[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　log

0.1　ベクトル場 $\mathbf{a} = (x\cos z, y\log x, -z^2)$ に対して

(1) 発散 div **a** を求めよ.

(2) 回転 rot **a** を求めよ.

(北海道大 1997)　(m19970103)

0.2　以下の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$　(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x+6}{x^2-4}dx$　(3) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\log x}{x^2}dx$

(北海道大 2017)　(m20170102)

0.3　次の関数の偏導関数 z_x, z_y を求めよ.

(1) $z = x^3y + 2xy^2$　(2) $z = \log(x^2 + xy)$

(北見工業大 2005)　(m20050202)

0.4　(1) $\displaystyle\int x\log x dx$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ を，$x = \sin\theta$ という置換積分によって求めよ.

(北見工業大 2005)　(m20050208)

0.5　次の関数を微分せよ.

(1) $y = x^3 \sin x$　(2) $y = \log(x^2+1)$

(北見工業大 2006)　(m20060201)

0.6　次の関数 y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(1) $y = (2x+3)^2$　(2) $y = x\log(x^2+1)$

(北見工業大 2007)　(m20070201)

0.7　a を正の定数とし，$f(x) = e^x - ax$ とするとき，次の問に答えよ.

(1) $a = 3$ のとき $y = f(x)$ の増減表を書き，y の極小値を与える x の値とその時の y の値および y の極大値を与える x の値とその時の y の値を，それぞれあればすべて求めよ.（ ヒント ： $e = 2.718\cdots$，$\log e = 1$ ）

(2) 方程式 $f(x) = 0$ の解の個数を a の値について場合分けして答えよ.

(北見工業大 2007)　(m20070204)

0.8　次の関数を微分せよ.

(1) $y = \sin(x^3+2)$　(2) $y = x\log x$

(北見工業大 2008)　(m20080201)

0.9　(1) 不定積分 $\displaystyle\int \tan x\, dx$ を計算せよ.　ヒント ： $t = \cos x$ とおくとよい.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 \log x\, dx$ の値を求めよ.

(北見工業大 2009)　(m20090202)

0.10　次の関数を微分せよ.

(1)　$y = (2x-3)^5$　　(2)　$y = \sin x^2$

(3)　$y = (x^2+1)\log(x^2+1)$　　(4)　$y = e^{-2x}\cos x$

(北見工業大 2010)　　(m20100201)

0.11　次の関数 y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(1) $y = (3x+4)^3$　　(2) $y = x^2 \log x$

(北見工業大 2011)　　(m20110201)

0.12　関数 $y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(北見工業大 2012)　　(m20120201)

0.13　次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x \, dx$

(2) $\displaystyle\int x \log x \, dx$

(北見工業大 2013)　　(m20130204)

0.14　曲線 $y = \log x$ の接線で，原点を通るものの方程式を求めよ.

(北見工業大 2015)　　(m20150202)

0.15　積分 $I = \displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x} dx$ を計算せよ.

(北見工業大 2017)　　(m20170203)

0.16　次の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \, dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{(\log x)^2}{x} \, dx$

(北見工業大 2018)　　(m20180201)

0.17　次の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} (\log x)^2 dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+4} dx$

(北見工業大 2019)　　(m20190201)

0.18　関数 $f(x,y) = y \log \dfrac{x}{y}$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.（$x, y > 0$ とする.）

(北見工業大 2019)　　(m20190202)

0.19　$-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ での $x = \tan y$ の逆関数を $y = \arctan x$ とする.

(1)　$\arctan x$ の導関数を書け.（証明は省略しても良い.）

(2)　関数 $f(x) = \arctan x - \log \sqrt{1+x^2}$ の $0 \leqq x \leqq \sqrt{3}$ での最大値と最小値を求めよ.

(北見工業大 2019)　　(m20190203)

0.20　積分 $I = \displaystyle\int_1^e x \log x \, dx$ を計算せよ.

(北見工業大 2019)　　(m20190208)

0.21　不等式 $\log_{1/2} x > -3$ を満足する x の範囲を求めよ.

(岩手大 1994)　　(m19940301)

0.22 次の関数を微分せよ．

(1) $y = x\cos^2 x$　　(2) $y = (x^2-1)\,e^{2x}$　　(3) $y = \log(2-x)$

(岩手大 1994)　　(m19940304)

0.23 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos x dx$　　(2) $\displaystyle\int (x+1)\log x\ dx$　　(3) $\displaystyle\int e^{-3x}dx$

(岩手大 1994)　　(m19940306)

0.24 $f(x) = \sqrt{x}\log x \quad (x \geqq 0)$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ の最小値を求めよ．

(4) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け．

(岩手大 1997)　　(m19970301)

0.25 関数 $z = \log\left(x^2+2y^2\right)$ について，次の問いに答えなさい．ただし，対数は自然対数である．

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めなさい．

(2) 変数 x, y が変数 r, θ の関数

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta$$

で与えられるとき，$\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めなさい．

(3) (1) および (2) の結果を用いて，次の式が成り立つことを示しなさい．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(岩手大 2009)　　(m20090304)

0.26 関数 $f(x) = 4x^4\log_e x$ について，次の問いに答えなさい．ただし，$x>0$ とする．

(1) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点を求めなさい．

(2) 関数 $f(x)$ の $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ をそれぞれ求めなさい．

(3) 関数 $f(x)$ の増減表を凹凸を含めて作成しなさい．また，極値と変曲点の座標も示しなさい．

(4) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めなさい．

(岩手大 2021)　　(m20210303)

0.27 $y = \log(1-x)\,,\ -1 < x \leqq 1$ の原点 $x=0$ における 3 次の Taylor 展開

$$\log(1-x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + R_4x^4$$

の係数 $a_0, \cdots, a_3$ を求めよ．R_4 は求めなくてもよい．

(秋田大 2001)　　(m20010405)

0.28 次の $\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ．注意：log は自然対数で，π は円周率である．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = \boxed{\text{(p)}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log|\cos x|}{x^2} = \frac{1}{\boxed{\text{(q)}}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log|1-x^2|}{\log|\cos x|}=\boxed{\text{(r)}}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2^{\sin x}-2}{\log|\sin x|}=\log\boxed{\text{(s)}}$

(秋田大 2002)　　(m20020402)

0.29　次の $\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ．注意：log は自然対数で，π は円周率である．

(1) $\displaystyle\int_2^3\frac{4(3+3x-x^2)}{(x-1)^2(x+1)}dx=\log\frac{3}{\boxed{\text{(t)}}}+\boxed{\text{(u)}}$　　(2) $\displaystyle\int_0^1\log x\,dx=\boxed{\text{(v)}}$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^4dx=\boxed{\text{(w)}}$　　(4) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-4x}\sin x\,dx=\frac{1}{\boxed{\text{(x)}}}$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{\boxed{\text{(y)}}}$

(秋田大 2002)　　(m20020403)

0.30　関数 $f(x)=\log(1+x)$ を $x=0$ で Taylor(テイラー) 展開したとき，
$f(x)=$“ 3 次式 ”+剰余項 $(-1<x\leqq 1)$ となる 3 次式を求めよ．剰余項は求めなくてよい．

(秋田大 2005)　　(m20050404)

0.31　次の極限を求め，$\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}=\boxed{}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=\boxed{}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log x^2}{\log|\sin x|}=\boxed{}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^{\cos x}-2}{\log|\cos x|}=\boxed{}$　　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log|1-x^2|}{\log|\cos x|}=\boxed{}$

(秋田大 2007)　　(m20070403)

0.32　次の定積分を求め，$\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\cos 2x\,dx=\frac{1}{\boxed{}}\left(\frac{\pi}{2}+\boxed{}\right)$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin 2x\cos x\,dx=\frac{\boxed{}}{12}$

(3) $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{\boxed{}}{3}$　　(4) $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx=\frac{\boxed{}}{15}$

(5) $\displaystyle\int_1^e\sqrt{x}\log x\,dx=\frac{2}{\boxed{}}\left(e^{\frac{3}{2}}+\boxed{}\right)$　　(6) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx=1+\frac{\boxed{}}{e}$　　(7) $\displaystyle\int_1^\infty x^2e^{-x}dx=\frac{\boxed{}}{e}$

(秋田大 2007)　　(m20070404)

0.33　次の $\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ．

曲線 $y=\dfrac{2}{3}(1+x\sqrt{x}\,)$ の区間 $0\leqq x\leqq 3$ における，この曲線の弧の長さは $\dfrac{\boxed{}}{3}$ である．
注意：log は自然対数で，e は自然対数の底とする．π は円周率とする．

(秋田大 2007)　　(m20070405)

0.34　次の積分を計算せよ．ただし，(2) では，$\displaystyle\int\log x\,dx=x\log x-x+C$ となることを使ってよい．

(1) $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}dx$　　(2) $\displaystyle\int\log\frac{x-1}{(x+1)^2}dx$

(秋田大 2008)　　(m20080404)

0.35 次の定積分を求め, カッコ内に当てはまる整数を記入せよ.

以下の arcsin は逆正弦関数, π は円周率, log は底が e である自然対数を意味する.

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \boxed{\text{(コ)}}\,\pi$　　(2) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\log 2}{\boxed{\text{(サ)}}}\,\pi$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2 \mathrm{arcsin}\,x\,dx = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{\boxed{\text{(シ)}}}$

(秋田大 2010)　(m20100403)

0.36 関数 $f(x,y)=\log(x^2+2y^2)$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 点 $(2,1)$ における勾配ベクトルを求めなさい.

(2) 点 $(2,1)$ におけるグラフの接平面の，点 $(3,2)$ における z 座標と，接点の z 座標との差を求めなさい.

(秋田大 2012)　(m20120404)

0.37 以下の四角内に当てはまる式を計算し，解答欄の指定した箇所に記入せよ．ここで，arcsin$x$ は $\sin x$ の逆関数を表し，$\sin^{-1} x$ と表されることもある.

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \boxed{\text{（エ）}}$

(2) $0<x<1$ とするとき，$\displaystyle\frac{d}{dx}x^{\mathrm{arcsin}x} = \boxed{\text{（オ）}}$

(秋田大 2013)　(m20130402)

0.38 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^1 \log\left(x^2+1\right)dx$$

(秋田大 2013)　(m20130403)

0.39 次の積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$　（但し，$a>0$ とする．）

(2) $\displaystyle\int_{1}^{e}\log_e x\,dx$　（e は自然数の底である．）

(秋田大 2017)　(m20170403)

0.40 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x-1}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^2\log x$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left\{1-\frac{1+e^{-x}}{2(x^2+x+1)}\right\}$

(秋田大 2020)　(m20200403)

0.41 関数　$\displaystyle F(x)=x\log x-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}$　の導関数を $F'(x)$ と表し，
関数 $f(x)$ を　$f(x)=F'(x)$　と定義する.

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ.　(2) 関数 $f(x)$ の増加・減少を調べよ.

(2) 等式　$f(c)=0\quad(1<c<3)$　を満たす c が少なくとも 1 つ存在することを示せ.

(東北大 2001)　(m20010501)

0.42 関数 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ を　$\displaystyle f_1(x)=\frac{1}{10}e^{2x},\quad f_2(x)=x^2\log(x+1)$　と定義する.

(1) 定積分 $S_1 = \int_0^a f_1(x)dx,\ \ S_2 = \int_0^b f_2(x)dx$ を求めよ．

(2) $a+b=1$ という関係があるとき，$S = S_1 + S_2$ を b の関数として表せ．

(3) 変数 a と b は

$$a+b=1,\ \ 0<a<1,\ \ 0<b<1$$

を満たすと仮定する．$S = S_1 + S_2$ が極値をとる条件を a と b により表せ．

(東北大 2001)　　(m20010502)

0.43 関数 $f(x)$ は，微分方程式

$$x^2\frac{d^2f(x)}{dx^2} - 2x\frac{df(x)}{dx} + 2f(x) = 0 \qquad (x \geqq\ 1) \tag{a}$$

および，初期条件

$$x=1 \text{ のとき } \ f=1,\ \frac{df}{dx}=0 \tag{b}$$

を満たす．このとき，以下の問 (1)〜(5) に答えよ．

(1) 方程式 (a) は，変数変換 $t = \log x$ によって，以下の微分方程式に帰着することを示せ．

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0 \tag{c}$$

また，初期条件 (b) は，

$$t=0 \text{ のとき } \ y=1,\ \frac{dy}{dt}=0 \tag{d}$$

となることを示せ．

(2) 方程式 (c) の一般解は

$$y(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} \tag{e}$$

で与えられる．方程式 (c) および初期条件 (d) を満たす実数 $\lambda_1, \lambda_2, C_1, C_2$ を求めよ．

(3) 初期条件 (b) のもとで方程式 (a) の解を求めよ．

(4) $z(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$ と定義する．いま，適切な $2\times\ 2$ 行列 A を定義すれば，方程式 (c) は

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dy(t)}{dt} \\ \dfrac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

と表される．行列 A を求めよ．

(5) 行列 A の固有値を求め，問 (2) で求めた λ_1, λ_2 と比較せよ．

(東北大 2003)　　(m20030502)

0.44 実数 y の関数:

$$f(y) = \frac{1}{1+e^{-\beta y}}\ \ , \qquad (-\infty < y < \infty)$$

を定義する. ここで, β は非負の実数値のみをとる定数である. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) β の値が以下の 3 つの場合:

a) $\beta \longrightarrow +\infty$,　　b) $\beta = 0$,　　c) その他の場合.

の各々について，$x = f(y)$ のグラフを描け.

(2) 関数 $x = f(y)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求めよ.

(3) 以下の不定積分を求めよ.

$$\int \log(1-x)dx$$

ただし, log は自然対数を表す.

(4) 以下の定積分を求めよ.

$$g(x) \equiv \int_0^x f^{-1}(z)dz$$

ただし，x の定義域は $0 \leq x \leq 1$ であり，$\lim_{x\to 0} x\log x = 0$ の意味で $0\log 0 = 0$ とする.

(5) 関数 $g(x)-\alpha x$ を最小化する x を求めよ. ただし x の定義域は $0 \leq x \leq 1$, α は正の実数値のみをとる定数とする.

（東北大 2004） (m20040501)

0.45 (1) 関数の積の微分に関するライプニッツの公式を述べよ（証明はしなくてよい）.

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} =$$

(2) $x>0$ で定義された関数 $h(x)=x^4\log x$ を考える. $\displaystyle\lim_{x\to+0} h(x)$ を求めよ.

(3) $0<m<4$ であるような自然数 m に対し, (2) で定義した $h(x)$ の m 階導関数 $h^{(m)}(x)$ を求めよ. また, $\displaystyle\lim_{x\to+0} h^{(m)}(x)$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to+0} h^{(4)}(x)$ は存在するか.

(東北大 2006) (m20060507)

0.46 無限級数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$$

が収束するかどうか判定せよ.

(東北大 2011) (m20110506)

0.47 x を正の実数とし, 関数 $f(x)$ を次のように自然対数を用いて定義する.

$$f(x)=\frac{\log x}{x^2}$$

このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $f(x)$ の導関数 $\dfrac{df}{dx}$ および第 2 次導関数 $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の増減表を書き, 関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け.

(3) $y=f(x)$, $y=0$, $x=b$ のそれぞれによって囲まれた図形の面積 S を求めよ. ただし, b は $b>1$ を満たす実数とする.

(東北大 2013) (m20130501)

0.48 a, b, c を正の実数とするとき, 以下の問いに答えよ. ただし, $a\neq 1$, $c\neq 1$ とする.

(1) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ が成り立つことを示せ.

(2) 方程式 $\log_a x = 2x$ の実数解が 1 つだけになるための a の条件を求めよ.

(東北大 2016) (m20160501)

0.49 n を非負整数 α を負の実数とし, 広義積分

$$I(n,\ \alpha)=\int_0^1 x^{\alpha}(\log x)^n\,dx$$

を考える. 以下の問に答えよ.

(1) $\alpha>-1$ ならばこの広義積分は収束し, $\alpha\leq -1$ ならば発散することを示せ.

(2) $\alpha>-1$ のとき, この広義積分の値を求めよ.

(東北大 2022) (m20220511)

0.50 $y=x^2\log x$ の増減・凹凸を調べてグラフを描け.

(お茶の水女子大 1997) (m19970601)

0.51 次の計算をせよ．ただし，$\log x$ は自然対数であり，$\ln x$ と同じである．

(1) $\dfrac{d}{dx}\sin^2 x$ (2) $\dfrac{d}{dx}\cos(x^3)$ (3) $\dfrac{d}{dx}\log(\sqrt{x^2+1}+x)$ (4) $\dfrac{d}{dx}2^x$ (5) $\dfrac{d}{dx}x^x$

（お茶の水女子大 1999） (m19990601)

0.52 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to +0}x^3\log x$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+e^x)^{1/x}$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x+\sin x}{x}$

（お茶の水女子大 1999） (m19990602)

0.53 次の計算をせよ．ただし，$\log x$ は自然対数であり，$\ln x$ と同じである．

(1) $\displaystyle\int\sin 3x dx$ (2) $\displaystyle\int x\cos x dx$ (3) $\displaystyle\int\log x dx$ (4) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-1}dx$ (5) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}dx$

（お茶の水女子大 1999） (m19990605)

0.54 次の計算をせよ．ただし，$\log$ は自然対数を，e はその底を表す．

(1) $\dfrac{d}{dx}e^{x^2}$ (2) $\dfrac{d}{dx}\log(\log x)$

（お茶の水女子大 2000） (m20000601)

0.55 平均値の定理は次のように書くことができる．

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\theta h),\quad 0<\theta<1$$

次の各関数に対して θ を x と h の関数として表せ．

(1) $f(x)=x^2$ (2) $f(x)=x^3$ (3) $f(x)=e^x$ (4) $f(x)=\log x\ (x>0)$

$x\neq 0$ で固定したときに各関数について，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\theta$ を求めよ．

一般に $f(x)$ が C^2 級の関数で $f''(x)\neq 0$ のとき $\displaystyle\lim_{h\to 0}\theta$ の値は定まるかどうか調べよ．

（お茶の水女子大 2000） (m20000603)

0.56 (1) 次の展開式を簡単に示せ．

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\cdots$$

(2) 次の無限級数の値を求めよ．

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$$

（お茶の水女子大 2000） (m20000607)

0.57 関数 $f(x)$ は実数の開区間 $I=(a,b)$ で連続，関数 $g_1(t),g_2(t)$ は実数の開区間 $J=(c,d)$ で微分可能であり，その値が開区間 I に属するとし，次のような関数を考える．

$$h(t)=\int_{g_1(t)}^{g_2(t)}f(x)dx$$

このような形で定義された関数について以下の問に答えよ．

(1) 次の関数の導関数を具体的に計算せよ．

$$\int_{t^2}^{t^3}x\log x dx \qquad (\log \text{ は自然対数関数を表す．})$$

(2) 次の関数の導関数を計算できるまで計算せよ．

$$\int_{t^2}^{t^3} e^x \log x dx \qquad \text{（log は自然対数関数，} e \text{ は自然対数の底を表す.）}$$

(3) 次の関数の導関数を f, g_1, g_2 およびその導関数を用いて表せ．

$$h(t) = \int_{g_1(t)}^{g_2(t)} f(x)dx$$

（お茶の水女子大 2001） (m20010602)

0.58 次の計算をせよ． $\dfrac{d}{dx}e^{\sqrt{\log x}}$ $(x > 1)$

(お茶の水女子大 2003) (m20030603)

0.59 次の関数のマクローリン展開（原点のまわりのテーラー展開）とその収束半径を書け．ただし，log は自然対数であり，ln とも書く．

(1) $\log(1-x)$ (2) $\log\dfrac{1+x}{1-x}$

(お茶の水女子大 2003) (m20030605)

0.60 次の定積分を計算しなさい．

(1) $\displaystyle\int_1^2 x\log x dx$ (ただし，$\log x$ は自然対数とする.) (2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

(お茶の水女子大 2007) (m20070602)

0.61 関数 $f(x) = \log(1-x)$ を考える．

(1) 関数 $f(x)$ の $x = 0$ のおけるマクローリン展開を考え，3 次関数による近似 $S_3(x)$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{-k}}{k}$ を求めなさい．

(お茶の水女子大 2009) (m20090603)

0.62 次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^2 x^2 \log x\, dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x\, dx$ ただし，arctan は正接 tan の逆関数の主値を表すものとする．

(お茶の水女子大 2013) (m20130601)

0.63 以下の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{e^x}\right)$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{\log x}{x-1}\right)$

(お茶の水女子大 2016) (m20160614)

0.64 以下の各問いに答えよ．ただし，log はすべて自然対数とする．

(1) $f(x) = \log(1-x)$ $(|x| < 1)$ のマクローリン展開を求めよ．ただし，剰余項の評価はしなくてもよい．

(2) $0 < x < 1$ において $\dfrac{x}{x-1} < \log(1-x)$ であることを示せ．

(3) $\log 2019$ の値の 10 進小数第 2 位を四捨五入することにより小数第 1 位まで求めよ．ただし，必要ならば $\log 2 = 0.693147$ の近似値を用いてよい．

(お茶の水女子大 2020) (m20200610)

0.65 N を自然数とする．このとき，次の各問に答えよ;

(1) $y \geq 0$ に対して，次が成り立つことを示せ.

$$e^y \geq \frac{y^N}{N!}$$

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-2x}(1+x)^N dx$ の収束・発散を調べよ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ を $\displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} t\left(1+\log\frac{1}{t}\right)^N dt \quad (n=1,2,\cdots)$ で定める．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210604)

0.66 ２つの媒介変数 s, θ によって表される曲面 S

$$S \ : \ x(s,\theta) = (s\cos\theta,\ s\sin\theta,\ \alpha\theta)\ ,\ (0 \leq s \leq 1)\ ,\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

について，以下の設問に答えよ．α は 0 以上の定数とする.

(1) $x(s,\theta)$ の媒介変数 s を 1 と固定する事により，曲線 C

$$C \ : \ y(\theta) = x(1,\theta) = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ \alpha\theta)\ ,\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

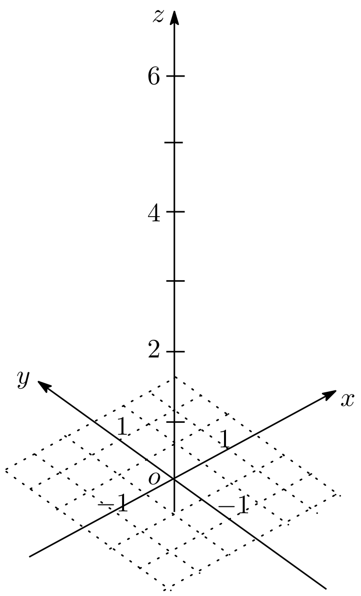
を得る．$\alpha = 1$ の場合について，下図の座標軸を参考にして曲線の概略を解答用紙に手描きせよ.

(2) C 上の点を $P(=y(\theta))$ とする．P における接線の方程式を導出せよ.

(3) (2) で求めた接線と xy 平面の交点を Q とする．θ が 0 から 2π まで連続的に変化するとき，Q が描く曲線の長さ ℓ を求めよ.

(4) $\alpha = 0$ のとき，曲面 S は xy 平面上の単位円盤に一致する．$\alpha = 1$ としたとき，曲面 S の面積は，単位円盤の面積の何倍になるかを求めよ．ただし，次の不定積分の公式を使ってよい.

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2} + \log_e\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right\} + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$



(東京大 2009)　　(m20090703)

0.67 (1) 微分方程式

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

について，左辺がある関数 $u(x,y)$ の全微分 $du(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy$ に等しいならば，微分方程式 (1) の一般解は $u(x,y) = C$ (C は任意定数) で与えられる．このような方程式 (1) は完全微分形であるという．以下の設問に答えよ．

(a) 微分方程式

$$-ydx + xdy = 0$$

は，完全微分形ではないが，両辺に $\dfrac{1}{xy^{\alpha}}$ をかけることによって完全微分形の方程式を得ることができる (αは定数)．α の値を求め，完全微分形の微分方程式を導出せよ．

(b) (a) で得られた完全微分形の微分方程式を，$x = 1$ のとき $y = e$ の条件の下で解け．ただし，e は自然対数の底である．

(2) (a) 微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad (2)$$

について，$x = e^t$ と変数変換することにより定係数の微分方程式を導出せよ（その過程も示せ）．ただし，e は自然対数の底である．

(b) (a) で導出した微分方程式を解くことにより微分方程式 (2) の一般解を求めよ．

(c) 微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = x\log_e x$$

について，$x = 1$ において $y = 1$，$\dfrac{dy}{dx} = 0$ となる解を求めよ．

(東京大 2009) (m20090705)

0.68 (1) N 個の同じボールを n_1 個, n_2 個, n_3 個 $(n_1 + n_2 + n_3 = N)$ の組に分ける組み合わせの総数が以下の式で表されることを示せ.

$$\frac{N!}{n_1!n_2!n_3!}$$

(2) N 個の同じボールを n_1 個, n_2 個, $\cdots$, n_m 個 $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} n_i = N\right)$ の組に分ける組み合わせの総数 W はいくつになるか. 導出過程とともに示せ.

(3) (2) で得られた W を用いて，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log_e W$ を計算することを考える.

(a) $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log_e N = 0$ となることを示せ.

(b) $N \to \infty$ $\left(N = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} n_i\right)$ としたとき, $\dfrac{n_i}{N}$ はそれぞれある値 p_i に収束する. すなわち $p_i = \displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{n_i}{N}$ $(i = 1, 2, \cdots m)$. このとき, $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log_e W$ を p_i のみで表せ.

ただし以下に示す $k!$ (k は正の整数) に関する不等式を用いてよい.

$$\sqrt{2\pi}k^{k+1/2}e^{-k+1/(12k+1)} < k! < \sqrt{2\pi}k^{k+1/2}e^{-k+1/12k}$$

(東京大 2010) (m20100705)

0.69 実数をとる変数 $x_{ij}(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3)$ を用いて，行列 X を

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

で定義する．X の行列式を $|X|$ で表し，X の逆行列を X^{-1} で表す．また，正の実数 s の自然対数を $\log s$ で表す．以下の問いに答えよ．

(1) $|X|$ の x_{11} に関する偏導関数 $\dfrac{\partial|X|}{\partial x_{11}}$ を，$x_{ij}(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$ のうちの必要なものを用いて表せ．

(2) X が $|X|>0$ を満たすとき，$y_{ij}(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$ を

$$y_{ij}=\frac{\partial(\log|X^{-1}|)}{\partial x_{ij}}$$

で定義する．このとき，y_{11} を，$|X|$ と $x_{ij}(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$ のうちの必要なものを用いて表せ．

(3) (2) で定義した $y_{ij}(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$ を用いて，行列 Y を

$$Y=\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix}$$

で定義する．このとき，X^{-1} を用いて Y を表せ．

(東京大 2014)　　(m20140705)

0.70 確率変数 X の累積分布関数 $F(x)$ が以下の微分方程式で表されるとする．

$$\frac{dF}{dx}=\frac{F(1-F)}{s}$$

今，$F(m)=1/2$ である．ただし，m, s は実数である．このとき，設問 (1)〜(5) について答えよ．

(1) 累積分布関数 F，および F の密度関数 f をそれぞれ求めよ．

(2) f が偶関数となる m を求めよ．ただし，その導出過程，または理由を示すこと．

(3) 期待値 $E=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f dx$ を求めよ．ただし，その導出過程を示すこと．

次に，入力信号の値 x に応じた確率で信号を出力したりしなかったりするシステムを考える．今，n 種類の入力信号の値 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ に対して，信号が出力された頻度を調べたところ $r_i(i=1,2,\cdots,n)$ を得た．以下の問いに答えよ．

(4) 関数 $\varphi\left(F(x)\right)=\log\left(\dfrac{F(x)}{1-F(x)}\right)$ を，x の一次式で表せ．

(5) $y_i=\varphi(r_i)$ としたとき，

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i-\varphi\left(F(x_i)\right)\right\}^2$$

を最小にする m と s を求め，それぞれ下記の統計量を用いて表せ．

平均：　$\overline{x}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}x_j$,　　$\overline{y}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}y_j$

分散：　$\mathrm{var}(x)=\overline{x^2}-\overline{x}^2$,　　$\mathrm{var}(y)=\overline{y^2}-\overline{y}^2$

共分散：　$\mathrm{cov}(x,y)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}x_jy_j-\overline{x}\cdot\overline{y}$

(東京大 2017)　　(m20170702)

0.71 i を虚数単位とし，z は複素数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 次の複素数を $x+iy$（x, y は実数）の形ですべて求めよ．ただし，x, y の表式に三角関数を含んではならない．

(a) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^3$　　(b) $i^{1/2}$　　(c) $\dfrac{(1-i)^6}{(1+i)^8}$

(2) 関数 $z=\tan\omega=\dfrac{\sin\omega}{\cos\omega}$ の逆関数を $\omega=\tan^{-1}z$ で表す．

(a) 次の式が成り立つことを示せ．　$\tan^{-1}z=\dfrac{i}{2}\log\left(\dfrac{i+z}{i-z}\right)$
ただし，log は複素対数関数である．

(b) $\tan^{-1}z$ の z に関する微分を求めよ．

(3) 複素平面において，曲線 C を $z=e^{i\theta}$ $(0\le\theta\le\pi)$ とする．

(a) 次の積分 $I(k)$ を求めよ．ここで，k は $0<k<1$ の定数とする．　$I(k)=\displaystyle\int_C\frac{1}{k^2z^2+1}dz$

(b) $k=2-\sqrt{3}$ のとき，I の値を求めよ．

(4) 実積分 J の値を留数定理により求めることを考える．　$J=\displaystyle\int_0^\infty\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx$

(a) J の積分範囲を $[-\infty,\infty]$ と変形して，被積分関数に e^{ix} を用いて J を表せ．

(b) 関数 $f(z)=1/(z^2+1)^2$ とする．複素平面において，図 1 の半径 Γ（円弧 ADB）の半径 R が十分に大きい時，次のことが成り立つことを示せ．　$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz=0$

