[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　∞

0.1 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，

(1) 固有値を求めよ．

(2) 単位固有ベクトルを求めよ．

(3) $\exp(X) = E + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$ と定義されている時，$\exp(tA)$ を求めよ．ただし，t ：定数

(北海道大 1997)　(m19970102)

0.2 (1) 次の関数 $f(x)$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$ のフーリエ級数を求めなさい．

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

(2) 次の関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(k)$ を

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

とし，$i = \sqrt{-1}$ とする．次の関数のフーリエ変換 $F(k)$ を求めなさい．

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

(北海道大 2008)　(m20080104)

0.3 (1) 関数 $f(t) = \cos(\omega t)$ の（片側）ラプラス変換

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

を求めなさい．ただし，e は自然対数の底で，s はその実数部が正の複素数である．

(2) $s = c + i\phi$ とおく．ここで，i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ で，c, ϕ は実数とする．このとき，$G(\phi) = \displaystyle\lim_{c \to +0} cF(c + i\phi)$ を求めなさい．

(北海道大 2009)　(m20090103)

0.4 関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

とし, 関数 $F(\omega)$ のフリーエ逆変換 $f(t)$ を

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

とするとき．次の設問に答えよ．ただし, $i = \sqrt{-1}$ であり，途中の計算手順を詳しく記述すること．

(1) 関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が $e^{-a\omega^2}$ であるとき，もとの関数 $f(t)$ を求めよ．ただし，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

を利用せよ．ここで，$a > 0$ である．

(2) 以下の関係式を満たす関数 $f(t)$ を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)f(\tau)d\tau = e^{\frac{t^2}{2}}$$

(北海道大 2011) (m20110102)

0.5 以下の設問に答えよ. 途中の計算手順を詳しく記述すること.

(1) $f(x)=x$ を区間 $[-\pi,\,\pi]$ 上でフーリエ級数に展開した結果が
$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin(nx)}{n}$
となることを示せ.

(2) $-\pi \leq a \leq \pi$ を満たす任意の定数 a に対して, x の区間 $[-\pi,\,\pi]$ において
$x^2 = a^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\cos(nx)-\cos(na)}{n^2}$
が成立することを示せ.

(3) (2) の結果を用いて, x の区間 $[-\pi,\,\pi]$ において
$x^3 - \pi^2 x = 12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$
を導け.

(北海道大 2012) (m20120104)

0.6 f を周波数とするとき, 時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

で与えられる. ここで, $i=\sqrt{-1}$ である. ある関数 $m(t)$ のフーリエ変換を $M(f)$ とするとき, オイラーの公式 $e^{ix}=\cos x + i\sin x$ を利用して, $m(t)\cos(2\pi f_0 t)$ のフーリエ変換が $M(f-f_0)$ および $M(f+f_0)$ を用いて表せることを示せ.

(北海道大 2014) (m20140103)

0.7 f を周波数とするとき, 時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$F[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

で与えられる. ここで, $i=\sqrt{-1}$ である. このとき, 以下の設問に答えよ.

(1) 下記の関数 $P(t)$ を横軸 t として図示し, そのフーリエ変換を求めよ.

$$P(t) = \begin{cases} 1 & ,\ |t| < t_0 \\ 0 & ,\ |t| > t_0 \end{cases} \qquad (t_0 > 0)$$

(2) 関数 $P(t+4t_0)+P(t-4t_0)$ を横軸 t として図示し, そのフーリエ変換を求めよ.

(北海道大 2015) (m20150104)

0.8 以下の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x+6}{x^2-4}dx$ (3) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\log x}{x^2}dx$

(北海道大 2017) (m20170102)

0.9 $I_n = \displaystyle\int_0^\infty x^n \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx$ （n は 0 または自然数，a は正の定数）とする．

以下の問いに答えなさい．

(1) $I_0 = \displaystyle\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx$ の値を a を用いて表しなさい．

(2) $I_n = \displaystyle\int_0^\infty x^n \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx$ の値を a と n を用いて表しなさい．

(北海道大 2017) (m20170110)

0.10 次の級数の収束，発散を調べ，収束する場合はその値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{3^{n-1}} + 3\left(-\frac{4}{5}\right)^{n-1} \right\}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3(n+2)}$

(北海道大 2018) (m20180104)

0.11 次式の関数について，次の各設問に答えなさい．ただし，$0 < D < 1$ とする．

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leqq x < -D\pi) \\ 1 & (-D\pi \leqq x < D\pi) \\ 0 & (D\pi \leqq x < \pi) \end{cases}$$

設問 1. 次式で示されるフーリエ級数の各係数を求めなさい．

$$f(x) = \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

設問 2. 上式において，n が偶数の項の係数がすべて 0 となる D の条件を求めなさい．

(北海道大 2018) (m20180105)

0.12 f を周波数とするとき，時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

で与えられる．また，時間 t の関数 $p(t)$ と $q(t)$ の畳み込みは

$$p(t) * q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau) q(t-\tau) d\tau$$

で与えられる．ここで $i = \sqrt{-1}$ である．このとき，以下の設問に答えなさい．

(1) 次の関数 $g(t)$ を横軸 t として図示しなさい．

$$g(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

(2) 次の関数 $h(t)$ を横軸 t として図示しなさい．

$$h(t) = g(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

(3) $g(t)$ のフーリエ変換を求めなさい．

(4) $h(t)$ のフーリエ変換を求めなさい．

(北海道大 2019) (m20190104)

0.13　周期 2π の関数

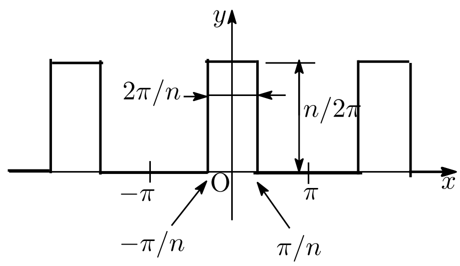
$$f(x) = x^2 \qquad (-\pi \leqq x < \pi)$$
$$f(x+2\pi) = f(x)$$

について，次式のようにフーリェ級数展開したとき，各係数 a_0，a_n，b_n を求めなさい．

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

(北海道大 2020)　　(m20200105)

0.14　右図のような周期 2π の周期的パルス列 $f(x)$ を考える．パルスの幅は $2\pi/n$，高さは $n/2\pi$ で与えられ，面積は常に 1 である（ただし n は 2 以上の整数）．この波形は y 軸に関して軸対称なので，次式のようなフーリエ級数に展開することができる．以下の設問に答えなさい．



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

(1)　$n=2$ のとき，a_k $(k \geqq 1)$ を求めなさい．

(2)　2 以上の整数 n について，a_k $(k \geqq 1)$ を n の関数として表しなさい．

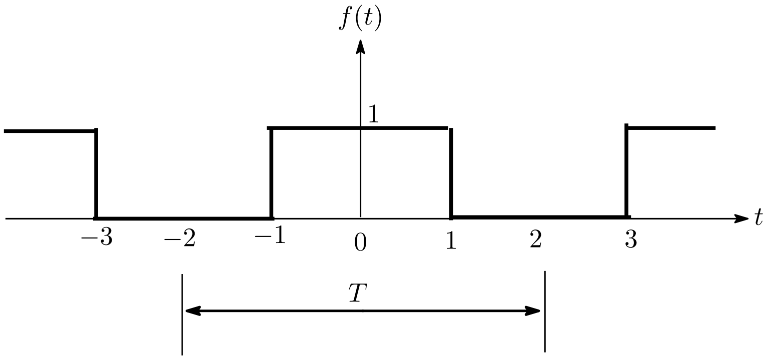
(3)　(2) の結果において，n を ∞ に漸近させると，与えられたパレス列はデルタ関数列になる．この条件における a_k を求めなさい．

(北海道大 2021)　　(m20210103)

0.15　次の図のような矩形パルス（周期 $T=4$）をフーリエ級数展開するとき，

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos\left(2\pi\frac{n}{T}t\right) + b_n \sin\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)\right\}$$

で表すことができる．以下の設問に答えなさい．



(1)　a_0，a_n および b_n を T を用いた式で表しなさい．

(2)　$T=4$ のときの a_0，a_n および b_n を求めなさい．

(北海道大 2022)　　(m20220104)

0.16　定積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$ を求めよ．

(北見工業大 2012)　　(m20120204)

0.17　次の問いに答えよ．

(1)　関数 $y = x^2 e^{-x}$ の増減を調べ，その極値を求めよ．

(2)　極限 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x}$ を求めよ．

(北見工業大 2013)　　(m20130203)

0.18　次の積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} (\log x)^2 dx$　　　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+4} dx$

(北見工業大 2019)　　(m20190201)

0.19　$-\infty < x < \infty$ で連続な関数の列

$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_n(x), \cdots$

が次の (i) の関係式を満たし，$f_1(x)$ が (ii) で与えられている．

(i) $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) \exp[-(x-t)^2] dt$, ここで $n = 1, 2, 3, \cdots$,

(ii) $f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \exp[-x^2]$.

ここで，exp は指数関数を表し，必要があれば次の定積分の値を用いてもよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-x^2] dx = \sqrt{\pi}$$

次の問に答えよ．

(1)　関数 $f_2(x)$ を求めよ．

(2)　n に対応して定まる正定数 a_n, b_n を用いて，関数 $f_n(x)$ を次のようにおく．

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, a_n} \exp[-x^2/b_n]$$

a_{n+1}, b_{n+1} をそれぞれ a_n, b_n で表す漸化式 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ．

(3)　$a_n, b_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を n で表す一般形を求めよ．

(4)　次の定積分の値を求めよ．　$I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx$

(岩手大 1994)　　(m19940307)

0.20　任意の実数 x を変数とする関数の列 $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ が次の関係式 (a),(b) を満たすものとする．

(a)　$f_0(x) = x^2$

(b)　$f_n(x)\, e^{-x} = \displaystyle\int_x^{\infty} f_{n-1}(t)\, e^{-t} dt$

次の問に答えよ．

(1)　次の積分 I, J, K のそれぞれを x の関数として求めよ．

$$I = \int_x^{\infty} e^{-t} dt\ , \quad J = \int_x^{\infty} t\, e^{-t} dt\ , \quad K = \int_x^{\infty} t^2\, e^{-t} dt$$

(2)　２つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を導入して，関数 $f_n(x)$ を次のようにおく．

$$f_n(x) = x^2 + a_n x + b_n \qquad (\, n = 0, 1, 2, \cdots)$$

a_n, b_n のそれぞれを a_{n-1}, b_{n-1} を用いて表す漸化式を求めよ．なお，これらの漸化式において $n \geqq 1$ とする．

(3) 前問の 2 つの数列の一般項 $a_n, b_n(\,n = 0, 1, 2, \cdots)$ を求めよ．

(岩手大 1996) (m19960301)

0.21 $f(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \quad (x > 0)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x+1) = xf(x)$ を部分積分を用いて証明せよ．

(2) x が自然数 n のとき，$f(n) = (n-1)!$ を証明せよ．

(3) $f(5)$ を求めよ．

(4) $f(\frac{5}{2})$ を求めよ．ただし，$f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ である．

(岩手大 1997) (m19970302)

0.22 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)\,, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\sin x}{x^3}$$

(岩手大 1998) (m19980305)

0.23 範囲 $-\infty < x < \infty$ で連続な関数 $f(x)$ が次の関係式を満たすとする．

$$f(x) = \sin x + x\int_0^\infty f(t)e^{-t}dt + \int_0^\pi f(t)\cos t\,dt$$

次の問いに答えよ．

(1) 次の定積分 I_1, I_2, I_3, J_1, J_2, J_3 の値を求めよ．

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-t}dt\,, \qquad I_2 = \int_0^\infty te^{-t}dt\,, \qquad I_3 = \int_0^\infty e^{-t}\sin t\,dt$$

$$J_1 = \int_0^\pi \cos t\,dt\,, \qquad J_2 = \int_0^\pi \sin t\cos t\,dt\,, \qquad J_3 = \int_0^\pi t\cos t\,dt$$

(2) 上記の関係式に含まれる 2 つの定積分を，次のように A, B とおく．

$$\int_0^\infty f(t)e^{-t}dt = A\,, \qquad \int_0^\pi f(t)\cos t\,dt = B$$

A, B の値を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ を求めよ．

(岩手大 1998) (m19980306)

0.24 次のような行列 A 考える．

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

ここで，a は実定数とする．次の問に答えよ．

(1) A^2, A^3 を求めよ．

(2) 一般の正の整数 n に対する A^n を求めよ．A^n の形を正しく推定し，数学的帰納法により証明すればよい．

(3) 行列 A に対し，A^0，指数関数 $\exp A$ を次のように定義する．

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \qquad \exp A = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}A^n$$

$\exp A$ を求めよ．なお，行列の無限級数の和を求めるためには，各成分ごとに無限級数の和を求めればよい．

(岩手大 1998) (m19980311)

0.25 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ. ただし, E は 2 次の単位行列である.

(1) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2) A^n を求めよ.

(3) $2A^2 - 3A + E = O$ を満たす, a の値をすべて求めよ.

