[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　∠ , △

0.1　3 次元空間内の 3 点 A, B, C の各々の座標を $(a, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$ を 2 辺とする平行四辺形を $ACBD$ とするとき，点 D の座標を求めよ．

(2) $\angle ACB$ を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ．

(3) $\triangle ABC$ の面積を求めよ．

(4) $\triangle ABC$ に垂直な単位ベクトルを求めよ．

(岩手大 1997)　(m19970304)

0.2　点 O を原点とする xyz 空間に 3 点 $A(2, 1, k)$, $B(0, 2, 0)$, $C(2, 0, 0)$ がある．ただし，k は正の実数である．線分 BC, OC の中点をそれぞれ D, E とする．$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いてそれぞれ表せ．

(2) $\angle DAE = 30^\circ$ となるときの　k を求めよ．

(3) $k = 1$ のとき，原点から点 A, B, C を通る平面におろした垂線を ℓ_1 とし，平面との交点を H とする．

(a) $\overrightarrow{OH} = s\vec{a} + t\vec{b} + (1 - s - t)\vec{c}$ と表すとき，実数 s, t を求めよ．

(b) 点 A, D を通る直線を ℓ_2 とするとき，直線 ℓ_1 と直線 ℓ_2 の最短距離を求めよ．

(東北大 2020)　(m20200501)

0.3　点 $O(0, 0, 0)$ を原点とする xyz 空間において，中心を点 $C(0, 0, 1)$，半径を $1/2$ とする球面 S_1 がある．点 $A(0, 0, 2)$ を通る直線を z 軸まわりに回転して得られる円錐面 S_2 が，球面 S_1 に接している．ただし，$z \leqq 2$ とする．

(1) 円錐面 S_2 と球面 S_1 の接点のひとつを B とするとき，$\cos\angle CAB$ を求めよ．

(2) 円錐面 S_2 上の任意の点を $P(x, y, z)$ とするとき，円錐面 S_2 の方程式を求めよ．

(3) 円錐面 S_2 と xy 平面で囲まれた閉曲面を S とする．以下のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ の面積分 I を求めよ．

$$\boldsymbol{F} = (x^3 z)\,\mathbf{i} + (x^2 yz)\,\mathbf{j} + \{(x^2 + y^2)z^2\}\,\mathbf{k}$$

$$I = \int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

ただし，$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ は x, y, z 軸方向の基本ベクトルであり，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は S 内部から外向きに取るものとする．

(東北大 2022)　(m20220506)

0.4　3 次元空間におけるデカルト座標系で表される，点 $O(0, 0, 0)$，点 $A(1, 2, 3)$，点 $B(-3, 1, -2)$ について，以下を求めよ．

(1) $\angle AOB$ の大きさ　　(2) $\triangle AOB$ の面積

(お茶の水女子大 2016)　(m20160616)

0.5　3 次元の位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と定数ベクトル $\boldsymbol{B}$ を用いて，ベクトル $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \times\ \boldsymbol{r}/2$ で定義する．このとき，$\triangledown \times\ \boldsymbol{A}$ を計算せよ．

(お茶の水女子大 2019)　(m20190608)

0.6 点 O を原点とする xyz 空間に, 点 P および x 軸上の点 Q があり, この 2 つの点が $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{PQ}| = 1/2$ を満たしながら動くとき, 線分 $\overline{PQ}$ が通過し得る領域を V とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 点 P の集合を表す曲面の方程式を x, y, z で表せ.

(2) 点 P が xy 平面上の第 1 象限 $(x > 0\,,\ y > 0)$ に存在し, かつ点 Q が点 O 以外に存在する場合を考える.

(a) このとき, $\angle POQ = \theta$ として, 線分 $\overline{PQ}$ を表す方程式を x, y, θ で表せ.

(b) 線分 $\overline{PQ}$ が通過し得る領域 S を表す式を求め, 領域 S の概形を図示せよ.

(3) 領域 V の体積を求めよ.

(東京大 2010)　　(m20100703)

0.7 $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1 + \ \ x_2 \qquad - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 0 \end{array} \right\}, \quad W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

について以下の問に答えよ. ただし, $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ はベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \in \mathbb{R}^4$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を表すものとする.

(1) 部分空間 W_1 , W_2 の基底および次元を求めよ.

(2) 部分空間 $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$ の基底および次元を求めよ.

(電気通信大 2005)　　(m20051002)

0.8 3 次元空間において，点 $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,1)$ を含む平面を α とする．次の問に答えよ．

(1) 平面 α と xy 平面のなす角を θ ($0 < \theta < \pi/2$) とするとき，$\cos\theta$ を求めよ．

(2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ．

(3) 平面 α と原点を中心とする半径 1 の球との交わりを xy 平面に正射影して出来る図形の面積を求めよ．

(横浜国立大 1993）　　(m19931102)

0.9 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad (n \geq 1)$ を満たす数列 $\{x_n\}$ は，始めの二項 x_1, x_2 が与えられれば定まる. そこで，$(x_1, x_2) = (0, 1)$ で定まる数列を $\boldsymbol{e}_1$，$(x_1, x_2) = (1, 0)$ で定まる数列を $\boldsymbol{e}_2$ とする，$\{x_n\}$ の一般項を求めるため，数列の番号を一つずらす線形変換 T を考えれば，基底 $\langle \boldsymbol{e}_1\,,\ \boldsymbol{e}_2 \rangle$ に関する T の表現行列が A になることを示しなさい.

(3) A^n の固有値を用いて数列 $\{x_n\}$ の一般項を表し，$(x_1, x_2) = (1, 1)$ で定まる数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めなさい．ただし，A^n は $A \times\ A \times\ \cdots \times\ A$ を表す.