(c) 図 1 の C に関する周回積分を考えることにより，J の値を求めよ．
このとき，複素平面の上半平面において，

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)e^{iz}dz=0$$

であることを用いてよい．

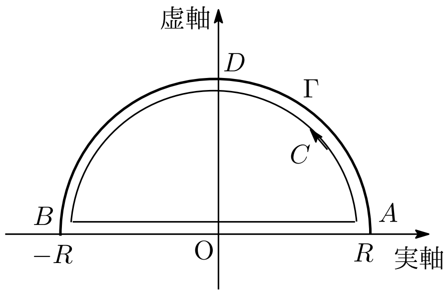


図 1

(東京大 2020)　　(m20200703)

0.72 i を虚数単位とし，w と z は複素数とする．また，e を自然対数の底とする．以下の問いに答えよ．

(1) 次の式を満たす複素数 A を考える．

$$A^6=i$$

(a) A を全て求めて $x+iy$ $(x, y$ は実数$)$ の形で求めよ．x, y の表式は三角関数を用いて書き下せ．

(b) A を全て求めて $x+iy$ $(x, y$ は実数$)$ の形で求めよ．ただし，x, y の表式は三角関数や指数関数を含んではならない．

(c) A を全ての点を複素平面上に図示せよ．

(2) a と t を実数として，以下の積分値を求めたい．

$$F(a)=\int_0^{2\pi}\left[\frac{d}{dt}\log_e(1+ae^{it})\right]dt$$

(a) $z=e^{it}$ と変数変換を行う事により，複素積分に変形せよ．また，被積分関数に対して全ての極と対応する次数，および留数を求めよ．

(b) a で場合分けして，$F(a)$ を求めよ．ただし，極が積分路上にある場合は考えなくて良い．

(c) 複素平面上で $1+ae^{it}$ を t の関数として考え，$F(a)$ が a に対して変化する事を文章で説明せよ．

(3) 以下の関数で定義される w に関して，$z=x+iy$ が上半面 $y>0$ を満たす範囲を動くとき，w が動く範囲を複素平面上に図示せよ．

$$w=\frac{i-z}{i+z}$$

(東京大 2022)　　(m20220703)

0.73 (1) 関数 $x\cos x$, $\log(1+3x)$ をそれぞれ 3 次の項まで Maclaurin 展開せよ．

(2) 次の極限を求めよ．
$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{\log(1+3x)}-\frac{1}{3x\cos x}\right\}$$

(東京工業大 2001)　　(m20010801)

0.74 (1) 次の積分を求めよ．
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{e^x+2e^{-x}+3}dx$$

(2) $\varphi(a)=\displaystyle\int_0^{\pi}\log(1-2a\cos x+a^2)dx$ なる積分において，

(a) $2\varphi(a)=\varphi(a^2)$ が成り立つことを示せ．

(b) $\varphi(a)$ を求めよ．ただし，$|a|\neq 1$ とする．

(東京工業大 2002)　　(m20020801)

0.75 次の 2 つの積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{M\to\infty}\int_1^M\frac{\log(a+x)}{x^2}dx$　（$a>0$ は定数）．

(2) $\displaystyle\int_1^{\infty}\int_1^{\infty}\frac{1}{xy(x+y)}dxdy$

(東京工業大 2004)　　(m20040802)

0.76 (x,y) 平面の領域 $\{x>0,\ y>0\}$ で定義された関数　$f(x,y)=x^{\log y}$　について次の問いに答えよ．

(1) f の二階までの偏導関数をすべて求めよ．　(2) f は狭義の極値を持たないことを示せ．

(東京工業大 2007)　　(m20070801)

0.77 関数
$$f(x,y)=x^2+y^2-2xy+\log(x^2+y^2+2xy+1)$$
の極値を求めよ．

(東京工業大 2011)　　(m20110803)

0.78 定積分 $\displaystyle\int_1^e x\log x\,dx$ の値を求めなさい．

(東京農工大 2006)　　(m20060903)

0.79 xy 平面において曲線 $y=\log x$ と x 軸と直線 $x=2$ とで囲まれる領域を D とするとき，次の 2 重積分の値を求めなさい．　$\displaystyle\iint_D\frac{y}{x}dxdy$

(東京農工大 2007)　　(m20070903)

0.80 以下の広義積分の値を求めなさい．ただし log は自然対数を表す．

$$\iint_D(x-y)\log(x+y+1)dxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq\ x-y\leqq\ 1,\ 0\leqq\ x+y\leqq\ 1\right\}$$

(東京農工大 2013)　　(m20130903)

0.81 $z = x + iy$（z は複素数，x, y は実数，i は虚数単位）に対して，指数関数 e^z と対数関数 $\log_e z$ を

$$e^z := e^x(\cos y + i \sin y),$$

$$\log_e z := \mathrm{Log}_e|z| + i \arg z,$$

と定義する．ただし，e は自然対数の底，Log_e は，実数に対して，既に定義されている対数関数，$\arg z$ は z の偏角を表すものとする．

(1) この指数関数を用いて，三角関数 $\sin z, \cos z$ を定義せよ．また，これらの指数関数と対数関数を用いて，一般の巾乗関数 α^β（α, β は，２つの複素数）を定義せよ．

(2) $\cos z = -2$ を満たす複素数 z を，すべて求めよ．

(3) $i^{(-i)}, (-i)^{\frac{1}{3}}$ の 2 つの値を計算せよ．（答えは，複素数 $a + ib$ の形になるまで計算すること）

(電気通信大 2001)　　(m20011010)

0.82 (1) 関数 $f(x) = x \cos x$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めよ.

(2) 関数 $g(x) = \log(1 + x)$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めよ.

(3) 次の極限値を求めよ.　$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \log(1 + x)}{x \sin x}$,　$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x \log(1 + x)}{e^{x^2} - 1}$

(電気通信大 2007)　　(m20071003)

0.83 次の重積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x + 2y) \sin^2(x - 2y) dxdy$　$D = \left\{(x, y) \ : \ 0 \leq x + 2y \leq \pi \, , \ 0 \leq x - 2y \leq \frac{\pi}{4}\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \log \sqrt{x^2 + y^2} \, dxdy$　$D = \left\{(x, y) \ : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \, , \ 0 \leq y \leq x\right\}$

(電気通信大 2013)　　(m20131004)

0.84 次の積分を求めよ.

(1) 不定積分　$\displaystyle\int x(\log x)^3 dx$

(2) 定積分　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + 1}$

(横浜国立大 2000)　　(m20001101)

0.85 以下の 3 問から 2 問選択して解答せよ．3 問解答してはならない.

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.　$y' = \dfrac{4x - 2y}{2x - y - 1}$

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ.　$y'' - y' + y = 0$

(3) 微分方程式　$xy' - y - x \log x = 0$　において，初期条件 $y(1) = 0$ を満たす特殊解を求めよ.

(横浜国立大 2016)　　(m20161103)

0.86 $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ のとき，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ となることを証明しなさい．ただし，$(x, y) \neq (0, 0)$ とする.

(千葉大 2003)　　(m20031202)

0.87 次の極限値を求めなさい.　$\displaystyle\lim_{x \to 1} \left(\frac{\log_{10} x}{x - 1}\right)$

(千葉大 2007)　　(m20071202)

0.88 次の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{e^x - e^4}{x - 4}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\log(1+x^2)}}$

(千葉大 2009)　　(m20091201)

0.89 次の関数の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log(1-x)}{x}$

(千葉大 2014)　　(m20141201)

0.90 次の関数の極限に関する問に答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 7x - 6}{3x^2 - 2x - 8}$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log(x + e) - 1}{x}$ を求めなさい．ここで，e は自然対数の底である．

(千葉大 2015)　　(m20151201)

0.91 (1) $x = 0$ 近傍で次の近次式が成り立つように，定数 A_i $(i = 0.1, 2, 3, 4)$ を求めなさい．

$\cos(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4$

(2) 次の関数をテイラー展開しなさい．

$\log(x + 1)$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{5x} - 1}{x}$ の極限値を求めなさい．

(4) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{4x}{\sqrt{1 + x^2}}$ の極限値を求めなさい．

(千葉大 2016)　　(m20161201)

0.92 次の問に答えなさい．ただし，$\log x$ の底は，自然対数の底 (e) とする．

(1) (a) 関数 $\log(1 + x)$ と $x \cos x$ を，それぞれ 3 次の項までマクローリン展開しなさい．

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 0+0} \left(\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x \cos x} \right)$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{4^n + 3^n}$ を求めなさい．

(3) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{\log x + \sqrt{\log x}} - \sqrt{\log x - \sqrt{\log x}} \right)$ を求めなさい．

(4) $\displaystyle\lim_{x \to 0+0} (1 - \tanh x)^{\frac{1}{\sin x}}$ を求めなさい．

(千葉大 2017)　　(m20171201)

0.93 $\sin z = \dfrac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$ であることを利用して，その逆関数である $\arcsin z$ が

$$\arcsin z = -i \log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

と表されることを示せ．

(筑波大 2000)　　(m20001311)

0.94 $f(x) = \log(a^2 + x^2)$ のマクローリン展開の一般項を求め，収束半径を計算せよ．ただし，$a > 0$ とする．

(筑波大 2001)　　(m20011304)

0.95 x が限りなく正の無限大に近づくとき，次の式の値を小さい順に並べよ．

$$\frac{x}{\log x},\ \sqrt{x},\ \frac{1}{\sin(1/x)}$$

(筑波大 2003)　　(m20031301)

0.96 1 年を 365 日とし（うるう年のことは考えない），人が生まれる確率はどの日も同じとする．このとき以下の問に答えよ．

(1) 任意の 2 人が出会ったとき，この 2 人の誕生日が異なる確率を分数で求めよ．

(2) これに 1 人が加わって 3 人になったとき，3 人の誕生日がいずれも異なる確率を求めよ．答は数式のままとし，分数や小数の値を求める必要はない．

(3) N 人が出会ったとき，それらの誕生日がすべて異なる確率 $P(N)$ を表す式を求めよ．

(4) 整数 x が 1 より十分大きければ，次の近似を用いることができる（Stirling の公式）．

$\log_e x! \fallingdotseq x\log_e x - x$　　(e は自然対数の底)

この式を利用して $\log_e P(N)$ に対する近似式を求めよ．ただし，N は 365 より十分小さいものとする．

(筑波大 2004)　　(m20041325)

0.97 次の極限を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^2+4x+3}{x^2-1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\log(x+1)+\log(\sqrt{3x+2}-\sqrt{3x})\right\}$

(筑波大 2006)　　(m20061322)

0.98 $x>0$ のとき次の不等式を証明せよ．ただし log は自然対数とする．　$\log(1+x)>x(1-x)$

(筑波大 2007)　　(m20071321)

0.99 $1024 \fallingdotseq 1000$，つまり $2^{10} \fallingdotseq 10^3$，という近似式を使えば，$\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3$，と近似できる．さらにこれと $81 \fallingdotseq 80$，つまり $3^4 \fallingdotseq 2^3\times 10$ という近似式を使えば，$4\log_{10}3 \fallingdotseq 1+3\log_{10}2$，したがって $\log_{10}3 \fallingdotseq 0.48$（小数点第 3 位で四捨五入）と近似できる．

$\log_{10}7$ について同様の近似式を示し，それを使って $\log_{10}7$ の近似値を示せ．

(筑波大 2007)　　(m20071331)

0.100 自然対数の底 e は　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$　と定義される．対数関数 $f(x)=\log x$ の x に関する微分が $1/x$ となることを微分の定義　$\displaystyle\frac{df(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log(x+\Delta x)-\log x}{\Delta x}$　に基づき示しなさい．

(筑波大 2008)　　(m20081303)

0.101 指数関数 e^x の性質に関する以下の問いに答えなさい．

(1) 自然数 n を用いて定義された以下の極限値を考える．

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

(1a) 2 項展開の公式を用いて下の関係式を示しなさい．

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

(1b) さらに $\dfrac{1}{n!} < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ を用いて $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が有界であることを示しなさい.

(2) 有界なる単調数列は収束するので (1) で与えられた極限は極限値をとり，これを e と書くことにする．この e が自然数の底である．　このとき以下を示しなさい.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

(3) 上記の (2) を使って

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

が成立することをまず示し，その上で微分の定義に基づいて $\{e^x\}' = e^x$ を示しなさい.

(4) $f(x) = e^x$ を n 次のマクローリン展開（$x = 0$ のまわりでのテイラー展開）し，その剰余項を求めなさい.

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!} = 0$ を示し，これを用いて $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ を示しなさい.

(筑波大 2009)　　(m20091302)

0.102 実変数 x の関数 $f_n(x) = x^n\log x$ （n は自然数）について，以下の問いに答えよ,

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f_n(x)$ （$f_n(x)$ の $x = 0$ における右側極限値）を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ を求めよ.

(3) $f_n(x)$ の第 $n+1$ 階導関数を求めよ.

(筑波大 2009)　　(m20091306)

0.103 連続な導関数をもつ関数 $f(x)$ は, $x \geq 1$ において次の 3 条件を満たすとする.

(a) $f(x) > 0$

(b) $f(x+1) = xf(x)$

(c) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ は単調増加する. ただし, $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする.

このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 積分 $\displaystyle\int_1^x \log t\,dt$ を求めよ.

(2) $\log t = \displaystyle\int_t^{t+1}\frac{f'(u)}{f(u)}\,du$　$(t \geq 1)$ が成り立つことを示せ.

(3) 不等式

$$\log\frac{f(x+1)}{f(2)} \geq x\log x - x + 1 \quad (x \geq 1)$$

が成り立つことを示せ.

(筑波大 2010)　　(m20101303)

0.104 次の二重積分を求めなさい.

$$\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\log_e(x^2+y^2)\,dxdy\ , \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 5,\ x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0\}$$

(筑波大 2011)　　(m20111309)

0.105 $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ （n は自然数）について以下の問いに答えよ.

(1) $\log(n+1) < S_n \leq 1 + \log n$ を示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\log n}=1$ を示せ.

(筑波大 2012)　　(m20121319)

0.106 領域 D を

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,0<x+y+z<1,\ x,y,z>0\right\}$$

と定める．このとき広義重積分

$$I=\iiint_D\frac{\log(x+y+z)}{\sqrt{xyz}}\,dxdydz$$

を以下の手順で求めよ.

(1) 変数変換

$$\begin{aligned}u&=x+y+z\\uv&=y+z\\uvw&=z\end{aligned}$$

により，D が領域 $E=\left\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3\,|\,0<u,v,w<1\right\}$ に写されることを示せ.

(2) 上の変数変換のヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ を求めよ.

(3) I の値を求めよ.

(筑波大 2012)　　(m20121327)

0.107 2 変数関数 $f(x,y)$ を $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$ 　(ただし，$(x,y)\neq(0,0)$) と定義する．ここで，$\log$ は自然対数である．以下の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の全微分を求めよ.

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ について，点 $(a,b,f(a,b))$ における法線および接平面の方程式を求めよ.

(3) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ を $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0<x^2+y^2\leq 1\right\}$ として求めたい．$f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において定義されていないので,

$D_\varepsilon=\left\{(x,y)\,\middle|\,\varepsilon^2<x^2+y^2\leq 1\,,\ \varepsilon\in\boldsymbol{R}\right\}$ として，$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{D_\varepsilon}f(x,y)dxdy$ を計算せよ.

(筑波大 2013)　　(m20131308)

0.108 n は 1 以上の整数とする．2 変数関数

$$f(x,y)=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i-x)^2}{y}+n\log y\qquad(-\infty<x<\infty,\ y>0)$$

について，次の問いに答えよ.

(1) 等式

$$\sum_{i=1}^{n}(i-x)^2=n(\mu-x)^2+n\delta$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\mu=\dfrac{n+1}{2}$, $\delta=\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i-\mu)^2}{n}$ である.

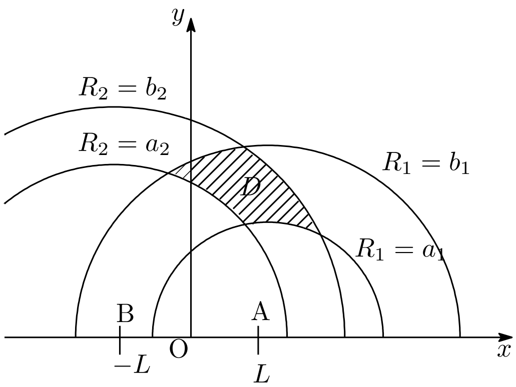
(2) $f(x,y)$ の最小値を求めよ.

(筑波大 2016)　　(m20161303)

0.109 xy 平面の $y>0$ なる領域（上半面）の点 $P(x,y)$ に対して，点 $A(L,0)$ および点 $B(-L,0)$ からの距離の二乗

$$R_1=(x-L)^2+y^2\ ,\qquad R_2=(x+L)^2+y^2$$

を考える．ここで $L>0$ とする．また，$f(x,y)=\dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)$ とする．



(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) c をゼロでない定数とし，xy 平面の上半面において $f(x,y)=c$ で表される曲線を考える．この曲線上の任意の点 (x_0,y_0) における法線の方程式を求めよ．そして，その法線と x 軸との交点が c と L だけで決まることを示せ．

(3) a_1,a_2,b_1,b_2 を正の定数とし，$R_1=a_1$ と $R_1=b_1$ で指定される円がそれぞれ $R_2=a_2$ と $R_2=b_2$ で指定される円と交わる場合を考える（図を参照）．ここで $a_1<b_1$, $a_2<b_2$ とし，xy 平面の上半面において $a_1\leq R_1\leq b_1$, $a_2\leq R_2\leq b_2$ で指定される領域を D とするとき，D を x 軸の周りに回転して出来る回転体の体積は

$$V=2\pi\int_D y\,dxdy$$

で与えられる．x,y に関する積分を R_1, R_2 に関する積分に変換することにより V を求めよ．

(4) xy 平面を複素平面と考え，点 $P(x,y)$ を複素数 $z=x+iy$ に対応させ，
複素関数 $g(z)=\log\left(\dfrac{z-L}{z+L}\right)$ を考える．$z-L=r_1e^{i\theta_1}$, $z+L=r_2e^{i\theta_2}$ とおくことにより，$g(z)$ の実部は $f(x,y)$ に一致することを示せ．ただし，$0<r_1$, $0<r_2$, $0<\theta_1<\pi$, および $0<\theta_2<\pi$ とする．さらに $g(z)$ の虚部は三角形 PAB のどの内角に対応するか答えよ．

(筑波大 2016)　　(m20161315)

0.110 関数 $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$ について，以下の設問に答えよ．

(1) 原点を除いた領域において，ラプラス方程式を満足することを示せ．

(2) 広い意味の積分 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq 1} f(x,y)dxdy$ は存在するか．存在するときはその値を求めよ．

(3) 複素数 $z=x+iy$ の関数 $f(x,y)+ig(x,y)$ が，領域 $\mathrm{Re}\,z>0$ $(x>0)$ において正則となるように，関数 $g(x,y)$ を定めよ．

(筑波大 2016)　　(m20161318)

0.111 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}x}\exp\left\{-\dfrac{(\log_e x-\mu)^2}{2}\right\}\qquad(0<x<\infty\ ;\ -\infty<\mu<\infty)$ とおく．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^m f(x)dx = \frac{1}{2}$ となる m を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_0^\infty xf(x)dx$ を求めよ.

(筑波大 2017)　　(m20171316)

0.112 (1) 数列

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が単調減少であることを示せ.

(2) 上の数列が, $C \geq \dfrac{1}{2}$ を満たすある定数 C に収束することを示せ.

(3) 広義積分

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \right) dx$$

の値を上の定数 C を用いて表せ. ただし, $[\alpha]$ は α を超えない最大の整数を表す.

(筑波大 2017)　　(m20171317)

0.113 $f(x) = \log(1 + \sin x)$ とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)(x \to 0)$ を満たす a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ. 但し, $o(\cdot)$ はランダウの記号（スモール・オー）を表す.

(2) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + \sin x) - x}{3x^2}$$

(3) $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ の近似値を誤差 $\dfrac{1}{100}$ 未満で求めよ （求めた近似値の誤差が $\dfrac{1}{100}$ 未満であることの根拠も述べること）.

(筑波大 2018)　　(m20181319)

0.114 (1) $f(x)$ は $x \geqq 0$ において定義された実数値連続関数であって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して広義積分 $\displaystyle\int_\varepsilon^\infty \frac{f(x)}{x} dx$ が収束すると仮定する. このとき, 任意の正の実数 a, b $(a < b)$ に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx$$

(2) $f(x)$ は (1) の仮定を満たすとする. (1) の等式を用いて, 任意の正の実数 a, b $(a < b)$ に対して,

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \log \frac{b}{a}$$

が成り立つことを示せ.

(3) 次の広義積分の値を求めよ.　$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^2} dx$

(筑波大 2019)　　(m20191317)

0.115 (1) 関数 $f(x, y)$ を次のように定義する.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

この関数 $f(x, y)$ について, 以下の問に答えよ.

① $(x, y) = (0, 0)$ での x についての偏微分係数 $f_x(0, 0)$ を求めよ.

② $k \neq 0$ に対して $(x, y) = (0, k)$ での x についての偏微分係数 $f_x(0, k)$ を求めよ.

③ 偏導関数 $f_x(x, y)$ の $(x, y) = (0, 0)$ での y に関する偏微分係数 $f_{xy}(0, 0)$ の定義を f_x を用いて書け.

④ $f_{xy}(0, 0)$ を求めよ.

(2) 関数 $g(x, y)$ を次のように定義する.

$$g(x, y) = \frac{\log(1 + x)}{1 + y}$$

この関数 $g(x, y)$ について，以下の問に答えよ.

① 導関数 $g_x(x, y)$, $g_y(x, y)$, $g_{xx}(x, y)$, $g_{xy}(x, y)$, $g_{yy}(x, y)$ と $(x, y) = (0, 0)$ におけるそれぞれの値を求めよ.

② $(x, y) = (0, 0)$ 周りのテイラー展開を 2 次の項まで計算せよ．なお，3 次以降は剰余項 R_3 と表記すれば良い.

(筑波大 2020) (m20201304)

0.116 $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leqq x \text{ かつ } 0 \leqq y \leqq x^2\right\}$ とし，α は $0 < \alpha < 1$ を満たす定数とする.

(1) 変数変換 $x = s$, $y = s^2 t$ を用いて，広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^\alpha}{x^4 + y^2} dxdy$ を計算せよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^4 + y^2} \log(1 + x^\alpha) dxdy$ が収束することを示せ.

(筑波大 2020) (m20201316)

0.117 (1) 関数 $g(x) = x^x \ (x > 0)$ について，$\displaystyle\lim_{x \to +0} g(x)$ を計算せよ.

(2) 与えられた領域 D において，(1) の結果を用いて，次の広義 2 重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{x \log(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}\, dxdy\ , \quad D = \left\{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\, ,\ x \geq 0\, ,\ y \geq 0\right\}$$

(筑波大 2021) (m20211312)

0.118 (1) $x > 0$ に対して，次の関数を定義する.

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$$

任意の正の整数 n に対して，$\Gamma(n + 1) = n!$ が成り立つことを示せ.

(2) 次の定積分を $u = -(n + 1) \log x \ \ (\Leftrightarrow x = e^{-\frac{u}{n+1}})$ とする置換積分により計算せよ．ただし，n は任意の正の整数を表す.

$$\int_0^1 x^n (\log x)^n dx$$

(3) 以下の恒等式を証明せよ.

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} \quad \left\{= \lim_{n \to \infty} (1 + 2^{-2} + 3^{-3} + \cdots + n^{-n})\right\}$$

ただし，(2) の結果，および，次のマクローリン展開の結果を用いること.

$$x^{-x} = e^{(-x \log x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x \log x)^n}{n!}$$

また，積分 $\int$ と和 $\sum$ の順序は交換してもよいとする.

(筑波大 2022) (m20221307)

0.119 2 つの 2 変数関数

$$F(x,y) = x^2 + 2xy - y^2$$
$$G(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2} - \arctan\frac{y}{x}$$

について，以下の各問に答えよ．ただし，$y = \arctan x$ は $y = \tan x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数である．また，$\dfrac{d}{dx}\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$ である．

(1) $G(x,y)$ の x, y に関する偏導関数 $G_x(x,y)$, $G_y(x,y)$ をそれぞれ求めよ．

(2) ラグランジュの未定乗数法を用いて，$F(x,y)$ が条件 $G(x,y) = 0$ のもとで極値をとる点の候補を求めよ．

(3) $G(x,y) = 0$ の陰関数 $y = g(x)$ について，その 1 次導関数 $g'(x)$ を x および $g(x)$ で表せ，また，2 次導関数 $g''(x)$ を $x, g(x)$ および $g'(x)$ で表せ．

(4) (3) を用いて，条件 $G(x,y) = 0$ のもとでの $F(x,y)$ の極小値を求めよ．

(筑波大 2022) (m20221308)

0.120 次の極限を求めよ． $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x\sqrt{-\log x}$

(埼玉大 1999) (m19991401)

0.121 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}$

(2) $y = \sqrt{1+\cos x}$

(3) $y = x^e e^x \quad (x > 0)$

(4) $y = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

(埼玉大 2006) (m20061401)

0.122 (1) 次の等式を示せ。

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + (-1)^n\frac{t^n}{1+t} \qquad (t \neq -1)$$

(2) 上式を利用して，次の式を示せ．

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x) \qquad (x > -1)$$

ただし，$R_n(x) = (-1)^n\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt$ とする．

(3) $0 \leq x \leq 1$ のとき $R_n(x) \to 0 \quad (n \to \infty)$ を示せ．

(4) $-1 < x < 0$ のとき $R_n(x) \to 0 \quad (n \to \infty)$ を示せ．

(埼玉大 2007) (m20071410)

0.123 n を自然数とする．次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x(\log|x|)^n$ を求めよ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 (\log x)^n\,dx$ の値を求めよ．

(埼玉大 2008) (m20081407)

0.124 (1) 関数 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい．

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x}$ の第 4 次導関数 $f^{(4)}(x)$ を求めなさい．

(3) 次の極限値を求めなさい．

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos 2x)}{\log(\cos 3x)}$$

(4) xy 平面において $y = \dfrac{1}{\sin x}$ のグラフで与えられる曲線と 直線 $x = \dfrac{\pi}{3}$，$x = \dfrac{2\pi}{3}$ および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい．

(埼玉大 2009)　　(m20091401)

0.125 $f(x) = \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$ とする．

(1) $(1 + x^2)f''(x) + xf'(x) = 0$ が成り立つことを示せ．

(2) 非負整数 n に対し，

$$(1 + x^2)f^{(n+2)}(x) + (2n + 1)xf^{(n+1)}(x) + n^2 f^{(n)}(x) = 0$$

が成り立つことを示せ．

(埼玉大 2009)　　(m20091406)

0.126 (1) つぎの関数を微分せよ．

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{1 - \cos x}{\sin x}\right)$$

(2) つぎの関数の第 n 次導関数を求めよ．

$$y = (x + 1)^2 \log(x + 1)$$

(埼玉大 2010)　　(m20101405)

0.127 xy 平面上で定義された関数 $f = f(x, y)$ は，正値で 2 階微分可能であり，

$$f\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

を満たすものとする．また，$g(x, y) = \log f(x, y)$ とおく．

(1) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ が満たす式を，f を用いずに表せ．

(2) $\phi(x)\psi(y)$ の形の関数を変数分離型関数とよぶ，ϕ と ψ が正値で 2 階微分可能な関数であるならば，$f(x, y) = \phi(x)\psi(y)$ は，上の条件 $(*)$ を満たすことを示せ．

(3) 上の条件 $(*)$ を満たす関数 f は，変数分離型の関数であることを示せ．

(埼玉大 2011)　　(m20111409)

0.128 次の関数を微分せよ．

$y = \tan(\log x) \quad (x > 0)$

(埼玉大 2013)　　(m20131401)

0.129 次の関数を微分せよ．

$y = \log\Bigl(\cos e^x\Bigr)$

(埼玉大 2015)　　(m20151401)

0.130 (1) 関数 $x \cos x$，$\log(1 + 3x)$ をそれぞれ 3 次の項までマクローリン展開せよ．

(2) (1) の結果を用いて極限 $\displaystyle\lim_{x \Rightarrow 0} \left\{\frac{1}{\log(1 + 3x)} - \frac{1}{3x \cos x}\right\}$ を求めよ．

(埼玉大 2018)　　(m20181404)

0.131 次の関数について以下の問いに答えよ． $f(x) = \dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$

(1) $f'(x)g(x) = 1$ を満たす $g(x)$ を求めよ．

(2) $f'(x)g(x) = 1$ に積の微分に関するライプニッツの公式を適用して，次の漸化式が成り立つことを示せ．

$$(x^2-1)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0 \quad (n \geqq 1)$$

(埼玉大 2019) (m20191401)

0.132 次の関数の x に関する偏導関数 z_x を求めよ．

$z = \log\sqrt{x^2+y^2}$

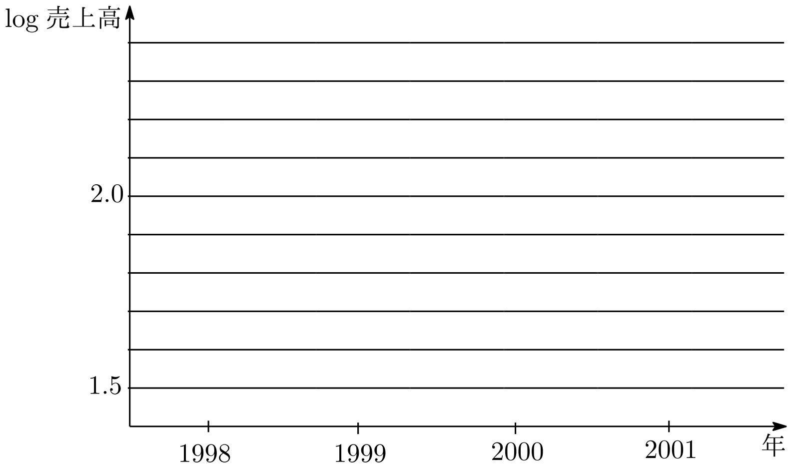
(埼玉大 2019) (m20191402)

0.133 ある会社では，３種の商品の過去４年間の売上高が次のようであった．以下の３問に答えよ．

	1998 年	1999 年	2000 年	2001 年
商品 A	91 万円	123 万円	170 万円	229 万円
商品 B	31 万円	51 万円	78 万円	126 万円
商品 C	46 万円	83 万円	141 万円	257 万円

(1) 伸び率を見るために，片対数グラフを作成したい．売上高を１万円を単位に対数変換すると，次のようになった．対数の底は 10 とし，小数第３位で四捨五入した．図に商品の売上高を点で示し，各商品ごとの売上高の推移がわかるようにもっとも適切な直線を図に書き込め．

売上高（万円）	31	46	51	78	83	91	123	126	141	170	229	257
log 売上高	1.50	1.66	1.71	1.89	1.92	1.96	2.09	2.10	2.15	2.23	2.36	2.41



(2) 売上高を対数にしたときの，商品 B の y 年の売上高 t を近似したら，$\log t = ay + 1.5$ になった．定数 a を求め，y 年の売上高 m を示す式を示せ．

(3) 売上高の伸び率が今後もほぼ一定だと仮定したとき，商品 B の売上高が 1000 万円を超えるのは何年と推測できるか．

(群馬大 2003) (m20031501)

0.134 定数 $b > a > 1$ があり，$f(x) = 2\log_e(x-a) - \log_e(x-b)$ とする．以下の４問に答えよ．

(1) $f(x)$ が定義される x の範囲を示せ．

(2) $f(x)$ を微分せよ．

(3) $f(x)$ が最小となるときの x を a と b で示せ.

