005) (m20055701)

0.1721 $I_n = \displaystyle\int (\log x)^n dx \quad (n \geqq 0)$ とする．以下の問に答えよ．ただし，log は自然対数である．

(1) I_0, I_1 および I_2 を計算せよ．

(2) (1) を参考にして，$n \geqq 1$ における I_n と I_{n-1} の関係を類推し，それが正しいことを示せ．

(香川大 2006) (m20065701)

0.1722 以下の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$ (2) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$ (3) $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx$

(香川大 2010) (m20105701)

0.1723 以下の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$ (2) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$ (3) $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx$

(香川大 2011) (m20115701)

0.1724 以下の問いに答えよ．

(1) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ を示せ．

(2) $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ とおくとき，$n > 1$ に対して I_n と I_{n-2} の関係式を求めよ．

(香川大 2012) (m20125701)

0.1725 次の定積分を求めよ．

$$\int_0^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$$

(香川大 2013) (m20135701)

0.1726 次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D xydxdy \qquad D \ :\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq a^2$$

(香川大 2017) (m20175703)

0.1727 以下の重積分を求めよ．

$$\iint_D (2x + 3y + 1)dxdy \qquad D = \{(x, y) \mid 1 \leqq x \leqq 2,\ x \leqq y \leqq 2x\}$$

(香川大 2018) (m20185703)

0.1728 次の 2 重積分を求めよ． $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x}dxdy \quad D : x^2 + y^2 \leqq 4x,\ y \geqq 0$

(香川大 2020) (m20205703)

0.1729 次の積分を求めよ．

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 2}{x^2 + 2x}\,dx$$

(香川大 2021) (m20215703)

0.1730 次の重積分を求めよ．

$$\iint_D (x + y)\ dxdy \qquad D \ :\ x + y - 2 \geqq 0,\ 1 \leqq x \leqq 2,\ y \leqq 4$$

(香川大 2021) (m20215704)

0.1731 関数 $f(x) = (ax+b)e^{cx} \quad (c \neq 0)$ を考える. 以下の問に答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$, 2 階導関数 $f''(x)$, さらに n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を求めよ.

(3) $0 < c < 1$ のとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nc^n = 0$ を証明せよ.

$\left(\text{ヒント : } c = \dfrac{1}{1+\alpha} \quad (\alpha > 0) \quad \text{とおいて } (1+\alpha)^n \text{ の 2 項展開を考えよ.}\right)$

(4) $0 < c < 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(n)}(x)\right)$$

を求めよ.

(島根大 2005) (m20055811)

0.1732 次の問に答えよ.

(1) 原点 O を中心とし, 半径 a の円の上半分を D とする. 次の 2 重積分を求めよ $(a > 0)$.

$$I = \iint_D y\,dxdy$$

(2) 平面 $z = y$ と xy 平面の間で, xy 平面上の半円 $x^2 + y^2 \leq a^2$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ の上にある立体の体積 V を求めよ $(a > 0)$.

(島根大 2005) (m20055813)

0.1733 以下の設問に答えよ.

(1) 次の定積分の値を求めよ.

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$

(2) $n \geqq 3$ の整数 n に対し, $\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$ の関係を用いて, 部分積分を行うことにより, 次の等式が成立することを示せ.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = (n-1)\int_0^{\pi/2} (\sin^{n-2} x - \sin^n x)dx$$

(3) 設問 (1) および (2) の結果を用いて, 次の定積分の値を求めよ.

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$

(島根大 2005) (m20055814)

0.1734 f を微分可能な関数とする. このとき, x の関数 $G(x) = \displaystyle\int_a^x (x-u)\{f'(u) + f(u)\}du$ を微分せよ.

(島根大 2006) (m20065808)

0.1735 次の広義積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$ (2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$

(島根大 2006) (m20065809)

0.1736 (1) 関数 $\dfrac{\log x}{x}$ の不定積分を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_n^{2n} \frac{\log x}{x}dx$ は正の無限大に発散することを示せ.

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}$ が収束するならば，その極限値を求めよ．もし発散するならば，その理由を述べよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ をみたす数列 a_n に対して　$b_n = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n}$　とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ は正しいだろうか ？ 正しければその理由を述べよ．もし正しくなければ反例を一つ与えよ．

(島根大 2007)　　(m20075805)

0.1737 $u = 3x + y,\ v = x - 3y$ と変数変換することにより，2 重積分
$\displaystyle\iint_D x dxdy,\quad D = \{(x, y)\ :\ 0 \leq 3x + y \leq 1,\ -1 \leq x - 3y \leq 0\}$　を求めよ．

(島根大 2007)　　(m20075807)

0.1738 n の関数 $f(n) = \displaystyle\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $f(1)$ の値を求めよ．

(2) $f(n+1) = nf(n)$ を証明せよ．

(3) n が自然数のとき，$f(n+1) = n!$ を証明せよ．

(4) $f(\frac{1}{2}) = 2\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ を証明せよ．

(5) $\dfrac{f(3)f(-\frac{5}{2})}{f(\frac{3}{2})}$ の値を求めよ．なお，$f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ である．

(島根大 2007)　　(m20075808)

0.1739 $u = u(x, t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{\frac{-x^2}{4t}}$ であるとき，$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いて次式　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)dx = 1$
が成り立つことを示せ．ただし，t はパラメータ (> 0) とする．

(島根大 2007)　　(m20075811)

0.1740 一般に，関数 $f(x)$ が周期 2π の周期関数で，区間 $[-\pi, \pi]$ でいくつか（有限個）の点を除いて連続であるとき，次のように三角関数の級数に展開できる．これを $f(x)$ のフーリエ級数という．

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ \ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ \ b_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

周期 2π の周期関数 $f(x)$ が

$f(x) = \begin{cases} -2x & (-\pi \leqq\ x \leqq\ 0) \\ 2x & (0 < x \leqq \pi) \end{cases}$　のとき，$f(x)$ のフーリエ級数を求めよ

(島根大 2007)　　(m20075814)

0.1741 (1) 次の関数の第 3 次導関数を求めよ．　$x^2 \sin x$

(2) 次の級数が収束することを示せ．　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$

(3) 次の積分を求めよ．　$\displaystyle\int_0^1 \sin^{-1} x\, dx$

(島根大 2008)　　(m20085802)

0.1742 次の重積分を求めよ．a は正定数とする．　$\displaystyle\iint_D y\, dxdy$　ただし D は $(x, y)-$ 平面内にある円 $(x - a)^2 + y^2 \leq a^2$ の上半分，すなわち $y > 0$ を満たす部分である．

(島根大 2008)　　(m20085804)

0.1743 次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^3 \int_1^2 \left(2xy - x^2\right)\, dydx$　　　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{2y} y^2 e^{xy}\, dxdy$

(島根大 2008)　　(m20085808)

0.1744 (1) 関数 $f(x) = (x+1)e^{-2x}$ について，$f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ．また，3 以上の整数 n に対して第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $y = x^x$ $(x > 0)$ の極値を求めよ．

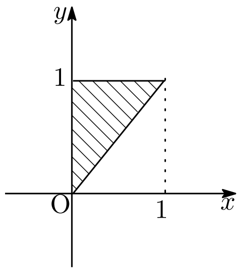
(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x\, dx$ の値を求めよ．