(千葉大 2013)　　(m20131202)

0.10 1 直線上にない 3 点 O, A, B をとり，$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$ とする．また，ベクトルの内積は $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, 絶対値は $|\overrightarrow{a}|$ $(= \sqrt{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})})$ のように表し，$a = |\overrightarrow{a}|$, $b = |\overrightarrow{b}|$ とする．

O, A, B を含む平面上の任意の点 P は，適当な実数 p, q により：

$$\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{a} + q\overrightarrow{b} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

のように表すことができる．これについて，以下の問いに答えよ．

(1) 点 P が線分 AB（両端 A, B を含む）の上にあるとき，$(*)$ の p, q はどのような条件を満たすか．

(2) 点 P が線分 AB の中点のとき，$\overrightarrow{OP}$ を $(*)$ の形で表せ．

(3) $\angle AOB$ の 2 等分線と線分 AB の交点を P とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $(*)$ の形で表せ．

(4) A から直線 OB に下ろした垂線の足を P とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $(*)$ の形で表せ．

(5) $\triangle OAB$ が直角三角形のとき，$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ が取りうる値をすべて示せ．

(筑波大 2008)　　(m20081336)

0.11 実ベクトル空間 W のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が次の 2 つの条件を満たしているものとする．

(A) $||\boldsymbol{v}_1|| = \cdots = ||\boldsymbol{v}_1|| = 1$

(B) 相異なる $j, k \in \{1, \cdots, n\}$ に対して $\langle \boldsymbol{v}_j,\ \boldsymbol{v}_k \rangle = 0$

ただし，$\langle\ ,\ \rangle$ は W の内積，$||\quad||$ はこの内積で定まる長さを表す．　また，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合によって表されるベクトル全体からなる集合を V とする．以下の (1)-(4) を証明しなさい．

(1) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立である．

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ が実数 $x_1,\ \cdots x_n$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{v}_j$$

と表されるとき，次の等式が成り立つ．

$$||\,\boldsymbol{x}\,||^2 = \sum_{j=1}^{n} {x_j}^2$$

(3) V は W の部分空間である．

(4) $V \neq W$ であれば，$\boldsymbol{w} \notin V$ かつ $\boldsymbol{w} \in W$ を満たす任意のベクトル $\boldsymbol{w}$ に対して $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{w}$ は 1 次独立である．

(筑波大 2017)　　(m20171313)

0.12 図のような円柱座標系での微積分に関する以下の問いに答えよ．

(1) 直交座標 (x, y, z) を円柱座標 (r, θ, z) に変換する，x, y, $\dfrac{\partial x}{\partial r}$, $\dfrac{\partial x}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial x}{\partial z}$ を r, θ, z の関数として示せ．

(2) $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} & \dfrac{\partial r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} & \dfrac{\partial \theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = E$ が成り立つことに留意し，$\dfrac{\partial r}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を r, θ, z を用いて示せ．なお，E は単位行列である．

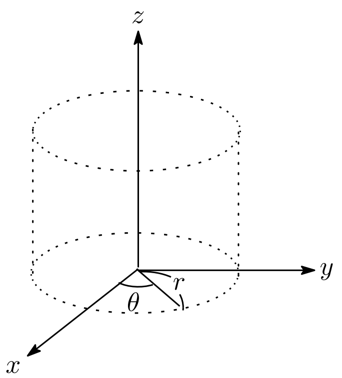
(3) (2) の結果を用いると円柱座標系のラプラシアンは
$\triangle = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ で表される． 関数 $f(r,\ \theta,\ z) = rz\cos\theta$ に対して $\triangle f$ を計算せよ．

(4) 円柱座標系で r だけを変数 $(r > 0)$ とする関数 $g(r)$ が $\triangle g(r) = 0,\ g(1) = 0,\ g(e) = 2$ の条件を満たす．この $g(r)$ を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

(5) $x,\ y,\ z$ の $r,\ \theta,\ z$ に対するヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算せよ．

(6) K を積分領域とする以下の三重積分を，円柱座標系への変数変換を用いて計算せよ．ただし，a は正の定数である．

$$\iiint_k y^2\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz, \qquad K = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le z \le a\right\}$$



(筑波大 2018)　　(m20181301)

0.13 (1) n 次正方行列 $A = (a_{ik})$ において，第 i 行，第 k 列を取り去って得られる $(n-1)$ 次行列式に符号 $(-1)^{i+k}$ をつけたものを A の第 $(i,\ k)$ 余因子といい，$\triangle_{ik}$ により表す．このとき，以下の問に答えよ．

(a) A の行列式 $|A|$ を第 $(n,\ k)$ 余因子 $(k = 1, \cdots, n)$ を使って表せ．

(b) A の逆行列 A^{-1} の第 $(i,\ k)$ 成分を A の行列式と余因子により表せ．

(2) A を n 次正方行列，D を m 次正方行列とする．また，$O_{m,n}$ を $(m,\ n)$ 次の零行列，I_n, I_m をそれぞれ n 次と m 次の単位行列とする．A が正則であるとき，
行列の積 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ O_{m,n} & I_m \end{bmatrix}$ を求め，それから，$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ の行列式を求めよ．

(3) $A,\ B,\ C$ を n 次正則行列，O_n を n 次零行列とするとき，$2n$ 次行列 $\begin{bmatrix} A & B \\ O_n & C \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(筑波大 2018)　　(m20181308)

0.14 集合 X の部分集合 $A,\ B$ に対し

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

とおく．ここで，$A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$ である．

(1) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ を示せ．

(2) $A \triangle B = \emptyset$ と $A = B$ は同値であることを示せ．

(3) $C \subset X$ とする．$A \triangle B = C$ ならば $A = B \triangle C$ を示せ．

(4) $A_i \subset X \ (i=1,2,\cdots,k)$, $B_j \subset X \ (j=1,2,\cdots,\ell)$ に対し

$$\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \triangle \left(\bigcap_{j=1}^{\ell} B_j\right) \subset \bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{\ell}(A_i \triangle B_j)$$

を示せ.

(筑波大 2021)　　(m20211305)

0.15　関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は,

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$$

で定義される. この定義を用いて, $f(x)=x^3$ の導関数は $f'(x)=3x^2$ となることを示しなさい.

(山梨大 2010)　　(m20101803)

0.16　位置ベクトル $\boldsymbol{r}=(x_1,x_2,x_3)\equiv(x_i)$ と時間 t の関数として，ベクトル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ が与えられているとき，次の設問に答えよ.

(1) ベクトル $\mathbf{A}$ の成分 A_i (但し，$i=1,2,3$) を用いて,
(a) $\triangledown \cdot \boldsymbol{A}$　(b) $\triangledown \times\ \boldsymbol{A}$　(c) $\triangledown \cdot \triangledown \boldsymbol{A} \equiv \triangledown^2 \boldsymbol{A}$ を表せ.

(2) $\triangledown \times\ \triangledown \times\ \boldsymbol{A} = \triangledown(\triangledown \cdot \boldsymbol{A}) - \triangledown^2 \boldsymbol{A}$ という関係が成り立つことを，i 成分について示せ.