(4) $x=6$ で最小となり, そのときに $f(x)=2\log_e 2$ であった. a と b を求めよ.

（群馬大 2004） (m20041503)

0.135 次の等式が与えられたとする.

$$\log_2 \frac{y}{x} = \frac{\log_2 y}{\log_2 x}$$

この式で, x と y は 2 を整数乗して得られる数である. x と y の値を求めよ.

(群馬大 2005) (m20051502)

0.136 $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$ として, 以下の 3 つの問いに答えよ.

(1) 20^{19} の桁数を求めよ.

(2) 12^{16} の桁数を求めよ.

(3) 5^{32} の桁数とその最初の数字（首位の数字）を求めよ.

(群馬大 2012) (m20121502)

0.137 以下の $\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{ク}}$ にあてはまる式あるいは数値を解答欄に記せ. ただし $\boxed{\text{エ}}$ には複数の値が入る.

- 以下で $\log x$ は 10 を底とする常用対数 $\log_{10} x$ を指す.
- 特に $\log 2 = 0.301030$（小数第 7 位を四捨五入したもの）である.
- 実数 x $(x \geq 1)$ に対し, $\log x$ の小数部分を $L(x)$ で表す. 例えば $\log 20 = 1 + \log 2$ より $L(20) = L(2)$ であり, これを小数点以下 4 位まで記すと 0.3010 である.

(1) 実数 x $(x \geq 1)$ を 10 進表記したとき, 最高位の数字が d, $(d = 1, 2, \ldots, 9)$ であるのは
$\boxed{\text{ア}} \leq L(x) < \boxed{\text{イ}}$
のときである.

(2) 特に $d = 1$, つまり最高位が 1 である場合について考える. 実数列 a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ が $\log a_n = 0.3 \times n$ を満たすとき, a_n の最高位が 1 になるのは n を $\boxed{\text{ウ}}$ で割った余りが $\boxed{\text{エ}}$ のときである.
（$\boxed{\text{エ}}$ には条件を満たすものすべてを記せ）.

(3) $L(2^3) = \boxed{\text{オ}}$ $\quad L(2^4) = \boxed{\text{カ}}$ $\quad L(2^{20}) = \boxed{\text{キ}}$
ただし値は小数第 5 位を四捨五入した小数第 4 位までの数値で答えよ.

(4) n が 1 から 50 までの整数値をとるとき, 2^n の最高位の数字が 1 になる場合は $\boxed{\text{ク}}$ 通りある.

(図書館情報大 2002) (m20021606)

0.138 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $f(r) = \log r$ とする. 次の各問に答えよ.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を求めよ.

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \dfrac{1}{r^2}$ を示せ.

(茨城大 2000） (m20001701)

0.139 次の微分方程式を解け. $\quad y' = \dfrac{y}{x} \log \dfrac{y}{x}$

(茨城大 2000） (m20001702)

0.140 (1) $y = 2\sqrt{1+x} + \log\left|\dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1+x} + 1}\right|$ について, $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\log x}{\sqrt{1+x}}\,dx$ を求めよ．

(茨城大 2001) (m20011701)

0.141 $x>0,\ y>0$ とする．$a>0,\ 0<b<1$ のとき，以下の各問に答えよ．

(1) 変数変換 $u=xy,\ v=\log\dfrac{y}{x}$ のヤコビ行列式 $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ．log は自然対数である．

(2) 直線 $y=ax,\ y=(a^2+1)x$，および曲線 $xy=b,\ xy=b^2$ で囲まれた領域 $D_{a,b}$ を xy–座標平面に図示せよ．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_{D_{a,b}} dxdy$ に (1) の変数変換を用いて，領域 $D_{a,b}$ の面積 $S(a,b)$ を求めよ．

(4) $\dfrac{\partial S}{\partial a}=\dfrac{\partial S}{\partial b}=0$ となる点 (a,b) を求めよ．その点で $S(a,b)$ が極値をとるかどうか判定せよ．

(茨城大 2008) (m20081702)

0.142 以下の問に答えよ．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^x-e^x\log 2-1+\log 2}{x^2}$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

(2) 関数 $f(x)=xe^{-x^2}$ の区間 $[0,\infty)$ における最大値と最小値を求めよ．

(茨城大 2013) (m20131701)

0.143 a を正の定数とする．関数 $f(x)=\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．
ただし，対数は自然対数とする．

(茨城大 2020) (m20201703)

0.144 $-\infty<x<\infty$ である x に対して，$\tan y=x$ 満たす y で $-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす唯一のものを $y=\mathrm{Arctan}\,x$ と表わす．以下の各問に答えよ．

(1) $\cos(\mathrm{Arctan}\,x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ を示せ．

(2) 曲面 $z=\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 上の点 $P=\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$ での接平面を求めよ．

(3) 関数 $y=x\sqrt{x^2+1}+\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ の微分を求めよ．

(4) 曲面 $z=\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ の，xy 平面上の有界閉領域 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqq 1\right\}$ の真上にある部分の曲面積を求めよ．

(茨城大 2022) (m20221702)

0.145 $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする．

(1) 1024 桁の 2 進数の非負の整数が表す数の個数を 10 進数で表すと，最大で何桁になるか求めよ．

(2) 1024 桁の 2 進数の非負の整数と 100 桁の 3 進数の非負の整数の積で表される数の個数を 10 進数で表すと，最大で何桁になるか求めよ．

(山梨大 2007) (m20071807)

0.146 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x^2)}{x}$ を求めなさい．ただし，対数関数は自然対数によるものとする．

(山梨大 2008) (m20081803)

0.147 関数 $f(x)=\sqrt{x}-\log x\quad(x>0)$ を考える．ただし，対数関数は自然対数によるものとする．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい.

(2) $f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めなさい.

(3) $f(x)$ の極小値を求めなさい.

(山梨大 2009)　　(m20091803)

0.148 関数 $f(x) = \log(1 + \sin x)$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めなさい.

(山梨大 2011)　　(m20111805)

0.149 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$ の値を求めなさい.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx$ を求めなさい.

(山梨大 2012)　　(m20121801)

0.150 $0 < R_1 < R_2$ とする. 次の定積分を求めよ.

$$\int_{R_1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq R_2} \log(x^2+y^2)\,dxdy$$

(信州大 2003)　　(m20031905)

0.151 (1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x \log x = 0$ を示せ.

(2) $f(x)$ を区間 $[-1, 1]$ 上で定義された連続関数とする．このとき,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\int_{-1/n}^{1/n} |f(x)|^n dx\right)^{1/n} = |f(0)|$　　となることを示せ.

(信州大 2008)　　(m20081904)

0.152 (1) $|x| \leq \dfrac{1}{2}$ ならば, $|\log(1+x) - x| \leq 2x^2$ が成立することを証明せよ.

(2) 次の等式を証明せよ.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1 + \frac{1}{n}\cos\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \cos x\,dx$$

(信州大 2012)　　(m20121903)

0.153 平面内の領域 $D = \{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ で定義される 2 変数関数 $f(x, y)$ に対して,
$\triangle f(x, y) = f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)$ と定める．また，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とし,
$z = f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，領域 D で $f(x, y)$ の 2 階までのすべての偏導関数が存在して，それらはすべて連続である.

(1) z_r, z_θ を r, θ, f_x, f_y を用いて表せ.

(2) $z_{rr} + \dfrac{1}{r}z_r + \dfrac{1}{r^2}z_{\theta\theta} = \triangle f$ を示せ.

(3) $f(x, y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}\log(x^2+y^2)$ のとき，$\triangle f(x, y)$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする;

(信州大 2016)　　(m20161901)

0.154 関数 $f(x)$ は開区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ において,

$$f(x) = \log\cos x$$

で定義されているとする．このとき，次に問いに答えよ．ただし，対数は自然対数である.

(1) $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の 2 次までのマクローリン展開を求めよ．また，剰余項 $R_3(x)$ を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \cos^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ を求めよ．

(信州大 2023)　　(m20231901)

0.155 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left\{\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+x}\right\}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1+x)}{x}$

(新潟大 2001)　　(m20012001)

0.156 (1) $y=x^x\,(x>0)$ を微分せよ．　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x$ の値を求めよ．

(新潟大 2002)　　(m20022002)

0.157 次の問いに答えよ．

(1) 定積分を用いて，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$ を求めよ．

(2) $\beta>2$ に対して，定積分 $\displaystyle\int_2^{\beta}\frac{dx}{x(\log x)^{\alpha}}$ を求めよ．ただし， $\alpha>0$ とする．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\log x)^{\alpha}}$ は存在するかどうかを調べ，存在する場合はその値を求めよ．ただし，$\alpha>0$ とする．

（新潟大 2004）　　(m20042002)

0.158 関数 $g(x,y)=\log(x^2+y^2)$ の偏導関数 $g_x(x,y)$，$g_y(x,y)$ を求めよ．

(新潟大 2006)　　(m20062003)

0.159 以下の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\sin x-\log(x+1)}$$

(新潟大 2010)　　(m20102004)

0.160 次の関数を微分せよ．ただし，log は自然対数で表す．

(1) $\tan(x^2-3x)$　　(2) $x^2\log x$　　(3) $x^3(x^2+5x+1)^{-1}$

(新潟大 2012)　　(m20122001)

0.161 以下の極限値は存在するか，存在すればその値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\log(1-x)}$$

(新潟大 2014)　　(m20142011)

0.162 次の関数を微分せよ．ただし, e は自然対数の底とする．

(1) $(x^3+2x-3)^4$　　(2) $\log_e(x^3+2)$ (ただし $x>0$)　　(3) e^{3x+1}　　(4) xe^{-3x}　　(5) $e^{\cos x}$

(新潟大 2014)　　(m20142013)

0.163 定積分 $\displaystyle -\int_{1/e}^{1} x\log x\,dx$ を計算せよ．

(新潟大 2015)　　(m20152002)

0.164 次の (1)〜(3) の不定積分を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $\displaystyle\int (6x-1)^3\,dx$　　(2) $\displaystyle\int x\sqrt{3x-1}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \log_e x\,dx$

(新潟大 2015)　　(m20152014)

0.165 関数 $g(x)=\dfrac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}$ の上の曲線の長さ s を $-\log_e 2 \leq x \leq \log_e 2$ の範囲で求めよ．

(新潟大 2016)　　(m20162002)

0.166 以下の極限は存在するか，存在すればその値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{(1+\cos x)\log(1+x)}$$

(新潟大 2016)　　(m20162005)

0.167 (1) 関数 $f(x)=\exp(2x)$ 上の x 座標が負である点 P における接線と，両座標軸とで囲まれる図形の面積を S とする．点 P の x 座標を p とし，S を p で表せ．

(2) 前問 (1) において p の関数 S の最大値を求めよ．

(3) 関数 $f(x)=\exp(ax)$ とその逆関数 $g(x)=\dfrac{1}{a}\log x$ のグラフが $x=e$ で接する（すなわち，この点で接線を共有する）ように定数 $a(\neq 0)$ の値を求め，この 2 曲線と x 軸，y 軸の囲む部分の面積を求めよ．

(新潟大 2017)　　(m20172001)

0.168 次の (a)〜(c) の関数を x で微分せよ．

(a) $y=\dfrac{x}{(x+1)^2}$　　(b) $y=\sqrt{x}\log_e x\quad (x>0)$　　(c) $y=x^{\log_e x}\quad (x>0)$

(新潟大 2017)　　(m20172012)

0.169 つぎの (a)〜(c) の不定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+2}$　　(b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$　　(c) $\displaystyle\int \log_e x dx$

(新潟大 2017)　　(m20172013)

0.170 (1) $\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ の導関数を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を求めよ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\,dx$ を求めよ．

(新潟大 2017)　　(m20172019)

0.171 次の (1)〜(3) の関数を x で微分せよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $y=\sqrt{1+\sin x}$　　(2) $y=xe^{1/x}$　　(3) $y=-\log_e(\cos x)$

(新潟大 2018)　　(m20182001)

0.172 次の方程式を解け．　$(\log_3 x)^4-(\log_3 x)\left(\log_3 x^3\right)+\log_3 x^2=0$

(新潟大 2019)　　(m20192008)

0.173 和 $\displaystyle\sum_{n=10}^{100}\log a^n$ は $\log a$ の何倍か．ただし，$a>0$ とする．

(長岡技科大 1991)　　(m19912101)

0.174 $n=0,1,2,\cdots$ に対して $I_n=\displaystyle\int_0^1 (\log x)^n\,dx$ とおく．ここで， $\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x(\log x)^n$ を求めよ．

(2) I_0 , I_1 を求めよ．

(3) I_n を n の式で表せ．

(長岡技科大 1995） (m19952101)

0.175 $f(x)$ を微分可能な関数とし，$g(x)=\log f(x)$, $f(0)=\dfrac{1}{2}$, $f'(0)=\dfrac{8}{3}$ とする．曲線 $y=g(x)$ 上の点 $(0,\ g(0))$ における接線の方程式を求めよ．

(長岡技科大 2001) (m20012101)

0.176 微分方程式 $y''-\dfrac{(y')^2}{y}+y=0$ の解で初期条件 $y(0)=1,\ y'(0)=0$ を満たすものを $y=y(x)$ とする．以下の問いに答えなさい．

(1) $z=\log y$ とおくとき，$z=z(x)$ の満たす微分方程式を求めなさい．

(2) y を求めなさい．

(長岡技科大 2007) (m20072105)

0.177 曲線 $y=e^x$, 直線 $y=3$ および y 軸で囲まれた部分 S の面積を A とする．

(1) S の概形を描き, その面積 A を求めなさい．

(2) $0<t<\log 3$ とする．S のうちで $t\leqq\ x\leqq\ 2t$ の範囲にある部分の面積 $A(t)$ を求めなさい．

(3) t が前問の範囲を動くとき, $A(t)$ の最大値を求めなさい．

(長岡技科大 2010) (m20102102)

0.178 (1) 極限 $L=\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x$ を求めなさい．

(2) 広義積分 $I_1=\displaystyle\int_0^1 \log x dx$ を求めなさい．

(3) 広義積分 $I_2=\displaystyle\int_0^1\left\{\int_0^1 \frac{x}{1-xy}dy\right\}dx$ を求めなさい．

(長岡技科大 2022) (m20222102)

0.179 (1) 関数 $f(x)=\log(1+x)$ に対して， $f^{(n)}(x)$, $n=0,1,2,\cdots$ を求めよ．

(2) 関数 $g(x)=\log\dfrac{1+x}{1-x}$ に対して， $g(x)$ のマクローリン展開を書け．すなわち $g(x)$ をべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の形で表せ．

(金沢大 1999) (m19992203)

0.180 関数 $f(x)=\log(1+x)$, $x>-1$ について，次の問いに答えよ．ただし，log は自然対数とする．

(1) $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ にマクローリンの定理を当てはめ，次の不等式を証明せよ．

$$\left|\log 1.1-0.095\right|<\frac{1}{3000}$$

(金沢大 2002) (m20022201)

0.181 関数 $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(2) 閉領域 $D(a)=\left\{(x,y)|1 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ a\right\}$ $(a>1)$ に対して $\displaystyle\iint_{D(a)} f(x,y)dxdy=\frac{\pi}{2}$ であるとき，a の値を求めよ．

(金沢大 2003) (m20032202)

0.182 関数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\log(2+\cos x)}{x-\pi} & (x\neq\pi)\\ 0 & (x=\pi)\end{cases}$ について, 次の問に答えよ.

(1) $f(x)$ は $x=\pi$ で連続であるかどうか調べよ.

(2) $x=\pi$ での $f(x)$ の微分係数 $f'(\pi)$ は存在するか. 存在するときにはその値を求め, 存在しないときにはその理由を述べよ.

(金沢大 2005) (m20052206)

0.183 $f(x)$ を $f'(x)=f(x),\ f(0)=1$ を満たす関数とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $\left(e^{-x}f(x)\right)'=0$ を示せ．また，これを用いて $f(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ.

(3) (2) の結果を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$ の値を求めよ.

(金沢大 2007) (m20072202)

0.184 領域 $D(\varepsilon)=\{(x,y)\mid x^2+y^2 \leqq\ 1-\varepsilon,\ |y| \leqq\ x\}$ $(0<\varepsilon<1)$ に対して
$\displaystyle I(\varepsilon)=\frac{2}{\pi}\iint_{D(\varepsilon)}\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 領域 $D(\varepsilon)$ を図示せよ. (2) $I(\varepsilon)$ を計算せよ. (3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\log I(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}$ の値を求めよ.

(金沢大 2007) (m20072203)

0.185 (1) ある定数 $a_0,\,a_1,\,\cdots,\,a_n$ と正の定数 M が存在して
$\displaystyle\left|\ \log(1+x)-\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\ \right| \leqq\ Mx^{n+1}$ $(0 \leqq\ x \leqq\ 1)$ が成り立つとき，$a_0,\,a_1,\,\cdots,\,a_n$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\log 2$ を示せ.

(金沢大 2007) (m20072208)

0.186 (1) $n=1,2,3,\cdots$ に対して,

$$\frac{1}{n+1}<\log(n+1)-\log n<\frac{1}{n}$$

を示せ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ を $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\log n$ で定めるとき，$a_n>0$ かつ $a_n>a_{n+1}$ となることを示せ.

(金沢大 2009) (m20092206)

0.187 (1) $x=u\cosh v\,,\ y=u\sinh v$ とおく.

$$1 \leqq\ u \leqq\ 2,\ -\infty<v<\infty \text{ のとき } x \geqq\ 1,\ 1 \leqq\ x^2-y^2 \leqq\ 4$$

となることを示せ. ただし, $\cosh v=\dfrac{e^v+e^{-v}}{2}$, $\sinh v=\dfrac{e^v-e^{-v}}{2}$ である.

(2) 変数変換 $x = u\cosh v$, $y = u\sinh v$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

(3) 重積分

$$\iint_D \frac{\log(x^2-y^2)}{x}\,dxdy$$

を計算せよ. ただし $D = \left\{(x,y)\,|\,x \geqq 1,\ 1 \leqq x^2-y^2 \leqq 4\right\}$ とする.

(金沢大 2010) (m20102203)

0.188 次の広義積分を計算せよ.

(1) $D = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2\,|\,x, y \geqq 0\right\}$ とするとき

$$\iint_D x^2 e^{-x^2-y^2}\,dxdy\ .$$

(2) $E = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2\,|\,x, y \geqq 0,\ x+y \leqq 1,\ (x,y) \neq (0,0)\right\}$ とするとき

$$\iint_E \log(x+y)\,dxdy\ .$$

(金沢大 2010) (m20102208)

0.189 (1) 変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0)$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ.

(2) 重積分

$$\iint_{x^2+y^2 \leqq 2} \log(1+x^2+y^2)\,dxdy$$

を計算せよ.

(金沢大 2012) (m20122203)

0.190 $x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $f'(x) < 0$ となる x の範囲を求めよ.

(2) $N \geqq 3$ に対して,

$$\sum_{n=3}^{N} f(n) < \int_2^N f(x)dx$$

が成り立つことを示せ. ただし必要ならば, $e < 3$ であることは証明なしで用いてよい.

(3) $f(x)$ の不定積分を求めよ.

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ が収束することを示せ.

(金沢大 2012) (m20122206)

0.191 $x \geqq 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ が

$$0 \leqq f(x) \leqq \int_0^x f(t)dt$$

を満たすとする. 次の (1)〜(3) を示せ,

(1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\dfrac{d}{dx}\log\left(\varepsilon + \displaystyle\int_0^x f(t)dt\right) < 1$.

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $f(x) < \varepsilon e^x$.

(3) 任意の $x \geqq 0$ に対して $f(x) = 0$.

(金沢大 2013)　　(m20132203)

0.192　関数 $\varphi(x) = x\log x\ (x > 0)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\varphi'(x)$，$\varphi''(x)$ を求めよ．

(2) テイラーの定理を適用して，$\varphi(x)$ の $x = 1$ における 1 次の近似式 $p(x)$ および剰余項 R_2 を求めよ．

(3) (2) の $p(x)$ に対し，$x > 0$ において $\varphi(x) \geqq p(x)$ が成り立つことを示せ．

(4) 閉関数 $[0, 1]$ で定義された正の値をとる連続関数 $f(x)$ が $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ を満たすとする．このとき

$$\int_0^1 \varphi\left(f(x)\right)\,dx \geqq 0$$

が成り立つことを示せ．

(金沢大 2014)　　(m20142202)

0.193　$x > 0$ の範囲で考えて，　$f(x) = x^2\log x$　と置く．次の小問に答えよ．

(1) $f(x)$ のグラフの概形をかけ，また $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) すべての自然数 n に対して $f(x)$ の n 次導関数を求めよ

(金沢大 2016)　　(m20162218)

0.194　次の問いに答えよ．ただし，以降 a, b は正の定数とする．

(1) $f(x) = a^x$ の導函数を求めよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}\log\frac{a^x + b^x}{2}$ を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$ を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162220)

0.195　(1) $\dfrac{x}{1+x} \leqq \log(1+x) \leqq x \quad (x > -1)$ を示せ．

(2) 実数列 $\{a_n\}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を満たすとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n$ を求めよ．

(3) 実数列 $\{b_n\}$ は有界数列とする．もし $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{b_n}{n}\right)^n$ が収束するならば，$\{b_n\}$ も収束することを示せ．

(金沢大 2017)　　(m20172203)

0.196　被積分関数に自然対数を含んでいる定積分

$$I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx$$

の値が $0.18 < I < 0.28$ となることを確かめる．次の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，不等式

$$\frac{\log(1+x)}{1+x^2} \geqq \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)(1 - x^2)$$

が成り立つことを示し，これを用いて $I \geqq \dfrac{11}{60}$ であることを導け．

(2) 2 つの等式

$$1+\tan\theta = \frac{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\cos\theta} \quad \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

および

$$\int_0^{\pi/4} \log\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right\} d\theta = \int_0^{\pi/4} \log(\cos\theta) d\theta$$

がそれぞれ成り立つことを示し，これらを用いて定積分 I を計算せよ.

(3) $\pi < 3.2$ および $\log 2 < 0.7$ であることと問題 (1)(2) の結果を合わせて，$0.18 < I < 0.28$ であることを確かめよ.

(金沢大 2019)　　(m20192202)

0.197 $x \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$f(x) = x\left(\log\left(x^2+\frac{1}{2}\right)-2\right)+\sqrt{2}\tan^{-1}(\sqrt{2}x)$$

とおく．以下の問いに答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x\log(x)}$ を求めよ.

(2) f の導関数を求めよ.

(3) f の極値を求めよ.

(金沢大 2020)　　(m20202207)

0.198 次の関数 $f(x)$ の導関数を求めなさい.

(1) $f(x) = \tan^{-1} x$

(2) $f(x) = \log(\log x)$

(金沢大 2022)　　(m20222211)

0.199 次の各問いの計算をせよ.

(1) $x = \log(y+\sqrt{y^2+1})$ を y について解け

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{x}{1-x^2}$,　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{x}{1-x^2}$　　(3) $\displaystyle\frac{d}{dx}e^{x\log x}$

(富山大 2001)　　(m20012301)

0.200 次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\int x^2\log x^2 dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^3 x}{1+\sin x}dx$

(富山大 2003)　　(m20032302)

0.201 $f(x) = \log\left(\cos^2 x\right)$ を x で微分せよ.

(富山大 2005)　　(m20052311)

0.202 次の計算をせよ.　$\displaystyle\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\log(x^2+y^2)$

(富山大 2006)　　(m20062302)

0.203 次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}\cos^{-1}(2x)\quad\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right)$　　(2) $\displaystyle\frac{d}{dx}xe^{x^2}$　　(3) $\displaystyle\frac{d}{dx}(\log_e x)^x\quad(x>e)$

(富山大 2007)　　(m20072301)

0.204 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\log_e\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}x^{\frac{1}{x}}$

(3) $\displaystyle\int \sin^{-1} x dx$　　(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x}$

(富山大 2008)　　(m20082301)

0.205 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}e^{2\log x}$　　(2) $\dfrac{d}{dx}x^x$　　(3) $\dfrac{d^2}{dx^2}\sin\left(e^x\right)$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+1}$　　(5) $\displaystyle\int x\log|x|\,dx$

(富山大 2009)　　(m20092301)

0.206 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}x^2e^{-2x}$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\log(\tan x)\ \ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$　　(3) $\dfrac{d}{dx}(\cos x)^x\ \ \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

(富山大 2010)　　(m20102301)

0.207 次の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int \sin^5(2x)dx$　　(2) $\displaystyle\int \log(3x-1)dx\quad(3x>1)$

(富山大 2012)　　(m20122302)

0.208 懸垂曲線 $y=a\cosh\dfrac{x}{a}\quad(a>0)$ と直線 $y=b\quad(b>a)$ で囲まれた図形を考える．

(1) 直線と懸垂曲線は $x=\pm\ell$ で交差する．逆双曲線関数を用いて，定数 a と b で ℓ を表せ．

(2) 曲線の長さは曲線の線素 $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ を積分することによって与えられる．この図形の周囲の長さを a と b を用いて表せ．

双曲線関数 $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，　$\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，逆双曲線関数 $\cosh^{-1}x=\pm\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ $(x>1)$，　$\sinh^{-1}x=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ を用いても良い．

(富山大 2012)　　(m20122305)

0.209 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{\log_e(1-x)^2}$　　(2) $\dfrac{d}{dx}(\cos 2x)^{-2}$　　(3) $\dfrac{d}{dx}\tan\left(\dfrac{e^{x^2}}{2}\right)$

(富山大 2013)　　(m20132301)

0.210 次の計算をせよ．計算の概略も示すこと．

(1) $\dfrac{d}{dx}\log_e\left\{(x-1)e^{x^2}\right\}\ \ (x>0)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{(x-2)^x}{\tan x}\right\}\ \ (x>2)$

(富山大 2015)　　(m20152305)

0.211 空間座標の原点 O からの距離 r で定義される関数 $\varphi(r)=\log_e r\ \ (r>0)$ について次の各問いに答えよ．ただし，$\overrightarrow{i}$，$\overrightarrow{j}$，$\overrightarrow{k}$ を直交座標系 $O-xyz$ の単位ベクトルとし，$\overrightarrow{r}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}$，$r=|\overrightarrow{r}|$ であるとする．

(1) 点 $P(1,1,0)$ を含む等位面（関数の値が等しい点の集合）の点 P における単位法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ の x,y,z 成分を求めよ．

(2) 点 $Q(0,0,1)$ における，ベクトル $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$ の方向への $\varphi(r)$ の方向微分係数を求めよ．

(3) 勾配の発散 $\nabla^2\varphi(r)$ を r の関数として求めよ.

(4) 勾配の回転 $\nabla\times\ \nabla\varphi(r)$ が $\overrightarrow{0}$ であることを示せ.

(富山大 2015)　　(m20152307)

0.212 a を実数の定数とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 x^a \log x dx$ が収束する a の値の範囲を求めよ.

(2) (1) の広義積分が収束するとき，その値を求めよ.

(富山大 2016)　　(m20162301)

0.213 次の計算をせよ．ただし，計算の概略も示すこと.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx$　　(2) $\displaystyle\int x\log_e x dx \qquad (x>0)$

(富山大 2017)　　(m20172302)

0.214 $\log_e y - a^x\ \ (a:$ 定数, $a>0)$ で定義される関数 y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(富山大 2018)　　(m20182302)

0.215 次の式で定義される 2 変数関数の 2 階偏導関数を求めよ.

$$f(x,y)=\log_y x \qquad (x>0,\ y>1)$$

(富山大 2020)　　(m20202302)

0.216 ベクトル場 $\vec{A}(x,y,z)=xye^z\vec{i}+x\log_e(z)\vec{j}+yz^4\sin(2x)\vec{k}$, スカラー場 $\phi(x,y,z)=xyz$ について，次の問いに答えよ．ただし，$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ はそれぞれ直角座標系の x, y, z 軸方向の単位ベクトルとする.

(1) 回転 $\mathrm{rot}\vec{A}$ を求めよ.

(2) 勾配 $\mathrm{grad}\phi$ を求めよ.

(3) 点 $P(1,1,2)$ における，単位ベクトル $\vec{u}=\dfrac{2}{3}\vec{i}-\dfrac{2}{3}\vec{j}+\dfrac{1}{3}\vec{k}$ の方向への ϕ の方向微分係数 $\dfrac{d\phi}{du}$ を求めよ.

(富山大 2020)　　(m20202304)

0.217 次の曲線に与えられた点から引いた接線の方程式を求めなさい.

(1) $y=\log x$ ，点 $(0,0)$

(2) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$ ，点 $(2,2)$

(福井大 2000)　　(m20002401)

0.218 次の関数の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \log(x^2-1)\,dx$

(3) $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx$

(4) $\displaystyle\int \sqrt{x}\log x\,dx$

(福井大 2000)　　(m20002404)

0.219 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$ を求めよ.

(福井大 2001)　　(m20012401)

0.220 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\log(1+\tan\theta)d\theta$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cos x^2 dx$

(福井大 2001)　　(m20012406)

0.221 次の関数を微分しなさい.