(4) 曲線 $y = x\cos x$ $\left(0 \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2}\right)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ．

(島根大 2009)　　(m20095802)

0.1745 (1) $\displaystyle\int_a^1 xe^{-x^2}\, dx$ を計算せよ．

(2) 図 1 の斜線部で示すような, xy 平面上の領域を D とする. 領域 D における積分 $\displaystyle\iint_D e^{-y^2}\, dxdy$ を計算せよ．



(3) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_0^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2)\, dy \right\} dx$ を計算せよ．

(島根大 2010)　　(m20105813)

0.1746 次の問いに答えよ．ただし，$\mathrm{Arctan}\, x$ は $\tan x$ $(-\pi/2 < x < \pi/2)$ の逆関数とする．

(1) $\mathrm{Arctan}\, x$ の導関数と不定積分を求めよ．

(2) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$I(n) = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx$$

とおくとき，$I(n+1)$ を $I(n)$ を用いて表し，さらに $I(3)$ を計算せよ．

(3) $\displaystyle\int_0^1 x^5 \mathrm{Arctan}\, x\, dx$ を計算せよ．

(4) $\displaystyle\int_0^1 x(\mathrm{Arctan}\, x)^2\, dx$ を計算せよ．

(島根大 2012)　　(m20125807)

0.1747 m, n は自然数とし，

$$I(m,n) = \iint_D (x+y)^{m-1} x^{n-1} y\, dxdy \qquad D = \left\{(x,y) : x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\right\}$$

を定める．次の問いに答えよ．

(1) 次の変数変換を行うことによって，$I(m,n)$ を u と v についての重積分に書き直せ．

$$u = x + y\ , \qquad v = \frac{y}{x}$$

(2) 積分値 $I(m,n)$ を求めよ．

(島根大 2013)　　(m20135803)

0.1748 次の問いに答えよ．

(1) $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\arcsin x)^n \ dx \ (n \geqq \ 0)$ とおく．$t = \arcsin x$ とおいて I_n を t の積分で表わせ．

(2) $n \geqq \ 2$ のとき，I_n と I_{n-2} の関係を求めよ．さらに，I_2 を求めよ．

(島根大 2014)　　(m20145804)

0.1749 次の問いに答えよ．

(1) $0 < r_1 < r_2$ とし，$D_1 = \left\{(x,y) \ : \ {r_1}^2 \leqq \ x^2 + y^2 \leqq \ {r_2}^2\right\}$ と定める．このとき，
積分 $\displaystyle\iint_{D_1} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy$ の値を求めよ．

(2) $0 < r$ とし，$D_2 = \left\{(x,y) \ : \ 0 < x^2 + y^2 \leqq \ r^2\right\}$ と定める．このとき，
広義積分 $\displaystyle\iint_{D_2} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy$ が収束する α の範囲を求めよ．

(島根大 2014)　　(m20145805)

0.1750 $D = \left\{(x,y) : 5x^2 - 6xy + 5y^2 \leq 4, \ y \geq x\right\}$ とする．

(1) 変数変換 $x = u - \dfrac{v}{2}$, $y = u + \dfrac{v}{2}$ を考える．この変換により，D にうつされる (u,v) 平面の領域を求めよ．

(2) $\displaystyle\iint_D \exp\left(\frac{5x^2 - 6xy + 5y^2}{4}\right) dxdy$ の値を求めよ．ただし $\exp(x) = e^x$ である．

(島根大 2015)　　(m20155807)

0.1751 自然数 $n = 1, 2, \cdots$ に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = n^2 x^{n+1} \log x \quad (x > 0)$$

と定める．次の問いに答えよ．

(1) $f_n(x)$ の最小値を求めよ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 f_n(x) dx$ を計算せよ．

(3) $0 < x \leq 1$ を満たす各 x に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．さらに $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とするとき，次の等式が成り立つかどうかを調べよ．

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$$

(島根大 2016)　　(m20165803)

0.1752 (1) $R > 0$ とする．$\Omega(R) = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, \ 0 \leq y \leq x\right\}$ とするとき，
重積分 $\displaystyle\iint_{\Omega(R)} \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2} dxdy$ を計算せよ．

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_0^R \left(\int_0^x \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2} dy\right) dx$ を求めよ．

(3) α を定数とし，$(x,y) \neq (0,0)$ に対して $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\alpha/2}$ と定める．$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(島根大 2016)　　(m20165804)

0.1753 以下の設問に答えよ．ただし，$T\ (T > 0)$ および ϕ は定数である．

(1) 次の定積分を計算せよ． $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right) dt$

(2) 次の定積分を計算せよ． $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^{T} \left[\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t+\phi\right)\right]^2 dt$

(3) 次式が成り立つことを示せ． $\displaystyle\int_0^{T} \sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)\sin\left(\dfrac{4\pi}{T}t\right) dt = 0$

(4) 次の定積分を計算せよ． $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^{T} \left[\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)+3\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]^2 dt$

(島根大 2017) (m20175801)

0.1754 (1) $D = \{(x, y) : 0 < x,\ 0 < y,\ x + y < 1\}$ とする．変数変換 $x = u - uv,\ y = uv$ により，D にうつされる (u, v) 平面の領域を求めよ．

(2) D は問 (1) と同じとする．重積分 $\displaystyle\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dxdy$ を計算せよ．

(島根大 2017) (m20175807)

0.1755 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x - y \leq 1,\ 0 \leq x + y \leq \pi\}$ とするとき，重積分

$$\iint_D (x-y)\cos(x^2-y^2)dxdy$$

の値を求めよ．

(島根大 2018) (m20185808)

0.1756 (1) $f(x)$ は $(-\infty,\ +\infty)$ で定義された連続関数とする．$F(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)dt$ とおくとき，導関数 $F'(x)$ を $f(x)$ を用いて表せ．

(2) $f(x)$ は $(-\infty,\ +\infty)$ で定義された下に凸な連続関数とする．このとき，すべての $x > 0$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$2xf(0) \leqq \int_{-x}^{x} f(t)dt$$

(島根大 2019) (m20195806)

0.1757 $g(x)$ は $0 < \alpha \leqq x \leqq \beta$ で連続であり，

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ \alpha \leqq x + y \leqq \beta\}$$

とする．このとき，

$$\iint_D g(x+y)dxdy = \int_\alpha^\beta xg(x)dx$$

となることを証明せよ．

(島根大 2019) (m20195808)

0.1758 $\mathrm{Sin}^{-1}x\ \ (-1 < x < 1)$ を $\sin x$ の逆関数とし，$f(x) = \sin(2\mathrm{Sin}^{-1}x)$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $y = f(x)$ は次の微分方程式をみたすことを示せ．

$$(1-x^2)y'' - xy' + 4y = 0$$

(2) $y=f(x)$ に対して，$(1-x^2)^2y'''+p(x)y'+q(x)y=0$ が成り立つような x の多項式 $p(x)$, $q(x)$ を 1 組求めよ.

(3) $f(x)$ の増減を調べ，$f(x)$ が最大値をとる x の値と最小値をとる x の値をそれぞれ求めよ.