(4) (3) で求めた a の値を代入して, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ.

（岩手大 2004） (m20040308)

0.26 区間 $[a, b]$ 上の関数 $f(x),\ g(x)$ は,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

が成り立つとき互いに直交しているという. 以下の問いに答えよ.

(1) 次の (a)〜(e) に示した関数が区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上で互いに直交していることをそれぞれ示せ. ただし, k, l はともに自然数である.

(a) $\dfrac{1}{2}$ と $\cos kx$

(b) $\dfrac{1}{2}$ と $\sin kx$

(c) $\cos kx$ と $\sin lx$

(d) $\cos kx$ と $\cos lx \quad (k \neq l)$

(e) $\sin kx$ と $\sin lx \quad (k \neq l)$

(2) 区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上の任意の関数 $f(x)$ は, $\dfrac{1}{2}$, $\cos kx$, $\sin kx$ の線形和によって

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \end{aligned}$$

と表すことができる（これをフーリエ級数展開という）. 係数 $a_0,\ a_k,\ b_k$ をそれぞれ $f(x)$ を用いて表せ.

(3) 次の関数 $f(x)$ を区間 $[-\pi\ ,\ \pi]$ 上でフーリエ級数に展開せよ.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

(岩手大 2009) (m20090301)

0.27 関数 $f(x) = x^2 e^{-x+2}$ に関する次の問いに答えなさい.

(1) $y = f(x)$ の増減と極値を調べ, そのグラフをかきなさい.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めなさい.

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ を求めなさい,

(岩手大 2017) (m20170303)

0.28 関数 $f(x) = xe^{-2x}$ について次の問いに答えなさい.

(1) 関数 $f(x)$ を微分しなさい.

(2) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点を求めなさい.

(3) 関数 $f(x)$ の極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ をそれぞれ求めなさい.

(4) 関数 $f(x)$ の増減表を作成し，概形を図示しなさい．また，極値と変曲点の座標も示しなさい．

(岩手大 2018)　　(m20180303)

0.29 関数 $f(x) = x^2 e^x$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点を求めなさい．

(2) 関数 $f(x)$ の極限値 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ および $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ をそれぞれ求めなさい．

(3) 関数 $f(x)$ の増減表を作成し，概形を図示しなさい．また，(1) で求めた極値と変曲点の座標も示しなさい．

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ を求めなさい．

(岩手大 2019)　　(m20190303)

0.30 関数 $f(x) = e^{-x}\sin x$ について，次の問に答えなさい．

(1) $f(x)$ の第 1 次導関数と第 2 次導関数を求めなさい．

(2) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における $f(x)$ の増減表を作成し，この範囲における $f(x)$ のグラフの概形をかきなさい．また，極値と変曲点の座標も示しなさい．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めなさい．

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ を求めなさい．

(岩手大 2020)　　(m20200303)

0.31 関数 $f(x) = 4x^4 \log_e x$ について，次の問いに答えなさい．ただし，$x > 0$ とする．

(1) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点を求めなさい．

(2) 関数 $f(x)$ の $\lim_{x\to+0} f(x)$ および $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ をそれぞれ求めなさい．

(3) 関数 $f(x)$ の増減表を凹凸を含めて作成しなさい．また，極値と変曲点の座標も示しなさい．

(4) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めなさい．

(岩手大 2021)　　(m20210303)

0.32 e を自然対数の底とする．次の問いに答えなさい．

(1) 次の関数 $g(x)$ を考える．ただし，a, b を定数とし，$a > 0$, $b < 0$ とする．

$$g(x) = ae^{bx}$$

広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} g(x)dx = 1$ が成り立つとき，$a = -b$ を示しなさい．

(2) $a = 2$, $b = -2$ のとき，広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} xg(x)dx$ の値を求めなさい．

(岩手大 2022)　　(m20220304)

0.33 次の積分を計算しなさい．

(1) $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ $(a > 0)$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin^2 x dx$

(秋田大 2001)　　(m20010403)

0.34 次の $\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ．注意：log は自然対数で，π は円周率である．

(1) $\displaystyle\int_2^3 \frac{4(3+3x-x^2)}{(x-1)^2(x+1)}dx = \log\frac{3}{\boxed{\text{(t)}}} + \boxed{\text{(u)}}$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \log x dx = \boxed{\text{(v)}}$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^4 dx = \boxed{\text{(w)}}$　　(4) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-4x}\sin x dx = \frac{1}{\boxed{\text{(x)}}}$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{\boxed{\text{(y)}}}$

(秋田大 2002)　(m20020403)

0.35 次の極限を求め，$\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x} = \boxed{}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x} = \boxed{}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log x^2}{\log|\sin x|} = \boxed{}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^{\cos x}-2}{\log|\cos x|} = \boxed{}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log|1-x^2|}{\log|\cos x|} = \boxed{}$

(秋田大 2007)　(m20070403)

0.36 次の定積分を求め，$\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx = \frac{1}{\boxed{}}\left(\frac{\pi}{2}+\boxed{}\right)$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x\cos x dx = \frac{\boxed{}}{12}$

(3) $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{\boxed{}}{3}$　(4) $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx = \frac{\boxed{}}{15}$

(5) $\displaystyle\int_1^e \sqrt{x}\log x dx = \frac{2}{\boxed{}}\left(e^{\frac{3}{2}}+\boxed{}\right)$　(6) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx = 1+\frac{\boxed{}}{e}$　(7) $\displaystyle\int_1^\infty x^2e^{-x}dx = \frac{\boxed{}}{e}$

(秋田大 2007)　(m20070404)

0.37 （広義の）定積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ を求めよ．

(秋田大 2009)　(m20090403)

0.38 次の極限を求め，カッコ内に当てはまる整数を記入せよ．

以下の arcsin は逆正弦関数のことで，$\sin^{-1}$ と表されることもある．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \boxed{\text{(キ)}}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}\right) = \frac{1}{\boxed{\text{(ク)}}}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(2x)}{x} = \boxed{\text{(ケ)}}$

(秋田大 2010)　(m20100402)

0.39 関数 $f(x) = xe^x$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 増減と極値を調べなさい．

(2) グラフの凹凸と変曲点を調べなさい．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ を求めなさい．

(4) グラフの概形をかきなさい．

(秋田大 2012)　(m20120403)

0.40 以下の四角内に当てはまる値を計算し，解答欄の指定した箇所に記入せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x+1\right)=\boxed{\text{（ア）}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\boxed{\text{（イ）}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\boxed{\text{（ウ）}}$

(秋田大 2013)　　(m20130401)

0.41　次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}|\sin(x-a)|dx$　(a は $0<a<\pi$ の定数)　　(2) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$

(秋田大 2016)　　(m20160402)

0.42　次の極限を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{e^{2x}-1}$　（e は自然対数の底である.）

(秋田大 2017)　　(m20170402)

0.43　次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x-1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to +0}x^2\log x$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left\{1-\frac{1+e^{-x}}{2(x^2+x+1)}\right\}$

(秋田大 2020)　　(m20200403)

0.44　次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+5x-3}{x^4-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to 0}\frac{5x^2y^2}{x^2+y^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$

(秋田大 2021)　　(m20210403)

0.45　行列 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 等式 $\boldsymbol{Bx}=\lambda\boldsymbol{x}$ を満たすとき，固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ と固有値 λ を求めよ.

(2) (1) が成立するとき，未知ベクトル $\boldsymbol{y}(t)=e^{\lambda t}\boldsymbol{x}$ は，微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}=\boldsymbol{By}$$

の解であることを示せ.

(3) t $(0\leq t\leq +\infty)$ を時間とすると，未知ベクトル $\boldsymbol{y}(t)$ の終端はどのような軌跡となるか，答えよ.

(秋田大 2021)　　(m20210404)

0.46　2 行 2 列の行列 $P=\begin{pmatrix}1-p&p\\q&1-q\end{pmatrix}$ と $Q=I-P$ について，次の問いに答えよ．ただし，I は 2 行 2 列の単位行列である.

(1) 点 P^{-1} が存在する条件を書き，そのとき P^{-1} を求めよ.

(2) 正の整数 n に対して，$Q^n=(p+q)^{n-1}Q$ を証明せよ.

(3) $|P+q-1|<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}P^n$ を求めよ.

(東北大 1993)　　(m19930504)

0.47 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $\dfrac{1}{1-x}$ を

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + R_n(x)$$

とおくとき，$|x| < 1$ の範囲で $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ となることを示せ．

(2) (1) を利用して，関数 $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ の x に関するべき級数展開を $|x| < 1$ の範囲で求めよ．

(3) (2) の結果を利用して，$\sin x$ に関するべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\sin x)^{2n}$ の和を求めよ．ここに，$|x| < \frac{\pi}{2}$ とする．

(東北大 1996)　　(m19960501)

0.48 次の問いに答えよ．

(1) 次の微分方程式を $y(0) = a$ の条件の下に解け．

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}xy = x + \frac{1}{4}x^3 \qquad (*)$$

(2) x の関数 $y(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2}(\cos xt + x^2 t)dt$ について，式 $(*)$ が成り立つことを示せ．ただし，微分と積分の順序は交換できるものとする．

(東北大 1996)　　(m19960502)

0.49 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は以下のように与えられる．

$$f(x) \sim f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \cdots$$

ただし，f' と f'' は，それぞれ f の導関数と第 2 次導関数を示す．

(1) 関数 $\quad f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \quad$ をマクローリン展開し，x^2 の項まで示せ．

(2) 以下の関係が成り立つことを示せ．

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{Tan}^{-1}x\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

ただし，関数 $y = \mathrm{Tan}^{-1}x$ は，関数 $y = \tan x$ の逆関数であり，原点を通る．

(3) 関数 $\quad F(x) = \mathrm{Tan}^{-1}x$

について，$-\infty < x < \infty$ での増減・極値・グラフの凹凸・変曲点を調べよ．

(4) $y = F(x)$ のグラフの概形を描け．

(東北大 2003)　　(m20030501)

0.50 実数 y の関数:

$$f(y) = \frac{1}{1+e^{-\beta y}} \ , \qquad (-\infty < y < \infty)$$

を定義する. ここで, β は非負の実数値のみをとる定数である. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) β の値が以下の 3 つの場合:

a) $\beta \longrightarrow +\infty$,　　b) $\beta = 0$,　　c) その他の場合.

の各々について，$x = f(y)$ のグラフを描け.

(2) 関数 $x = f(y)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求めよ.

(3) 以下の不定積分を求めよ.

$$\int \log(1-x)dx$$

ただし, $\log$ は自然対数を表す.

(4) 以下の定積分を求めよ.

$$g(x) \equiv \int_0^x f^{-1}(z)dz$$

ただし，x の定義域は $0 \leq x \leq 1$ であり，$\lim_{x\to 0} x\log x = 0$ の意味で $0\log 0 = 0$ とする.

(5) 関数 $g(x) - \alpha x$ を最小化する x を求めよ. ただし x の定義域は $0 \leq x \leq 1$，α は正の実数値のみをとる定数とする.

（東北大 2004）　(m20040501)

0.51 関数 $f(x)$ の $x = a$ を中心とするテイラー展開は以下のように与えられる.

$$f(x) \sim f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \cdots$$

ただし, $f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の第 n 次導関数 $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ を表す. また, $f'(x)$ および $f''(x)$ は $f(x)$ の導関数 $\dfrac{df}{dx}$ および第 2 次導関数 $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ をそれぞれ表す. 特に, $-1 < x < 1$ に対する関数 $\dfrac{1}{1-x}$ および $-\infty < x < \infty$ に対する関数 e^x の $x = 0$ を中心とするテイラー展開はそれぞれ次のように与えられる.

$$\frac{1}{1-x} \sim \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , \quad e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

x を実数とし, 関数 $g(x)$ と $h(x)$ を

$$g(x) = e^{x^2} \quad , \quad h(x) = \frac{e^{x^2}}{2-x}$$

と定義する.

(1) $g(x)$ の $x = 0$ を中心とするテイラー展開を求めよ.

(2) 問 (1) の結果を用いて, $h(x)$ の $x = 0$ を中心とするテイラー展開の x^2 の項までを求めよ.

(3) $h(x)$ の導関数 $h'(x)$ を求めよ.

(4) $y = h(x)$ の $-\infty < x < \infty$ における発散する点, 極値を与える点に注意して, グラフの概略を描け.

（東北大 2004）　(m20040502)

0.52 x を実数として, 関数 $f(x)$ を　$f(x) = x^2 e^{ax}$　と定義する. ただし, a は負の定数である.

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$, 第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(2) $x \to +\infty$ のとき, $f(x)$ の極限 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ の増減 , 極値 , グラフの凹凸 , 変曲点を調べ, 増減表を書き, $y = f(x)$ の概形を描け.

(東北大 2005)　(m20050502)

0.53 $m = 1, 2, \cdots$ に対して　$\lim_{x\to\infty} x^m e^{-x} = 0$　を示せ.

(東北大 2005)　(m20050504)

0.54 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ が収束することを証明し，極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(東北大 2009)　(m20090506)

0.55 実数 t の関数 $f(t)$ のラプラス変換を

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

と定義する. ここで, s は $\mathrm{Re}(s) > 0$ を満たす複素数である.