(1) $y=\sqrt[3]{x^2(x-1)}$　　(2) $y=\sin(3x+2)$　　(3) $y=\log(\sin x^2)$

(福井大 2003)　　(m20032405)

0.222 次の関数を積分しなさい.

(1) $y=\dfrac{\sqrt{\log x}}{x}$　　(2) $y=x\sin x^2$　　(3) $y=\dfrac{1}{\cos x}$

(福井大 2003)　　(m20032409)

0.223 次の関数の導関数を求めよ.

(1) $y=x^x\quad(x>0)$　　(2) $y=\dfrac{2x+3}{x^2+2}$

(2) $y=x^5\log x$　　(4) $y=\arcsin x\quad\left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$

（福井大 2004）　　(m20042403)

0.224 (1) 関数 x のマクローリン展開は次式で表される.

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\qquad(0<\theta<1)$$

これをもとに, 次の関係式を示せ.（注意： $f^{(n+1)}(\theta x)$ は 'θx' の $(n+1)$ 階導関数である）

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_{n+1}\ ,$$

$$R_{n+1}=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^{n+1}\qquad(0<\theta<1)$$

(2) (1) の関係式で $n=1$ とした関数 x のマクローリン展開は次式で表される.

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2(1+\theta x)^2}\qquad(0<\theta<1)$$

これを用いて, $\log 1.01$ の近似値として 0.01 を採用したときの誤差は 0.00005 より小であることを示せ.

(福井大 2005)　　(m20052402)

0.225 次の関数を微分せよ.

(1) $y=\log\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$　　(2) $y=(x^2+2x)\log x$　　(福井大 2005)　　(m20052419)

0.226 次の値を求めなさい.

(1) $(x^3y^2)^{-\frac{2}{3}}\times\ x^2y^{\frac{4}{3}}$　　(2) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{729}}$　　(3) $4\log_2\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\log_2 3+\log_2\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

(4) $5^{\log_5 7}$　　(5) $\log_2 3\cdot\log_{27}25\cdot\log_5 16$

(福井大 2006)　　(m20062413)

0.227 $y=(\log_2 x)^2-2\log_2 x+3$ において，x の定義域が $0.5 \leq x \leq 8$ とする．この時

(1) $s=\log_2 x$ とするとき，s の範囲を示せ．

(2) y を s の関数として表し，そのグラフの概形を示せ．

(3) y の最小値と最大値と，その各々を与える x を求めよ．

(福井大 2006) (m20062414)

0.228 次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$ (2) $\dfrac{e^{2x}}{e^x-1}$ (3) $x\log x$

(福井大 2006) (m20062417)

0.229 二次元直交座標 (x,y) を，以下の式に従い極座標 (r,θ) に変換するものとする．

$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ ただし，$r \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi$ として，以下の設問に答えよ．

(1) r および θ を，x および y を用いて表せ（答のみでよい）．

(2) $\dfrac{\partial r}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$ を計算せよ（途中経過も書くこと）．

(3) (2) の結果を用いて，$\dfrac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}$ を計算せよ（途中経過も書くこと）．

(福井大 2007) (m20072403)

0.230 (1) 関数 $f(x)=\log(1+x)$（ただし $x>-1$）の 1〜4 階の導関数（つまり $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, および $f^{(4)}(x)$ ）をそれぞれ求めよ．

(2) (1) の結果にもとづき, 上で定義された関数 $f(x)$ の n 階の導関数を推測し，$f^{(n)}(x)$ が実際に推測された関数で表現されることを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) (2) の結果を使い，関数 $f(x)$ のマクローリン展開（$x=0$ でのテーラー展開）を，無限級数の和の形 $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \text{の形}\right)$ で求めよ，

(4) (3) の結果を用いて，関数 $g(x)=\log\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)$（ただし $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$）のマクローリン展開を，無限級数の和の形で求めよ（経過を書く必要はあるが，証明の必要はなし）．

(福井大 2008) (m20082401)

0.231 次の値を求めよ．

(1) $\cos 55^\circ + \cos 65^\circ + \cos 175^\circ$ (2) $\log_3 9\sqrt{5}+\dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{1}{5}$ (3) $\left(\sqrt[3]{27^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(4^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$

(福井大 2008) (m20082412)

0.232 次の関数を微分しなさい．

(1) $y=\sin^{-1}x$ (2) $y=x^x$ (3) $y=\log\sqrt{x^2+a^2}$

(4) $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ (5) $y=a^x$

(福井大 2008) (m20082414)

0.233 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{1-x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$ （n は正の整数）

(福井大 2009) (m20092407)

0.234 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ (2) $y = x^{1/x}$ (3) $y = \log_a x$

(4) $y = \tan^{-1} x$ (5) $y = e^{-a^2x^2}$

(福井大 2009) (m20092408)

0.235 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $y = (3x-2)^5$ (2) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (3) $y = \dfrac{x}{ax+b}$

(4) $y = \dfrac{\log x}{x}$ (5) $y = \dfrac{1}{e^x + 1}$

(福井大 2009) (m20092410)

0.236 (1) 次の関数の導関数を求めよ.

$$f(x) = x\sqrt{x^2+a} + a\log\left(x + \sqrt{x^2+a}\right)$$

(2) 次の関数の不定積分を求めよ.

$$f(x) = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

(福井大 2009) (m20092416)

0.237 $\log(1+x)$ をマクローリン級数（マクローリン展開）を使って, 第 5 項まで示せ.

(福井大 2010) (m20102403)

0.238 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{1-2x^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \log x\,dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-9}$

(福井大 2010) (m20102404)

0.239 次の関数を微分せよ.

(1) $\dfrac{b}{ax+b} + \log|ax+b|$ (2) $\sin^{-1} x$ (3) a^x

(福井大 2010) (m20102415)

0.240 次の関数を積分せよ.

(1) $\dfrac{1}{\sin^2 x}$ (2) $\dfrac{1}{x^2 - a^2}$ (3) $\dfrac{1}{x^2 + a^2}$

(4) $x^2 \log x$ (5) $\dfrac{1}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$

(福井大 2010) (m20102416)

0.241 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \log_e\left(\cos^2 x\right)$ (2) $y = x^{\tan^{-1} x}$

(福井大 2011) (m20112402)

0.242 次の値を求めよ.

(1) $(x^3y^2)^{-\frac{2}{3}} \times x^2y^{\frac{4}{3}}$

(2) $5^{\log_5 7}$

(3) $4\log_2\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\log_2 3 + \log_2\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

(4) $(\sin 40^\circ + \sin 50^\circ)^2 + (\cos 50^\circ - \cos 40^\circ)^2$

(5) $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$ の値

(福井大 2011) (m20112413)

0.243 次の公式を使って極限値を求めよ．

〈公式〉$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+2x)}{x}$

(福井大 2012) (m20122403)

0.244 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \left(\dfrac{\log_e x}{x}\right)^5$

(2) $y = x^x$

(福井大 2012) (m20122404)

0.245 不定積分を求めよ．

$$\int \log_e x \, dx$$

(福井大 2012) (m20122405)

0.246 次の値を求めよ．

(1) $\dfrac{a^{\frac{5}{6}}b^{-\frac{1}{3}}\left(b^{-\frac{3}{2}}\sqrt{a^2b}\right)^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{2}}b^{-2}}$ ， ただし，a, b は正の数とする．

(2) $\log_5 \sqrt[8]{5}$

(3) $\dfrac{\log_5 8 \cdot \log_3 6 \cdot \log_2 3}{\log_5 3 + \log_5 2}$

(福井大 2012) (m20122414)

0.247 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \sqrt{4\sin x + 6}$

(2) $y = \log \sqrt[5]{\dfrac{x+5}{x-5}}$

(3) $y = -\tan^5 x$

(4) $y = \sin^5 x + \cos^5 x$

(福井大 2012) (m20122417)

0.248 次の設問に答えよ．

(1) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{729}}$ の値を求めよ．

(2) $4\log_2\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\log_2 3 + \log_2\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ の値を求めよ．

(3) $\log_{10} E(M) = 1.5M + 11.8$ の時，$E(7)$ および $\dfrac{E(9)}{E(7)}$ の値を求めよ．

(福井大 2013) (m20132415)

0.249 次の設問に答えなさい．

(1) 等比数列 $2, 6, 18, 54, \cdots$ がある． この数列の何項までの和をとれば，初めて 10000 を超えるか．ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

(2) n を自然数とするとき $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$ を証明しなさい．

(福井大 2013)　　(m20132416)

0.250 次の関数を不定積分せよ．

(1) $\dfrac{(x^2+1)^2}{x^3}$　　(2) $x^n \log_e x$

(福井大 2014)　　(m20142405)

0.251 $y = \log x$ $(1 \leqq\ x \leqq\ e)$ と x 軸の囲む部分を，x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積を求めよ．

(福井大 2014)　　(m20142406)

0.252 以下の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{2}} dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x} dx$　　(2) $\displaystyle\int e^x \cos x dx$

(福井大 2014)　　(m20142423)

0.253 次の関数の導関数を求めよ．

(1) $y = x^{\sin x} \quad (x > 0)$　　(2) $y = \log(\sin^2 x)$

(福井大 2015)　　(m20152402)

0.254 次の関数のマクローリン展開を x^4 の項まで求めよ（計算過程も示せ）．

$\log(1+x)$

(福井大 2015)　　(m20152403)

0.255 次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $y = \dfrac{1-x}{x^2}$　　(2) $y = \log(x+2)$

(福井大 2015)　　(m20152416)

0.256 $\displaystyle\int a^x dx = \frac{1}{\log a} a^x + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$ となることを示せ．ただし C は積分定数である．

(福井大 2018)　　(m20182402)

0.257 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \left(\dfrac{4x+3}{x^2-3x+4}\right)$　　(2) $y = \sin^5 x\ \cos 5x$

(3) $y = \log(1+x^2)$　　(4) $y = e^{\sqrt{x}}$

(福井大 2020)　　(m20202423)

0.258 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^e x^2 \log x dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 2x dx$

(福井大 2020)　　(m20202425)

0.259 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \log x(5-x)$

(2) $y = \dfrac{4x-1}{e^x}$

(3) $y = \dfrac{\sin x}{\cos x + 1}$

(4) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}+2x}$

(福井大 2021)　　(m20212420)

0.260 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \log\left(5\sqrt{x^2+1}+5x\right)$　　(2) $y = \dfrac{-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(3) $y = \cos\dfrac{5\pi}{x^2+5}$　　(4) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(福井大 2022)　　(m20222401)

0.261 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{4e^x}{(4e^x+2)^2}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x\log 3x}$

(福井大 2022)　　(m20222402)

0.262 次の関数を x について微分せよ.

(1) $y = \log(x - x\log x)$　　(2) $y = x^{e^x}$

(福井大 2022)　　(m20222413)

0.263 関数 $f(x) = \log(2x+3)$ の第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．また，関数 $f(x)$ のマクローリン級数の最初から 5 項を求めよ.

(静岡大 2004)　　(m20042502)

0.264 次の問に答えよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + \dfrac{1}{x}$ を解け.　　(2) $(2x+y)+(x+2y)\dfrac{dy}{dx} = 0$ を解け.

(3) $x\dfrac{dy}{dx} - y = x\log x$ を解け.

(静岡大 2005)　　(m20052506)

0.265 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}$ を求めよ.

(静岡大 2006)　　(m20062501)

0.266 2 変数関数 $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ の第 2 次偏導関数をすべて求めよ.

(静岡大 2006)　　(m20062502)

0.267 以下の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\int_1^5 \frac{\log x}{x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{5+x^2}$

(3) $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)\,dxdy\ ,\quad D = \{(x,y)\mid 4\le x^2+y^2\le 9\}$

(静岡大 2008)　　(m20082502)

0.268 $y = x^{x\cos(x)}$ とするとき，$y' = x^{x\cos(x)}\{(\cos(x) - x\sin(x))\log(x)+\cos(x)\}$ が成り立つことを証明しなさい.

(静岡大 2009)　　(m20092509)

0.269 次の 2 重積分を求めよ. また, 積分領域 D を図示せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+1}\,dxdy$, $D = \{(x,y)\ :\ x-1 \leqq\ y \leqq\ 1-x\ ,\ 0 \leqq\ x\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)\,dxdy$, $D = \big\{(x,y)\ :\ 1 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ e^2\big\}$

(静岡大 2010) (m20102502)

0.270 次の関数 f のマクローリン (Maclaurin) 展開 $\left(f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)$ を求めよ.

(1) $f(x) = e^{x^2}$ (2) $f(x) = \log(2+x)$ $(-2 < x < 2)$

(静岡大 2012) (m20122504)

0.271 次の微分方程式 ① および ② について以下の問いに答えよ.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = x \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) 微分方程式 ① の一般解を求めよ.

(2) $y = \dfrac{x\log x}{2}$ は微分方程式 ② の特殊解であることを示せ.

(3) 微分方程式 ② の一般解を求めよ.

(静岡大 2012) (m20122510)

0.272 次の常微分方程式の一般解 $y = y(x)$ を求めよ．ただし，log は自然対数を表す.

(1) $x\dfrac{dy}{dx} - y = x\log x$ $(x > 0)$ (2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 3y = e^{2x}$

(静岡大 2013) (m20132506)

0.273 次の不定積分，定積分，広義積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-x-2}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \log(1+x)dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$

(岐阜大 2003) (m20032601)

0.274 2 変数の関数 $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ に対して $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ.

(岐阜大 2003) (m20032602)

0.275 $f(x,y) = \log(e^{x-y} + e^{xy})$ とおく．ただし，対数は自然対数である．f の 2 階偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ を求めよ.

(岐阜大 2007) (m20072601)

0.276 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{2x}$ の極限値を求めよ.

[ヒント ： $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_e(1+x) = 1$ を用いても良い.]

(岐阜大 2007) (m20072607)

0.277 次の関数について，$\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ. $z = \sin(2x)\cos(y)$, $x = e^{-2t}$, $y = \log_e 3t$

(岐阜大 2007) (m20072609)

0.278 関数 $\log x$ を $x=a$ のまわりで，Taylor 展開せよ．ここで，a は正の実数である．

(岐阜大 2007) (m20072613)

0.279 関数 $\log(\sin^2 t+1)$ を t に関して微分せよ．

(岐阜大 2007) (m20072615)

0.280 次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ (2) $\displaystyle\int_1^e \log x dx$

(岐阜大 2007) (m20072623)

0.281 (1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log_e x=0$ となることを示しなさい． (2) $\displaystyle\int_0^1 \log_e x\,dx$ を求めなさい．

(岐阜大 2008) (m20082608)

0.282 $f(x)=x\log x\ \ (x>0)$ とするとき, 以下の問いに答えよ. ただし, $\log x$ は x の自然対数である.

(1) x を未知変数とする方程式 $f(x^2)=f(x)$ を解け.

(2) $y=f(x)$ のグラフの概形を凹凸も考慮して描け.

(3) 不等式 $2f(x)\leqq -\log 2$ を満たす x の範囲を求めよ.

(4) 関数 $y=2f(x)$ と直線 $y=-\log 2$ のグラフで囲まれる図形の面積 S を求めよ.

(岐阜大 2010) (m20102601)

0.283 重積分

$$I=\iint_D x\log(x^2+y^2)\,dxdy\ , \qquad D\ :\ x\geqq\ 0,\ 1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 4$$

の値を求めよ．ただし，log は自然対数を表す．

(岐阜大 2011) (m20112602)

0.284 次の極限を求めよ． $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)-2x}{x^2}$

(岐阜大 2017) (m20172601)

0.285 $a=\log 2$ とし，関数 f と g を

$$f(x)=ax-a-\log x$$
$$g(x)=x^2-ae^x$$

で定義する．ただし，log は e を底とする自然対数である．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ と $g(x)$ の導関数を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の閉区間 $[1,\ 2]$ における最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ．

(3) 次の累次積分 I の積分順序を変更せよ:

$$I=\int_1^2\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\sin(g(y))dy\right)dx\ ,$$

ただし,

$$\alpha(x)=ax$$
$$\beta(x)=a+\log x$$

とする．

(4) I の値を求めよ．

(岐阜大 2018)　　(m20182602)

0.286　$x+y=2$ のとき， $\log_{10} x+\log_{10} y$ の最大値を求めよ．

(豊橋技科大 1996）　　(m19962702)

0.287　以下の文章の空欄に適当な式を記入せよ．

(1)　連続関数 $f(x)$ の微分は次の公式で定義される．

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{\ 1\ }-f(x)}{h}$$

この公式に基づき e^x の微分を求めよう．

$$(e^x)'=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{\ 2\ }}{h}$$

ここで， $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$ と展開できることを利用すると，

$$(e^x)'=e^x\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{h}{1!}+\frac{h^2}{2!}+\cdots+\frac{\boxed{\ 3\ }}{n!}+\cdots\right)$$

$$=e^x\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\cdots+\frac{\boxed{\ 4\ }}{n!}+\cdots\right)$$

$$=\boxed{\ 5\ }$$

と求まる．

(2)　x^x の微分を次の手順で求めよう．ただし， $x>0$ とし，また自然対数を $\log$ で表すものとする．

$y=x^x$ の両辺の対数をとると，

$$\log y=\boxed{\ 6\ }$$

この式の両辺を x で微分すると，

$$\boxed{\ 7\ }=\boxed{\ 8\ }+x\cdot\frac{1}{x}=\boxed{\ 9\ }+1$$

この式から， y' を x で表すと，

$$y'=\boxed{\ 10\ }$$

と求まる．

(豊橋技科大 1997）　　(m19972703)

0.288　$x>0$ であるとき，以下の不等式が成り立つことを示せ．ただし，$\log$ は自然対数を表す．

(1)　$\log(x+1)<x$

(2)　$\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-1<\displaystyle\int_0^x\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt$

(豊橋技科大 1998)　　(m19982708)

0.289　以下は微分方程式の解き方のあらすじである．それについて以下の (1)〜(3) の各問に答えよ．

次の方程式を満たす y を求める．

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)\qquad\text{（イ）}$$

$P(x)$, $Q(x)$ は， x のみの関数である．まず u , v を x の関数として，

$$y=uv\qquad\text{（ロ）}$$

とおく．ここで

$$v = e^{-\int P(x)dx} \qquad （ハ）$$

とすると

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0 \qquad （ニ）$$

となる．次に du/dx を求め，これを $F(x)$ とすると

$$\frac{du}{dx} = F(x) \qquad （ホ）$$

これから

$$u = \int F(x)dx + C \quad (C \text{ は任意定数}) \qquad （ヘ）$$

と書けるので，y が求まる．

(1) （イ）（ロ）（ハ）を用いて

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0$$

であることを示せ．

(2) （イ）（ロ）（ハ）を用いて du/dx を求めることにより，$F(x)$ を $P(x)$，$Q(x)$ で表せ．

(3) $x\dfrac{dy}{dx} + y = \log x$ を満たす y を求めよ．ただし，$\log$ は自然対数を表す．

(豊橋技科大 1999）　(m19992705)

0.290 次の等式を (1),(2) に従って証明せよ．ただし，$a > 0\ (a \neq 1)$，$b > 0\ (b \neq 1)$，$Q > 0$ とせよ．

$$\log_a Q = \frac{\log_b Q}{\log_b a}$$

(1) $x = \log_a Q$ のとき，Q を指数関数で表現せよ．

(2) 上で求めた式の両辺に対して，底を b とする対数をとることで，$\log_a Q = (\log_b Q)/(\log_b a)$ になることを示せ．

(豊橋技科大 2003)　(m20032701)

0.291 (1) 次の関数の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}\right)$

(2) 次の関数を微分せよ．ただし，$x \neq 0$ とする．　$\exp\left(-\sin\dfrac{1}{x}\right)$

(3) 次の関数を微分せよ．ただし，$x \pm a \neq 0$ とする．　$\log\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$

(豊橋技科大 2009)　(m20092701)

0.292 (1) 次式が成り立つような定数 a の値を求めよ．

$$\lim_{x\to\infty}\left(x + a - \sqrt{x^2+x+1}\right) = 1$$

(2) 次の関数を微分せよ．

$$f(x) = \log\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$$

(豊橋技科大 2011)　(m20112705)

0.293 次の偏微分を計算せよ．

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log(xy) \qquad \left(x > 0,\ y > 0\right)$$

(豊橋技科大 2021)　(m20212702)

0.294 $f(x), g(x)$ を区間 $[a, b]$ 上の連続関数とするとき，$[a, b]$ における部分積分法を $f(x), g(x)$ を用いて説明せよ．次に，$[0, 1]$ における $x\log(1+x)$ の定積分の値を求めよ．

(名古屋大 2000） (m20002802)

0.295 関数 $f(x) = \dfrac{\log(x+1)}{x+1}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，$x > -1$ とする．

(1) $f(x)$ の x に関する一次微分および二次微分を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{e-1} f(x)dx$ を計算せよ．ただし，e は自然対数の底である．

(3) $f(x)$ の増減表を作成し，$y = f(x)$ のグラフの概略を図示せよ．

(名古屋大 2007) (m20072802)

0.296 3 人がジャンケンを行い，一人だけが勝ったときに終了するものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 1 回で終了する確率を求めよ．

(2) ちょうど n 回目のジャンケンで，終了する確率 $P(n)$ を求めよ．

(3) n 回以内に終了する確率を求めよ．

(4) n 回以内に終了する確率が 50% 以上となる回数 n を求めよ．
ただし，$\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$, $\log_{10} 5 = 0.699$ とする．

(5) (2) の確率 $P(n)$ に回数を乗じ，これの N 回目までの和，すなわち，$\displaystyle\sum_{n=1}^{N} nP(n)$ を求めよ．

(6) (5) の N を無限大としたときの値を求めよ．

(名古屋大 2007) (m20072803)

0.297 以下の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx$ （ m, n は負でない整数 ）

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$ （ ヒント：$x = \tan\theta$とおけ. また，$\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right)$ である.）

(名古屋大 2011) (m20112803)

0.298 $\log x$ は自然対数とし，次の不定積分を求めよ． $\displaystyle\int x \log x dx$

(名古屋大 2018) (m20182803)

0.299 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$ の値を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx$ の値を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\, dx$ の値を求めよ．

(4) $I_n = \displaystyle\int (\log x)^n \, dx$ の漸化式を導き，I_3 を求めよ．なお，n は 0 以上の整数とする．

(名古屋大 2022) (m20222803)

0.300 (1) $f(x) = \log(1+x)$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(2) $\log(1+x)$ を x のべき級数（マクローリン級数）に展開した式を書き，その収束半径を求めよ．

(名古屋工業大 1997） (m19972901)

0.301 N を正の数として, xyz 空間の部分集合

$$T_N = \{(x,y,z)\,|\,x+y+z=N\,,\ 0<x,y,z<N\}$$

を考える. そして, 正の数 p,q,r を用いて関数

$$f_{p,q,r}(x,y,z) = \left(\frac{p}{x}\right)^x \cdot \left(\frac{q}{y}\right)^y \cdot \left(\frac{r}{z}\right)^z$$

を T_N 上で定義する.

(1) $f_{p,q,r}$ の自然対数として定義される関数

$$\log_e f_{p,q,r}(x,y,z)$$

の極値を, ラグランジュの未定乗数法を用いて求めよ.

(2) T_N 上で定義された関数 $f_{p,q,r}$ は, T_N 上のある点 (x,y,z) において最大値をとる事が知られている. この事を用いて, $f_{p,q,r}$ の最大値を求めよ.

(名古屋工業大 2005) (m20052901)

0.302 (1) 級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$ を求めよ.

(2) $\log(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{n} + \cdots\ ,\ \ -1<t\leq 1$ を利用して,
関数 $f(x) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+x}{3-x}\right)$ を $x-1$ のべき級数に展開せよ.

(名古屋工業大 2006) (m20062905)

0.303 (1) $x>0$ で定義された関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ の最大値を求めよ.

(2) (1) を利用して, π^e と e^π の大小関係を調べよ.

(名古屋工業大 2007) (m20072901)

0.304 次の 2 重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \log(x+y)dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\ |\ 0\leqq\ x\leqq\ 1,\ 1\leqq\ y\leqq\ 2\}$$

(名古屋工業大 2012) (m20122905)

0.305 $\log(1+x)$ のマクローリン級数展開を利用して $\log(3+3x-6x^2)$ のマクローリン級数展開を求めよ. (収束する範囲は求めなくてよい.)

(名古屋工業大 2015) (m20152901)

0.306 関数 $f(x,y) = \log(x^2+y^2+1) + \dfrac{2}{3}(x+y)$ の極値を求めよ.

(名古屋工業大 2021) (m20212902)

0.307 xy 平面上で, $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフと y 軸, 直線 $y=1$, 直線 $y=2$ で囲まれる領域を D とする. このとき, 次の重積分を計算せよ.

$$\iint_D (\log y)^2 dxdy$$

(名古屋工業大 2022) (m20222904)

0.308 関数 $\log x$ の $x=1$ を中心とするテイラー展開（無限和による表示）を求めよ．収束に関しては調べなくてよい．

(名古屋工業大 2023)　　(m20232901)

0.309 次の各不等式を解け．

(1) $\log_{\sqrt{a}}(x-5) < \log_a(x-2)$　ただし，a は 1 でない正の定数とする．

(2) $x^{\log x} > \dfrac{1000}{x^2}$　（対数の底は 10）

(三重大 2004)　　(m20043101)

0.310 以下の (1)〜(3) の設問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log_e x}{x^2}dx$　の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta}{\sin\theta + \cos\theta}d\theta$　の値を求めよ．

(3) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

$f(x) = 2\cdot x - \displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cdot\cos t\cdot dt$

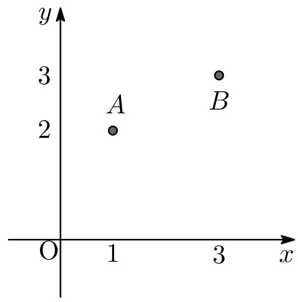
(三重大 2005)　　(m20053112)

0.311 xy 平面上の曲線 $y=f(x)=a\,\log(x+1)$ が 2 点 $A(1,2)$，$B(3,3)$ のできるかぎり近傍を通るように a の値を定めたい．次の (1)〜(3) の問に答えなさい．ただし，a は実数，log は自然対数の演算を表すものとする．

(1) A と点 $(1,f(1))$ との距離の二乗および B と点 $(3,f(3))$ との距離の二乗の合計を $g(a)$ とする時，$g(a)$ を a で表しなさい．

(2) $g(a)$ が最小となるような実数 a の値を求めなさい．

(3) $g(a)$ が最小となる時の $f(x)$ の曲線を右上の図に描き入れなさい．



(三重大 2006)　　(m20063106)

0.312 (1) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ の第 n 次導関数を求めなさい．ただし，n は正の整数とする．

(2) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ のマクローリン級数とその収束半径を求めなさい．

(3) (2) の結果を用いて，$g(x)=\log(1+x)$ のマクローリン級数とその収束半径を求めなさい．

(三重大 2006)　　(m20063111)

0.313 正の整数 N を 8 進数で表した時，n 桁の数になったとする．

(1) N の取り得る最大値と最小値（例えば，$n=2$ に限れば，$8 \leqq N \leqq 63$）を n を用いて表せ．（答のみの記載でも良い）

(2) (1) の結果を用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log_2 N}{n}$ を求めなさい．（途中経過を，詳しく答案用紙に記載せよ．）

(三重大 2006)　　(m20063114)

0.314 以下の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^e \log_e x dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$

(三重大 2007)　　(m20073108)

0.315 次の関数を x と y についてそれぞれ偏微分しなさい. ただし, $x>0,\ y>0,\ y\neq 1$ とする.

$$f(x,y)=\log_y x$$

(三重大 2010) (m20103106)

0.316 以下の関数を微分せよ.

(1) $y=\sin^2 x$ (2) $y=\dfrac{1}{(2x-3)^3}$ (3) $y=\log 3x$

(三重大 2010) (m20103113)

0.317 以下の不定積分を求めよ. 積分定数は C とする.

(1) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{\sqrt{x}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \sin(\log x)\,dx$

(三重大 2010) (m20103114)

0.318 定積分の値を求めよ. 自然対数は log で表す.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\,\sin x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^2-1}{x}\,dx$

(三重大 2011) (m20113103)

0.319 次の関数のマクローリン級数とその収束半径を求めなさい.

$$f(x)=\log(1+x)$$

(三重大 2012) (m20123104)

0.320 次の関数を微分せよ.

(1) $y=\sqrt{x^2+1}$ (2) $y=(x+1)(x+2)(x+3)$ (3) $y=\sin\sqrt{x^2+x+1}$

(4) $\log\dfrac{1+x}{1-x}$ (5) $y=\log_a(x^2-1)\quad(a>0\,,\ a\neq 1)$

(三重大 2012) (m20123111)

0.321 以下の関数を微分せよ.

(1) $y=\dfrac{3x-2}{x^2+1}$ (2) $y=\sqrt{2x^2-3}$ (3) $y=e^x\sin x$

(4) $y=\dfrac{1}{\tan x}$ (5) $y=\log(x^2+1)$

(三重大 2012) (m20123116)

0.322 以下の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \sqrt{2x-3}\,dx$ (2) $\displaystyle\int x^2\sin x\,dx$ (3) $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx$

(三重大 2012) (m20123117)

0.323 $y=x\log x$ のとき, y' を求めよ. ただし, $y'=\dfrac{dy}{dx}$ であり, log は自然対数である.

(三重大 2013) (m20133102)

0.324 変数 x に関する関数を微分せよ.

(1) $y=\dfrac{x^2}{1-x}$ (2) $y=x\log_e x$ (3) $y=x^2\sin 2x$

(三重大 2013) (m20133110)

0.325 次の関数を微分せよ.

(1) $y=(3x-1)^3$　　(2) $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$

(3) $y=\log_e\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$　　(4) $y=\dfrac{2e^x+1}{e^x+1}$

(三重大 2014)　　(m20143106)

0.326 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{(x+1)(x+2)}$　　(2) $\displaystyle\int_0^2\frac{x\log_e(1+x^2)}{1+x^2}dx$

(三重大 2014)　　(m20143107)

0.327 次の関数の x に関する導関数 y' を求めよ.

(1) $y=x^3e^{-2x}$　　(2) $y=x\log_e\dfrac{1}{x}$　　(3) $y=x^{\sin x}$

(三重大 2015)　　(m20153105)

0.328 $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x}dx=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$ (C は定数) を証明せよ.