(4) 次の定積分を計算せよ.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{Sin}^{-1}x\,dx$$

(島根大 2020)　　(m20205806)

0.1759 $f(x,y)=\dfrac{4}{(2+x^2+y)^2}$ とする．次の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の偏導関数を求めよ.

(2) 点 $P(1,-1,1)$ における，曲面 $z=f(x,y)$ の接平面の方程式を求めよ.

(3) $a>0$ に対して，$D(a)=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leq x\leq a\ ,\ 0\leq y\leq x^2\right\}$ とおく.
2 重積分　$I(a)=\displaystyle\iint_{d(a)} f(x,y)\,dxdy$　を計算せよ．さらに $\displaystyle\lim_{a\to\infty} I(a)$ を求めよ.

(島根大 2020)　　(m20205807)

0.1760 関数 $f(x)=x^2\log_e\dfrac{1}{x^2}$ について以下の問に答えよ．ただし，e は自然対数の底である.

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の最大値を求めよ.

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ を求めよ

(首都大 2004)　　(m20045904)

0.1761 次の不定積分を計算せよ.　$\displaystyle\int\frac{1}{x^3-x}\,dx$　(首都大 2008)　　(m20085905)

0.1762 次の二重積分を計算せよ.　$\displaystyle\iint_{\substack{x+y\ \leqq\ 1\\ x,y\ \geqq\ 0}}(x^2+y^2)\,dxdy$　(首都大 2008)　　(m20085906)

0.1763 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int\sin 2x\,\sin 4x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int x^3e^{2x}\,dx$

(首都大 2010)　　(m20105907)

0.1764 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x\log x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx$

(首都大 2011)　　(m20115907)

0.1765 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{\left(\log x\right)^2}{x}\,dx$

(首都大 2012)　　(m20125907)

0.1766 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int\sin^{-1}x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$

(首都大 2013)　　(m20135907)

0.1767 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$ (2) $\displaystyle\int x\left(\log x\right)^2 dx$

(首都大 2014) (m20145907)

0.1768 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int x\log x\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$

(首都大 2015) (m20155908)

0.1769 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int 8x\left(4x^2-1\right)^{10}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$

(首都大 2016) (m20165908)

0.1770 ベクトル場 $\overrightarrow{a}=y\overrightarrow{i}-x\overrightarrow{j}$ と曲線 C： $\overrightarrow{r}=(\cos^2 t)\overrightarrow{i}+(\sin^2 t)\overrightarrow{j}$ $\left(0\leq t\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $d\overrightarrow{r}$ を計算せよ.

(2) 内積 $\overrightarrow{a}\cdot d\overrightarrow{r}$ を計算せよ.

(3) (2) の結果を用いて，C に沿う線積分 $I=\displaystyle\int_C \overrightarrow{a}\cdot d\overrightarrow{r}$ の値を求めよ.

(首都大 2016) (m20165913)

0.1771 無限積分 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{-1}{x(1+x^2)}dx$ を求めなさい.

(首都大 2017) (m20175904)

0.1772 次の不定積分を求めなさい. $f(x)=\displaystyle\int \cos^2 x\ dx$

(首都大 2017) (m20175905)

0.1773 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int x^2e^{2x}dx$ (2) $\displaystyle\int \sin^5 x\ dx$

(首都大 2018) (m20185908)

0.1774 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \log x dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}dx$

(首都大 2019) (m20195907)

0.1775 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}\ dx$ (2) $\displaystyle\int \sqrt{x}\log x\ dx$

(東京都立大 2020) (m20205907)

0.1776 $-\infty<x<\infty$ に対して

$$f(x)=\begin{cases} 1 & 0\leqq x\leqq 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とする．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $-\infty<x<\infty$ に対して，$F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ を求めよ.

(2) $-\infty < x < \infty$ に対して，$g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)f(x-t)dt$ を求めよ．

(3) $-\infty < x < \infty$ に対して，(2) で求めた $g(x)$ を用いて $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)dt$ を求めよ．

(東京都立大 2020)　　(m20205911)

0.1777 0 以上の整数 n に対し，C_n，S_n を

$$C_n = \int_0^{\pi} x^n \cos x dx$$
$$S_n = \int_0^{\pi} x^n \sin x dx$$

のように定義するとき，以下の問いに答えよ．

(1) C_0，S_0 を求めよ．

(2) C_n を S_{n-1} を用いて表せ．

(3) S_n を C_{n-1} を用いて表せ．

(4) 前問 (1)～(3) の答えを用いて S_3 を求めよ．

(東京都立大 2021)　　(m20215904)

0.1778 不定積分

$$I = \int \frac{1}{4\sin x + 3\cos x} dx$$

について　以下の問いに答えよ．

(1) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ として置換し，上記の不定積分を $I = \displaystyle\int g(t)dt$ の形で表せ．

(2) 前問 (1) で得られた式を用いて不定積分 I を求めよ．なお，解は $\tan\dfrac{x}{2}$ を含む式でよい．

(東京都立大 2022)　　(m20225905)

0.1779 (1) $x^2 + y^2 \leqq 2x$ で与えられる平面の領域 D を図示せよ．

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$ の値を求めよ，

(滋賀県立大 2007)　　(m20076004)

0.1780 原点を中心とする半径 R の球を V とする．このとき，$\displaystyle\iiint_V (x^2+y^2)\, dxdydz$ の値を求めよ，

(滋賀県立大 2008)　　(m20086004)

0.1781 原点を中心とする半径 R の円盤の $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の部分を B とする．

このとき，$\displaystyle\iint_B \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$ の値を求めよ．

(滋賀県立大 2009)　　(m20096004)

0.1782 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(x,\, y)$ と点 $(x+dx,\, y+dy)$ の間の無限小長さ ds は

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

によって与えられる. さらに, 曲線に沿って $a \leq x \leq b$ の長さ L_1 は, 次の式で与えられる.

$$L_1 = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

(1) 曲線がパラメータ t によって

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

のように表されるとき、パラメータ $\alpha \leq t \leq \beta$ に対応する曲線の長さ L_2 が

$$L_2 = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

で与えられることを示せ.

(2) 次のパラメータ t によって表される曲線 $C : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \dfrac{1}{3}t^3 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2)$ の長さを求めよ.

(滋賀県立大 2010)　　(m20106001)

0.1783 累次積分 $I = \displaystyle\int_0^a \left\{ \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-y^2}\, dy \right\} dx$ の値を計算したい.

(1) $I = \displaystyle\int\int_D \sqrt{a^2-y^2}\, dx\, dy$ となるような D を不等式で表し図示せよ.

(2) 積分の順序を交換して累次積分 I の値を求めよ.

(滋賀県立大 2010)　　(m20106004)

0.1784 (1) $x^2 + y^2 \leqq 2$ で与えられる平面の領域 D を図示せよ.

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{2-x^2-y^2}\, dxdy$ の値を求めよ.

(滋賀県立大 2011)　　(m20116004)

0.1785 適当な変数変換を用いて, 次の積分の値を求めよ.

$$\iint_D (x+y)e^{x-y} dxdy\ , \quad \text{但し}, \ D : 0 \leqq x-y \leqq x+y \leqq 1$$

(滋賀県立大 2012)　　(m20126004)

0.1786 曲線 $C : y = f(x)$ に沿って $0 \leqq x \leqq a$ の間の長さ $L(C)$ は, 次の式で与えられる.

$$L(C) = \int_0^a \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

特に, 曲線 C を懸垂線またはカテナリーと呼ばれる次の式で表される曲線とする.

$$C : y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

この懸垂線に沿っての $0 \leqq x \leqq a$ の間の長さ $L(C)$ を求めよ.