(3) $\triangledown \times\ \boldsymbol{B} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ および $\triangledown \times\ \boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ から，$\boldsymbol{E}$ を消去して $\boldsymbol{B}$ の満たす方程式を求めよ. 但し，c はゼロでない定数とする.

(4) $\boldsymbol{B} = \triangledown \times\ \boldsymbol{A}$ かつ $\triangledown \cdot \boldsymbol{A} = 0$ が成り立つとき，(2) と (3) の結果を用いて，$\boldsymbol{A}$ の満たす方程式を求めよ.

(山梨大 2016)　　(m20161807)

0.17　平面内の領域 $D=\{(x,y)\,|\,(x,y)\neq(0,0)\}$ で定義される 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して，$\triangle f(x,y) = f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)$ と定める．また，$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\ \ (r>0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とし，$z=f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，領域 D で $f(x,y)$ の 2 階までのすべての偏導関数が存在して，それらはすべて連続である.

(1) $z_r,\ z_\theta$ を $r,\ \theta,\ f_x,\ f_y$ を用いて表せ.

(2) $z_{rr}+\dfrac{1}{r}z_r+\dfrac{1}{r^2}z_{\theta\theta} = \triangle f$ を示せ.

(3) $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\log(x^2+y^2)$ のとき，$\triangle f(x,y)$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする;

(信州大 2016)　　(m20161901)

0.18　座標空間において, 3 点 $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,2)$ を通る平面を α とし, 原点 $O(0,0,0)$ から平面 α に下ろした垂線の足を H とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 2 つのベクトル $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ の両方に垂直な単位ベクトルを 1 つ求めよ.

(2) α の方程式を求めよ.

(3) H の座標を求めよ.

(4) H は $\triangle ABC$ の垂心であることを示せ.

(新潟大 2005)　　(m20052004)

0.19 原点を中心として球対称な密度分布 $\rho(r) = B\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)$ が存在する．ここで r は原点からの距離である．ただし，B は定数で，$R < r$ では $\rho(r) = 0$ である．

(1) 半径 $r + \triangle r$ の球面と半径 r の球面に挟まれた領域の体積 $\triangle V$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\triangle r}{r} \ll 1$ とすると，近似的に $\triangle V$ は $\triangle r$ に比例し，$\triangle V = f(r)\triangle r$ と書ける．$f(r)$ を求めよ．

(3) $\triangle V$ の領域内の質量は $\rho(r)\triangle V = f(r)\rho(r)\triangle r$ となることから，半径 r の球面より内側に含まれる質量 $M(r)$ は，$M(r) = \displaystyle\int_0^r f(r')\rho(r')dr'$ となる．$r \leqq R$ に対して，$M(r)$ を求めよ．

(4) 密度分布が球対称である場合には，r の位置にある質点が受ける単位質量あたりの重力の大きさ F_G は，$F_G(r) = \dfrac{GM(r)}{r^2}$ となる．$r \leqq R$ と $R < r$ のそれぞれについて，$F_G(r)$ を求めよ．

(5) 横軸を r，縦軸を $F_G(r)$ とするグラフの概形を描け．

(新潟大 2018)　　(m20182006)

0.20 三角形 ABC と点 P が $3\overrightarrow{PA} + 4\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{c}$ とおく．このとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ を用いて表せ．

(2) 点 P が三角形 ABC の内部にあることを示せ．

(3) 面積の比 $\triangle PAB$: $\triangle PBC$: $\triangle PCA$ を求めよ．

(新潟大 2019)　　(m20192011)

0.21 以下の問いに答えよ．

(1) 平面上のベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ について，$|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}| = 1, \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ が成り立つとき，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角，$\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{c}$ のなす角，$\overrightarrow{c}$ と $\overrightarrow{a}$ のなす角を求めよ．

(2) 一直線上にない 3 つの定点 $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)$ がある．A, B, C と異なる点 $P(x, y)$ に対して $z = |\overrightarrow{AP}| + |\overrightarrow{BP}| + |\overrightarrow{CP}|$ とおくとき，次の式を証明せよ．

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AP}|} + \frac{\overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{BP}|} + \frac{\overrightarrow{CP}}{|\overrightarrow{CP}|}$$

(3) ある点 P で z が極小となったとする．このとき前問 (1)(2) を利用して $\angle APB, \angle BPC, \angle CPA$ を求めよ．

(長岡技科大 1994)　　(m19942105)

0.22 $a > b > 0$ とする．y 軸上に 2 点 $A(0, a), B(0, b)$ を取り，点 P が x 軸の正の部分を動くとき，$\angle APB$ を最大にする P の位置を求めよ．

(長岡技科大 1998)　　(m19982102)

0.23 $0 < t < 1$ として，空間の 4 点

$$A(t, \sqrt{1-t^2}, 0),\ B(t, -\sqrt{1-t^2}, 0),\ C(-t, 0, \sqrt{1-t^2}),\ D(-t, 0, -\sqrt{1-t^2})$$

を考える，以下の問いに答えなさい．

(1) AB の中点 E の座標を求めなさい．

(2) $\triangle CDE$ の面積 S を t で表しなさい．

(3) 四面体 $ABCD$ の体積 V を t で表しなさい．

(4) V を最大にする t の値とその最大値を求めなさい.

(長岡技科大 2008) (m20082103)

0.24 xy 平面上で原点 O を中心とする半径 r の円を考える. A$(r, 0)$ とし, 円周上に点 B を $\angle$AOB$= 30^\circ$ になるようにとる. 下の問いに答えなさい.

(1) 扇形 OAB を x 軸を中心にして 1 回転させた回転体の体積 $V(r)$ を求めなさい.

(2) 円弧 AB を x 軸を中心にして 1 回転させてできる曲面の面積 $S(r)$ を求めなさい.

(長岡技科大 2014) (m20142104)

0.25 xy 平面において, 原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする. x 軸上に点 $T(t, 0)$, $0 < t < 1$ をとる. 点 T を通る直線 ℓ と円 C との交点を A, B とする. ただし, 直線 ℓ は点 O を通らないとする. $\triangle OAB$ の面積を S とするとき, 下の問いに答えなさい.

(1) 直線 ℓ と点 O の距離を h とするとき, h の取りうる値の範囲を t で表しなさい.

(2) 前問の h を用いて S を表しなさい.

(3) S の最大値 $f(t)$ を t で表しなさい.

