[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　lim

0.1　z は複素数であり，$i=\sqrt{-1}$ である．また，u,v,x,y,a,b,c は実数とする．

(1) 次の計算をしなさい．　$(1+i)^7$

(2) 次の極限値は存在するか．存在する場合はそれを求めなさい．

$$\lim_{z\to 2i}\frac{z^3-2iz^2+z-2i}{z-2i}$$

(3) 次の関数を $w=u+vi$ の形で表しなさい．ただし，$z=x+yi$ とし，$\overline{z}$ は z の共役複素数とする．

$$w=z\overline{z}+z-\overline{z}$$

(4) 次の関数が正則関数となるように係数を a,b,c 定めなさい．

$$w=ax^2y-2y^3+(bxy^2+cx^3)i$$

(5) 次の関数は調和関数であることを確かめなさい．また，u を実部にもつ正則関数を求めなさい．

$$u=x^2-6xy-y^2$$

(北海道大 2008)　(m20080102)

0.2　(1) 関数 $f(t)=\cos(\omega t)$ の（片側）ラプラス変換

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

を求めなさい．ただし，e は自然対数の底で，s はその実数部が正の複素数である．

(2) $s=c+i\phi$ とおく．ここで，i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ で，c,ϕ は実数とする．このとき，$G(\phi)=\lim_{c\to+0}cF(c+i\phi)$ を求めなさい．

(北海道大 2009)　(m20090103)

0.3　次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y=x^2e^{-x}$ の増減を調べ，その極値を求めよ．

(2) 極限 $\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}$ を求めよ．

(北見工業大 2013)　(m20130203)

0.4　$f(x)=\sqrt{x}\log x\quad(x\geq 0)$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ．

(2) $\lim_{x\to 0}f(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ の最小値を求めよ．

(4) $y=f(x)$ のグラフの概形を描け．

(岩手大 1997)　(m19970301)

0.5　次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)\,,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\sin x}{x^3}$$

(岩手大 1998)　(m19980305)

0.6　次の正方行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1-a & a\end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ．ただし，E は 2 次の単位行列である．

(1) 逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) A^n を求めよ.

(3) $2A^2 - 3A + E = O$ を満たす, a の値をすべて求めよ.

(4) (3) で求めた a の値を代入して, $\lim_{n \to \infty} A^n$ を求めよ.

（岩手大 2004） (m20040308)

0.7 関数 $f(x) = x^2 e^{-x+2}$ に関する次の問いに答えなさい.

(1) $y = f(x)$ の増減と極値を調べ，そのグラフをかきなさい.

(2) $\lim_{x \to \infty} f(x)$ を求めなさい.

(3) $\int_0^{\infty} f(x)dx$ を求めなさい,

(岩手大 2017) (m20170303)

0.8 関数 $f(x) = xe^{-2x}$ について次の問いに答えなさい.

(1) 関数 $f(x)$ を微分しなさい.

(2) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点を求めなさい.

(3) 関数 $f(x)$ の極限値 $\lim_{x \to \infty} f(x)$ および $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ をそれぞれ求めなさい.

(4) 関数 $f(x)$ の増減表を作成し，概形を図示しなさい．また，極値と変曲点の座標も示しなさい.

(岩手大 2018) (m20180303)

0.9 関数 $f(x) = x^2 e^x$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点を求めなさい.

(2) 関数 $f(x)$ の極限値 $\lim_{x \to \infty} f(x)$ および $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ をそれぞれ求めなさい.

(3) 関数 $f(x)$ の増減表を作成し，概形を図示しなさい．また，(1) で求めた極値と変曲点の座標も示しなさい.

(4) $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ を求めなさい.

(岩手大 2019) (m20190303)

0.10 関数 $f(x) = 4x^4 \log_e x$ について，次の問いに答えなさい．ただし，$x > 0$ とする.

(1) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点を求めなさい.

(2) 関数 $f(x)$ の $\lim_{x \to +0} f(x)$ および $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ をそれぞれ求めなさい.

(3) 関数 $f(x)$ の増減表を凹凸を含めて作成しなさい．また，極値と変曲点の座標も示しなさい.

(4) 不定積分 $\int f(x)dx$ を求めなさい.

(岩手大 2021) (m20210303)

0.11 次の $\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ．注意：log は自然対数で，π は円周率である.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = \boxed{\text{(p)}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log|\cos x|}{x^2} = \frac{1}{\boxed{\text{(q)}}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log|1 - x^2|}{\log|\cos x|} = \boxed{\text{(r)}}$

(4) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2^{\sin x} - 2}{\log|\sin x|} = \log \boxed{\text{(s)}}$

(秋田大 2002) (m20020402)

0.12 次の極限を求め，$\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}=\boxed{}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=\boxed{}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log x^2}{\log|\sin x|}=\boxed{}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^{\cos x}-2}{\log|\cos x|}=\boxed{}$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log|1-x^2|}{\log|\cos x|}=\boxed{}$

(秋田大 2007) (m20070403)

0.13 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin x - x}$ を求めよ.

(秋田大 2008) (m20080403)

0.14 次の極限を求め，カッコ内に当てはまる整数を記入せよ.

以下の arcsin は逆正弦関数のことで, $\sin^{-1}$ と表されることもある.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\boxed{(キ)}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)=\frac{1}{\boxed{(ク)}}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(2x)}{x}=\boxed{(ケ)}$

(秋田大 2010) (m20100402)

0.15 関数 $f(x)=xe^x$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 増減と極値を調べなさい.

(2) グラフの凹凸と変曲点を調べなさい.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$ を求めなさい.

(4) グラフの概形をかきなさい.

(秋田大 2012) (m20120403)

0.16 以下の四角内に当てはまる値を計算し，解答欄の指定した箇所に記入せよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x+1\right)=\boxed{\quad(ア)\quad}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\boxed{\quad(イ)\quad}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\boxed{\quad(ウ)\quad}$

(秋田大 2013) (m20130401)

0.17 次の不定形の極限を求めなさい.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

(秋田大 2014) (m20140402)

0.18 次の不定形の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x^2-x}\right)$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-x-1}{x^2}\right)$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\tan x-\sec x\right)$

(秋田大 2015) (m20150402)

0.19 次の極限を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{e^{2x}-1}$ （e は自然対数の底である.）

(秋田大 2017) (m20170402)

0.20 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x-1}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^2\log x$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left\{1-\frac{1+e^{-x}}{2(x^2+x+1)}\right\}$

(秋田大 2020) (m20200403)

0.21 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+5x-3}{x^4-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to 0}\frac{5x^2y^2}{x^2+y^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$

(秋田大 2021) (m20210403)

0.22 2 行 2 列の行列 $P=\begin{pmatrix}1-p & p\\ q & 1-q\end{pmatrix}$ と $Q=I-P$ について，次の問いに答えよ．ただし，I は 2 行 2 列の単位行列である．

(1) 点 P^{-1} が存在する条件を書き，そのとき P^{-1} を求めよ．

(2) 正の整数 n に対して，$Q^n=(p+q)^{n-1}Q$ を証明せよ．

(3) $|P+q-1|<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}P^n$ を求めよ．

(東北大 1993) (m19930504)

0.23 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $\dfrac{1}{1-x}$ を

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+R_n(x)$$

とおくとき，$|x|<1$ の範囲で $\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ となることを示せ．

(2) (1) を利用して，関数 $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ の x に関するべき級数展開を $|x|<1$ の範囲で求めよ．

(3) (2) の結果を利用して，$\sin x$ に関するべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\sin x)^{2n}$ の和を求めよ．ここに，$|x|<\frac{\pi}{2}$ とする．

(東北大 1996) (m19960501)

0.24 実数 y の関数:

$$f(y)=\frac{1}{1+e^{-\beta y}}\ ,\qquad (-\infty<y<\infty)$$

を定義する. ここで, β は非負の実数値のみをとる定数である. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) β の値が以下の 3 つの場合:

a) $\beta\longrightarrow+\infty$, b) $\beta=0$, c) その他の場合.

の各々について, $x=f(y)$ のグラフを描け.

(2) 関数 $x=f(y)$ の逆関数 $y=f^{-1}(x)$ を求めよ.

(3) 以下の不定積分を求めよ.

$$\int\log(1-x)dx$$

ただし, log は自然対数を表す.

(4) 以下の定積分を求めよ.

$$g(x) \equiv \int_0^x f^{-1}(z)dz$$

ただし, x の定義域は $0 \leq x \leq 1$ であり, $\lim_{x \to 0} x \log x = 0$ の意味で $0 \log 0 = 0$ とする.

(5) 関数 $g(x) - \alpha x$ を最小化する x を求めよ. ただし x の定義域は $0 \leq x \leq 1$, α は正の実数値のみをとる定数とする.

（東北大 2004） (m20040501)

0.25 x を実数として, 関数 $f(x)$ を $f(x) = x^2 e^{ax}$ と定義する. ただし, a は負の定数である.

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$, 第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(2) $x \to +\infty$ のとき, $f(x)$ の極限 $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ の増減, 極値, グラフの凹凸, 変曲点を調べ, 増減表を書き, $y = f(x)$ の概形を描け.

(東北大 2005) (m20050502)

0.26 $m = 1, 2, \cdots$ に対して $\lim_{x \to \infty} x^m e^{-x} = 0$ を示せ.

(東北大 2005) (m20050504)

0.27 (1) 関数の積の微分に関するライプニッツの公式を述べよ（証明はしなくてよい）.

$\{f(x)g(x)\}^{(n)} =$

(2) $x > 0$ で定義された関数 $h(x) = x^4 \log x$ を考える. $\lim_{x \to +0} h(x)$ を求めよ.

(3) $0 < m < 4$ であるような自然数 m に対し, (2) で定義した $h(x)$ の m 階導関数 $h^{(m)}(x)$ を求めよ. また, $\lim_{x \to +0} h^{(m)}(x)$ を求めよ.

(4) $\lim_{x \to +0} h^{(4)}(x)$ は存在するか.

(東北大 2006) (m20060507)

0.28 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ が収束することを証明し, 極限値 $\lim_{n \to \infty} a_n$ を求めよ.

(東北大 2009) (m20090506)

0.29 $\mathbb{R}^3$ を実数を成分とする 3 次元ベクトルよりなる実ベクトル空間,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とする.

(1) A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) $v \in \mathbb{R}^3$ に対し, $\left(\frac{1}{2}A\right)^n v$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が $n \longrightarrow \infty$ で収束するとき, その極限を

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}A\right)^n v = \begin{pmatrix} x_\infty \\ y_\infty \\ z_\infty \end{pmatrix}$$

とあらわす. この極限が存在し 0 でないとき, 成分の比 $x_\infty : y_\infty : z_\infty$ を求めよ.

(東北大 2011) (m20110503)

0.30 数列

$$a_n = \frac{-n^2+3n-1}{n^2+1} \qquad (\text{ただし } n=1,2,\cdots)$$

について，その最大値，最小値および $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(東北大 2012) (m20120508)

0.31 (1) 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ を求めよ．ただし，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とする．

$$a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = -a_n + S_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(2) 次の数列が収束するとき，実数 x の範囲と数列の極限を求めよ．

$$\frac{(2x-1)^n}{3^n} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(3) ロピタルの定理を用いて，以下の極限を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

(東北大 2016) (m20160503)

0.32 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ．

(2) 任意の n に対し $a_n \geq 0$ であるとする．級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散するならば，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$$

も発散することを示せ．

(東北大 2018) (m20180509)

0.33 $\mathbb{R}^2$ 上の 2 変数関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y) = (0,0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において連続であることを示せ．

(2) $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において全微分可能であるか，理由とともに答えよ．
なお，$\mathbb{R}^2$ 内の点 (a,b) の近傍で定義された実数値関数 $g(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ において全微分可能であるとは，ある定数 α，β が存在して

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{g(a+h,\ b+k) - g(a,b) - (\alpha h + \beta k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

が成り立つことをいう．

(東北大 2018) (m20180510)

0.34 $\mathbb{R}$ 内の閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数 $f(x)$ は $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 1$ をみたすとする．正の整数 n に対し

$$b_n = \int_0^1 f(x)\cos\frac{x}{\sqrt{n}}dx$$

とおくとき，

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty}(b_n)^n = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)$$

が成り立つことを以下の設問に沿って証明せよ.

(1) 任意の $x \geqq 0$ に対し

$$0 \leqq \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \leqq \frac{x^3}{6}$$

が成り立つことを示せ.

(2) 任意の n に対し

$$\left|b_n - 1 + \frac{1}{2n}\int_0^1 x^2 f(x)dx\right| \leqq \frac{1}{6n\sqrt{n}}\int_0^1 x^3\,|f(x)|\,dx$$

が成り立つことを示せ.

(3) 任意の実数 $\alpha,\ \beta$ に対し

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n\sqrt{n}}\right)^n = e^{\alpha}$$

が成り立つことを示せ.

(4) (2) および (3) の結果を利用して $(*)$ を結論せよ.

(東北大 2018) (m20180511)

0.35 任意の自然数 n に対する数列を以下の定積分により定義する.

$$I_n = \int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^{2n-1}x}$$

(1) I_1 を求めよ.

(2) I_2 を求めよ．必要であれば次の関係式を用いよ.

$$\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^3 x}$$

(3) I_n に成立する漸化式を求めよ.

(4) 以下に示す極限を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nI_n}{2^n}$$

(東北大 2020) (m20200502)

0.36 次の極限値をそれぞれ求めよ

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x-2} - x + 1\right)$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3}$

(東北大 2022) (m20220503)

0.37 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{n^2 - i^2}$ を定積分で表し，
極限値を求めよ. (お茶の水女子大 1997) (m19970602)

0.38 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x^3\log x$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+e^x)^{1/x}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x+\sin x}{x}$

（お茶の水女子大 1999）　(m19990602)

0.39　関数 $f(x)=x^{1/x}$ $(x>0)$ の最大値をとる点を求めよ．

また，$\displaystyle\lim_{x\to +0}f(x)$,　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ を求めよ．

（お茶の水女子大 1999）　(m19990603)

0.40　次の各問に答えよ．

(1) $\tan x\left(\dfrac{-\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $\tan^{-1}x(-\infty<x<\infty)$ で表す．$\tan^{-1}x$ の導関数を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{x}{x^2-6x+13}dx$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2}+\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}\right)=\frac{\pi}{4}$ となることを示せ．

（お茶の水女子大 1999）　(m19990606)

0.41　平均値の定理は次のように書くことができる．

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\theta h),\quad 0<\theta<1$$

次の各関数に対して θ を x と h の関数として表せ．

(1) $f(x)=x^2$　(2) $f(x)=x^3$　(3) $f(x)=e^x$　(4) $f(x)=\log x$ $(x>0)$

$x\neq 0$ で固定したときに各関数について，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\theta$ を求めよ．

一般に $f(x)$ が C^2 級の関数で $f''(x)\neq 0$ のとき $\displaystyle\lim_{h\to 0}\theta$ の値は定まるかどうか調べよ．

（お茶の水女子大 2000）　(m20000603)

0.42　(1) 関数 $\sin x$, $\sin^2 x$ および $x^2-\sin^2 x$ の原点における Taylor 展開を 4 次の項まで示せ．ただし，$\sin^2 x$ は $(\sin x)^2$ の意味である．

(2) 必要なら上の計算を利用して，不定形の極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$ を計算せよ．

（お茶の水女子大 2000）　(m20000606)

0.43　次の極限が存在するように定数 a,b,c を定め，そのときの極限を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\cos x+a+bx+cx^2}{x^3}$$

(お茶の水女子大 2003)　(m20030602)

0.44　(1) $(-1,1)$ を定義域とする関数 f を，$f(x)=\arctan x+\arctan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ で定める．ただし，$\arctan x$ は，$\tan x\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数とする．

(a) $f'(x)$ を求めよ．

(b) $\arctan\dfrac{1}{2}+\arctan\dfrac{1}{3}=\dfrac{\pi}{4}$ を示せ．

(2) g を $(-1,1)$ 上で定義された C^2級関数とする　．g のテイラー展開あるいはロピタルの定理を用いて

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(h)+g(2h)+g(-3h)-3g(0)}{h^2}=7g''(0)$$

を示せ（ただし，ロピタルの定理を用いる際は，定理の仮定を満たしていると確認する事）．

(3) h を $(-2,2)$ 上で定義された C級関数とする . $h(0)=0$ であれば，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{h(x)}{x^{3/2}}\,dx$ が存在することを示せ.

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090601)

0.45 関数 $f(x)=\log(1-x)$ を考える.

(1) 関数 $f(x)$ の $x=0$ のおけるマクローリン展開を考え，３次関数による近似 $S_3(x)$ を求めなさい.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{-k}}{k}$ を求めなさい.

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090603)

0.46 $f(x)$ を微分可能関数とし $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x)=\beta$ とする．このとき任意の実数 h に対して

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x+h)-f(x)\right)$$

が収束することを示し，その極限の値を β と h を用いて表せ.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130603)

0.47 (1) 正の実数 a と自然数 n に対して

$$I_n(a) := \int_0^a \frac{dx}{(1+x^2)^n} \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

とおく．極限 $I_n=\displaystyle\lim_{a\to\infty} I_n(a)$ が存在することを確かめ，I_n を求めよ.

(2) 整数 k,n は $0\le k<n$ を満たすものとし，$a_0,\cdots,a_k$ は負の実数，$a_{k+1},\cdots,a_n$ を正に実数とする．このとき x に関する方程式

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$$

は正の実数解を一つだけ持つことを示せ.

(お茶の水女子大 2015)　　(m20150601)

0.48 以下の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{e^x}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{\log x}{x-1}\right)$

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160614)

0.49 $a\ne 0$ とし，$f(x)$ を $x=0$ のまわりで定義された関数とする.

$$(*) \qquad \lim_{x\to a}\frac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}$$

が存在するために $f(x)$ が満たすべき条件を求めよ．また $(*)$ が存在するための条件を $f(x)$ が満たす時，$(*)$ の値を求めよ.

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170601)

0.50 極限値を求めよ.　(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-\cos x}{x}$

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170609)

0.51 以下の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5x-7x^3}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3\sin 4x)}{x}$

(お茶の水女子大 2018)　　(m20180604)

0.52 $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ が有理数}) \\ 0 & (\text{上記以外の数}) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \left(x = \dfrac{1}{2^m}, m = 1, 2, 3, \cdots\right) \\ 0 & (\text{上記以外の点}) \end{cases}$$

とする.

(1) f が区間 $[0,1]$ 上リーマン積分可能かどうか、理由とともに答えよ.

(2)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \sup_{\frac{k-1}{2^n} \leq x \leq \frac{k}{2^n}} g(x)$$
を求めよ.

(3) g が区間 $[0,1]$ 上リーマン積分可能かどうか、理由とともに答えよ.

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200601)

0.53 以下の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 2^x}{x}$

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200613)

0.54 N を自然数とする．このとき，次の各問に答えよ;

(1) $y \geq 0$ に対して，次が成り立つことを示せ.

$$e^y \geq \frac{y^N}{N!}$$

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}(1+x)^N dx$ の収束・発散を調べよ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ を $\displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} t\left(1 + \log\frac{1}{t}\right)^N dt \quad (n = 1, 2, \cdots)$ で定める．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210604)

0.55 (1) (i) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$ は収束していることを示せ.

(ii) 0 より大きい実数 x に対し，$f(x) = \displaystyle\int_x^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$ とおく.

$0 < x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$ が成り立つことを示せ.

(iii) (ii) での $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ と記すと，その微分に関して
$g'(x)^2 = g(x)^3 + 1$ が成り立つことを示せ.

(2) 関数 $h(x)$ はすべての実数 x で $h(x) > 0$ をみたす連続関数とし，
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} h(x)$ もみたすと仮定する.

(i) $a > 0$ に対し，X_a は $h(x) \geq a$ をみたす実数 x の集合とする.
このとき，X_a は有界集合であることを示せ.

(ii) $h(x)$ は実数上の関数として最大値をもつことを示せ.
（閉区間上の連続関数に対する最大値の定理を用いてよい.）

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220603)

0.56

$$x(t) + a\int_0^t x(t)dt = f(t) + b\int_0^t f(t)dt$$

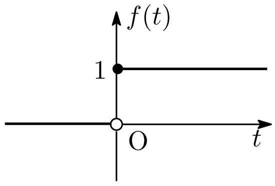
において $f(t)$ は下図のステップ関数とする．ただし，

$$a > b > 0 \ , \ \lim_{t \to +0} x(t) = 1 \ , \ \lim_{t \to -0} x(t) = 0$$

このとき

(1) $x(t)$ を求めよ．

(2) $x(t)$ の概形を図示せよ．



$$f(t) = 1 \qquad t \geqq 0$$
$$f(t) = 0 \qquad t < 0$$

(東京大 1997)　(m19970701)

0.57 数列 $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ がある．この数列の 隣接した 3 項の間には次のような関係式が成り立つ．

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

(1) $a_0 = a_1 = 1$ として，極限値

$$\tau = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

を求めよ．

(2) 上の漸化式をベクトルおよび行列の関係式を用いると

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

と書かれる．この行列を対角化し，またその時の固有ベクトルを求めることにより，$a_0 = a_1 = 1$ を初期値とした極限値

$$\tau = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

を求めよ．また a_n の一般項はどのように書けるか．

(東京大 1997)　(m19970703)

0.58 極座標 (r, θ) で表せる 2 次元領域 $r > 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$ で

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \qquad \text{(i)}$$

を満たし，境界条件

$$u(1, \theta) = \cos 3\theta \qquad 0 \leq \theta < 2\pi \qquad \text{(ii)}$$

$$\lim_{r \to \infty} u(r, \theta) = 0 \qquad 0 \leq \theta < 2\pi \qquad \text{(iii)}$$

を満たす解 $u(r, \theta)$ を以下の手順で求めよ．

(1) (i) の解として $u(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ と表せるものを考える．これを (i) に代入し，左辺が r のみの関数，右辺が θ のみの関数であるような式を導け．

(2) この式が上記の 2 次元領域に対応する任意の (r, θ) に対して成立するためにはその両辺は r , θ によらない定数でなくてはならない．そこで，この定数を c として f の r に関する微分方程式と g の θ に関する微分方程式を導け．

(3) m を整数として $f(r) = r^m$ とおき，定数 c を m で表せ．次に，これを g の θ に関する微分方程式に代入し，(i) の解で，$u_m(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ の形のものを求めよ．

(4) d_m を定数として，(i) の解で $u(r,\theta)=\sum_m d_m u_m(r,\theta)$ の形の解を考え，それが境界条件 (ii),(iii) をみたすようにして求める解 $u(r,\theta)$ 定めよ.

(東京大 2000)　　(m20000705)

0.59 0 1 1 0 0 1 0 1 1 . . . のような, 0 と 1 からなる数字列がある. 数字列の先頭から $i+1$ 番目の数字は, 確率 $x(0<x<1)$ で i 番目と同じ数字が現れる. なお数字は, 数字列の先頭を 1 番とする.

(1) 数字列の位置から数えた場合, 同じ数字がちょうど n 個連続してあらわれる確率 $P(n)$ を求めよ.

(2) (1) の場合, 同じ数字が連続する個数の期待値 L を求めよ. ただし,

$$\lim_{n\to\infty} nx^n = 0 \quad (0<x<1)$$

を用いてよい.

(3) 数字列の先頭から j 番目の数字が 0 である確率 Q_j をとするとき，Q_{j+1} を Q_j を用いてあらわせ.

(4) 数字列の先頭が 0 であるとき, Q_j を x, j を用いてあらわせ.

(東京大 2002)　　(m20020705)

0.60 p,q を任意の実数とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) 行列　$A=\begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$　について，$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ を満たす実数 λ と非零ベクトル $\boldsymbol{x}$ の組をすべて求めよ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を，次の漸化式で与える.　$\begin{cases} a_{n+1}=(1-p)a_n+qb_n \\ b_{n+1}=pa_n+(1-q)b_n \end{cases}$

ただし，$0<p<1$，$0<q<1$ とし，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の初項を，それぞれ , a_0, b_0 とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を p,q,a_0,b_0 を用いて示せ.

(東京大 2006)　　(m20060702)

0.61 1 の n 乗根は，方程式

$$z^n = 1 \qquad (\ n \text{ は自然数}\ )$$

をみたす n 個の複素数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ により与えられる．ここで，各 n 乗根 z_i の偏角 $\arg z_i$ は，$0 \le \arg z_1 < \arg z_2 < \cdots < \arg z_n < 2\pi$ をみたしているとする．また，複素数平面において，$z_1, z_2, \cdots, z_n$ に対応する点をそれぞれ $P_1, P_2, \cdots, P_n$，原点を O とする．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) 1 の 3 乗根に対応する点 P_1, P_2, P_3 を複素数平面上に図示せよ．また，三角形 $P_1P_2P_3$ の面積 S_3 を求めよ.

(2) 複素数平面上において，1 の 3 乗根に対応する点 P_1, P_2, P_3 と原点が O がつくる三つの三角形，すなわち OP_1P_2，OP_2P_3，OP_3P_1 の重心をそれぞれ G_1，G_2，G_3 とする．三つの重心が作る三角形 $G_1G_2G_3$ の面積 A_3 を求めよ.

(3) 前問 (2) と同様にして，1 の n 乗根に対応する点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ と原点が O がつくる n 個の三角形の重心 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ を考える．n 角形 $P_1P_2\cdots P_n$ の面積 S_n と n 角形 $G_1G_2\cdots G_n$ の面積 A_n の比 $r_n=\dfrac{A_n}{S_n}$ を求めよ.

(4) 前問 (3) で求めた面積比 r_n の $n\to\infty$ のときの極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r_n$ を求めよ.

(東京大 2007)　　(m20070703)

0.62 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1 , λ_2 とそれらに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ をそれぞれ求めよ．ただし，絶対値が大きい方の固有値を λ_1 とする．

(2) xy 平面上の 3 点 $P(p_1,\, p_2)$, $Q(q_1,\, q_2)$, $R(r_1,\, r_2)$ を頂点とする三角形 PQR の面積 S の導出過程を示し，各頂点の座標 p_1 , p_2 , q_1 , q_2 , r_1 , r_2 により表せ．また，各頂点の位置ベクトルが $\boldsymbol{A}$ により一次変換された際，その三角形の面積は何倍になるかを求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ をとり，$\boldsymbol{a}$ に $\boldsymbol{A}$ を n 回かけたベクトルを $\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ とする．その成分 α_n , β_n および $\boldsymbol{A}^n$ を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(4) 極限値 $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n}{\beta_n}$ が一定の値に収束することを示し，その値を求めよ．

(東京大 2009)　　(m20090704)

0.63 (1) N 個の同じボールを n_1 個, n_2 個, n_3 個 $(n_1 + n_2 + n_3 = N)$ の組に分ける組み合わせの総数が以下の式で表されることを示せ.

$$\frac{N!}{n_1!n_2!n_3!}$$

(2) N 個の同じボールを n_1 個, n_2 個, $\cdots$, n_m 個 $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} n_i = N\right)$ の組に分ける組み合わせの総数 W はいくつになるか. 導出過程とともに示せ.

(3) (2) で得られた W を用いて, $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{N} \log_e W$ を計算することを考える.

(a) $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{N} \log_e N = 0$ となることを示せ.

(b) $N \to \infty \left(N = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} n_i\right)$ としたとき, $\dfrac{n_i}{N}$ はそれぞれある値 p_i に収束する. すなわち $p_i = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{n_i}{N}$ $(i = 1, 2, \cdots m)$. このとき, $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{N} \log_e W$ を p_i のみで表せ.