(滋賀県立大 2013)　　(m20136001)

0.1787 不等式 $x^2 + y^2 \leqq 2x$ で与えられる xy 平面の領域を D とする.

(1) D を図示せよ.

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dxdy$ を求めよ.

(滋賀県立大 2014)　　(m20146004)

0.1788 D を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1$ （$a,\ b$ は正の実数）で与えられる領域とするとき， $x=ar\cos\theta,\ \ y=br\sin\theta$ とおくことにより， $\displaystyle\iint_D x^2dxdy$ を求めよ．

(滋賀県立大 2015)　　(m20156004)

0.1789 $f(x)=\mathrm{Sin}^{-1}x$ について，次を求めよ．ただし，$\mathrm{Sin}^{-1}x$ の値域は $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

(滋賀県立大 2016)　　(m20166001)

0.1790 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2e^{-3x}dx$ を求めよ．

(滋賀県立大 2021)　　(m20216003)

0.1791 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq 2x\right\}$ とするとき，次の二重積分を求めよ．

$$\iint_D x^2dxdy$$

(滋賀県立大 2022)　　(m20226002)

0.1792 以下の問に答えよ．

(1) $x>0$ における次の関数の極値とそのときの x の値を求めよ．

$$f(x)=e^{-ax}-e^{-bx}\qquad\text{ただし，}b>a>0\text{ とする．}$$

(2) 次の定積分の大きさを求めよ。

$$\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta$$

(宇都宮大 2004)　　(m20046103)

0.1793 以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2}\ (a\neq 0)$ を求めよ．

(2) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=y^2-a^2\ (a\neq 0)$ を解きなさい．

(宇都宮大 2004)　　(m20046105)

0.1794 関数 $F_n(x)=x^ne^{-x}$ について，以下の問に答えよ．ただし，$n\geq 2$ とする．

(1) $x\geq 0$ において $F_n(x)$ が最大・最小となる x の値をそれぞれ求めよ．

(2) $x>0$ において $F_n(x)$ の変曲点となる x の値を求めよ．

(3) $x\geq 0$ における $y=F_n(x)$ のグラフの概形を描け．

(4) $n=3$ の場合について，

$$I_n=\int_0^{\infty}F_n(x)dx$$

の値を求めよ．

(宇都宮大 2005)　　(m20056102)

0.1795 (1) 次の関数を微分せよ．ただし $a>0$ とする．

$$y=\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\ \right|$$

(2)　m と n を正の整数とするとき，次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \; dx$$

(宇都宮大 2005)　　(m20056103)

0.1796　以下の定積分および不定積分を計算せよ．

(1)　$\displaystyle\int_1^2 (x+2)(x-1)dx$　　(2)　$\displaystyle\int \frac{1}{(x-q)(x-q-1)}dx$　　(3)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x + 1}}dx$

(宇都宮大 2007)　　(m20076101)

0.1797　$\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}dx$ を求めよ．

(宇都宮大 2007)　　(m20076109)

0.1798　区間 $[0, 1]$ を 4 等分し，$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ の近似値を台形公式を使って小数第 3 位まで求めよ．

(宇都宮大 2007)　　(m20076113)

0.1799　(1)　不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-3x-4}\,dx$ を求めよ．

(2)　次の定積分の値を求めよ. ただし, a は正の定数である.　　$\displaystyle\int_0^a x\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\,dx$

(宇都宮大 2010)　　(m20106106)

0.1800　$\displaystyle\int e^{mx}dx$ を求めよ．なお，m は定数である．

(宇都宮大 2014)　　(m20146105)

0.1801　平面上の閉領域 D を，

$$D = \{(x, y) \,|\, 0 \leqq\ x \leqq\ y,\ 0 \leqq\ y \leqq\ 1\}$$

と定める．D における積分 $\displaystyle I = \int_D e^{y^2}dxdy$ について，下の問いに答えよ．

(1)　閉領域 D を図示せよ．途中の過程も記入せよ．

(2)　積分 I を，累次積分 $\displaystyle\int_a^b \left(\int_c^d e^{y^2}dx\right) dy$ の形で表し，a, b, c, d を求めよ．なお，a, b, c, d は定数とは限らない．計算経過も記入せよ．

(3)　積分 I の値を計算せよ．計算経過も記入せよ．

(宇都宮大 2015)　　(m20156104)

0.1802　a, b を正の実定数とするとき，微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + a^2y^2 = b^2 \tag{2-1}$$

について，下の問いに答えよ．

(1)　$\alpha(\alpha \neq 0)$, β を実定数，C を積分定数とするとき，つぎの不定積分が成り立つことを示せ．

$$\int \frac{1}{\alpha x + \beta}dx = \frac{1}{\alpha}\log_e |\alpha x + \beta| + C \tag{2-2}$$

(2)　微分方程式 (2-1) の一般解を y について解け．なお，計算過程も記入せよ．

(3)　微分方程式 (2-1) を条件 $x = 0$，$y = 0$ のもとで y について解いた特殊解を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(4) (3) で求めた特殊解は，x が十分に大きいとき一定の値に近づく．この一定の値を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(宇都宮大 2019) (m20196102)

0.1803 実数 $a > 1$ として下の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ $(1 \leq x \leq a)$ を x 軸のまわりに 1 回転したときにできる回転体の体積 $V(a)$ を求めよ．

(2) 曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ $(1 \leq x \leq a)$ を x 軸のまわりに 1 回転したときにできる回転体の側面積 $S(a)$ の式を記述し，$2\pi \displaystyle\int_1^a \frac{dx}{x}$ より大きいことを示せ．なお，計算過程も記入せよ．

(3) (1) と (2) で求めた $V(a)$，$S(a)$ に対して a を無限大に近づけたとき，おのおのの極限を求めよ．

(宇都宮大 2020) (m20206103)

0.1804 x の関数 u, v の第 n 次までの導関数が連続ならば，部分積分を繰り返し適用して

$$\begin{aligned}\int uv^{(n)}dx &= uv^{(n-1)} - \int u'v^{(n-1)}dx \\ &= uv^{(n-i)} - u'v^{(n-2)} + \int u''v^{(n-2)}dx \\ &= \cdots\cdots \\ &= uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)} - \cdots \\ &\qquad +(-1)^{(n-2)}u^{(n-2)}v' + (-1)^{(n-1)}u^{(n-1)}v + (-1)^n \int u^{(n)}vdx\end{aligned}$$

が成り立つ．このことを利用して下の問いに答えよ．

(1) $u = (b-x)^{n-1}$ としたとき，u', u'', $\cdots$, $u^{(n-2)}$, $u^{(n-1)}$, $u^{(n)}$ を求めよ．

(2) $u = (b-x)^{n-1}$, $v = f(x)$ としたとき，上記の左辺と右辺の最終行の式との関係を具体的に記述せよ．

(3) (2) の結果において積分範囲を $[a, b]$ として定積分を求め，$x = b$ のとき 0 になる項を整理して $f(b)$ についてのテイラー展開の式を求めよ．剰余項は積分形のままでよい．なお，計算過程も記入せよ．