(三重大 2016)　　(m20163104)

0.329 次の関数を微分せよ.

(1) $y=\dfrac{\sin x-x\cos x}{x\sin x+\cos x}$　　(2) $y=\sqrt{x^2+3x+2}$　　(3) $y=x^{\log_e x}$

(三重大 2016)　　(m20163109)

0.330 (1) 曲線 $y=\log_e x$ 上の点 (1, 0) における接線が曲線 $y=ae^x$ の接線でもあるとき，定数 a の値を求めよ.

(2) この接線，曲線 $y=ae^x$，および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(三重大 2016)　　(m20163112)

0.331 広義積分 $\displaystyle\int_0^1(\log x)^2dx$ の値を求めよ.

(三重大 2016)　　(m20163116)

0.332 次の関数の与えられた範囲内での最大値と最小値を求めなさい．ただし，log の底は e とする.

$$y=\frac{4\log x}{3x}\qquad(x\geqq 1)$$

(三重大 2017)　　(m20173104)

0.333 次の不定積分および定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle y=\int x\log_e x\ dx$　　(2) $\displaystyle y=\int_1^3\frac{2x^2+5x+4}{x^2}dx$

(三重大 2017)　　(m20173110)

0.334 (1) 関数 $f(x)=\log(1-x)$ を $x<1$ において定義する．任意の自然数 n に対して，下の式が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明しなさい．ここで，$\log x$ は実数 x の自然対数を表すとする.

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x)=-\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

(2) 関数 $g(x,y)$ について，$m\geqq 0$，$n\geqq 0$，$m+n>0$ の条件を満たす任意の整数 m，n に対して式 ㋐ が成り立つとする．また，式 ㋑ が成り立つとする.

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}g(x,y)=g(x,y)\cdots\cdots\cdots ㋐$$

$$g(0,0) = e \cdots\cdots\cdots ㋑$$

なお，$m=0$ のとき式 ㋐ は以下の式を表すものとする．

$$\frac{\partial^{0+n}}{\partial x^0 \partial y^n} g(x,y) = \frac{\partial^n}{\partial y^n} g(x,y) = g(x,y)$$

また，$n=0$ のとき式 ㋐ は以下の式を表すものとする．

$$\frac{\partial^{m+0}}{\partial x^m \partial y^0} g(x,y) = \frac{\partial^m}{\partial x^m} g(x,y) = g(x,y)$$

(a) $g(x,y) = u(x)w(y)$ とおく．任意の自然数 m に対して以下の式が成り立つことを示しなさい．ここで，$u(x)$ は変数 x に関する関数，$w(y)$ は変数 y に関する関数とする．

$$\frac{d^m}{dx^m} u(x) = u(x)$$

(b) 関数 $g(x,y)$ を求めなさい．

(三重大 2018)　　(m20183104)

0.335　次の関数を微分せよ．

(1) $y = 5^{-2x}$　　(2) $y = \sin^4 x \cos^4 x$　　(3) $y = x^{\log x}$

(4) $y = \dfrac{(x-1)\cdot\sqrt[3]{3x+1}}{\sqrt{(2x+5)^3}}$　　(5) $y = \log_a(2x^2-4)\quad (a>0,\ a \neq 1)$

(三重大 2018)　　(m20183106)

0.336　次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^e (\log x)^2 dx$

(三重大 2018)　　(m20183107)

0.337　曲線 $y = \dfrac{\log x}{x}$ の極値及び変曲点を求め，この曲線の概形を書け．

(三重大 2018)　　(m20183113)

0.338　次の関数を微分せよ．（e は自然対数の底である.）

(1) $y = x^2 e^x$　　(2) $y = \sqrt{\cos 2x}$

(3) $y = \log_e(1-e^{-x})$　　(4) $y = \sqrt{\dfrac{x}{(x+1)^5}}$

(三重大 2020)　　(m20203101)

0.339　次の関数 $f(x)$ の増減を調べて極値と変曲点を示し，グラフの概形を描け.（e は自然対数の底である.）

$$f(x) = x(\log_e x - 1)^2 \qquad (x>0)$$

(三重大 2020)　　(m20203103)

0.340　$x>0$ において，$h(x) = \log \alpha^x - \log x^\alpha$ と定義する．ここで，α は正の実数とする．任意の正の実数 x に対して，$x^\alpha \leqq \alpha^x$ となる正の実数 α を求めなさい．

(三重大 2020)　　(m20203112)

0.341　p の関数

$$f(p) = p \log \frac{p}{q} + (1-p) \log \frac{1-p}{1-q}$$

について，以下の問に答えなさい．ただし，定義域は $0<p<1$ とし，q は $0<q<1$ を満たす定数とする．また，log は自然対数を表す．

① p の関数 $f(p)$ の最小値を求めなさい.

② 右側極限値 $\lim_{p \to +0} f(p)$，および，左側極限値 $\lim_{p \to 1-0} f(p)$ を求めなさい.

③ p の関数 $f(p)$ の変曲点の有無を，理由を説明して答えなさい.

④ 問 ①, ②, ③ の結果を用いて，$q = 1/2$ に固定したとき，$f(p)$ のグラフの概形を描きなさい．ただし，必要であれば $\log 2$ の近似値として 0.7 を使ってもよい.

(三重大 2022)　　(m20223101)

0.342　次の極限値は存在しますか．存在する場合はその極限値を求めなさい.

(1) $\lim_{x \to +0} x \log x$　　(2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

(奈良女子大 2001)　　(m20013202)

0.343　次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2(nx)dx$　（n は正の整数）　(2) $\displaystyle\int_0^1 \log x\, dx$

(奈良女子大 2001)　　(m20013204)

0.344　次の関数の導関数を求めよ.

(1) $y = \log(x + \sqrt{x^2 + a^2})$，ただし, a は定数である.

(2) $y = \dfrac{x+3}{x^2 - 1}$

（奈良女子大 2004）　　(m20043201)

0.345　開区間 $(0, 1)(= \{x \,|\, 0 < x < 1\})$ 上の関数

$$f(x) = -x \log x$$

に対して次の問に答えよ.

(1) $0 < a < 1$ のとき微分係数 $f'(a)$ を求めよ.

(2) $(0, 1)$ における関数 $f(x)$ の最大値を求めよ.

(3) $0 < a < 1$ のとき $f(a^2) = 2af(a)$ が成り立つことを示せ.

(4) $\lim_{a \to +0} f(a^2) = 0$ が成り立つことを示せ.

(5) $(0, 1)$ における関数 $f(x)$ のグラフの概形を描け.

(6) $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 f(x)dx$ を求めよ.

(奈良女子大 2005)　　(m20053203)

0.346　a を正の定数とする．$xy-$ 平面上の 2 つの曲線

$$C_1 \;:\; y = -\frac{x^2}{2} + a \quad (-\infty < x < \infty),$$
$$C_2 \;:\; y = -\log x \quad (\ x > 0\ )$$

について考える．いまこれらの曲線はただ 1 つの共有点を持つとする．次の問いに答えよ.

(1) a の値を求めよ.

(2) 直線 $y = a$ と C_2 の交点の座標を求めよ.

(3) C_1 , C_2 と直線 $y = a$ で囲まれる図形の面積を求めよ.

(奈良女子大 2007)　　(m20073203)

0.347 xy平面上の曲線

$$C\ :\ y=\log x\ \ (x>0)$$

と，原点を通り C に接する直線 ℓ に対して，次の問に答えよ．

(1) 曲線 C と直線 ℓ の接点の座標を求めよ．

(2) 曲線 C，直線 ℓ および直線 $x=1$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(奈良女子大 2011)　　(m20113203)

0.348 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax}dx \quad (a>0)$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \log x\,dx \quad (\alpha>-1)$

(奈良女子大 2011)　　(m20113205)

0.349 $xy-$ 平面上の曲線

$$C: y=\log(1+x^2)\ \ (x \geqq\ 0)$$

および C 上の点 $(3,\ \log 10)$ における C の接線 ℓ に対して，次の問に答えよ．だだし，対数は自然対数とする．

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C の概形をかけ．

(3) 曲線 C，接線 ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(奈良女子大 2015)　　(m20153208)

0.350 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$ を求めよ．

(2) 関数 $y=\log\sqrt{1-x^2}$ を微分せよ．ただし，x は実数で $|x|<1$ とする．

(奈良女子大 2016)　　(m20163204)

0.351 関数 $f(x)=\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ $(-1<x<1)$ を $x=0$ の近傍でテイラー展開し，x の 3 乗の項まで求めよ．

(奈良女子大 2019)　　(m20193205)

0.352 時間 t $(t\geq 0)$ で関数 $x(t)$ についての次の微分方程式を考える．

$$\frac{dx(t)}{dt}=a\left(f(t)-x(t)\right)$$

ここで a は正の実数で，$f(t)$ は与えられた実関数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $a=\log_e 2$ で，$t\geq 0$ で $f(t)=0$ である場合に，$x(0)=1$ をみたす解 $x(t)$ を求めよ．

(2) 一般に時間が十分に経った後の解は，$x(0)$ の値に関係なく

$$x(t)=a\int_0^t f(u)e^{a(u-t)}du$$

に近づくことを示せ．

(3) 次に，$a=\log_e 2$ で，関数 $f(t)$ が 0 以上の任意の整数 n について

$$f(t)=\begin{cases}1 & (2n\leq t<2n+1)\\ 0 & (2n+1\leq t<2n+2)\end{cases}$$

であ場合を考える．整数 N が十分大きくなったときに $x(2N)$ が近づく値を求めよ．

(奈良女子大 2022)　　(m20223208)

0.353 (1) $|x|<1$ として，次式を証明せよ．

$$\log_e \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\cdots\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots\right)$$

(2) $\log_e \dfrac{3}{2}$ ，$\log_e 2$ ，$\log_e 3$ を小数第 3 位まで求めよ．

(京都大 1995） (m19953301)

0.354 任意の関数 $y=f(x)$ がある区間 I で微分可能であるとき，I の各点に対して次式で定義される y' を関数 y の導関数と呼び, 導関数を求めることを関数 y を微分するという.

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(1) 上の定義式を用いて, 次の関数の導関数を求めよ.

$$y=\log x \qquad\qquad (x>0)$$

(2) 今関数 $f(x)$ と $g(x)$ は微分可能であるとする. この時, 上の導関数の定義式を用いて, 次の事を示せ.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

但し, $g(x)\neq 0$ とする.

（京都大 2004） (m20043301)

0.355 有限のシンボル集合 $A=\{a_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$, $B=\{b_j \mid j=1,2,\cdots,m\}$ を考え, 各シンボルの生起確率を $P(a_i)$, $P(b_j)$ とする. これらのシンボル集合に対して条件付き確率 $P(a_i/b_j)$, $P(b_j/a_i)$, 同時生起確率 $P(a_i,b_j)$ をもとにして，$H(A), H(B), H(A/B), H(A,B), I(A,B)$ を以下のように定義する.

$$H(A)=\sum_i^n P(a_i)\log\frac{1}{P(a_i)}$$

$$H(B)=\sum_j^m P(b_j)\log\frac{1}{P(b_j)}$$

$$H(A/B)=\sum_j^m\sum_i^n P(a_i,b_j)\log\frac{1}{P(a_i/b_j)}$$

$$H(A,B)=\sum_j^m\sum_i^n P(a_i,b_j)\log\frac{1}{P(a_i,b_j)}$$

$$I(A,B)=H(A)-H(A/B)$$

この時, 次の問に答えよ.

(1) $I(A,B)=\displaystyle\sum_j^m\sum_i^n P(a_i,b_j)\log\frac{P(a_i,b_j)}{P(a_i)P(b_j)}$ となることを示せ.

(2) $H(A,B)=H(A)+H(B)-I(A,B)$ となることを示せ.

(3) $I(A,B)\geq 0$ となることを示せ.

(京都大 2004) (m20043304)

0.356 (1) 複素数 w に対して，級数

$$\frac{1}{1+w}=\sum_{n=1}^{\infty}(-w)^{n-1}\ , \quad (|w|<1)\ \cdots ①$$

の両辺を $w=0$ から $w=z$ まで積分することで，複素関数 $\mathrm{Log}(1+z)$ を $z=0$ において，
テイラー展開せよ．ただし，$\mathrm{Log}(1+z)$ は $-\pi<\mathrm{Im}\log(1+z)\leq\pi$ なる $\log(1+z)$ の主値を表す．
級数 ① の項別積分可能性は明らかとしてよい．

(2) 任意の複素数 z について

$$\lim_{n\to\infty} n\mathrm{Log}\left(1+\frac{z}{n}\right) = z \ \cdots②$$

を示せ.

(3) ② を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$ を示せ.

(京都大 2006) (m20063307)

0.357 $x>0$ に対して $\displaystyle\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ と定義して，$\log x$ の性質を定積分の性質から導きたい．(1)〜(2) に答えよ.

(1) 定積分の性質を用いて，等式 (a)〜(d) を示せ.

(a) $\log x_1x_2 = \log x_1 + \log x_2$ $(x_1, x_2 > 0)$

(b) $\log x^{\frac{n}{m}} = \dfrac{n}{m}\log x$ (m, n は正整数)

(c) $\log e = 1$ $\left(e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$

(d) $\dfrac{d}{dx}\log x = \dfrac{1}{x}$

(2) 上で定義した $\log x$ の逆関数を $\exp(x)$ とするとき，以下の等式 (e)〜(h) を示せ.

(e) $\exp(x_1+x_2) = \exp(x_1)\exp(x_2)$

(f) $\exp(1) = e$

(g) $\exp\left(\dfrac{n}{m}\right) = e^{\frac{n}{m}}$ (m, n は正整数)

(h) $\dfrac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x)$

(京都大 2008) (m20083301)

0.358 次の (1)〜(6) に答えよ．ただし，log は自然対数を表す.

(1) k を自然数とし，$f(x)$ を $k \leqq x \leqq k+1$ で連続な狭義単調減少関数とする．このとき，不等式

$$\int_k^{k+1} f(x)dx < f(k)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $n = 1, 2, \cdots$ に対して，$\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ とおく．$S_n > \log(n+1)$ が成り立つことを示せ.

(3) (2) で定義した S_n に対し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ.

(4) $x>1$ において関数 $g(x) = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は狭義単調減少であることを示せ.

(5) k を 3 以上の自然数とする．(4) で定義した関数 $g(x)$ に対し，不等式

$$g(k) < \frac{1}{\log(k-1)} - \frac{1}{\log k}$$

が成り立つことを示せ.

(6) $n = 2, 3, \cdots$ に対して，$\displaystyle T_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(\log k)^2}$ とおく．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n$ が存在することを示せ.

(京都大 2019) (m20193304)

0.359 (1) 次の積分の値を求めよ.

（イ）$\displaystyle\int_e^3 x^2 \log_e x\ dx$　　（ロ）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x\ dx$　　（ハ）$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2+x}{4x^2+1}dx$

(2) 次の広義積分の値を求めよ．

（イ）$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$　　（ロ）$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\log_e(1+x^2)\ dx$

(京都大 2022)　(m20223303)

0.360 $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 1999)　(m19993402)

0.361 $x>0$ での方程式 $x\log x=1$ は唯一つの解をもち，その解は 1 と 2 の間にあることを示せ．

(京都工芸繊維大 2000)　(m20003403)

0.362 $y=x^2\log x$ $(x>0)$ のグラフの概形を描け．ただしグラフの凹凸は考えなくてよい．

(京都工芸繊維大 2001)　(m20013401)

0.363 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right\}$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2003)　(m20033401)

0.364 (1) 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left\{\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-2x\right\}$

(2) 次の不定積分を求めよ．　$\displaystyle\int\frac{x}{x^2+2x+2}dx$

(京都工芸繊維大 2005)　(m20053401)

0.365 (1) α を正の定数とするとき，$\displaystyle\lim_{x\to+0} x^\alpha\log x=0$ を示せ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2008)　(m20083402)

0.366 (1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log\left(1+\frac{3}{x}\right)$ および $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)$ を求めよ．

(2) 積分 $\displaystyle\int_1^\infty\log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)dx$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2011)　(m20113402)

0.367 (1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\cos x)\log(\cos x)$ を求めよ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)\log(\cos x)dx$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2012)　(m20123403)

0.368 極限 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}$ および $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2017)　(m20173402)

0.369 $x>0$ の範囲において，関数 $y=y(x)$ に関する微分方程式

$$(*)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+3y=\frac{8}{x^3}+\frac{13}{x^2}+9\log x$$

を考える．

(1) $(*)$ の解のうち，定数 a, b を用いて $y = \dfrac{a}{x} + b\log x$ と書けるものを 1 つ求めよ．

(2) $(*)$ の解のうち，条件

$$y(1) = 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{dy}{dx}(1) = 0$$

を満たすものを求めよ．

(京都工芸繊維大 2019)　　(m20193404)

0.370 xy 平面の領域 $D = \{(x, y) \mid 0 < x < \infty,\ -\infty < y < \infty\}$ で定義される関数

$$f(x, y) = \log x + \frac{2y^2 + 2y + 1}{2x^2}$$

を考える．

(1) 関数 $f(x, y)$ の 1 次および 2 次の偏導関数をすべて求めよ．

(2) 関数 $f(x, y)$ の極値をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2020)　　(m20203404)

0.371 次のことを証明せよ． $\displaystyle\lim_{x \to 0} x \log x = 0$　　（ヒント：$\log x = -y$ とおき給え．）

(大阪大 1995)　　(m19953503)

0.372 次の広義積分を求めよ．　$\displaystyle\int_0^1 \log x dx$

(大阪大 1995)　　(m19953504)

0.373 次の積分の積分値を求めよ．

$$\iint_D \frac{\log(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}}} dxdy \qquad \text{（ただし，積分領域 } D : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ である．）}$$

(大阪大 1995)　　(m19953505)

0.374 $I_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{(\sqrt{x})^{n-1}}{1 + \sqrt{x}} dx$ に対し，

(1) I_0 , I_1 を求めよ．

(2) $I_n + I_{n-1}$ を求めて，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} I_n = 0$ を示せ．

(3) (1),(2) より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2$ を証明せよ．

(大阪大 1997)　　(m19973502)

0.375 (1) 関数 $f(x)$ は，任意の実数 x に対して 2 次導関数 $f''(x)$ が存在して $f''(x) \geqq 0$ を満たすとする．$x_1 < x_2$ として次の問いに答えよ．

(a) $x_1 < x_3 < x_2$ を満たす任意の x_3 に対して，次の不等式が成立することを示せ．

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqq \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}$$

(b) $0 \leqq \alpha \leqq 1$ を満たす任意の α に対して，次の不等式が成立することを示せ．

$$f\big(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2\big) \leqq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2)$$

(2) $f(x) = \log(1 + \exp x)$ は任意の実数 x に対して，$f''(x) \geqq 0$ を満たすことを示せ．

(3) (1) と (2) の結果を用いて，$0 \leqq \alpha \leqq 1$ を満たす任意の α と任意の正数 y_1, y_2, z_1, z_2 に対して次の不等式が成り立つことを示せ．（ヒント：$x_i = \log y_i - \log z_i$, $i = 1, 2$ とせよ．）

$${y_1}^{\alpha}{y_2}^{1-\alpha} + {z_1}^{\alpha}{z_2}^{1-\alpha} \leqq (y_1 + z_1)^{\alpha}(y_2 + z_2)^{1-\alpha}$$

(大阪大 2002)　　(m20023502)

0.376 以下の設問に答えよ.

(1) $x>0$ の範囲で 3 つの関数 $f(x)=x-1$, $g(x)=\log x$, $h(x)=-\dfrac{1}{ex}$ を考える. ただし, $\log x$ は自然対数, e は自然対数の底である. すべての $x>0$ について, $f(x)\geqq g(x)\geqq h(x)$ を示せ. また, $f(x)\geqq g(x)$, $g(x)\geqq h(x)$ の二つの不等式それぞれについて, 等式の成立する x の値を求めよ.

(2) $a_i>-1\ (i=1,2,3,\cdots)$ をみたす任意の数列 $\{a_i\}$ と任意の n に対して,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)>-\frac{1}{e}$$

を示せ. ただし, $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)$ は n 個の実数 $1+a_1,\cdots,1+a_n$ をかけた数を表す.

(3) $a_i=t\ (i=1,\cdots,n,\ t>-1)$ のとき, $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)$ を最小にする t の値と最小値を n を用いて表せ.

(4) 設問 (2) の不等式で, 右辺の $-\dfrac{1}{e}$ をより大きな数（n によらない）に変えても, $a_i>-1\ (i=1,2,3,\cdots)$ をみたす任意の数列 $\{a_i\}$ と任意の n に対して, この不等式が成立するか. 理由を付けて答えよ.

（大阪大 2004） (m20043505)

0.377 以下の設問に答えよ，ただし $\log x$ は自然対数, e は自然対数の底を表すものとする.

(1) 関数 $y(x)$ に関する微分方程式 :

$$y''+2y'+y=0$$

の一般解を求めよ.

(2) 関数 $z(x)\ (x>0)$ に関する微分方程式

$$x^2z''+3xz'+z=0 \qquad (*)$$

を考える. $x=e^t$, すなわち $t=\log x$ と変数変換したとき $z(e^t)=w(t)$ の満たす微分方程式を求めよ.

(3) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めよ.

(4) $(*)$ の解で更に条件 :

$$z(1)=0\,,\quad \int_1^e z(x)dx=1$$

を満たすものを求めよ.

(大阪大 2005) (m20053505)

0.378 (1) 空間上の直交座標 (x,y,z) を極座標 (r,θ,φ) :

$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta\quad (r>0,\ 0\leq\theta\leq\pi,\ 0\leq\varphi<2\pi)$

に変換するとき，そのヤコビアン（関数行列式）を計算しなさい.

(2) 広義積分 $\displaystyle I(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}}dx\,dy\,dz$

について，$\alpha=\dfrac{1}{2}$ のときの値 $I\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めなさい.

(3) $I(\alpha)$ が収束する α の範囲を求めなさい.

(4) 広義積分 $\quad J(\alpha,\ \beta)=\displaystyle\iiint_B \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha \mid \log(x^2+y^2+z^2) \mid^\beta}\,dx\,dy\,dz$
が収束するような $\alpha,\ \beta$ の満たすべき条件を求めなさい．
ただし，$B=\left\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2<\dfrac{1}{4}\right\}$.

(大阪大 2007) (m20073506)

0.379 常微分方程式

$$4y''(x)+y(x)(4e^{2x}-1)=0 \quad (x\in\mathbb{R}) \qquad (*)$$

を考える．

(1) $t=e^x$ と変換することによって $z(t)=y(\log t)$ に関する常微分方程式を導け．

(2) $z(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^{k+\rho}$ $(\rho\in\mathbb{R},\ c_0\neq 0)$ とおく．この級数を (1) で得られた常微分方程式に代入し係数比較することにより ρ と c_k $(k=1,2,\cdots)$ の間に成立する関係式を導け．また，$\rho=\pm 1/2$ を導け．

(3) $c_1=0$ とする．(2) で得られた関係式から c_k を定め，基本解 $z_1(t),\ z_2(t)$ を求めよ．

(4) $(*)$ の常微分方程式の基本解 $y_1(x),\ y_2(x)$ で

$$e^x(y_1(x)^2+y_2(x)^2)=1 \quad (\forall x\in\mathbb{R})$$

を満たすものを一組求めよ．

(大阪大 2009) (m20093505)

0.380 正の値をとる確率変数 X が確率密度関数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}x^{-1}\exp\left\{-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (x>0,\ \mu\in\mathbb{R},\ \sigma^2>0)$$

をもつとし，$Y=\log X$ とする．

(1) $n=1,2,\cdots$ に対して，Y^n の期待値を $g_n=E[Y^n]$ とする．このとき，

$$g_{n+2}=\mu g_{n+1}+(n+1)\sigma^2 g_n$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n=1,2,\cdots$ のとき，$E[(Y-\mu)^n]$ を求めよ．

(大阪大 2009) (m20093508)

0.381 n を自然数，k を n 以下の自然数とする，n 人の学生が k 個のグループに分かれ，各グループで円状に並ぶときの並び方の総数を $S(n,k)$ と表す．ただし，各グループは 1 名以上の学生を含むものとする．

(1) $S(4,2)=11$ であることを，すべての並び方を列挙することで示せ．ただし，学生を A,B,C,D で表し，A で 1 つのグループ，B,C,D でもう 1 つのグループを構成し，B,C,D がこの順で円状に並ぶことを $\{[A],[B,C,D]\}$ と表すものとする．
なお，$\{[A],[B,C,D]\}$ と $\{[B,C,D],[A]\}$ や $\{[C,D,B],[A]\}$ は同じ並び方を表すが，解答ではこの並び方を表すのにどの形式を用いてもよい．

(2) $S(n,k)=(n-1)S(n-1,k)+S(n-1,k-1)$ が成立することを示せ．ただし，$S(0,0)=1$，各 $i(i\geq 1)$ に対して $S(i,0)=0$ とし，任意の $i,j\,(i<j)$ に対して $S(i,j)=0$ とする．

(3) H_n を

$$H_n=\frac{S(n+1,2)}{n!}$$

とする．H_n を，n を用いて表せ．

(4) 設問 (3) の H_n が，任意の自然数 $n (n \geq 1)$ に対して，

$$\frac{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}{2} < H_n \leq \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$$

を満たすことを示せ．ただし，$\lfloor x \rfloor$ は，x 以下の最大の整数を表すものとする¿

(大阪大 2011)　　(m20113507)

0.382 確率変数 X は 0 または 1 の値をとり $P(X=1) = 1 - P(X=0) = p \ (0 < p < 1)$ であるとする．また，$X = x \ (x = 0, 1)$ が与えられたときの確率変数 Y の条件付き分布がそれぞれ以下の二項分布であるとする（ m は正の整数，$0 < q_0 < q_1 < 1$ ）．

$$P(Y = y \,|\, X = 0) = {}_mC_y {q_0}^n (1 - q_0)^{m-y} \quad (y = 0, 1, 2, \cdots, m)$$

$$P(Y = y \,|\, X = 1) = {}_mC_y {q_1}^n (1 - q_1)^{m-y} \quad (y = 0, 1, 2, \cdots, m)$$

ここで ${}_mC_y = \dfrac{m!}{y!(m-y)!}$ は二項係数である．

(1) $Y = y \ (y = 0, 1, 2, \cdots, m)$ が与えられたとき，$X = 1$ となる条件付き確率 $P(X = 1 \,|\, Y = y)$ を求めよ．

(2) $P(X = 1 \,|\, Y = y) > p$ となるような y の範囲は p によらないことを示せ．

(3) $m = 10,\ q_0 = \dfrac{1}{2},\ q_1 = \dfrac{3}{4}$ のとき，$P(X = 1 \,|\, Y = y) > p$ となるような y の値をすべて求めよ．ただし，$\dfrac{\log 2}{\log 3} = 0.631$ とする．

(大阪大 2011)　　(m20113511)

0.383 以下の設問に答えよ．

(1) 次式を証明せよ．

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x) - \left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}\right)}{x^3} = 0 \qquad (a)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)}{x^2} = 0 \qquad (b)$$

(2) 次式を証明せよ．

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n - \left(1 - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{3n^2}\right)}{\dfrac{1}{n^2}} = 0$$

(3) 問 (1)，問 (2) の結果を用いて，次式を証明せよ．

$$\lim_{n \to \infty} n^2 \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2}\right) \right\} = 0$$

(大阪大 2012)　　(m20123505)

0.384 (1) 常微分方程式

$$x^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + ax\frac{df(x)}{dx} + bf(x) = 0\ , \quad (x > 0)$$

を考える．$t = \log x$ と変数変換したとき $g(t) = f(e^t)$ の常微分方程式を導け．なお a, b は実定数であり，$\log$ は自然対数である．

(2) 常微分方程式

$$x^2\frac{d^2f(x)}{dx^2}+3x\frac{df(x)}{dx}-3f(x)=0\ ,\quad (x>0)$$

を解け.

(3) 常微分方程式

$$x^2\frac{d^2f(x)}{dx^2}+3x\frac{df(x)}{dx}-3f(x)=\log x\ ,\quad (x>0)$$

を解け.

(大阪大 2012) (m20123508)

0.385 実数 x に対し $y=\sinh x=(e^x-e^{-x})/2$ と定義すると $\sinh x$ は逆関数をもつ. そこで逆関数を $\mathrm{sh}^{-1}(x)$ と表す. 以下の設問に答えよ.

(1) $\mathrm{sh}^{-1}(x)$ を求めよ.

(2) 正の実数 a について $S(a)=\frac{1}{a}\int_0^a \mathrm{sh}^{-1}(x)dx$ と定義する. $S(a)$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{a\to 0}S(a)$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\{S(a)-\log a\}$ を求めよ.

(大阪大 2015) (m20153505)

0.386 以下の微分方程式の解を求めよ. ただし, y は x の関数, y' および y'' はそれぞれ 1 階および 2 階微分を示している.

(1) $y''-4y'+5y=0$ ただし, $y(0)=0,\ y'(0)=1$ とする.

(2) $\dfrac{x}{y}y'+\log(xy)+1=0$ ただし, $y(1)=1$ とする. なお, 対数の底は e とする.

(大阪大 2018) (m20183502)

0.387 次の関数の導関数を求めなさい.

(1) $\tanh x$ (2) $\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ $(-1<x<1)$ (3) $\log_e(\cos x)$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

(大阪府立大 2010) (m20103611)

0.388 (1) $y=\{\log(\log x)\}^3$ の一次導関数を求めよ.

(2) $y=\cos 2x$ の二次導関数を求めよ.

(3) $y=\sqrt[3]{x^2-2x+3}$ の一次導関数を求めよ.

(大阪府立大 2011) (m20113610)

0.389 a を実数の定数とする. 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=1+a\sqrt{x}-\log x$$

とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) 方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数を調べよ.

(2) $F(x,y)=f(x^y)$ $(x>0)$ とおくとき, $(\log x)\dfrac{\partial F}{\partial x}-\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial F}{\partial y}$ を計算せよ.