ただし以下に示す $k!$ (k は正の整数) に関する不等式を用いてよい.

$$\sqrt{2\pi} k^{k+1/2} e^{-k+1/(12k+1)} < k! < \sqrt{2\pi} k^{k+1/2} e^{-k+1/12k}$$

(東京大 2010)　　(m20100705)

0.64 半径 r の円周に内接する正 m 角形 $(m \geqq 3)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) この正 m 角形の面積 A_m を求め，m が無限大のときの極限を算出せよ．ただし，下記の関係を用いてよい．

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(2) この正 m 角形を底面とする高さ h の正 m 角柱を考える．図 1 は，$M = 6$ の場合の例である．この側面は m 個の長方形（$2m$ 個の直角三角形）で構成される．側面の総面積 B_m を求め，m が無限大のときの極限を算出せよ．

(3) この正 m 角柱の底面を面内で角 π/m だけ正 m 角形の中心で回転して得られる高さ h の多面体を考える．この多面体は，正反 m 角柱と呼ばれる．図 2 は，$m = 6$ の場合の例である．この側面は $2m$ 個の二等辺三角形で構成される．側面の総面積 C_m を求め，m が無限大のときの極限を算出せよ．

(4) 正反 m 角柱の高さを h/n $(n \geqq 2)$ にして n 段積み重ねることを考える．図 3 は $M = 6$, $n = 2$ の例である． この側面は $2mn$ 個の二等辺三角形で構成される． 側面の総面積 D_{mn} を求めよ．さらに，$n = m^2$ の場合を考え，m が無限大のときの D_{mn} の極限を算出せよ．

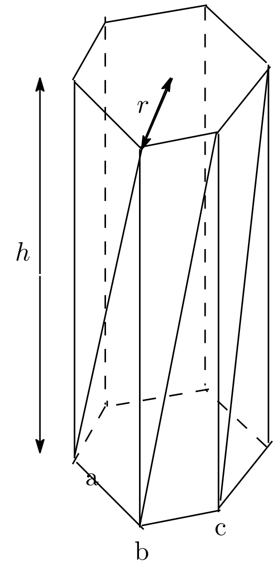


図 1

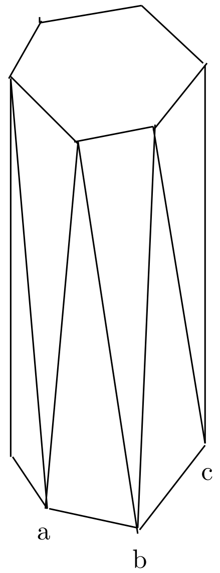


図 2

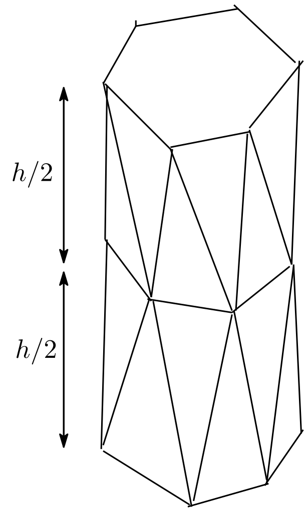


図 3

(東京大 2013)　　(m20130703)

0.65　複素積分を利用して実数積分を求めることを考える．以下の問いに答えよ．

(1)　まず，ガウス積分と呼ばれる実数積分 $I(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ を考える．α は正の定数であり; x は実数である．y を実数とするとき，$\{I(\alpha)\}^2$ は以下の式で表される．

$$\begin{aligned}\{I(\alpha)\}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dxdy\end{aligned}$$

この式を極座標 (r, θ) 表示に変換せよ．

(2)　$I(\alpha) = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$ となることを導出過程とともに示せ．

(3)　図 4.1 に示すように x 軸を実軸，y 軸を虚軸とする複素平面上において半径 R の扇形で C_1, C_2, C_3 からなる経路 C を反時計回りに一周することを考える．i を虚数単位とし，z を複素数とするとき，以下の積分を求めよ．

$$\oint_C e^{iz^2} dz$$

(4)　$\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} e^{iz^2} dz = 0$ となることを示せ．ただし，$0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$ において，$\sin\varphi \geq \dfrac{2\varphi}{\pi}$ を用いてよい．

(5)　上記のガウス積分と複素積分を用いて，実数積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$ の値を求めよ．

(6)　実数積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ の値を求めよ．

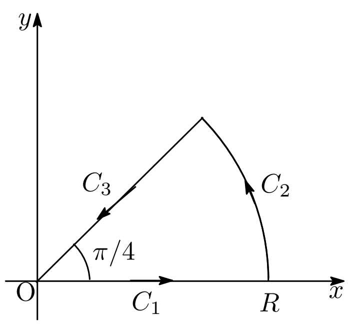


図 4.1

(東京大 2015)　　(m20150704)

0.66 袋の中に 3 色の玉が 8 個入っており，赤玉が 4 個，緑玉が 2 個，青玉が 2 個である．A さんが袋の中から無作為に玉を 3 個取り出し，5 個の玉が残る袋の中から B さんが無作為に玉を 3 個取り出し，色を確認した後に玉をすべて袋に戻す．この過程を 1 回の試行とし，A さんが赤，緑，青の 3 色の玉を 1 個ずつ取り出せたときを $X=1$，それ以外をX=0とし, Bさんが赤，緑，青の 3 色の玉を 1 個ずつ取り出せたときをY=1，それ以外を $Y=0$ とする．この試行を繰り返し行うとき，以下の問いに答えよ．

(1) この試行を 1 回行ったときの，次の統計量を求めよ．
 (a) 期待値 $E(X)$ および $E(Y)$．
 (b) 相関係数 $\rho(X,Y)$．

(2) A さんは n 回目の試行で初めて $X=1$ となったときに n 点もらえるとする．
 (a) もらえる点数が 3 点である確率を求めよ．
 (b) A さんのもらえる点数の期待値は，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha\sum_{k=1}^{n}k\beta^{k-1}$ という形で表せる．ただし，α と β は実数とする．α および β の値を求めた後，期待値を求めよ．

(3) B さんは n 回目の試行で初めて $Y=1$ となったときに r^n 点もらえるとする．ただし，r は正に実数とする．B さんがもらえる点数の期待値が有限な値をとるための，r の条件を求めよ．

(東京大 2018)　　(m20180702)

0.67 i を虚数単位とし，z は複素数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 次の複素数を $x+iy$（x,y は実数）の形ですべて求めよ．ただし，x,y の表式に三角関数を含んではならない．

 (a) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^3$　　(b) $i^{1/2}$　　(c) $\dfrac{(1-i)^6}{(1+i)^8}$

(2) 関数 $z=\tan\omega=\dfrac{\sin\omega}{\cos\omega}$ の逆関数を $\omega=\tan^{-1}z$ で表す．
 (a) 次の式が成り立つことを示せ．　$\tan^{-1}z=\dfrac{i}{2}\log\left(\dfrac{i+z}{i-z}\right)$
 ただし，log は複素対数関数である．
 (b) $\tan^{-1}z$ の z に関する微分を求めよ．

(3) 複素平面において，曲線 C を $z=e^{i\theta}$ $(0\leq\theta\leq\pi)$ とする．
 (a) 次の積分 $I(k)$ を求めよ．ここで，k は $0<k<1$ の定数とする．　$I(k)=\displaystyle\int_C\frac{1}{k^2z^2+1}dz$
 (b) $k=2-\sqrt{3}$ のとき，I の値を求めよ．

(4) 実積分 J の値を留数定理により求めることを考える．　$J=\displaystyle\int_0^\infty\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx$
 (a) J の積分範囲を $[-\infty,\infty]$ と変形して，被積分関数に e^{ix} を用いて J を表せ．
 (b) 関数 $f(z)=1/(z^2+1)^2$ とする．複素平面において，図 1 の半径 Γ（円弧 ADB）の半径 R が十分に大きい時，次のことが成り立つことを示せ．　$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz=0$
 (c) 図 1 の C に関する周回積分を考えることにより，J の値を求めよ．
 このとき，複素平面の上半平面において，

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)e^{iz}dz=0$$

 であることを用いてよい．

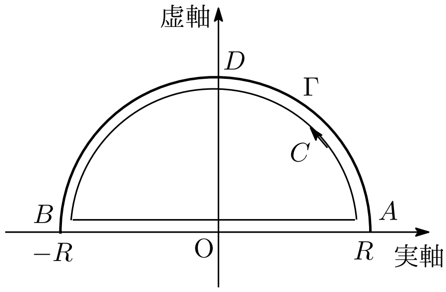


図 1

(東京大 2020)　　(m20200703)

0.68 数列 $x_n,\ y_n,\ z_n\ \ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を，次の漸化式で定義する．

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \qquad (n \geq 0)$$

ただし，

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，初期値 $x_0,\ y_0,\ z_0$ は実数で与えられているものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の全ての固有値と，それに対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) A^n を求めよ．

(3) $x_0>0,\ y_0>0,\ z_0>0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{{x_n}^2+{y_n}^2+{z_n}^2}<C$ となる定数 $C\ (C>0)$ が存在するための，初期値 $x_0,\ y_0,\ z_0$ に関する必要十分条件を示せ．

(東京大 2020)　　(m20200704)

0.69 以下の問いに答えよ．ただし，x は実変数，y は x に関する実関数であり，
$y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ， $y'=\dfrac{dy}{dx}$ とする．また，e は自然対数の底とする．

(1) 次の微分方程式について考える．ただし，y は，任意の x に対し $y>0$ を満たすものとする．

$$y'-2y\sin^2(x)=\frac{e^{2x}\cos(2x)}{y}$$

(a) 関数 $f(x)$ を次式により定義する．定積分を計算し，$f(x)$ を求めよ．

$$f(x)=\int_0^x\left[-2\sin^2(t)\right]dt$$

(b) $z=ye^{f(x)}$ とするとき，$\dfrac{dz}{dx}$ を x と z の関数として表せ．

(c) y の一般解を求めよ．

(2) 次の微分方程式について考える．ただし，α および n は実定数であり，α は $-1\leq\alpha\leq 1$ を満たすものとする．

$$y''-2\alpha y'+y=2e^x$$

(a) y の特解を求めよ．

(b) y の一般解を求めよ．

(c) $\alpha = 1$ とする． $y(0) = 1$ および $y'(0) = 2$ を満たす y に関して，次の極限の収束・発散を調べよ．収束する場合にはその極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to +0} y^{x^{-n}}$$

(東京大 2022)　　(m20220701)

0.70 実数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ が $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ を満たすならば，

$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ となることを示せ．

(東京工業大 1997)　　(m19970802)

0.71 (1) 関数 $x \cos x,\ \log(1+3x)$ をそれぞれ 3 次の項まで Maclaurin 展開せよ．

(2) 次の極限を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x \to 0} \left\{ \frac{1}{\log(1+3x)} - \frac{1}{3x \cos x} \right\}$

(東京工業大 2001)　　(m20010801)

0.72 次の 2 つの積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{M \to \infty} \int_1^M \frac{\log(a+x)}{x^2} dx$　　($a > 0$ は定数)．

(2) $\displaystyle\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{1}{xy(x+y)} dx dy$

(東京工業大 2004)　　(m20040802)

0.73 次を示せ．

(1) $\boldsymbol{R}$ 上の実数値連続関数 f が周期 p を持つ周期関数ならば次式が成り立つ．

$$\int_x^{x+p} f(t) dt = \int_0^p f(t) dt \quad (x \in \boldsymbol{R})\ .$$

(2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_a^b |\sin nx| dx = \frac{2(b-a)}{\pi} \quad (b > a)\ .$

(東京工業大 2006)　　(m20060802)

0.74 n を整数として以下の設問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x \, \cos nx \, dx$ を計算せよ．

(2) $f(x)$ を $[0,\ \pi]$ 上の連続関数とする．$f(x)$ が微分可能で導関数 $f'(x)$ が連続であれば

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^a f(x) \cos nx \, dx = 0$$

が成り立つことを示せ．（ ここで a は任意の実定数とする．）

(東京工業大 2010)　　(m20100801)

0.75 次の微分方程式　$\displaystyle 6\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - y = 0$　の解 $y = y(x)$ のうちで $y(2) = 3$ および $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$ をみたすものを求めなさい．

(東京農工大 2007)　　(m20070901)

0.76 (1) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + 3y = \cos 2x$$

の解 $y = y(x)$ のうちで周期関数となるものを求めなさい．

(2) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 1$$

の解 $y = y(x)$ について $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x)$ の値を求めなさい．

(東京農工大 2011)　　(m20110901)

0.77 関数 $f(x)$ 　$(-\pi < x < \pi)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{1-\cos x}} & (-\pi < x < \pi,\ x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

により定義する．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ は連続関数であることを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} f'(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to 0-} f'(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能でないことを示せ．

(電気通信大 1999)　　(m19991001)

0.78 方程式 $y + e^{1-xy} = 0$ を満たし，$y(0) = -e$ であるような微分可能な関数 $y = y(x)$ について，次の問に答えよ．

(1) 導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ および，2 次導関数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を x, y の有理式で表し，それらの $x = 0$ における値を求めよ．

(2) $y(x)$ が定義される最大区間を $(-\infty, a)$ とするとき，a の値を求め，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to a-0} y(x)$ を求めよ．

(電気通信大 2001)　　(m20011003)

0.79 $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}x}{x^2+1}\right)$ について，次の問に答えよ．

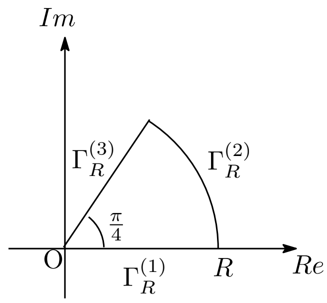
(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$，　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$，　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ 　の値を求めよ．

(2) $f'(x)$ を計算せよ．

(3) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(電気通信大 2006)　　(m20061001)

0.80 右図に示すように，複素平面上にある中心角 $\pi/4$，半径 $R(>0)$ の領域の周囲を反時計回りに 1 周する経路 Γ_R を考える．また，図にあるように経路 Γ_R の各部分を $\Gamma_R^{(1)}, \Gamma_R^{(2)}, \Gamma_R^{(3)}$, と名付ける．



以下の 3 つの問いに順に答えよ．

(1) 経路 Γ_R では式 ① が成立する．

$$\int_{\Gamma_R} e^{-z^2} dz = 0 \qquad ①$$

次式のように G_R, P_R, C_R, S_R を定義するとき，式 ① をこれらを用いて表せ．

$$G_R = \int_0^R e^{-x^2} dx\ , \qquad P_R = \int_{\Gamma_R^{(2)}} e^{-z^2} dz\ ,$$

$$C_R = \int_0^R \cos r^2 dr\ , \qquad S_R = \int_0^R \sin r^2 dr\ ,$$

(2) P_R について次の不等式 ② が成立することを示すとともに，

$$|P_R| \leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2\cos 2\theta} R d\theta \qquad ②$$

$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$ では $0 \leq 1 - \dfrac{4}{\pi}\theta \leq \cos 2\theta$ となることを使って，$\displaystyle\lim_{R\to\infty} P_R = 0$ を示せ．

(3) 小問 (1), (2) で求めた結果を使って，定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^2 dx$ と $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2 dx$ を計算せよ．ただし、$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明なしに用いてよい．

(電気通信大 2006)　　(m20061008)

0.81 (1) 関数 $f(x) = x\cos x$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めよ．

(2) 関数 $g(x) = \log(1+x)$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めよ．

(3) 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \log(1+x)}{x\sin x}$,　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\log(1+x)}{e^{x^2}-1}$

(電気通信大 2007)　　(m20071003)

0.82 関数 $f(x) = \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$　$(x > 0)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ．

(2) $g(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ とおく．$g(x)$ を求めよ．

(3) $g(x) > 0$　$(x > 0)$ であることを示せ．

(4) $f(x)$ の値域 $\{f(x) \mid x > 0\}$ を求めよ．

(電気通信大 2009)　　(m20091003)

0.83 関数 $u(x,y,t) = \dfrac{1}{4\pi t}e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}$　$(t > 0)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ および $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ を計算せよ．

以下では，$t > 0$ を定数とする．

(2) $u(x,y,t)$ の $x.y$ に関するマクローリン展開

$$u(x,y,t) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \cdots$$

の係数 a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{20}, a_{11}, a_{02} を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\iint_{x^2+y^2\leq R^2} u(x,y,t)\, dxdy$ を計算せよ．

(電気通信大 2013)　　(m20131003)

0.84 次の極限値を求めよ．

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan x}$

(横浜国立大 2016)　　(m20161105)

0.85 次の行列 A について以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を一つ求めよ．

(3) n を 1 以上の整数とする． $\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．

(横浜国立大 2022)　　(m20221101)

0.86 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{x^4}$$

(千葉大 1994)　　(m19941201)

0.87 (1) 次の極限値を求めよ． $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(2) 次の関数の概形を描け． $y=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$

(千葉大 1995)　　(m19951201)

0.88 (1) 次の等式を証明せよ．

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

ただし，n は自然数とする．

(2) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$$

(千葉大 1998)　　(m19981201)

0.89 級数 $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+2)}+\cdots$ について次の設問に答えよ．

(1) 第 n 部分和 $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+2)}$ を求めよ．

(2) S_n の極限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

(千葉大 1999)　　(m19991201)

0.90 x を変数とする関数を $f(x)$ とする．複素単位を $i=\sqrt{-1}$ として，

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-i\omega x}dx$$

によって決まる ω の関数 $F(\omega)$ を関数 $f(x)$ のフーリエ変換という． $F(\omega)$ から逆に $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\,e^{i\omega x}d\omega$$

によって求めることができる．この逆を逆フーリエ変換という．

関数 $F(\omega)$ を ω で微分することを考える．

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-i\omega x}dx$$

より微分と積分を入れ換えると，

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\omega}\big(f(x)\,e^{-i\omega x}\big)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\big(-ixf(x)\,e^{-i\omega x}\big)dx$$

となり，関数 $(-ix)f(x)$ のフーリエ変換が $\dfrac{d}{d\omega}F(\omega)$ であることがわかる．このことを利用して以下の設問に答えなさい．ただし，ここで扱う全ての関数は微分と積分の順序を交換できる性質を満たしていることを仮定する．

(1) ω に関する $F(\omega)$ の決める関数 $\dfrac{d^2}{d\omega^2}F(\omega)$ が関数 $(-x^2)f(x)$ のフーリエ変換であることを示しなさい．

(2) 逆フーリエ変換が $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ になる関数を $F(\omega)$ によって表しなさい．

(3) 微分方程式

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} - x^2f(x) = -(2n+1)f(x)\ ,\ \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \qquad (*)$$

の解 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が満たす微分方程式を導きなさい．ただし， n は零以上の整数である．

(4) 設問 (3) の結果から，式 $(*)$ の微分方程式の解のフーリエ変換に関する性質を５０字程度で述べなさい．

(千葉大 2001)　　(m20011204)

0.91 次の極限値を求めなさい．ただし，与えられた関数 $f(x)$ は，$x=a$ で微分可能とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-3h^2)}{h}$

(千葉大 2002)　　(m20021201)

0.92 x を変数とする関数を $f(x)$ とする．複素単位を $i=\sqrt{-1}$ として，

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

によって決まる ω の関数 $F(\omega)$ を関数 $f(x)$ のフーリェ変換という．$F(\omega)$ から逆に $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

によって求めることができる．この変換を逆フーリェ変換という．

関数 $F(\omega)$ を ω で微分することを考える．

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega) = \frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

より微分と積分とを入れ換えると，

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\omega}\Big(f(x)e^{-i\omega x}\Big)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\Big(-ixf(x)e^{-i\omega x}\Big)dx$$

となり，関数 $(-ix)f(x)$ のフーリェ変換が $\dfrac{d}{d\omega}F(\omega)$ であることがわかる．このことを利用して以下の設問に答えなさい．ただし，ここで扱う全ての関数は微分と積分との順序を交換できる性質を満たしていることを仮定する．

(1) ω に関する $F(\omega)$ の決める関数 $\dfrac{d^2}{d\omega^2}F(\omega)$ が関数 $(-x^2)f(x)$ のフーリェ変換であることを示しなさい．

(2) 逆フーリェ変換が $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ になる関数を $F(\omega)$ によって表しなさい．

(3) 微分方程式

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} - x^2f(x) = -(2n+1)f(x)\ , \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \qquad (*)$$

の解 $f(x)$ のフーリェ変換 $F(\omega)$ が満たす微分方程式を導きなさい．ただし，n は零以上の整数である．

(4) 設問 (3) の結果から，式 $(*)$ の微分方程式の解のフーリェ変換に関する性質を 50 字程度で述べなさい.

(千葉大 2002) (m20021205)

0.93 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ を求めなさい．ただし，$a>0$ とする.

(千葉大 2003) (m20031201)

0.94 次の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(1+x)^{1/x}$

(千葉大 2004) (m20041201)

0.95 次の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin 2x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$ （ただし, a, b は定数.）

(千葉大 2005) (m20051201)

0.96 次の極限値を求めなさい. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{\log_{10}x}{x-1}\right)$

(千葉大 2007) (m20071202)

0.97 次の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

(千葉大 2007) (m20071206)

0.98 次の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

(千葉大 2008) (m20081201)

0.99 次の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{e^x-e^4}{x-4}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\dfrac{1}{\log(1+x^2)}}$

(千葉大 2009) (m20091201)

0.100 次の極限値を求めなさい. ただし, a は定数である.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{1+\sin x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$

(千葉大 2010) (m20101201)

0.101 次の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x\sin x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2-3x-1}\right)$

(千葉大 2011) (m20111201)

0.102 次の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to +0}x^x$

(千葉大 2012)　　(m20121201)

0.103 次の数列，または，関数の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ 　ここで，$a_n = 2 + \dfrac{2}{a_{n-1}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, $a_0 = 2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3} - x + 1\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

(千葉大 2013)　　(m20131201)

0.104 次の関数の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x)}{x}$

(千葉大 2014)　　(m20141201)

0.105 次の関数の極限に関する問に答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+7x-6}{3x^2-2x-8}$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+e)-1}{x}$ を求めなさい．ここで，e は自然対数の底である．

(千葉大 2015)　　(m20151201)

0.106 (1) $x = 0$ 近傍で次の近次式が成り立つように，定数 A_i $(i = 0.1, 2, 3, 4)$ を求めなさい．

$\cos(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4$

(2) 次の関数をテイラー展開しなさい．

$\log(x+1)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{x}$ の極限値を求めなさい．

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{1+x^2}}$ の極限値を求めなさい．

(千葉大 2016)　　(m20161201)

0.107 次の問に答えなさい．ただし，$\log x$ の底は，自然対数の底 (e) とする．

(1) (a) 関数 $\log(1+x)$ と $x\cos x$ を，それぞれ 3 次の項までマクローリン展開しなさい．

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x\cos x}\right)$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n+3^n}$ を求めなさい．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\log x + \sqrt{\log x}} - \sqrt{\log x - \sqrt{\log x}}\right)$ を求めなさい．

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}(1-\tanh x)^{\frac{1}{\sin x}}$ を求めなさい．

(千葉大 2017)　　(m20171201)

0.108 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

(筑波大 2001)　　(m20011303)

0.109 次の問いに答えなさい．

(1) 三角関数 $y = \sin(x)$ を，単位円を用いて定義しなさい．

(2) 関数 $f(x)$ の微分（導関数）は　$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$　で定義される．
この定義に基づいて $y = \sin(x)$ の微分を，(1) の定義を用いて導きなさい．

(筑波大 2003)　(m20031302)

0.110 行列 $A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ を考えよう．ここで，パラメータ p, q の変動範囲は $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ であるとする．このとき次の (1),(2),(3) の各問いに答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルはノルムが 1 となるように規格化して示せ．

(2) 行列 A の n 乗，A^n を求めよ．

(3) 行列 A の n 乗の n が大きい場合の極限値 $\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．

(筑波大 2003)　(m20031316)

0.111 $f(x) = x \ln x$ なる関数を考える. ただし, $\ln x$ は x の自然対数を表す.

(1) $\lim_{x\to+0} x \ln x$ を求めよ.

(2) $x \geqq 0$ で $f(x)$ が連続となるように $f(0)$ を定義し, 曲線 $y = f(x)$ の概形をグラフに描け.

(3) x 軸と曲線 $y = f(x)$ で囲まれる図形の面積を求めよ.

（筑波大 2004）　(m20041308)

0.112 次の極限を求めなさい.

(1) $\lim_{x\to-1} \dfrac{x^2+4x+3}{x^2-1}$　(2) $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$

(3) $\lim_{x\to\infty} \left\{ \dfrac{1}{2}\log(x+1) + \log(\sqrt{3x+2} - \sqrt{3x}) \right\}$

(筑波大 2006)　(m20061322)

0.113 (1) $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x}$ を求めよ．　(2) $\dfrac{\cos x}{x}$ の導関数を求めよ．

(3) 上記 (2) および $|\cos x| \leqq 1$ を利用し，不等式 $\left| \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \dfrac{\sin x}{x} dx \right| \leqq \dfrac{2}{x_1}$ が成り立つことを示せ．
ただし，$0 < x_1 < x_2$ とする．

(筑波大 2007)　(m20071301)

0.114 (1) 極限値 $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x} + x \right)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x) = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ の導関数を求めよ.

(筑波大 2007)　(m20071310)

0.115 関数 $f(x) = x \cdot \ln x \quad (x > 0)$ について，以下の設問に答えよ.

(1) $f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ.　(2) 関数 $f(x)$ の極値と増減を求めよ.

(3) $x \to +0$ および $x \to +\infty$ における関数 $f(x)$ の極限値を求めよ.

(4) 関数 $f(x)$ のグラフの概形を示せ.

曲線 $y = x \cdot \ln x$ と x 軸と $x = a \quad (0 < a < 1)$ とで囲まれた部分の面積を $S(a)$ とおく.

(5) $S(a)$ を求めよ.　(6) $S(a)$ の極限値 $\lim_{a\to+0} S(a)$ を求めよ.

参考： グラフの描画には自然対数の底として $e = 2.72$ の値を用いなさい．

(筑波大 2007)　　(m20071314)

0.116　自然対数の底 e は $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ と定義される．対数関数 $f(x) = \log x$ の x に関する微分が $1/x$ となることを微分の定義 $\displaystyle\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log(x+\Delta x)-\log x}{\Delta x}$ に基づき示しなさい．

(筑波大 2008)　　(m20081303)

0.117　指数関数 e^x の性質に関する以下の問いに答えなさい．

(1)　自然数 n を用いて定義された以下の極限値を考える．

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

(1a)　2 項展開の公式を用いて下の関係式を示しなさい．

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

(1b)　さらに $\dfrac{1}{n!} < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ を用いて $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が有界であることを示しなさい．

(2)　有界なる単調数列は収束するので (1) で与えられた極限は極限値をとり，これを e と書くことにする．この e が自然数の底である．　このとき以下を示しなさい．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

(3)　上記の (2) を使って

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

が成立することをまず示し，その上で微分の定義に基づいて $\{e^x\}' = e^x$ を示しなさい．

(4)　$f(x) = e^x$ を n 次のマクローリン展開（$x = 0$ のまわりでのテイラー展開）し，その剰余項を求めなさい．

(5)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!} = 0$ を示し，これを用いて $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ を示しなさい．

(筑波大 2009)　　(m20091302)

0.118　実変数 x の関数 $f_n(x) = x^n \log x$ （n は自然数）について，以下の問いに答えよ，

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to +0} f_n(x)$ （$f_n(x)$ の $x = 0$ における右側極限値）を求めよ．

(2)　$\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ を求めよ．

(3)　$f_n(x)$ の第 $n+1$ 階導関数を求めよ．

(筑波大 2009)　　(m20091306)

0.119　x の関数 $f(x) = e^{-x^2}$ に関して以下の問題に答えなさい．

(1)　f を 1 回微分した導関数 $f'(x)$ を求めなさい．

(2)　f を n 回微分した導関数を $f^{(n)}(x)$ と表すとき，ある n 次の多項式 $\phi_n(x)$ によって，$f^{(n)}(x) = \phi_n(x)e^{-x^2}$ と表せることを証明しなさい．

(3)　n を任意に固定する．このとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f^{(n)}(x)$ は収束するか．それとも発散するか．理由を付して答えなさい．

(筑波大 2011)　　(m20111306)

0.120 正しく作られたサイコロを用いて，“ 3 の倍数が出るまでサイコロを振り続ける ”というゲームを行う．このとき以下の問題に答えなさい．

(1) ちょうど n 回目に 3 の倍数が出る確率を P_n と表す．このとき，以下の極限値を求めなさい．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}P_n$$

(2) 3 の倍数が出たときに 100 円もらえるとすると，このゲームによる獲得金額の期待値を求めなさい．

(3) 3 の倍数が出たときにもらえる金額を，1 回目なら 100 円，2 回目なら $100(1+r)$ 円，3 回目なら $100(1+r)^2$ 円というように，サイコロを振る回数が増えるにしたがって $(1+r)$ 倍する．但し，$r>0$ とする．このとき，このゲームによる獲得金額の期待値が有限な値になるためには，正の数 r は，ある範囲内 $0<r<r_0$ にある必要がある．このような r_0 のうち，最も大きな値を求めなさい．

(筑波大 2011)　　(m20111312)

0.121 $S_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ (n は自然数）について以下の問いに答えよ．

(1) $\log(n+1)<S_n\leqq 1+\log n$ を示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\log n}=1$ を示せ．

(筑波大 2012)　　(m20121319)

0.122 積分を利用して，次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$$

(筑波大 2013)　　(m20131303)

0.123 2 変数関数 $f(x,y)$ を $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$ 　(ただし，$(x,y)\neq(0,0)$) と定義する．ここで，log は自然対数である．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の全微分を求めよ．

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ について，点 $(a,b,f(a,b))$ における法線および接平面の方程式を求めよ．

(3) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ を $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0<x^2+y^2\leqq 1\right\}$ として求めたい．$f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において定義されていないので，
$D_\varepsilon=\left\{(x,y)\,\middle|\,\varepsilon^2<x^2+y^2\leqq 1\,,\ \varepsilon\in\boldsymbol{R}\right\}$ として，$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{D_\varepsilon}f(x,y)dxdy$ を計算せよ．

(筑波大 2013)　　(m20131308)

0.124 次の極限値を求めなさい．ただし，$a>0,\ b>0$ とする．

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\dfrac{1}{x}}$$

(筑波大 2014)　　(m20141317)

0.125 2 変数関数 $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ について以下の問いに答えよ．

(1) 積分 $I = \displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy,\ \ D = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$ を求めたい．そこで，

$D_a = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq a^2,\ x \geq o,\ y \geq 0\right\}$，$a > 0$ として，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\iint_{D_a} f(x,y)dxdy$ を極座標 $r,\ \theta$ を用いて計算することにより，I の値を求めよ．

(2) (7) の結果を用いて積分 $J = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2dt}$ の値を求めよ．

(筑波大 2015)　　(m20151307)

0.126 関数 $f(x)$ が，$X = a$ の近傍で C^2 級の関数であり，$f''(a) \neq 0$ を満たすとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $f(a+h)$ に，Taylor の定理を適用して展開しなさい．条件下において，できるだけ高い次数の項まで展開すること．また，剰余項の表記には θ_1 $(0 < \theta_1 < 1)$ を用いること．

(2) $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)\quad (0 < \theta < 1)$ において，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\theta = \frac{1}{2}$ となることを示しなさい．

(筑波大 2016)　　(m20161306)

0.127 曲線 $A : y = x \cdot e^x$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 曲線 A, x 軸 $(y=0)$，そして $x = a$ $(a < 0)$ により囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{a\to-\infty} S(a)$ の値を求めなさい．

(筑波大 2016)　　(m20161307)

0.128 関数 $f(x)$ と f の定義域に含まれる区間 $[0,1]$ を考える．

$$x_i = \frac{i}{n} \qquad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

で与えられる区間 $[0,1]$ の分割に対して，

$$I_k = (x_{k-1}, x_k] \qquad (k = 1, \cdots, n)$$

とし，次の和を定義する．

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sup_{x\in I_k} f(x)$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \inf_{x\in I_k} f(x)$$

この S_n, s_n がそれぞれ $n \to \infty$ において極限を持つとき，

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

とする．$S = s$ ならば関数 f が区間 $[0,1]$ で積分可能であるといい，

$$S = s = \int_0^1 f(x)dx$$

と書く．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $f(x) = x$ とするとき，(a) S_n, s_n を求め，(b) f が $[0,1]$ 上で積分可能かどうかを示せ．

(2) 以下の関数 f が $[0,1]$ 上で積分可能かどうかを示せ.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \text{ が無理数}) \\ x & (x \text{ が有理数}) \end{cases}$$

ただし, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ である.

(筑波大 2016)　　(m20161312)

0.129 (1) 関数 $f(x)=e^x$ をマクローリン展開（$x=0$ のまわりでテイラー展開）せよ.

(2) 以下の性質 (A) を用いて, 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{1!}+\frac{n-1}{2!}+\cdots+\frac{2}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right)$$

(A) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ のとき,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=\alpha$$

が成り立つ.

(3) 上の性質 (A) を証明せよ.

(筑波大 2017)　　(m20171312)

0.130 (1) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある実数 $\alpha\in\mathbb{R}$ に収束するならば有界であることを証明せよ.

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\beta\in\mathbb{R}$ が成り立つとする. このとき等式 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta$ を証明せよ.

(3) 区間 $I\subset\mathbb{R}$ 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset I$ は $n\longrightarrow\infty$ のとき点 $\alpha\in I$ に収束し, 関数 f は点 $\alpha\in I$ で連続であるとする. このとき等式 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f(\alpha)$ を証明せよ.

(4) 写像 $f:X\to Y$ と $g:Y\to Z$ の合成 $g\circ f:X\to Z$ は単射であるとする. このとき f も単射であることを示せ.

(筑波大 2017)　　(m20171318)

0.131 $f(x)=\log(1+\sin x)$ とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+o(x^3)(x\to 0)$ を満たす a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ. 但し, $o(\cdot)$ はランダウの記号（スモール・オー）を表す.

(2) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)-x}{3x^2}$$

(3) $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ の近似値を誤差 $\dfrac{1}{100}$ 未満で求めよ （求めた近似値の誤差が $\dfrac{1}{100}$ 未満であることの根拠も述べること）.

(筑波大 2018)　　(m20181319)

0.132 $y=\tan x$ の逆関数を $y=\arctan x$ と書く. ある y の値に対して $y=\tan x$ を満たす x は多数存在するが, 定義域を $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ に限る場合, $y=\tan x$ は単射となり一意に逆関数を定義することができる. この定義域における $y=\tan x$ の逆関数を $y=\mathrm{Arctan}\,x$ と書くこととする.
上記の定義域において, 次の問に答えよ

① $y = \mathrm{Arctan}\, x$ について，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$ を証明せよ．

② 次の無限級数 S の値を求めよ．ただし，その導出過程を示すこと．

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \frac{n}{n^2+3^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

(筑波大 2020)　　(m20201305)

0.133 (1) 関数 $g(x) = x^x\ (x>0)$ について，$\displaystyle\lim_{x\to+0} g(x)$ を計算せよ．

(2) 与えられた領域 D において，(1) の結果を用いて，次の広義 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{x\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy\ ,\quad D = \left\{(x,y)\,:\,0 < x^2+y^2 \leq 1\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\right\}$$

(筑波大 2021)　　(m20211312)

0.134 (1) $x > 0$ に対して，次の関数を定義する．

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}du$$

任意の正の整数 n に対して，$\Gamma(n+1) = n!$ が成り立つことを示せ．

(2) 次の定積分を $u = -(n+1)\log x\ \ (\Leftrightarrow x = e^{-\frac{u}{n+1}})$ とする置換積分により計算せよ．ただし，n は任意の正の整数を表す．

$$\int_0^1 x^n(\log x)^n dx$$

(3) 以下の恒等式を証明せよ．

$$\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=1}^\infty n^{-n}\quad \left\{= \lim_{n\to\infty}(1 + 2^{-2} + 3^{-3} + \cdots + n^{-n})\right\}$$

ただし，(2) の結果，および，次のマクローリン展開の結果を用いること．

$$x^{-x} = e^{(-x\log x)} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-x\log x)^n}{n!}$$

また，積分 $\int$ と和 $\sum$ の順序は交換してもよいとする．

(筑波大 2022)　　(m20221307)

0.135 次の極限を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to 0+} x\sqrt{-\log x}$

(埼玉大 1999)　　(m19991401)

0.136 $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^2}$ とする．

(1) 正数 R に対し，次が成り立つことを示せ．

$$\int_0^R\left(\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)dx\right)dy \leqq \int_0^R\left(\int_0^R f(x,y)dx\right)dy \leqq \int_0^{\sqrt{2}R}\left(\int_0^{\sqrt{2R^2-y^2}} f(x,y)dx\right)dy$$

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^R\left(\int_0^R f(x,y)dx\right)dy$ の値を求めよ．

(埼玉大 2000)　　(m20001402)

0.137 (1) 次の関数を微分せよ．

$$\left[\ \sin^{-1}(2x)\ \right]^3 \qquad \left(\ |x| < \frac{1}{2}\ \right)$$

ただし, $\sin^{-1}()$ は逆正弦関数の主値をとるものとする．

(2) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^{2x}}{(a+b)x} \qquad (a>0,\ b>0,\ a\neq b)$$

(埼玉大 2004)　　(m20041401)

0.138 $f(x)=\dfrac{3e^{2x}+4\sin x}{2e^{2x}+e^{-x}}$ とおく.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ.　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1} f(x)\,dx$ を求めよ.