関数 $f(t)$ に関する次の微分方程式を, 初期条件 $f(0) = f'(0) = 0$ のもとで, ラプラス変換を用いて解きたい. 以下の問に答えよ.

$$tf''(t) + (3t-1)f'(t) + (2t-3)f(t) = 0$$

(1) $f'(t)$, $f''(t)$ のラプラス変換を, それぞれ $F(s)$ を用いて表せ.

(2) $tf(t)$, $tf'(t)$, $tf''(t)$ のラプラス変換を, それぞれ $F(s)$ を用いて表せ.

(3) $F(s)$ に関する次の微分方程式が次のように与えられることを示せ.

$$(s+1)\frac{dF(s)}{ds} + 3F(s) = 0$$

(4) $F(s)$ に関する次の微分方程式を解いて, $f(t)$ を求めよ.

(東北大 2010) (m20100504)

0.56 $\mathbb{R}^3$ を実数を成分とする 3 次元ベクトルよりなる実ベクトル空間,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とする.

(1) A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) $v \in \mathbb{R}^3$ に対し, $\left(\frac{1}{2}A\right)^n v \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ が $n \longrightarrow \infty$ で収束するとき, その極限を

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}A\right)^n v = \begin{pmatrix} x_\infty \\ y_\infty \\ z_\infty \end{pmatrix}$$

とあらわす. この極限が存在し 0 でないとき, 成分の比 $x_\infty : y_\infty : z_\infty$ を求めよ.

(東北大 2011) (m20110503)

0.57 無限級数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

が収束するかどうか判定せよ.

(東北大 2011) (m20110506)

0.58 重積分

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty x^2 e^{-x^2-y^2}\, dxdy$$

の値を求めよ.

(東北大 2011) (m20110507)

0.59 実数 t の関数 $f(t)$ のラプラス変換を

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

と定義する. ここで, s は $\mathrm{Re}(s) > 1$ を満たす複素数である.

以下の問いに答えよ. ただし, 関数 $f(t)$ は $f(0) = 0$ を満たすとする.

(1) $f'(t)$, $e^{-t}f'(t)$ のラプラス変換を，それぞれ s, $F(s)$ を用いて表せ.

(2) $\displaystyle\int_0^t e^{-\tau}f'(\tau)\,d\tau$, $e^t\displaystyle\int_0^t e^{-\tau}f'(\tau)\,d\tau$ のラプラス変換を，それぞれ s, $F(s)$ を用いて表せ.

(3) 次の微分積分方程式

$$f'(t)+e^t\int_0^t e^{-\tau}f'(\tau)\,d\tau=e^t$$

をラプラス変換により，s と $F(s)$ を用いて表せ.

(4) (3) の微分積分方程式の解 $f(t)$ を求めよ.

(東北大 2012)　　(m20120504)

0.60 数列

$$a_n=\frac{-n^2+3n-1}{n^2+1}\qquad (\text{ただし } n=1,2,\cdots)$$

について，その最大値，最小値および $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ.

(東北大 2012)　　(m20120508)

0.61 z を正の実数とする．実変数の関数 $f(x)$ に対し，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xz}f(x)dx$ が存在するとき，これを $I[f](z)$ と書くことにする.

(1) f が区間 $[0,\infty)$ で連続かつ有界であれば，$I[f](z)$ が存在することを示せ.

(2) a を実数とする．$I[\sin ax](z)$, $I[\cos ax](z)$ をそれぞれ求めよ.

(東北大 2012)　　(m20120509)

0.62 $a_n\geq 0\ \ (n=1,2,3,\cdots)$ とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するならば，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$ も収束することを示せ．また，逆が成り立たないことを示す例を一つあげよ（証明不要）.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束し，$a_n\neq 1\ \ (n=1,2,3,\cdots)$ であるとする．このとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1-a_n}$ は収束することを示せ.

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するならば，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ も収束することを示せ.

(東北大 2015)　　(m20150508)

0.63 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，以下の問いに答えよ.

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するとき，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束することを示せ.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するとき，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ のある部分列 $\{a_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して，$a_{n(k)}<\dfrac{1}{n(k)}$ が成り立つことを示せ.

(3) (2) において，「 $a_{n(k)}<\dfrac{1}{n(k)}$ 」を「 $\left|a_{n(k)}\right|<\dfrac{1}{n(k)}$ 」と置き換えても主張は成り立つか，もし成り立つならばそれを証明し，成り立たない場合は反例をあげよ.

(東北大 2016)　　(m20160508)

0.64 (1) 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$$a_1=1,\qquad a_2=3,\qquad a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

(2) 次の条件を満たす数列 $\{b_n\}$ について，以下の問に答えよ．

$$b_{n+2} = |b_{n+1} - b_n| \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ただし，b_1 と b_2 は正の整数とする．

(a) $b_1 = 21$, $b_2 = 27$ のとき，b_3, b_4, b_5, b_6 を求めよ．

(b) b_1 と b_2 が正の整数 d の倍数であるとき，b_n も d の倍数であることを数学帰納法により証明せよ．

(3) 次の条件を満たす数列 $\{c_n\}$ について，以下の問に答えよ．

$$-1 < c_1 < 0, \qquad c_{n+1} = \frac{2}{1 - c_n} - 2 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(a) $c_1 = -1/2$ のとき，c_2 を求めよ．

(b) $-1 < c_n < 0$ となることを数学帰納法により証明せよ．

(c) 数列 $\{c_n\}$ が単調減少列となることを示し，さらに数列 $\{c_n\}$ の $n \to \infty$ の極限を求めよ．

(東北大 2017) (m20170503)

0.65 (1) 0 以上の整数 n に対して，

$$\int_0^1 \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{1 + x^2} dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

を示せ．

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ が収束することを示し，その極限を求めよ．

(東北大 2017) (m20170508)

0.66 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ であることを示せ．

(2) 任意の n に対し $a_n \geq 0$ であるとする．級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散するならば，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$$

も発散することを示せ．

(東北大 2018) (m20180509)

0.67 $\mathbb{R}$ 内の閉区間 $[0, 1]$ 上の連続関数 $f(x)$ は $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 1$ をみたすとする．正の整数 n に対し

$$b_n = \int_0^1 f(x) \cos \frac{x}{\sqrt{n}} dx$$

とおくとき，

$$(*) \qquad \lim_{n \to \infty} (b_n)^n = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f(x) dx\right)$$

が成り立つことを以下の設問に沿って証明せよ．

(1) 任意の $x \geq 0$ に対し

$$0 \leq \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^3}{6}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 任意の n に対し
$$\left|b_n - 1 + \frac{1}{2n}\int_0^1 x^2 f(x)dx\right| \leq \frac{1}{6n\sqrt{n}}\int_0^1 x^3 |f(x)|\, dx$$
が成り立つことを示せ.

(3) 任意の実数 α, β に対し
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n\sqrt{n}}\right)^n = e^\alpha$$
が成り立つことを示せ.

(4) (2) および (3) の結果を利用して $(*)$ を結論せよ.

(東北大 2018) (m20180511)

0.68 実数列 $\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^\infty$ 全体のなす集合 V は, 任意の二つの実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\} \in V$ と任意の実数 s に対して, 和 $\{a_n\}+\{b_n\} \in V$ とスカラー倍 $s\{a_n\} \in V$ を
$$\{a_n\}+\{b_n\} = \{a_n+b_n\}, \quad s\{a_n\} = \{sa_n\}$$
と定義することにより, 実ベクトル空間となる. V の元 $\{a_n\}$ で, 漸化式
$$a_{n+4} = 4a_{n+3} + 3a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
を満たすもの全体のなす, V の部分集合を W とする. 以下の問いに答えよ.

(1) W は V の部分空間であることを示せ.

(2) $\{a_n\}$ を W の元とするとき a_5, a_6 を a_1, a_2, a_3, a_4 を用いて書き表せ.

(3) $i = 1, 2, 3, 4$ に対して, 実数列 $\{e_n^{(i)}\} = \{e_n^{(i)}\}_{n=1}^\infty$ は,
$$e_n^{(i)} = \begin{cases} 1 & (n = i \text{ のとき}), \\ 0 & (n = 1, 2, 3, 4,\ n \neq i \text{ のとき}) \end{cases}$$
を満たす唯一つの W の元とする. このとき, $\{e_n^{(1)}\}$, $\{e_n^{(2)}\}$, $\{e_n^{(3)}\}$, $\{e_n^{(4)}\}$ は W の基底であることを示せ.

(4) 線形写像 $T : W \to W$ を,
$$T(\{a_n\}) = \{b_n\} \quad \text{ただし} \quad b_n = a_{n+1}\ (n = 1, 2, \cdots)$$
で定める. このとき, 設問 (3) の基底に関する T の表現行列を求めよ. また, その行列式を求めよ.

(東北大 2019) (m20190506)

0.69 (1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ は収束しないことを示せ.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ は収束することを示せ.

(東北大 2019) (m20190508)

0.70 任意の自然数 n に対する数列を以下の定積分により定義する.
$$I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^{2n-1} x}$$

(1) I_1 を求めよ.

(2) I_2 を求めよ．必要であれば次の関係式を用いよ．

$$\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^3 x}$$

(3) I_n に成立する漸化式を求めよ．

(4) 以下に示す極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nI_n}{2^n}$$

(東北大 2020)　　(m20200502)

0.71 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ を 3 次正方行列とする．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．さらに，求めた固有値それぞれに対して固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ．

(3) n を 2 以上の整数とする．A^n を求めよ．

(4) 次の式で定義される数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の一般項 a_n を求めよ．

$$a_0 = a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad (n = 3, 4, 5, \cdots)$$

(東北大 2021)　　(m20210508)

0.72 $\mathbb{R}$ の区間 $I = [0, \infty)$ 上の関数 f を

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad (x \in I)$$

と定める．I 上の関数の列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ を

$(*)$　$f_0(x) = 0, \quad f_{n+1}(x) = f_n(x) + \{f(x)\}^2 - \{f_n(x)\}^2 \quad (x \in I,\ n = 0, 1, 2, \cdots)$

と帰納的に定める．以下の問いに答えよ．

(1) f の I における最大値を求めよ．

(2) 任意の非負整数 n と任意の $x \in I$ に対して

$$0 \leq f_n(x) \leq f(x)$$

が成り立つことを示せ．

(3) 任意の非負整数 n と任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) - f_n(x) \leq f(x)\{1 - f(x)\}^n$$

が成り立つことを示せ．

(4) $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ は f に I 上で一様収束することを示せ．

(東北大 2021)　　(m20210509)

0.73 次の極限値をそれぞれ求めよ

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x-2} - x + 1\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3}$

(東北大 2022)　　(m20220503)

0.74 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{n^2-i^2}$ を定積分で表し，

極限値を求めよ． (お茶の水女子大 1997) (m19970602)

0.75 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ は $p>1$ ならば収束し，$p\leq 1$ ならば発散することを証明せよ．

(お茶の水女子大 1997) (m19970604)

0.76 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to +0}x^3\log x$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+e^x)^{1/x}$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x+\sin x}{x}$

（お茶の水女子大 1999） (m19990602)

0.77 関数 $f(x)=x^{1/x}$ $(x>0)$ の最大値をとる点を求めよ．

また，$\displaystyle\lim_{x\to +0}f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ を求めよ．

（お茶の水女子大 1999） (m19990603)

0.78 次の計算をせよ．ただし，$\log x$ は自然対数であり，$\ln x$ と同じである．

(1) $\displaystyle\int\sin 3x dx$ (2) $\displaystyle\int x\cos x dx$ (3) $\displaystyle\int\log x dx$ (4) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-1}dx$ (5) $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-2x}dx$

（お茶の水女子大 1999） (m19990605)

0.79 次の各問に答えよ．

(1) $\tan x\left(\dfrac{-\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $\tan^{-1}x(-\infty<x<\infty)$ で表す．$\tan^{-1}x$ の導関数を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{x}{x^2-6x+13}dx$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2}+\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}\right)=\frac{\pi}{4}$ となることを示せ．

（お茶の水女子大 1999） (m19990606)

0.80 (1) 次の級数の収束・発散を言え．

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}$

(2) 次の関数のマクローリン展開（$x=0$ のまわりの Taylor 級数展開）とその収束半径 ρ を例に従ってかけ．

(例) $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots(\rho=0)$

(i) $\dfrac{1}{1+x^2}$ (ii) e^x (iii) $\sin x$

（お茶の水女子大 1999） (m19990607)

0.81 次の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty}x^3e^{-x}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos x}$

（お茶の水女子大 2000） (m20000604)

0.82 ガンマ関数 $\Gamma(s)$ を次の積分で定義する．但し，$s>0$ とする．

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}x^{s-1}\exp(-x)dx$$

(1) $\Gamma(1)$ を求めよ．

(2) 次の関係式を示せ.

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

（お茶の水女子大 2000） (m20000605)

0.83 (1) 次の展開式を簡単に示せ.