(長岡技科大 2016) (m20162102)

0.26 (1) $A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ を座標平面上の 3 点とする. 線分 AB, BC, CA 上にそれぞれ点 P, Q, R を, 三角形 PQR における $\angle Q$ が直角になるようにとる. ただし, P, Q, R は A, B, C のいずれとも異なるとする. $Q(t, 0)$, $\angle CQR = \theta$ とおくとき, 直角三角形 PQR の面積 S を t と θ を用いて表せ.

(2) (1) で求めた S を, 集合

$$D = \left\{(t,\ \theta) \in \boldsymbol{R}^2 \ \middle|\ -1 < t < 1,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$$

を定義域とする関数と考える. このとき, $\dfrac{\partial S}{\partial t} = \dfrac{\partial S}{\partial \theta} = 0$ を満たす $(t,\ \theta)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた $(t,\ \theta)$ において, 関数 S が極値をとるかどうか調べよ.

(金沢大 2019) (m20192207)

0.27 単振子の周期 T は, 振子の長さを ℓ, 重力の加速度を g とすれば, $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ で与えられる. ℓ, g が微小量 $\triangle\ell$, $\triangle g$ だけ変化するときの T の変化量を $\triangle T$ とするとき, $\triangle T$ が近似的に以下の式で表されることを示せ.

$$\frac{\triangle T}{T} = \frac{1}{2}\left(\frac{\triangle\ell}{\ell} - \frac{\triangle g}{g}\right)$$

(福井大 2015) (m20152405)

0.28 未知数 x と y に関する以下の連立一次方程式を解け. ただし, a は定数であるとする.

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ 2x + (a^2 - 3)y = a - 1 \end{cases}$$

〈注〉この連立一次方程式は定数 a によって,「一意的な解」,「2 つ以上の解」,「解なし」の 3 つの状態を取りえることに注意せよ.

定数 a のどのような値に対して, どのような解をもつのか, あるいは解をもたないのかを場合分けして答えよ.

(福井大 2018) (m20182415)

0.29 xy 平面に直線の方程式 ①, ②, ③ を用いて三角形を描くとき，次の問いに答えよ．ただし，直線の方程式は ① $x-y+1=0$，② $2x+y-4=0$，③ $x+3y+3=0$ とする．

(1) 直線の方程式 ①, ②, ③ の傾きと y 軸の切片を求めよ．

(2) 直線の方程式 ①, ②, ③ を用いて xy 平面に三角形を図示せよ．

(3) 問 (2) で図示した方程式 ① と ② の交点を A, ③ と ① の交点を B, ② と ③ の交点を C とし，交点 A, B, C の座標を求めよ．

(4) 交点 A, B, C で囲まれた三角形（$\triangle ABC$）の面積を求めよ．

(岐阜大 2009)　　(m20092615)

0.30 x , y , z を軸とする 3 次元空間内の $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ を頂点とする四面体 $OABC$ について，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $\triangle ABC$ の重心を G , $\overrightarrow{OG}=\boldsymbol{g}$ としたとき，$\boldsymbol{g}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ で表せ．

(2) $\triangle ABC$ の面積とそれに内接する円の面積を求めよ．

(3) 四面体 $OABC$ の体積とそれに内接する球の体積を求めよ．

(豊橋技科大 1996)　　(m19962707)

0.31 次の各問いに答えよ．

(1) 次の無限数列の一般項を示し，収束・発散を調べ，収束する場合にはその極限値を求めよ．

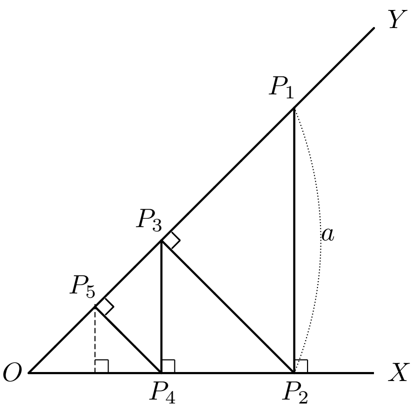
(a) $\dfrac{3}{1}$, $\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{7}{7}$, $\dfrac{9}{10}$, $\dfrac{11}{13}$, $\cdots\cdots$

(b) $\sqrt{2}-\sqrt{1}$, $\sqrt{4}-\sqrt{2}$, $\sqrt{6}-\sqrt{3}$, $\cdots\cdots$

(2) 図において，$\angle XOY=\pi/4$, P_1P_2 の長さを a とする．OY 線上の点 P_1 から，OX 線上に垂線を下ろした点を P_2 とする．さらに点 P_2 から OY 線上に垂線を下ろし，その点を P_3 とする．同様に順次 , P_4 , P_5 , $\cdots\cdots$ を無限にとるものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(a) 垂線（線分）の和を級数で示せ．

(b) 垂線（線分）の和を求めよ．



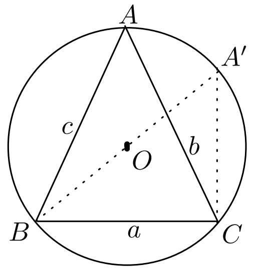
(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$ を求めよ．

(豊橋技科大 1999)　　(m19992704)

0.32 図に示す三角形 ABC の外接円の中心を O，半径を r，各辺の長さを a, b, c，各頂点の内角 $\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle ACB$ の大きさを A, B, C で表す．このとき次の問いに答えよ．

(1) 外接円の点 B を通る直径を $BA' = 2r$ とするとき，$\angle BA'C = \angle BAC$, $2\angle BAC = \angle BOC$ であることを示せ．

(2) 三角形 ABC の面積 S は，$S = \dfrac{r^2}{2}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$ と表せる．このことを，外接円の中心 O が三角形 ABC の内部にある場合について示せ．



(豊橋技科大 2000)　　(m20002701)

0.33 点 $\mathrm{P}(x, x^2)$ は，放物線 $y = x^2$ 上の点で 2 点 $\mathrm{A}(-1, 1)$, $\mathrm{B}(3, 9)$ の間にある．このとき，$\triangle\mathrm{APB}$ の面積の最大値を求めよ．

(三重大 2002)　　(m20023104)

0.34 直交座標系の単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ に関して，それぞれの位置ベクトルが

$$\overrightarrow{OA} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k} \qquad \overrightarrow{OB} = b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + a\boldsymbol{k} \qquad \overrightarrow{OC} = c\boldsymbol{i} + a\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}$$

で与えられる三点 A, B, C がある．以下の問に答えよ．

(1) 二点 AB 間の距離を求めよ．　(2) AB と AC のなす角を求めよ．

(3) $\triangle ABC$ はどのような三角形であるかを答えよ．

(三重大 2006)　　(m20063105)