(埼玉大 2004)　　(m20041402)

0.139 (1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は次を満たすとする.

$$\text{すべての自然数 } n \text{ に対して } a_n \geqq 0 \text{ であり}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \text{ である}.$$

このとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ は成立するか. 成立するならば証明し, 成立しないならば反例をあげよ.

(2) 次の条件をすべて満たす関数 f の例を挙げよ.

- f は区間 $[0,\infty)$ で定義された連続関数である.
- すべての $x\in[0,\infty)$ に対し $f(x)\geqq 0$ である.
- $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx<\infty$ である.
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ が成立しない.

(埼玉大 2005)　　(m20051407)

0.140 n を自然数とする. 次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x(\log|x|)^n$ を求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 (\log x)^n\,dx$ の値を求めよ.

(埼玉大 2008)　　(m20081407)

0.141 (1) 関数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい.

(2) 関数 $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x}$ の第 4 次導関数 $f^{(4)}(x)$ を求めなさい.

(3) 次の極限値を求めなさい.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos 2x)}{\log(\cos 3x)}$$

(4) xy 平面において $y=\dfrac{1}{\sin x}$ のグラフで与えられる曲線と 直線 $x=\dfrac{\pi}{3}$, $x=\dfrac{2\pi}{3}$ および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい.

(埼玉大 2009)　　(m20091401)

0.142 n を自然数とし, $D_n=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \dfrac{1}{n}\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x-\dfrac{1}{n}\right\}$ とおく. α を $0<\alpha<1$ を満たす定数とする. 次を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{dxdy}{(x-y)^{\alpha}}$ を求めよ.

(2) (1) の積分値を I_n とおいたとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ.

(埼玉大 2009)　　(m20091407)

0.143 $x>0$ に対して

$$F(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x)$ を求めよ.

(2) $F'(x)$ を求めよ. ただし, 等式

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{e^{-xt}\sin t}{t}\right\}dt$$

が成り立つことを用いてよい.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0} F(x)$ を求めよ.

(埼玉大 2010)　　(m20101403)

0.144 (1) 関数 $x\cos x$, $\log(1+3x)$ をそれぞれ 3 次の項までマクローリン展開せよ.

(2) (1) の結果を用いて極限 $\displaystyle\lim_{x\Rightarrow 0}\left\{\frac{1}{\log(1+3x)}-\frac{1}{3x\cos x}\right\}$ を求めよ.

(埼玉大 2018)　　(m20181404)

0.145 関数 $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+x^2-2x}{x^{2n}+1}$ について,

(1) $f(-1), f(0), f(1)$ の値を求めよ.

(2) $y=f(x)$ のグラフを描け.

(図書館情報大 1998)　　(m19981603)

0.146 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$ を求めよ．ただし，n は自然数とする.

(茨城大 1999)　　(m19991704)

0.147 集合 S を　$S=\left\{a \;\middle|\; a=\dfrac{p}{10^k},\ k \text{ は 1 以上の整数},\ p \text{ は } 1\leq p<10^k \text{である整数}\right\}$
と定義するとき，次の各問に答えよ.

(1) $a\in S$ の小数表示を，a に対応する k と p を用いて説明せよ.

(2) S は無限集合であることを示せ.

(3) 任意の $a\in S$ に対して，$x_n\notin S$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=a$ となる数列 $\{x_n\}$ が構成できることを示せ.

(茨城大 2001)　　(m20011703)

0.148 (1) 関数 $f(x)=\sin x$ に対して，$f^{(n)}(0)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を求めよ.

(2) $\sin x$ のマクローリン展開（0 のまわりでのテイラー展開）をかけ.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^\alpha}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)=0$ となる正の定数 α の条件を求めよ.

(茨城大 2002)　　(m20021703)

0.149 $k>0$ に対して，微分方程式 $\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{dx}{dt} & = & x^{k+1}\quad (t\geqq 0)\\ x(0) & = & 1\end{array}\right.$ の解を $x_k(t)$ とする.

(1) $x_k(t)$ を求めよ.　　(2) $\displaystyle\lim_{k\to 0}x_k(t)$ を求めよ.

(茨城大 2003)　　(m20031702)

0.150 複素数 z の共役複素数を $\overline{z}$ とするとき, 次の各問に答えよ.

(1) 実数 h を 0 に近づけるときの極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\left(\overline{z+hi}\right)^3-(\overline{z})^3}{hi}$ を計算せよ.

(2) 0 から i までにいたる線分を積分路とする複素積分 $\displaystyle\int_0^i(\overline{z})^2\,dz$ を求めよ.

(茨城大 2005) (m20051704)

0.151 複素数の数列 $z_n=\left(\dfrac{i}{2}\right)^n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ について, 次の各問に答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}z_n$ を求めよ. (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}z_n$ を求めよ. (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nz_n$ を求めよ.

(茨城大 2007) (m20071704)

0.152 (x,y) を平面上の直交座標, (r,θ) を極座標とする. 以下の各問に答えよ.

関数 $f(x,y)$ の定義域内の点 $\boldsymbol{p}$ およびベクトル $\boldsymbol{u}=(a,b)$ に対し, 極限 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{p})}{t}$ を点 $\boldsymbol{p}$ での $\boldsymbol{u}$ 方向の微分係数と呼び, $\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{p})$ で表す.

(1) 関数 $f(x,y)=r\sin 3\theta$ の原点 $\boldsymbol{o}$ での $\boldsymbol{u}=(\cos\phi\,,\ \sin\phi)$ 方向の微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{o})$ を求めよ. また, 偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{o})$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{o})$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x,y)$ が点 $\boldsymbol{p}$ の近傍で偏微分可能, かつ, 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ が点 $\boldsymbol{p}$ で連続ならば等式

$$\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{p})=a\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p})+b\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p})$$

が成立することを示せ. 次に (1) の関数 f は原点 $\boldsymbol{o}$ でこの等式を満たさない理由を説明せよ.

(茨城大 2007) (m20071706)

0.153 3 次正方行列 $A=\begin{bmatrix}1&1/2&1/2\\1/2&2&1/2\\1/2&1/2&1\end{bmatrix}$ について, 以下の各問に答えよ.

(1) A の固有値 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$ および対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ を一組求めよ.

(2) ベクトル列 $\boldsymbol{u}_n$ を $\boldsymbol{u}_n=A^n\begin{bmatrix}\varepsilon\\-1+2\varepsilon\\2+\varepsilon\end{bmatrix}$, $(n=0,1,2,\cdots)$ で定める. ただし, $\varepsilon=2^{-100}$ とし, A^0 は単位行列を表す. このとき, $\boldsymbol{u}_n$ を (1) で求めた $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ の一次結合で表せ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し, ユークリッドノルムを $||\boldsymbol{x}||=\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$ とする. (2) で与えた $\boldsymbol{u}_n$ について, 以下を調べよ.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}||\boldsymbol{u}_n||$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{||\boldsymbol{u}_{n+1}||}{||\boldsymbol{u}_n||}$ (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\boldsymbol{u}_n}{||\boldsymbol{u}_n||}$

(d) $\left|\left|\boldsymbol{u}_n-\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right|\right|\leq 2^{-10}$ なる n の存在の有無.

(茨城大 2007) (m20071707)

0.154 2 変数関数 $z=f(x,y)=x^2+3xy+y^2$ について, 以下の各問に答えよ.

(1) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $(1,2,11)$ における接平面の方程式を求めよ.

(2) a, b を定数とする. 極限 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(1+at\,,\ 2+bt)-f(1,2)}{t}$ を求めよ.

(3) 「$f(0,0)$ は極大値である」,「$f(0,0)$ は極小値である」,「$f(0,0)$ は極値ではない」の 3 つの記述の中から正しいものを 1 つ選び, 理由を付けて答えよ.

(茨城大 2010) (m20101701)

0.155 以下の問に答えよ.

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^x-e^x\log 2-1+\log 2}{x^2}$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする.

(2) 関数 $f(x)=xe^{-x^2}$ の区間 $[0,\infty)$ における最大値と最小値を求めよ.

(茨城大 2013) (m20131701)

0.156 xy 平面内の領域 D を $D=\{(x,y)\mid x+y>0\}$ とする．D から $\mathbb{R}$ への 2 変数関数

$$f(x,y)=\frac{x-y}{(x+y)^3}$$

について次の問いに答えよ.

(1) 偏導関数 $f_x(x,y)$ および $f_y(x,y)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\big(f_x(x,y)+f_y(x,y)\big)$ が存在するかどうか確かめよ.

(茨城大 2016) (m20161702)

0.157 n を正の整数，a を正の実数とする．xy 平面内の領域 $D_a=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \mid\ x^2+y^2\leq a^2\right\}$ 上の 2 重積分

$$I_a(n)=\iint_{D_a}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^n}dxdy$$

について，以下の各問いに答えよ.

(1) $I_a(1)$ を求めよ.

(2) $n\geq 2$ のとき，$I_a(n)$ を求めよ.

(3) $n\geq 2$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty}I_a(n)$ を求めよ.

(茨城大 2017) (m20171703)

0.158 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ を求めよ.

(山梨大 2003) (m20031801)

0.159 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$ を求めよ.

(山梨大 2004) (m20041801)

0.160 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$ を求めなさい.

(山梨大 2007) (m20071804)

0.161 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x^2)}{x}$ を求めなさい．ただし，対数関数は自然対数によるものとする.

(山梨大 2008) (m20081803)

0.162 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は,

$$f'(x)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$$

で定義される. この定義を用いて, $f(x)=x^3$ の導関数は $f'(x)=3x^2$ となることを示しなさい.

(山梨大 2010) (m20101803)

0.163 (1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x \log x = 0$ を示せ.

(2) $f(x)$ を区間 $[-1, 1]$ 上で定義された連続関数とする．このとき,

$$\lim_{n \to \infty} \left(\int_{-1/n}^{1/n} |f(x)|^n dx \right)^{1/n} = |f(0)| \qquad \text{となることを示せ.}$$

(信州大 2008) (m20081904)

0.164 (1) $|x| \leq \dfrac{1}{2}$ ならば, $|\log(1+x) - x| \leq 2x^2$ が成立することを証明せよ.

(2) 次の等式を証明せよ.

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{1}{n} \cos\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \cos x\, dx$$

(信州大 2012) (m20121903)

0.165 次の問いに答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr$ を計算せよ.

(2) 2 重積分 $\displaystyle I_n = \iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ を計算せよ.

ただし, $D_n = \left\{ (x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^2 \right\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} I_n$ を求めよ．また, $I_n > \pi$ を満たす最小の自然数 n を求めよ.

(信州大 2013) (m20131902)

0.166 次の極限を調べ, それが存在する場合は極限値を求め, 存在しない場合はその理由を述べよ.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (1,\pi)} \frac{\cos xy}{x^2 + y^2 - 2}$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2 + y^4}$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (1,1)} \frac{(x-1)^3 + y^3 - 1}{(x^2-1)^3 - y + 1}$

(信州大 2015) (m20151901)

0.167 $p > 2$ は実数とする． $D_n = \{(x, y) \,|\, 0 \leqq x \leqq n,\ 0 \leqq y \leqq n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおき, 領域 D_n 上の 2 重積分 $\displaystyle I_n(p) = \iint_{D_n} \frac{dxdy}{(1+x+y)^p}$ を考える.

(1) $I_n(p)$ を計算し, 極限値 $I(p) = \displaystyle\lim_{n \to \infty} I_n(p)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_3^{\infty} I(p) dp$ を計算せよ.

(信州大 2016) (m20161902)

0.168 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\sqrt{x^2-1}}$ を求めよ.

(2) 実数 p, q は, $p > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たすとする． このとき, $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ を満たすすべての実数 a, b に対して, 不等式 $\displaystyle ab \leqq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ が成り立つことを示せ.

(信州大 2017) (m20171901)

0.169 $a,\ b$ は定数で $a<b$ とする．$a<p<q<b$ を満たす $p,\ q$ に対して，

$$I(p,q)=\int_p^q \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $t=\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}\quad (p\leqq x\leqq q)$ とおいて，置換積分法により $I(p,q)$ を求めよ．

(2) 極値 $I=\displaystyle\lim_{p\to a+0}\left\{\lim_{q\to b-0} I(p,q)\right\}$ を求めよ．

(信州大 2018)　　(m20181902)

0.170 次の極限を調べ，それが存在する場合は極限値を求め，存在しない場合はその理由を述べよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{2^x-1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$　　(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2-y^2}$

(信州大 2020)　　(m20201901)

0.171 実数 p は $0<p\leqq 1$ を満たすとする．$D_n=\left\{(x,y)\ \middle|\ \dfrac{1}{n}\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x-\dfrac{1}{n}\right\}$ $(n=2,3,\cdots)$ とおき，領域 D_n 上の 2 重積分

$$I_n(p)=\iint_{D_n}\frac{dxdy}{(x-y)^p}$$

を考える．このとき, 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n(p)$ を調べ．それが存在する場合は極限値を求めよ．

(信州大 2020)　　(m20201902)

0.172 (1) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$$

(2) 次の極限が存在しないことを示せ．

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

(3) 2 変数関数 $z=f(x,y)$ と $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ の合成関数 $f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ に対し，関係式

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}$$

が成り立つことを示せ.

(信州大 2020)　　(m20201905)

0.173 $D_n=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq x\leqq y\ ,\ \dfrac{1}{n}\leqq y\leqq 1\right\}$ $(n=2,3,\cdots)$ とおき，領域 D_n 上の 2 重積分

$$I_n=\iint_{D_n}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

を考える．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

(信州大 2022)　　(m20221903)

0.174 関数 $f(x)$ は開区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ において，

$$f(x)=\log\cos x$$

で定義されているとする．このとき，次に問いに答えよ．ただし，対数は自然対数である．

(1) $f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の 2 次までのマクローリン展開を求めよ．また，剰余項 $R_3(x)$ を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ を求めよ．

(信州大 2023)　　(m20231901)

0.175 自然対数の底を e とする．

(1) 任意の正整数 k に対して，$\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda}\lambda^k = 0$ を証明せよ．

(2) 任意の正整数 n に対して，$\displaystyle g_n(\lambda) = \int_0^\lambda x^n e^{-x}dx$ と置くとき，$g_n(\lambda)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty} g_n(\lambda)$ を求めよ．

(新潟大 1998)　　(m19982003)

0.176 次の問いに答えよ．

(1) どんな無理数 p に対しても，有理数の列 $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n = p$ となるものが存在する．その理由を述べよ．

(2) どんな有理数 q に対しても，無理数の列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n = q$ となるものが存在する．その理由を述べよ．

(3) 関数 f を次のように定義する．

$$f(x) = \begin{cases} x & (\ x \text{ が無理数のとき }) \\ 0 & (\ x \text{ が有理数のとき }) \end{cases}$$

このとき，f の連続性を述べよ．

(新潟大 2000)　　(m20002001)

0.177 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left\{\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+x}\right\}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1+x)}{x}$

(新潟大 2001)　　(m20012001)

0.178 実変数の実数値関数 $f(x)$ を　$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \text{ の場合} \\ 0 & , \quad x = 0 \text{ の場合} \end{cases}$

によって定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ となることを示せ．　　(2) $x \neq 0$ に対して，$f'(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ を求めよ．　　(4) $f'(x)$ は $x = 0$ で連続でないことを示せ．

(3) $F(x,y) = f(xy)$ とおくとき，$xy \neq 0$ に対して，x に関する偏導関数 $\dfrac{\partial F}{\partial x}$，および，$y$ に関する偏導関数 $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ を求めよ．

(新潟大 2001)　　(m20012004)

0.179 (1) $y = x^x (x > 0)$ を微分せよ．　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x$ の値を求めよ．

(新潟大 2002)　　(m20022002)

0.180 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値を λ_1 , λ_2 ($|\lambda_1| > |\lambda_2|$) とし，対応する固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ とする．

(1) λ_1 , λ_2 , $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ を求めよ．

(2) 正の実数 a, b をとり，

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

と定める．このとき a, b の選び方によらずに極限値 $L = \lim_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ が定まることを示し，その値 L を求めよ．

(新潟大 2002)　　(m20022005)

0.181 $a > 0$ とする．実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_1 = a$ とし，$n \geqq 1$ に対して，　$a_{n+1} = a + \dfrac{1}{a_n}$
と定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $a_1 < a_3 < a_4 < a_2$ を示せ．

(2) 数列 $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$，$\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ はそれぞれ単調増加，単調減少であることを示せ．

(3) $n \geqq 2$ に対して，　$|a_{n+1} - a_n| < \dfrac{1}{1+a^2}|a_n - a_{n-1}|$　が成立することを示せ．

(4) $\lim_{n \to \infty} a_n$ が存在することを示し，その値を求めよ．

(新潟大 2003)　　(m20032001)

0.182 次の問いに答えよ．

(1) 定積分を用いて，極限値 $\lim_{n \to \infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$ を求めよ．

(2) $\beta > 2$ に対して，定積分 $\displaystyle\int_2^{\beta} \frac{dx}{x(\log x)^{\alpha}}$ を求めよ．ただし，$\alpha > 0$ とする．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^{\alpha}}$ は存在するかどうかを調べ，存在する場合はその値を求めよ．ただし，$\alpha > 0$ とする．

（新潟大 2004）　　(m20042002)

0.183 $0 < x$ において定義された関数 $f(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{C}{x^n}$ が $x = p\ (0 < p)$ において極値をとるとき，以下の問いに答えよ．ただし，C は正の実数，n は 2 以上の整数である．

(1) $\lim_{x \to \infty} f(x)$ を求めよ．

(2) $\lim_{x \to +0} f(x)$ を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(4) C の値を，p および n を用いて表せ．

(5) この関数の極値を，p および n を用いて表せ．

(6) この関数の概形をグラフで示せ．

(新潟大 2006)　　(m20062014)

0.184 関数 $F(x)$ は　$F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$　で与えられるものとする．

また，　$\lim_{x \to \infty} F(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$　であることがわかっている．

(1) $\dfrac{dF(x)}{dx}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$ を $F(x)$ を用いて表せ．

(3) e^{-t^2} のマクローリン展開（$t = 0$ の周りでのテイラー展開）を用いて，$x = 0.1$ のときの $F(x)$ の値の近似値を有効数字 4 桁で求めよ．

(4) 次の定積分の値を求めよ．(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-a^2t^2} dt$　（a は正の定数とする）　(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt$

(新潟大 2008)　　(m20082001)

0.185 以下の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\sin x-\log(x+1)}$$

(新潟大 2010) (m20102004)

0.186 $\displaystyle\int_0^\infty e^{ax}|\sin x|\,dx$（ただし $a<0$）を求めたい.

(1) $I_n=\displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{ax}|\sin x|\,dx$ としたとき，I_n と I_{n+1} が満たす関係式を求めよ.

(2) $S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} I_i$ としたとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を I_1 を用いて表現せよ.

(3) $\displaystyle\int_0^\infty e^{ax}|\sin x|\,dx=\lim_{n\to\infty} S_n$ となる理由を述べよ.

(4) I_1 を実際に計算し，$\displaystyle\int_0^\infty e^{ax}|\sin x|\,dx$ を求めよ.

(新潟大 2010) (m20102005)

0.187 次の各問いに答えよ.

(1) $0<a<1$ を満たす任意の実数 a に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} na^n=0$ を示せ.

(2) $0<a<1$ を満たす任意の実数 a に対して，次の級数の収束・発散を調べよ．収束するときはその和も求めよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}$$

(3) 次の関数の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-3\sin x}{x^3}$$

(4) 次の関数の極限値を求めよ.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

(新潟大 2012) (m20122014)

0.188 以下の極限値は存在するか，存在すればその値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\log(1-x)}$$

(新潟大 2014) (m20142011)

0.189 右の極限は存在するか，存在すればその値を求めよ. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)^{\sin x}-1}{xe^{-x^2}}$

(新潟大 2015) (m20152005)

0.190 以下の極限は存在するか，存在すればその値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{(1+\cos x)\log(1+x)}$$

(新潟大 2016) (m20162005)

0.191 正の定数 $a>0$ と自然数 n に対して，等式

$$\left(1+\frac{b_n}{n}\right)^n=1+a$$

が成り立つように数列 $\{b_n\}$ を定める．また，関数 $f(x)$ を $f(x)=(1+a)^x$ により定める．このとき，次の問いに答えよ.

(1) b_n を a と n を用いて表せ.

(2) 関数 $f(x)$ の $x=0$ における微分係数 $f'(0)$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ.

(4) b_n と b_{n+1} の大小関係を不等式で表せ.

(新潟大 2016)　　(m20162013)

0.192 次の (1),(2) の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x+2}{3x^2+2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x-3^x}{4^x+3^x}$

(新潟大 2018)　　(m20182003)

0.193 $f(x)=\sin x$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ を $x=0$ の周りでテイラー展開せよ．解答は x の 5 次の項まで示せ.

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-f(x)}{x^3}$ を求めよ.

(新潟大 2019)　　(m20192001)

0.194 関数 $f(x)=(x+3)\sqrt{-x^2-2x+3}$ $(-3\leqq x\leqq 1)$ について，次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の最大値を求めよ.

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to-3+0} f'(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} f'(x)$ を求めよ.

(新潟大 2019)　　(m20192013)

0.195 整数 $n\geqq 0$ に対して，$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$ とする．次の各問いに答えよ.

(1) 自然数 n に対して $I_{2n-1}=\dfrac{(2^n\cdot n!)^2}{2n\cdot(2n)!}$，$I_{2n}=\dfrac{(2n)!}{(2^n\cdot n!)^2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$ を求めよ.　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}\cdot(n!)^2}{\sqrt{n}\cdot(2n)!}$ を求めよ.

(新潟大 2019)　　(m20192014)

0.196 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ とする．以下の問いに答えよ．計算過程を示すこと.

(1) $\dfrac{df(x)}{dx}$ を求めよ.　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ を求めよ.

(新潟大 2022)　　(m20222007)

0.197 $n=0,1,2,\cdots$ に対して $I_n=\displaystyle\int_0^1(\log x)^n\,dx$ とおく．ここで，$\log x$ は x の自然対数を表す.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x(\log x)^n$ を求めよ.

(2) I_0 , I_1 を求めよ.

(3) I_n を n の式で表せ.

(長岡技科大 1995)　　(m19952101)

0.198 行列 $A=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ.（n は自然数，E は単位行列とする.）

(1) $(A-E)(A+\frac{1}{2}E)$ を計算せよ．

(2) x^n を $(x-1)(x+\frac{1}{2})$ で割った余りを a_nx+b_n とする．a_n, b_n を n の式で表せ．

(3) $A^n = a_nA + b_nE$ と表せることを示せ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．

(長岡技科大 1996)　　(m19962104)

0.199 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+2^n}$ を求めよ．

(長岡技科大 2001)　　(m20012103)

0.200 (1) 極限 $L = \displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x$ を求めなさい．

(2) 広義積分 $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \log x dx$ を求めなさい．

(3) 広義積分 $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \left\{\int_0^1 \frac{x}{1-xy}dy\right\}dx$ を求めなさい．

(長岡技科大 2022)　　(m20222102)

0.201 n を自然数，p を $0<p<1$ を満たす実数とする．また，点 X が地点 A か地点 B のどちらかにあるとする．X に対し，次の規則に従って操作を行う．

規則

- X が A にあるときは，確率 p で X を A にとどめ，確率 $1-p$ で X を B に移動させる．
- X が B にあるときは，必ず X を A に移動させる．

最初 X が A にあるとする．n 回の操作の後に X が A にある確率を a_n で表す．例えば $a_1 = p$ である．下の問いに答えなさい．

(1) a_2 を求めなさい．

(2) a_{n+1} を p と a_n を用いて表しなさい．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めなさい．

(長岡技科大 2022)　　(m20222104)

0.202 (1) 関数 $\sin\dfrac{1}{x}$ を微分せよ．　　(2) 関数 $\sin^{-1}x$ を微分せよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin^{-1}\frac{1}{x}$ を求めよ．

(金沢大 2001)　　(m20012201)

0.203 閉領域 $D(R) = \{(x,y) \mid 1 \leqq x^2+y^2 \leqq R^2\}$ $(R>1)$ に対して，

$$I_a(R) = \iint_{D(R)} \frac{1}{(x^2+y^2)^a}dxdy \quad (a>0)$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $I_a(R)$ を求めよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} I_a(R)$ を調べよ．

(金沢大 2004)　　(m20042202)

0.204 領域 $D(R) = \left\{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \leqq R^2,\ y \geqq |x|\right\}$ $(R>0)$ に対して

$$I(R) = \iint_{D(R)} (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)^2}dxdy$$

とおく. 次の問に答えよ.

(1) $I(R)$ を計算せよ.

(2) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} I(R)$ を求めよ.

(金沢大 2005) (m20052203)

0.205 行列 $A = \begin{pmatrix} k & \frac{1}{3} \\ 1-k & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ (k は定数, $0 < k < 1$) について, 次の問に答えよ.

(1) A の固有値を求めよ. (2) A を対角化せよ.

(3) $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とするとき, 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n + d_n)$ を求めよ.

(金沢大 2006) (m20062201)

0.206 関数 $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $((x, y) \neq (0, 0))$ について, 次の問に答えよ.

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を計算せよ.

(2) $0 < \varepsilon < 1$ とする. 積分 $I(\varepsilon) = \displaystyle\iint_{\varepsilon \leqq \sqrt{x^2+y^2} \leqq 1} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} dxdy$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}(\sin\varepsilon)I(\varepsilon)$ を求めよ.

(金沢大 2006) (m20062203)

0.207 $f(x)$ を $f'(x) = f(x)$, $f(0) = 1$ を満たす関数とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $(e^{-x}f(x))' = 0$ を示せ. また, これを用いて $f(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ.

(3) (2) の結果を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right)$ の値を求めよ.

(金沢大 2007) (m20072202)

0.208 領域 $D(\varepsilon) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1 - \varepsilon,\ |y| \leqq x\}$ $(0 < \varepsilon < 1)$ に対して
$I(\varepsilon) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\iint_{D(\varepsilon)} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 領域 $D(\varepsilon)$ を図示せよ. (2) $I(\varepsilon)$ を計算せよ. (3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\log I(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}$ の値を求めよ.

(金沢大 2007) (m20072203)

0.209 (1) ある定数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ と正の定数 M が存在して
$\left|\ \log(1+x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\ \right| \leqq Mx^{n+1}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ が成り立つとき, $a_0, a_1, \cdots, a_n$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2$ を示せ.

(金沢大 2007) (m20072208)

0.210 n を自然数とし, I_n を次の広義積分で定める. $I_n = \displaystyle\int_1^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx$ このとき, 次の問いに答えよ.

(1) I_1 の値を求めよ.

(2) $n \geq 2$ のとき, 次の漸化式が成り立つことを示せ. $I_n = \dfrac{1}{e} + (n-1)I_{n-1}$

(3) 次式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ． $I_n = \dfrac{(n-1)!}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$

(4) 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{(n-1)!}$

(金沢大 2007)　　(m20072210)

0.211 (1) 自然数 n に対して，集合 $D_n = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq n^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ における関数 $e^{-x^2-y^2}$ の積分 $\displaystyle\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ．

(2) 集合 $R_n = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \leq x \leq n,\ 0 \leq y \leq n\}$ に対して，
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\iint_{R_n} e^{-x^2-y^2}dxdy - \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy\right) = 0$ となることを示せ．

(3) 次の積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$

(金沢大 2007)　　(m20072212)

0.212 (1) 変数変換 $x = u,\ y = uv$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ．

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy,\ D = \{(x,y) \mid 1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq x\}$ を求めよ．

(3) $R > 1$ とし，$D_R = \{(x,y) \mid 1 \leqq x \leqq R,\ 0 \leqq y \leqq x\}$ とおく．実数 α について，極限値
$\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\iint_{D_R}\frac{x^{\alpha}}{x^2+y^2}dxdy$ が存在するかどうか調べよ．存在する場合はその値を求めよ．

(金沢大 2008)　　(m20082203)

0.213 関数 $f(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(2) $D_a = \{(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 2 \leqq x^2+y^2 \leqq a^2\}$ とする．

$$\lim_{a\to\infty}\iint_{D_a}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy$$

を求めよ．

(金沢大 2011)　　(m20112203)

0.214 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，

$$A\vec{p_i} = \lambda_i\vec{p_i}\ ,\ |\vec{p_i}| = 1\ (i = 1,2,3)\ ,\quad \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$$

とする．ここで，$|\vec{p}|$ はベクトル $\vec{p}$ の長さとする．次の問いに答えよ．

(1) $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ を求めよ．

(2) $\vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\ \vec{p}_3$ を求めよ．

(3) $\vec{x} = x_1\vec{p}_1 + x_2\vec{p}_2 + x_3\vec{p}_3$ とする． $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|A^n\vec{x}| = \infty$ となるための $x_1,\ x_2,\ x_3$ の条件を述べよ．

(金沢大 2012)　　(m20122201)

0.215 $a > 0,\ t > 0$ とする． $I_a(t) = \displaystyle\int_0^a t^x dx$ について，次の問いに答えよ．

(1) $I_a(1)$ を求めよ．

(2) $t \neq 1$ のとき $I_a(t)$ を求めよ．

(3) $\lim_{t \to 1} I_a(t)$ を求めよ．

(金沢大 2013)　　(m20132207)

0.216 $0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2}$ とし，

$$D_\varepsilon = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq 1,\ y \geqq (\tan \varepsilon) x \right\},$$

$$I_\varepsilon = \iint_{D_\varepsilon} x y^2 dx dy$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) D_ε を図示せよ．

(2) I_ε を求めよ．

(3) $\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{-3}(I_\varepsilon - a) = b$ となる定数 a, b を求めよ．

(金沢大 2013)　　(m20132208)

0.217 行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 6 & -6 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値を λ_1，λ_2，λ_3 $(\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ とする．$i = 1, 2, 3$ に対して，λ_i に対応する固有ベクトルでその第 1 成分が 1 のものを $\boldsymbol{u}_i$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $i = 1, 2, 3$ に対して，λ_i および $\boldsymbol{u}_i$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3$ とし，$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \boldsymbol{v}$ とおく．$\lim_{n \to \infty} \dfrac{x_n}{z_n}$ を求めよ．

(金沢大 2014)　　(m20142201)

0.218 n を自然数とし，I_n を次の広義積分で定める．　$I_n = \displaystyle\int_1^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$

(1) I_1 の値を求めよ．

(2) $n \geq 2$ のとき，次の漸化式が成り立つことを示せ．　$I_n = \dfrac{1}{e} + (n-1) I_{n-1}$

(3) 次式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ．　$I_n = \dfrac{(n-1)!}{e} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{k!}$

(4) 次の極限値を求めよ．　$\lim_{n \to \infty} \dfrac{I_n}{(n-1)!}$

(金沢大 2016)　　(m20162214)

0.219 (1) 自然数 n に対して，集合 $D_n = \left\{ (x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq n^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \right\}$ における関数 $e^{-x^2-y^2}$ の積分　$\displaystyle\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dx dy$　を求めよ．

(2) 集合 $\left\{ (x, y) \in R^2 \mid 0 \leq x \leq n,\ 0 \leq y \leq n \right\}$ を R_n と表すとき，

$$\lim_{n \to \infty} \left(\iint_{R_n} e^{-x^2-y^2} dx dy - \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dx dy \right) = 0$$　を示せ．

(3) 次の積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

(金沢大 2016)　　(m20162216)

0.220 次の問いに答えよ．ただし，以降 a, b は正の定数とする．

(1) $f(x) = a^x$ の導函数を求めよ.