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \cdots$$

(2) 次の無限級数の値を求めよ.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

（お茶の水女子大 2000） (m20000607)

0.84 a を $0 \leq a \leq 1$ なる実定数とする．2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ に対して，A^n を計算し，その $n \to \infty$ における極限を示せ.

（お茶の水女子大 2000） (m20000611)

0.85 $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ $(-\infty < x < \infty)$ の増減・凹凸を調べ，グラフの概形を書け.

(お茶の水女子大 2003) (m20030601)

0.86 次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\int_0^x (x-t)\sin t dt$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx$

(お茶の水女子大 2003) (m20030604)

0.87 指数関数 $f(x) = e^x$ を考える.

(1) 任意の自然数 n と任意の実数 x に対して，

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}x^k + \int_0^x \frac{e^t}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}dt$$

となることを示せ.

(2) $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}dt \quad (|x| < +\infty)$

と表すとき，$R_n(x)$ は実数の任意の有界閉区間 $[a,b]$ 上で一様に 0 に収束することを示せ.

(お茶の水女子大 2003) (m20030606)

0.88 (1) 実対称行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値がすべて正である条件を書け.

(2) (1) の条件のもとで次の重積分を計算せよ．ただし，必要なら $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ を用いてよい.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}dxdy$$

(お茶の水女子大 2003) (m20030608)

0.89 関数 $f(x) = \log(1-x)$ を考える.

(1) 関数 $f(x)$ の $x = 0$ のおけるマクローリン展開を考え，3 次関数による近似 $S_3(x)$ を求めなさい.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{-k}}{k}$ を求めなさい.

(お茶の水女子大 2009) (m20090603)

0.90 (1) 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a^2x \tag*{③}$$

の一般解を求めよ. ここで a は正の定数である.

(2) ③の一般解に対して $at \ll 1$ の場合を考えると, これが $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$ の一般解に一致することを示せ.

(3) ③の微分方程式を $t = 0$ で $x = x_0$, $dx/dt = v_0$ という初期条件の下で解き, その解が $t \to \infty$ で有限な値を持つための条件を求めよ.

(お茶の水女子大 2010) (m20100607)

0.91 $t > 0$ に対して,

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x}x^{t-1}dx$$

とする. このとき以下の各問に答えよ.

(1) 右辺の広義積分は収束することを示せ.

(2) $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ であることを示せ.

(3) 自然数 n について $\Gamma(n) = (n-1)!$ であることを示せ.

(お茶の水女子大 2012) (m20120605)

0.92 $f(x)$ を微分可能関数とし $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \beta$ とする. このとき任意の実数 h に対して

$$\lim_{x\to\infty} (f(x+h) - f(x))$$

が収束することを示し, その極限の値を β と h を用いて表せ.

(お茶の水女子大 2013) (m20130603)

0.93 次の方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(\boldsymbol{r}) = a\delta(\boldsymbol{r}), \tag{a}$$

に関する以下の問いに答えなさい. ここで右辺の a は正の実数, $\delta(\boldsymbol{r})$ は 3 次元のデルタ関数

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{b}$$

である.

(1) 関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ のフーリエ変換を

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k}) \tag{c}$$

とした時, これが方程式 (a) を満たすということから関数 $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$ を求めなさい.

(2) 積分要素 $d\boldsymbol{k}$ の直交座標系 (k_x, k_y, k_z) から極座標系 (k, θ, ϕ) への変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k} = \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi |J| \tag{d}$$

で与えられる. このときのヤコビアン J を書きなさい. ここで $k = |\boldsymbol{k}|$ である. また (d) の右辺が

$$\int_0^\infty k^2dk \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \tag{e}$$

と書けることを示しなさい.

(3) 問 (1) で求めた $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$ を使って, (c) から $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めなさい. 必要があれば, 公式

$$\int_0^\infty dx\frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2} \tag{f}$$

を用いてもよい.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130606)

0.94 関数 $f(x)$ を $x=a$ のまわりで定義された関数とし，その定義域を D とする．D のなかに a を含むある開区間 $I \subset D$ があり，$x \in I,\ x \neq a$ ならば $f(x) > f(a)$ となるとき f は $x=a$ で極小値をとるといい，同様に, $x \in I,\ x \neq a$ ならば $f(x) < f(a)$ となるとき f は $x=a$ で極大値をとるという．極小値をとるとき，または極大値をとるとき，　極値をとるという．

以下の各問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の $x=a$ での微分係数の定義を述べよ．

(2) 関数 $f(x)$ は $x=a$ で極値をとるとする．f が $x=a$ で微分可能であるとき，$f'(a)=0$ となることを示せ．

(3) g は $(-\infty,\ \infty)$ で定義され C^2- 級関数であるとする．g が $x=0$ と $x=1$ で極値をとるとき，ある $0<c<1$ で $g''(c)=0$ となることを示せ．

(4) 上問 (3) において g が $x=0$ と $x=1$ で共に極大値をとるとき，$g''(x)=0$ となるような x は開区間 $(0,1)$ の中に少なくとも 2 つ存在することを示せ．

(お茶の水女子大 2014)　　(m20140601)

0.95 (1) 正の実数 a と自然数 n に対して

$$I_n(a) := \int_0^a \frac{dx}{(1+x^2)^n} \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

とおく．極限 $I_n = \lim_{a\to\infty} I_n(a)$ が存在することを確かめ，I_n を求めよ．

(2) 整数 k,n は $0 \leq k < n$ を満たすものとし，$a_0,\cdots,a_k$ は負の実数，$a_{k+1},\cdots,a_n$ を正に実数とする．このとき x に関する方程式

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$$

は正の実数解を一つだけ持つことを示せ．

(お茶の水女子大 2015)　　(m20150601)

0.96 以下の極限値を求めよ．

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{e^x}\right)$　　(2) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{\log x}{x-1}\right)$

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160614)

0.97 $-\infty < a < b < \infty$ とし，$f(x)$ は区間 $[a,b]$ で定義された連続関数で，かつ　$f(x) \geq 0$ を満たすものとする．もし　$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ であるならば，$[a,b]$ 上の各点 c で $f(c)=0$ であることを示せ．

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170602)

0.98 極限値を求めよ．　(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$　　(2) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x-\cos x}{x}$

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170609)

0.99 以下の極限値を求めよ．

(1) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{5x-7x^3}{x^3}$　　(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(3\sin 4x)}{x}$

(お茶の水女子大 2018)　　(m20180604)

0.100 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

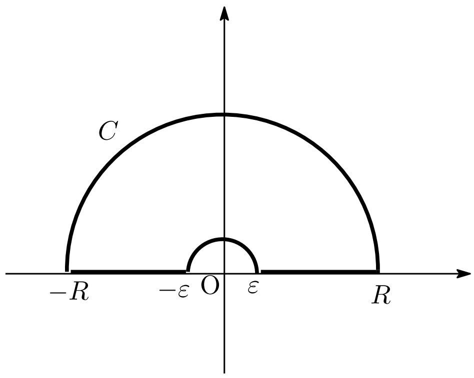
を計算することにより，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ を求めよ．

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190609)

0.101

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z}dz$$

を下図のような複素平面上の経路 C で計算することにより，$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ の値を求めよ．



(お茶の水女子大 2019)　　(m20190610)

0.102 $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ が有理数}) \\ 0 & (\text{上記以外の数}) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (x = \dfrac{1}{2^m}, m = 1,2,3,\cdots) \\ 0 & (\text{上記以外の点}) \end{cases}$$

とする．

(1) f が区間 $[0,1]$ 上リーマン積分可能かどうか、理由とともに答えよ．

(2)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}\sup_{\frac{k-1}{2^n}\le x\le\frac{k}{2^n}} g(x)$$

を求めよ．

(3) g が区間 $[0,1]$ 上リーマン積分可能かどうか、理由とともに答えよ．

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200601)

0.103 次の積分を計算せよ．(ただし，n は正の整数)

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\cos x dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{2n+1}e^{-x^2}dx$

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200606)

0.104 関数 $\delta_y(x)$ と $g(y)$ を次の式で定義する．

$$\delta_y(x) = \begin{cases} y^{-1} & (|x| < \frac{1}{2}y) \\ 0 & (|x| \ge \frac{1}{2}y) \end{cases} \qquad g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_y(x)dx$$

ここで，$f(x)$ は何回でも微分可能であるとする．このとき，$g(y)$ を y の 2 次の項まで求めよ．

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200609)

0.105 以下の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x}$

(お茶の水女子大 2020) (m20200613)

0.106 N を自然数とする．このとき，次の各問に答えよ;

(1) $y \geq 0$ に対して，次が成り立つことを示せ．

$$e^y \geq \frac{y^N}{N!}$$

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}(1+x)^N dx$ の収束・発散を調べよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ を $\displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} t\left(1+\log\frac{1}{t}\right)^N dt \quad (n=1,2,\cdots)$ で定める．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(お茶の水女子大 2021) (m20210604)

0.107 極座標に関する以下の各問に答えよ．

(1) 極座標を用いて $r=1+\cos\theta \quad (0\leq\theta<2\pi)$ で表される曲線の長さを求めよ．

(2) 次の広義積分 I について，極座標の考え方を用いることで I^2 を求めよ．また，I を求めよ．

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$$

(お茶の水女子大 2021) (m20210607)

0.108 (1) (i) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$ は収束していることを示せ．

(ii) 0 より大きい実数 x に対し，$f(x)=\displaystyle\int_x^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$ とおく．

$0<x_1<x_2$ ならば $f(x_1)>f(x_2)$ が成り立つことを示せ．

(iii) (ii) での $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ と記すと，その微分に関して $g'(x)^2=g(x)^3+1$ が成り立つことを示せ．

(2) 関数 $h(x)$ はすべての実数 x で $h(x)>0$ をみたす連続関数とし，

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} h(x)=0=\lim_{x\to+\infty} h(x)$ もみたすと仮定する．

(i) $a>0$ に対し，X_a は $h(x)\geq a$ をみたす実数 x の集合とする．このとき，X_a は有界集合であることを示せ．

(ii) $h(x)$ は実数上の関数として最大値をもつことを示せ．
（閉区間上の連続関数に対する最大値の定理を用いてよい.）

(お茶の水女子大 2022) (m20220603)

0.109 数列 $\{a_n\} \quad (n=0,1,2,\cdots)$ がある．この数列の 隣接した 3 項の間には次のような関係式が成り立つ．

$$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$$

(1) $a_0=a_1=1$ として，極限値

$$\tau=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$$

を求めよ．

(2) 上の漸化式をベクトルおよび行列の関係式を用いると

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

と書かれる．この行列を対角化し，またその時の固有ベクトルを求めることにより， $a_0 = a_1 = 1$ を初期値とした極限値

$$\tau = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

を求めよ．また a_n の一般項はどのように書けるか．

(東京大 1997）　(m19970703)

0.110 (1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx$ を求めよ．なお計算過程も示せ．ただし，m, n は $m, n > 0$ の整数とする．

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx$ を求めよ．なお計算過程も示せ．ただし，m, n は $m, n > 0$ の整数とする．

(3) フーリエ級数 $f(x) \approx \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$ について，

$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \dfrac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[{a_n}^2 + {b_n}^2\right]$ を証明せよ．

(東京大 1998）　(m19980704)

0.111 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!} \sin\Big(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\Big)\pi$ を求めたい．

$f(\theta) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} \sin\Big(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\Big)\pi$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $f'(\theta)$ を無限級数の形を用いて表せ．

(2) $f''(\theta)$ を $f(\theta)$ を用いて表せ．

(3) $f(\theta)$ を求め， $f(\pi) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!} \sin\Big(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\Big)\pi$ を計算せよ．

(東京大 1999）　(m19990702)

0.112 極座標 (r, θ) で表せる 2 次元領域 $r > 1$, $0 \le \theta < 2\pi$ で

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \qquad \text{(i)}$$

を満たし，境界条件

$$u(1, \theta) = \cos 3\theta \quad 0 \le \theta < 2\pi \qquad \text{(ii)}$$

$$\lim_{r\to\infty} u(r, \theta) = 0 \quad 0 \le \theta < 2\pi \qquad \text{(iii)}$$

を満たす解 $u(r, \theta)$ を以下の手順で求めよ．

(1) (i) の解として $u(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ と表せるものを考える．これを (i) に代入し，左辺が r のみの関数，右辺が θ のみの関数であるような式を導け．

(2) この式が上記の 2 次元領域に対応する任意の (r, θ) に対して成立するためにはその両辺は r , θ によらない定数でなくてはならない．そこで，この定数を c として f の r に関する微分方程式と g の θ に関する微分方程式を導け．

(3) m を整数として $f(r) = r^m$ とおき，定数 c を m で表せ．次に，これを g の θ に関する微分方程式に代入し，(i) の解で，$u_m(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ の形のものを求めよ．

(4) d_m を定数として，(i) の解で $u(r,\theta)=\sum_m d_m u_m(r,\theta)$ の形の解を考え，それが境界条件 (ii),(iii) をみたすようにして求める解 $u(r,\theta)$ 定めよ．

(東京大 2000)　　(m20000705)