(大阪府立大 2016) (m20163607)

0.390 次の微分計算をせよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\big(x\log x-x\big)$ (2) $\dfrac{d}{dx}\big(e^{\sin x}\big)$ (3) $\dfrac{d^2}{dx^2}\big(e^{-x^2}\big)$

(神戸大 1997) (m19973802)

0.391 積分 $\displaystyle\int_1^e \log x \, dx$ を計算せよ.

(神戸大 1997) (m19973803)

0.392 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ とする．$\Delta \log(x^2+y^2)$ を求めよ.

(神戸大 2000) (m20003802)

0.393 a, b を実数とするとき，以下の等式を示せ.

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log\left(e^{\frac{a}{\varepsilon}} + e^{\frac{b}{\varepsilon}}\right) = \max\{a, b\}$$

(神戸大 2002) (m20023801)

0.394 $L_n = \displaystyle\int \log^n x \, dx$ とする.

(1) $L_n = x \log^n x - nL_{n-1} \quad (n \geq 1)$ を示せ. (2) L_n を求めよ.

(神戸大 2003) (m20033803)

0.395 以下の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx$ （m, n は自然数） (2) $\displaystyle\int_1^e x(\log x)^2 dx$ (3) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{Sin}^{-1} x \, dx$

(神戸大 2008) (m20083801)

0.396 自然数 n に対して，$a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \log(n+1)$ とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \dfrac{1}{n}$ を示せ. (2) $a_n \leq 1$ を示せ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ が単調増加であることを示せ.

(神戸大 2008) (m20083810)

0.397 $|x| < 1$ とし，$f(x) = \log(1+x)$ と定める．以下の各問に答えよ.

(1) $n \geq 1$ のとき，$f(x)$ の n 階導関数を $f^{(n)}(x)$ と書く．$f^{(n)}(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ のマクローリン展開を書け.

(神戸大 2009) (m20093803)

0.398 $(x+y)^{xy}$ の x についての偏微分を計算しなさい $(x,\ y > 0)$. ただし, $x^a = e^{a \log x}$ と定義する.

(神戸大 2010) (m20103803)

0.399 次の重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x+y)^2 \sin(\pi\,|x-y|) dxdy\ , \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, |x+y| \leq 1,\ |x-y| \leq 1\}.$

(2) $\displaystyle\iint_D \log(1+x^2+y^2) dxdy\ , \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x+y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}.$

(神戸大 2011) (m20113806)

0.400

$$f(x) = \tan x - \frac{1}{2} \log \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

とおく．以下の問いに答えよ.

(1) $f'(x)$ を求めよ.

(2) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f(x) > 0$ を示せ.

(3) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x < \tanh(\tan x)$ を証明せよ．

（ただし，任意の実数 t に対して，$\tanh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ である．）

(神戸大 2011) (m20113807)

0.401 $u = \log(e^x + e^y + e^z)$ のとき次の式が成り立つことを示せ．

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 2e^{x+y+z-3u}$$

(神戸大 2014) (m20143808)

0.402 領域 $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 < x^2 + y^2 < 4,\ x + y > 0\right\}$ 上での積分

$$\iint_D \frac{x \log(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dxdy$$

を計算せよ．

(神戸大 2015) (m20153804)

0.403 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x + y \leq 1\ .\ 1 \leq 3x - 2y \leq 2\}$ とする．次の各問いに答えよ．

(1) 領域 D の概形を図示せよ．

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x + y) \{\log(3x - 2y)\}^2 \, dx \, dy$ の値を求めよ．

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{13x - 7y}} \, dx \, dy$ の値を求めよ．

(神戸大 2022) (m20223804)

0.404 $I = \displaystyle\int_0^{\log 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$ を求めよ．

(鳥取大 1997) (m19973903)

0.405 微分可能な関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は次式で与えられる．

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

このことを用いて, 次の問いに答えなさい．

(1) $y = \log_e x$ の導関数を求めなさい．ただし，$e = \displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ とする．

(2) $y = x^n$ の導関数を求めなさい．ただし，n は正の整数とする．

（鳥取大 2004） (m20043901)

0.406 (1) $Z = f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$, $x = e^t$, $y = \log_e(t)$ のとき, dZ/dt を t の関数として求めよ．

(2) xy 平面上の点 (x, y) が $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ で表される曲線上を動くとき，関数 $Z = f(x, y) = x + 2y + 5$ が極値をとる点 (x, y) とその極値を求めよ（偏微分の手法を用いて解答すること）．

(鳥取大 2006) (m20063902)

0.407 次の関数の導関数を求めよ．(注 ： 対数の底は e（自然対数）とする.)

(1) $y = (2 - x^2)^3$ (2) $y = \log \sin x$ (3) $y = x^x$

(鳥取大 2007) (m20073901)

0.408 次の定積分の値を求めよ．(注 ： 対数の底は e（自然対数）とする.)

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x} dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$

(鳥取大 2007) (m20073904)

0.409 (1) $x = \tan y$ のとき，逆関数 $y = \tan^{-1} x$ が定義できる．このとき，逆関数の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(2) $y = x^4 e^{-1/x}$ を微分せよ.

(3) 次の関数を微分せよ．ただし，$x > 0$ とし，また log の底は e とする.

$$y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

(鳥取大 2008) (m20083901)

0.410 次の各積分を求めよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \tan x \, dx$

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \log x \, dx$

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_{|x| \leq y \leq 1} \sqrt{y^2 - x^2} \, dxdy$

(鳥取大 2009) (m20093913)

0.411 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \log x \, dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{4x + 2}{x^2 - 4x + 7} \, dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2 + x}}$

(鳥取大 2010) (m20103904)

0.412 次の問に答えよ.

(1) 次の関数の導関数を求めよ．ただし，a は定数である． $\dfrac{1}{\tan(ax)}$

(2) 次の関数の第 n 次導関数を求めよ．ただし，log は自然対数である． $\log(1 + x)$

(3) 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{x \to +0} x^x$

(鳥取大 2011) (m20113901)

0.413 次の不定積分を求めよ．ただし，log は自然対数である.

(1) $\displaystyle\int x \log x \, dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{1 - x^3} \, dx$

(鳥取大 2011) (m20113903)

0.414 数直線 $(-\infty, \infty)$ 上の関数 $F(x)$ と $f(x)$ を

$$F(x) = x^2 \log(1 + x^2)\ , \quad f(x) = F'(x)$$

によって定義する．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $g(x) = \displaystyle\int_0^x (tf'(t) - f(t)) \, dt$ を求めよ.

(2) $f'(x) > \dfrac{f(x)}{x} > \dfrac{2F(x)}{x^2} > 0 \quad (x \neq 0)$ が成り立つことを示せ.

(3) $g(x)$ は下に凸な関数であることを示せ.

(岡山大 2009) (m20094001)

0.415 (1) $y = \dfrac{\log x}{x}$ $(x > 0)$ のグラフを描け.

(2) 3^π と π^3 はどちらが大きいか，理由を付けて答えよ.

(岡山大 2011) (m20114001)

0.416 $|x| \neq 1$ なる実数 x に対して

$$f(x) = \int_0^\pi \log(1 - 2x\cos t + x^2)dt$$

で関数 $f(x)$ を定義する．次の各問いに答えよ.

(1) $f(x) = f(-x)$ を示せ.

(2) $f(x) + f(-x) = f(x^2)$ を示せ.

(3) $x \neq 0$ のとき，$f(x) = 2\pi\log|x| + f(\frac{1}{x})$ を示せ.

(4) $|x| < 1$ のとき，$f(x)$ を求めよ.

(5) $|x| > 1$ のとき，$f(x)$ を求めよ.

(岡山大 2012) (m20124002)

0.417 ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}x^n$ について以下の問いに答えよ.

(1) 収束半径 r を求めよ.

(2) $|x| < r$ に対して

$$f(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}x^n$$

とする．第 2 次導関数 $f''(x)$ を x の有理式で表せ.

(3) $f(x) = (1-x)\log(1-x) + x - \dfrac{x^2}{2}$ を示せ.

(岡山大 2014) (m20144001)

0.418 (1) 不等式 $0 \leqq\ t - \log(1+t) \leqq \dfrac{t^2}{2}$ $(t \geqq\ 0)$ が成り立つことを示せ.

(2) 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

は $K = 1$ のときに発散し，$k = 2$ のとき収束することを示せ.

(3) 全ての $x > 0$ に対して，級数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

は発散することを示せ.

(4) 全ての $x \geqq\ 0$ に対して，級数

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\log\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right\}^2$$

は収束することを示せ.

(岡山大 2015) (m20154002)

0.419 次の問に答えよ. ただし, 被積分関数が連続になる範囲のみを考えればよい.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$（$C$ は積分定数）を示せ.

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} x + C$（$C$ は積分定数）を示せ.

ただし, $y = \tan^{-1} x \ \left(|y| < \dfrac{\pi}{2}\right)$ は $x = \tan y$ の逆関数を表す.

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2}$ を求めよ.

(4) $\alpha < \beta$ のとき $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ を求めよ.

(5) $a > 0$, $D = b^2 - 4ac < 0$ のとき $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ を求めよ.

(広島大 2005)　　(m20054101)

0.420 次の問に答えよ．ただし，log は自然対数を表す.

(1) 2 以上の自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \log n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ が成り立つことを示せ.

(2) 実数 $x > -1$ に対して不等式 $\log(1+x) \leqq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ が成り立つことを示せ.

(3) 自然数 n に対して $\gamma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$ と定めると，$\gamma_n > 0$ であり，$\{\gamma_n\}$ は単調減少数列になることを示せ.

(広島大 2006)　　(m20064103)

0.421 (1) 曲線 $y = \cosh x$ $(0 \leqq x \leqq \log 3)$ の長さを求めよ．ただし，$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ である.

(2) $\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\}$ のとき, $\displaystyle\iint_{\Omega} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy$ を求めよ.

(広島大 2009)　　(m20094101)

0.422 (1) 関数 e^x, $\sin x$, $\log(1+x)$ をそれぞれ $x = 0$ のまわりでテイラー展開せよ.

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$ を求めよ.

(3) 関数 $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ の極値を求めよ.

(広島大 2010)　　(m20104101)

0.423 (1) $\cos x$ の $x = 0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ.

(2) $\log(1-x)$ の $x = 0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ.

(3) (1) と (2) を用いて, $\log \cos x$ の $x = 0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ.

(4) a を実数とするとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \cos^n \frac{a}{\sqrt{n}} = e^{-\frac{a^2}{2}}$ が成り立つことを示せ.

(広島大 2011)　　(m20114105)

0.424 以下の問いに答えよ.

(1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ が発散することを示せ.

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$ の収束・発散を調べよ.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log(1+x)}\right)$ を求めよ.

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ を求めよ.

(広島大 2012)　　(m20124102)

0.425 $u(r)$ は区間 $(0,\ \infty)$ 上で 2 回微分可能な関数とし，さらに，$u''(r)$ が $(0,\ \infty)$ 上で連続であるとする．関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=u(r)\quad (\text{ただし，}\ r=\sqrt{x^2+y^2})$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=u''(r)+\dfrac{1}{r}u'(r)$ を示せ．

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$ が成り立つためには,

$$u(r)=a\log r+b\quad (a,b\ \text{は定数})$$

と表されることが必要十分であることを示せ．

(広島大 2012)　　(m20124103)

0.426 以下の問いに答えよ．

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{r\sqrt{\log r}}\,dr$ の値を求めよ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{r(\log r)^2}\,dr$ の値を求めよ．

(広島大 2012)　　(m20124105)

0.427 以下の問いに答えよ．

(1) 次の広義重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\,dxdy$$

ただし，積分領域 D を次で定める．

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2>e^2\}$$

(2) 関数

$$f(x,y)=\frac{1}{(x^2+y^2)\left\{\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^{1/2}+\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\right\}}$$

についての広義重積分 $\displaystyle\iint_E f(x,y)dxdy$ が収束することを示せ．ただし．積分領域 E を次で定める．

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2>1\}$$

(広島大 2012)　　(m20124106)

0.428 以下の問いに答えよ．

(1) 「 $x>0$ ならば $\log(1+x)<x$ 」が成り立つことを示せ．

(2) 「 $x>0$ ならば $\log(1+x)>x-\alpha x^2$ 」を満たす実数 α の範囲を求めよ．

(広島大 2013)　　(m20134108)

0.429 以下の問いに答えよ．

(1) e^x の $x=0$ のまわりでのテイラー展開

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

の係数 a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を書け，（答だけでよい）

(2) k を自然数とするとき，$\displaystyle\lim_{t \to +0} t(\log t)^k = 0$ であることを示せ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \log x \, dx$ の値を求めよ.

(4) 自然数 k に対して，広義積分 $I_k = \displaystyle\int_0^1 (\log x)^k \, dx$ の値を求めよ.

(広島大 2013) (m20134110)

0.430 (1) 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ の値を求めよ.

(2) $J = \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x^2)}{x}$ とおく．J を求めよ.

(3) 定数 $C > 0$ と $R > 0$ が存在して $x \geq R$ ならば $\log(1+x^2) < C\sqrt{x}$ となることを示せ.

(4) 広義積分 $K = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^2} dx$ の値を求めよ.

(広島大 2015) (m20154102)

0.431 次の関数の第 n 次導関数を求めよ.

$$y = \log(1+x)$$

(広島大 2022) (m20224101)

0.432 (1) $h(x) = x^2 \sin^2 x$ の 1 次導関数 $h'(x)$，2 次導関数 $h''(x)$，3 次導関数 $h'''(x)$ を求めよ.

(2) x の関数 $\log(1+x)$ の n 次導関数を求めよ．ただし，$x > -1$ とする.

(3) $\log \dfrac{1-x}{1+x}$ のマクローリン展開を求めよ．ただし，$|x| < 1$ とする.

(広島市立大 2009) (m20094201)

0.433 $x > 0$ とする. $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $y = f(x)$ の増減, 凹凸および変曲点を調べ, グラフの概形を描け.

(広島市立大 2010) (m20104204)

0.434 次の微分方程式を，与えられた初期条件のもとで解け.

$$\frac{dy}{dx} = \log x \quad \text{初期条件「}x = 1 \text{ のとき } y = 1\text{」}$$

(山口大 2000) (m20004302)

0.435 (1) $y = \log\left(x + (x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)$ で $\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい.

(2) $x = 1 - t^2$，$y = t^3$ の関係が成り立っているとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい.

（山口大 2001） (m20014307)

0.436 次の極限値を求めよ. $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{2x}$

(山口大 2001) (m20014309)

0.437 (1) 不定積分 $\int x \log x \, dx$ を求めなさい.

(2) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^3 x \, dx$ を求めなさい.

(山口大 2001) (m20014310)

0.438 (1) $y = e^x \sin x$ の dy/dx を求めなさい.

(2) $y = (x + \log x)^2$ の dy/dx を求めなさい.

(山口大 2003) (m20034305)

0.439 x の範囲が $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ のとき, 以下の関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めなさい. また, この x の範囲における関数 $f(x)$ のグラフを書きなさい.

$$f(x) = \log(x^2 + 1) - \log(2x)$$

(山口大 2005) (m20054303)

0.440 次の微分方程式を解きなさい.

(1) $x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

(2) $x\dfrac{dy}{dx} + y = x \log x$ を (1) の結果を利用して解きなさい.

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 5y = e^x \cos 2x$

(山口大 2005) (m20054308)

0.441 ある町の 1 日における天気（晴，雨）と交通事故発生（有，無）について，1 年間のデータを調べたところ，その同時確率が次の表のようになった.

	事故無	事故有
晴	0.4	0.2
雨	0.3	0.1

(1) 天気が雨であることを条件とみなして事故が発生する条件付確率を求めなさい.

(2) ある日のデータを見ると事故が発生していた．このとき，天気が晴であった確率を求めなさい.

(3) ある日の天気の晴雨いずれかを知ったときに得られる情報量を求めなさい.
ただし，$\log_2 10 = 3.32$, $\log_2 3 = 1.58$ とし，途中の計算式も書きなさい.

(山口大 2007) (m20074302)

0.442 (1) $\log(1 + x)$ を x の無限級数に展開しなさい.

(2) $f(x) = x^{\log x}$ の導関数を求めなさい.

(3) 半径 a の円の面積を積分を使って求めなさい.

(4) $0 \leq x \leq 1$ において $0 \leq x^4 \leq x^2$ であることを用い， $\dfrac{\pi}{4} < \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + x^4} \, dx < 1$ を示しなさい.

(山口大 2008) (m20084301)

0.443 関数 $f(x) = \log(x^2 + 1)$ の増減表を作成し，グラフの概形を描きなさい.

(山口大 2008) (m20084305)

0.444 $f(x) = \log(x^2 + 5x + 1)$ の導関数を求めなさい.

(山口大 2009) (m20094301)

0.445 関数 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$ について，次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \log f(x)$ を求めよ． (2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{d}{dx}f(x)$ を求めよ．

(徳島大 2003) (m20034401)

0.446 $u(x)$ が次の微分方程式の初期値問題を満たす. $\begin{cases} u'' + (u')^2 - 3u' + 2 = 0 \\ u(0) = 0\,,\ \ u'(0) = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

(1) 定数係数の 2 階線形同次微分方程式 $v'' - 3v' + 2v = 0$ の一般解 $v(x)$ を求めよ.

(2) $u(x) = \log y(x)$ とおいて初期問題の微分方程式に代入し，(1) を用いることにより，初期問題を満たす解 $u(x)$ を求めよ.

(徳島大 2007) (m20074404)

0.447 $\alpha > 1$ とする．広義積分 $I_\alpha = \displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^\alpha}\,dx$ に対して，次の問いに答えよ.

(1) $x^{1-\alpha}\log x$ を微分せよ.

(2) $R > 1$ とする．$\displaystyle\int_1^R \frac{\log x}{x^\alpha}\,dx$ を求めよ.

(3) I_α を求めよ.

(徳島大 2011) (m20114402)

0.448 $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\log x}}dx\,,\quad J = \int_0^1 \sqrt{-\log x}\;dx$ を考える．次の問いに答えよ.

(1) $0 < x < 1$ において $\sqrt{-\log x}$ を微分せよ.

(2) J を I で表せ.

(3) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を利用して J を求めよ.

(徳島大 2014) (m20144402)

0.449 $f(x) = x\log\left(e + \dfrac{1}{x}\right)\quad (x > 0)$ について，次の問いに答えよ.

(1) $\alpha = \displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ とする．α を求めよ.

(2) (1) で求めた α に対して，$\beta = \displaystyle\lim_{x\to\infty}\Big(f(x) - \alpha x\Big)$ とする.

$t = \dfrac{1}{x}$ とおくと，$x \to \infty$ のとき $t \to +0$ であることを利用して，β を求めよ.

(3) (1),(2) で求めた α, β に対して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x) - (\alpha x + \beta)}{\dfrac{1}{x}}$ を求めよ.

(徳島大 2015) (m20154402)

0.450 (1) $f(x) = \log(1 + x^2)$ とする．$f''(x)$ を求めよ.

(2) $y = y(x)$ が微分方程式 $y'' - 2y' + y = 0$ を満たしている．このとき，$u = e^{-x}y$ とおいて，u が満たす微分方程式を求めよ．また，この u の微分方程式の一般解を求めよ.

(3) 微分方程式 $y'' - 2y' + y = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}e^x$ の一般解を求めよ.

(徳島大 2015) (m20154404)

0.451 自然数 n に対して $\quad H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}\quad$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{H_n\}$ は発散することを示せ. (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{H_n}{\log n}=1$ であることを示せ.

（高知大 2001） (m20014502)

0.452 $f(x)$ を閉区間 $I=[a,b]$ 上の連続関数とする. I 上に $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$ を

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

となるように選び, I の分割と呼び Δ で表す. また

$$|\Delta|=\max_{1\leq i\leq n}(x_i-x_{i-1})$$

とする. さらに $x_{i-1}\leq\xi_i\leq x_i$ を満たす ξ_i をとり, $\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$ をこの分割の代表系と呼び, $\xi(\Delta)$ で表す. このとき

$$S(f,\xi(\Delta))=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

を分割 Δ とその代表系 $\xi(\Delta)$ に関するリーマン和と呼ぶ. 任意の分割の列と任意の代表系に対して

$$\lim_{|\Delta|\to 0}S(f,\xi(\Delta))$$

が一意に存在する. その極限 S を $f(x)$ の I における積分といい

$$\int_a^b f(x)dx=S$$

とかく. この定義を用いて次の問に答えよ. ただし, 以下において $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で正値連続な関数とし

$$f_{in}=f(a+i\delta_n), \qquad \delta_n=\frac{b-a}{n}$$

とする.

(1) 次の式を示せ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{1n}+f_{2n}+\cdots f_{nn}}{n}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

(2) 次の式を示せ.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f_{1n}f_{2n}\cdots f_{nn}}=\boldsymbol{e}^{\frac{1}{b-a}\int_a^b\log f(x)dx}$$

(3) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)}$$

(高知大 2005) (m20054501)

0.453 関数 $x=\log t$, $y=\dfrac{2t+1}{t^2}$ について，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ および $\displaystyle\int ydx$ を t で表せ.

(高知大 2006) (m20064505)

0.454 次は，ロピタルの定理の使用例である.

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ は $\dfrac{0}{0}$ の不定形であるから，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$$

これらにならって極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right)$ を求めてみる．以下の問いに答えよ.

(1) ロピタルの定理が使える様に，$\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right)$ を式変形せよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right)$ を求めよ．

(高知大 2008) (m20084505)

0.455 関数 $f(x)$，$g(x)$ が条件 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ を満たしているとき，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x+3}{x^2+3}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\log(1+x)}$ を求めよ．

(3) $f(x)=x$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(2x)}$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=3$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(2x)}$ を求めよ．

(高知大 2011) (m20114501)

0.456 次の問いに答えよ．

(1) 実数 s に対して，不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{s+x}dx$ を求めよ．

(2) 正の整数 n と正の実数 t に対して $f_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{t+\frac{k}{n}}$ とおく．
t を固定したとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(t)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた極限を $f(t)$ とおく．$\displaystyle\lim_{t\to +0}\frac{f(t)}{\log(1-e^{-t})}$ を求めよ．

(高知大 2015) (m20154501)

0.457 正の整数 n と実数 $x<1$ に対して，$\displaystyle R_{n+1}(x)=\log(1-x)+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}$ とおく．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{R_{n+1}(x)}{x^{n+1}}$ の値を求めよ．

(2) $|x|<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_{n+1}(x)=0$ を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{R_4(x)}{\dfrac{1}{1-x^2}-1-x^2}$ の値を求めよ．

(高知大 2019) (m20194501)

0.458 $0<a<1$ とする．

(1) $\displaystyle\int_a^1\log x dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_a^1\log x dx$ を求めよ．ただし，計算途中で不定形の極限ができた場合，その計算過程も明記すること．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log k-\log n\right)$ を求めよ．

(愛媛大 2000) (m20004602)

0.459 $z=\log(x^2+y^2), x=u+v, y=u-v$ とする．$\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ．

(愛媛大 2000) (m20004603)

0.460 (1) 次の関数を微分せよ.

(a) $\log(1+x^4)$ (b) $\sin^{-1} x^2$

(2) α, β を定数とし ,

$$f(x) = \begin{cases} \tan^{-1} x & (x > 1) \\ \beta & (x = 1) \\ \alpha x - \alpha + \beta & (x < 1) \end{cases}$$

とおく. ただし $\tan^{-1} x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする. 次の問いに答えよ.

(a) $f(x)$ が $x = 1$ で連続になるように β を定めよ.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f'(x) = \lim_{x\to 1-0} f'(x)$ となるように α を定めよ.

(愛媛大 2005) (m20054601)

0.461 $a > 0,\ x > 0$ のとき, 関数 $f(x)$ は等式

$$\int_a^{\sqrt{x}} f(t)dt = -2 + \log x$$

を満たす. このとき, $f(x)$ と定数 a の値を求めよ.

(愛媛大 2005) (m20054609)

0.462 (1) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1})$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2}$

(2) 次の関数を微分せよ.

(a) $x \sin^{-1} x$ (b) $\log \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ (c) $a^{x\log x}$（ただし，a は $a \neq 1$ である正の定数）

(愛媛大 2006) (m20064601)

0.463 $D = \{(x, y)\,;\, 1 \leqq\ x^2 + y^2 \leqq\ 4\}$ とするとき，次の積分の値を求めよ. $\displaystyle\iint_D \frac{\log\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$

(愛媛大 2006) (m20064604)

0.464 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \log x dx$ を計算せよ.

(2) $0 < a < 1$ とし，$f(a) = \displaystyle\int_1^e |\log x - a| dx$ とおく.

(a) $f(a)$ を計算せよ.

(b) a が $0 < a < 1$ の範囲を動くとき，$f(a)$ を最小とする a の値を求めよ.

(愛媛大 2007) (m20074606)

0.465 次の不定積分を計算せよ. $\displaystyle\int \log x\,dx$ $(x > 0)$

(愛媛大 2007) (m20074615)

0.466 (1) 次の不定積分を計算せよ．ただし，$x > 0$ で n は自然数とする. $\displaystyle\int x^n \log x\,dx$

(2) 次の定積分を計算せよ. $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin x\,dx$

(3) 3 点 $A = (-x_1, x_2, 0),\ B = (0, x_2, x_3),\ C = (x_1, 0, x_3)$ を頂点とする三角形の面積を求めよ.

(4) 次の極限値を求めよ．ただし，a は定数とする. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k+a}$

(愛媛大 2008) (m20084607)

0.467 (1) (a) 次の極限値を求めよ. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{\cos x}-1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ を示せ. ただし, n は自然数とする.

(2) 次の関数の導関数を求めよ.

(a) $\log|2x+1|$ (b) $\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ (c) $(\sin x)^{\sin x}$

(愛媛大 2008) (m20084608)

0.468 (1) 次の曲線の長さを求めよ.

$$y=\frac{1}{2}\log x-\frac{1}{4}x^2 \quad (1 \leqq x \leqq e)$$

(2) $a>0$ のとき, 次の広義積分が収束するための a の条件を求め, そのときの積分の値を求めよ.

$$\int_e^\infty \frac{1}{x(\log x)^a}\,dx$$

(愛媛大 2009) (m20094602)

0.469 (1) 次の曲線上の与えられた点 (a,b) における接線の方程式を求めよ.

(a) $y=x\log x$, $(a,b)=(e,e)$ (b) $y=\dfrac{e^{2x}-e^{-x}}{e^{3x}+e^{-2x}}$, $(a,b)=(0,0)$

(2) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x}-2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x-x}{x^3}$ ただし, $\tan^{-1}x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする.

(3) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義を述べよ. さらに, $f(x)=c$（定数関数）ならば $f'(x)=0$ であることを定義に従って示せ.

(愛媛大 2010) (m20104601)

0.470 (1) $x=\sin t\left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおいて, 次の不定積分を求めよ. ただし, 最終的な答えは x の関数で表わすこと.

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

(2) $S(x)=\displaystyle\int_1^x \log t\,dt$ とする. 次の値を求めよ.

(a) $S'(e)$ (b) $S(e)$ (c) $\displaystyle\int_1^e e^{S(x)}\log x\,dx$ (d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{S(x)}}{x^x}\,dx$

(愛媛大 2010) (m20104602)

0.471 a,b は実数で, $0<a<1$ を満たすとする. xy 平面において, 2 つの関数のグラフ

$$C\ :\ y=\log x\ ,\quad l\ :\ y=ax+b$$

がただ一つの共有点を持ったとき, 次の問に答えよ.

(1) b を a を用いて表せ.

(2) $b>0$ となるような a の範囲を求めよ.

(3) a が (2) で求めた範囲にあるとき, 曲線 C, および 3 直線 l, $x=0$, $y=0$ で囲まれた部分の面積を求め, a のみを用いて表せ.

(愛媛大 2011) (m20114606)

0.472 (1) $f(x)=\tan^{-1}x+\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ とおく. ただし, $\tan^{-1}x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする.

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ. (b) $f(2)$ の値を求めよ.

(2) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{-4x}}{\sin 5x}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{\log x}$　　(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right)$

(愛媛大 2011)　　(m20114607)

0.473 (1) 次の定積分を求めよ．

$$\int_1^{e^2}(\log x)^2dx$$

(2) 次の媒介表示で表される曲線の長さを求めよ．

$$x=\frac{t^3}{3}-t\,,\qquad y=t^2\qquad (0\leqq\ t\leqq\ 2)$$

(愛媛大 2013)　　(m20134602)

0.474 $f(x)=\dfrac{x}{(\log x)^2}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}$ を求めよ．

(2) 区間 $(1,\infty)$ における関数 $y=f(x)$ の増減を調べ，そのグラフをかけ．

(3) $D=\{(x,y)\mid x>1,\ y\geqq\ f(x)\}$ とする．領域 D における $x+y$ の最小値を求めよ．

(愛媛大 2014)　　(m20144601)

0.475 (1) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\log(1+x)}{x^2}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{4}{x}\right)^{x^2}$

(2) x の関数 $x\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}x$ を微分せよ．

(3) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$\cos^{-1}x+\cos^{-1}(-x)=\pi$$

ただし，$\cos^{-1}x$ の値域は $[0,\ \pi]$ とする．

(愛媛大 2015)　　(m20154601)

0.476 (1) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log\sin x$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to+0}(\sin x)^x$

(2) 次の関数の導関数を求めよ．

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$　　(b) $\tan^{-1}(2x+3)$

(愛媛大 2017)　　(m20174601)

0.477 $a\neq 0$ を定数として，$f(x,y)=\log(x^a+y^a)$ とする．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y),\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$ がすべての $x>0,\ y>0$ に対して成り立つように，a の値を定めよ．

(愛媛大 2017)　　(m20174603)

0.478 $D=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq 2,\ x\leqq 2y\leqq 2\}$ とする．

(1) D を図示せよ．

(2) 次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D \log(1+y^2)dxdy$$

(愛媛大 2017)　　(m20174604)

0.479 (1) 次の関数の導関数を求めよ．ただし，a は正の定数とする.

(a) $\sin^{-1}(x^2)$　　(b) $x^{\sin x}$ $(x>0)$　　(c) $\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$

(2) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x}$

(愛媛大 2018)　　(m20184601)

0.480 (1) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2x\tan x-\frac{\pi}{2}}{\sin x-\cos x}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log\left(\frac{x+2}{x+4}\right)$

(2) $f(x)=\sqrt{x+2}$ とする.