(宇都宮大 2020) (m20206104)

0.1805 $\log x$ は自然対数を表すものとして，下の問いに答えよ．

問 1 C を積分定数とするとき，積分公式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \log\left|x + \sqrt{x^2+A}\right| + C \quad (A \neq 0)$$

を証明せよ．

問 2 問 1 の公式を用いて関数 $y = y(x)$ に関する 1 階の微分方程式

$$y' = \sqrt{1+y^2}$$

の一般解を求め，さらに $x = 0$ のとき $y = 0$ となるもの（特殊解）を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

問 3 問 2 の特殊解を積分して

$$f(x) = \int_0^x ydx$$

を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(宇都宮大 2022)　　(m20226104)

0.1806 $\displaystyle\int_0^a e^{x^2}\cdot x^3\,dx$ のとき，実数 a を求めよ．

(工学院大 2003)　　(m20036203)

0.1807 $\displaystyle\int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx$　を解け．

(工学院大 2004)　　(m20046203)

0.1808 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$　を解け．

(工学院大 2005)　　(m20056204)

0.1809 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle y=\int \frac{e^x}{e^x+2}\,dx$

(2) $\displaystyle y=\int \frac{2x^2+3x+4}{x}\,dx$

(工学院大 2005)　　(m20056210)

0.1810 $\displaystyle I=\int_0^{2a} x\sqrt{2ax-x^2}dx(a>0)$ とおくとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\displaystyle I=\int_{-a}^{a}(t+a)\sqrt{a^2-t^2}dt$ となることを示せ.

(2) $\displaystyle I=a\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-t^2}dt$ となることを示せ.　　(3) I の値を求めよ.

(はこだて未来大 2007)　　(m20076304)

0.1811 a を正定数，n を自然数とし，定積分 $\displaystyle I_n(a)=\int_0^a xe^{-nx}\,dx$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $I_n(a)$ を求めよ.　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n(a)$ を求めよ.

(はこだて未来大 2008)　　(m20086304)

0.1812 次式で与えられる関数 $f(x)$ について，以下の問いに答えよ．

$$f(x)=\sqrt{(x-1)(2-x)}\qquad(1\leq x\leq 2)$$

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形を描け.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$ の値を求めよ.

(はこだて未来大 2009)　　(m20096304)

0.1813 自然数 n に対して

$$I(n)=\int_1^e \frac{1}{x^n}\log x\,dx$$

とおくとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 部分積分法を用いて, $f(2)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I(n)$ を求めよ.

(はこだて未来大 2010)　　(m20106304)

0.1814 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,dx$

(はこだて未来大 2012)　　(m20126303)

0.1815　n を自然数とし，定積分 $I_n = \displaystyle\int_0^1 xe^{-nx}dx$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) I_n を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 I_n$ を求めよ．

(はこだて未来大 2013)　　(m20136306)

0.1816　$f(x)=e^x\sin x$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq \pi$ における最大値を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx$ を求めよ．

(はこだて未来大 2014)　　(m20146303)

0.1817　(1) $0<x<\pi$ において，$\displaystyle\int (\sin x)\log(\sin x)dx$ を求めよ．

(はこだて未来大 2015)　　(m20156303)

0.1818　$f(x)=\arctan x$，つまり $f(x)$ を $\tan x$ の逆関数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の第 3 次導関数 $f^{(3)}(x)$ を求めよ．

(2) 以下の等式を満たす 4 つの定数 a_0，a_1，a_2，a_3 をすべて求めよ．

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+o(x^3) \qquad (x\to 0)$$

ただし，記号 o はランダウのスモールオーである．

(3) $f\left(\sqrt{3}\right)$ の値を求めよ．

(4) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} f(x)dx$ の値を求めよ．

(はこだて未来大 2017)　　(m20176302)

0.1819　(1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx$ を求めよ．　(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ を求めよ．

(はこだて未来大 2018)　　(m20186302)

0.1820　$-1 \leq x \leq 1$ において，$f(x)=x\,\mathrm{Cos}^{-1}x$ とする．ここで，$\mathrm{Cos}^{-1}x$ は逆余弦関数で，$\arccos x$ と書くこともある．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\frac{\pi}{2}x}{x^2}$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$ の値を求めよ．

(はこだて未来大 2021)　　(m20216302)

0.1821　$\displaystyle\int_0^1 x\tanh(1-x^2)dx$ を求めよ．

(はこだて未来大 2022)　　(m20226303)

0.1822 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{3x^2+x}{x^3+x^2-x-1}dx$ (2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x \sin x}$ $(\tan x = t$ とおく$)$

(東京海洋大 2007) (m20076404)

0.1823 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D xe^{y^2}dxdy\,,\quad D=\{(x,y)\mid 0\leqq\ x\leqq\sqrt{y}\,,\ 0\leqq\ y\leqq\ 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (x+y)^2dxdy\,,\quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq\ 1\}$

(東京海洋大 2007) (m20076406)

0.1824 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^2+2x}{(x^2+4)(x-2)}\,dx$ を計算せよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\cos x\,dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2008) (m20086403)

0.1825 次の重積分の値を求めよ

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy\,,\quad D=\{(x,y)\mid x^2\leqq\ y\leqq\ x+2\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy\,,\quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq\ 1\}$

(東京海洋大 2008) (m20086405)

0.1826 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2x-1}{x^2+1}\,dx$ を計算せよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^x\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2009) (m20096403)

0.1827 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D x(x+y)\,dxdy\,,\quad D=\{(x,y)\mid x-1\leqq\ y\leqq\ 1-x,\ x\geqq\ 0\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xy^2\,dxdy\,,\quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq\ 1,\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0\}$

(東京海洋大 2009) (m20096405)

0.1828 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+2x^2+x}\,dx$ を計算せよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^3\log x\,dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2010) (m20106403)

0.1829 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy\,,\quad D=\{(x,y)\mid x^2\leqq\ y\leqq\sqrt{x}\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{x^2+y^2+1}\,dxdy\,,\quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq\ 1\,,\ x\geqq\ 0\,,\ y\geqq\ 0\}$

(東京海洋大 2010) (m20106405)

0.1830 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2+x}{x^3+x^2+x+1}\,dx$ を計算せよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x\, \cos^2 x\, dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2011) (m20116403)

0.1831 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid y^2 \leqq x \leqq y\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4\}$

(東京海洋大 2011) (m20116405)

0.1832 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x-3}{x^4-1}\,dx$ を計算せよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\log x}}\,dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2012) (m20126404)

0.1833 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|\leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2 \leqq 1\right\}$

(東京海洋大 2012) (m20126406)

0.1834 次の定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^2+2x+1)^2dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx$

(東京海洋大 2012) (m20126409)

0.1835 以下の関数を x で微分しなさい.