0.113 (1) 複素変数の指数関数 e^x の級数展開は次式で表される．

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

上式を利用して, $\cos z$, $\sin z$ の級数展開を求めよ．

(2) 次の複素関数を特異点 $z=0$ のまわりでローラン展開し $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n z^n$ の形で表せ．また, 特異点の種類を答えよ．

$$f_1(z)=z\sin\left(\frac{1}{z}\right),\qquad f_2(z)=\frac{1-\cos z}{z^2},\qquad f_3(z)=\frac{1}{z^2(1-z)}$$

(3) 次の積分を求めよ．

$$I=\oint_C f_3(z)dz$$

ただし, 積分路 C は複素平面上で原点を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円を反時計回りに一周するものとする．

(東京大 2001)　　(m20010703)

0.114 関数 $f(x)$ のラプラス変換 $\int_0^{\infty}e^{-sx}f(x)dx$ を $L\left[f(x)\right]=F(s)$ と表す．

(1) $L[x]$ を求めよ．

(2) $L\left[e^{ax}f(x)\right]=F(s-a)$ を示せ．

(3) 上記 (2) の定理を用いて, xe^{2x} のラプラす変換を求めよ．

(4) 上記 (2) の定理を用いて, $L\left[2e^{-2x}-xe^{-2x}\right]$ を求めよ．

(東京大 2001)　　(m20010704)

0.115 0 1 1 0 0 1 0 1 1 . . . のような, 0 と 1 からなる数字列がある. 数字列の先頭から $i+1$ 番目の数字は, 確率 $x(0<x<1)$ で i 番目と同じ数字が現れる. なお数字は, 数字列の先頭を 1 番とする．

(1) 数字列の位置から数えた場合, 同じ数字がちょうど n 個連続してあらわれる確率 $P(n)$ を求めよ．

(2) (1) の場合, 同じ数字が連続する個数の期待値 L を求めよ. ただし,

$$\lim_{n\to\infty}nx^n=0\quad(0<x<1)$$

を用いてよい．

(3) 数字列の先頭から j 番目の数字が 0 である確率 Q_j をとするとき, Q_{j+1} を Q_j を用いてあらわせ．

(4) 数字列の先頭が 0 であるとき, Q_j を x,j を用いてあらわせ．

(東京大 2002)　　(m20020705)

0.116 (1) 変数 t に関して周期 2π の周期関数 $f(t)$ が

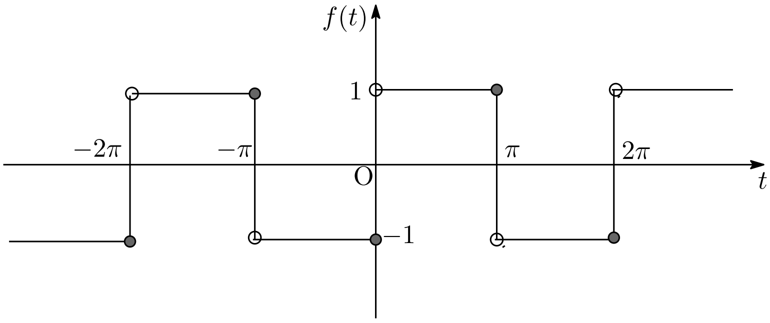
$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt))\tag{1}$$

と書けたときの a_n , b_n が

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt\,, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{2}$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt\,, \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{3}$$

で与えられることを説明せよ．ただし，必要ならば三角関数の公式
$\sin A\sin B = -\frac{1}{2}\{\cos(A+B) - \cos(A-B)\}$, $\sin A\cos B = \frac{1}{2}\{\sin(A+B) + \sin(A-B)\}$
$\cos A\sin B = \frac{1}{2}\{\sin(A+B) - \sin(A-B)\}$, $\cos A\cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A+B) + \cos(A-B)\}$
を用いよ．

(2) 下図は，値 1 と -1 をとる周期 2π の周期関数 $f(t)$ のグラフを示したものである．この関数 $f(t)$ を式 (1) の形に展開せよ．



(東京大 2003)　　(m20030704)

0.117 以下の設問に答えよ．ただし，$a > 0$ である．

(1) 次の定積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-ax^2}dx$

(2) 次の定積分の値を求めよ．必要ならば，直交座標系 (x, y) を極座標系 (r, θ) に変換せよ．
$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}e^{-ay^2}dxdy$

(3) 次の等式を証明せよ． $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

(4) 次の定積分の値を求めよ．ただし，n は 2 以上の整数である． $\displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2}dx$

(東京大 2004)　　(m20040702)

0.118 $f(x) = x^2\sqrt{a^2 - x^2}$， $g(x) = x^2e^{-x}$ として下記の問いに答えよ．ただし，$a > 0$ で，$f(x)$ は区間 $-a \leqq x \leqq a$ で定義される関数である．

(1) $y = f(x)$ のグラフをかけ．　　(2) $y = g(x)$ のグラフをかけ．

(3) $\displaystyle\int_0^a f(x)dx$ を求め，結果を a を用いて表せ．

(4) $\displaystyle\int_0^a f(x)dx = \int_0^{\infty} g(x)dx$ のとき，a の値を求めよ．

(東京大 2006)　　(m20060701)

0.119 p, q を任意の実数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$ について，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を満たす実数 λ と非零ベクトル $\boldsymbol{x}$ の組をすべて求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を，次の漸化式で与える． $\begin{cases} a_{n+1} = (1-p)a_n + qb_n \\ b_{n+1} = pa_n + (1-q)b_n \end{cases}$
ただし，$0 < p < 1$, $0 < q < 1$ とし，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の初項を，それぞれ , a_0, b_0 とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を p, q, a_0, b_0 を用いて示せ．

(東京大 2006)　　(m20060702)

0.120　1 の n 乗根は，方程式

$$z^n = 1 \qquad (\ n \text{ は自然数 })$$

をみたす n 個の複素数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ により与えられる．ここで，各 n 乗根 z_i の偏角 $\arg z_i$ は，$0 \leq \arg z_1 < \arg z_2 < \cdots < \arg z_n < 2\pi$ をみたしているとする．また，複素数平面において，$z_1, z_2, \cdots, z_n$ に対応する点をそれぞれ $P_1, P_2, \cdots, P_n$，原点を O とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 1 の 3 乗根に対応する点 P_1, P_2, P_3 を複素数平面上に図示せよ．また，三角形 $P_1P_2P_3$ の面積 S_3 を求めよ．

(2) 複素数平面上において，1 の 3 乗根に対応する点 P_1, P_2, P_3 と原点が O がつくる三つの三角形，すなわち OP_1P_2，OP_2P_3，OP_3P_1 の重心をそれぞれ G_1，G_2，G_3 とする．三つの重心が作る三角形 $G_1G_2G_3$ の面積 A_3 を求めよ．

(3) 前問 (2) と同様にして，1 の n 乗根に対応する点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ と原点が O がつくる n 個の三角形の重心 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ を考える．n 角形 $P_1P_2\cdots P_n$ の面積 S_n と n 角形 $G_1G_2\cdots G_n$ の面積 A_n の比 $r_n = \dfrac{A_n}{S_n}$ を求めよ．

(4) 前問 (3) で求めた面積比 r_n の $n \to \infty$ のときの極限 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$ を求めよ．

(東京大 2007)　　(m20070703)

0.121　複素数 $z(t) = e^{i\omega t}$ を考える．ただし，t は 0 以上の実数，i は虚数単位，e は自然対数の底である．

(1) ω が実数であるとき，$z(t)$ は複素平面上で t の関数としてどのような軌跡を描くかを，ω が正の場合，負の場合について図示せよ．$z(t)$ の移動方向を矢印で示し，実軸，虚軸との交わる点の位置も明示すること．

(2) ω が複素数 $a + ib$ で表されるとき（a は正の実数，b は 0 でない実数），$z(t)$ は複素平面上で t の関数としてどのような軌跡を描くか図示せよ．$z(t)$ の移動方向を矢印で示し，実軸，虚軸と交わる最初の 4 点（出発点も含める）の値を求め，複素平面上に図示せよ．また，$b/a \to \infty$ で軌跡はどのような曲線になるかを図示せよ．

(3) (2) において，$z_n = z(n)$，ただし n を整数とする．複素平面上における z_{n+1} と z_n の間の距離 $d_n = |z_{n+1} - z_n|$ を a, b, n の関数として求めよ．

(4) (3) で求めた d_n を用いて，$D = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} d_n$ を a, b, N の関数として求めよ．また，a を固定して $b \to \infty$ および $b \to 0$ の極限をとったときの D の値を求めよ．ただし N は自然数とする．

(東京大 2009)　　(m20090701)

0.122　行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1，λ_2 とそれらに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ をそれぞれ求めよ．ただし，絶対値が大きい方の固有値を λ_1 とする．

(2) xy 平面上の 3 点 $P(p_1, p_2)$，$Q(q_1, q_2)$，$R(r_1, r_2)$ を頂点とする三角形 PQR の面積 S の導出過程を示し，各頂点の座標 p_1，p_2，q_1，q_2，r_1，r_2 により表せ．また，各頂点の位置ベクトルが $\boldsymbol{A}$ により一次変換された際，その三角形の面積は何倍になるかを求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ をとり，$\boldsymbol{a}$ に $\boldsymbol{A}$ を n 回かけたベクトルを $\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ とする．その成分 α_n，β_n および $\boldsymbol{A}^n$ を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(4) 極限値 $L = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n}{\beta_n}$ が一定の値に収束することを示し，その値を求めよ.

(東京大 2009)　　(m20090704)

0.123　2 行 2 列の行列 $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) A^2, A^{-1}, $|A|$ を求めよ.

(2) A の全ての固有値を求めよ.

(3) $(A-I)^2 = 0$ が成り立つことを示せ. ただし，$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(4) 任意の実数 t について, ある t の多項式 $g(t)$ と定数 a, b が存在して

$$t^{100} = g(t)(t-1)^2 + at + b$$

が成り立つ. a と b を求めよ.

(5) A^{100} を A と I を用いて表せ.

(6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ を自然対数の底 e を用いて表せ. ただし, $A^0 = I$, $0! = 1$ である.

(東京大 2010)　　(m20100701)

0.124　関数 $f(x) = \dfrac{x^{m-1}}{1+x^n}$ について

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

の値を求めたい. ただし, m, n は自然数で, $m < n$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 複素数平面上で, 図 1 に示す $C = C_1 + C_2 + C_3$ の扇形 $\left(\text{半径 } R,\ \text{中心角} \dfrac{2\pi}{n}\right)$ の積分路が与えられている. この平面上の複素数を $z = x + iy$ (i は虚数単位) とするとき, 積分路 C の内部にある $f(z)$ の極を求めよ. ただし, $R > 1$ とする.

(2) C に沿っての複素積分

$$\int_C f(z)\,dz$$

の値を求めよ.

(3) $R \to \infty$ のとき, C_2 に沿っての複素積分

$$\int_{C_2} f(z)\,dz$$

の値を導出過程とともに示せ.

(4) 虚数単位 i を含まない形で

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

の値を求めよ.

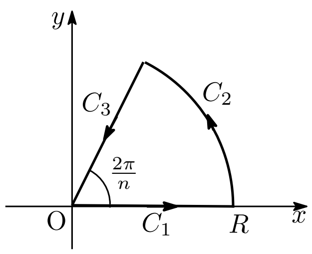


図 1

(東京大 2010)　　(m20100704)

0.125　(1) N 個の同じボールを n_1 個, n_2 個, n_3 個 $(n_1 + n_2 + n_3 = N)$ の組に分ける組み合わせの総数が以下の式で表されることを示せ.

$$\frac{N!}{n_1!n_2!n_3!}$$

(2) N 個の同じボールを n_1 個, n_2 個, $\cdots$, n_m 個 $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} n_i = N\right)$ の組に分ける組み合わせの総数 W はいくつになるか. 導出過程とともに示せ.