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{1}{x} \log \frac{a^x + b^x}{2}$ を求めよ.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$ を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162220)

0.221　行列 $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を考える. 次の各小問に答えよ.

(1) P の固有値をすべて求めよ. またそれぞれの固有値に属する固有ベクトルを一つずつ求めよ. ただし固有ベクトルの成分は整数値に選べ.

(2) $\boldsymbol{v}$ を (1) で求めた固有ベクトルの線形結合として表せ.

(3) $P^n\boldsymbol{v}$ を求めよ. さらに極限 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} P^{2n+1}\boldsymbol{v}$ と $\displaystyle\lim_{n \to \infty} P^{2n}\boldsymbol{v}$ を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162237)

0.222　(1) $\dfrac{x}{1+x} \leqq \log(1+x) \leqq x \quad (x > -1)$ を示せ.

(2) 実数列 $\{a_n\}$ が $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = a$ を満たすとき, $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n$ を求めよ.

(3) 実数列 $\{b_n\}$ は有界数列とする. もし $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{b_n}{n}\right)^n$ が収束するならば, $\{b_n\}$ も収束することを示せ.

(金沢大 2017)　　(m20172203)

0.223　関数 $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x \leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $x > 0$ に対し, $f'(x)$ と $f''(x)$ を計算せよ.

(2) 正の整数 n に対し, $\displaystyle\lim_{y \to \infty} y^n e^{-y} = 0$ を示せ.

(3) $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ であることを示せ.

(金沢大 2017)　　(m20172207)

0.224　(1) 任意の非負整数 $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

が成り立つことを示せ.

(2) 次の関数 $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

(3) (2) の関数 $f(x)$ は $\boldsymbol{R}$ 上で 2 回微分可能であり, 2 階導関数 $f''(x)$ は $x = 0$ で連続であることを示せ.

(4) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け.

(金沢大 2018)　　(m20182203)

0.225 $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ を収束する単調増加数列とし，その極限値を p とする．自然数 $n=1,2,\cdots$ に対して，$\boldsymbol{R}$ 上の関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}|x-p_k|$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f_1(x)$, $f_3(x)$ の最小値を与える x を求めよ．

(2) $f_{2n+1}(x)$ の最小値を与える点を q_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n$ を求めよ．

(金沢大 2018)　　(m20182204)

0.226 実数 $t\,(0<t<1)$ に対して，集合 R_t を

$$R_t=\left\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \mid x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ t\leqq x+y\leqq 1\right\}$$

と定める．このとき次の問いに答えよ．

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_{R_t}\frac{dxdy}{x+y}$ の値を求めよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{t\to+0}\iint_{R_t}\frac{dxdy}{(x+y)^{\lambda}}$ が存在するような，実数 λ の範囲を求めよ．

(金沢大 2018)　　(m20182205)

0.227 定数 $a>0$ を与えて，開区間 $\left(0,\dfrac{\pi}{a}\right)$ 上で関数 $f(x)=\dfrac{\cos(ax)}{\sin(ax)}$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) $x=0$ での右側極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}f(x)$ と $x=\dfrac{\pi}{a}$ での左側極限 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{a}-0}f(x)$ をそれぞれ調べよ．

(2) $f(x)$ は $\left(0,\dfrac{\pi}{a}\right)$ 上で，$f'(x)=-a\left(1+f(x)^2\right)$ を満たすことを示せ．

(3) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在することを示し，その導関数 $(f^{-1})'(x)$ を求めよ．

(4) (3) の関数 $f^{-1}(x)$ と $f(b)=b$ を満たす定数 b $\left(0<b<\dfrac{\pi}{a}\right)$ に対して，広義積分

$$\int_b^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)\left\{1+\left(f^{-1}(x)\right)^2\right\}}dx$$

を a と b を用いて表せ．

(金沢大 2018)　　(m20182207)

0.228 正接関数 $\tan x$ の逆関数を $\tan^{-1}x$ とし，$x\neq 0$ となる (x,y) に対して関数 $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ を定める．次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数を計算して，$f_y(x,y)-f_x(x,y)$ と $f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)$ を求めよ．

(2) $0<a<1$ に対し

$$D_a=\left\{(x,y)\ \middle|\ a^2\leqq x^2+y^2,\ 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq \sqrt{3}x\right\}$$

とするとき，重積分

$$I_a=\iint_{D_a}\{f_y(x,y)-f_x(x,y)\}\,dxdy$$

を計算し，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to+0}I_a$ を求めよ．

(金沢大 2019)　　(m20192203)

0.229 次の問いに答えよ．

(1) 実数 α に対し，広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ が存在するような α の値の範囲を求めよ．

(2) $L>1$ に対し，集合 D_L を

$$D_L=\left\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; 1\leqq x^2+y^2\leqq L^2\right\}$$

と定める．実数 β に対し，極限値

$$\lim_{L\to\infty}\iint_{D_L}\frac{dxdy}{1+(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}$$

が存在するような β の値の範囲を求めよ．

(金沢大 2019)　　(m20192208)

0.230 $x\in\boldsymbol{R}$ に対して，

$$f(x)=x\left(\log\left(x^2+\frac{1}{2}\right)-2\right)+\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x\right)$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x\log(x)}$ を求めよ．

(2) f の導関数を求めよ．

(3) f の極値を求めよ．

(金沢大 2020)　　(m20202207)

0.231 関数

$$f(t)=\frac{1}{1+e^{-t}}\ \ (t\in\boldsymbol{R}),\qquad F(x)=\int_0^x f(t)dt\ \ (x\in\boldsymbol{R})$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}f(t)$ および $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}f(t)$ を求めよ．

(2) $y=f(t)$ のグラフの概形を図示せよ．

(3) $y=F(x)$ のグラフは下に凸であることを示せ．

(4) $a>0$ に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{F(ax)}{x}$ を求めよ．

(金沢大 2021)　　(m20212201)

0.232 α を実数とする．2 以上の自然数 n に対して，n 次の正方行列 A_n を

$$A_n=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \alpha & -1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

により定める．ここで，$A_2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$，$A_3=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ である．

また，$a_n=\det(A_n)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) a_2，a_3 を求めよ．

(2) a_n を求めよ．

(3) $\alpha \geq 0$ のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(金沢大 2021)　　(m20212204)

0.233 (1) $\alpha > 1$ のとき，関数 $f(x) = (x + |x|)^{\alpha}$ は $\boldsymbol{R}$ 上の C^1 級関数であることを証明せよ．

(2) 集合 $\left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{4}(x + |x|)^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq -2\right\}$ の面積を求めよ．

(3) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right) - 1 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(x^2\right)}$$

(金沢大 2022)　　(m20222201)

0.234 次の各問いの計算をせよ．

(1) $x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$ を y について解け

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0} \frac{x}{1 - x^2}$，$\displaystyle\lim_{x\to 1-0} \frac{x}{1 - x^2}$　　(3) $\dfrac{d}{dx} e^{x \log x}$

(富山大 2001)　　(m20012301)

0.235 区間 $I = [1, \infty)$ における関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\cdots}$ について，次の問いに答えよ．ただし，

$$f_n(x) = \frac{n}{2 + nx}$$

とする．

(1) 区間 I における極限関数 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．

(2) 上の (1) における収束は一様収束であるかどうか調べよ．

(富山大 2013)　　(m20132309)

0.236 $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数とする．また，$x_0 \in \mathbb{R}$ とする．このとき，次の (a)，(b) は同値であることを示せ．

(a) $f(x)$ は $x = x_0$ で連続である．

(b) x_0 に収束する任意の実数列 $\left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(x_0)$ である．

(富山大 2015)　　(m20152302)

0.237 $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ を有界な実数列とするとき，

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

ならば，$\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ．

ただし，$\limsup_{n\to\infty} a_n$，$\liminf_{n\to\infty} a_n$ はそれぞれ数列 $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ の上極限，下極限を表す．

(富山大 2016)　　(m20162303)

0.238 関数 $f(x) = (1 + kx)e^{kx}$　$(x \geqq 0)$ について，次の各問いに答えよ．ただし，k は実数である．

(1) 次の積分 $I(X)$ を X を用いて表せ．ただし，$X > 0$ とする．

$$I(X) = \int_0^X f(x)dx$$

(2) $k = -1$ のとき，極限値 $\lim_{X\to\infty} I(X)$ を求めよ．

(3) 極限値 $\lim_{X\to\infty} I(X)$ が有限のとき，関数 $f(x)$ の広義積分は存在する．関数 $f(x)$ の広義積分が存在するための条件を，k についての不等式で表せ．

(富山大 2017)　　(m20172305)

0.239 次の式の値を求めよ．

$$\lim_{x\to+0} x^{2x}$$

(富山大 2020)　　(m20202301)

0.240 次の式の値を求めよ．

$$\lim_{x\to+0} xe^{x}$$

(富山大 2021)　　(m20212301)

0.241 マクローリン展開を用いて 次の式の値を求めよ．ただし，計算の概略も示すこと．

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-6(x-\sin x)}{x^5}$$

(富山大 2022)　　(m20222302)

0.242 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$ を求めよ．

(福井大 2001)　　(m20012401)

0.243 $f(x)$ が $x=a$ で 2 回微分可能のとき，テーラーの定理を用いて，以下の式が成立することを示しなさい．

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a)$$

(福井大 2001)　　(m20012407)

0.244 次式に示す微分方程式に対して下記の設問に答えよ．

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}-ax(t)=0 \quad （a \text{ は非零の実定数}）$$

(1) 次に示す初期条件の下で解 $x(t)$ を求めよ．また，$a>0$，$a<0$ に対する解 $x(t)$ の特徴を明らかにせよ．

$$x(0)=x_0\ ,\quad \frac{dx}{dt}(0)=0$$

(2) $a>0$ とする．このとき $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$ を満たす非零の初期条件を求めよ．

(福井大 2003)　　(m20032411)

0.245 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-1}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$

（福井大 2004）　　(m20042402)

0.246 極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x-x^2}{2-6x+3x^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} i}{n^2-1}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

（福井大 2004）　　(m20042405)

0.247 空中を速度の二乗に比例した空気抵抗を受けながら落下している質量が m $[kg]$ の物体の運動方程式は, 地表から鉛直上向きに x 座標をとれば,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - mg$$

で与えられる. ただし, g $[m/s^2]$ は重力加速度の大きさ, c $[kg/m]$ は比例定数とする.

十分高い上空から落下させたときの終端速度 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{dx}{dt}$ を求めよ.

(福井大 2005) (m20052410)

0.248 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-2}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

(福井大 2005) (m20052417)

0.249 次の計算を行え（途中経過も書くこと）.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{e^{2x^2}-1} =$ (2) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\tan x}\right) =$

(福井大 2007) (m20072401)

0.250 関数 $f(x) = (x^2+4x)e^{-x}$ について以下の問いに答えよ.

(1) 1 階の導関数 $f'(x)$, 2 階の導関数 $f''(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) $0 \leq x < \infty$ の範囲で増減表を書き, $y = f(x)$ のグラフを描け.

(福井大 2008) (m20082402)

0.251 以下に示されるような関数 $y(x)$ に関する常微分方程式が与えられている.

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha\frac{dy}{dx} + 2y = 4$$

ここで, α は実数であるとし, 以下の問いに答えよ.

(1) $\alpha = 5,\ y(0) = 0,\ \dfrac{dy(0)}{dx} = -2$ とするとき, 微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ.

(2) $x \to \infty$ とするとき, $\alpha > 0$ という条件下では $y(x)$ がある有限の定数 y_p に収束することが知られている（すなわち $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = y_p$）. そのときの y_p の値を求めよ.

(3) (2) の条件の下で $y(x)$ が収束するとき, $y(x)$ が振動しながら収束するための α の条件を求めよ.

(福井大 2008) (m20082410)

0.252 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5^x-3^x}{5^x+3^x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Bigl(\cos x\Bigr)^{\frac{1}{x^2}}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Bigl(1+8x\Bigr)^{\frac{1}{x}}$

(福井大 2008) (m20082413)

0.253 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{1-x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1} x}{x}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$ （n は正の整数）

(福井大 2009) (m20092407)

0.254 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ がある.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{A}^n \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ．n は整数とし，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 以外の $\boldsymbol{x}$ を求めること．

(福井大 2010)　　(m20102409)

0.255 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin x - x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right)$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n+2}{3n^2+4}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{9n^2+2n} - 3n\right)$　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

(福井大 2010)　　(m20102413)

0.256 次の極限値を求めよ．

なお，必要に応じて, 公式 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を使ってもよい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

(福井大 2011)　　(m20112401)

0.257 次の公式を使って極限値を求めよ．

〈公式〉$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,　$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to +0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log_e(1+2x)}{x}$

(福井大 2012)　　(m20122403)

0.258 極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x - x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$

(福井大 2013)　　(m20132405)

0.259 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-x-6}{3x^2-2x-8}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

(福井大 2014)　　(m20142401)

0.260 次の等式が成り立つように，定数 a と b の値を定めよ．

$$\lim_{x\to 2} \frac{ax^2+b}{x-2} = 1$$

(福井大 2014)　　(m20142416)

0.261 以下の (1) および (2) の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$

(福井大 2014)　　(m20142417)

0.262 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3-3x^2+2}{e^x}$

(福井大 2015)　(m20152401)

0.263 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}{x-1}$

(福井大 2016)　(m20162401)

0.264 2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ 及びベクトル $\boldsymbol{q}_0=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}$ を用いて以下のような漸化式を定義する. このとき, 以下の設問に答えよ.

$$\boldsymbol{q}_{n+1}=A\boldsymbol{q}_n \quad (n \text{ は整数})$$

(1) $\boldsymbol{q}_n$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{\varepsilon}_n=\dfrac{{}^T\boldsymbol{q}_n\,A\,\boldsymbol{q}_n}{{}^T\boldsymbol{q}_n\,\boldsymbol{q}_n}$ 及び $\boldsymbol{p}_n=\dfrac{\boldsymbol{q}_n}{|\boldsymbol{q}_n|}$ とするとき, $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 及び $\boldsymbol{p}_n$ を求めよ. ここで, ${}^T\boldsymbol{q}_n$ は $\boldsymbol{q}_n$ を転置したベクトルである.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 及び $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{p}_n$ を求めよ.

(福井大 2018)　(m20182406)

0.265 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x}$ を求めよ.

(福井大 2018)　(m20182419)

0.266 次の関数 $f(x)$ について $x=0$ における微分可能性を調べよ.

ただし, 必要であれば $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ の関係を用いてもよいこととする.

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & (x<0)\\ x & (x\geq 0)\end{cases}$$

(福井大 2020)　(m20202401)

0.267 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}$ を求めよ.

(静岡大 2006)　(m20062501)

0.268 $a>0$ とし, $D(a)=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq a\,,\ 0\leq y\leq\sqrt{3}\}$ とおく.
このとき 2 重積分　$I(a)=\displaystyle\iint_{D(a)}\frac{y}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy$　について, 次の問いに答えよ.

(1) $D(a)$ を図示し, $I(a)$ の値を求めよ.　　(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}I(a)$ を求めよ.

(静岡大 2006)　(m20062505)

0.269 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-3}-1}$ を求めよ.

(静岡大 2007)　(m20072501)

0.270 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$ を求めよ.

(2) $f(x)=\dfrac{-4x+6}{x^2-4x+3}$ のマクローリン展開を求めよ.

(静岡大 2011)　(m20112501)

0.271 次の極限値を求めなさい.

(i) $\displaystyle \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x\sin(x) - \frac{\pi}{2}}{\cos(x)} \right)$　　(ii) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2} \right)$

(静岡大 2015)　(m20152501)

0.272 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = (1-y)y$ について，次の問いに答えよ.

(1) 初期条件 $y(0) = a$ をみたす解を求めよ．ただし，a は正の実数とする.

(2) 上で求めた解 $y(x)$ について，$\displaystyle \lim_{x\to\infty} y(x)$ を求めよ.

(岐阜大 2007)　(m20072605)

0.273 $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{2x}$ の極限値を求めよ.

[ヒント ： $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log_e(1+x) = 1$ を用いても良い.]

(岐阜大 2007)　(m20072607)

0.274 $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ であることを証明せよ.

(岐阜大 2007)　(m20072614)

0.275 (1) $\displaystyle \lim_{x\to +0} x \log_e x = 0$ となることを示しなさい.　(2) $\displaystyle \int_0^1 \log_e x \, dx$ を求めなさい.

(岐阜大 2008)　(m20082608)

0.276 $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ を求めよ.

(岐阜大 2009)　(m20092620)

0.277 $y(x)$ を未知関数とする, 次の常微分方程式 (A) について, 以下の問いに答えよ.

$$y'(x) - \tan(x)\, y(x) = 2e^{2\sin(x)} \ , \qquad -\pi/2 < x < \pi/2 \qquad (A)$$

(1) $y(x; y_0)$ を初期条件 $y(0) = y_0$ を満たす微分方程式 (A) の解とするとき, $y(x; y_0)$ を求めよ. ただし, y_0 は実数とする.

(2) (1) の解 $y(x; y_0)$ について, 極限 $\displaystyle \lim_{x\to -\pi/2} y(x; y_0)$ が有限な値となるような初期値 y_0 はあるか. もしもあるなら, そのときの初期値 y_0 と $\displaystyle \lim_{x\to -\pi/2} y(x; y_0)$ を求めよ. また, もしもないのであれば, その理由を述べよ.

(岐阜大 2010)　(m20102605)

0.278 $f(x, y)$ を原点で偏微分可能な関数とする．このとき

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-h, 0) - f(0, 2h)}{h}$$

の値を偏微分係数 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ を用いて表せ.

(岐阜大 2011)　(m20112605)

0.279 $y(x)$ を未知関数とする微分方程式

$$y'' + 2y' + ay = 0 \qquad (*)$$

に対して以下の問に答えよ．ただし，a は定数とする.

(1) $a = 1$ のとき，方程式 $(*)$ の一般解を求めよ.

(2) $a > 0$ のとき，方程式 $(*)$ の任意の解 y に対し $\displaystyle \lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ が成り立つことを示せ.

(岐阜大 2011)　　(m20112607)

0.280 以下の式でガンマ関数 $\Gamma(t)$ を定義する．

$$\Gamma(t)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{t-1}dx\,,\ t>0.$$

次の問に答えよ．ただし，$t>0$ のとき $\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^t=0$ となることは証明しなくても使ってよい．

(1) $t>0$ に対して $\Gamma(t+1)=t\Gamma(t)$ となることを示せ．

(2) 自然数 n に対して $\Gamma(n+1)=n!$ となることを示せ．

(3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2$，すなわち

$$\left(\int_o^{\infty} e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx\right)\left(\int_o^{\infty} e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}dy\right)$$

を x,y の 2 変数関数の重積分で表せ．

(4) 変数 (x,y) から (r,θ) への変数変換

$$\begin{cases} \sqrt{x}=r\cos\theta, \\ \sqrt{y}=r\sin\theta \end{cases}$$

に対してヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ．

(5) 前問 (4) の変数変換を用いて (3) の重積分を計算し $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ．

(岐阜大 2014)　　(m20142601)

0.281 $a,b>0$ とする．xy 平面の第 1 象限において $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1$ が表す曲線を C とする．

また，x 軸，y 軸および C で囲まれる閉領域を A とする．以下の問に答えよ．

(1) $x=a\cos^4 t.\ y=b\sin^4 t$ とする．このとき，$\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}$ の値を求めよ．また，$\dfrac{dx}{dt}$ を t を用いて表せ．

(2) 曲線 C を $y=y(x)$ と表し，$y'(x)=\dfrac{dy(x)}{dx}$ とする．このとき，$\lim_{x\to a-0} y'(x)$ および $\lim_{x\to 0+0} y'(x)$ を求めよ．

(3) A の概形を描け．

(4) A の面積を求めよ．

(岐阜大 2016)　　(m20162601)

0.282 $y=y(x),\ y'=\dfrac{dy(x)}{dx}$ とする．微分方程式

(E)　　$y'+y\cos x=\sin x\cos x$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) 同次方程式 $y'+y\cos x=0$ の一般解を求めよ．

(2) (E) の一般解を求めよ．

(3) (E) の解で，条件 $y(0)=0$ を満たすものを求めよ．

(4) (3) で求めた y について，$\lim_{x\to 0}\dfrac{y(x)}{x^2}$ を求めよ．

(岐阜大 2016)　　(m20162604)

0.283 次の極限を求めよ． $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)-2x}{x^2}$

(岐阜大 2017) (m20172601)

0.284 微分方程式

$$(E)\quad y'+yx=1+x+x^2$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) 同次方程式 $y'+yx=0$ の一般解を求めよ．

(2) (E) の一般解を求めよ．

(3) (E) の解で，条件 $y(0)=0$ を満たすものを求めよ．

(4) (3) で求めた y について， $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{2x+\sin x}$ を求めよ．

(岐阜大 2020) (m20202606)

0.285 $y'=\dfrac{dy}{dx}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 微分方程式

$$(E_1)\quad y'-yx=0$$

の一般解を求めよ．

(2) 微分方程式

$$(E_2)\quad y'-yx\cos(x^2)=0$$

の一般解を求めよ．

(3) e を自然対数の底として，α, β を実数とする．微分方程式

$$(E_3)\quad y'-\alpha y=e^{\beta x}$$

の一般解を求めよ．

(4) γ を実数とする．微分方程式

$$(E_4)\quad y'-yx(\gamma+\cos(x^2))=0$$

の解 $y(x)$ で初期条件 $y(0)=1$ を満たすものを求めよ． $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}$ の収束・発散を判定せよ．

(岐阜大 2022) (m20222602)

0.286 x を変数とする関数 $F(x)$ が

$$F(x)=\int_x^{\sqrt{3}x}\sqrt{1-t^2}\,dt$$

と与えられるとき，次の問に答えよ．ただし， $0\leqq x\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とする．

(1) $\dfrac{dF}{dx}$ を求めよ．

(2) $F(x)$ の最大値を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}$ を求めよ．

(豊橋技科大 1996) (m19962705)

0.287 以下の文章の空欄に適当な式を記入せよ．

(1) 連続関数 $f(x)$ の微分は次の公式で定義される．

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\boxed{1\qquad} - f(x)}{h}$$

この公式に基づき e^x の微分を求めよう．

$$(e^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{\boxed{2\qquad}}{h}$$

ここで， $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ と展開できることを利用すると，

$$(e^x)' = e^x \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \cdots + \frac{\boxed{3\qquad}}{n!} + \cdots\right)$$

$$= e^x \lim_{h \to 0}\left(1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \cdots + \frac{\boxed{4\qquad}}{n!} + \cdots\right)$$

$$= \boxed{5\qquad}$$

と求まる．

(2) x^x の微分を次の手順で求めよう．ただし， $x > 0$ とし，また自然対数を $\log$ で表すものとする．

$y = x^x$ の両辺の対数をとると，

$$\log y = \boxed{6\qquad}$$

この式の両辺を x で微分すると，

$$\boxed{7\qquad} = \boxed{8\qquad} + x \cdot \frac{1}{x} = \boxed{9\qquad} + 1$$

この式から， y' を x で表すと，

$$y' = \boxed{10\qquad}$$

と求まる．

(豊橋技科大 1997)　　(m19972703)

0.288 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

(豊橋技科大 1998)　　(m19982706)

0.289 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{n \to \infty}\left(\frac{2 + 4 + 6 + \cdots + 2n}{n^2}\right)$

(豊橋技科大 2001)　　(m20012707)

0.290 以下に示す関数について次の問いに答えよ．　$f(x) = xe^{-x}$

(1) 関数 $f(x)$ を微分せよ．

(2) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点を求め，増減表を作成せよ．また，$y = f(x)$ の概形を描け．

(3) 関数 $f(x)$ の表す曲線と x 軸と $x = q$ $(q > 0)$ の直線とで囲まれる図形の面積を $S(q)$ とする．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{q \to \infty} S(q)$ を求めよ．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062706)

0.291 (1) 次の関数の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}\right)$

(2) 次の関数を微分せよ．ただし，$x \neq 0$ とする． $\exp\left(-\sin\dfrac{1}{x}\right)$

(3) 次の関数を微分せよ．ただし，$x \pm a \neq 0$ とする． $\log\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$

(豊橋技科大 2009) (m20092701)

0.292 赤い玉, 白い玉, 青い玉を不透明な袋の中に入れる. 以下の問いを読んで, 既約分数で答えよ.

(1) 袋の中に赤い玉 3 個, 白い玉 5 個, 青い玉 8 個が入っている.

(a) 袋の中から玉を 1 個取り出し, 色を確認してから袋に戻す. 袋の中をよくかき混ぜてから, 改めて玉を 1 個取り出したとき, 取り出された玉が最初に取り出した玉と同じ色である確率を答えよ.

(b) 袋の中から玉を 2 個同時に取り出すとき, 取り出された玉が赤 1 個と白 1 個である確率を答えよ.

(c) 袋の中から玉を 2 個同時に取り出すとき, 取り出された玉が異なる色である確率を答えよ.

(2) 袋の中に赤い玉 $3n$ 個, 白い玉 $5n$ 個, 青い玉 $8n$ 個が入っている（n は自然数）. この袋の中から玉を 2 個同時に取り出すとき, 取り出された玉が同じ色である確率を $p(n)$ と表すことにする. $\lim\limits_{n\to\infty} p(n)$ を答えよ.

(豊橋技科大 2010) (m20102701)

0.293 次の関数について以下の問いに答えよ.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

(1) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

(2) $f(x)$ の一次導関数を $f'(x)$ とする. $f'(0)$ の値を求めよ.

(豊橋技科大 2010) (m20102703)

0.294 (1) 次式が成り立つような定数 a の値を求めよ.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x+a-\sqrt{x^2+x+1}\right)=1$$

(2) 次の関数を微分せよ.

$$f(x) = \log\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

(豊橋技科大 2011) (m20112705)

0.295 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin 3x)}{2x(3-x)}$$

(豊橋技科大 2013) (m20132701)

0.296 関数の増大を示す最も基本的なものとして次の等式がある．

「 任意の整数 $m>0$ に対して， $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^m}{e^x}=0$ 」

この等式は関数の増大について何を示しているのか．また，この等式が成立する理由を説明せよ．

(名古屋大 1999） (m19992801)

0.297 つぼ U には白球 1 個と黒球 1 個の計 2 個, つぼ V には白球 2 個と黒球 1 個の計 3 個が入っている. 各つぼから 1 球ずつ取って, U のつぼから取った球は V のつぼへ, V のつぼから取った球は U のつぼへ入れる手続きを n 回行なうとき, U に白球が 2 個ある確率を p_n , 白球, 黒球が 1 個ずつある確率を q_n , 黒球が 2 個ある確率を r_n とする. 以下の問に答えよ.

(1) p_1 , q_1 , r_1 を求めよ.

(2) p_n , q_n , r_n を p_{n-1} , q_{n-1} , r_{n-1} を用いて表せ.

(3) この手続きを無限回行なうと確率 p_n , q_n , r_n がそれぞれ一定値 p, q, r になること（すなわち, $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, $\lim_{n\to\infty} q_n = q$, $\lim_{n\to\infty} r_n = r$）が分かっているとする. このとき p, q, r の値を求めよ.

(名古屋大 2005) (m20052805)

0.298 次の 2×2 の行列 A について以下の問に答えよ. 本問題において, ベクトルは 2 次元の縦ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を意味する.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値とそれぞれの固有値に対する一つの固有ベクトルを求めよ.

(2) (1) で求めた固有値と固有ベクトルを用いて行列 E と B を適当に定め, 行列 A を

$$A = EBE^{-1}$$

の形で表せ. ここで, E^{-1} は E の逆行列で B は $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ のような形である.

(3) (2) で定めた E と B を用いて, A^n はどのように表すことができるか. ここで, A^n は n 個の A を掛け合わせたものである.
（ヒント）まず, $A = EBE^{-1}$ の表現を用いて A^2 がどのようになるかを調べよ.

(4) ベクトル全体の集合を V と書く. V の任意の二つの要素 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, に対して,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

とする. ベクトルの列 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \cdots$ が一つのベクトル $\mathbf{x}$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) = 0$$

を満たすとき, この列は $\mathbf{x}$ に収束すると言う.
$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ を一つのベクトルとし, 行列 A を用いて,
$\mathbf{a}, A\mathbf{a}, A^2\mathbf{a}, A^3\mathbf{a}, \cdots$ なる列をつっくたとき, この列が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に収束ことを示せ. (3) で求めた A^n の表現を用いよ.

(名古屋工業大 1997) (m19972904)

0.299 関数 $f(x) = \dfrac{x^2}{\sin x}$ に対し, $\lim_{x\to 0} f(x)$ を求めよ.