(a) 3 階までの導関数 $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ を求めよ.

(b) 次の式

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-a_0-a_1x-a_2x^2}{x^2}=0$$

が成り立つように定数 a_0, a_1, a_2 を定めよ.

(愛媛大 2021)　　(m20214601)

0.481 (1) 次の極限値を求めよ．ただし，$[x]$ は，実数 x を超えない最大の整数とする.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+3x^2)}{\log(5+7x)}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-[3x]x+2}{x-1}$　　(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^{x/2}\frac{dt}{(\sin x)\sqrt{1-t^2}}$

(2) 次の関数の導関数を求めよ.

(a) $\sqrt{1+\cos^2 x}$　　(b) $\sin^{-1}(\log x)$

(愛媛大 2022)　　(m20224606)

0.482 次の積分の計算をしなさい.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+\sin x}\log(1+\sin x)dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} t^2e^{-t}dt$

（九州大 2001）　　(m20014701)

0.483 (1) 次の線形非同次微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

の一般解は

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c\right)$$

で与えられることを示せ. ただし, $P(x), Q(x)$ は x の連続関数であり, c は任意の定数である.

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$x\frac{dy}{dx}-y=x(1+2x^2)$$

(3) 適切な変数変換を利用して, 次の微分方程式の一般解を求めよ. さらに, $x=1$ のとき $y=1$ となるような解を求めよ.

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{2x}=\frac{\log x}{2x}y^3$$

(九州大 2004)　　(m20044702)

0.484 複素平面上の原点を中心とする半径 a の円 C に沿った積分（方向は C の正方向，範囲は一周）について，次の問に答えよ．

(1) ある複素数 z_0 ($|z_0| \neq a$) に対して，(a) $|z_0| > a$ の場合 および (b) $|z_0| < a$ の場合における $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-z_0)^n}dz$ を求めよ．ただし，n は正の整数である．

(2) 複素関数 $f(z) = \log(z-b) + \log\left(z - \dfrac{a^2}{b}\right) - \log z$ （b は実数で，$b > a$）に対して，$\displaystyle\int_C \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz$ を求めよ．

(九州大 2006) (m20064703)

0.485 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ で定義された二つの関数

$$f(x) = -\log(\cos x)\,, \quad g(x) = \log\left(\frac{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}\right)$$

に対して，以下の問に答えよ．

(1) $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を $\cos x$ を用いて表せ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3})$ の長さを求めよ．

(九州大 2006) (m20064712)

0.486 関数 $f(x)$ の点 a での Taylor 展開は，関数 $f(x)$ を点 a の近くで一番よく近似する n 次式が

$$f_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n$$

だと言うことを主張している．関数 $f(x) = -\log(1-x)$ の $x = 0$ の近くでの振舞いに関する以下の問いに答えよ.

(1) 点 0 の近くで関数 $f(x)$ を一番よく近似する 0 次式 $f_0(x)$ を求めよ.

(2) 点 0 の近くで関数 $f(x)$ を一番よく近似する 1 次式 $f_1(x)$ を求めよ.

(3) 点 0 の近くで関数 $f(x)$ を一番よく近似する 2 次式 $f_2(x)$ を求めよ.

(4) 点 0 の近くで関数 $f(x)$ を一番よく近似する n 次式 $f_n(x)$ を求めよ.

(5) 以下の 4 つの関数のグラフを，$-1 \leq x < 1$ の範囲で，重ねて描け：

$$y = f(x)\,, \quad y = f_0(x)\,, \quad y = f_1(x)\,, \quad y = f_2(x)\,.$$

(九州大 2009) (m20094710)

0.487 曲線 C は xy-平面の第一象限と第二象限に描かれているとし，次の条件を満たすとする.

- C は y 軸上の点 $(0, a)$ $(a > 0)$ を通る.
- 第一象限内では接線の傾きが $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$ で与えられ，第二象限内では接線の傾きが $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$ で与えられる.

このとき

(1) 曲線 C は第一象限内では $x = a\log\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}$ で与えられ，第二象限内では $x = a\log\dfrac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y} + \sqrt{a^2-y^2}$ で与えられることを示し，C の概形を描け.

(2) 曲線 C を x 軸の周りに回転させて出来る回転体の体積を求めよ．

(九州大 2009)　　(m20094712)

0.488 関数 $f(x)=\sin(\log x) \quad (x>0)$ を考える．$f'(x)$, $f''(x)$ をそれぞれ $f(x)$ の 1 次および 2 次の導関数とする．また，π は円周率，e は自然対数の底とする．以下の問いに答えよ．

(1) $1 \leqq x \leqq e^{\pi}$ において $f'(x)=0$ となる x を求めよ．

(2) $1 \leqq x \leqq e^{\pi}$ において $f''(x)<0$ となる x の範囲を求めよ．

(3) 2 点 $(1, f(1))$, $(e^{\pi/2}, f(e^{\pi/2}))$ を通る直線の方程式を求めよ．

(4) $\dfrac{e^{\pi/4}-1}{e^{\pi/2}-1} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が成り立つことを示せ．

(九州大 2012)　　(m20124705)

0.489 関数 $f(x)=\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}} \quad (-\infty<x<\infty)$ を考える．ただし，e は自然対数の底とする．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の値域を求めよ．

(2) 定積分 $I=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の値を求めよ．ただし，$a=\dfrac{1}{4}\log 2$, $b=\dfrac{1}{4}\log 3$ とする．

(九州大 2012)　　(m20124706)

0.490 (1) 次の周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(x)=|x| \quad (-\pi \leqq x<\pi)\,, \qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ であることを示せ．

(3) $t>0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)=\mathcal{L}[f(t)](s)=\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ とする．以下の問いに答えよ．

(a) a を定数とするとき，$\mathcal{L}[e^{at}](s)$ を求めよ．また，$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s)=F(s-a)$ を示せ．

(b) $\dfrac{dF(s)}{ds}=\mathcal{L}[-tf(t)](s)$ が成り立つことを示せ．また，これを用いて $F(s)=\log\left(\dfrac{s+1}{s}\right)$ のラプラス逆変換を求めよ．

(九州大 2014)　　(m20144703)

0.491 自然数 n に対して，$f(x)=x^2\log x$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(九州大 2014)　　(m20144705)

0.492 a は $a \geqq 0$ なる定数とする．$0<x \leqq 1$ において関数 $f(x)$ を次の式で定義する．　$f(x)=x^a\log x$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ を求めよ．

(2) $0<x \leqq 1$ における $f(x)$ の増減表を与えよ．さらに，$f(x)$ の最大値および最小値が存在する場合には，それらを求めよ．

(3) 次の積分（広義積分）を求めよ．　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

(九州大 2015)　　(m20154708)

0.493 $x \geqq 1$ において，関数 $f(x)$ を次の式で定義する．

$$f(x) = \sin(\log x)$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $y \geqq 1$ なる y を固定するとき，次の積分を求めよ．

$$g(y) = \int_1^y f(x)dx$$

(2) $1 \leqq y \leqq e^{2\pi}$ における $g(y)$ の最大値および最小値を求めよ．ただし，e は自然対数の底，π は円周率である．

(九州大 2018) (m20184707)

0.494 区間 $(0,\infty)$ 上の関数 $f(x) = e^{-(\log x)^2}$ について以下の問いに答えよ．

(1) 導関数 $f'(x)$，$f''(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $y = f(x)$ の増減，凹凸を調べグラフの概形を描け．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を求めよ．

(九州大 2019) (m20194705)

0.495 $x > 0$, $y > 0$ において，2 変数関数 $f(x,y)$ および $g(x,y)$ を次の式で定義する．

$$f(x,y) = \log\left(x^2+y^2\right) \ , \quad g(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{1/3}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の x に関する 2 次偏導関数 $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)$ を求めよ．

(2) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$\lim_{t\to+0} t\log t = 0$$

(3) 領域 $D = \left\{(x,y) \ \middle| \ 0 < x^2+y^2 < 1,\ 0 < y < x\right\}$ における次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D \frac{f(x,y)}{g(x,y)}dxdy$$

(九州大 2019) (m20194712)

0.496 $0 < A < B \leq 1$ とするとき，領域 D を $D = \left\{(x,y) \ \middle| \ A \leq x \leq B,\ x^2 \leq y \leq x\right\}$ とし，

$f(x,y) = \dfrac{y+y^2}{x^2+y^2}$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

ただし，逆正接関数 $\arctan(x)$ が $\dfrac{1}{x^2+1}$ の原始関数であることは既知として用いてよい．

(1) 関数 $g(x,y) = y - x\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ を y で偏微分した偏導関数を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x,y)dx$ を求めよ．ただし，$x > 0$, $y > 0$ とする．

(3) 関数 $h(x) = 2\ \arctan(x) - 2x + x\log(x^2+1)$ の微分を求めよ．

(4) $\displaystyle\int_D f(x,y)dxdy = H(B) - H(A)$ を満たす関数 $H(x)$ を求めよ．

(九州大 2021) (m20214708)

0.497 次の問に答えよ．ただし，log は自然対数を表す．自然対数の底は $e = 2.718\cdots$ である．

(1) 次の積分（広義積分）の値を求めよ．

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon>0,\ \varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

(2) 極限値に関する次の二つの等式が成り立つことを証明せよ．

$$\lim_{x>0,\ x\to 0} x\log x = 0 \quad , \qquad \lim_{x>0,\ x\to 0} x^x = 1$$

(3) 閉区間 $[0,1]$ 上の関数 f, g を次のように定義する．

$$0 < x \leqq 1 \text{ のとき } f(x) = x\log x,\quad g(x) = x^x,\quad f(0) = 0,\quad g(0) = 1$$

このとき，f, g の各々について，$[0,1]$ における最大値と最小値を求めよ．

(4) 次の積分（広義積分）は有限値に収束するか，それとも無限大に発散するか，いずれであるか判定せよ．その理由も示せ．

$$\int_0^1 \frac{x^x}{\sqrt{x}}dx$$

（九州芸術工科大 2000 ）　(m20004802)

0.498 以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^2 |2-x-x^2|dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int x\log x dx$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^\pi f(\sin x)dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$ を証明せよ．

(4) $F(x) = \displaystyle\int_a^{-x^2} f(t)dt$ のとき，$F'(x)$ を求めよ．

（九州芸術工科大 2000）　(m20004803)

0.499 (1) $x^n \log x$ を積分せよ．ただし，log は自然対数．

(2) $I_1 = \displaystyle\int e^{ax}\sin bx dx,\quad I_2 = \int e^{ax}\cos bx dx$ を求めよ．

(3) 次を証明せよ．　$\displaystyle\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$

（九州芸術工科大 2001）　(m20014803)

0.500 (1) $e = \displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ を使って以下を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

(2) (a) $a>0, x>0$ のとき，$e^{ax} \geqq 1 + ax + \dfrac{a^2x^2}{2}$ であることを使って $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-ax}$ を求めよ．

(b) 上の結果を使って $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^5e^{-x}$ を求めよ．

(c) 同じく (a) の結果を使って $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$ を求めよ．

(九州芸術工科大 2003)　(m20034801)

0.501 積分 $\displaystyle\int_0^1 \log x dx$ は広義積分である. これを計算せよ.

(九州芸術工科大 2005)　(m20054802)

0.502 (1) $x^2\log x$ を積分せよ.

(2) 微分方程式 $x^2y'+y^2=0$ を解け.

(九州芸術工科大 2005) (m20054806)

0.503 以下の関数の 1 次微分を求めなさい.

(1) $y=e^x\sin x$ (2) $y=\dfrac{\sin x}{e^x}$ (3) $y=\dfrac{\log x}{x}$ (4) $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

(佐賀大 2000) (m20004902)

0.504 以下の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int\sin(3x+3)dx$ (2) $\displaystyle\int\frac{dx}{3x+3}dx$ (3) $\displaystyle\int\frac{dx}{4+x^2}$

(4) $\displaystyle\int x\log x dx$ (5) $\displaystyle\int e^x\sin 2x dx$

(佐賀大 2000) (m20004904)

0.505 以下の関数の 1 次常微分を求めなさい.

(1) $y=(2-x^2)^3$ (2) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ (3) $y=\dfrac{1}{\log x}$ (4) $y=\log|\sin x|$

(佐賀大 2001) (m20014902)

0.506 以下の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int\sin(2x+1)dx$ (2) $\displaystyle\int e^{2x}\sin(3x)dx$ (3) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-5x+6}$

(4) $\displaystyle\iint e^{(3x+2)}dxdx$ (5) $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$ (6) $\displaystyle\int\frac{\log x}{x}dx$

(佐賀大 2001) (m20014903)

0.507 $x>0$ の範囲で定義された関数 $f(x)=x^x$ について，次の問いに答えよ．ただし，計算の際は $x^x=e^{x\log x}$ と変形せよ．また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=1$ は既知としてよい.

(1) 導関数 $f'(x)$ を計算し，$f(x)$ の最小値を求めよ.

(2) $y=f(x)$ のグラフの概形を図示せよ.

(佐賀大 2003) (m20034904)

0.508 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x\log x dx$ (2) $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}dx$

(佐賀大 2003) (m20034908)

0.509 次の問に答えよ.

(1) $\sqrt{1+2\log x}$ を x について微分せよ.

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\tan x-\frac{1}{\cos x}\right)$ を求めよ.

(佐賀大 2004) (m20044902)

0.510 次の各問に答えよ.

(1) $x>0$ のとき次の不等式が成り立つことを示せ.

$$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$$

(2) $y = \log|x + \sqrt{x^2 + a}|$ $(a \neq 0)$ を微分せよ.

(3) $y = x \sin x$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$ のグラフの概形を描け.

（佐賀大 2004） (m20044907)

0.511 以下の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int x^4 e^{3x} dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ (3) $\displaystyle\int 2^x dx$ (4) $\displaystyle\int_1^e 4x \log x dx$

（佐賀大 2004） (m20044908)

0.512 次の定積分を求めよ, a は正の定数である.

(1) $\displaystyle\int_1^2 dx\ \log x$ (2) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ax^2}$ (4) $\displaystyle\int_0^{\infty} dx\ \frac{\sin x}{x}$

(佐賀大 2005) (m20054910)

0.513 $\displaystyle\int_0^1 x \log x\, dx$ を計算せよ.

(佐賀大 2005) (m20054914)

0.514 微分方程式

$xy' + y = x \log x$ $(x > 0)$

を解け. ただし, 解は陽形式 $y = f(x)$ の形で求めること.

(佐賀大 2005) (m20054917)

0.515 次の関数の 1 次微分を求めなさい.

(1) $y = \sqrt{2x^2 + 3}$ (2) $y = \dfrac{1}{\cos x}$ (3) $y = e^{-x} \sin(5x + 2)$ (4) $y = \log \dfrac{x-1}{x+1}$

(佐賀大 2005) (m20054920)

0.516 x と y の関数 $z = \log x - 3x^2 y + 6$ について, 1 次偏微分 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ および 2 次偏微分 $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$ と $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ を求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054921)

0.517 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int (3x^2 + \frac{1}{x})\, dx$ (2) $\displaystyle\int x \cos(x^2 + 1)\, dx$ (3) $\displaystyle\int 10^x\, dx$

(4) $\displaystyle\int \log x\, dx$ (5) $\displaystyle\int x \sin(2x + 1)\, dx$ (6) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + e^x}\, dx$

(佐賀大 2005) (m20054922)

0.518 $\tan \dfrac{x}{2} = t$ とおく. 以下の問に答えよ.

(1) $\dfrac{dx}{dt}$ を求めよ. ただし, 答えは t の関数として表せ.

(2) $\cos x$ を t で表せ.

(3) 変数変換 $\tan \dfrac{x}{2} = t$ を行って, 積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\, dx$ を求めよ.

(4) 曲線 $y = -\log|\cos x|$, $\left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}\right)$ の長さを求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054932)

0.519 (1) 不定積分 $\displaystyle\int (\log x)^2 dx$ を求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 (\log x)^2 dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 (\log x)^2 dx$ の値を求めよ．

(佐賀大 2006)　　(m20064901)

0.520　x が小さいとき，次の式を x の 3 次まで展開せよ．　$e^x + \log(1-x)$

(佐賀大 2006)　　(m20064908)

0.521　次の積分を求めよ．　$\displaystyle\int_1^e x\log x\,dx$

(佐賀大 2006)　　(m20064909)

0.522　次の積分を求めよ．　$\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)\,dxdy$　$(\ D\ :\ x^2+y^2 \leqq 1\ )$

(佐賀大 2006)　　(m20064910)

0.523　次の関数を微分せよ．

(1) $y=(x^2-3x+1)^3$　　(2) $y=(\sin 4x)\log(x-3)$

(佐賀大 2006)　　(m20064936)

0.524　次の関数の一次導関数 dy/dx を求めなさい.

(1) $y=2x^3+3x+5$　　(2) $y=\sin^2 x$　　(3) $y=(2x+1)^3$

(4) $y=x\cdot\log x$　　(5) $y=\exp(x)/x$

(佐賀大 2007)　　(m20074901)

0.525　次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int x^{-3/7}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \cos(3x)\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \tan x\,dx$

(4) $\displaystyle\int 2x\cdot\log x\,dx$　　(5) $\displaystyle\int \frac{1}{1-4x^2}\,dx$

(佐賀大 2007)　　(m20074903)

0.526　次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x\log x\,dx$　（ 不定積分．積分定数を C とせよ．）

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3x^2}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$

(4) $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy$　$\big($ 但し，$D=\big\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq 1,\ x\leqq y\leqq\sqrt{x}\ \big\}\big)$

(佐賀大 2007)　　(m20074907)

0.527　次の関数の極限を求めよ．ただし，log は自然対数とする.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

(佐賀大 2007)　　(m20074909)

0.528　次の関数を x について，微分せよ．但し，log の底は e とする.

(1) $y=\sin 3x\cos 3x$　　(2) $y=(x\sin x)^3$　　(3) $y=(\log x)^2$　　(4) $y=10^x$

(佐賀大 2007)　　(m20074922)

0.529　(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{4x^2+3x-7}{2x^2-5x+3}$ を求めよ.

(2) $y = \log\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$ を微分せよ.

(3) 不定積分 $\displaystyle\int x^2 e^{2x}\,dx$ を計算せよ.

(4) 二変数関数 $f(x,y) = x^2 - 5xy^2 + 3y^2$ に関して，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．また，点 $(3,2)$ における x 方向，y 方向の偏微分係数を求めよ.

(佐賀大 2007)　　(m20074926)

0.530 $0 < a < b$ とするとき，次の問いに答えよ.

(1) 区間 $[a,b]$ で連続な実関数 $f(x)$，$g(x)$ について以下の不等式を証明せよ.

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2 \leqq \int_a^b f(x)^2dx \cdot \int_a^b g(x)^2dx$$

(2) 前問の結果を用いて，次の不等式を証明せよ.

$$\left(\log\frac{b}{a}\right)^2 \leqq \frac{(a-b)^2}{ab}$$

(佐賀大 2009)　　(m20094902)

0.531 関数 $f(x) = (1+x)\log(1+x)$ について，次の問いに答えよ.

(1) 自然数 $n \geq 2$ について，n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ のマクローリン展開を

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

とするとき，a_0，a_1，a_2，a_3 および a_n は何か．ただし，$-1 < x < 1$ とする.

(佐賀大 2009)　　(m20094905)

0.532 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}$ を求めよ.

(2) $y = \sqrt{1 + 2\log x}$ の導関数を求めよ.

(佐賀大 2009)　　(m20094921)

0.533 (1) 次の関数を微分しなさい.

$y = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$

(2) 次の関数を合成関数の微分法で微分しなさい.

(a) $y = \sqrt{x^2+4}$

(b) $y = e^{2x+1}$

(3) 不定形の極限値を求めなさい.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1 - 2\cos x}{x^3}$　（$x \cong 0$ のとき $x = \sin x$ となる関係を利用して解答しなさい）

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x^2}$

(佐賀大 2009)　　(m20094929)

0.534 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 x^3 \log x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 (2+x)\sqrt{1-x^2}\,dx$

(佐賀大 2010) (m20104903)

0.535 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to1}\frac{\log x}{1-x}$$

(佐賀大 2010) (m20104907)

0.536 次の関数の極限を求めよ. ただし, $a>0$ とし, log は自然対数とする.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{\sin x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log\left(1+\frac{2}{x}\right)$

(佐賀大 2010) (m20104908)

0.537 次のそれぞれの関数 $f(x,y)$ について, 以下の問いに答えよ. ただし, log は自然対数とする.

(1) $f(x,y)=\log(1-xy)$ (2) $f(x,y)=x^3+6xy+y^3$

(a) $f_x,\ f_y,\ f_{xx},\ f_{yy}$ および f_{xy} を求めよ.

(b) $f_x=f_y=0$ を満たす (x,y) を求めよ.

(c) (b) で求めた (x,y) について, $f(x,y)$ が極大値か, 極小値か, あるいは極値でないか判定せよ.

(佐賀大 2010) (m20104909)

0.538 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int(x+1/x)\,dx$ (2) $\displaystyle\int\sin x\,dx$ (3) $\displaystyle\int xe^x\,dx$ (4) $\displaystyle\int x\log x\,dx$

(佐賀大 2010) (m20104924)

0.539 次の関数の導関数 dy/dx を求めなさい.

(1) $y=x\sin x$ (2) $y=(ax+b)^n$

(3) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ (4) $y=\log\dfrac{2x}{1+\sin x}$

(佐賀大 2011) (m20114901)

0.540 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le1\,,\ 0\le y\le x\}$ のとき, 重積分 $\displaystyle\iint_D\log(x+y+1)dxdy$ を求めよ.

(佐賀大 2012) (m20124903)

0.541 次の関数 y の導関数 dy/dx を求めなさい.

(1) $y=x^2+\sqrt{x}$ (2) $y=e^{2x^2}$

(3) $y=\sin(3x)\cos x$ (4) $y=x\log x$

(佐賀大 2012) (m20124907)

0.542 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int\left(x^2+\frac{2}{x}\right)dx$ (2) $\displaystyle\int(\log x)\,dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{x-1}dx$ (4) $\displaystyle\int\frac{1}{(3-x)(3-2x)}dx$

(佐賀大 2012) (m20124908)

0.543 次の関数を微分せよ．

(1) $y=\log_{10}3x$　　　(2) $y=\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^3$

(佐賀大 2013)　　(m20134901)

0.544 次の 2 変数関数 $f(x,y)$ について，$f_{xx}+f_{yy}=0$ が成り立つかどうか確かめよ．ただし，log は自然対数とする．

(1) $f(x,y)=e^{-x}\sin y$　　(2) $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$　　(3) $f(x,y)=\log(e^x+e^y)$

(佐賀大 2013)　　(m20134911)

0.545 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\log x}$ を求めよ．

(佐賀大 2013)　　(m20134916)

0.546 次の関数 y の導関数 dy/dx を求めなさい．

(1) $y=x\log_e x-x$　　(2) $y=\dfrac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}$　　(3) $y=\dfrac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}$

(4) $y=3^{-x}$　　(5) $y=\log_e\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|$

(佐賀大 2013)　　(m20134924)

0.547 次の関数 $f(x)$ の微分 $f'(x)$ を計算せよ．

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$　　(2) $f(x)=x\log_{10}x$

(佐賀大 2014)　　(m20144901)

0.548 $n\geqq1$ について $I_n=\displaystyle\int_1^e x(\log x)^n dx$ とおく．ただし，$\log x$ は自然対数とする．

(1) 部分積分法で I_1 を求めよ．

(2) 部分積分法で I_{n+1} と I_n の関係式を求めよ．

(3) I_2，I_3 の値を求めよ．

(佐賀大 2014)　　(m20144914)

0.549 次の関数 y の導関数 dy/dx を求めなさい．

(1) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$　$(ad-bc\neq0)$　　(2) $y=\log_e\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

(3) $y=e^x\left(x^2+1\right)$　　(4) $y=2^{\sin x}$

(佐賀大 2015)　　(m20154904)

0.550 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{1-x}}$　　(2) $\displaystyle\int x\log_e xdx$　　(3) $\displaystyle\int\frac{e^x-1}{e^x+1}$　　(4) $\displaystyle\int\sin^3 xdx$

(佐賀大 2015)　　(m20154906)

0.551 次の関数について答えよ．　　$f(x)=x-1-\log x$　　$(x>0)$

(1) 関数の増減，凹凸，極値などを調べ，グラフの概形を描け．

(2) 極値をとる点の回りでテイラー展開をし，ゼロでない最低次の項を求めよ．

(3) 次の広義の積分を求めよ．　　$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$

(佐賀大 2015)　　(m20154910)

0.552 次の積分について，問いに答えよ．ただし，log は自然対数である．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^4+x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1}dx$ を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 x^2 \log x dx$ を求めよ．

(3) $D = \left\{(x, y) \ : \ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$ として，2 重積分 $\displaystyle\iint_D \cos(x+y)dxdy$ を求めよ．

(佐賀大 2016)　　(m20164903)

0.553 次の関数を微分しなさい．

(1) $-3x^2+x+\dfrac{1}{x^2}$　　(2) x^3e^{-x}　　(3) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3$　　(4) $\dfrac{x^2}{\log x}$

(佐賀大 2016)　　(m20164906)

0.554 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int (x^5-3x^2+2x)dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$　　(3) $\displaystyle\int \sin^3 x dx$　　(4) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$

(佐賀大 2016)　　(m20164908)

0.555 次の微分を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

(1) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$　　(2) $y = e^{-x}\sin x$　　(3) $y = \dfrac{\log x}{x}$

(佐賀大 2016)　　(m20164911)

0.556 次の関数を微分せよ．

(1) e^{3x}　　(2) $\log_a x$ $\left(\text{ヒント}:\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}\right)$　　(3) $\log_{10}(\log_{10} x)$

(佐賀大 2016)　　(m20164921)

0.557 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+3x+1}{x^2+1}dx$　　(2) $\displaystyle\int \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$

(3) $\displaystyle\int \cos^4 x\ \sin x dx$　　(4) $\displaystyle\int xe^{x^2}dx$

(佐賀大 2016)　　(m20164932)

0.558 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \log_{10} 5x$　　(1) $y = \left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^4$

(佐賀大 2017)　　(m20174907)

0.559 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)dx$ について，次の問いに答えよ．ただし，log は自然対数である．

(1) この広義積分が収束することを示せ．

(2) $I = -\dfrac{\pi}{2}\log 2$ であることを示せ．

(佐賀大 2017)　　(m20174918)

0.560 次の極限値を求めなさい．.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)} - \frac{x}{x^2-1}\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3\arcsin\frac{x}{5}}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left\{\log(3x+1)-\log 3x\right\}$

(佐賀大 2018)　　(m20184901)

0.561 次の関数を微分せよ．

(1) $\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+1}$　　(2) $\log\dfrac{\cos x}{x}$

(佐賀大 2018)　　(m20184909)

0.562 次の問いに答えよ．ただし，log は自然対数であり，e は自然対数の底である．

(1) 次の不定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int\frac{dx}{3+\cos x}$　　(b) $\displaystyle\int\frac{dx}{e^x+1}$

(2) 次の定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_1^e x\log x dx$　　(b) $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(佐賀大 2018)　　(m20184917)

0.563 次の関数 y の導関数 dy/dx を求めよ．

(1) $y=x^2e^{-x}$　　(2) $y=\tan x$　　(3) $y=\dfrac{x^2}{\log x}$　　(4) $y=\sqrt{\dfrac{(1-x)(x^2+3)}{(x-1)^2}}$

(佐賀大 2018)　　(m20184921)

0.564 次の関数 z の偏導関数 $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ を求めなさい．

(1) $z=x\log\dfrac{y}{x}$　　(2) $z=e^{3x}\sin 2y$

(佐賀大 2018)　　(m20184923)

0.565 つぎの関数の 3 階導関数を求めよ．

(1) $x^3\log x$　　(2) $e^{ax}\sin bx$

(佐賀大 2018)　　(m20184926)

0.566 次の問いに答えよ．ただし，log は自然対数であり，e は自然対数の底である．

(1) 次の極限を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-7x^2+2x+3}{2x^3-7x^2+7x-2}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

(2) 次の微分を求めよ．

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$　　(b) $\tan^2(x)$

(佐賀大 2021)　　(m20214915)

0.567 次の積分を求めよ．ただし，log は自然対数であり，e は自然対数の底である．

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+1}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^{2x}\,dx$

(佐賀大 2021)　　(m20214916)

0.568 つぎの積分をせよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1\log(x^2+1)\,dx$

(佐賀大 2022)　　(m20224902)

0.569 次の関数を微分せよ.

(1) $e^{5x}\sin 2x$ (2) $\log_e(\log_e x)$

(佐賀大 2022) (m20224905)

0.570 関数 $f(x)=\log x$ の $x=1$ におけるテイラー級数を $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-b)^k$ の形で求めよ.

(佐賀大 2022) (m20224914)

0.571 次の関数 y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい.

(1) $y=(x+3)^8$ (2) $y=\sin(2x)$ (3) $y=e^{\cos x}$

(4) $y=\sqrt{x^3+x^2+1}$ (5) $y=\log(x^3+1)$ (6) $y=\dfrac{\log(x)}{x^2+3}$

(佐賀大 2022) (m20224919)

0.572 次の関数 f の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めなさい.

(1) $f=3xy+2z$ (2) $f=\log x^y$

(佐賀大 2022) (m20224920)

0.573 次の不定積分を求めなさい．積分定数を C とする．必要な計算過程も記すこと.

(1) $\displaystyle\int(\cos x+3x^3)dx$ (2) $\displaystyle\int\sin^2(x)dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{(x-3)(x+2)}dx$ (4) $\displaystyle\int x^3\log(x)dx$

(佐賀大 2022) (m20224921)

0.574 水中の砂糖は，そのとき残っている量に比例する速度で溶解する．$50g$ の砂糖が $15g$ に減るのに 3 時間かかるとすれば，砂糖の 20 % が溶解するのには何時間かかるか答えなさい．必要ならば $\log(5)$, $\sqrt{3}$ 等の表記を用いて解答してよい．ただし，必要な計算過程を記すこと.

(佐賀大 2022) (m20224923)

0.575 次の導関数を示せ.