(1) $y=2x^3-5x^2$ (2) $y=\sin^2 x$

(3) $y=\left\{\log\left(\sqrt{x}+1\right)\right\}^2$ (4) $\displaystyle y=\int_x^{2x}\sin\theta d\theta$

(東京海洋大 2013) (m20136401)

0.1836 下記の定積分, または不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int_0^1(3x^3+4x^2-2)dx$ (2) $\displaystyle\int(\cos 2x+\sin 3x)dx$ (3) $\displaystyle\int\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}{x^2}dx$

(4) $\displaystyle\int x\cos(1+x^2)dx$ (5) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$

(東京海洋大 2013) (m20136402)

0.1837 下記の定積分, または不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int\frac{2}{2x-1}dx$ (2) $\displaystyle\int 2^{3x}dx$ (3) $\displaystyle\int x\cos x dx$ (4) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{x}{\sqrt{3-x}}dx$

(東京海洋大 2014) (m20146402)

0.1838 次の不定積分，または定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int 2\sin x\cos x\,dx$ (2) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^1 (x^3+3x^2-x+1)\,dx$

(東京海洋大 2015) (m20156402)

0.1839 次の定積分，または不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x}$ (2) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\ dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$ (4) $\displaystyle\int x(2x+1)^2dx$ (5) $\displaystyle\int e^x\sin x\ dx$

(東京海洋大 2016) (m20166402)

0.1840 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2-2}$ を計算せよ．

(2) $n=0,1,2,\cdots$ に対し，定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(nx)dx$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2016) (m20166407)

0.1841 (1) $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq\ x+y\leqq\ 1,\ 0\leqq\ x-y\leqq\ 2\right\}$ に対し，重積分 $\displaystyle\iint_D e^{x+y}dxdy$ の値を求めよ．

(2) 積分の順序を入れ替えることにより，重積分 $\displaystyle\int_{-1}^1\left(\int_x^1 y^2e^{xy}dy\right)dx$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2016) (m20166409)

0.1842 次の定積分，または不定積分を求めなさい．

(1)$\displaystyle\int(7x^3+3x^2+2x+5)dx$ (2)$\displaystyle\int x^5\log x\ dx$ (3)$\displaystyle\int_3^5 \frac{dx}{x^2+3x-10}$ (4)$\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx$

(東京海洋大 2017) (m20176402)

0.1843 次の不定積分，または定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int(2\cos^2 x-1)\,dx$ (2) $\displaystyle\int 3x\sqrt{x^2+1}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2+3x-28}$ (4) $\displaystyle\int_0^2 (2x+1)^3\,dx$

(東京海洋大 2021) (m20216402)

0.1844 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3-1}dx$ を計算せよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^{e^5} \frac{\sin(\pi\log x)}{x}dx$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2021) (m20216408)

0.1845 (1) $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1\leqq x\leqq 2,\ \sqrt{x}\leqq y\leqq x\right\}$ に対し，重積分

$\displaystyle\iint_D 2y\log x\ dxdy$ の値を求めよ．

(2) $E=\{(x,y)\mid 0\leqq x+y\leqq 2,\ 0\leqq x-y\leqq 1\}$ に対し，重積分

$\displaystyle\iint_E (x^2-y^2)\ dxdy$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2021) (m20216410)

0.1846 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2+3x+3}{x^3+x^2+2x+2}dx$ を計算せよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \cos\bigl(3\sqrt{x}\,\bigr)dx$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2022) (m20226403)

0.1847 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}dxdy, \qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \sqrt{y} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_E \log(x^2+y^2+9)dxdy, \qquad E=\left\{(x,y)\ \middle|\ 2 \leqq x^2+y^2 \leqq 5,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}$

(東京海洋大 2022) (m20226405)

0.1848 次の不定積分，または定積分を求めなさい.

1) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}dx$ 2) $\displaystyle\int 2\sin x\cos x dx$

3) $\displaystyle\int_1^4 \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx$ 4) $\displaystyle\int_1^2 x^2\log x\, dx$

(東京海洋大 2022) (m20226407)

0.1849 次の 2 重積分の値を求めなさい. $\displaystyle\iint_D -2xe^{1-y}dxdy \quad D=\{(x,y)\mid 0\leqq\ x\leqq\ 1\ ,\ 0\leqq\ y\leqq\ 1-x^2\}$

(和歌山大 2007) (m20076506)

0.1850 複素平面上において，$z=\pm 1$ および $z=\pm i$ を内部に含み，正の向きに一周する単一閉曲線を C とする. このとき，次の積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int_C \frac{\sin\pi z}{(z-1)^2}dz$ (2) $\displaystyle\int_C \frac{z^2}{z^4-1}dz$

(和歌山大 2007) (m20076510)

0.1851 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^3e^{-x}$ を求めなさい.

(2) $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}+\dfrac{z^2}{5^2}=3$ で表される曲面の，点 $(2,3,5)$ における法線の方程式を求めなさい.

(3) 次の 2 重積分を極座標変換を利用して求めなさい.

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0\}$$

(和歌山大 2008) (m20086502)

0.1852 ある工場で製造される製品の重さ（単位 kg）が正規分布 $N(2,\ 0.0016)$ に従っているとする. ある日，100 個の製品を抜き取り，重さを測定したところ平均が 2.011kg であった. この日の製品が，平常と比べて重くなっているといえるか. 危険率（有意水準）1% で検定しなさい. なお，解答にあたっては，次の定理および正規分布表を用いてよい.

定理 $X_1,\ X_2,\ \cdots X_n$ が，正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ に従う独立な確率変数であるとき，

$\overline{X}=\dfrac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$ は正規分布 $N(\mu,\sigma^2/n)$ に従う.

よって，$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ は正規分布 $N(0,1)$ に従う.

(和歌山大 2008) (m20086503)

0.1853 (1) $f(x)=e^{x^2+1}$ のマクローリン展開を，4 次の項まで求めなさい.

(2) 曲線 $x^4+3x^2+2xy^2+4y^3-10=0$ の $(x,y)=(1,1)$ における接線の方程式を求めなさい.

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x^2+x+1}\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1\ ,\ x\le y\le x+1\}$ を求めなさい.

(和歌山大 2009) (m20096502)

0.1854 (1) $f(t)=e^{-|t|}$ のフーリエ変換を求めなさい.

(2) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{1+\omega^2}\,d\omega$ と $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega}{1+\omega^2}\,d\omega$ の値を求めなさい.

(和歌山大 2009) (m20096504)

0.1855 次の各問に答えなさい. なお, i は虚数単位である.

(1) $\dfrac{5-i}{1+5i}$ を計算しなさい.

(2) 複素数 $\sqrt{3}-3i$ を極形式で表しなさい.

(3) $\displaystyle\lim_{z\to -i}\frac{z+i}{z^4-1}$ を求めなさい.

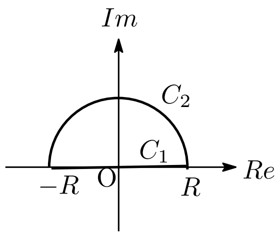
(4) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{z+i}{z^4-1}\,dz$ を求めなさい.

ただし, 曲線 C は中心が $-1-i$, 半径が $\sqrt{2}$ の円周（反時計回り）とする.

(和歌山大 2009) (m20096505)

0.1856 R を 1 より大きい実数として, 図のように複素平面上で線分 C_1 と上半円周 C_2 からなる曲線 $C=C_1+C_2$ が与えられている. ただし, 曲線 C の向きは反時計まわりとする.

複素関数 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ について, 次の問いに答えなさい.