0.35 近似式について，以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha << 1$ が成り立つ場合，$(1+\alpha)^3 \approx 1 + 3\alpha$ と近似できる理由を述べよ．

(2) $\cos(\theta + \triangle\theta)$ を θ の周りで，$\triangle\theta^5$ までテーラー展開せよ．

(3) 上記の展開式の 1 次 $(\triangle\theta)$ までを利用して，$\cos(61^\circ)$ の近似値を求めよ．ただし，テーラー展開内の θ はラジアン表記であることに留意せよ．

(三重大 2009)　　(m20093109)

0.36 原点を O とする 3 次元直交座標系上に，点 $A(0, 1, 2)$ と点 $B(3, 3, 0)$ がある．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\angle AOB = \theta$ として，$\cos\theta$ を求めよ．

(2) 線分 $\overline{AB}$ の長さを求めよ．

(3) 3 点 O, A, B を通る平面の法線ベクトルを求めよ．ただし，正規化しなくて良い．

(4) $\triangle AOB$ の面積を求めよ．

(三重大 2013)　　(m20133101)

0.37 xyz 空間に 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 2)$, $B(3, 4, 3)$ がある．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $\angle AOB = \theta$ としたとき，$\cos\theta$ を求めなさい．

(2) $\triangle OAB$ の面積を求めなさい．

(3) 平面 OAB の方程式を求めなさい．

(三重大 2014)　　(m20143103)

0.38 (1) $y = f(x)$ と 2 直線 $x = a,\ x = b$ と x 軸で囲まれる面積は，次式の定積分の定義により求めることができる．

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\triangle x$$

ただし，$f(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続とし，$\triangle x = (b-a)/n,\ x_k = a + k\triangle x$ とする．上記の積分の定義を用いて，$\displaystyle\int_0^1 xdx$ を求めなさい．ただし，導出過程も示すこと．

(2) 問 (1) の定積分の定義を用いて，

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ を求めなさい．

(三重大 2015)　　(m20153101)

0.39 3 次元直交座標系の xyz 空間に点 A$(0,\ 1,\ 1)$，点 B$(-a,\ 0,\ 1)$，点 C$(a\cos t,\ a\sin t,\ 0)$ がある．ただし，a は正の実数で，$0 \leqq\ t < 2\pi$ である．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $\angle ACB = \theta,\ t = \pi$ とした場合，$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ となる a を求めなさい．

(2) (1) の条件において，$\triangle ABC$ の面積を求めなさい．

(3) $\triangle ABC$ の重心を G とする．点 C について t を変化させたとすると，$\overrightarrow{AG}$ と $\overrightarrow{AC}$ が垂直となるような a がただ一つ決まる場合の $\cos t$ と $\sin t$ を求めよ．

(三重大 2016)　　(m20163102)

0.40 次のスカラー関数 $U(x, y, z)$ について以下の問いに答えよ．ただし，a は正の実定数とする．

$$U(x, y, z) = \exp\left[-a(x^2+y^2+z^2)\right]$$

(1) ベクトル $F = \nabla U$ を求めよ．

(2) $\nabla\cdot F = 0$ となるとき，x, y, z が満たす条件をすべて求めよ．

(3) $\nabla\times\ F$ を求めよ．

ここで，演算子 ∇ は次のように定義する．

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

(奈良女子大 2014)　　(m20143204)

0.41 ある集合 X の部分集合 A, B, C について，次のことを証明せよ．対称差 $A\triangle B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$，$B\triangle C = (B\setminus C)\cup(C\setminus B)$ がともに有限集合であるならば，$A\triangle C = (A\setminus C)\cup(C\setminus A)$ も有限集合である．（ただし，$A\setminus B$ は A の元で B に含まれないもの全体を表す.）

(神戸大 2012)　　(m20123807)

0.42 x, y の 2 変数関数 $f(x, y)$ に対し，

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

と定める．$f(x, y)$ が次の関数のときに $\triangle f$ を求めよ．ただし，以下において，i は虚数単位である．

(1) $f(x, y)$ は $(x^2 - iy^2)(1+i) + e^{x+iy}$ の実部．

(2) $f(x,y)$ は $\dfrac{1}{x+iy}$ の虚部.

(3) $f(x,y) = 7x^6y - 35x^4y^3 + 21x^2y^5 - y^7$

(4) $f(x,y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{20}(-1)^k \begin{pmatrix} 40 \\ 2k \end{pmatrix} x^{40-2k}y^{2k}$

(神戸大 2023)　　(m20233803)

0.43 三角形 OAB において，ベクトルを $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$ と定義し，$\angle OAB = \alpha$ とする．ベクトルの内積を用いて，三角形の 2 辺の長さの和は他の 1 辺より長くなることを示せ．

(広島大 2001)　　(m20014107)

0.44 四角形 $ABCD$ は，円に内接し，$AB = 6$, $BC = CD = 3$, $\angle D = 60°$ である．この四角形 $ABCD$ の面積を求めなさい．

(山口大 2017)　　(m20174303)

0.45 一辺の長さが 3 の正四面体 $ABCD$ において，辺 BC の中点を M とする．

さらに辺 CD 上で $CN = 2ND$ を満たす点を N とする，

(1) 線分 AM, AN, MN の長さを求めなさい．

(2) $\angle MAN = \theta$ とおくとき，$\cos\theta$ の値を求めなさい．

(3) $\triangle AMN$ の面積を求めなさい．

(山口大 2021)　　(m20214303)

0.46 $\boldsymbol{V}$ を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をもつ有限次元の実ベクトル空間とし，$\boldsymbol{W}$ を $\boldsymbol{V}$ の部分空間とする．任意の $x \in \boldsymbol{V}$ は $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W} \oplus \boldsymbol{W}^{\perp}$ ($\boldsymbol{W}^{\perp}$は $\boldsymbol{W}$ の直交補空間) を用いて $x = w + w'$ ($w \in \boldsymbol{W}$, $w' \in \boldsymbol{W}^{\perp}$) と一意に表すことができる．$x$ に対してこの w を対応させる $\boldsymbol{V}$ から $\boldsymbol{V}$ への写像を f と定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 任意の $x_1, x_2 \in \boldsymbol{V}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$f(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2) = \alpha_1f(x_1) + \alpha_2f(x_2)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $f \circ f = f$ が成り立つことを示せ．ただし，$f \circ f$ は f と f の合成写像である．