(名古屋工業大 1998) (m19982901)

0.300 次の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(3x)}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{1+x+x^2})$

(名古屋工業大 2000)　　(m20002901)

0.301 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}$ を $x-3$ のべき級数に展開し，そのべき級数の収束範囲を求めよ．

(3) 次の重積分を求めよ．

$$V=\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy$$

(名古屋工業大 2009)　　(m20092905)

0.302 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{x}\right)$ を求めよ．

(名古屋工業大 2012)　　(m20122906)

0.303 次の問いに答えよ．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$ の値を求めよ．

(2) 関数 $F(x)$ が $F(x)=\displaystyle\int_1^{\sqrt{x}}\left(2-\frac{1}{3t}\right)dt$，　$x>0$ によって定義される．このとき，$F(x)$ の増減範囲を調べ，極値を求めよ．

(名古屋工業大 2013)　　(m20132907)

0.304 関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ を $|x-1|<1$ に対して

$$f(x)=\sum_{n=0}^{4}a_n(x-1)^n+R(x),\qquad \lim_{x\to 1}\frac{R(x)}{(x-1)^4}=0$$

と表すとき，係数 a_n $(0\leqq n\leqq 4)$ をすべて求めよ．

(名古屋工業大 2018)　　(m20182901)

0.305 関数 $f(x)=(x^3+1)e^{-x}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を n 回微分して得られる第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を求めよ．

(2) 極限値

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-a_0-a_1x-a_2x^2}{x^3}$$

が存在するような定数 a_0，a_1，a_2 と，そのときの極限値 A を求めよ．

(名古屋工業大 2021)　　(m20212901)

0.306 関数の微分の定義は次式で与えられる．

$$h'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}$$

この極限値が存在するとき，関数 $h(x)$ は微分可能であるという．

上の定義を用いて，次の定理を証明しなさい．

【定理】
関数 $f(x)$ と $g(x)$ が微分可能であれば，$f(x)+g(x)$ は微分可能であり，次の公式が成り立つ．

$$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$$

(三重大 2002)　　(m20023107)

0.307 関数 $y = f(x) = \sqrt[3]{x^2(x+3)}$ について，以下の問に答えなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\{y-(mx+b)\}=0$ となるように，係数 m, b の値を決定しなさい．極限値を求めるときには，途中の計算過程もわかるようにしなさい．「$x=1/t$ への変形，テイラー展開，ロピタルの定理」等の工夫のうち，一部，または全部の工夫をすることにより，答えを求める方法もある．

(2) (1) で求めた直線 $y=mx+b$ は，一般に何と呼ばれるか？答えなさい．(漢字で書くと，より望ましい）．

(3) $f(x)$ を 1 回微分，2 回微分した式を，それぞれ，求めなさい．

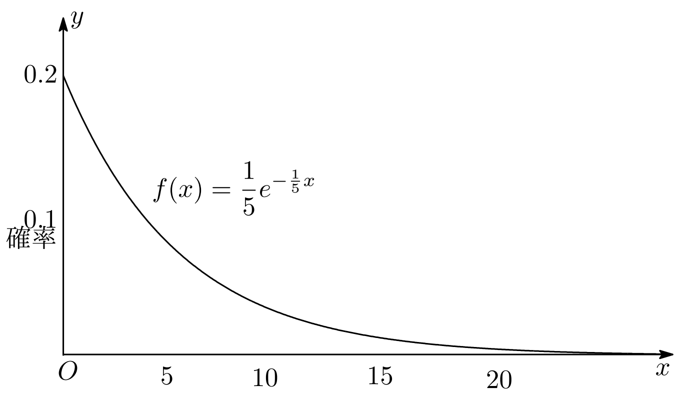
(4) (1)〜(3) をもとに，$f(x)$ のグラフの概形を書きなさい．途中の手順も示しなさい．また，極大値，極小値，変曲点，x 軸，y 軸との交点などが，もしあれば，それぞれ，その座標をグラフ中に示しなさい．

(三重大 2003)　　(m20033101)

0.308 ある人の電話の通話時間 x(分) との頻度確率との関係（確率分布）が

$$f(x)=\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x} \qquad (\ x>0,\ e \text{ は自然対数の底})$$

で表されるものとする時，次の (1)〜(5) の問いに答えなさい．



(1) $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ の値を求めなさい．

(2) 通話時間が 10 分である（ちょうど 10 分後に通話が終了する）確率を求めなさい．

(3) 通話が 10 分以内に終了する確率を求めなさい．

(4) 通話を始めてから 10 分が経過している時点において，さらにその後 10 分以内に通話が終了する確率を求めなさい．

(5) この人の平均通話時間を求めなさい。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\cdot e^{-ax}=0$, $(a>0)$ である．

(三重大 2006)　　(m20063109)

0.309 正の整数 N を 8 進数で表した時，n 桁の数になったとする．

(1) N の取り得る最大値と最小値（例えば，$n=2$ に限れば，$8 \leqq N \leqq 63$）を n を用いて表せ．（答のみの記載でも良い）

(2) (1) の結果を用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log_2 N}{n}$ を求めなさい．(途中経過を，詳しく答案用紙に記載せよ．)

(三重大 2006)　　(m20063114)

0.310 次の極限および級数を求めよ．（ただし，答だけでなく，なぜそうなるのかの説明も必要である．）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,e^{-an}$ （ただし，$a>0$）

(三重大 2008) (m20083103)

0.311 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$$

(三重大 2011) (m20113102)

0.312 (1) $y=f(x)$ と 2 直線 $x=a$, $x=b$ と x 軸で囲まれる面積は，次式の定積分の定義により求めることができる．

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\triangle x$$

ただし，$f(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続とし，$\triangle x=(b-a)/n$, $x_k=a+k\triangle x$ とする．上記の積分の定義を用いて，$\displaystyle\int_0^1 xdx$ を求めなさい．ただし，導出過程も示すこと．

(2) 問 (1) の定積分の定義を用いて，

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ を求めなさい．

(三重大 2015) (m20153101)

0.313 微分方程式 $0=dy+aydx$ で表される関数 $y=f(x)$ について以下の (1)〜(3) の問いに解答せよ．ただし，a は実数で $a>0$ とする．

(1) $f(0)=a$ の時，与えられた微分方程式を解き，$f(x)$ を x のみの関数として表せ．

(2) $g(x)=xf(x)$ とする時，極値や変曲点を示して $y=g(x)$ のグラフの概形を描け．

(3) 以下の極限値を求めよ．

$$\lim_{a\to\infty}\frac{\displaystyle\int_0^{\infty} g(x)dx}{\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx}$$

(三重大 2017) (m20173113)

0.314 時間 t の関数 $f(t)=p(1-e^{-qt})$ について，以下の問いに答えよ．ただし，p, q は正の実数である．

(1) $g(t)=\displaystyle\int_0^t f(t)dt$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t)$ を求めよ．

(3) $0\leqq t$ に対する $f(t)$ の変化を図示せよ．ただし $\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t)$ がどうなるかも図示すること．

(4) $0\leqq t$ に対する $g(t)$ の変化を図示せよ．ただし $\displaystyle\lim_{t\to\infty} g(t)$ がどうなるかも図示すること．

(5) $f(t)$ が満たす微分方程式を求めよ．

(三重大 2018) (m20183103)

0.315 p の関数

$$f(p)=p\log\frac{p}{q}+(1-p)\log\frac{1-p}{1-q}$$

について，以下の問に答えなさい．ただし，定義域は $0<p<1$ とし，q は $0<q<1$ を満たす定数とする．また，log は自然対数を表す．

① p の関数 $f(p)$ の最小値を求めなさい.

② 右側極限値 $\lim_{p \to +0} f(p)$，および，左側極限値 $\lim_{p \to 1-0} f(p)$ を求めなさい.

③ p の関数 $f(p)$ の変曲点の有無を，理由を説明して答えなさい.

④ 問 ①, ②, ③ の結果を用いて，$q = 1/2$ に固定したとき，$f(p)$ のグラフの概形を描きなさい．ただし，必要であれば $\log 2$ の近似値として 0.7 を使ってもよい.

(三重大 2022)　　(m20223101)

0.316 以下の極限値を求めなさい.

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m^5} \sum_{n=1}^{m} n^4$$

(三重大 2022)　　(m20223108)

0.317 次の極限値は存在しますか．存在する場合はその極限値を求めなさい.

(1) $\lim_{x \to +0} x \log x$　　(2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

(奈良女子大 2001)　　(m20013202)

0.318 開区間 $(0,1)(=\{x \mid 0 < x < 1\})$ 上の関数

$$f(x) = -x \log x$$

に対して次の問に答えよ.

(1) $0 < a < 1$ のとき微分係数 $f'(a)$ を求めよ.

(2) $(0,1)$ における関数 $f(x)$ の最大値を求めよ.

(3) $0 < a < 1$ のとき $f(a^2) = 2af(a)$ が成り立つことを示せ.

(4) $\lim_{a \to +0} f(a^2) = 0$ が成り立つことを示せ.

(5) $(0,1)$ における関数 $f(x)$ のグラフの概形を描け.

(6) $\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{1} f(x)dx$ を求めよ.

(奈良女子大 2005)　　(m20053203)

0.319 (1) 極限値 $\lim_{x \to 0} \dfrac{3x}{x^2+1}$ および $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x}$ を求めよ.

(2) 関数 e^{-x^2} を微分せよ.

(奈良女子大 2006)　　(m20063202)

0.320 関数 $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4}$ に関して次の問いに答えよ.

(1) 極限値 $\lim_{x \to \infty} f(x)$ および $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ.

(奈良女子大 2007)　　(m20073202)

0.321 関数 $f(x) = \dfrac{x+1}{x(x-1)} + \dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)}$　$(x \neq 0, 1, 2)$ に関して次の問いに答えよ.

(1) 極限値 $\lim_{x \to \infty} f(x)$ および $\lim_{x \to 1} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ.

(奈良女子大 2008)　　(m20083202)

0.322 関数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ に関して次の問いに答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ.

(奈良女子大 2009) (m20093202)

0.323 関数 $f(x)=\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})\ \ (x>0)$ に関して次の問に答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ.

(奈良女子大 2010) (m20103202)

0.324 関数 $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+2x+1}$ に対して，次の問に答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ.

(奈良女子大 2011) (m20113202)

0.325 関数 $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-x$ に対して，次の問に答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ.

(奈良女子大 2012) (m20123207)

0.326 関数 $f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\ \ (x>-1)$ に対して，次の問に答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ.

(奈良女子大 2013) (m20133202)

0.327 関数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\ \ (-\infty<x<\infty)$ に対して，次の問に答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次導関数を求めよ.

(奈良女子大 2015) (m20153207)

0.328 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$ を求めよ.

(2) 関数 $y=\log\sqrt{1-x^2}$ を微分せよ．ただし，x は実数で $|x|<1$ とする.

(奈良女子大 2016) (m20163204)

0.329 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$a_1=1\,,\qquad a_n=\frac{a_{n-1}+2}{a_{n-1}+1}\quad(n\geqq 2)$$

と定められている．以下の問いに答えよ.

(1) a_2, a_3 を求めよ.

(2) $n \geq 2$ に対し　$a_n - \sqrt{2} = -\dfrac{\sqrt{2}-1}{a_{n-1}+1}(a_{n-1} - \sqrt{2})$ が成り立つことを示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ を示せ.

(奈良女子大 2017)　　(m20173202)

0.330 (1) 関数 $f(x) = \arctan\left(\dfrac{2}{x}\right)$ を x で微分せよ.

(2) 関数 $f(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$ を考える. ここで, ω_0, γ は正の実定数とする. 以下の問いに答えよ;

(a) 極限値 $\displaystyle\lim_{\omega\to\infty} f(\omega)$ を求めよ.

(b) $\omega > 0$ の範囲で, $f(\omega)$ が極大をもつために満たすべき ω_0 と γ に対する条件式を求めよ. またその時の ω を求めよ.

(奈良女子大 2017)　　(m20173204)

0.331 $a < b$ となる正の実数 a, b に対して, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次で定義する.

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, \quad b_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$$

以下の問いに答えよ.

(1) $n \geqq 2$ に対し, $a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1}$ が成り立つことを示せ.

(2) $n \geqq 2$ に対し, $b_n - a_n < \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$ が成り立つことを示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ となる実数 α が存在することを示せ.

(奈良女子大 2018)　　(m20183202)

0.332 r を $|r| < \dfrac{1}{2}$ をみたす実数とする. 実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ が, 任意の自然数 n に対し以下の関係式をみたすとする.

$$a_{n+1} = r(b_n + c_n), \qquad b_{n+1} = r(c_n + a_n), \qquad c_{n+1} = r(a_n + b_n)$$

以下の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n + c_n) = 0$ となることを示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) = 0$ となることを示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となることを示せ.

(奈良女子大 2019)　　(m20193202)

0.333 p を $0 < p < 1$ をみたす実数とする. 行列 A および数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \quad a_1 = 1, \quad b_1 = 0, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geqq 2)$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) $k \geqq 1$ に対し, A^k を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$ であることを示せ.

(奈良女子大 2022)　　(m20223202)

0.334 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ を求めよ．　　(2) $\displaystyle\lim_{M\to\infty}\int_0^M f(x)dx$ を求めよ．

(奈良女子大 2022)　(m20223204)

0.335 (1) 関数 $f(x)$ および $g(x)$ は $x = a$ において，$f(a) = g(a) = 0$ であり，$f'(a)$ および $g'(a)$ が存在する．このとき，$g'(a) \neq 0$ であれば，次の式が成り立つことを示せ．

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

(2) 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\tan x}$

(京都大 2002)　(m20023301)

0.336 関数 $f(z)$ を次のように定義する．

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{e^z-1} & (z \neq 0) \\ 1 & (z = 0) \end{cases}$$

この関数は $|z| < 2\pi$ において解析的である．テイラー展開を

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n$$

のように表し，ベルヌーイ数 B_n，$n = 0, 1, 2, \cdots$ を定義する．$B_0 = 1$，$B_1 = -\frac{1}{2}$ を示せ．さらに，$(e^z-1)f(z) = z$ のべき級数展開から，B_n が次の漸化式を満たすことを示せ．

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k = 0$$

ただし，$\dbinom{n}{k}$ は 2 項係数を表す．

(京都大 2002)　(m20023305)

0.337 関数 $f(z)$ は $z = a$ において m 位の極 (m は正の整数) をもつとする．

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = \lim_{z\to a}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big((z-a)^m f(z)\Big)$$

を証明せよ．ただし，C は $z = a$ を囲む適当なサイズの単純閉曲線である．

(京都大 2002)　(m20023306)

0.338 任意の関数 $y = f(x)$ がある区間 I で微分可能であるとき，I の各点に対して次式で定義される y' を関数 y の導関数と呼び, 導関数を求めることを関数 y を微分するという．

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(1) 上の定義式を用いて, 次の関数の導関数を求めよ．

$$y = \log x \qquad (x > 0)$$

(2) 今関数 $f(x)$ と $g(x)$ は微分可能であるとする. この時, 上の導関数の定義式を用いて, 次の事を示せ．

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

但し, $g(x) \neq 0$ とする．

（京都大 2004）　(m20043301)

0.339 (1) 複素数 w に対して，級数

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=1}^{\infty} (-w)^{n-1}\ , \quad (|w|<1)\ \cdots ①$$

の両辺を $w=0$ から $w=z$ まで積分することで，複素関数 $\mathrm{Log}(1+z)$ を $z=0$ において，テイラー展開せよ．ただし，$\mathrm{Log}(1+z)$ は $-\pi <\mathrm{Im}\log(1+z) \leq \pi$ なる $\log(1+z)$ の主値を表す．級数 ① の項別積分可能性は明らかとしてよい．

(2) 任意の複素数 z について

$$\lim_{n\to\infty} n\mathrm{Log}\left(1+\frac{z}{n}\right) = z\ \cdots ②$$

を示せ．

(3) ② を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$ を示せ．

(京都大 2006) (m20063307)

0.340 $x>0$ に対して $\displaystyle\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ と定義して，$\log x$ の性質を定積分の性質から導きたい．(1)〜(2) に答えよ．

(1) 定積分の性質を用いて，等式 (a)〜(d) を示せ．

(a) $\log x_1x_2 = \log x_1 + \log x_2 \qquad (x_1, x_2 > 0)$

(b) $\log x^{\frac{n}{m}} = \dfrac{n}{m}\log x \qquad (m, n$ は正整数$)$

(c) $\log e = 1 \qquad \left(e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$

(d) $\dfrac{d}{dx}\log x = \dfrac{1}{x}$

(2) 上で定義した $\log x$ の逆関数を $\exp(x)$ とするとき，以下の等式 (e)〜(h) を示せ．

(e) $\exp(x_1+x_2) = \exp(x_1)\exp(x_2)$

(f) $\exp(1) = e$

(g) $\exp\left(\dfrac{n}{m}\right) = e^{\frac{n}{m}} \qquad (m, n$ は正整数$)$

(h) $\dfrac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x)$

(京都大 2008) (m20083301)

0.341 関数

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - a - ibx}$$

について，以下の設問に答えよ．ただし，x は実変数，a と b は正の実定数，$i=\sqrt{-1}$ である．

(1) $f(x)$ を変形して

$$f(x) = A\left(\frac{1}{x-z_1} - \frac{1}{x-z_2}\right)$$

としたとき，z_1 および z_2 を求め，複素平面上に図示せよ．ただし，A，z_1，z_2 は複素数の定数である．

(2) ζ を実数とし，積分

$$I(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-\zeta}\,dx$$

のコーシーの主値，すなわち

$$I(\zeta) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{\zeta-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-\zeta}\,dx + \int_{\zeta+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x-\zeta}\,dx\right) \qquad ①$$

を考える．式①の積分路は実数軸上にあるが，図1で示した複素平面内における積分路 C_1, C_2, C_3 に沿った複素積分を利用することにより，$I(\zeta)$ を求めることができる．ここで，C_1 は原点を中心とした半径 R の下半円周，C_2 は ζ を中心とした半径 ε の下半円周，C_3 はこれらの半円周とそれらを結ぶ実数軸の線分で構成される閉曲線であり，いずれも図中の矢印に沿って積分するものとする．

(a) C_1 に沿った積分路の $R \to \infty$ での極限値を求めよ．

(b) ε が十分小さいとき，C_2 に沿った積分値を求めよ．

(c) C_3 に沿った積分値を求めよ．

(d) 以上の結果から，$I(\zeta)$ を求めよ．

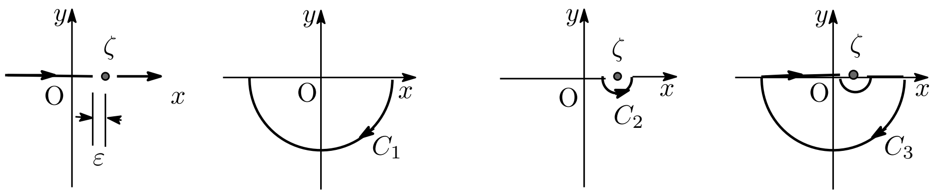


図1　左から順に，式 ① の積分路，C_1，C_2，C_3 を示す．

(京都大 2008)　　(m20083305)

0.342 半径 a の円に内接する正 n 辺形の面積を A_n, 外接する正 n 辺形の面積を B_n とおく. 半径 a の円の面積を C として，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{C-A_n}{B_n-C}$ を求めよ．(3 角関数のテイラー展開は既知として使ってよい．)

(京都大 2010)　　(m20103302)

0.343 数列 $\{a_n\}$ を　$a_1 = 3,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{3}{a_n}\right)$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$
によって定めるとき，次の (1)〜(3) に答えよ．

(1) $n \geq 1$ であるすべての n に対して，$a_n > \sqrt{3}$ であることを証明せよ．

(2) $n \geq 1$ であるすべての n に対して，$a_{n+1} - \sqrt{3} < \dfrac{1}{2}\left(a_n - \sqrt{3}\right)$ であることを証明せよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3}$ であることを証明せよ．

(京都大 2012)　　(m20123302)

0.344 次の (1)〜(6) に答えよ．ただし，log は自然対数を表す．

(1) k を自然数とし，$f(x)$ を $k \leq x \leq k+1$ で連続な狭義単調減少関数とする．このとき，不等式

$$\int_k^{k+1} f(x)dx < f(k)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n = 1, 2, \cdots$ に対して，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ とおく．$S_n > \log(n+1)$ が成り立つことを示せ．

(3) (2) で定義した S_n に対し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

(4) $x > 1$ において関数 $g(x) = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は狭義単調減少であることを示せ．

(5) k を 3 以上の自然数とする．(4) で定義した関数 $g(x)$ に対し，不等式

$$g(k) < \frac{1}{\log(k-1)} - \frac{1}{\log k}$$

が成り立つことを示せ．

(6) $n = 2, 3, \cdots$ に対して，$T_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\log k)^2}$ とおく．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n$ が存在することを示せ．

(京都大 2019)　　(m20193304)

0.345 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 1998)　　(m19983404)

0.346 $\displaystyle\lim_{x\to +0} x\log x$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 1999)　　(m19993402)

0.347 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2})^x$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2000)　　(m20003401)

0.348 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2000)　　(m20003402)

0.349 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right)$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2002)　　(m20023402)

0.350 実数 $p > 0$ について　$\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$　とおく．次の (1), (2) を証明せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$　（ただし，a は実数）　　(2) $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$

(京都工芸繊維大 2002)　　(m20023404)

0.351 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2\left\{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right\}$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2003)　　(m20033401)

0.352 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{xe^x - \sin x}{x^2}$

(京都工芸繊維大 2003)　　(m20033403)

0.353 (1) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)}{x^3}$$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ の第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$（n は自然数）を求めよ．

（京都工芸繊維大 2004）　　(m20043401)

0.354 a を定数とするとき，極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a + (1-x)^a - 2}{x^2}$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2004)　　(m20043408)

0.355 (1) 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left\{\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2x\right\}$

(2) 次の不定積分を求めよ．　$\displaystyle\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2}dx$

(京都工芸繊維大 2005)　　(m20053401)

0.356 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2005)　　(m20053407)

0.357 極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^{\sqrt{x}}$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2006) (m20063402)

0.358 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2)$

(京都工芸繊維大 2006) (m20063406)

0.359 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{e^{\sqrt{x}}-1-\sqrt{x}}{x}$

(京都工芸繊維大 2007) (m20073402)

0.360 (1) α を正の定数とするとき，$\displaystyle\lim_{x\to+0} x^{\alpha}\log x = 0$ を示せ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2008) (m20083402)

0.361 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin x+\cos x-e^x}{x\sin x}$ を求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^3-3x+1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2009) (m20093402)

0.362 正数 R について，$I(R)=\displaystyle\int_0^R x^3e^{-x^2}dx$ とおく.

(1) 積分 $I(R)$ の値を求めよ.

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{R\to\infty} I(R)$ を求めよ.

(京都工芸繊維大 2010) (m20103402)

0.363 (1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log\left(1+\frac{3}{x}\right)$ および $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)$ を求めよ.

(2) 積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)dx$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2011) (m20113402)

0.364 (1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} (\cos x)\log(\cos x)$ を求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)\log(\cos x)dx$ を求めよ.

(京都工芸繊維大 2012) (m20123403)

0.365 xy 平面上の関数 $f(x,y)=x^3+2xy-x+2y$ を考える．実数 a,b は $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ を満たしている．実数 t の関数

$$g(t)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h\cos t\,,\ b+h\sin t)-f(a,b)}{h^2}$$

を考える.

(1) a,b の値を求めよ.

(2) 次の等式を証明せよ.

$$g(t)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cos^2 t+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\sin t\,\cos t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\sin^2 t$$

(3) t が実数全体を動くとき，$g(t)$ の最大値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2013)　　(m20133402)

0.366　実数 $a,\ b$ に対して関数 $f(x) = e^{-x}\cos x + ax + b$ を考える．$f(x)$ は $f(0) = 0,\ f'(0) = 0$ を満たすとする．

(1)　$a,\ b$ の値を求めよ．

(2)　極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^m}$ が存在し，その極限値が 0 とは異なるような正の整数 m のうち最小のものを求めよ．

(京都工芸繊維大 2014)　　(m20143402)

0.367　極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}$ および $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2017)　　(m20173402)

0.368　微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x-y}$ の解 $y = y(x)$ で，$y(0) = 1$ を満たすものを求めよ．さらに，極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2018)　　(m20183405)

0.369　極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Tan}^{-1}(x^3+x)-x}{x^3}$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2020)　　(m20203402)

0.370　極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x - 2\sin x}{x^3}$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2021)　　(m20213402)

0.371　x の関数 $f(x) = 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\ \ (x \geqq 0)$ を考える．

(1)　$f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ．

(2)　極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ．

(3)　関数 $y = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)\ \ (x \geqq 0)$ の値域を求めよ．

(京都工芸繊維大 2022)　　(m20223402)

0.372　次のことを証明せよ．$\displaystyle\lim_{x\to 0} x\log x = 0$　　(ヒント：$\log x = -y$ とおき給え．)

(大阪大 1995)　　(m19953503)

0.373　区間 $I = [-\pi, \pi]$ で連続な関数 $f(x)$ に対して

$$R(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx\ ,\quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

とするとき，次の問に答えよ．

(1)　$|a| < 1$ なる実数 a に対して

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a^j \cos jx$$

としたとき

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} R(k)$$

を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ が I で非負であるとき

$$|R(k)| \leq R(0)\ , \quad k=0,1,2,\cdots$$

が成り立つことを示せ．

(大阪大 1996)　　(m19963502)

0.374 $I_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{(\sqrt{x})^{n-1}}{1+\sqrt{x}}dx$ に対し，

(1) I_0 , I_1 を求めよ．

(2) $I_n + I_{n-1}$ を求めて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ を示せ．

(3) (1),(2) より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2$ を証明せよ．

(大阪大 1997)　　(m19973502)

0.375 閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上で定義された，1 階連続微分可能（1 階導関数が存在して連続）な奇関数 $f(t)$ が与えられている．

(1) 実数列 $\{a_k\}$ を次のように定める：　$a_k := \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\ dt, \quad k=1,2,\cdots.$

このとき　$\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = 0$　を示しなさい．また　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2 < \infty$　であることを示しなさい．

(2) 上記 (1) で定めた実数列 $\{a_k\}$ に対して，　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2$　が成立したとすると，

$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t) - \sum_{k=1}^{N} a_k \sin kt\right|^2 dt = 0$　となることを示しなさい．また，この逆も成立することを示しなさい．

(大阪大 2006)　　(m20063510)

0.376 次の無限級数の第 N 項までの部分和 $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n$ を求めよ．また，$\displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N = S$ として無限級数の和 S を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+3)} = \frac{1}{1{\cdot}2{\cdot}4} + \frac{1}{2{\cdot}3{\cdot}5} + \frac{1}{3{\cdot}4{\cdot}6} + \frac{1}{4{\cdot}5{\cdot}7} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+3)} + \cdots$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)r^n = 3r + 4r^2 + 5r^3 + 6r^4 + \cdots + (n+2)r^n + \cdots$

ただし，$|\,r\,| < 1$ とする．必要ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ なる関係を用いてもよい．

(大阪大 2007)　　(m20073505)

0.377 あるパーティで，n 人の参加者が 1 つずつプレゼントを持ち寄り，主催者がこれを集めて，帰りに n 人の参加者に 1 つずつランダムに配るものとする．このとき，自分が持ってきたプレゼントを持って帰る人が少なくとも 1 人出る確率を $Q(1,n)$ とする．参加者に 1 番から n 番までの番号をつける．i 番の参加者が自分のプレゼントを持ち帰るという事象を M_i とする．

(1) M_i が起こる確率を n の式で表せ．

(2) $i_1, i_2, \cdots, i_m$ をそれぞれ 1 以上 n 以下の相異なる m 個の整数とする．事象 M_{i_1}, M_{i_2}, $\cdots$ M_{i_m} が同時に起こる確率を n と m の式で表せ．

(3) 事象 E が起こる確率を $P(E)$ と書く．2 つの事象 A_1 と A_2 が同時に起こる確率を $P(A_1 \cap A_2)$, A_1 と A_2 のうち少なくとも 1 つが起こる確率を $P(A_1 \cup A_2)$ と書く．

このとき $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ である．一般に $N(\geqq 1)$ 個の事象 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ のうち少なくとも 1 つが起こる確率 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N)$ は

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N) = \sum_{l=1}^{N} (-1)^{l-1} S_l \qquad \text{(i)}$$

$$\text{ここで } S_l = \sum_{k_1<k_2<\cdots<k_l} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \cdots \cap A_{k_l}) \qquad \text{(ii)}$$

である．ただし，式 (ii) の右辺の $\sum$ は，N 個の整数 $1, 2, \cdots, N$ の中から相異なる l 個の整数 $k_1, k_2, \cdots, k_l$ を選ぶあらゆる組み合わせについて和をとることを意味する．特に $l = 1$ のときは $S_1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} P(A_j)$ である．式 (i) を数学的帰納法で示せ．

(4) $Q(1, n) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{1}{j!}$ を示せ．

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q(1, n)$ を求めよ．

(大阪大 2007) (m20073508)

0.378 n, k が自然数のとき，広義積分 $I_{n,k}$ を次のように定義する．$I_{n,k} = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{k+1}}\,dx$

(1) $I_{1,k}$ を求めよ．

(2) $n - 1 - k < 0$ のとき，次の関係が成り立つことを示せ．$I_{n,k} = \dfrac{n-1}{k} I_{n-1,k-1}$

(3) $n - 1 - k < 0$ のとき，$I_{n,k}$ を求めよ．

(4) $x \geq 1$ のとき，自然数 k に依存するある実数 C_k が存在して，$\dfrac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{k+1}} \geq \dfrac{C_k}{x^{2k-2n+3}}$ となることを示せ．

(5) 上記 (4) の不等式を使って $n - 1 - k \geq 0$ のとき，$I_{n,k} = \displaystyle\lim_{L\to\infty} \int_0^L \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{k+1}}\,dx = \infty$ を示せ．

(大阪大 2008) (m20083501)

0.379 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0.5 \\ 1 & a+0.5 \end{pmatrix}$ について，以下の設問に答えよ．ただし，a は実数とする．

(1) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解をもつために，a が満たすべき条件を示せ．

(2) x_1, x_2, b_1, b_2 を実数とする．$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ が存在するために，a, b_1, b_2 が満たすべき条件をすべて述べよ．また，それぞれの場合の解あるいは解集合を求めよ．

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めて，A を対角化せよ．

(4) A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(5) 任意の 2 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}$ について，$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A^n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となるための a の範囲を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A^n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ はベクトル $A^n\boldsymbol{x}$ の各成分が 0 に収束することをいう．

(大阪大 2008) (m20083502)

0.380 自然数 n に対し, 以下のように定義される数列 $\{a_n\}$ について, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ．

ただし, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ ($|r| < 1$) を用いてもよい．

(1) $a_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

(2) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} (k-2) \left(\frac{1}{2}\right)^k$

(大阪大 2010)　　(m20103502)

0.381　$g(x)$ を周期 2π の連続関数とする．以下を示せ.

(1)　$\displaystyle\lim_{m\to-\infty}\int_0^{2\pi} g(x)\sin mx\,dx = 0$

(2)　有限三角級数

$$p_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\,. \quad n = 1, 2, \cdots$$

に対して

$$\lim_{m\to-\infty}\int_0^{2\pi} g(x)p_n(mx)dx = a_0\int_0^{2\pi} g(x)dx$$

(3)　上の $p_n(x)$ が $n\to+\infty$ で $p(x)$ に $[0, 2\pi]$ 上一様収束するとき

$$\lim_{m\to-\infty}\int_0^{2\pi} g(x)p(mx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(x)dx\cdot\int_0^{2\pi} g(x)dx$$

(大阪大 2011)　　(m20113510)

0.382　以下の設問に答えよ.

(1)　次式を証明せよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x) - \left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}\right)}{x^3} = 0 \qquad (a)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)}{x^2} = 0 \qquad (b)$$

(2)　次式を証明せよ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - \left(1 - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{3n^2}\right)}{\dfrac{1}{n^2}} = 0$$

(3)　問 (1)，問 (2) の結果を用いて，次式を証明せよ.

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2}\right)\right\} = 0$$

(大阪大 2012)　　(m20123505)

0.383　(1)　以下を示せ.

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{z}{z^2+1}e^{iz}dz = \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{z}{z^2-1}e^{iz}dz = 0$$

ただし，正の実数 R に対し

$$\Gamma_R = \left\{Re^{i\theta}\,\middle|\,0 \le \theta \le \pi\right\}$$

であり，積分の向きは反時計回りにとるものとする.

(2)　積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+1}\sin x\,dx$$

の値を求めよ.

(3) 積分

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2-1} \sin x \, dx$$

の値を求めよ.

(大阪大 2013)　　(m20133506)

0.384 確率変数 X は確率密度関数

$$p(x) = C_k x^{k-1} e^{-x} \ , \quad (x \geqq 0)$$

を持つとする．ただし，k は自然数で，C_k は $\displaystyle\int_0^{\infty} p(x)dx = 1$ で定まる正の数とする.

(1) 正の数 C_k，および $E[e^{-tX}]$, $(t \geqq 0)$ を求めよ.

(2) 確率変数列 $X_1, \cdots, X_n$ は互いに独立に同一分布に従うとし，その確率密度関数を $p(x)$ とする，このとき，

$$q_n(t) = E[e^{-t(X_1+\cdots+X_n)}] \ , \quad (t \geqq 0)$$

を求めよ.

(3) 極限値

$$\lim_{n \to \infty} q_n\left(\frac{1}{n}\right)$$

を求めよ.

(大阪大 2013)　　(m20133508)

0.385 m を自然数，k を 2 以上の自然数とする．x_0 を正の実数とし，関数 $x(t)$ に対する常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) - t^m x(t)^k = 0 \quad (t > 0) \ , \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad (*)$$

を考える．以下の問に答えよ.

(1) $y(t) = x(t)^{1-k}$ とおくとき，$y(t)$ が満たす常微分方程式を導け.

(2) 広義積分

$$\int_0^{\infty} t^m e^{-(k-1)t} dt$$

を求めよ.

(3) 初期値問題 $(*)$ の解 $x(t)$ に対して，$\displaystyle\lim_{t \to t_0 - 0} |x(t)| = \infty$ となる正の実数 t_0 が存在するとき解 $x(t)$ は爆発するということにする．解 $x(t)$ が爆発するような正の実数 x_0 の範囲を求めよ.

(大阪大 2014)　　(m20143504)

0.386 N を自然数とする．ボタンを押下すると 1 から N までの整数の中から一つの数字をランダムに表示する機械がある．ボタンを離すと表示された数字は消える．それぞれの数字は等確率で表示される．ボタンの押下を n 回行い表示された数字を $X_1, \cdots, X_n$ とし，これらは互いに独立な確率変数とする．$T = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$ とおき，T を用いて N を推定したい．事象 A の生起確率を $P(A)$ と書く．以下の問いに答えよ.

(1) $P(T \leqq t) = \left\{P(X_1 \leqq t)\right\}^n \quad (t = 1, \cdots, N)$ を示せ.

(2) $P(T = t) \quad (t = 1, \cdots, N)$ を求めよ.