(1) x^n (2) e^x (3) $\log x$ (4) $\sin x$ (5) $\tan x$

（長崎大 2004） (m20045003)

0.576 不定積分 $\displaystyle\int x^2\log x dx$ を計算せよ.

(長崎大 2005) (m20055011)

0.577 次の関数を x について不定積分せよ.

$$I=\int x\log x\,dx$$

(長崎大 2007) (m20075009)

0.578 袋の中に 100 個のくじが入っており，その内 27 個が当りくじである．次のルールに従ってこのくじを引く.

[ルール]

袋の中からくじを 1 つ引き，当りかはずれを確認した後，そのくじを再び袋の中に戻す.

(1) このくじを 2 回引き，どちらもはずれる確率を求めなさい.

(2) このくじを 3 回引き，少なくとも 1 回は当たる確率を小数第 5 位を四捨五入し，小数第 4 位まで求めなさい.

(3) このくじを何回か引いたとき，少なくとも 1 回は当たる確率が 0,9999 よりも大きくなるには，何回以上引く必要があるか．ただし，$\mathrm{Log}_{10}7.3 = 0.8633$ として計算しなさい．Log_{10} は常用対数（底が 10 の対数）を表す．

(長崎大 2008)　　(m20085002)

0.579 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}}{x^3}$ を求めよ．

(長崎大 2008)　　(m20085008)

0.580 (1) $e^{a\sqrt{x}}$ の微分を求めよ. ただし, a は実定数である.

(2) $x^k\sin ax$ の微分を求めよ. ただし, k は整数, a は実定数である.

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(a^x+b^x)-\log 2}{x}$ を計算せよ. ただし, $a,\ b$ は正定数である.

(長崎大 2010)　　(m20105011)

0.581 $\log_e\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ を x で微分せよ.

(長崎大 2011)　　(m20115001)

0.582 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int\frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx\quad(a>0)$

(長崎大 2011)　　(m20115010)

0.583 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int\log x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

(大分大 2009)　　(m20095101)

0.584 $x>0$ のとき，$0<x\log(1+\dfrac{1}{x})<1$ であることを示せ.

（熊本大 2001）　　(m20015201)

0.585 以下の証明問題に答えなさい.

(1) 自然数 n に関する不等式 $2^n>2n-1$ について，数学的帰納法により証明しなさい.

(2) $\log_{10}2$ が無理数であることを，背理法により証明しなさい.

(熊本大 2013)　　(m20135201)

0.586 2 変数関数 $f(x,y)=\log(1+x^2+2y^2)$ について，次の各問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

(2) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\ (r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくとき，関数 f の $r,\ \theta$ に関する偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial r},\ \dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ を $x,\ y$ のみを用いて表せ.

(宮崎大 2007)　　(m20075302)

0.587 次の微分, 積分を求めなさい.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\log x}{\sqrt{x^2+2}}\right)$

(2) $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\sin^3 x\right)$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(x^4 - 2\sin x\right) dx$

(4) $\displaystyle\int xe^{-x} dx$

(鹿児島大 2005)　　(m20055405)

0.588 次の x に関する関数において，1 階の導関数を求めなさい.

(1) $\dfrac{1}{1-x}$

(2) $\sin 2x + \cos x$

(3) $e^x \log x$

(鹿児島大 2005)　　(m20055409)

0.589 次の関数を微分せよ.

(1) $y = (8-x)^2 + 3x$　　(2) $y = \log x \cdot e^{-x}$　　(3) $y = \sin x \cdot (1 + \cos x)$

(鹿児島大 2006)　　(m20065411)

0.590 (1) 曲線 $y = \log x$ の $x = a$ における接線の方程式を求めなさい,

(2) 方程式 $\log x = kx$ が実数解を持たない k の範囲を求めなさい.

(鹿児島大 2007)　　(m20075406)

0.591 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)$　　(2) $y = \tan(x) \cdot \log(x)$

(鹿児島大 2007)　　(m20075409)

0.592 次の微分・積分を求めなさい.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\log\left|x + \sqrt{x^2+2}\right|\right)$　　(2) $\displaystyle\int e^x \cdot \sin x \, dx$

(鹿児島大 2008)　　(m20085405)

0.593 微積分に関する以下の問に答えよ.

(1) 次の微分を計算し，簡単な式で表せ.

(a) $\dfrac{d}{dx}\sin(\tan x)$　　(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\log 2x \cdot \tan x^2\right)$

(2) 次の不定積分を求めよ．ただし，a, b は任意定数とする.

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + (a-b)x - ab} dx$　　(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$

(鹿児島大 2009)　　(m20095413)

0.594 次の微分・定積分を求めなさい.

(1) $\dfrac{d}{dx}(\log|\cos x|)$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x} dx$

(鹿児島大 2009)　　(m20095417)

0.595 次の微分を計算し, 簡単な式で表せ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\log(\cos x)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}\right)$

(鹿児島大 2010)　　(m20105401)

0.596 以下の問に答えよ.

(1) x の関数 $f(x)$, $g(x)$ について，以下の部分積分法の公式
$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$
が成り立つことを示せ.

(2) 上記の公式を利用して，不定積分 $\displaystyle\int \log x\, dx$ を求めよ.

(3) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とする．このとき，$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$ であることを示せ.

(4) 前問の結果を利用して，不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$ を求めよ.

(鹿児島大 2011) (m20115401)

0.597 次の微分を求めなさい.
$$\frac{d}{dx}\left(\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right)$$
(ただし，対数は自然対数とする.)

(鹿児島大 2011) (m20115409)

0.598 次の微分を計算し，簡単な式で表せ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\{\sin(x^3)\}$ (2) $\dfrac{d}{dx}(\log x \cdot \cos x)$

(鹿児島大 2012) (m20125401)

0.599 次の微分を計算し，簡単な式で表せ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{e^{2x}}{2}\log(x^2+1)\right\}$ (2) $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{\cos^2 x}{(2x+1)^2}\right\}$

(鹿児島大 2012) (m20125406)

0.600 次の微分を求めなさい.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\log x\right)$ (ただし，対数は自然対数とする.)

(鹿児島大 2012) (m20125411)

0.601 以下の微分を計算せよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left\{\log\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)\right\}$ (ただし, $0 < x < \pi$)

(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right)$ (ただし, $-1 < x < 1$)

(鹿児島大 2013) (m20135401)

0.602 以下の (a), (b), (c) を値が大きいものから順に答えよ.

(a) $\log_2 3$, (b) $\log_3 2$, (c) $\log_4 4$

(鹿児島大 2014) (m20145402)

0.603 以下の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}dx$

(鹿児島大 2015) (m20155402)

0.604 次の不定積分を求めなさい.
$$\int x^2 \log x dx$$

(鹿児島大 2015) (m20155407)

0.605 太陽光はあるガラスの板を 1 枚透過すると，その強さの 20%が失われる．太陽光の強さを元の 10%以上に保ちたい．このガラスを何枚まで重ねても良いか．以下の (1),(2) に答えよ．

(1) 重ねても良いガラスを何枚を求める式を答えよ．

(2) (1) の式の計算方法を説明し，その結果を答えよ．ただし，必要であれば $\log_{10} 0.8 = -0.1$ を用いよ．

(鹿児島大 2015)　　(m20155412)

0.606 以下の微分を計算せよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\log(x^2+4x+4)$　(ただし，$x>0$)　　(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right)$　(ただし，$0<x<\pi$)

(鹿児島大 2016)　　(m20165401)

0.607 対数についての以下の問いに答えよ．ただし，a,b,c,M は 1 でない正の数が入るものとする．

(1) 底とは $\log_a M = b$ の式のどの記号であるか．

(2) 底の変換公式とは次の (ア) から (エ) のうちのどれか．

（ア）　$\log_a M = \dfrac{\log_a b}{\log_M b}$　　（イ）　$\log_a M = \dfrac{\log_M b}{\log_a b}$

（ウ）　$\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_a b}$　　（エ）　$\log_a M = \dfrac{\log_c M}{\log_c a}$

(鹿児島大 2016)　　(m20165412)

0.608 $\log M$ は $\log_{10} M$ の 2.303 倍で近似される（≒で結ばれる）．近似ではなく完全に等号（＝）で結ぶには対数表記で何倍すればよいか．ただし，$\log M = \log_e M$ である．

(鹿児島大 2016)　　(m20165413)

0.609 次の関数を x で微分しなさい．

$y = x^{\log_e(x)}$　　$(x>0)$

(鹿児島大 2017)　　(m20175416)

0.610 次の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^3 (9x^2+4x)\log x dx$

(鹿児島大 2018)　　(m20185402)

0.611 $\displaystyle\int \log x dx$ $(x>0)$ の不定積分を計算しなさい．

(鹿児島大 2018)　　(m20185413)

0.612 以下の微分を計算せよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2-4x-5}{x^2+3x+2}\right)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\big[\cos(\log ax)\big]$

(鹿児島大 2021)　　(m20215401)

0.613 以下の積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2 x^3 \log x\,dx$

(鹿児島大 2021)　　(m20215402)

0.614 $\dfrac{d\big(\log(x^2+3)+\sin^2 3x\big)}{dx}$ を求めなさい．ただし，log は自然対数である．

(鹿児島大 2021)　　(m20215406)

0.615 関数 $y = \log(x^2+3)$ について次の問いに答えよ. ただし, log は e を底とする自然対数である.

(1) 関数 y の導関数を求めよ.

(2) 関数 y の第 2 次導関数を求めよ.

(室蘭工業大 2005)　　(m20055512)

0.616 以下の関数の導関数を求めよ.

(1) $(ax+b)^n$　　(2) $\sqrt{1-x}$　　(3) $\log(ax+b)$　　(4) $e^{\frac{1}{x}}$

(室蘭工業大 2006)　　(m20065513)

0.617 次の微分, 不定積分を計算せよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(xe^{-2x}\right)$

(2) $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x(x^2+12)}{x^4-16}\,dx$

(室蘭工業大 2009)　　(m20095501)

0.618 正の整数 N が 1 に較べて充分大きいとき, $N!$ は $(N\ln N - N)$ と近似できることを示せ. ただし, $\ln N = \log_e N$ である.

(室蘭工業大 2011)　　(m20115504)

0.619 (1) から (3) の関数をそれぞれ微分せよ.

(1) $y = -\cos(2x)$　　(2) $y = e^{-3x^2}$　　(3) $y = \log(2x^2+1)$

(室蘭工業大 2015)　　(m20155507)

0.620 次の関数を微分せよ.

(1) $y = x^3\cos 3x$　　(2) $y = \log\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$　　(3) $y = \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^3$

(室蘭工業大 2015)　　(m20155514)

0.621 次の不定積分を求めよ.

$$\int (\log x)^2 dx$$

(室蘭工業大 2018)　　(m20185502)

0.622 関数 (1) と (2) を x で微分せよ.

(1) $y = \log\left(x^3+4x^2+5x+2\right)$　　(2) $y = \cos\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)e^{-x}$

(室蘭工業大 2018)　　(m20185505)

0.623 次の各問に答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x$ を求めよ.

(2) $f(x) = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ を微分せよ.

(3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$ を求めよ.

(岡山県立大 2005)　　(m20055601)

0.624 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)$ を求めよ．　(2) $f(x)=e^{\sin^{-1}x}$ を微分せよ．

(3) $\displaystyle\int \log(1+x^2)dx$ を求めよ．

(岡山県立大 2006)　(m20065601)

0.625 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$ を求めよ.　(2) $f(x)=\log|\sin^{-1}x|$ を微分せよ.

(岡山県立大 2007)　(m20075601)

0.626 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x^2)}{\sin x}$ を求めよ.　(2) $f(x)=\log\left|\dfrac{x}{x+1}\right|$ を微分せよ.　(3) $\displaystyle\int x\log x\,dx$ を求めよ.

(岡山県立大 2008)　(m20085601)

0.627 $I_n=\displaystyle\int(\log x)^n dx \quad (n \geqq 0)$ とする．以下の問に答えよ．ただし，log は自然対数である．

(1) I_0 , I_1 および I_2 を計算せよ．

(2) (1) を参考にして，$n \geqq 1$ における I_n と I_{n-1} の関係を類推し，それが正しいことを示せ．

(香川大 2006)　(m20065701)

0.628 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-4x^2}{8x^4+5x^3}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{4x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x\right)$

(香川大 2016)　(m20165701)

0.629 $z=x^2+y^2$ について次の問いに答えよ.

(1) $w=\log(z)$ の関係があるとき, 2 階偏導関数 w_{xx}, w_{xy}, w_{yx}, w_{yy} を求めよ.

(2) 曲面 z と平面 $x+y=2$, ならびに 3 つの座標平面で囲まれる立体の体積 V を求めるための 2 重積分の式を記述せよ. ただし, 体積 V は計算で求めなくともよい.

(香川大 2016)　(m20165702)

0.630 (1) $\log(1+2x)$ をマクローリン展開せよ. ただし, 剰余項および収束域は求めなくてよい.

(2) 次の極限を求めよ.　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\log(1+2x)}$

(香川大 2019)　(m20195701)

0.631 $z=\dfrac{\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ のとき偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ を求めよ.

(香川大 2020)　(m20205702)

0.632 $z=\log_{10}(x^2+y^2+1)$ の $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ を求めよ.

(香川大 2022)　(m20225703)

0.633 (1) 関数 $\dfrac{\log x}{x}$ の不定積分を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_n^{2n}\frac{\log x}{x}dx$ は正の無限大に発散することを示せ.

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}$ が収束するならば, その極限値を求めよ. もし発散するならば, その理由を述べよ.

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ をみたす数列 a_n に対して　$b_n = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n}$　とおくとき，$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ は正しいだろうか？ 正しければその理由を述べよ．もし正しくなければ反例を一つ与えよ．

(島根大 2007)　　(m20075805)

0.634 (1) $\log(1+x)$　$(-1 < x < 1)$ の第 n 次導関数を求めよ．

(2) $\log(1+x)$　$(-1 < x < 1)$ のマクローリン展開を求めよ．

(3) $\log 2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{2^n} + \cdots$ を示せ．

(島根大 2010)　　(m20105802)

0.635 自然数 $n = 1, 2, \cdots$ に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = n^2 x^{n+1} \log x \quad (x > 0)$$

と定める．次の問いに答えよ．

(1) $f_n(x)$ の最小値を求めよ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ を計算せよ．

(3) $0 < x \leqq 1$ を満たす各 x に対して $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．さらに $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とするとき，次の等式が成り立つかどうかを調べよ．

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$$

(島根大 2016)　　(m20165803)

0.636 閉区間 $[a, b]$ で連続で，開区間 (a, b) で微分可能である関数 $f(x)$ に対して，次の命題（平均値の定理）が成り立つ．

ある $c(a < c < b)$ が存在して

$$(*) \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

次の問いに答えよ．

(1) $f(x) = x^2$ のとき，区間 (a, b) において，$(*)$ が成り立つような c を求めよ．

(2) 閉区間 $[a, b]$ で連続かつ，開区間 (a, b) で 2 回微分可能でつねに $f''(x) > 0$ を満たす関数 $f(x)$ を考える．このとき，区間 (a, b) において関数

$$F(x) = \frac{f(b)(x-a) + f(a)(b-x)}{b-a} - f(x)$$

はつねに正であり，かつ $F(x)$ の極大値が区間 (a, b) において，ただ一つだけ存在することを示せ．

(3) $b > a > 1$ とする．次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{b^2 - a^2}{2ab} > \log\frac{b}{a}$$

(島根大 2017)　　(m20175806)

0.637 $f(x) = -\log\cos x$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{f(x)}$ を求めよ．

(3) $-\pi/2 < x < \pi/2$ のとき，$f(x) \geq x^2/2$ であることを示せ.

(4) 曲線 $y = f(x)$ の，$0 \leq x \leq \pi/3$ の部分の長さを求めよ.

(島根大 2018)　　(m20185806)

0.638 関数 $f(x) = x^2 \log_e \dfrac{1}{x^2}$ について以下の問に答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の最大値を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ を求めよ

(首都大 2004)　　(m20045904)

0.639 次の関数を積分せよ.

(1) $x \log x$　　(2) $\dfrac{x^2 - x + 1}{(x-1)(x-2)^2}$

(首都大 2007)　　(m20075904)

0.640 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x \log x}\, dx$　　(2) $\displaystyle\int e^x \sin x\, dx$

(首都大 2011)　　(m20115907)

0.641 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int x^2 \cos x\, dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{\left(\log x\right)^2}{x}\, dx$

(首都大 2012)　　(m20125907)

0.642 次の関数を微分しなさい.

(1) $f(x) = (2x-1)\, e^x$

(2) $f(x) = \log|\sin x|$　　($x \neq n\pi$, n は整数)

(3) $f(x) = x^x$　　$(x > 0)$

(首都大 2014)　　(m20145904)

0.643 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x} dx$　　(2) $\displaystyle\int x\left(\log x\right)^2 dx$

(首都大 2014)　　(m20145907)

0.644 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int x \log x\, dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$

(首都大 2015)　　(m20155908)

0.645 次の微分方程式が完全形であることを示し，一般解を求めなさい.

$$\left(x^3 + \log y\right)dx + \frac{x}{y}dy = 0$$

(首都大 2016)　　(m20165905)

0.646 次の文章中の $\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{ウ}}$ に入れるのに最も適当な数を答えなさい.

$-\log(1-3x)$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めると, $\boxed{\text{ア}}x+\boxed{\text{イ}}x^2+\boxed{\text{ウ}}x^3$ が得られる.

(首都大 2016)　　(m20165906)

0.647 次の関数を微分しなさい. 解答は答えのみでよい.

(1) $f(x)=\sqrt{x}e^{-x}$　　(2) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$　　(3) $f(x)=\cos^{-1}(\log x)$

(首都大 2017)　　(m20175901)

0.648 次の関数を微分しなさい. ただし, a は正の実数とする.

(1) x^x　　$(x>0)$　　(2) $x\sqrt{x^2+a}+a\log(\sqrt{x^2+a}+x)$

(首都大 2018)　　(m20185904)

0.649 関数 $\sqrt{1+x}+\log(1+x)$ のマクローリン級数を x^3 の項まで求めなさい.

(首都大 2018)　　(m20185906)

0.650 次の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log(\sin x)$

(首都大 2019)　　(m20195906)

0.651 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \log x dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}dx$

(首都大 2019)　　(m20195907)

0.652 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\log(1+x)}{x^2}\right\}$ を求めなさい.

(東京都立大 2020)　　(m20205906)

0.653 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sqrt{x}\log x\,dx$

(東京都立大 2020)　　(m20205907)

0.654 $f(x)=\log\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ を x について微分せよ.

(東京都立大 2022)　　(m20225903)

0.655 $y=\sinh x=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ の逆関数 $y=\sinh^{-1}x$ について, 次の式を示せ.

$$y=\sinh^{-1}x=\log\bigl(x+\sqrt{x^2+1}\bigr),\qquad y'=\frac{d}{dx}\sinh^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(滋賀県立大 2005)　　(m20056001)

0.656 $y=\cosh x=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ の逆関数 $y=\cosh^{-1}x$ について, 次の各式を示せ.

(1)

$$y=\cosh^{-1}x=\pm\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

(2) $y>0$ の $y=\cosh^{-1}x=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ について

$$y'=\frac{d}{dx}\cosh^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

(滋賀県立大 2011)　　(m20116001)

0.657　(1)　次の関数を微分せよ．ただし $a>0$ とする．

$$y=\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\ \right|$$

(2)　m と n を正の整数とするとき，次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\ dx$$

(宇都宮大 2005)　　(m20056103)

0.658　$\log_x 4-\log_2 x=1$ を解け.

(宇都宮大 2007)　　(m20076108)

0.659　次の 2 変数関数 $z=z(x,y)$ の極値を求めよ. ただし, x の定義域は $x>0$ とする.

$$z=z(x,y)=-\frac{1}{2}xy-\log x+y^2+3y+2$$

(宇都宮大 2010)　　(m20106104)

0.660　$y=\log\left(x^2+1\right)$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ.

(宇都宮大 2014)　　(m20146104)

0.661　a,b を正の実定数とするとき，微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+a^2y^2=b^2 \tag{2-1}$$

について，下の問いに答えよ.

(1)　$\alpha(\alpha\neq 0)$, β を実定数，C を積分定数とするとき，つぎの不定積分が成り立つことを示せ.

$$\int\frac{1}{\alpha x+\beta}dx=\frac{1}{\alpha}\log_e|\alpha x+\beta|+C \tag{2-2}$$

(2)　微分方程式 (2-1) の一般解を y について解け．なお，計算過程も記入せよ.

(3)　微分方程式 (2-1) を条件 $x=0$, $y=0$ のもとで y について解いた特殊解を求めよ．なお，計算過程も記入せよ.

(4)　(3) で求めた特殊解は，x が十分に大きいとき一定の値に近づく．この一定の値を求めよ．なお，計算過程も記入せよ.

(宇都宮大 2019)　　(m20196102)

0.662　$\log x$ は自然対数を表すものとして，下の問いに答えよ.

問 1　C を積分定数とするとき，積分公式

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}=\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+C \quad (A\neq 0)$$

を証明せよ.

問 2　問 1 の公式を用いて関数 $y=y(x)$ に関する 1 階の微分方程式

$$y'=\sqrt{1+y^2}$$

の一般解を求め，さらに $x=0$ のとき $y=0$ となるもの（特殊解）を求めよ．なお，計算過程も記入せよ.

問 3　問 2 の特殊解を積分して

$$f(x) = \int_0^x y dx$$

を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(宇都宮大 2022)　　(m20226104)

0.663　$\log_{16} 2 + \log_8 4 + \log_2 a = 1$ のとき，実数 a を求めよ．

(工学院大 2003)　　(m20036201)

0.664　次の極限値を求めよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^3}{\sqrt{x}}$

(はこだて未来大 2007)　　(m20076303)

0.665　自然数 n に対して

$$I(n) = \int_1^e \frac{1}{x^n} \log x \, dx$$

とおくとき, 以下の問いに答えよ.

(1)　部分積分法を用いて, $f(2)$ を求めよ.

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I(n)$ を求めよ.

(はこだて未来大 2010)　　(m20106304)

0.666　(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0} x\left(\frac{e^{1/x} - 1}{e^{1/x} + 1}\right)$ を求めよ.

(2)　$0 < x < \pi$ のおいて，$\dfrac{d}{dx} \log\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)$ を求めよ.

(3)　$\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{3}{5} + \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{4}{5}$ を求めよ.

ただし．$\sin x$ の逆関数 $\mathrm{Sin}^{-1}x$ の値域は，$\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ とする.

(はこだて未来大 2015)　　(m20156302)

0.667　(1)　$0 < x < \pi$ において，$\displaystyle\int (\sin x)\log(\sin x) dx$ を求めよ.

(はこだて未来大 2015)　　(m20156303)

0.668　(1)　広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx$ を求めよ.　　(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ を求めよ.

(はこだて未来大 2018)　　(m20186302)

0.669　(1)　不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 + 2x^2 + x} \, dx$ を計算せよ.

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^3 \log x \, dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2010)　　(m20106403)

0.670　次の重積分の値を求めよ.

(1)　$\displaystyle\iint_D (x+y) dxdy\ ,\quad D = \{(x,y) \mid y^2 \leqq\ x \leqq\ y\}$

(2)　$\displaystyle\iint_D \log(x^2 + y^2) dxdy\ ,\quad D = \{(x,y) \mid 1 \leqq\ x^2 + y^2 \leqq\ 4\}$

(東京海洋大 2011)　　(m20116405)

0.671 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x-3}{x^4-1}\,dx$ を計算せよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\log x}}\,dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2012) (m20126404)

0.672 次の関数を微分しなさい.

(1) $f(x)=x^2+x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$

(2) $f(x)=x^2\cos\dfrac{1}{x}$

(3) $f(x)=\left(x^2+\sqrt{x}+1\right)^{\frac{3}{2}}$

(4) $f(x)=\log_e(x^3+x+1)$

(東京海洋大 2012) (m20126407)

0.673 以下の関数を x で微分しなさい.

(1) $y=2x^3-5x^2$

(2) $y=\sin^2 x$

(3) $y=\left\{\log\left(\sqrt{x}+1\right)\right\}^2$

(4) $y=\displaystyle\int_x^{2x}\sin\theta d\theta$

(東京海洋大 2013) (m20136401)

0.674 お湯を入れたポットを一定温度に保たれた室内に放置した時のお湯の温度変化について, 次の問に答えなさい. 但し, ポット内のお湯の温度に分布は無いものとする.

(1) ポット内のお湯の温度 T が冷める速さ $-dT/dt$ は T と室内の温度 T_{room} との差に比例する. 比例定数を k として, $-dT/dt$ を k, T 及び T_{room} を用いて表しなさい.

(2) T を t, k, T_{room} 及び積分定数 C を用いて表しなさい.

(3) 95℃ のお湯を入れたポットを 15℃ の室内に放置したところ, 90 分後にお湯の温度は 75℃ になっていた. お湯の温度が 95℃ から 55℃ になるまでの時間（分）を求めなさい. 但し, $\log_e 2=0.7$, $\log_e 3=1.1$ としなさい.

(東京海洋大 2013) (m20136404)

0.675 ある時間における細胞の増殖速度は, その時, 生きている細胞数（または細胞濃度）に比例すると考える. 以下の問いに答えなさい.

(1) 生きている細胞濃度を X[個$/m^3$], 時間を $t[h]$, 比例定数を $k[1/h]$ として, 次のアおよびイにそれぞれ適切な記号を入れて細胞の増殖をあらわす速度式を完成させなさい.

$$\frac{dX}{dt}=\boxed{\text{ア}}\,\boxed{\text{イ}}$$

(2) 時間 $t=0$ における細胞濃度を X_0[個$/m^3$] として, t 時間後のおける細胞濃度をあらわす式を導きなさい. ただし, 導出過程も答案用紙に書きなさい.

(3) 比例定数を $k[1/h]$ は比増殖速度と呼ばれる. 37℃ における大腸菌の比増殖速度 $k[1/h]$ が 2 であるとき, 細胞濃度 X_0[個$/m^3$] が X_0 の 10 倍になる時間を求めなさい. ただし, 温度は 37℃ で一定であるとし, $\log_e 10=2.302$ とする.

(東京海洋大 2015) (m20156404)

0.676 次の関数を x で微分しなさい.

(1) $x^2(x^3-x^2)$ (2) $(x^2-2x+5)^4$ (3) $e^{2x}\sqrt{x}$ (4) $\dfrac{\sin x}{x}$ (5) $x\log_e x$

(東京海洋大 2016) (m20166401)

0.677 次の定積分，または不定積分を求めなさい．

(1)$\displaystyle\int(7x^3+3x^2+2x+5)dx$　(2)$\displaystyle\int x^5\log x\ dx$　(3)$\displaystyle\int_3^5\frac{dx}{x^2+3x-10}$　(4)$\displaystyle\int_0^2\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx$

(東京海洋大 2017)　(m20176402)

0.678 次の関数を x で微分しなさい．

(1) $y=\dfrac{1}{2x+5}$　(2) $y=\sqrt{1-x^2}$

(3) $y=\dfrac{\log_e x}{x^2}$　(4) $y=\cos(5x-3)$

(東京海洋大 2021)　(m20216401)

0.679 (1) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{x+2}{x^3-1}dx$ を計算せよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^{e^5}\frac{\sin(\pi\log x)}{x}dx$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2021)　(m20216408)

0.680 (1) $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1\leqq x\leqq 2,\ \sqrt{x}\leqq y\leqq x\right\}$ に対し，重積分 $\displaystyle\iint_D 2y\log x\ dxdy$ の値を求めよ．

(2) $E=\{(x,y)\mid 0\leqq x+y\leqq 2,\ 0\leqq x-y\leqq 1\}$ に対し，重積分 $\displaystyle\iint_E(x^2-y^2)\ dxdy$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2021)　(m20216410)

0.681 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}dxdy,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \sqrt{y}\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_E\log(x^2+y^2+9)dxdy,\qquad E=\left\{(x,y)\ \middle|\ 2\leqq x^2+y^2\leqq 5,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$

(東京海洋大 2022)　(m20226405)

0.682 次の関数を x で微分しなさい．

1) $y=(x^2+x+3)(x^2-x+2)$　2) $y=\left(1+x^2\right)^3$

3) $y=\dfrac{1}{(x+2)^2(x+5)^2(x+7)}$　4) $y=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

(東京海洋大 2022)　(m20226406)

0.683 次の不定積分，または定積分を求めなさい．

1) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}dx$　2) $\displaystyle\int 2\sin x\cos x dx$

3) $\displaystyle\int_1^4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx$　4) $\displaystyle\int_1^2 x^2\log x\ dx$

(東京海洋大 2022)　(m20226407)

0.684 $f(x,y)=\log(1+x+y^2)$ のマクローリン展開を, 2 次の項まで求めなさい．

(和歌山大 2010)　(m20106508)

0.685 関数 $f(x)=x^n\log x$ を積分しなさい．ただし, n は整数である．

(和歌山大 2016)　(m20166502)

0.686 a が 0 でない実数のとき，次の不定積分を求めなさい．

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$$

なお，解答に際して，

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C \qquad （C \text{ は積分定数}）$$

を用いてよい．

(和歌山大 2017) (m20176501)

0.687 関数 $f(x) = \log(1+x)$ に対して, 3 次までのマクローリン展開を求めよ.

(東京工科大 2010) (m20106904)

0.688 x, y は正の値をとる実数の変数とし, $\log_2(2x^2y) = 2$ を満たしているとする.

(1) $x = 1$ のとき, $\log_2(2x^2y) = 2$ を満たす実数 y の値を求めよ.

(2) $\log_2 y = -2\log_2 x + 1$ となることを示せ.

(3) $z = (\log_2 y)^2 + 12\log_2 x - 3$，$X = \log_2 x$ とするとき，$z = 4X^2 + 8X - 2$ となることを示せ. また，　z の最小値とそのときの x, y の値を求めよ.

(東京工科大 2010) (m20106906)

0.689 (1) i は虚数単位とする．$\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$ の実部と虚部を求めよ．

(2) $0 < x < 1$ のとき，方程式 $\log_3 x - 3\log_x 9 + 1 = 0$ を解け．

(3) 不等式 $\sin 2\theta > \sin\theta$ を満たす θ の値の範囲を求めよ．

(富山県立大 2017) (m20177101)