(3) 任意の $x, y \in \boldsymbol{V}$ に対して，$\langle\ f(x), y\ \rangle = \langle\ x, f(y)\ \rangle$ が成り立つことを示せ．

(高知大 2008)　　(m20084504)

0.47 平面中の点 P_1, P_2 のデカルト座標（直交座標）をそれぞれ $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ とする．これら 2 つの点 P_1, P_2 と原点 O とで作られる角を $\angle P_1OP_2 = \theta$ とする場合，$\cos\theta$ を 2 つの点の座標で表すとどのようになるか．

(愛媛大 2007)　　(m20074618)

0.48 S を平面上の円とする．

(1) A, B が S 上にあり，P が円弧 AB の上を動くとき，$\triangle APB$ の面積はいつ最大になるか答えよ．

(2) S に内接する n 角形 ($n \geq 3$) の面積はいつ最大になるか，理由を付けて答えよ．

(九州大 2003)　　(m20034701)

0.49 直交座標系の x, y, z 軸の基本ベクトルを $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とし，位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とする．

閉曲線 $C : \boldsymbol{r} = 2\cos\theta\boldsymbol{i} + 2\sin\theta\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ($0 \leqq \theta \leqq 2\pi$) について，以下の問いに答えよ．

(1) 閉曲線 C 上の点における大きさ 1 の接ベクトルを求めよ.

(2) スカラー場 $\varphi = \dfrac{1}{4}x^2 y$ の 閉曲線 C に沿う線積分を求めよ.

(3) 閉曲線 C で囲まれた円板を S とし，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{A} = -\frac{1+z}{x^2}\boldsymbol{i} + \frac{z^2}{xy}\boldsymbol{j} + (x^2 z - y)\boldsymbol{k}$$

とする．$(\triangledown\varphi)\times\ \boldsymbol{A} + \varphi(\triangledown\times\ \boldsymbol{A})$ の S 上の面積分を求めよ.

(九州大 2016)　　(m20164704)

0.50 直交座標系において，x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ とする.

ベクトル場

$$A = \triangledown(e^{xy} - yz^2) + \triangledown\times(z^3\boldsymbol{i} + x^3\boldsymbol{j} + \sin(2x-y)\boldsymbol{k}\ )$$

について以下の問いに答えよ.

(1) $\triangledown A$ を求めよ.　　(2) $\triangledown\times A$ を求めよ.

(3) $\triangledown A = 0$ かつ $\triangledown\times A = 0$ を満たす点を求めよ.

(九州大 2020)　　(m20204707)

0.51 (X_1, Y_1)，(X_2, Y_2)，(X_3, Y_3) を xy 平面上の相異なる 3 点とする．また，$|M|$ は正方行列 M の行列式を表すこととする．このとき，次の各問に答えよ.

(1) 正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．3 点 (X_1, Y_1)，(X_2, Y_2)，(X_3, Y_3) が同一直線上に存在するとき $|A| = 0$ となることを示せ.

(2) 変数 x, y に対して，正方行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ {X_1}^2 + {Y_1}^2 & X_1 & Y_1 & 1 \\ {X_2}^2 + {Y_2}^2 & X_2 & Y_2 & 1 \\ {X_3}^2 + {Y_3}^2 & X_3 & Y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．さらに，$\triangle_{i,j}$ を B の (i,j)-小行列式，つまり，B の第 i 行と第 j 列をとり除いて得られる 3×3 行列の行列式とする．B の第 1 行に関する余因子展開ににより，小行列式を用いて B の行列式を表せ.

(3) 前問の行列 B が $|B| = 0$ を満たすとき，変数 x, y が満たす方程式を xy 平面上に図示せよ.

(九州大 2021)　　(m20214706)

0.52 互いに異なる正の定数 a，b，c を考える．空間内の点 $O(0,0,0)$，$A(a,0,0)$，$B(0,b,0)$ $C(0,0,c)$ を頂点とする 4 面体を V とする．また V 内部にある点を $P(x,y,z)$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) 点 A，B，C，P を頂点とする 4 面体を V_1，点 O，B，C，P を頂点とする 4 面体を V_2，点 O，C，A，P を頂点とする 4 面体を V_3, 点 O，A，B，P を頂点とする 4 面体を V_4 とする．4 面体 V_1，V_2，V_3，V_4 の体積比 $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$ を a，b，c，x，y，z を用いて表せ．ただし，λ_j $(j = 1,2,3,4)$ は $0 \le \lambda_j \le 1$ および $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$ を満たす実数とする.

(2) 関数 $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(x, y, z)$, $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(x, y, z)$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{\phi} = \lambda_1 \nabla \lambda_2 - \lambda_2 \nabla \lambda_1 \qquad \boldsymbol{\psi} = \lambda_2 \nabla \lambda_3 - \lambda_3 \nabla \lambda_2$$

で定める．関数 $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(x, y, z)$, $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(x, y, z)$ を，a, b, c, x, y, z を用いて表せ．

(3) 関数 $f = f(x, y, z)$ を $f(x, y, z) = e^{x+y+z} \sin(x - z) \boldsymbol{\phi}(x, y, z) + x^2 \sin(-x + y) \psi(x, y, z)$ で定める．このとき，積分

$$\int_{\ell_{AB}} f \cdot d\boldsymbol{r}$$

を求めよ．ただし，ℓ_{AB} は点 A から B に進む方向を正とする線分，$\boldsymbol{r}$ は線分 ℓ_{AB} 上にある点の位置ベクトルである．

(4) 関数 f を前問で定めた関数とする．このとき，積分

$$\int_S (\nabla \times f) \cdot \boldsymbol{n} \, dS$$

を求めよ．ただし，S は点 O, B, A を頂点とする 3 角形，$\boldsymbol{n}$ は z 成分が負となる S の単位法線である．

(九州大 2022)　　(m20224702)

0.53 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = (1, 1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (2, 1, 3) \in \boldsymbol{R}^3$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{c} = (1, -2, -1)$ について，$\boldsymbol{c} = p\boldsymbol{a} + q\boldsymbol{b}$ となる実数 p, q を求めよ．

(2) $\boldsymbol{d} = (1, 2, 2)$ が $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ で生成される部分空間 $\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle$ に含まれないことを示せ．

(3) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ で生成される部分空間 $\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d} \rangle$ の次元は何か．

(佐賀大 2009)　　(m20094908)