(3) 期待値 $E(T)$ が次式で与えられることを示せ.

$$E(T) = N - \sum_{t=1}^{N} \left(\frac{t-1}{N}\right)^n$$

(4) 次式を示せ．

$$\lim_{N\to\infty}\frac{E(T)}{N}=\frac{n}{n+1}$$

(大阪大 2014)　　(m20143507)

0.387 実数 x に対し $y=\sinh x=(e^x-e^{-x})/2$ と定義すると $\sinh x$ は逆関数をもつ． そこで逆関数を $\mathrm{sh}^{-1}(x)$ と表す．以下の設問に答えよ．

(1) $\mathrm{sh}^{-1}(x)$ を求めよ．

(2) 正の実数 a について　$S(a)=\frac{1}{a}\int_0^a \mathrm{sh}^{-1}(x)dx$　と定義する．$S(a)$ を求めよ．

(3) $\lim\limits_{a\to 0} S(a)$ を求めよ．

(4) $\lim\limits_{a\to\infty}\{S(a)-\log a\}$ を求めよ．

(大阪大 2015)　　(m20153505)

0.388 m を 6 以上の偶数，n を $3 \leqq n \leqq \dfrac{m}{2}$ を満たす自然数とする．正 m 角形の m 個の頂点に，時計回りに $1,2,3,\cdots,m$ と番号をふる．この m 個の頂点から n 個の頂点を無作為に選んで n 角形を作る．ただし，頂点が一つでも異なる n 角形は異なるものとする．このとき，以下の設問に答えよ．

(1) $m=8$ のとき，辺上，または内部に正 8 角形の中心を持たない 3 角形の総数を答えよ．

(2) n 角形が，辺上，または内部に正 m 角形の中心を持たない確率を $P_{n,m}$ とする．$P_{n,m}$ を n と m を用いて表せ．また，$\lim\limits_{m\to\infty} P_{n,m}$ を求めよ．

(大阪大 2016)　　(m20163503)

0.389 実定数 a,b,c は $b^2-ac>0,\ b>0$ を満たしている．$D=b^2-ac$ と記す．以下の設問に答えよ．

(1) 連立常微分方程式

$$\frac{dx}{dt}+bx+cy=0,\ t\geq 0$$
$$\frac{dy}{dt}-ax-by=0,\ t\geq 0$$

の解 $x=x(t),\ y=y(t)$ で初期条件 $x(0)=0,\ y(0)=1$ を満たすものを求め $b,\ c,\ D$ と t を用いて表せ．

(2) (1) の解 $y=y(t)$ に対して，$y(t)>0$ が任意の $t\geq 0$ に対して成立することを示せ．

(3) (1) の解を用いて

$$z(t)=\frac{x(t)}{y(t)},\quad t\geq 0$$

と置くと

$$\frac{dz}{dt}+az^2+2bz+c=0,\quad z(0)=0$$

を満たすことを示せ．

(4) $\lim\limits_{t\to\infty} z(t)$ と $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{dz(t)}{dt}$ の値を求め $b,\ c,\ D$ を用いて表せ．

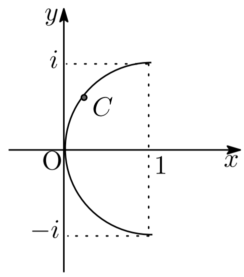
(大阪大 2016)　　(m20163504)

0.390 複素数 $z=x+iy,\ w=u+iv$ について以下の問いに答えよ．ただし，$x,\ y,\ u,\ v$ は実数，$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) 次の極限値を求めよ．　$\lim\limits_{z\to i}\dfrac{e^{2\pi z}-1}{z-i}$

(2) 複素関数 $w=f(z)=\dfrac{z-1}{z-i}$ により，z 平面上の図形 $|z-1|<\sqrt{2}$ は，w 平面上でどのような図形に写されるかを図示せよ．

(3) 右図に示す通り，$z=1$ を中心とする単位円の左半分に沿った $z=1-i$ から $z=1+i$ に至るまでの曲線を経路 C とするとき，$\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2-2z-3}dz$ を求めよ．



(大阪大 2017)　　(m20173504)

0.391 関数 $f(x)$ は区間 $(-\infty,\ \infty)$ で 2 回微分可能であるとする．関数 $g(x)$ を

$$g(x) = f(x)^2 - 2f(x) - f'(x)$$

と定める．ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である．2 変数関数 $u(x,y),\ v(x,y)$ をそれぞれ

$$u(x,y) = f(x-y)\ , \quad v(x,y) = g(x-y)$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) $f(x) = e^{-2x}$ であるとき，偏導関数

$$\frac{\partial u}{\partial x}\ , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \quad \frac{\partial u}{\partial y}$$

をそれぞれ求めよ．

(2) 2 変数関数

$$w = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{\partial u}{\partial x}$$

を v の偏導関数を用いて表せ．

(3) a を正の実数とする．$|f(0)-1| < a$ であり，すべての x について $g(x) = a^2 - 1$ であるとする．このとき

$$\lim_{y\to\infty} u(x,y)$$

を求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193505)

0.392 以下 α を与えられた実数とする． 1 階微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2x(t) + e^{-t}$$

の，初期条件 $x(0) = \alpha$ を満たす解を $x_\alpha(t)$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 1 階微分方程式

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2y(t)$$

の，初期条件 $y(0) = 1$ を満たす解 $y(t)$ を求めよ．

(2) $y(t)$ を (1) で求めた関数とする．関数 $C(t)$ を $C(t) = \dfrac{x_\alpha(t)}{y(t)}$ によって定めると，

$$\frac{dC(t)}{dt} = e^{-3t}\ , \quad C(0) = \alpha$$

が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} x_\alpha(t) = \infty$ となるための α に対する必要十分条件を求めよ．

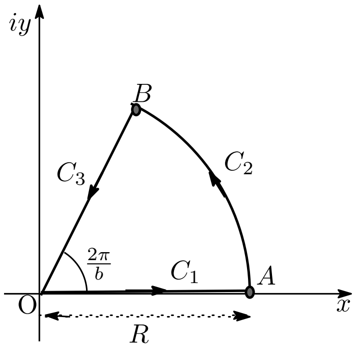
(大阪大 2019)　　(m20193508)

0.393 積分 $I=\int_0^\infty \frac{1}{x^b+1}dx$ を考える．ただし，b は正の整数とする．この積分を計算するため，右下図に示す複素平面上の扇形の周に沿う単位閉曲線 C を考え，以下の図のように経路 C_1, C_2, C_3 を定める． ただし，x, y は実数で，AB は原点を中心とする半径 R $(R>1)$ で中心角が $\frac{2\pi}{b}$ の円弧である．

C_1 ：原点 O から線分 OA に沿って点 A に至る経路

C_2 ：点 A から円弧 AB に沿って点 B に至る経路

C_3 ：点 B から線分 BO に沿って原点 O に至る経路



このとき，複素数 $z=x+iy$ について以下の問に答えよ．
ただし，$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) $I_3=\int_{C_3}\frac{1}{z^b+1}dz$ を，$I_1=\int_{C_1}\frac{1}{z^b+1}dz$ を用いて表せ．

(2) 閉曲線 C で囲まれた領域内における $f(z)=\frac{1}{z^b+1}$ の特異点を求め，そこでの留数を計算せよ．

(3) 留数定理および $\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}\frac{1}{z^b+1}dz=0$ を用いて，I を計算せよ．ただし，i を用いずに表せ．

(大阪大 2020)　　(m20203503)

0.394 $\alpha>0,\ \beta>0,\ x_0>0$ として，次の微分方程式の初期値問題を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\alpha x-\beta x^2,\ t>0 \\ x(0)=x_0 \end{cases}$$

(1) $x(t)$ を求めよ．

(2) $\lim_{t\to\infty}x(t)$ を求めよ．

(3) $\frac{\alpha}{\beta}\neq x_0$ のとき，$x(t)$ が区間 $t\geqq 0$ において単調関数であることを示せ．

(大阪大 2022)　　(m20223505)

0.395 (1) 関数 $y=y(x)$ が微分方程式

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}=2xy+(1+x^2)^2+y^2$$

を満たしているとする．このとき，関数 $z=z(x)$ を

$$z=\frac{y}{1+x^2}$$

によって定義する．z が満たす微分方程式を求めよ．

(2) (1) の微分方程式の，初期条件 $y(0)=0$ の下での解を求めよ．

(3) (2) で求めた解は，0 を含むある有界開区間 $(a,\ b)$ 上で連続であり

$$\lim_{x\to a+0}|y(x)|=\lim_{x\to b-0}|y(x)|=\infty$$

を満たしている．このような a, b を求めよ．

(4) 関数 $u=u(x)$ が微分方程式

$$(1+x^2)\frac{du}{dx}=2xu+(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)^2+u^2}$$

を満たしているとする．この微分方程式の，初期条件 $u(0)=0$ の下での解を求めよ．

(大阪大 2022)　　(m20223509)

0.396 n を 0 以上の整数とし,

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x^2+y^2)^{n/2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

とおく. このとき, 次の問いに答えよ. ただし. 任意の自然数 ℓ に対して, $\lim_{t\to\infty} t^{\ell}e^{-t^2}=0$ となることは証明なしに用いてもよい.

(1) 極座標への変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ を用いて, J_n を r に関する積分のみで表示せよ.

(2) J_0 の値を求めよ.

(3) n を 2 以上の自然数とするとき, J_n と J_{n-2} の関係式を求め, さらに J_{10} の値を求めよ.

(大阪府立大 2010)　(m20103602)

0.397 自然数 n に対して, I_n を　$I_n = \int_0^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{n+1}}dx$　とおくとき, 次の問いに答えよ.

(1) I_1 の値を求めよ.

(2) I_{n+1} を I_n と n を用いて表せ.

(3) I_n の値を求めよ.

(4) 極限値 $\lim_{n\to\infty}(I_{n+1}+I_{n+2}+\cdots+I_{2n})$ を求めよ.

(大阪府立大 2016)　(m20163608)

0.398 非負の整数 n に対して

$$S_n = \int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx$$

とおく. このとき, 各問に答えよ.

(1) $n \geqq 2$ に対して等式 $S_n = \dfrac{n-1}{n}S_{n-2}$ を示し, n の偶奇で場合分けをして, S_n の値を求めよ.

(2) 比 $\dfrac{S_{2n}}{S_{2n-1}}$ を考え, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{S_{2n}}{S_{2n-1}}$ の値を求めることで, 次を示せ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$$

(大阪府立大 2018)　(m20183604)

0.399 ℓ, m, n を自然数として, 次の極限を求めよ.

(1) $\lim_{\ell\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{\ell}\right)^{2\ell}$

(2) x が有理数であるとき, $\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty}\{\cos(m!\pi x)\}^{2n}\right]$

(3) x が無理数であるとき, $\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}\{\cos(m!\pi x)\}^{2n}\right]$

(大阪府立大 2019)　(m20193605)

0.400 $a_1=1$, $a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}$ $(n=1,2,\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について, 次の各問に答えよ.

(1) $\{a_n\}$ が有界な単調増加数列であることを証明せよ.

(2) $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ.

(神戸大 1996)　(m19963802)

0.401 $f(x)=a^x$ とする. $(0<a)$

(1) $f(x)$ を $x=0$ でマクローリン展開せよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{a^x}=0\ \ (1<a)$ ， $\displaystyle\lim_{x\to\infty}a^x x^n=0\quad (0<a<1)$ を証明せよ．

(神戸大 1996)　　(m19963804)

0.402 $a_1=2$， $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{2}{a_n}\right)$ で定められた数列 $\{a_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ について，次の各問に答えよ．

(1) $a_n \geqq a_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$ であることを示せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示し， $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

(神戸大 1997)　　(m19973804)

0.403 公式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を使って，次の (1)～(3) を示せ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=1$

(3) $\dfrac{d}{dx}\sin x=\cos x$

(神戸大 1998)　　(m19983801)

0.404 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$ の値を求めよ．

(神戸大 1999)　　(m19993801)

0.405 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)}{x^{n+1}}$ が有限な値として確定するように $a_0,a_1,\cdots,a_n$ を定め，この極限値を求めよ．但し，ロピタルの定理を用いてはならない．

(神戸大 1999)　　(m19993803)

0.406 a, b を実数とするとき，以下の等式を示せ．

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\log\left(e^{\frac{a}{\varepsilon}}+e^{\frac{b}{\varepsilon}}\right)=\max\{a,b\}$$

(神戸大 2002)　　(m20023801)

0.407 R を正の実数とし，$D_R=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqq R^2\}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の積分を計算せよ．　$I_R=\displaystyle\iint_{D_R}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}I_R$ を求め，それを用いて，次の積分の値を計算せよ．　$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

(神戸大 2002)　　(m20023802)

0.408 x を 0 でない実数とする．このとき，次の等式を示せ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{1+\cos\left(\frac{1}{n}x\right)+\cos\left(\frac{2}{n}x\right)+\cdots+\cos\left(\frac{n-1}{n}x\right)\right\}=\frac{\sin x}{x}$$

(神戸大 2004)　　(m20043802)

0.409 正の整数 n, および実数 x に対し

$$e^x=1+x+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta_{x,n}x}$$

と表し, 数列 $\{\theta_{x,n}\}$ を定義する．ここで，$0<\theta_{x,n}<1$ $(n=1,2,\cdots)$ である. このとき, 次の各問に答えよ．

(1) 次の式が成り立つことを示せ.

$$e^{\theta_{x,n}x} = 1 + \frac{x}{n+2}e^{\theta_{x,n+1}x}$$

(2) 極限値 $\lim_{x \to 0} \theta_{x,n}$ を求めよ.

（神戸大 2004） (m20043803)

0.410 $\varepsilon > 0$ とし，$D_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ とおく．このとき次の値を求めよ.

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{x^2 - y^2}{x^4 + y^4} dxdy$$

(神戸大 2004) (m20043804)

0.411 $f(x)$ をすべての $x \geq 1$ に対して定義された単調増加な連続関数とする．$f(x) > 0$ であるとするとき，次の各問いに答えよ.

(1) $f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x)dx \leq f(2) + \cdots + f(n-1) + f(n)$ を示せ.

(2) $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ とする．また，$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{F(n)} = 0$ を仮定する．そのとき，
$\lim_{n \to \infty} \frac{f(1) + f(2) + \cdots + f(n)}{F(n)} = 1$ 　を示せ.

(神戸大 2007) (m20073805)

0.412 次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の極限 $\lim_{n \to \infty} a_n$ について次の問いに答えよ．　$a_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{a_n}$

(1) $a_1 = 2$ または $a_1 = 4$ のとき，　$a_n = a_1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を確認せよ.

(2) $a_1 < 2$ のとき，$\lim_{n \to \infty} a_n = 2$ を示せ.

(3) $a_1 > 4$ のとき，$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ を示せ.

(4) $4 > a_1 > 2$ のとき，$\lim_{n \to \infty} a_n = 2$ を示せ.

(神戸大 2007) (m20073807)

0.413 $0 < a < 1$ を満たす実数 a に対して，$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 自然数 n に対して A^n を求めよ.

(2) 自然数 n に対して $S_n = E + A + A^2 + \cdots + A^n$ とおく．ただし，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．このとき，$\lim_{n \to \infty} S_n$ が存在し，$(E - A)^{-1}$ に等しいことを示せ.

(神戸大 2008) (m20083807)

0.414 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく．このとき，次の各問に答えよ.

(1) $n = 1, 2, \cdots$ に対して，A^n を求めよ．（答えのみでよい）.

(2) $S_n = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^k A^k}{k!}$ とおくとき，$\lim_{n \to \infty} S_n$ を求めよ.

(神戸大 2009) (m20093806)

0.415 実係数行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 + t^2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

について，次の問に答えよ.

(1) $A^2,\ A^3,\ A^4$ を求めよ．

(2)

$$B_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{k!}$$

を $B_n=x_nE+y_nA$ とするとき，

$$B=\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)E+\left(\lim_{n\to\infty}y_n\right)A$$

を求めよ．ここで E は単位行列を表す．

(3) $B=E$ を満たすような t を求めよ．

(神戸大 2015)　　(m20153803)

0.416 行列 $A=\begin{pmatrix}\dfrac{11}{6} & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ に対して，$B=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}kA^{k-1}$ とする．ただし，A^0 は単位行列 E を表すものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) B を求めよ．

(2) $(E-A)^2B$ を計算せよ．

(神戸大 2016)　　(m20163802)

0.417 $D_0(x)\equiv 1,\ D_n(x)=1+\sum_{k=1}^{n}2\cos kx\ (n\geq 1)$ ，$F_n(x)=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(x)\ (n\geq 0)$ で $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{D_n\}$ と $\{F_n\}$ を定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $D_n(x)\sin\dfrac{x}{2}=\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x$ となることを示せ．

(2) $F_n(x)\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2(n+1)}\Big\{1-\cos(n+1)x\Big\}=\dfrac{1}{n+1}\sin^2\dfrac{n+1}{2}x$ となることを示せ．

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}F_n(y)dy=2\pi$ となることを示せ．

(4) $0<\delta<\pi$ なる δ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\delta\leq|y|\leq\pi}F_n(y)dy=0$ となることを示せ．

(神戸大 2016)　　(m20163805)

0.418 行列 A とベクトル $\boldsymbol{u}$ を

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ \dfrac{1}{2} & 1 & -\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{3}{2} & 0 & -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

で定める．次の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{u}$ は A の固有ベクトルであることを示せ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正方行列 P を 1 つ求めよ．

(3) 上記の P に対し，$\lim_{n\to\infty}P^{-1}A^nP$ を求めよ．

(4) $\lim_{n\to\infty}A^n$ を求めよ．

(神戸大 2023)　　(m20233801)

0.419 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$　　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

（鳥取大 2000）　　(m20003902)

0.420 (1) $x>0$ において，不等式 $\sqrt{1+x}<1+\dfrac{x}{2}$ を証明せよ．

(2) $\sin x$ をマクローリン展開し，はじめの 4 項を書け．

(3) 前問 (2) の結果をも使って，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ を求めよ．

（鳥取大 2001）　　(m20013903)

0.421 微分可能な関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は次式で与えられる．

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

このことを用いて, 次の問いに答えなさい.

(1) $y=\log_e x$ の導関数を求めなさい. ただし, $e=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ とする.

(2) $y=x^n$ の導関数を求めなさい. ただし, n は正の整数とする.

（鳥取大 2004）　　(m20043901)

0.422 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}(2x+3)^n$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\sin^2(x/3)$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

（鳥取大 2005）　　(m20053901)

0.423 微分可能な関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義式　$f'(x)=\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ を用いて, 以下の微分公式を証明せよ．

(1) $y(x)=u(x)v(x)$ の微分 ： $y'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

(2) $y(x)=\sin(x)$ の微分 ： $y'(x)=\cos(x)$　ただし, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を利用してもよい．

（鳥取大 2006）　　(m20063901)

0.424 次の関数の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{\sin ax}$　$(a\neq 0,\ b\neq 0)$　　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}$

（鳥取大 2007）　　(m20073902)

0.425 次の問いに答えよ．ただし, n は自然数とする.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}$ を求めよ.

(2) 関数 $\dfrac{1}{1-x^2}$ の n 階の導関数を求めよ.

(3) 2 変数関数 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ の極値を求めよ.

（鳥取大 2009）　　(m20093912)

0.426 次の問に答えよ.

(1) 次の関数の導関数を求めよ．ただし, a は定数である.　　$\dfrac{1}{\tan(ax)}$

(2) 次の関数の第 n 次導関数を求めよ．ただし, log は自然対数である.　　$\log(1+x)$

(3) 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^x$

(鳥取大 2011)　(m20113901)

0.427 (1) n を正の整数とする．このとき，

$$\sin^{2n+1} x \leqq \sin^{2n} x \leqq \sin^{2n-1} x \quad (0 \leqq x \leqq \pi/2)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\sin^0 x = 1$ $(0 \leqq x \leqq \pi/2)$ と定め，$n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して $\displaystyle I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ とおく．

このとき，$\displaystyle I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ $(n \geqq 2)$ が成り立つことを示せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\right)^2$ を求めよ．

(岡山大 2003)　(m20034001)

0.428 実数 x に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}$ を求めよ．

(岡山大 2003)　(m20034002)

0.429 (1) $\displaystyle\int \frac{dy}{y\sqrt{1-y^2}}$ を計算せよ．

(2) $\displaystyle p\frac{dp}{dy} = y - 2y^3$ $(0 \leqq y < 1)$, $p(0) = 0$ の解 $p \in C^1([0,1))$ をすべて求めよ．

(3) (1) と (2) を利用して $\begin{cases} y'' - y + 2y^3 = 0,\ 0 \leqq y < 1,\ x \in \boldsymbol{R}, \\ \displaystyle\lim_{x\to 0} y(x) = 1, \end{cases}$ の解を求めよ．

(岡山大 2007)　(m20074003)

0.430 (1) 関数 $f(t)$ を $\displaystyle f(t) = \frac{1+at}{1+bt}$ によって定義する（a, b は定数）．このとき，$f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ を計算せよ．

(2) 次の極限値が存在するように定数 a, b を定め，その極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^6}\left(\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}\right)$$

(岡山大 2008)　(m20084001)

0.431 区間 $[0,\infty)$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対する広義積分

$$\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M f(x)e^{-sx}dx \quad (s > 0)$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して，

$$\int_0^\infty x^n e^{-sx}dx = \frac{n}{s}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-sx}dx$$

が成り立つことを示せ．

(2) 非負の整数 n に対して，$\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-sx}dx$ の値を求めよ．

(3) $s > 1$ のとき，

$$\int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{(-x)^n}{n!}e^{-sx}dx = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \frac{(-x)^n}{n!}e^{-sx}dx$$

が成り立つことを示せ．

(岡山大 2009)　(m20094002)

0.432 関数 $f(x)$, $f_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ を，閉区間 $[a,b]$ 上で微分可能であり，それらの導関数は $[a,b]$ 上で連続とし，

(i) すべての n について　$f_n(a) = f(a)$,

(ii) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n'(x) - f'(x)|\, dx = 0$,

を満たすものとする．このとき次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を $f(a)$ と $f'(x)$ を使って表せ．

(2) $f_n(x)$ は $f(x)$ に各点収束することを示せ．

(3) $f_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束することを示せ．

(岡山大 2012)　　(m20124001)

0.433 関数 $a_{m,n}(x)$ $(m, n \in \mathbb{N})$ を

$$a_{m,n}(x) = \cos^{2n}(m!\pi x)$$

とし，関数 $g_m(x)$ $(m \in \mathbb{N})$ および $f(x)$ を

$$g_m(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{1 + a_{m,n}(x)}$$

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} g_m(x)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) x が無理数のとき $g_m(x)$ を求めよ．

(2) x が有理数のとき $f(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ は $x = 0$ で連続であることを示せ．

(4) $f(x)$ は $x = 0$ で微分不可能であることを示せ．

(岡山大 2013)　　(m20134001)

0.434 関数 $f_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ を

$$f_n(x) = c_n \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right)^n$$

で定める．ただし，c_n は正の定数で

$$\int_0^{\pi} f_n(x) dx = 1$$

となるように選ぶ．以下の問いに答えよ．

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right)^n \sin x dx$$

を求めよ．

(2) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $c_n < \dfrac{n+1}{2}$ が成り立つことを示せ．

(3) $0 < x \leqq \pi$ のとき，$\displaystyle \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．

(岡山大 2016)　　(m20164001)

0.435 (1) 自然数 n に対して，$f_n(x) = nxe^{-nx^2}$　$(0 \leqq x \leqq 1)$ とするとき，関数列 $\{f_n(x)\}$ はある連続関数に収束することを示せ．また，

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x) dx \quad \text{および} \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$$

の値を求めよ．

(2) $\lambda > 0$ とする．自然数 n に対して，$g_n(x) = n^\lambda xe^{-nx^2} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ とするとき，関数列 $\{g_n(x)\}$ はある連続関数に収束することを示せ．また，

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx$$

が成り立つための λ の条件を求めよ．

(岡山大 2017)　　(m20174002)

0.436 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，$\mathbb{R}$ 上の関数 $f_n(x)$ を　$f_n(x) = \sqrt{\dfrac{1}{n^2} + x^2}$　で定める．次に答えよ．

(1) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ で連続であることを示せ．

(3) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ での微分可能性を調べよ．

(広島大 2003)　　(m20034101)

0.437 $n = 0, 1, 2, \cdots$ とし, 積分 $I_n(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-x}(1+x)^n dx$ を考える. 次の問に答えよ.

(1) すべての n に対して, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(1+x)^n}{e^x} = 0$ を示せ.

(2) すべての n に対して, 極限 $\lim_{t\to\infty} I_n(t)$ が存在することを示せ.

(3) $a_n = \lim_{t\to\infty} I_n(t)$ とおく. $n \geqq 1$ のとき, $a_n - na_{n-1} = 1$ が成り立つことを示せ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n!}$ を求めよ.

(広島大 2005)　　(m20054102)

0.438 以下の微分方程式を解け．さらに，それぞれについて $\lim_{t\to\infty} u(t)$ を求めよ.

(1) $\dfrac{du}{dt} + u = 1\,,\quad u(0) = 0$　　(2) $\dfrac{du}{dt} + \dfrac{1}{1+t^2}u = 0\,,\quad u(0) = 1$

(3) $\dfrac{du}{dt} = u(1-u)\,,\quad u(0) = \dfrac{1}{2}$

(広島大 2008)　　(m20084102)

0.439 (1) $\cos x$ の $x = 0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ.

(2) $\log(1-x)$ の $x = 0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ.

(3) (1) と (2) を用いて, $\log\cos x$ の $x = 0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ.

(4) a を実数とするとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \cos^n \frac{a}{\sqrt{n}} = e^{-\frac{a^2}{2}}$ が成り立つことを示せ.

(広島大 2011)　　(m20114105)

0.440 以下の問いに答えよ.

(1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ が発散することを示せ.

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$ の収束・発散を調べよ.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log(1+x)} \right)$ を求めよ.

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ を求めよ.

(広島大 2012)　　(m20124102)

0.441 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{1-x}$ を計算せよ.

(広島大 2012)　　(m20124107)

0.442 以下の各命題について，正しければ証明し，正しくなければ反例を用いてそのことを説明せよ.

(1) 区間 $(0,\infty)$ 上で微分可能な関数 $f(x)$ が $x=a$ で最大値を取るならば，$f'(a)=0$ を満たす.

(2) 区間 $[0,\infty)$ 上で微分可能な関数 $f(x)$ が $x=a$ で最大値を取るならば，$f'(a)=0$ を満たす.

(3) 区間 $I=[0,1]$ 上の非負値連続関数 $f(x)$ が $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=0$ を満たすならば，任意の $x\in I$ に対し $f(x)=0$ となる.

(4) 区間 $I=[0,1]$ 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ と I 上の関数 $f(x)$ に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ が任意の $x\in I$ で成り立つとする．このとき，$f(x)$ も I 上の連続関数である.

(5) $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

は，原点 $(0,0)$ において連続である.

(広島大 2013)　　(m20134106)

0.443 以下の問いに答えよ.

(1) e^x の $x=0$ のまわりでのテイラー展開

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

の係数 a_n $(n=0,1,2,\cdots)$ を書け,（答だけでよい）

(2) k を自然数とするとき，$\displaystyle\lim_{t\to+0}t(\log t)^k=0$ であることを示せ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1\log x\,dx$ の値を求めよ.

(4) 自然数 k に対して，広義積分 $I_k=\displaystyle\int_0^1(\log x)^k\,dx$ の値を求めよ.

(広島大 2013)　　(m20134110)

0.444 実数 ℓ に対して $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ を次で定める.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^{\ell}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

以下の問いに答えよ.

(1) f が原点 $(0,0)$ において連続であるための ℓ の条件を求めよ.

(2) f が原点 $(0,0)$ で x について偏微分可能であるための ℓ の条件を求めよ.

(3) $\ell=1$ のとき，極限

$$J=\lim_{R\to\infty}\iint_{x^2+y^2\leq R^2}f(x,y)dxdy$$

を考える．変数変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により，J は

$$J = \lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \frac{\sin\left(r^4\varphi(\theta)\right)}{r}dr\right)d\theta$$

となることを示せ．ここで，$\varphi(\theta) = \cos^4\theta + \sin^4\theta$ である．

(4) $\ell = 1$ のとき (3) の極限 J が存在することを示し，その値を求めよ．
その際，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ は収束し，その値が $\dfrac{\pi}{2}$ であることを用いても良い．

(広島大 2014)　　(m20144110)

0.445 (1) 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ の値を求めよ．

(2) $J = \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{x}$ とおく．J を求めよ．

(3) 定数 $C > 0$ と $R > 0$ が存在して $x \geq R$ ならば $\log(1+x^2) < C\sqrt{x}$ となることを示せ．

(4) 広義積分 $K = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^2}dx$ の値を求めよ．

(広島大 2015)　　(m20154102)

0.446 逆正弦関数 $f(x) = \sin^{-1}x$ を考える．ただし，f の値域は閉区間 $[-\pi/2,\ \pi/2]$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 開区間 $(-1, 1)$ において f の導関数 f' を求めよ．

(2) $n = 0, 1, 2, \cdots$ と $-1 < x < 1$ に対して，

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) = (2n+1)xf^{(n+1)}(x) + n^2f^{(n)}(x)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$f^{(n)}$ は f の n 次導関数を表す．

(3) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，$\dfrac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n)!} = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ であることを示せ．ただし，$0! = 1$ とする．

(4) F は開区間 $(-1, 1)$ 上の C^∞ 級関数とする．自然数 N と $N+1$ 個の実数 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_N$ に対して，$g_N(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^N a_k x^k$ と定める．ただし，$x^0 = 1$ とする．このとき，

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x) - g_N(x)}{x^N} = 0$$

となるための必要十分条件は，$a_k = \dfrac{F^{(k)}(0)}{k!}\ \ (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ N)$ であることを示せ．

(5) 自然数 N に対して，$S_N = \displaystyle\sum_{k=0}^N \frac{(2k)!\,(2N-2k)!}{(k!)^2\big((N-k)!\big)^2}$ を求めよ．

(広島大 2016)　　(m20164104)

0.447 (1) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t\ \ (a > 0)$ のとき，$\dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．ただし，途中の計算式も解答用紙に明記すること．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$ の値を求めよ．ただし，途中の計算式も解答用紙に明記すること．

(広島大 2016)　　(m20164109)

0.448 a を正の実数とする．以下の問いに答えよ．ただし，任意の正整数 k に対し，

$$\lim_{t\to\infty} t^k e^{-t} = 0$$

が成立することは証明なしに用いてもよい．

(1) 任意の非負整数 n に対し，ある正の実数 C が存在して，$x \geqq 1$ において

$$x^n e^{-ax^2} \leqq Cx^{-2}$$

が成立することを示せ．さらに，任意の非負整数 n に対し，広義積分

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx$$

が収束することを示せ.

(2) 非負整数 n に対し，

$$I_n(a) = \int_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx$$

とおく．$I_1(a)$ および $I_3(a)$ を a を用いて表せ.

(3) $I_n(a)$ を (2) で定めた値とする．非負整数 m に対し，$I_{2m+1}(a)$ を a と m を用いて表せ.

(4) $I_n(a)$ を (2) で定めた値とする．$I_4(a)$ を a を用いて表せ．ただし，

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

であることは証明なしに用いてもよい.

(広島大 2021) (m20214103)

0.449 (1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x(1-\cos x)}$ を求めよ.

(2) x の関数 $x^2 e^x$ の n 次導関数を求めよ．ただし，n は 2 以上の整数とする.

(3) $z = f(x, y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$ がそれぞれ C^2 級の関数であるとき，$\dfrac{d^2 z}{dt^2}$ を求めよ.

(広島市立大 2007) (m20074201)

0.450 $x > 0$ とする. $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $y = f(x)$ の増減, 凹凸および変曲点を調べ, グラフの概形を描け.

(広島市立大 2010) (m20104204)

0.451 次の極限値を求めよ. $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{2x}$

(山口大 2001) (m20014309)

0.452 次の極限値を求めよ．(1) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{2^n}$ (2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{n!}$

(徳島大 1998) (m19984402)

0.453 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} (1+5x)^{\frac{1}{x}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x}$ （ n は正の整数） (4) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin^{-1} x}{x^3}$

(徳島大 1999) (m19994401)

0.454 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^2}$ を求めよ.