(3) (2) で得られた W を用いて，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log_e W$ を計算することを考える．

(a) $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log_e N = 0$ となることを示せ．

(b) $N\to\infty$ $\left(N=\displaystyle\sum_{i=1}^{m} n_i\right)$ としたとき，$\dfrac{n_i}{N}$ はそれぞれある値 p_i に収束する．すなわち $p_i=\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{n_i}{N}$ $(i=1,2,\cdots m)$．このとき，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log_e W$ を p_i のみで表せ．

ただし以下に示す $k!$ (k は正の整数) に関する不等式を用いてよい．

$$\sqrt{2\pi}k^{k+1/2}e^{-k+1/(12k+1)} < k! < \sqrt{2\pi}k^{k+1/2}e^{-k+1/12k}$$

(東京大 2010)　　(m20100705)

0.126 以下の問いに答えよ．ただし，解とともに導出過程も示せ．

(1) 複素数 A_n を係数とする複素多項式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n(z-a)^n$$

を考える．ただし，z は複素変数，a は複素数，n は整数とする．複素平面上で a の周りを反時計回りに一周する経路 C に沿った積分について，以下の式が成り立つことを示せ．ここでは i を虚数単位とする．

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i A_{-1}$$

必要であれば以下のコーシーの積分定理を用いて良い．

複素関数 $g(z)$ が複素平面上の閉曲線 C' とその内部 D' で正則あれば．

C' を一周する経路に沿って $g(z)$ を積分すると，その結果はゼロである．

(2) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

(3) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

(4) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$$

(東京大 2012)　　(m20120704)

0.127 $f(x)$ を $-l \leqq x \leqq l$ で定義された関数とする．このとき，

$$a_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx \quad (m=0,1,2,\cdots)$$

$$b_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx \quad (m=1,2,\cdots)$$

とすると，$f(x)$ は，

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi}{l}x+b_m\sin\frac{m\pi}{l}x\right) \quad \cdots \quad ①$$

と展開できる．以下の問に答えよ．

(1) 次式で定義された関数 $f(x)$ の a_m, b_m を求め，① 式で $l=1$ とした式に従い $f(x)$ を展開せよ．

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (-1 \leqq x \leqq 0) \\ 1-x & (0 < x \leqq 1) \end{cases}$$

(2) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で定義される関数 $f(x)=\cos x$ を ① 式で $l=\dfrac{\pi}{2}$ とした式に従い展開し，その展開式を利用し，以下の無限級数

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{15}+\frac{1}{35}-\frac{1}{63}+\cdots+\frac{(-1)^{m-1}}{4m^2-1}+\cdots$$

の値を求めよ．

(東京大 2013)　　(m20130701)

0.128 原点を出発点として数直線上の点 $(0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ を 1 ステップごとに確率 q で $+1$，確率 $r=1-q$ で -1 だけ移動する点がある．n を自然数とするとき，$2n$ ステップ後の点の位置を x_n とする．たとえば $x_1=2$ となる確率は q^2，$x_1=0$ となる確率は $2qr$, $x_1=-2$ となる確率は r^2 である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $x_2=0$, $x_3=0$ となる確率をそれぞれ求めよ．

(2) $x_n=0$ となる確率を求めよ．

(3) $2n$ ステップ後に初めて原点に戻ってくる確率を考える．すなわち $x_n=0$ かつ自然数 $m<n$ に対し $x_m \neq 0$ を満たす確率である．この確率は $z=qr$ の関数として $u_n(z)=2a_nz^n$ として表現できる．
このとき $n \geqq 2$ で $a_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i}$ が成立することが示される．原点を出発し，いつかは原点に戻ってくる確率を $U(z)$ とする．$U(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ である．また，$\{U(z)\}^2$ は $U(z)$ および z を用いて簡潔に記述することができる．以上のことを用いて，$U(z)$ を求めよ．

(4) $U(z)$ をマクローリン展開し，a_n を n を使って表せ．

(東京大 2013)　　(m20130702)

0.129 3 次の正方行列 A の固有値を λ とし，λ は固有方程式 $\lambda^3-(\alpha+\beta)\lambda^2+\alpha\beta\lambda=0$ を満たすとする．このとき，$A^3-(\alpha+\beta)A^2+\alpha\beta A=0$ が成り立つ．ここで，α, β は互いに異なる 0 でない実数とし，行列 A は対角化可能であるとする，また，O を零行列，E を単位行列とする．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A^n $(n \geqq 3)$ は次のような行列 A の 2 次式で表せることを示せ．

$$A^n=a_nA^2+b_nA+c_nE$$

ここで，a_n, b_n, c_n は実数である．

(2) 行列 A が対角行列 D に対角化されるとき，(1) の a_n, b_n, c_n を含む次の式

$$D^n=a_nD^2+b_nD+c_nE \quad (n \geqq 3)$$

が成り立つことを示せ．

(3) (1) の a_n, b_n, c_n を求めよ．

(4) α, β の絶対値が 1 より小さければ，無限級数

$$\sum_{i=0}^{\infty} A^i=E+A+A^2+\cdots$$

は $a'A^2+b'A+c'E$ と表されることを示し，実数 a', b', c' を求めよ．

(5) (4) の a', b', c' に対し，$(E-A)(a'A^2+b'A+c'E)$ を求めよ．

(東京大 2013)　　(m20130705)

0.130 ある定係数 2 階線形常微分方程式が，次のように与えられている．

$$f^{(2)}(x) - 2\alpha f^{(1)}(x) + \alpha^2 f(x) = 0 \qquad (*)$$

$f^{(n)}(x)$ は関数 $f(x)$ の第 n 次導関数であり（n は自然数），α は 0 でない実数定数とする．

以下の問いに答えよ．

(1) x を変数，k を実数定数とする関数 e^{kx} をマクローリン展開し，x の 3 次の項まで書け．ここで，e は自然対数の底である．

(2) 関数 $f(x)$ は連続で無限回微分可能であり，式 $(*)$ を n 回微分したとき，次の方程式が成り立っているとする．

$$f^{(n+2)}(x) - 2\alpha f^{(n+1)}(x) + \alpha^2 f^{(n)}(x) = 0$$

$f^{(n)}(x)$ を，$f^{(1)}(x)$ と $f(x)$ を用いて表せ．

(3) 関数 $f(x)$ のマクローリン展開式 $f(x) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} f^{(m)}(0)\frac{x^m}{m!}$ に対し，(2) で得られた $f^{(n)}(x)$ を適用して計算することにより，$f(x) = f(0)e^{\alpha x} + \left[f^{(1)}(0) - \alpha f(0)\right]xe^{\alpha x}$ と表されることを示せ．ここで，m は 0 以上の整数であり，$f^{(0)}(x)$ は $f(x)$ と見なし，$0! = 1$ とする．

(4) 次の微分方程式を，条件 $f(0) = 1$，$f^{(1)}(0) = p - 2$（p は実数定数）のもとで解け．

$$f^{(2)}(x) + 4f^{(1)}(x) + 4f(x) = e^{-2x}$$

(5) (4) で求めた $f(x)$ について，$f(x) = 0$ が有限の実数解をひとつしか持たないときの p の値を求め，それぞれの p に対する $f(x)$ の極大値を求めよ．

(東京大 2014)　　(m20140701)

0.131 複素積分を利用して実数積分を求めることを考える．以下の問いに答えよ．

(1) まず，ガウス積分と呼ばれる実数積分 $I(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ を考える．α は正の定数であり; x は実数である．y を実数とするとき，$\{I(\alpha)\}^2$ は以下の式で表される．

$$\begin{aligned}\{I(\alpha)\}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2}dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)}dxdy\end{aligned}$$

この式を極座標 (r, θ) 表示に変換せよ．

(2) $I(\alpha) = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$ となることを導出過程とともに示せ．

(3) 図 4.1 に示すように x 軸を実軸，y 軸を虚軸とする複素平面上において半径 R の扇形で C_1，C_2，C_3 からなる経路 C を反時計回りに一周することを考える．i を虚数単位とし，z を複素数とするとき，以下の積分を求めよ．

$$\oint_C e^{iz^2}dz$$

(4) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_2} e^{iz^2}dz = 0$ となることを示せ．ただし，$0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$ において，$\sin\varphi \geq \dfrac{2\varphi}{\pi}$ を用いてよい．

(5)　上記のガウス積分と複素積分を用いて，実数積分 $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2 dx$ の値を求めよ．

(6)　実数積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ の値を求めよ．

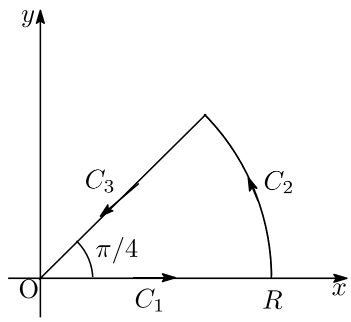


図 4.1

(東京大 2015)　　(m20150704)

0.132　以下の問いに答えよ．i は虚数単位とする．また, z は複素数とする．

(1)　$\sin z = 10$ を z について解け．

(2)　i^i, 3^i それぞれについて実部と虚部を求めよ．

(3)　ある周回経路 C に沿った複素平面上の周回積分

$$\oint_C \frac{1}{z^2+1} dz$$

を考える．経路 C の取り方によって積分値がどのように変化するか考えたい．極の配置を図示し，経路の例を 1 つずつ示しながらとりうる積分値を全て列挙せよ．

(4)　z に関する関数

$$\frac{1}{z^2-3z+2}$$

の収束域 $1<|z|<2$，および $2<|z|$ に対するローラン級数を求めよ．

(5)　実積分

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4} dx$$

を，留数の定理を用いて求めたい．適切な複素平面での積分路を定めて図示し，積分値を求めよ．

(東京大 2016)　　(m20160704)

0.133　確率変数 X の累積分布関数 $F(x)$ が以下の微分方程式で表されるとする．

$$\frac{dF}{dx} = \frac{F(1-F)}{s}$$

今，$F(m) = 1/2$ である．ただし，m, s は実数である．このとき，設問 (1)〜(5) について答えよ．

(1)　累積分布関数 F，および F の密度関数 f をそれぞれ求めよ．

(2)　f が偶関数となる m を求めよ．ただし，その導出過程，または理由を示すこと．

(3)　期待値 $E = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f dx$ を求めよ．ただし，その導出過程を示すこと．

次に，入力信号の値 x に応じた確率で信号を出力したりしなかったりするシステムを考える．今，n 種類の入力信号の値 $x_i (i=1,2,\cdots,n)$ に対して，信号が出力された頻度を調べたところ $r_i (i=1,2,\cdots,n)$ を得た．以下の問いに答えよ．

(4) 関数 $\varphi\left(F(x)\right) = \log\left(\dfrac{F(x)}{1-F(x)}\right)$ を，x の一次式で表せ.

(5) $y_i = \varphi(r_i)$ としたとき，

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \left\{y_i - \varphi\left(F(x_i)\right)\right\}^2$$

を最小にする m と s を求め，それぞれ下記の統計量を用いて表せ.

平均 : $\quad \overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\ , \qquad \overline{y} = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j$

分散 : $\quad \mathrm{var}(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2\ , \qquad \mathrm{var}(y) = \overline{y^2} - \overline{y}^2$

共分散 : $\quad \mathrm{cov}(x,y) = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j y_j - \overline{x}\cdot\overline{y}$

(東京大 2017) (m20170702)

0.134 袋の中に 3 色の玉が 8 個入っており，赤玉が 4 個，緑玉が 2 個，青玉が 2 個である．A さんが袋の中から無作為に玉を 3 個取り出し，5 個の玉が残る袋の中から B さんが無作為に玉を 3 個取り出し，色を確認した後に玉をすべて袋に戻す．この過程を 1 回の試行とし，A さんが赤，緑，青の 3 色の玉を 1 個ずつ取り出せたときを $X=1$, それ以外をX=0とし, Bさんが赤, 緑, 青の 3 色の玉を 1 個ずつ取り出せたときをY=1，それ以外を $Y=0$ とする．この試行を繰り返し行うとき，以下の問いに答えよ．

(1) この試行を 1 回行ったときの，次の統計量を求めよ．

(a) 期待値 $E(X)$ および $E(Y)$.

(b) 相関係数 $\rho(X,Y)$.

(2) A さんは n 回目の試行で初めて $X=1$ となったときに n 点もらえるとする．

(a) もらえる点数が 3 点である確率を求めよ．

(b) A さんのもらえる点数の期待値は，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \alpha \sum_{k=1}^{n} k\beta^{k-1}$ という形で表せる．ただし，α と β は実数とする．α および β の値を求めた後，期待値を求めよ．

(3) B さんは n 回目の試行で初めて $Y=1$ となったときに r^n 点もらえるとする．ただし，r は正に実数とする．B さんがもらえる点数の期待値が有限な値をとるための，r の条件を求めよ．

(東京大 2018) (m20180702)

0.135 2 つの正方行列 A, B を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}+1 & \frac{1}{\sqrt{2}}-1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}-1 & \frac{1}{\sqrt{2}}+1 & 1 \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

とし，行列 C を $C = BAB^{-1}$ とする．以下の問いに答えよ．なお，以下では任意のベクトル $\vec{x}$ に対し $\vec{x}^T$ はその転置を表すものとする． また，行列 I を単位行列とし， ある正方行列 X に対して $\exp(X)$ を

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{k!} = I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots$$

と定義する．

(1) 行列 A の固有値を複素数の範囲で求めよ．

(2) 行列 C の固有値を複素数の範囲で求めよ．

(3) あるスカラー変数 t に対して $\exp(At)$ を求めよ．

(4) 3 次元ベクトル $\overrightarrow{x}$ に対してスカラー関数 $f(\overrightarrow{x})$ を

$$f(\overrightarrow{x}) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \exp\left(C\frac{2\pi k}{n}\right)\overrightarrow{a} - \overrightarrow{x} \right\}^T \left\{ \exp\left(C\frac{2\pi k}{n}\right)\overrightarrow{a} - \overrightarrow{x} \right\}$$