(1) C_2 上で $|f(z)|\leqq \dfrac{1}{R^2-1}$ が成り立つことを示しなさい.

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ の値を求めなさい.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x+i\sin x}{x^2+1}\,dx$ の値を求めなさい.

(和歌山大 2010) (m20106505)

0.1857 次の 2 重積分の値を求めなさい.

$$\iint_D \sin(x+y)\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid 0\leqq\ x\leqq\frac{\pi}{2}\,,\ 0\leqq\ y\leqq\ x\}$$

(和歌山大 2010) (m20106509)

0.1858 複素関数 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3-2z^2+4z-8}$ について次の問いに答えなさい. ただし, i を虚数単位とする.

(1) $f(z)$ の特異点をすべて複素平面上に図示しなさい.

(2) 円周 $|z+1+i|=2$ に反時計回りの向きを与えたものを C とする. 複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を求めなさい.

(和歌山大 2011) (m20116502)

0.1859 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{x-1}\,dxdy\quad D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\leqq\ x\right\}$ を求めなさい.

(和歌山大 2012) (m20126505)

0.1860 次の各問いに答えなさい.

(1) $\displaystyle\int e^x\cos nx\,dx$ を求めなさい. ただし n は正の整数とする.

(2) $\displaystyle\int e^x \sin nx\, dx$ を求めなさい．ただし n は正の整数とする．

(3) 関数 $f(x) = e^x \quad (-\pi \leqq x \leqq \pi)$ をフーリエ級数展開 $f(x) \approx \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_n \cos nx + b_n \sin nx \Big]$ したとき，係数 $a_n (n \geqq 0)$，$b_n (n \geqq 1)$ を求めなさい．

(和歌山大 2012) (m20126507)

0.1861 次の各問いに答えなさい．ただし，i を虚数単位とする．

(1) $\dfrac{3-i}{4+3i}$ の実部の値を求めなさい．

(2) 複素数 $-1 + i\sqrt{3}$ の偏角の値を求めなさい．

(3) 複素関数 $f(z) = \dfrac{z^2 - \frac{1}{3}}{z^3 - z}$ について次の問いに答えなさい．

(a) $z^3 - z = 0$ の根を全て求めなさい．

(b) 円周 $\left| z - \dfrac{1}{2} \right| = 1$ に反時計回りの向きを与えた経路を C とする．複素積分 $\displaystyle\int_C f(z) dz$ の値を求めなさい．

(和歌山大 2012) (m20126508)

0.1862 次の 2 重積分を求めなさい．

$$\iint_D e^{x-y} dxdy\,, \qquad D\,:\, \Big\{ 0 \leqq x \leqq 2\,,\ 0 \leqq y \leqq \frac{x}{2} \Big\}$$

(和歌山大 2013) (m20136504)

0.1863 次の各問いに答えなさい．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 次の複素関数について，問いに答えなさい．

$$w = z^3$$

(a) $w = u + iv$，$z = x + iy \quad (u, v, x, y$ は実数) とおくとき，u, v それぞれを x, y を用いて表せ．

(b) コーシー・リーマンの方程式が成り立つことを示しなさい．

(2) 次の複素関数について複素積分 $\displaystyle\int_C f(z) dz$，$c : |z| = 1$ を求めなさい．ただし，積分の向きは反時計回りとする．

$$f(z) = \frac{e^z}{z^3 - 4z}$$

(和歌山大 2013) (m20136507)

0.1864 次の不定積分を求めなさい．

$$\int xe^x dx$$

(和歌山大 2014) (m20146505)

0.1865 次の 2 重積分を求めなさい．

$$\iint_D (x + 2y) e^y dxdy\,, \qquad D = \{(x, y)\,|\, 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2x\}$$

(和歌山大 2014) (m20146506)

0.1866 複素関数について，次の各問いに答えなさい．

(1) 関数 $w = z + \dfrac{1}{z}$ に対して $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $w = u + iv$ とおくとき， u, v を r, θ で表しなさい．

(2) 関数 $f(z)$ が領域 D で正則であるとき，$\mathrm{Re}f(z)$ が定数ならば $f(z)$ も定数であることを証明しなさい．

(3) 積分路 $C : |z| = 2$ の向きは反時計回りとして，次の積分値を求めなさい．

$$\int_C \frac{2z+1}{z(z-3)}dz$$

(和歌山大 2014)　　(m20146508)

0.1867 次の 2 重積分を求めなさい．

$$\iint_D x\cos y\,dxdy\,, \quad D = \{(x,y)\,|\,0 \leq x \leq \pi,\ x \leq y \leq 2x\}$$

(和歌山大 2015)　　(m20156504)

0.1868 (1) 複素数関数 $w = \dfrac{z}{1-z}$ について次の問いに答えなさい．

(a) $w = u + iv$, $z = x + iy$ とおくとき，u, v を x, y を用いて表しなさい．ただし，u, v, x, y は実数とする．

(b) コーシー・リーマンの方程式が成り立つことを示しなさい．

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{\sin z}{z^2 - \frac{\pi^2}{4}}\,dz$ を求めなさい．ただし，積分路 C は $|z| = 2$ とし，向きは反時計回りとする．

(和歌山大 2015)　　(m20156506)

0.1869 (1) 正数 L に対し $\omega = \dfrac{2\pi}{L}$ と置く．整数 k に対し，次式が成り立つことを示しなさい．

$$\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{ik\omega t}dt = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

(2) (1) の条件のもと，自然数 n に対し，$D_n(t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega t}$ とおく．このとき，以下の式が成立することを示しなさい．

(a) $\displaystyle\frac{1}{L}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} D_n(t)dt = 1$

(b) $\displaystyle\frac{1}{L}\int_{-\frac{l}{2}}^{0} D_n(t)dt = \frac{1}{L}\int_{0}^{\frac{l}{2}} D_n(t)dt = \frac{1}{2}$

(c) $D_n(t+L) = D_n(t)$

(d) $D_n(t) = \dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})\omega t)}{\sin(\frac{\omega}{2}t)}$

(和歌山大 2015)　　(m20156507)

0.1870 次の 2 重積分の値を求めなさい．　$\displaystyle\iint_D \sqrt{x}dxdy\,, \qquad D = \left\{(x,y)\ \middle|\ x^2 + y^2 \leq x\right\}$

(和歌山大 2016)　　(m20166503)

0.1871 次の各問いに答えなさい．ただし，i を虚数単位とする．

(1) $z = x + yi$（x, y は実数）とするとき，複素関数 $f(z) = (x^2 + x + ay^2) + (bxy + y)i$ が複素数全域で正則になるよう，実数の定数 a, b を定めなさい．

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^2+1}$ を求めなさい．

ただし，積分経路 C は，複素平面において $-1,\ 1,\ 2i$ を頂点とする三角形の周に，反時計回りの向きを付けたものとする．

(和歌山大 2016)　　(m20166506)

0.1872 a が 0 でない実数のとき，次の不定積分を求めなさい．

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$$

なお，解答に際して，

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

を用いてよい．

(和歌山大 2017)　　(m20176501)

0.1873 (1) 次式を満たす a, b, c の値を求めなさい．

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

(2) 次の不定積分を求めなさい．

$$\int \frac{1}{x(x+1)^2}dx$$

(和歌山大 2017)　　(m20176502)