(2) 自然数 n と 0 でない定数 c に対して $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^n} = c$ となるとき，自然数 n と 0 でない定数 c の値を求めよ．

(徳島大 2000)　　(m20004401)

0.455 自然数 n に対し，$f_n(x) = nx^n - nx^{2n}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ とする．

(1) $f_n(x)$ の最大値を求めよ．　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ が成立することを示せ．

(徳島大 2001)　　(m20014401)

0.456 微分方程式 $x^2y' + 2xy = 1$ $(x > 0)$ を考える．

(1) すべての解について $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x)$ を求めよ．

(2) $y(1) = y(2)$ となる解 $y(x)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた $y(x)$ のグラフを描け．

(徳島大 2001)　　(m20014403)

0.457 関数 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\log f(x)$ を求めよ．　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{d}{dx}f(x)$ を求めよ．

(徳島大 2003)　　(m20034401)

0.458 $y = y(x)$ に対する微分方程式 $y'' + y' - 2y = 0$ を考える．

(1) 一般解を求めよ．

(2) a を定数として，初期条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = a$ を満たす解を求めよ．

(3) (2) の解が $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$ となるように，a の値を定めよ．

(徳島大 2003)　　(m20034403)

0.459 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ について, 次の問に答えよ.

(1) $1 < a_n < 2$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示せ.

(2) $a_n < a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示せ.

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(徳島大 2005)　　(m20054402)

0.460 $y = y(x)$ が微分方程式 $y'' + 2y' + 5y = 0$ を満たす. 次の問に答えよ.

(1) 微分方程式の一般解を求めよ. ただし, 最終結果に複素数が現れてはならない.（必要ならオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いてもよい.）

(2) 初期条件 $y(0) = y'(0) = -e^{\frac{3}{4}\pi}$ を満たす微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた $y(x)$ に対し, $y\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)$ と $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x)$ を求めよ.

(徳島大 2005)　　(m20054404)

0.461 $x \neq 0$ として，$f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{x}$ を考える．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ を求めよ．　　(2) $f'(x)$ を求めよ．　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x)$ を求めよ．

(徳島大 2007)　　(m20074402)

0.462 $f(x)=\sqrt{1-\cos x}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\{f'(x)\}^2$ を求めよ．

(3) $f''(x)$ を求めよ．　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f''(x)$ を求めよ．

(徳島大 2008)　　(m20084402)

0.463 (1) $f(x)$ は微分可能で $f'(x)$ は連続とする．このとき，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{a^2f(x)-x^2f(a)}{x-a}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x+1}$ を求める次の計算の誤りを指摘せよ．

ロピタルの定理を用いて　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x+1}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)'}{(x+1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{1}=0$

(徳島大 2009)　　(m20094402)

0.464 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^x+\sin x-3^x+5x}{x}$ を求めよ．

(2) $f(x)=\sin^3(4x+3)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(徳島大 2010)　　(m20104402)

0.465 $0<a<1,\ D_a=\left\{(x,y)\ ;\ a^2\leqq\ x^2+y^2\leqq\ \dfrac{1}{a^2}\right\}$ とする．

(1) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とする. 行列式 $J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r}\\ \dfrac{\partial x}{\partial\theta} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}$ を $r,\ \theta$ で表せ.

(2) $\displaystyle I(a)=\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{a\to 0} I(a)$ を求めよ.

(徳島大 2010)　　(m20104404)

0.466 $0\leqq\ a\leqq\ 1$ に対して, 行列 $A=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}a & 1 & -1\\ 0 & 9a & 3\\ \frac{3}{4}a & 1 & -a\end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．ここで，$\det(M)$ は正方行列 M の行列式を表す.

(1) $\det(A)$ を求めよ.

(2) $f(a)=\det(A)$ とする．$f(a)$ のグラフを図示せよ.

(3) n を自然数とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\det(A^n)$ を求めよ.

(徳島大 2011)　　(m20114401)

0.467 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{x^2-\pi^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-e^{-x})}{\sin x-x\cos x}$

(徳島大 2012)　　(m20124406)

0.468 $0<a<\dfrac{1}{2}$ とし，xy 平面上の領域を $D=\left\{(x,y)\ ;\ y\leqq\ x\leqq\ \dfrac{1}{2},\ a\leqq\ y\leqq\ \dfrac{1}{2}\right\}$ とする．次の問いに答えよ.

(1) D を図示せよ.

(2) $I_a = \iint_D \cos\left(\pi(x-a)^2\right) dxdy$ を求めよ.

(3) (2) の I_a について, $\displaystyle\lim_{a \to \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - a\right)^{-2} I_a$ を求めよ.

(徳島大 2014)　　(m20144403)

0.469 $f(x) = x \log\left(e + \dfrac{1}{x}\right) \quad (x > 0)$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $\alpha = \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ とする. α を求めよ.

(2) (1) で求めた α に対して, $\beta = \displaystyle\lim_{x \to \infty} \Big(f(x) - \alpha x\Big)$ とする.

$t = \dfrac{1}{x}$ とおくと, $x \to \infty$ のとき $t \to +0$ であることを利用して, β を求めよ.

(3) (1),(2) で求めた α, β に対して, $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - (\alpha x + \beta)}{\frac{1}{x}}$ を求めよ.

(徳島大 2015)　　(m20154402)

0.470 関数 $f(x)$ は, $\sin f(x) = \cos^2 x$, $0 \leqq f(x) \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす.

(1) $f(0)$, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ をそれぞれ求めよ.

(2) $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ をそれぞれ求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{x \to +0} f'(x)$ を求めよ.

(徳島大 2018)　　(m20184402)

0.471 実数 x の関数 $\varphi(x)$ および $\varphi_N(x)$ を

$$\varphi(x) = e^{-x^2}, \quad \varphi_N(x) = N_{\varphi}(Nx) \qquad (N = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定義する. 実係数の多項式 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ が与えられたものとして, 次の各問いに答えなさい.

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_N(x) p(x) dx$ の値を求めなさい.

(2) 実数 c に対して, 極限 $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_N(x - c) p(x) dx$ の値を求めなさい.

なお, 解答に必要なら $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \sqrt{\pi}$ を用いてもよい.

（高知大 2001）　　(m20014501)

0.472 自然数 n に対して $\quad H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} \quad$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{H_n\}$ は発散することを示せ.　　(2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{H_n}{\log n} = 1$ であることを示せ.

（高知大 2001）　　(m20014502)

0.473 実数 x の関数 $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ について, 次の各問いに答えなさい.

(1) 等式 $S_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ が成り立つことを示しなさい.

(2) $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ が収束する x の範囲を求めなさい.

(3) $S_n(x)$ の導関数 $S_n'(x)$ を求めなさい.

(4) $\lim_{n\to\infty} S_n'(x)$ が収束する x の範囲を求めなさい.

（高知大 2001） (m20014503)

0.474 $f(x)$ を閉区間 $I=[a,b]$ 上の連続関数とする. I 上に $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$ を

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

となるように選び, I の分割と呼び Δ で表す. また

$$|\Delta| = \max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$$

とする. さらに $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ を満たす ξ_i をとり, $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ をこの分割の代表系と呼び, $\xi(\Delta)$ で表す. このとき

$$S(f, \xi(\Delta)) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

を分割 Δ とその代表系 $\xi(\Delta)$ に関するリーマン和と呼ぶ. 任意の分割の列と任意の代表系に対して

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S(f, \xi(\Delta))$$

が一意に存在する. その極限 S を $f(x)$ の I における積分といい

$$\int_a^b f(x)dx = S$$

とかく. この定義を用いて次の問に答えよ. ただし, 以下において $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で正値連続な関数とし

$$f_{in} = f(a+i\delta_n), \qquad \delta_n = \frac{b-a}{n}$$

とする.

(1) 次の式を示せ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{1n}+f_{2n}+\cdots f_{nn}}{n} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

(2) 次の式を示せ.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_{1n}f_{2n}\cdots f_{nn}} = \boldsymbol{e}^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f(x)dx}$$

(3) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)}$$

(高知大 2005) (m20054501)

0.475 次の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ は, $|x| < K$ で少なくとも $(n+1)$ 回微分可能であるとする. このとき, $f(x)$ の n 次のマクローリン展開式（すなわち, $x=0$ を中心とする n 次のテーラー展開式）を求めよ（証明は不要）.

(2) $|x| < 1$ における関数 $f(x) = (1+x)^{-1}$ の n 次のマクローリン展開式において, ラグランジュの剰余項 $R_{n+1}(x)$ を求め, $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ を示せ.

(3) (2) の $f(x)$ のマクローリン級数展開を求めよ.

(高知大 2005)　　(m20054503)

0.476 n を自然数とし

$$f_n(x) = \max\left\{-\frac{3}{4n^3}x^2 + \frac{3}{2n^2}x\,,\ 0\right\}$$

とする．ここで $\max\{a, b\}$ は a と b の小さくない方を表すとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^\infty f_n(x)dx$

(2) $x \in [0, \infty)$ に対して，次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$

(3) 次を示せ．　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx \neq \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$

(高知大 2006)　　(m20064502)

0.477 $\alpha > 0$ のとき，広義積分 $f(t) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}x^{t-1}dx$ は $t > 0$ に対して定義される．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(1)$ を求めよ．

(2) $t > 0$ に対して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-\alpha x}x^t = 0$ を示せ．

(3) $t > 0$ に対して，$\alpha f(t+1) = tf(t)$ が成り立つことを示せ．

(4) 正の整数 n に対して，$f(n+1)$ を求めよ．

(高知大 2007)　　(m20074503)

0.478 微分可能な関数 $f(x)$ の $x = a$ での微分係数 $f'(a)$ は次で定義される．

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

次の問いに答えよ．

(1) $f(x) = \sin x$ の $x = a$ での微分係数を上の定義に基づいて求めよ．

(2) 同様に，$f(x) = x^n$ の $x = a$ での微分係数を上の定義に基づいて求めよ．ただし，n は正の整数である．

(高知大 2008)　　(m20084501)

0.479 次は，ロピタルの定理の使用例である．

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ は $\dfrac{0}{0}$ の不定形であるから，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

これらにならって極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right)$ を求めてみる．以下の問いに答えよ．

(1) ロピタルの定理が使える様に，$\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right)$ を式変形せよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right)$ を求めよ．

(高知大 2008)　　(m20084505)

0.480 関数 $f(x)$, $g(x)$ が条件 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ を満たしているとき，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x+3}{x^2+3}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\log(1+x)}$ を求めよ．

(3) $f(x)=x$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(2x)}$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=3$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(2x)}$ を求めよ．

(高知大 2011)　　(m20114501)

0.481 $f(x)=\displaystyle\int_0^x \sin t^2 dt$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) 実数 a に対して，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{e^x-e^a}$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}$ を求めよ．

(4) 任意の実数 x に対して，$|f(x)| \leqq |x|$ を示せ．

(高知大 2012)　　(m20124502)

0.482 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{x^2}\sin\left(\frac{1}{t}\right)dt & (x\neq 0\text{ のとき})\\ 0 & (x=0\text{ のとき})\end{cases}$$

で定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $x\neq 0$ のとき，$f'(x)$ を求めよ．

(2) 任意の実数 x に対して，$|f(x)| \leqq x^2$ であることを示せ．

(3) $f(x)$ は $x=0$ で微分可能かどうかを理由を挙げて答えよ．

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}xf'(x)$ を求めよ．

(高知大 2014)　　(m20144501)

0.483 次の問いに答えよ．

(1) 実数 s に対して，不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{s+x}dx$ を求めよ．

(2) 正の整数 n と正の実数 t に対して　$f_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{t+\frac{k}{n}}$　とおく．
t を固定したとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(t)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた極限を $f(t)$ とおく．$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{f(t)}{\log(1-e^{-t})}$ を求めよ．

(高知大 2015)　　(m20154501)

0.484 次の極限値　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)$　を求めよ．

(高知大 2016)　　(m20164505)

0.485 (1) 任意の $x>0$ に対して

$$\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}$$

が成り立つような定数 a,b,c を求めよ．

(2) $r>0$ のとき，次の広義積分の値を r を用いて表せ．

$$\int_r^\infty\frac{dx}{x(x+1)^2}$$

(3) (2) で求めた広義積分の値を $I(r)$ とおく. $\lim_{r \to \infty} \left(r^2 I(r)\right)$ を求めよ.

(高知大 2017) (m20174502)

0.486 (1) $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 f を次で定義する.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, $\lim_{x \to 0} f(x)$ は存在するか. 理由をつけて答えよ.

(2) $a,\ A,\ B \in \mathbb{R}$ を定数とする. $g,\ h$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数とする. $\lim_{x \to a} g(x) = A$ と $\lim_{x \to A} h(x) = B$ が成り立つとする. また, $x \neq a$ のとき, $g(x) \neq A$ であるとする. このとき, $\lim_{x \to a} h(g(x)) = B$ が成り立つことを $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて示せ.

(3) $a,\ A,\ B \in \mathbb{R}$ を定数とする. $g,\ h$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数とする. $\lim_{x \to a} g(x) = A$ と $\lim_{x \to A} h(x) = B$ が成り立つとする. このとき, $\lim_{x \to a} h(g(x) = B$ が常に成り立つか. 理由をつけて答えよ.

(高知大 2018) (m20184501)

0.487 正の整数 n と実数 $x < 1$ に対して, $R_{n+1}(x) = \log(1-x) + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k}$ とおく.

このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\lim_{x \to 0} \dfrac{R_{n+1}(x)}{x^{n+1}}$ の値を求めよ.

(2) $|x| < 1$ のとき, $\lim_{n \to \infty} R_{n+1}(x) = 0$ を示せ.

(3) $\lim_{x \to 0} \dfrac{R_4(x)}{\dfrac{1}{1-x^2} - 1 - x^2}$ の値を求めよ.

(高知大 2019) (m20194501)

0.488 $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ とする.

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(2) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ と $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ を求めよ.

(3) $\lim_{x \to +0} f(x)$ と $\lim_{x \to -0} f(x)$ を求めよ.

(4) $y = f(x)$ の増減を調べて, グラフを描け.

(愛媛大 2000) (m20004601)

0.489 $0 < a < 1$ とする.

(1) $\displaystyle\int_a^1 \log x dx$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{a \to 0} \int_a^1 \log x dx$ を求めよ. ただし, 計算途中で不定形の極限ができた場合, その計算過程も明記すること.

(3) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log k - \log n \right)$ を求めよ.

(愛媛大 2000) (m20004602)

0.490 (1) 次の関数を微分せよ.

(a) $\log(1+x^4)$ (b) $\sin^{-1} x^2$

(2) α, β を定数とし，

$$f(x) = \begin{cases} \tan^{-1} x & (x > 1) \\ \beta & (x = 1) \\ \alpha x - \alpha + \beta & (x < 1) \end{cases}$$

とおく. ただし $\tan^{-1} x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする. 次の問いに答えよ.

(a) $f(x)$ が $x = 1$ で連続になるように β を定めよ.

(b) $\displaystyle\lim_{x \to +0} f'(x) = \lim_{x \to 1-0} f'(x)$ となるように α を定めよ.

(愛媛大 2005)　　(m20054601)

0.491 $f(x)$ を $(0, \infty)$ 上で 2 回微分可能な関数とする. $0 < a < b$ とし,

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{K}{2}(b-a)^2$$

を満たす定数を K とする.

(1) $F(x) = f(b) - \{f(x) + f'(x)(b-x) + \dfrac{K}{2}(b-x)^2\}$ とおくとき, $F'(x)$ を求めよ.

(2) $K = f''(a + \theta(b-a))$ を満たす $0 < \theta < 1$ が存在することを示せ.

(3) すべての $x > 0$ に対して $f''(x) \geqq \delta$ を満たす定数 $\delta > 0$ が存在するとき,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

であることを示せ.

(愛媛大 2005)　　(m20054608)

0.492 (1) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \sqrt{x}(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1})$　　(b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$

(2) 次の関数を微分せよ.

(a) $x \sin^{-1} x$　　(b) $\log \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$　　(c) $a^{x \log x}$（ただし，a は $a \neq 1$ である正の定数）

(愛媛大 2006)　　(m20064601)

0.493 n を自然数とするとき，関数 $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{t^n}{t^{2n}+2} dt$ について次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ が $x = 1$ で極値を持つように n の値を定めよ.

(2) (1) の n に対して $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x), \lim_{x \to -\infty} f(x)$ を求めよ.

(愛媛大 2006)　　(m20064610)

0.494 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left\{\sqrt{(x+a)(x+b)} - \sqrt{(x-a)(x-b)}\right\}$　（a, b は定数）　　(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \tan(t^2) dt$

(愛媛大 2006)　　(m20064611)

0.495 (1) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{x^{10} - a^{10}}{x - a}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x^2}{x \sin 2x}$

(2) 次の関数を微分せよ.

(a) $e^{-2x} \cos \dfrac{x}{2}$　　(b) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$　　(c) $x^{\frac{1}{x}}$　$(x > 0)$

(愛媛大 2007)　　(m20074601)

0.496 すべての実数 x に対して，$f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{t^3+1}{t^2+1}dt$ とする．

(1) $f(x)$ を計算せよ．　　(2) $x>0$ のとき $f(x)>0$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$ の値を求めよ．

(愛媛大 2007)　　(m20074608)

0.497 (1) 次の不定積分を計算せよ．ただし，$x>0$ で n は自然数とする．　$\displaystyle\int x^n\log x\,dx$

(2) 次の定積分を計算せよ．　$\displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,dx$

(3) 3 点 $A=(-x_1,x_2,0)$, $B=(0,x_2,x_3)$, $C=(x_1,0,x_3)$ を頂点とする三角形の面積を求めよ．

(4) 次の極限値を求めよ．ただし，a は定数とする．　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k+a}$

(愛媛大 2008)　　(m20084607)

0.498 (1) (a) 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{\cos x}-1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ を示せ．　ただし，n は自然数とする．

(2) 次の関数の導関数を求めよ．

(a) $\log|2x+1|$　　(b) $\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$　　(c) $(\sin x)^{\sin x}$

(愛媛大 2008)　　(m20084608)

0.499 (1) 次の曲線上の与えられた点 (a,b) における接線の方程式を求めよ．

(a) $y=x\log x$,　$(a,b)=(e,e)$　　(b) $y=\dfrac{e^{2x}-e^{-x}}{e^{3x}+e^{-2x}}$,　$(a,b)=(0,0)$

(2) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x}-2}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x-x}{x^3}$　ただし, $\tan^{-1}x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．

(3) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義を述べよ. さらに, $f(x)=c$（定数関数）ならば $f'(x)=0$ であることを定義に従って示せ.

(愛媛大 2010)　　(m20104601)

0.500 (1) $f(x)=\tan^{-1}x+\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$　$(x>0)$ とおく．ただし，$\tan^{-1}x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．　　(b) $f(2)$ の値を求めよ．

(2) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{-4x}}{\sin 5x}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{\log x}$　　(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right)$

(愛媛大 2011)　　(m20114607)

0.501 (1) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$

(2) x の関数 $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ を微分せよ．

(3) $f(x)=\cos^{-1}(\sin x)$ とおく．ただし，$\cos^{-1}x$ の値域は $[0,\pi]$ とする．

(a) $f(\frac{\pi}{2})$ を求めよ．

(b) $f(x)$ を微分せよ．

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f'(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f'(x)$ を求めよ．

(愛媛大 2013)　　(m20134601)

0.502 $f(x)=\dfrac{x}{(\log x)^2}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}$ を求めよ．

(2) 区間 $(1,\infty)$ における関数 $y=f(x)$ の増減を調べ，そのグラフをかけ．

(3) $D=\{(x,y)\mid x>1,\ y\geqq f(x)\}$ とする．領域 D における $x+y$ の最小値を求めよ．

(愛媛大 2014)　　(m20144601)

0.503 (1) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\log(1+x)}{x^2}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{4}{x}\right)^{x^2}$

(2) x の関数 $x\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}x$ を微分せよ．

(3) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$\cos^{-1}x+\cos^{-1}(-x)=\pi$$

ただし，$\cos^{-1}x$ の値域は $[0,\ \pi]$ とする．

(愛媛大 2015)　　(m20154601)

0.504 a を正の整数とし，2 曲線 $C_1\ :\ y=|x|e^{-x}$,　$C_2\ :\ y=ae^{-x}$ で囲まれた図形の面積を S とする．

(1) 関数 $y=|x|e^{-x}$ の増減，極値を調べ，グラフの概形をかけ．

(2) S を a を用いて表せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{S}{a^2}$ を求めよ．

(愛媛大 2015)　　(m20154608)

0.505 $a>1$ とし，$f(x)=(e^x-1)(e^x-a)$ とおく．

(1) 関数 $y=f(x)$ の増減，極値，および $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f(x)$ を調べ，グラフの概形をかけ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(3) S を (2) で求めた値とするとき，$\displaystyle\lim_{a\to1+0}\frac{S}{(a-1)^3}$ を求めよ．

(愛媛大 2016)　　(m20164604)

0.506 (1) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log\sin x$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to+0}(\sin x)^x$

(2) 次の関数の導関数を求めよ．

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$　　(b) $\tan^{-1}(2x+3)$

(愛媛大 2017)　　(m20174601)

0.507 $a,\ b$ は実数で，$a>0$ とする．関数 $f(x)=\dfrac{bx+1}{x^2+a}$ が $x=-1$ で極値 $\dfrac{1}{2}$ をとるとき，以下の問いに答えよ．

(1) $a,\ b$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の増減，極値および極限 $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ を調べ，グラフの概形を描け．

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸，y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(愛媛大 2017)　　(m20174611)

0.508 (1) 次の関数の導関数を求めよ．ただし，a は正の定数とする．

(a) $\sin^{-1}(x^2)$　　(b) $x^{\sin x} \quad (x > 0)$　　(c) $\log\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)$

(2) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x}$

(愛媛大 2018)　　(m20184601)

0.509 (1) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{2x \tan x - \frac{\pi}{2}}{\sin x - \cos x}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x \log\left(\frac{x+2}{x+4}\right)$

(2) $f(x) = \sqrt{x+2}$ とする．

(a) 3 階までの導関数 $f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$ を求めよ．

(b) 次の式

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2}{x^2} = 0$$

が成り立つように定数 a_0，a_1，a_2 を定めよ．

(愛媛大 2021)　　(m20214601)

0.510 (1) 次の極限値を求めよ．ただし，$[x]$ は，実数 x を超えない最大の整数とする．

(a) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\log(1 + 3x^2)}{\log(5 + 7x)}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x \to 1+0} \frac{x^2 - [3x]x + 2}{x - 1}$　　(c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \int_0^{x/2} \frac{dt}{(\sin x)\sqrt{1 - t^2}}$

(2) 次の関数の導関数を求めよ．

(a) $\sqrt{1 + \cos^2 x}$　　(b) $\sin^{-1}(\log x)$

(愛媛大 2022)　　(m20224606)

0.511 $\{a_n\}$ を数列とする．

(1) $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$　ならば　$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = a$　となることを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = a$　であっても　$\lim_{n \to +\infty} a_n$　が存在するとは限らないことを反例によって示せ．

(九州大 1997)　　(m19974702)

0.512 複素平面上の中心 a，半径 r の半円 $C_r(a)$ を $C_r(a) = \{z = a + re^{i\theta}\ ;\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$ で定める．ただし，$i = \sqrt{-1}$ である．

(1) 正則関数 $f(z)$ に対して次式を示せ．$z = a + \varepsilon e^{i\theta}$ とおいて考えよ．

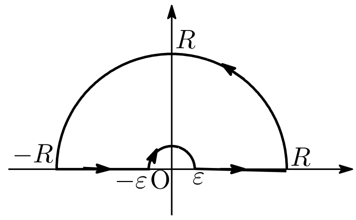
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{z - a} dz = i\pi f(a)$$

(2) 不等式 $\dfrac{2}{\pi}\theta \leq \sin\theta \left(0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が成立つことを示せ．

(3) (2) の結果を用いて次式を証明せよ．

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

(4) 関数 $\dfrac{e^{iz}}{z}$ の積分を図の矢印に示す道に沿って考えることにより, 定積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ の値を計算せよ.



（九州大 2004） (m20044708)

0.513 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を関数とし、$\alpha,\beta,x_0\in\mathbb{R}$ とする.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ ならば, 正数 M が存在し, すべての n に対して $|a_n|\leqq M$ となることを示しなさい.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ ならば, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta$ となることを示しなさい.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to x_0}f(x)\neq\alpha$ とする. このとき, 正数 $\varepsilon>0$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$ となる実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在し, $|f(x_n)-\alpha|\geq\varepsilon\ (n=1,2,\cdots)$ が成り立つことを示しなさい.

(4) 次の二つの条件が同値であることを示しなさい.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to x_0}f(x)=\alpha$.

(b) 実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$ を満たせば, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\alpha$.

(九州大 2006) (m20064709)

0.514 e を自然対数の底とするとき, 関数 $f(x)=e^{-x^2}$ と, その n 次 (n 階) 導関数 $f^{(n)}(x)$ を考える. 以下の問に答えよ.

(1) $f^{(n)}(x)=p_n(x)e^{-x^2}$ と表すとき, 多項式 $p_1(x)$, および $p_2(x)$ を求めよ.

(2) 任意の非負整数 k に対して, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^kf(x)=0$ となることを示せ.

(3) 次の広義積分 $\displaystyle I=\int_o^{+\infty}p_1(x)p_2(x)f(x)dx$ の値を求めよ.

(九州大 2006) (m20064713)

0.515 正の実数 $p>0$ に対して, 定積分 $\displaystyle f_n(p)=\int_0^1\frac{1}{1+nx^p}\,dx$, $n=1,2,\cdots$ を考える.

(1) 次の極限値を求めよ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,f_n(2)$

(2) $0<\varepsilon<1$ に対して $f_n(p)$ の積分区間を $[0,\ \varepsilon]$ と $[\varepsilon,\ 1]$ に分けることにより次の不等式を示せ.

$$0<f_n(p)<\varepsilon+\frac{1-\varepsilon}{1+n\varepsilon^p}$$

(3) (2) を用い $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(p)=0$ であることを示せ.

(九州大 2007) (m20074705)

0.516 あるセルフサービスのカフェテリアでは, 昼に 3 種類のランチメニューがある. 客は順番に並んで, メニュー 1, メニュー 2, メニュー 3 のどれか一つのメニューを選ぶとする. N 番目の客がメニュー j を選んだとき $N+1$ 番目の客がメニュー i を選ぶ確率は a_{ij} であるとする. ($i,j=1,2,3,$ a_{ij} は N に依存しない.) 一方, N 番目の客がメニュー j を選ぶ確率を $p_j(N)$ と置く.

(1) N 番目の客がメニュー j を選んだとき $N+2$ 番目の客がメニュー i を選ぶ確率を a_{ij} を使って表せ.

(2) $i\neq j$ である時 $a_{ij}=q$ (q は $i,\ j$ によらない正の数, $q>0$) $a_{ii}=p$ (p は i によらない正の数 , $p>0$) とする. このとき q と p が満たすべき関係式を述べよ.

(3) (2) の仮定をする．3 行 3 列の行列 A を ij 成分が a_{ij} となる 3 行 3 列の行列とする．A^2 を単位行列と F で表せ．ただし，F は次で定まる行列とする．

$$F = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) (2) の仮定のもとで行列 A のべき乗 A^N を求めよ．これを使い N 番目の客がメニュー 1 を選ぶ確率 $p_1(N)$ を $p_i(1)$ $(i = 1, 2, 3)$ と q で表す公式を求めよ．

(5) (2) の仮定のもとで $\lim_{N\to\infty} p_j(N)$ を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084704)

0.517 $G(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4t}\right)$ とおく．ただし，$\exp z = e^z$ である．

(1) $t > 0$ のとき

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0$$

であることを示せ．

(2) $t > 0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x,t)\,dx = 1$$

であることを示せ．ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ を用いてよい．

(3) f を $\boldsymbol{R} = (-\infty,\ \infty)$ 上の有界な連続関数とするとき，すべての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$\lim_{t\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t)f(y)\,dy = f(x)$$

であることを証明せよ．

(九州大 2008)　　(m20084712)

0.518 A を $n\times\ n$ 実行列とする．V を n 実ベクトル $\boldsymbol{v}$ で

$$\lim_{m\to\infty} A^m\boldsymbol{v} = 0 \quad (m \text{ は自然数})$$

となるものの全体とする．

(1) V は $\boldsymbol{R}^n$ の線形部分空間であることを示せ．

(2) $n = 3$ で

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -9/4 & 1/2 \\ -3/2 & 1 & 1/2 \\ 3/2 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

とするとき，A の固有値は $-1,\ 2 \pm \sqrt{2}$ であることを示せ．

(3) A が (2) で与えられるとき V を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084713)

0.519 a を正の定数とするとき, 以下の各問いに答えよ. ただし, e は自然対数の底とする.

(1) 任意の自然数 n に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-ax} = 0$$

(2) 次の広義積分の値を求めよ．

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax}\, dx$$

(3) 次の広義積分の値を求めよ．

$$\int_0^\infty x e^{-ax^2}\, dx$$

(九州大 2010)　　(m20104709)

0.520 a は $a \geqq 0$ なる定数とする．$0 < x \leqq 1$ において関数 $f(x)$ を次の式で定義する．　$f(x) = x^a \log x$

(1) $\lim_{x \to 0} f(x)$ を求めよ．

(2) $0 < x \leqq 1$ における $f(x)$ の増減表を与えよ．さらに，$f(x)$ の最大値および最小値が存在する場合には，それらを求めよ．

(3) 次の積分（広義積分）を求めよ．　$\int_0^1 f(x)\, dx$

(九州大 2015)　　(m20154708)

0.521 xy 座標平面上の点 P の移動について考える．

時刻 $t = n$（n は正の整数）における点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{p}_n = (x_n,\ y_n)$ を次の漸化式で定める．

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

点 P の始点は，正の実数 s を用いて，$\boldsymbol{p}_0 = (x_0, y_0) = (1, s)$ で与えられるとする．

以下の問いに答えよ．

(1) (x_n, y_n) を n と s を用いて表せ．

(2) $\lim_{n \to \infty} \dfrac{y_n}{x_n}$ を求めよ．

(九州大 2019)　　(m20194701)

0.522 $x > 0,\ y > 0$ において，2 変数関数 $f(x, y)$ および $g(x, y)$ を次の式で定義する．

$$f(x, y) = \log\left(x^2 + y^2\right), \quad g(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)^{1/3}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ の x に関する 2 次偏導関数 $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y)$ を求めよ．

(2) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$\lim_{t \to +0} t \log t = 0$$

(3) 領域 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 < x^2 + y^2 < 1,\ 0 < y < x\right\}$ における次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D \frac{f(x, y)}{g(x, y)} dxdy$$

(九州大 2019)　　(m20194712)

0.523 確率 $p (0 < p < 1)$ で表，確率 $1 - p$ で裏がでるコインを n 回独立に投げる．以下の問いに答えよ．

(1) n 回のうち表が出た回数を表す確率変数を X とする．X の値が k $(k \in \{0, 1, \cdots, n\})$ となる確率 $P(X = k)$ を求めよ．

(2) X の期待値 $E[X]$ について，$E[X] = np$ が成り立つことを示せ．

(3) λ を正の定数として $p = \dfrac{\lambda}{n}$ とすると，以下が成り立つことを示せ．

$$\lim_{n \to \infty} P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

ただし，任意の実数 a について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$ を用いてよい．

(九州大 2020)　　(m20204708)

0.524 以下に答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を示し，これを使って $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a^2+x}-\sqrt{a^2-x}}{x}$ を求めよ．

(3) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ を微分せよ．

（九州芸術工科大 2000）　　(m20004801)

0.525 次の問に答えよ．ただし，log は自然対数を表す．自然対数の底は $e = 2.718\cdots$ である．

(1) 次の積分（広義積分）の値を求めよ．

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon>0,\ \varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

(2) 極限値に関する次の二つの等式が成り立つことを証明せよ．

$$\lim_{x>0,\ x\to 0} x\log x = 0 \quad , \qquad \lim_{x>0,\ x\to 0} x^x = 1$$

(3) 閉区間 $[0,1]$ 上の関数 f, g を次のように定義する．

$$0 < x \leqq 1 \text{ のとき } f(x) = x\log x,\quad g(x) = x^x,\quad f(0) = 0,\quad g(0) = 1$$

このとき，f, g の各々について，$[0,1]$ における最大値と最小値を求めよ．

(4) 次の積分（広義積分）は有限値に収束するか，それとも無限大に発散するか，いずれであるか判定せよ．その理由も示せ．

$$\int_0^1 \frac{x^x}{\sqrt{x}}dx$$

（九州芸術工科大 2000 ）　　(m20004802)

0.526 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ を求めよ．

(2) 以下に順に答えよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を示せ．

(b) $1 + \cos x = 2\left(\sin\dfrac{\pi - x}{2}\right)^2$ を示せ．

(c) 上の (a) と (b) を使って，$\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}$ を求めよ．

(3) $\dfrac{d}{dx}e^{x^x}$ を求めよ．

（九州芸術工科大 2001）　　(m20014801)

0.527 (1) $e = \displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ を使って以下を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

(2) (a) $a>0, x>0$ のとき，$e^{ax}\geqq 1+ax+\dfrac{a^2x^2}{2}$ であることを使って $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-ax}$ を求めよ．

(b) 上の結果を使って $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^5e^{-x}$ を求めよ．

(c) 同じく (a) の結果を使って $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$ を求めよ．

(九州芸術工科大 2003) (m20034801)

0.528 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ を求めよ． (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\cos x}{1-\cos x}$ を求めよ．

(九州芸術工科大 2005) (m20054805)

0.529 次の極限値を求めなさい．$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}$

(佐賀大 1999) (m19994901)

0.530 以下の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x-1}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

（佐賀大 2000） (m20004901)

0.531 以下の関数の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

（佐賀大 2001） (m20014901)

0.532 $x>0$ の範囲で定義された関数 $f(x)=x^x$ について，次の問いに答えよ．ただし，計算の際は $x^x=e^{x\log x}$ と変形せよ．また，$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=1$ は既知としてよい．

(1) 導関数 $f'(x)$ を計算し，$f(x)$ の最小値を求めよ．

(2) $y=f(x)$ のグラフの概形を図示せよ．

(佐賀大 2003) (m20034904)

0.533 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+3})$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-5\sin 2x}{x\cos x}$

(佐賀大 2003) (m20034906)

0.534 次の問に答えよ．

(1) $\sqrt{1+2\log x}$ を x について微分せよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\tan x-\frac{1}{\cos x}\right)$ を求めよ．

（佐賀大 2004） (m20044902)

0.535 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$$

（佐賀大 2004） (m20044904)

0.536 次の問に答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin x}{x^3-x}$ を求めよ．

(2) 逆三角関数 $\cos^{-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ $(x>0)$ の導関数を求めよ.