とおく．ただし，n は $n > 1$ を満たす整数，$\overrightarrow{a}$ は以下のような 3 次元ベクトルである．

$$\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

関数 $f(\overrightarrow{x})$ を最小にする $\overrightarrow{x}$ は，ある単位ベクトル $\overrightarrow{b}$ を用いて以下のような形式で表せる．

$$\overrightarrow{x} = \boxed{\text{（ア）}} \left(\sum_{k=1}^{n} \boxed{\text{（イ）}} \right) \overrightarrow{b}$$

(a) (ア) と (イ) に入る数式を書け．必要であれば a_1，a_2，a_3，n，k を用いてよい．なお，行列を含まない形式で解答すること．

(b) $\overrightarrow{b}$ を求めよ．

(5) (4) で求めた $\overrightarrow{x}$ に対して，$n \to \infty$ としたときの $\overrightarrow{x}$ を a_1，a_2，a_3 を用いて表せ．

(東京大 2018)　　(m20180705)

0.136 i を虚数単位とし，z は複素数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 次の複素数を $x + iy$（x, y は実数）の形ですべて求めよ．ただし，x, y の表式に三角関数を含んではならない．

(a) $\left(1 - \sqrt{3}i\right)^3$　　(b) $i^{1/2}$　　(c) $\dfrac{(1-i)^6}{(1+i)^8}$

(2) 関数 $z = \tan\omega = \dfrac{\sin\omega}{\cos\omega}$ の逆関数を $\omega = \tan^{-1} z$ で表す．

(a) 次の式が成り立つことを示せ．　$\tan^{-1} z = \dfrac{i}{2}\log\left(\dfrac{i+z}{i-z}\right)$

ただし，$\log$ は複素対数関数である．

(b) $\tan^{-1} z$ の z に関する微分を求めよ．

(3) 複素平面において，曲線 C を $z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とする．

(a) 次の積分 $I(k)$ を求めよ．ここで，k は $0 < k < 1$ の定数とする．　$I(k) = \displaystyle\int_C \frac{1}{k^2z^2+1}dz$

(b) $k = 2 - \sqrt{3}$ のとき，I の値を求めよ．

(4) 実積分 J の値を留数定理により求めることを考える．　$J = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx$

(a) J の積分範囲を $[-\infty, \infty]$ と変形して，被積分関数に e^{ix} を用いて J を表せ．

(b) 関数 $f(z) = 1/(z^2+1)^2$ とする．複素平面において，図 1 の半径 Γ（円弧 ADB）の半径 R が十分に大きい時，次のことが成り立つことを示せ．　$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz = 0$

(c) 図 1 の C に関する周回積分を考えることにより，J の値を求めよ．

このとき，複素平面の上半平面において，

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)e^{iz}dz = 0$$

であることを用いてよい．

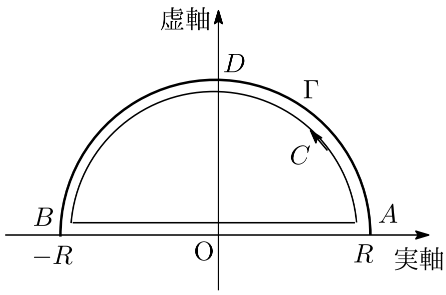


図 1

(東京大 2020)　　(m20200703)

0.137 数列 $x_n,\ y_n,\ z_n\ \ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を，次の漸化式で定義する．

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \qquad (n \geqq 0)$$

ただし，

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，初期値 $x_0,\ y_0,\ z_0$ は実数で与えられているものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の全ての固有値と，それに対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) A^n を求めよ．

(3) $x_0>0,\ y_0>0,\ z_0>0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{{x_n}^2+{y_n}^2+{z_n}^2}<C$ となる定数 $C\ (C>0)$ が存在するための，初期値 $x_0,\ y_0,\ z_0$ に関する必要十分条件を示せ．

(東京大 2020)　　(m20200704)

0.138 実数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ を満たすならば，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=0$ となることを示せ．

(東京工業大 1997)　　(m19970802)

0.139 $G(x,y,t)$ は次のように定義される関数である．

$$G(x,y,t)=\frac{1}{t}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right) \quad (t>0)$$

(1) 偏微分 $\dfrac{\partial G}{\partial x},\ \dfrac{\partial G}{\partial t}$ をそれぞれ求めよ．

(2) 各 $t>0$ に対して，次の積分 $I(t)$ を計算せよ．

$$I(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G(x,y,t)\,dx\,dy$$

(東京工業大 2001)　　(m20010803)

0.140 (1) 次の積分を求めよ．
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{e^x+2e^{-x}+3}dx$$

(2) $\displaystyle\varphi(a)=\int_0^{\pi}\log(1-2a\cos x+a^2)dx$ なる積分において，

(a) $2\varphi(a) = \varphi(a^2)$ が成り立つことを示せ.

(b) $\varphi(a)$ を求めよ．ただし，$|a| \neq 1$ とする.

(東京工業大 2002)　　(m20020801)

0.141　積分　$I = \displaystyle\int_0^\infty \left\{ \int_0^x (x+y)e^{-(x+y)} \frac{dy}{2y+1} \right\} dx$　の値を求めよ.

(東京工業大 2003)　　(m20030801)

0.142　次の 2 つの積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{\log(a+x)}{x^2} dx$　（$a > 0$ は定数）.

(2) $\displaystyle\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{1}{xy(x+y)} dxdy$

(東京工業大 2004)　　(m20040802)

0.143　次を示せ.

(1) $\boldsymbol{R}$ 上の実数値連続関数 f が周期 p を持つ周期関数ならば次式が成り立つ.

$$\int_x^{x+p} f(t)dt = \int_0^p f(t)dt \quad (x \in \boldsymbol{R}) .$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b |\sin nx| dx = \frac{2(b-a)}{\pi} \quad (b > a)$.

(東京工業大 2006)　　(m20060802)

0.144　$\beta, \gamma < 0$ とする．次の広義積分の値を求めよ．ただし，広義積分が ∞ に発散する場合には，その値を ∞ とする.

(1) $\displaystyle\iint_{0<x^2+y^2\leq 1} (x^2+y^2)^\beta dxdy$　　(2) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\geq 1} (x^2+y^2)^\gamma dxdy$

(東京工業大 2009)　　(m20090803)

0.145　実変数 t の関数 $x(t)$ が微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt}$$

を満たしている.

(1) $t \to -\infty$ のとき，$x(t)$ は有限の値に収束することを示せ.

(2) $t \to +\infty$ のとき，$x(t)$ が $+\infty$ にも $-\infty$ にも発散しないならば，$x(t)$ は定数関数であることを示せ.

(東京工業大 2009)　　(m20090804)

0.146　n を整数として以下の設問に答えよ.

(1) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x \, \cos nx \, dx$ を計算せよ.

(2) $f(x)$ を $[0,\ \pi]$ 上の連続関数とする. $f(x)$ が微分可能で導関数 $f'(x)$ が連続であれば

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^a f(x) \cos nx \, dx = 0$$

が成り立つことを示せ.（ ここで a は任意の実定数とする.）

(東京工業大 2010)　　(m20100801)

0.147 次の二重積分の値を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x^2-y^2+2xy}}{1+(x+y)^2}\,dxdy$$

(東京工業大 2010)　　(m20100802)

0.148 次の微分方程式　$6\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}-y=0$　の解 $y=y(x)$ のうちで $y(2)=3$ および $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}y(x)=0$ をみたすものを求めなさい.

(東京農工大 2007)　　(m20070901)

0.149 (1) 領域 D : $0\leqq x\leqq 1$, $x^2\leqq y\leqq 2-x$ における次の重積分を求めなさい. $\displaystyle\iint_D\frac{1}{x+1}\,dxdy$

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}\,dx$ を, $t=x-\dfrac{1}{x}$ と置いて求めなさい.

(東京農工大 2008)　　(m20080903)

0.150 (1) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+3y=\cos 2x$$

の解 $y=y(x)$ のうちで周期関数となるものを求めなさい.

(2) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+3y=1$$

の解 $y=y(x)$ について $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}y(x)$ の値を求めなさい.

(東京農工大 2011)　　(m20110901)

0.151 以下の広義積分の値を求めなさい.

$$\int_0^{\infty}\left(xe^{-x}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

(東京農工大 2013)　　(m20130902)

0.152 (1) x が正の実数のとき $F(x)=\displaystyle\int_0^{\infty}(12\,t+1)e^{-xt}dt$ を x の式で表しなさい.

(2) (1) で求めた $F(x)$ について $\displaystyle\int_2^3 F(x)dx$ の値を求めなさい.

(東京農工大 2014)　　(m20140902)

0.153 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}dx$　の値を求めなさい.

(東京農工大 2022)　　(m20220902)

0.154 方程式 $y+e^{1-xy}=0$ を満たし, $y(0)=-e$ であるような微分可能な関数 $y=y(x)$ について, 次の問に答えよ.

(1) 導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ および, 2 次導関数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を x,y の有理式で表し, それらの $x=0$ における値を求めよ.

(2) $y(x)$ が定義される最大区間を $(-\infty,a)$ とするとき, a の値を求め, 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}y(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to a-0}y(x)$ を求めよ.

(電気通信大 2001)　　(m20011003)

0.155 次の問いに答えよ.

(1) $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{1+z^2}$ の特異点をすべて求め, そこでの留数を計算せよ.

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}dx$ の値を求めよ．

(電気通信大 2001)　　(m20011009)

0.156 確率変数 X, Y, U が互いに独立で，各々正規分布 $N(\mu_1, {\sigma_1}^2), N(\mu_2, {\sigma_2}^2), N(\mu_3, {\sigma_3}^2)$ に従うとする．

(1) 任意の定数 a, b, c に対して，$W = aX + bY + cU$ の分布を求めよ．

(2) $V = \left(\dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 \Big/ \left(\dfrac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2$ の分布を求めよ．

(3) $P\left(-3 \leq \dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1} \leq 3\right)$ を求めよ．

ただし，標準正規分布 $N(0,1)$ の分布関数を

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

とおくと，次表の値をとる．

z	0.0	1.0	2.0	3.0
$\Phi(z)$	0.5000	0.8413	0.9772	0.9987

(電気通信大 2001)　　(m20011011)

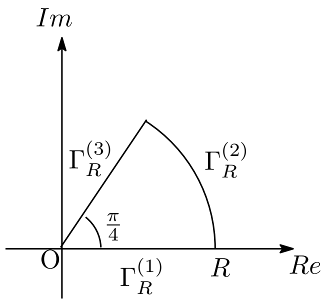
0.157 $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}x}{x^2+1}\right)$ について，次の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ の値を求めよ．

(2) $f'(x)$ を計算せよ．　　(3) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(電気通信大 2006)　　(m20061001)

0.158 右図に示すように，複素平面上にある中心角 $\pi/4$，半径 $R(>0)$ の領域の周囲を反時計回りに 1 周する経路 Γ_R を考える．また，図にあるように経路 Γ_R の各部分を $\Gamma_R^{(1)}, \Gamma_R^{(2)}, \Gamma_R^{(3)}$，と名付ける．



以下の 3 つの問いに順に答えよ．

(1) 経路 Γ_R では式 ① が成立する．

$$\int_{\Gamma_R} e^{-z^2} dz = 0 \qquad ①$$

次式のように G_R, P_R, C_R, S_R を定義するとき，式 ① をこれらを用いて表せ．

$$G_R = \int_0^R e^{-x^2}dx\ , \qquad P_R = \int_{\Gamma_R^{(2)}} e^{-z^2}dz\ ,$$

$$C_R = \int_0^R \cos r^2 dr\ , \qquad S_R = \int_0^R \sin r^2 dr\ ,$$

(2) P_R について次の不等式 ② が成立することを示すとともに，

$$|P_R| \leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2\cos 2\theta} R d\theta \qquad ②$$

$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$ では $0 \leq 1 - \dfrac{4}{\pi}\theta \leq \cos 2\theta$ となることを使って，$\displaystyle\lim_{R\to\infty} P_R = 0$ を示せ．

(3) 小問 (1), (2) で求めた結果を使って，定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^2 dx$ と $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2 dx$ を計算せよ．ただし、$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明なしに用いてよい．

(電気通信大 2006)　　(m20061008)

0.159　$f(z) = \dfrac{z^4}{z^6+1}$ について次の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ の極を極形式 $(re^{i\theta})$ の形で表せ．

(2) $z = \alpha$ を $f(z)$ の極とするとき，$f(z)$ の $z = \alpha$ における留数が $\dfrac{1}{6\alpha}$ であることを示せ．

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ を求めよ．

(電気通信大 2008)　　(m20081005)

0.160　関数 $f(x) = \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x \quad (x > 0)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$， $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ．

(2) $g(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ とおく．$g(x)$ を求めよ．

(3) $g(x) > 0 \ \ (x > 0)$ であることを示せ．

(4) $f(x)$ の値域 $\{f(x) \mid x > 0\}$ を求めよ．

(電気通信大 2009)　　(m20091003)

0.161　複素関数 $f(z) = \dfrac{z^2}{z^4+1}$ について以下の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ のすべての極を極形式 $\left(re^{i\theta}\text{の形}\right)$ で表せ．

(2) α を $f(z)$ の極とするとき，$f(z)$ の α における留数が $\dfrac{1}{4\alpha}$ であることを示せ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ を求めよ．