0.54 R を実数全体の集合とする．$\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a} = (2, 1, 3)$, $\boldsymbol{b} = (2, -2, 4)$, $\boldsymbol{c} = (0, 3, -1)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次独立であるか，または一次従属でるか，理由を含めて答えよ．

(2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ によって生成される部分空間を $\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \rangle$ とする．$\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$ が $\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \rangle$ に属するための条件を答えよ．

(佐賀大 2018)　　(m20184920)

0.55 一辺の長さが 1 であるような正方形の折り紙があり (fig.1), これを図のように折る場合を考える．

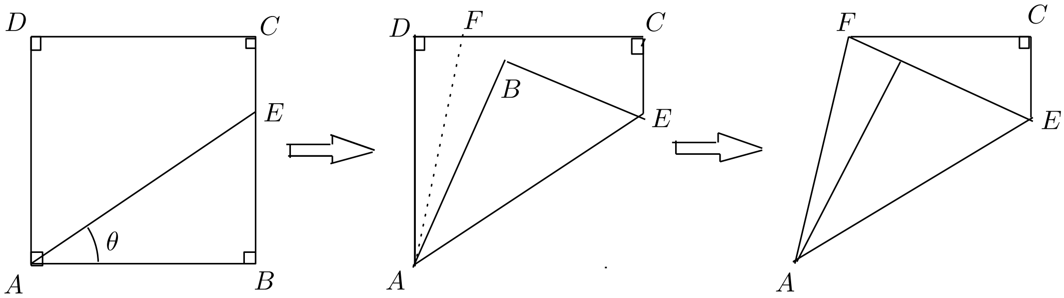


fig.1　　fig.2　　fig.3

(1) fig.1 の状態から $\angle BAE$ が θ であるような折り目 AE に沿って折ると fig.2 のようになった. 三角形 ABE の面積を求めよ.

(2) fig.2 の状態で三角形 ABE の面積が五角形 $ABECD$ の面積と等しいとき $\tan\theta$ の値はいくらか.

(3) 次に fig.2 の状態から $\angle BAD$ の二等分線 AF に沿って折ると fig.3 のようになった. 四角形 $AECF$ の面積を求めよ.

(長崎大 2005)　　(m20055002)

0.56 図 1 に示すように, xy 平面上に原点 $O(0,0)$ および点 $A(1,1)$, 点 $B(x,y)$ を考える. また, $2\times\ 2$ 行列を $M=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{bmatrix}$ とする. また, ベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ の長さを $|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{OB}|$ で表し, ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積を $<\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}>$ で表す.

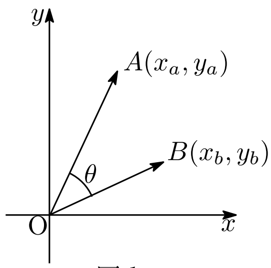


図 1

(1) $<\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}>$ を $|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{OB}|$ および図中の θ を用いて表しなさい.

(2) $|\overrightarrow{OB}|$ と $<\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}>$ を x, y で表しなさい。

(3) $\triangle OAB$ の面積を S とすると, $S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta$ で表される.
このことを用いて,

$$4S^2=|M|^2$$

が成り立つことを示しなさい. ただし $|M|$ は, 行列 M の行列式の値を表す.

(4) $\triangle OAB$ が正三角形となるとき, 点 B の座標を求めよ.

(長崎大 2005)　　(m20055004)

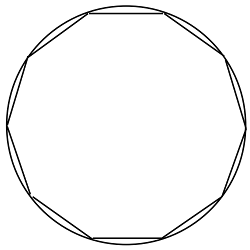
0.57 図 2 に示すように半径 1 の円に内接する正十角形の頂点を次の手順で 1 つずつ選び, 合計 3 個選ぶ.

- 10 個の頂点から勝手に 1 つの頂点を選び, その頂点を P_1 とする.
- P_1 を除いた 9 個の頂点の中から勝手に 1 つ選び, その頂点を P_2 とする.
- P_1 , P_2 を除いた 8 個の頂点の中から勝手に 1 つ選び, その頂点を P_3 とする.

このとき以下の問に答えなさい.

(1) 頂点 P_1 , P_2 , P_3 を選ぶ際の選び得るすべての場合の数を求めよ.

(2) 上の手順で選んだ P_1 , P_2 , P_3 で三角形を作るとき,
$\triangle P_1P_2P_3$ が直角三角形になる確率を求めよ.



単位円に内接する正 10 角形

(長崎大 2005)　　(m20055005)

0.58 (1) $\arctan x$ の $x=0$ における Taylor 展開を，５次の項まで求めよ．

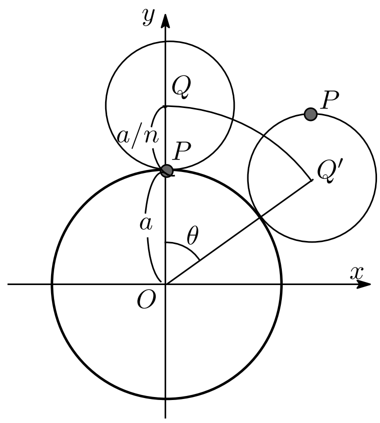
(2) $BC=10,\ AC=1,\ \angle C=\dfrac{\pi}{2}$ である直角三角形 ABC において，$\angle B$ の値（ラジアン）を小数第４位まで求めよ．

(熊本大 2004)　　(m20045201)

0.59 下図で示すように，固定された原点 O を中心とする半径 a の円の外側を半径 a/n の円が転がっていくとき，以下の問いに答えなさい．ただし n は自然数である．

(1) Q から Q' へ半径 a/n の円が転がった．$\angle QOQ'$ を θ とするとき，θ を用いて点 P の軌跡 $(x,\ y)$ を表しなさい．

(2) $0\leq\theta\leq 2\pi$ だけ回転したとき，点 P の軌跡の全長を求めなさい．



(熊本大 2022)　　(m20225204)

0.60　頂点の座標が, A 点 $(1,0,1)$, B 点 $(2,0,1)$, C 点 $(3,3,5)$ で与えられる $\triangle ABC$ の面積と法線方向の単位ベクトルを求めなさい.

(鹿児島大 2005)　　(m20055414)

0.61　原点 $O(0,0)$, 点 $A(2,1)$ がある時, 以下の問いに答えなさい.

(1) 点 A に対して x 軸に関して線対称な点 B を求めなさい.