(佐賀大 2005)　　(m20054913)

0.537 次の問に答えよ.

(1) 三角関数の加法定理より

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

を導出せよ.

(2) 導関数の定義

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

を利用して $(\sin x)'=\cos x$ であることを示せ.

(佐賀大 2005)　　(m20054924)

0.538 以下の各問に答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $(a>0)$ を計算せよ.

(3) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=-30\sin 4x$ の一般解を求めよ.

(4) $y=2Cx-C^2$ が解となるような微分方程式を作れ. ただし, C は任意の定数とする.

(佐賀大 2005)　　(m20054933)

0.539 (1) 不定積分 $\displaystyle\int(\log x)^2dx$ を求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1(\log x)^2dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1(\log x)^2dx$ の値を求めよ.

(佐賀大 2006)　　(m20064901)

0.540 次の極限値を求めよ.　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin^{-1}x}{x^3}$

(佐賀大 2006)　　(m20064907)

0.541 (1) $f(x)$ を $x=0$ の近傍で x^2 の項までテーラー展開せよ.　$f(x)=e^{x^2}-1$

(2) $g(x)$ を $x=0$ の近傍で x^2 の項までテーラー展開せよ.　$g(x)=x^2$

(3) 次の極限値を求めよ.　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$

(佐賀大 2006)　　(m20064930)

0.542 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{5}}{x-3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x}{5x^2-4x+7}$

(佐賀大 2006)　　(m20064935)

0.543 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ を求めよ.

(佐賀大 2006)　　(m20064939)

0.544 次の関数の極限を求めよ．ただし，log は自然対数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

(佐賀大 2007)　(m20074909)

0.545 次の関数の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$

(佐賀大 2007)　(m20074915)

0.546 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{4x^2+3x-7}{2x^2-5x+3}$ を求めよ．

(2) $y=\log\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$ を微分せよ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int x^2e^{2x}\,dx$ を計算せよ．

(4) 二変数関数 $f(x,y)=x^2-5xy^2+3y^2$ に関して，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．また，点 $(3,2)$ における x 方向，y 方向の偏微分係数を求めよ．

(佐賀大 2007)　(m20074926)

0.547 (1) 導関数の定義 $f'(x)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ を利用して $\left(\sqrt{2x}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ であることを示せ．

(2) $x=3\sin t$ として $\displaystyle\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算せよ．

(佐賀大 2009)　(m20094910)

0.548 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}$ を求めよ．

(2) $y=\sqrt{1+2\log x}$ の導関数を求めよ．

(佐賀大 2009)　(m20094921)

0.549 (1) 次の関数を微分しなさい．

$y=\dfrac{2x+1}{x^2+1}$

(2) 次の関数を合成関数の微分法で微分しなさい．

(a) $y=\sqrt{x^2+4}$

(b) $y=e^{2x+1}$

(3) 不定形の極限値を求めなさい．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos x}{x^3}$　（$x\cong 0$ のとき $x=\sin x$ となる関係を利用して解答しなさい）

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x^2}$

(佐賀大 2009)　(m20094929)

0.550 次の極限値を求めよ．

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{1-x}$

(佐賀大 2010)　(m20104907)

0.551 次の関数の極限を求めよ. ただし, $a>0$ とし, log は自然対数とする.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{\sin x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\log\left(1+\frac{2}{x}\right)$

(佐賀大 2010)　(m20104908)

0.552 (1) 次の極限を求めよ．

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

(2) (1) の結果を利用して次の極限を求めよ．

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(\theta + h) - \cos(\theta)}{h}$$

(佐賀大 2010) (m20104913)

0.553 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x - 2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x\right)$

(佐賀大 2010) (m20104917)

0.554 次の関数の極限を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2x - \sin 2x}{x^3}$ (3) $\displaystyle\lim_{x \to a-0} \frac{|x - a|}{x^2 - a^2}$

(佐賀大 2013) (m20134910)

0.555 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{1 - x}{\log x}$ を求めよ．

(佐賀大 2013) (m20134916)

0.556 次の関数の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{x^2 - 3ax + 2a^2}{x^2 - a^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

(佐賀大 2016) (m20164901)

0.557 次の関数の極限を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$ (2) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1}$ (3) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$

(佐賀大 2016) (m20164925)

0.558 大気中に置かれた物体が冷却する速さは，その物体の温度と周囲の温度の差に比例する．次の設問に答えなさい．

(1) 周囲温度（一定）を θ_{at}，比例定数を k とおき，時刻 t における物体の温度 θ を表す微分方程式を答えなさい．

(2) θ の一般解を答えなさい．

(3) 初期条件 $t = 0$ のとき $\theta = \theta_0$ として, θ の特殊解を答えなさい．

(4) $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \theta$ を答えなさい．

(佐賀大 2016) (m20164934)

0.559 次の極限値を求めなさい..

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \left(\frac{2x^2 - 1}{x^2(x^2 - 1)} - \frac{x}{x^2 - 1}\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{3 \arcsin \frac{x}{5}}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x \left\{\log(3x + 1) - \log 3x\right\}$

(佐賀大 2018) (m20184901)

0.560 次の問いに答えよ．ただし，log は自然対数であり，e は自然対数の底である．

(1) 次の極限を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{2x^3-7x^2+2x+3}{2x^3-7x^2+7x-2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

(2) 次の微分を求めよ．

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (b) $\tan^2(x)$

(佐賀大 2021) (m20214915)

0.561 次の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x+\infty}\frac{x-\cos x}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^x$

(佐賀大 2021) (m20214920)

0.562 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}x+\tan^{-1}(2x)}{x}$ を求めよ．

ただし，$\sin^{-1}x$ および $\tan^{-1}x$ は，それぞれ $\sin x$ および $\tan x$ の逆関数である．

(佐賀大 2022) (m20224913)

0.563 下記の極限値を求めなさい．答えだけでなく途中経過も記載すること．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{2x^3-x^2-4x+3}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$

(佐賀大 2022) (m20224924)

0.564 次の関数が与えられている．

$$f(x)=1-\cos x$$
$$g(x)=x\sin x$$

(1) これらの関数をそれぞれ x の 4 乗までの多項式に展開せよ．

(2) これらの関数を次式に代入し, その極限を求めよ. また, その結果がロピタルの定理を用いた結果と一致することを示せ.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

(長崎大 2005) (m20055010)

0.565 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}}{x^3}$ を求めよ．

(長崎大 2008) (m20085008)

0.566 次式で定義される I_n について，以下の問いに答えよ．

$$I_n=\int_0^n e^{-st}\cos\omega t\,dt$$

ただし，s, ω, n は正の実数である．

(1) I_n を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n$ を求めなさい．

(長崎大 2009) (m20095003)

0.567 (1) $N\times\ M$ の行列 A と $P\times\ Q$ の行列 B があるとき，行列の積 AB が定義できる条件を述べよ．

(2) 連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ が $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 以外の解を持つための条件を述べよ．ただし，A は $N\times\ N$ の正方行列，$\boldsymbol{x}$ は N 次元の列ベクトル，$\mathbf{0}$ は N 次元の 0 ベクトルである．

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & z & 1 \\ x & 1 & z & 2 \\ 1 & 0 & b & c \\ 2 & 0 & b & c \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

(4) 行列 $A=\begin{pmatrix} 2a & 1-2a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．また，A^n が $n\to\infty$ のとき収束するための条件および $\displaystyle\lim_{n\to\infty}A^n$ を求めよ．ただし，$a\neq 1$ である．

(長崎大 2009) (m20095010)

0.568 (1) 次の関数を微分せよ．

(a) $\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$

(b) $e^{-x^2}+\tan x$

(2) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}}{x^4}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to +0}x^x$

(長崎大 2009) (m20095011)

0.569 下記の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$$

(長崎大 2010) (m20105002)

0.570 (1) $e^{a\sqrt{x}}$ の微分を求めよ. ただし, a は実定数である.

(2) $x^k\sin ax$ の微分を求めよ. ただし, k は整数, a は実定数である.

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(a^x+b^x\right)-\log 2}{x}$ を計算せよ. ただし, $a,\ b$ は正定数である.

(長崎大 2010) (m20105011)

0.571 関数 $y=\dfrac{x^2}{e^x}$ について，以下の問題に答えよ．

(1) y の 1 次導関数および 2 次導関数を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}y$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}y$ を求めよ．

(3) この関数の増減表を作成せよ．

(4) $y=\dfrac{x^2}{e^x}$ のグラフの概形を描け．

(長崎大 2011) (m20115004)

0.572 以下の問いに答えよ．

(1) $e^{2x}\sin(ax)$ の微分を求めよ．ただし a は定数である．

(2) $x^{\sin x}$ の微分を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin x-x}$ を計算せよ．

(長崎大 2011)　　(m20115008)

0.573　ベクトル $\boldsymbol{x}(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$ に，次の関係があるとする．

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n)$$

ただし，$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$，　$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ である．

(1)　$\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(2)　$\boldsymbol{x}(n)$ を求めなさい．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}(n)$ を求めなさい．

(熊本大 2015)　　(m20155201)

0.574　関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y) = (0,0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

について，次の各問に答えよ．

(1)　$(x,y) \neq (0,0)$　のとき，$f_x(x,y)$ を求めよ．

(2)　$f_x(0,0) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$ を示せ．

(3)　$f_{xy}(0,0) = \displaystyle\lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k} = 0$ を求めよ．

(宮崎大 2017)　　(m20175304)

0.575　関数 $f(x,\ y) = \sqrt{x^2+y^2}$ について，次の各問に答えよ．

(1)　$(x,\ y) \neq (0,\ 0)$ のとき，$f_x(x,\ y)$ と $f_{xx}(x,\ y)$ をそれぞれ求めよ．

(2)　次のそれぞれの極限について，存在する場合はその値を求め，存在しない場合はその理由を述べよ．

(a)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f_{xx}(x,\ y)\right)$　　(b)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f_x(x,\ y)\right)$

(宮崎大 2018)　　(m20185304)

0.576　次の極限値を求めよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x}$

（鹿児島大 2001）　　(m20015402)

0.577　次の級数について, 収束・発散を調べよ. 収束する場合, その値を求めよ.

(1)　$\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$

(鹿児島大 2005)　　(m20055412)

0.578　$f'(0) = a$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(3x)-f(\sin x)}{x}$ を求めよ．　(鹿児島大 2007)　　(m20075413)

0.579　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$ を求めなさい．ただし，n は正の整数とする．

(鹿児島大 2011)　　(m20115415)

0.580 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ を求めなさい．

(鹿児島大 2012)　(m20125435)

0.581 次の問いに答えよ．

(1) x^n の n 階導関数を求めなさい．また，e^{ax} の n 階導関数を求めなさい．ただし，n は，自然数であり，$a>0$ とする．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^n e^{-ax}$ を求めなさい．ただし，n は，自然数であり，$a>0$ とする．

(鹿児島大 2013)　(m20135411)

0.582 関数 $y=|x|$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $x=0$ における微分係数を示す式について以下の a,b,c から適切なものを選択せよ．

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}|x|$　b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}x$　c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$

(2) x が 0 においては微分不可能であることを説明せよ．

(鹿児島大 2017)　(m20175421)

0.583 次の各問に答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x\log x$ を求めよ．

(2) $f(x)=\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ を微分せよ．

(3) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$ を求めよ．

(岡山県立大 2005)　(m20055601)

0.584 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)$ を求めよ．　(2) $f(x)=e^{\sin^{-1}x}$ を微分せよ．

(3) $\displaystyle\int\log(1+x^2)dx$ を求めよ．

(岡山県立大 2006)　(m20065601)

0.585 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$ を求めよ．　(2) $f(x)=\log|\sin^{-1}x|$ を微分せよ．

(岡山県立大 2007)　(m20075601)

0.586 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^2}$ を求めよ．

(岡山県立大 2007)　(m20075604)

0.587 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x^2)}{\sin x}$ を求めよ．　(2) $f(x)=\log\left|\frac{x}{x+1}\right|$ を微分せよ．　(3) $\displaystyle\int x\log x\,dx$ を求めよ．

(岡山県立大 2008)　(m20085601)

0.588 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-4x^2}{8x^4+5x^3}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{4x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x\right)$

(香川大 2016)　(m20165701)

0.589 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8}$

(香川大 2018)　　(m20185701)

0.590　(1) $\log(1+2x)$ をマクローリン展開せよ．ただし，剰余項および収束域は求めなくてよい．

(2) 次の極限を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\log(1+2x)}$

(香川大 2019)　　(m20195701)

0.591　次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4x^2+3x-6}-2x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2x^2-2x-1}{2x^3}$

(香川大 2020)　　(m20205701)

0.592　次の極限を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}$$

(香川大 2022)　　(m20225701)

0.593　逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ と逆余弦関数 $\cos^{-1}x$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 次の値を求めよ.

(i) $\sin^{-1}(-1)$,　(ii) $\cos^{-1}0$,　(iii) $\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(iv) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

(2) $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ.

(3) $y=\sin^{-1}x$ の微分と不定積分を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$ の値を求めよ.

(島根大 2005)　　(m20055806)

0.594　逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin^{-1}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ を求めよ.

(2) $z=\sin^{-1}(xy)$, $x=\sin(u+v)$, $y=\sin(u-v)$ とするとき, 合成関数の偏微分 $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を変数 u と v を用いて表せ.

(島根大 2005)　　(m20055807)

0.595　関数 $f(x)=(ax+b)e^{cx}\quad(c\neq 0)$ を考える. 以下の問に答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$, 2 階導関数 $f''(x)$, さらに n 階導関数 $f^{(n)}(x)\ \ (n=1,2,\cdots)$ を求めよ.

(3) $0<c<1$ のとき ,　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nc^n=0$　を証明せよ.

$\left(\text{ヒント : } c=\dfrac{1}{1+\alpha}\quad(\alpha>0)\quad\text{とおいて}\ (1+\alpha)^n\ \text{の 2 項展開を考えよ.}\right)$

(4) $0<c<1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x)+f'(x)+f''(x)+\cdots+f^{(n)}(x)\right)$$

を求めよ.

(島根大 2005)　　(m20055811)

0.596 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ を収束数列とする．いま，$n > N$ なるすべての自然数に対して $\alpha_n \leq \beta_n$ が成り立つような十分大きな自然数 N が存在する時，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \alpha_n \leq \lim_{n\to\infty} \beta_n$ であることを証明せよ。

(島根大 2006) (m20065807)

0.597 (1) 関数 $\dfrac{\log x}{x}$ の不定積分を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_n^{2n} \frac{\log x}{x} dx$ は正の無限大に発散することを示せ.

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$ が収束するならば，その極限値を求めよ．もし発散するならば，その理由を述べよ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ をみたす数列 a_n に対して $b_n = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ は正しいだろうか ？ 正しければその理由を述べよ．もし正しくなければ反例を一つ与えよ.

(島根大 2007) (m20075805)

0.598 (1) 次の極限値は存在するかどうか調べよ.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2 + y^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

(2) $f(x, y) = \tan^{-1} \dfrac{y}{x}$ とするとき，次の問いに答えよ.

(a) f の 2 次偏導関数をすべて求めよ.

(b) $x = \sin(u + v)$, $y = \cos(u - v)$ とするとき，偏導関数 f_u と f_v を求めよ.

(島根大 2009) (m20095803)

0.599 (1) $f(x) = \sin^{-1} x \quad (-1 < x < 1)$ とするとき, $f'(x),\ f''(x),\ f^{(3)}(x)$ を求めよ.

(2) 設問 (1) の結果を用いて $f(x)$ を x^3 の項まで $x = 0$ のまわりにおいてべき級数展開せよ.

(3) 設問 (2) の結果を用いて $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin^{-1} x}{x}$ および $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin^{-1} x - x}{x^3}$ の値を求めよ.

(島根大 2010) (m20105808)

0.600 次の行列 A について以下の設問に答えよ. ただし, $0 < a < 1/2$ とする.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$

(1) A^2 を計算せよ.

(2) $|A|$ を計算せよ.

(3) A^{-1} を求めよ.

(4) A の固有値と, それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルを大きさが 1 になるように規格化すること.

(5) A^{-1}, A^2 および A^n の固有値を求めよ. ただし, n は自然数とする.

(6) A^n を求めよ.

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ.

(島根大 2010) (m20105812)

0.601 以下の各設問に答えよ．ただし，x は実数とする.

(1) 関数 $f(x),\ g(x)$ を $f(x) = x - \tan^{-1} x$, $g(x) = x - x \sin x$ と定義する．以下の問いに答えよ.

(a) 導関数 $f'(x)$，第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(b) 導関数 $g'(x)$，第 2 次導関数 $g''(x)$ を求めよ．

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ の値を求めよ．

(2) 関数 $y(x)$ を $y(x)=(x^2+1)e^{-x}$ と定義する．以下の問いに答えよ．

(a) 導関数 $y'(x)$，第 2 次導関数 $y''(x)$ を求めよ．

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x)=0$ であることを示せ．

(c) $y'(x)$，および $y''(x)$ の符号を用いて，関数 $y(x)$ の増減表を作成せよ．また，関数 $y(x)$ のグラフの概形をかけ．

(島根大 2012)　　(m20125801)

0.602　自然数 $n=1,2,\cdots$ に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=n^2x^{n+1}\log x \quad (x>0)$$

と定める．次の問いに答えよ．

(1) $f_n(x)$ の最小値を求めよ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ を計算せよ．

(3) $0<x\leq 1$ を満たす各 x に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．さらに $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とするとき，次の等式が成り立つかどうかを調べよ．

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$$

(島根大 2016)　　(m20165803)

0.603　(1) $R>0$ とする．$\Omega(R)=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq R^2,\ 0\leq y\leq x\right\}$ とするとき，重積分 $\displaystyle\iint_{\Omega(R)}\frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}dxdy$ を計算せよ．

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^R\left(\int_0^x\frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}dy\right)dx$ を求めよ．

(3) α を定数とし，$(x,y)\neq(0,0)$ に対して $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\alpha/2}$ と定める．$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(島根大 2016)　　(m20165804)

0.604　$f(x)=-\log\cos x$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{f(x)}$ を求めよ．

(3) $-\pi/2<x<\pi/2$ のとき，$f(x)\geq x^2/2$ であることを示せ．

(4) 曲線 $y=f(x)$ の，$0\leq x\leq\pi/3$ の部分の長さを求めよ．

(島根大 2018)　　(m20185806)

0.605　$f(x,y)=\dfrac{4}{(2+x^2+y)^2}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の偏導関数を求めよ．

(2) 点 $P(1,-1,1)$ における，曲面 $z=f(x,y)$ の接平面の方程式を求めよ．

(3) $a > 0$ に対して，$D(a) = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \leq x \leq a\ ,\ 0 \leq y \leq x^2\right\}$ とおく．

2 重積分 $I(a) = \displaystyle\iint_{d(a)} f(x,y)\,dxdy$ を計算せよ．さらに $\displaystyle\lim_{a\to\infty} I(a)$ を求めよ．

(島根大 2020) (m20205807)

0.606 次式を示せ．ただし，e^x のテイラー展開を利用せよ。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^\alpha} = \infty \qquad (\alpha : \text{定数})$$

(首都大 2003) (m20035904)

0.607 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x - b^x}{x}$

(首都大 2005) (m20055907)

0.608 次の文章中の $\boxed{①}$〜$\boxed{⑤}$ に入れるのに最も適当な分数を答えなさい．

(1) $\dfrac{1}{\cos x}$ のマクローリン展開を x^4 の項まで求めると，$1 + \boxed{①}x^2 + \boxed{②}x^4$ が得られる．

(2) $\tan x$ のマクローリン展開を x^5 の項まで求めると，$x + \boxed{③}x^3 + \boxed{④}x^5$ が得られる．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x - \tan x}{x^3}$ の極限値は，$\boxed{⑤}$ である．

(首都大 2014) (m20145906)

0.609 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ を求めなさい．

(首都大 2015) (m20155907)

0.610 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\cos x - 1}$ を求めなさい．

(首都大 2016) (m20165907)

0.611 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ を求めなさい．

(首都大 2018) (m20185907)

0.612 次の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x\log(\sin x)$

(首都大 2019) (m20195906)

0.613 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\log(1+x)}{x^2}\right\}$ を求めなさい．

(東京都立大 2020) (m20205906)

0.614 (1) 次の関数について $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ． $x = \dfrac{a}{\cos\theta}$， $y = b\tan\theta$ （ a, b は定数, ただし, $a \neq 0$ ）

(2) 次の関数について $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ． $y = \dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1}x\right)$

(3) 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{x\to +0} x^x$

(東京都立大 2020) (m20205910)

0.615 実数 $x \geq 0$ に対する実関数 $f_k(x)$ について，以下の微分方程式の初期値問題が与えられている．

$$\frac{df_k(x)}{dx} + 2f_k(x) = f_{k-1}(x), \quad f_k(0) = 1$$

ただし，k は自然数である．また，すべての実数 $x \geq 0$ に対して $f_0(x) = 0$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f_1(x)$ を求めよ.

(2) $f_2(x)$ を求めよ.

(3) $f_k(x)$ を k を用いて表し，以下を求めよ.

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)$$

(東京都立大 2020)　　(m20205912)

0.616　関数 $f(x)$ の導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

にしたがって，$f(x) = \sin x$ の導関数が $f'(x) = \cos x$ であることを示せ.

(滋賀県立大 2008)　　(m20086001)

0.617　関数 $f(x)$ のマクローリン展開は次で与えられる.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

(1) 関数 $f(x) = (1+x)\sin x - x\cos x$ のマクローリン展開を書き下せ. ただし, x^4 の項までを明確に求め, それよりも高次の項は $\cdots$ と略してよい.

(2) (1) の結果を使って, 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)\sin x - x\cos x}{x^2}$$

(滋賀県立大 2010)　　(m20106002)

0.618　$f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}x$ について，次を求めよ．ただし，$\mathrm{Sin}^{-1}x$ の値域は $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ とする.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-x}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

(滋賀県立大 2016)　　(m20166001)

0.619　極限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\tan^{-1}(3x) - \frac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．ただし，$\tan^{-1}$ の値域は $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ とする.

(滋賀県立大 2021)　　(m20216001)

0.620　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^{\tan x}$ を求めよ.

(滋賀県立大 2022)　　(m20226001)

0.621　次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^3}{\sqrt{x}}$

(はこだて未来大 2007)　　(m20076303)

0.622　n を自然数とし，関数 $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin(nx)$ を考える．以下の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{df_n}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)$ が成立する x の値を，区間 $[0,\ \pi]$ から求めよ.

(はこだて未来大 2008)　　(m20086303)

0.623　a を正定数，n を自然数とし，定積分 $I_n(a) = \displaystyle\int_0^a xe^{-nx}\,dx$ を考える．以下の問いに答えよ.

(1) $I_n(a)$ を求めよ.　　(2) $\lim_{n\to\infty} I_n(a)$ を求めよ.

(はこだて未来大 2008)　(m20086304)

0.624 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ が成り立つことを利用して, 以下の問いに答えよ.

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin 5x}{x}$ を求めよ.

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(2\sin 2x)}{x}$ を求めよ.

(はこだて未来大 2010)　(m20106303)

0.625 自然数 n に対して

$$I(n)=\int_1^e \frac{1}{x^n}\log x\,dx$$

とおくとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 部分積分法を用いて, $f(2)$ を求めよ.

(2) $\lim_{n\to\infty} I(n)$ を求めよ.

(はこだて未来大 2010)　(m20106304)

0.626 $x_n = r^{n-1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で与えられる数列 $\{x_n\}$ について, 以下の問いに答えよ. ただし, $0<|r|<1$ とする.

(1) 第 N 項までの和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} x_n$ を求めよ.

(2) (1) で求めた和について, $N\to\infty$ としたときの極限 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ を求めよ.

(3) 和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} nx_n$ を求めよ.

(4) (3) で求めた和について, $N\to\infty$ としたときの極限 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx_n$ を求めよ.

ただし, $\lim_{N\to\infty} Nr^N=0$ $(|r|<1)$ であることを用いてよい.

(はこだて未来大 2011)　(m20116305)

0.627 関数 $f_n(x)=nx(1-x)^n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) n を固定するとき, $f_n(x)$ の閉区間 $[0,1]$ での最大値を M_n, それを与える x の値を x_n とする. このとき, M_n と x_n をそれぞれ n で表せ.

(2) (1) の M_n と x_n に対して, $\lim_{n\to\infty} M_n$ と $\lim_{n\to\infty} x_n$ をそれぞれ求めよ.

(はこだて未来大 2012)　(m20126304)

0.628 n を自然数とし, 定積分 $I_n=\displaystyle\int_0^1 xe^{-nx}dx$ を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) I_n を求めよ.

(2) $\lim_{n\to\infty} n^2 I_n$ を求めよ.

(はこだて未来大 2013)　(m20136306)

0.629 (1) $\lim_{x\to 0} x\left(\dfrac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}\right)$ を求めよ.

(2) $0 < x < \pi$ のおいて，$\dfrac{d}{dx}\log\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)$ を求めよ．

(3) $\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{3}{5} + \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{4}{5}$ を求めよ．
ただし．$\sin x$ の逆関数 $\mathrm{Sin}^{-1}x$ の値域は，$\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ とする．

(はこだて未来大 2015)　　(m20156302)

0.630 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x+5^x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}$ を求めよ．

(はこだて未来大 2018)　　(m20186303)

0.631 $-1 \leqq x \leqq 1$ において，$f(x) = x\,\mathrm{Cos}^{-1}x$ とする．ここで，$\mathrm{Cos}^{-1}x$ は逆余弦関数で，$\arccos x$ と書くこともある．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\frac{\pi}{2}x}{x^2}$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$ の値を求めよ．

(はこだて未来大 2021)　　(m20216302)

0.632 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)^2}{1-\sin\frac{x}{2}}$ を求めよ．

(2) x^2e^x の n 次導関数を n を用いて表わせ．ただし，n は自然数とする．

(はこだて未来大 2022)　　(m20226302)

0.633 関数 $f(x)$ の導関数は次のように定義される．

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

この定義に従って次の関数の導関数を求めなさい．導く過程も示しなさい．

(1) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

(東京海洋大 2013)　　(m20136403)

0.634 関数 $f(x)$ の導関数は次のように定義される．

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

この定義に従って次の関数の導関数を求めなさい．導く過程も示しなさい．

(1) $f(x) = x^2 - 4x + 8$　　(2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

(東京海洋大 2017)　　(m20176403)

0.635 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x - e^{-x}}$ を求めなさい．

(和歌山大 2007)　　(m20076504)

0.636 次の極限値を求めなさい．ここで i は虚数単位とする．

(1) $\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{z^3+1}{z+i}$　　(2) $\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{z^2+1}{z-i}$

(和歌山大 2007)　　(m20076509)

0.637 (1) $\lim_{x \to \infty} x^3 e^{-x}$ を求めなさい．

(2) $\dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{3^2} + \dfrac{z^2}{5^2} = 3$ で表される曲面の，点 $(2, 3, 5)$ における法線の方程式を求めなさい．

(3) 次の 2 重積分を極座標変換を利用して求めなさい．

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy \,, \quad D = \{(x, y) \mid x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0\}$$

(和歌山大 2008) (m20086502)

0.638 次の各問に答えなさい．なお，i は虚数単位である．

(1) $\dfrac{5 - i}{1 + 5i}$ を計算しなさい．

(2) 複素数 $\sqrt{3} - 3i$ を極形式で表しなさい．

(3) $\lim_{z \to -i} \dfrac{z + i}{z^4 - 1}$ を求めなさい．

(4) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{z + i}{z^4 - 1}\, dz$ を求めなさい．

ただし，曲線 C は中心が $-1 - i$，半径が $\sqrt{2}$ の円周（反時計回り）とする．

(和歌山大 2009) (m20096505)

0.639 $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sin 5x \sin 7x}$ の値を求めなさい．

(和歌山大 2010) (m20106506)

0.640 $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1 - 2x}{2(1 - \cos x)}$ の値を求めなさい．

(和歌山大 2012) (m20126504)

0.641 次の値を求めなさい．

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$$

(和歌山大 2013) (m20136502)

0.642 指数関数と三角関数のマクローリン級数を利用して，次の極限を求めなさい．

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x - \sin x}$$

(和歌山大 2014) (m20146504)

0.643 次の値を求めなさい． $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \exp(\cos x)}{\cos x}$

(和歌山大 2015) (m20156503)

0.644 次の極限値を求めなさい．

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + 1}{x - 1} \right)^x$$

(和歌山大 2016) (m20166501)

0.645 微分方程式 $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0$ に対して，次の (1)〜(3) に答えなさい．

(1) 一般解を求めなさい．

(2) 初期条件 $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ を満たす解を求めなさい．

(3) (2) で求めた解 $y(t)$ に対して，極限値 $\lim_{t\to+\infty} y(t)$ を求めなさい．

(和歌山大 2018) (m20186504)

0.646 (1) 級数の和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!(k+2)}{(k+3)!}$ を求めよ．また，$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

(2) $f(x) = e^{2x^2}$ のマクローリン級数を x^3 の項まで求めよ．また，$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x^2}$ を求めよ．

(3) 初期値問題 (a) と微分方程式 (b) の解が一致するよう α を定め，(b) の一般解を求めよ．

(a) $\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}$, $y(0) = e^{-1}$ (b) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + \alpha y = 8e^{-x}$

(京都府立大 2008) (m20086701)