0.1874 次の定積分を求めなさい．ただし，e は自然対数の基底である．

$$\int_0^2 x^2 e^x dx$$

なお，解答に際して，$f'(x),\ g'(x)$ を，それぞれ，$f(x),\ g(x)$ の一階導関数とするとき，

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

を用いてよい．

(和歌山大 2017)　　(m20176503)

0.1875 次の (1), (2) に答えなさい．ただし，x を実数，z を複素数とする．また，i は虚数単位，e は自然対数の基底である．

(1) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - iz + 2}$ の $z = 0$ の周りでのテイラー展開を求めなさい．

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 4\cos x}$ を，$z = e^{ix}$ として $|z| = 1$ の閉路積分から求めなさい．

(和歌山大 2017)　　(m20176508)

0.1876 関数 $f(x)$ に対する次式の積分をフーリエ変換と定義する．ただし，i は虚数単位，e は自然対数の基底である．

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx$$

また，２つの関数 $g(x)$, $h(x)$ に対する次式の積分をたたみこみと定義する．

$$g(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-\alpha)h(\alpha)d\alpha$$

フーリエ変換およびたたみこみに関する次の (1)〜(3) に答えなさい．

(1) 次式で与えられる関数 $f_1(x)$ のフーリエ変換 $F_1(u)$ を求めなさい．

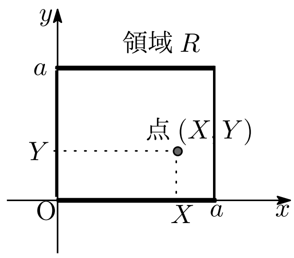
$$f_1(x) = \begin{cases} 1\,, & \left(x \leq \left|\dfrac{1}{2}\right| \text{の場合}\right) \\ 0\,, & \left(x > \left|\dfrac{1}{2}\right| \text{の場合}\right) \end{cases}$$

(2) 関数 $f_1(x)$ 同士のたたみこみによって得られる関数を $f_2(x)$ とする．関数 $f_2(x)$ を求め，その概略図を描きなさい．

(3) 関数 $f_2(x)$ のフーリエ変換 $F_2(u)$ を求めなさい．

(和歌山大 2017)　　(m20176509)

0.1877 右図の一辺の長さが a の正方形領域 R からランダムに１つの点を選択する試行を考える．選択された点の座標を (X, Y) としたとき，X および Y は連続確率変数と扱うことができ，それらの同時確率密度関数は次式で与えられるものとする，



$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\,, & (0 \leq x \leq a,\ \text{かつ},\ 0 \leq y \leq a \text{ の場合}) \\ 0\,, & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

ただし，a は正の実数である．領域 R 内であれば，x および y の値に関わらず同時確率密度関数が等しいことから，この試行は領域 R から一様ランダムに点を選択するものである．この試行に関する次の (1)〜(3) に答えなさい．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)dxdy$ の値を求めなさい．

(2) 同時確率密度関数 $f_{X,Y}(x, y)$ を用いて，$X \leq \dfrac{a}{3}$ となる確率を求めなさい．

(3) $Z = X + Y$ とする．領域 R 内のどの位置の点が選択された場合に $Z \geq a$ となるか，すなわち，$Y \geq -X + a$ となるかを考え，それを基に，$Z \geq a$ となる確率を求めなさい．

(和歌山大 2017)　　(m20176510)

0.1878 (1) 次の重積分を，極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ によって，r と θ の積分に変数変換しなさい．

$$\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}dxdy, \qquad D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

(2) (1) の積分の値を求めなさい．

(和歌山大 2018)　　(m20186503)

0.1879 次の (1)〜(3) に答えなさい．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 次の関数の組 (A) と (B) のうち，コーシー・リーマンの方程式を満たすものを選びなさい．

(A) $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$

(B) $u = e^x \sin y$, $v = e^x \cos y$

(2) (1) で選んだ $u,\ v$ に対して，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y),\ z=x+iy$ とおくとき，$f'(z)$ を求めなさい.

(3) (2) の関数 $f(z)$ に対して，次の積分の値を求めなさい．ただし, 積分路 C は $|z|=1$ とし，向きは反時計回りとする.

$$\oint_C \frac{f(z)}{z}dz$$

(和歌山大 2018)　　(m20186505)

0.1880 座標平面上で直線 $y=x$ と曲線 $y=x^2$ で囲まれる部分を D とする．次の I の値を求めなさい.

$$I=\iint_D (x+2y)\ dx\ dy$$

(和歌山大 20221)　　(m20216504)

0.1881 平面の領域 D を $x=0,\ y=0,\ x+y=2$ で囲まれた部分とする．次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D (x+y)dxdy$$

(和歌山大 2022)　　(m20226504)

0.1882 次の広義積分が収束するような実数 s の値の範囲を求めよ.

$$\iint_{x^2+y^2\geqq 1} (x^2+y^2)^s\ dxdy$$

(和歌山大 2022)　　(m20226505)

0.1883 次の文章を読み，(1)～(5) に答えよ．次の関数 $f(x)$ は，理学，工学の分野でしばしば現れる関数である.

$$f(x)=\frac{1}{x-ia}$$

ここで，a は正の実数 $(a>0)$，i は虚数単位 $(i^2=-1)$，x は実数，定義域は $-\infty<x<\infty$ である.

(1) 関数 $f(x)$ の実数部，および虚数部が，次のように書けることを示せ.

$$u(x)=\frac{x}{x^2+a^2} \qquad\qquad v(x)=\frac{a}{x^2+a^2}$$

(2) 関数 $u(x)$，および $v(x)$ の x に関する微分をそれぞれ計算せよ.

$$\frac{d\,u(x)}{dx} \qquad\qquad \frac{d\,v(x)}{dx}$$

(3) 関数 $u(x)$，および $v(x)$ のグラフの概形を図示せよ.

(4) 関数 $u(x)$，および $v(x)$ を $0<x<a$ の範囲で定積分せよ.

$$\int_o^a u(x)dx \qquad\qquad \int_0^a v(x)dx$$

(5) $x=a$ における関数の値 $f(a)$ を記せ．さらに $f(a)$ を複素平面上にベクトルとして図示せよ.

(大阪市立大 2007)　　(m20076601)

0.1884 関数 $f_n(x,y)=\sin\sqrt{x^n+y^n}$（$n$：自然数）について，次の問いに答えよ,

(1) 1 階偏導関数 $\dfrac{\partial f_n}{\partial x}$ を求めよ.

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{f_1(x,0)}{\sqrt{x}}\,dx$ を求めよ.

(3) 自然数 m に対して $I_m = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{(f_1(x,0))^m}{\sqrt{x}}\,dx$ とするとき，I_m と I_{m-2} の関係式を求めよ．また m は奇数として I_m を求めよ.

(4) $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \leq x^2+y^2 \leq \dfrac{\pi^2}{4}\right\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D f_2(x,y)\,dxdy$ を求めよ.

(京都府立大 2008)　　(m20086702)

0.1885 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-1}$ を計算せよ.　　(2) 不定積分 $\displaystyle\int x\cos x\,dx$ を計算せよ.

(東京工科大 2010)　　(m20106905)