(2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$, $\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|$ を求めなさい. それらを使い $\angle AOB=\theta$ とした時の $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めなさい.

(3) 点 A を原点の周りに反時計回りに 45°回転させた点　C の座標を求めなさい.

(鹿児島大 2010)　　(m20105409)

0.62　ベクトルに関する以下の各問に答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ について, $2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$, $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\dfrac{|\boldsymbol{c}|}{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}\neq 0$ が成り立つ. ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めよ. ただし, 求める θ の範囲は $-\pi\leq\theta\leq\pi$ とする.

(2) $\overrightarrow{OA}=(1,2,3)$, $\overrightarrow{OB}=(1,1,-1)$, $\overrightarrow{OC}=(1,0,1)$ であり, 原点 O から $\triangle ABC$ に垂線を下ろしたときの交点を D とする. $\overrightarrow{OD}$ ならびに $\triangle ABC$ の面積 S, 四面体 $OABC$ の体積 V を求めよ.

(鹿児島大 2012)　　(m20125405)

0.63　3 次元の空間に直交座標 x 軸, y 軸, z 軸を考える. 点 $A(2,2,2\sqrt{2})$, 点 $B(3,3,-3\sqrt{2})$ があるとき, 以下の問いに答えなさい.

(1) 原点を O とした時, $\angle AOB$ を求めなさい.

(2) 原点 O から線分 AB に垂線を下ろしたとき, その足を点 P とする. 線分 AP と線分 PB の長さの比を求めなさい. また, その時の点 P の座標も求めなさい.

(鹿児島大 2012)　　(m20125414)

0.64　x 軸と y 軸からなる直交座標平面上に点 $A(2,1)$ と点 $B(2,-1)$ があるとき, 以下の問いに答えなさい.

(1) 点 A の y 軸に関して対称な点 P の座標を求めなさい.

(2) 座標平面の原点を O としたとき, $OA\perp OQ$ かつ $OA=OQ$ となるような, 第 2 象限にある点 Q の座標を求めなさい.

(3) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積を求めなさい. また, $\angle AOB$ を θ としたとき, $\cos\theta$ の値を求めなさい.

(鹿児島大 2012)　　(m20125419)

0.65 直交座標系 $O-xyz$ において，点 $A(1,0,1)$ および点 $B(-2,2,0$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) $\triangle OAB$ において $\angle AOB$ を求めよ．また，$\triangle OAB$ の面積 S を求めよ．

(2) 点 A, 点 B を通る直線 ℓ の方程式を求めよ

(3) 原点 O を中心とする半径 R の球面：$x^2+y^2+z^2=R^2$ が直線 ℓ と点 Q で接するとき，半径 R ならびに点 Q の座標を求めよ．

(鹿児島大 2015)　　(m20155404)

0.66 直交座標系で $\overrightarrow{OP}=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{OQ}=\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ とする．ただし，$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ は互いに平行ではない．$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ はいずれも零ベクトルではない．

(1) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めなさい．

(2) $\triangle OPQ$ の面積 S を求めなさい．

(鹿児島大 2015)　　(m20155408)

0.67 O を原点とする直交座標系の 2 点 P, Q の位置ベクトルを $\overrightarrow{OP}=\begin{bmatrix} 3 \\ a \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{OQ}=\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ とする．

(1) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ が直交するような a を求めなさい．

(2) 前問で求めた a の値を用いて，$\triangle OPQ$ の面積 S を求めなさい．

(鹿児島大 2016)　　(m20165408)

0.68 3 次元の直交座標系 $O-xyz$ において，点 $A(1,2,-1)$, 点 $B(2,1,1)$, 点 $C(-1,4,5)$ がある．ただし，点 O は xyz 座標系の原点 $(0,0,0)$ である．以下の問いに答えよ．

(1) $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ．

(2) 線分 BC の中点を点 D とする．点 A, D を通る直線 ℓ の方程式を求めよ．

(3) 線分 OA, OB, OC とこれらに平行な辺で囲まれる平行六面体の体積 V を求めよ．

(鹿児島大 2018)　　(m20185423)

0.69 O を原点とする直交座標系の 2 点 P, Q の位置ベクトルを $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えなさい．

(1) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角が 45° のときの　a の値を求めなさい．

(2) $a=2$ のときの $\triangle OPQ$ の面積 S を求めなさい．

(鹿児島大 2018)　　(m20185427)

0.70 点 $O(0,0,0)$ を原点とする 3 次元直交座標系 $O-xyz$ において，点 $A(0,1,0)$, 点 $B(1,0,2)$ がある．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点 A と点 B を通る直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) $\triangle OAB$ の面積 S を求めよ．

(3) 点 O から直線 ℓ に下ろした垂線の長さ d を求めよ．

(鹿児島大 2021)　　(m20215404)

0.71 直交座標系の任意の点 $P(x, y, z)$ において，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を考える．

$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = (A_x,\ A_y,\ A_z) = (x, y, z)$ とし，原点を中心として半径 a の球面を閉曲面 S とした時，以下の問いに答えよ．

(1) 閉曲面 S 上の任意の点における法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ ($|\boldsymbol{n}| = 1$) を求めよ．

(2) 閉曲面 S 上全体にわたる面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ を求めよ．

(3) 閉曲面 S 内全体にわたる体積分 $\displaystyle\iiint \mathrm{div}\, \boldsymbol{A}\, dV = \iiint \bigtriangledown \cdot \boldsymbol{A}\, dV$ を求めよ．

(室蘭工業大 2016)　　(m20165508)

0.72 (1) 関数 $z = e^x \sin xy$ について，偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(2) 関数 $z = f(ax + by)$ について，$b\dfrac{\partial z}{\partial x} = a\dfrac{\partial z}{\partial y}$ であることを証明せよ．　($a,\ b$ は定数)

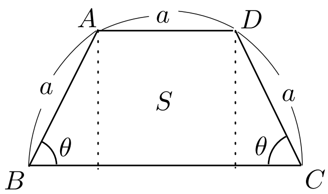
(3) 関数 $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ について，

$$(\triangle u =)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

であることを示せ．ここで，$\triangle$ はラプラシアンである．

(東京都立大 2021)　　(m20215903)

0.73 図のように辺 $AB = AD = DC = a$, $\angle ABC = \angle DCB = \theta$ の等脚台形がある．台形 $ABCD$ の面積 S を a, θ を用いて表せ．さらに面積 S を最大にするような θ の値を求めよ．



(工学院大 2004)　　(m20046211)