(電気通信大 2012)　　(m20121005)

0.162　関数 $u(x,y,t) = \dfrac{1}{4\pi t} e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}} \quad (t > 0)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ および $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ を計算せよ．

以下では，$t > 0$ を定数とする．

(2) $u(x,y,t)$ の $x.y$ に関するマクローリン展開

$$u(x,y,t) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \cdots$$

の係数 a_{00}，a_{10}，a_{01}，a_{20}，a_{11}，a_{02} を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \iint_{x^2+y^2 \le R^2} u(x,y,t)\, dxdy$ を計算せよ．

(電気通信大 2013)　　(m20131003)

0.163　複素関数 $f(z)\ \dfrac{z^2}{z^4+z^2+1}$ について以下の問いに答えよ．

(1) $z^6 = 1$ を満たす複素数 z をすべて求めよ．

(2) 上半平面 $\mathbb{H}=\{x+iy\ :\ x,y\in\mathbb{R},\ y>0\}$ 上にある $f(z)$ の各特異点 α に対して，その留数 $\mathrm{Res}(\alpha)$ を求めよ．ただし，$i=\sqrt{-1}$ とする．

(3) 定積分 $I=\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ の値を求めよ．

(電気通信大 2013)　　(m20131005)

0.164 複素関数 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ に対して，以下の各問いに答えよ．ただし，$i=\sqrt{-1}$ で， e は自然対数の底とする．

(1) $f(z)$ のすべての極を求め，各極における留数を求めよ．

(2) $z=Re^{i\theta}$ $(R>1,\ 0\leqq\theta\leqq\pi)$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$|f(z)|\leqq\frac{1}{R^2-1}$$

(3) 広義積分 $I=\displaystyle\int_0^\infty\frac{\cos x}{x^2+1}dx$ を求めよ．

(電気通信大 2016)　　(m20161005)

0.165 複素関数 $f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ のすべての極を求めよ．

(2) $f(z)$ の極 $z=\alpha$ における留数 $\mathrm{Res}(\alpha)$ を α を用いた簡単な式で表せ．

(3) 広義積分 $I=\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ の値を求めよ．

(電気通信大 2018)　　(m20181005)

0.166 方程式 $\dfrac{dx}{dt}=x+x^2$ の解で， $t=0$ で $x=\xi$ となるものを $x=\varphi(t,\xi)$ とする．

(1) $x=\varphi(t,\xi)$ の表式を求めよ．

(2) t を固定したとき， $x=\varphi(t,\xi)$ が ξ について連続となるような ξ の範囲を求めよ．

(3) ξ を固定したとき， $x=\varphi(t,\xi)$ が t について連続となるような t の範囲を求めよ．

(4) 特に，$x=\varphi(t,\xi)$ が $-\infty<t<\infty$ において t の連続関数になるためには，ξ はどんな範囲にあればよいか．

(横浜国立大 1996）　　(m19961101)

0.167 a を正の定数とし，関数 $f(x)$ を

$$-\frac{a}{2}<x<\frac{a}{2}\quad のとき，\qquad f(x)=\frac{1}{a}$$

$$x<-\frac{a}{2}\ および\ x>\frac{a}{2}\quad のとき，\qquad f(x)=0$$

と定義する．微分方程式

$$x\neq\pm\frac{a}{2}\quad のとき，\quad \frac{d^2y}{dx^2}-y=f(x)$$

$$x=\pm\frac{a}{2}\quad のとき，\quad \frac{dy}{dx}\ は連続$$

$$x\to\pm\infty\quad のとき，\quad y=0$$

について，次の問に答えよ．

(1) 微分方程式の解を $y(x)$ とするとき，$y(-x)=y(x)$ を示せ．

(2) 上記の微分方程式の解を求めよ．

(3) a を 0 に近づけると，解はどのような関数に近づくか？

(横浜国立大 2001)　　(m20011101)

0.168 (1) m, n を整数とするとき，以下の式が成り立つことを示せなさい．

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

(2) 次の周期関数について解答しなさい．

$$f(x) = \begin{cases} -k & (-\pi < x < 0) \\ k & (0 < x < \pi) \end{cases} \quad , \quad f(x+2\pi) = f(x) \qquad k > 0$$

この関数を以下のように無限級数で表すとき，その係数 a_0，a_n，b_n を求めなさい．さらに，求められる無限級数を $n = 7$ の項まで示しなさい．

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\,\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\,\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

(横浜国立大 2008)　　(m20081105)

0.169 $0 < x < 1$ とし, $A = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ x & 1-x \end{pmatrix}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を 1 つ求めよ．

(3) n を 1 以上の整数とする，A^n を求めよ．

(4) A^n の各成分は，$n \to \infty$ のとき極限をもつことを示せ．

(横浜国立大 2014)　　(m20141101)

0.170 次の行列 A に対して，多項式 $f(x)$ を $f(x) = \det(xE - A)$ で定義する．ただし，E は $3\times\ 3$ の単位行列とする．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値を求めよ．　(2) $f(A)$ を求めよ．　(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ を求めよ．

(横浜国立大 2016)　　(m20161101)

0.171 次の関数をフーリエ級数 $y = a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ に展開せよ．

(1) 区間 $x = [-\pi,\ \pi]$ で定義される関数 $y = \begin{cases} a\ :\ x \geq 0\ , & a \text{ は実定数} \\ 0\ :\ x < 0 \end{cases}$

(2) 区間 $x = [0,\ \pi]$ で定義される三角関数 $y = a\sin(nx)\cos(nx)$　ここで n は整数

(3) 区間 $x = [0,\ \pi]$ で定義される一次関数 $y = x$

(横浜国立大 2017)　　(m20171102)

0.172 次の行列 A について以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を一つ求めよ．

(3) n を 1 以上の整数とする． $\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．

(横浜国立大 2022)　　(m20221101)

0.173 (1) 次の等式を証明せよ．

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

ただし，n は自然数とする．

(2) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$$

（千葉大 1998）　　(m19981201)

0.174 次の積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

（千葉大 1998）　　(m19981202)

0.175 級数 $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+2)}+\cdots$ について次の設問に答えよ．

(1) 第 n 部分和 $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+2)}$ を求めよ．

(2) S_n の極限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

（千葉大 1999）　　(m19991201)

0.176 微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}+2y=1\ ,\ \ y(x)\Big|_{x=1}=\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}=0 \qquad \text{(i)}$$

に関する以下の設問に答えなさい．

(1) 変数変換 $x=e^t$ を考える．変数 x の定義域が $[1,\infty]$ であるとき，変数 t の定義域を求めなさい．

(2) 合成関数 $y(x(t))$ の微分公式は $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt}$ で与えられる．合成関数 $y(x(t))$ の 2 階微分 $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ を $\dfrac{d^2y}{dx^2}$，$\dfrac{d^2x}{dt^2}$，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{dx}{dt}$ を用いて表しなさい．

(3) 変数変換 $x=e^t$ を用いることによって，式 (i) の微分方程式が

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=1\ ,\ \ y(t)\Big|_{t=0}=\frac{dy}{dt}\Big|_{t=0}=0 \qquad \text{(ii)}$$

に変換できることを示しなさい．

(4) 式 (ii) の微分方程式を解きなさい．

(5) 設問 (4) で求めた微分方程式 (ii) の解から微分方程式 (i) の解 $y(x)$ を求めなさい．

（千葉大 2001）　　(m20011202)

0.177 x を変数とする関数を $f(x)$ とする．複素単位を $i=\sqrt{-1}$ として，

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx$$

によって決まる ω の関数 $F(\omega)$ を関数 $f(x)$ のフーリエ変換という． $F(\omega)$ から逆に $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x} d\omega$$

によって求めることができる．この逆を逆フーリエ変換という．

関数 $F(\omega)$ を ω で微分することを考える．

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx$$

より微分と積分を入れ換えると，

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\omega}\big(f(x)\, e^{-i\omega x}\big)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\big(-ixf(x)\, e^{-i\omega x}\big)dx$$

となり，関数 $(-ix)f(x)$ のフーリエ変換が $\dfrac{d}{d\omega}F(\omega)$ であることがわかる．このことを利用して以下の設問に答えなさい．ただし，ここで扱う全ての関数は微分と積分の順序を交換できる性質を満たしていることを仮定する．

(1) ω に関する $F(\omega)$ の決める関数 $\dfrac{d^2}{d\omega^2}F(\omega)$ が関数 $(-x^2)f(x)$ のフーリエ変換であることを示しなさい．

(2) 逆フーリエ変換が $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ になる関数を $F(\omega)$ によって表しなさい．

(3) 微分方程式

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}-x^2f(x)=-(2n+1)f(x)\ ,\ \lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0 \qquad (*)$$

の解 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が満たす微分方程式を導きなさい．ただし， n は零以上の整数である．

(4) 設問 (3) の結果から，式 $(*)$ の微分方程式の解のフーリエ変換に関する性質を５０字程度で述べなさい．

(千葉大 2001) (m20011204)

0.178 次の極限値を求めなさい．ただし，与えられた関数 $f(x)$ は，$x=a$ で微分可能とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-3h^2)}{h}$

(千葉大 2002) (m20021201)

0.179 x を変数とする関数を $f(x)$ とする．複素単位を $i=\sqrt{-1}$ として，

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$$

によって決まる ω の関数 $F(\omega)$ を関数 $f(x)$ のフーリェ変換という．$F(\omega)$ から逆に $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x} d\omega$$

によって求めることができる．この変換を逆フーリェ変換という．

関数 $F(\omega)$ を ω で微分することを考える．

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$$

より微分と積分とを入れ換えると，

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\omega}\Big(f(x)e^{-i\omega x}\Big)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\Big(-ixf(x)e^{-i\omega x}\Big)dx$$

となり，関数 $(-ix)f(x)$ のフーリエ変換が $\dfrac{d}{d\omega}F(\omega)$ であることがわかる．このことを利用して以下の設問に答えなさい．ただし，ここで扱う全ての関数は微分と積分との順序を交換できる性質を満たしていることを仮定する．

(1) ω に関する $F(\omega)$ の決める関数 $\dfrac{d^2}{d\omega^2}F(\omega)$ が関数 $(-x^2)f(x)$ のフーリエ変換であることを示しなさい．

(2) 逆フーリエ変換が $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ になる関数を $F(\omega)$ によって表しなさい．

(3) 微分方程式

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}-x^2f(x)=-(2n+1)f(x)\,,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0 \qquad (*)$$

の解 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が満たす微分方程式を導きなさい．ただし，n は零以上の整数である．

(4) 設問 (3) の結果から，式 $(*)$ の微分方程式の解のフーリエ変換に関する性質を 50 字程度で述べなさい．

(千葉大 2002)　　(m20021205)

0.180 次の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(1+x)^{1/x}$

(千葉大 2004)　　(m20041201)

0.181 次の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

(千葉大 2008)　　(m20081201)

0.182 実数値関数 $f(x)$ は $-\infty<x<\infty$ で連続であり，次の関数方程式を満たすとする．

$$f(x)=1+\int_0^x(t-x)f(t)dt$$

(1) $f(0),\ f'(0)$ を求めなさい．また $f(x)$ の満たす微分方程式を求めなさい．

(2) $f(x)$ の満たす微分方程式を解きなさい．

(千葉大 2008)　　(m20081204)

0.183 $a>0$ として，次の重積分に関して各問いに答えなさい．

$$I(a)=\iint_D e^{-(x+y)}dxdy$$

$$D=\{(x,y)\mid x\geq 0\,,\ y\geq 0\,,\ x+y\leq a\}$$

(1) 領域 D を図示しなさい．

(2) 重積分 $I(a)$ を求めなさい．

(3) $I(a)$ を a の関数と考え，定義域 $0<a<+\infty$ に対して，極値，変曲点，極限を考慮して，そのグラフを書きなさい．

(千葉大 2009)　　(m20091203)

0.184 次の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x\sin x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2-3x-1}\right)$

(千葉大 2011)　　(m20111201)

0.185 次の数列，または，関数の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$　　ここで，$a_n=2+\dfrac{2}{a_{n-1}}$ $(n=1,2,\cdots)$, $a_0=2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x+1\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

(千葉大 2013)　　(m20131201)

0.186 三次元空間の中にデカルト直交座標系 $O-XYZ$ 座標系が定義されている．

$y=0$ 平面（$z-x$ 平面）上の点 $A=(x_0,0,z_0)$ を始点とし，一定方向で $y=0$ 平面から遠ざかる点 B がある．線分 AB の長さは λ で，線分 AB の方向ベクトルは，球座標系にならって，水平角（緯度）θ，方位角（経度）φ とする．ただし，$-90^\circ<\theta<90^\circ$，$0^\circ<\varphi<180^\circ$．点 B の座標は，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ から，

$$B=(\lambda\cos\theta\cos\varphi+x_0\ ,\ \lambda\cos\theta\sin\varphi\ ,\ \lambda\sin\theta+z_0)$$

で与えられる．定点 E を $E=(0,-a,h)$, $a>0$ として，点 E と点 B を結ぶ直線が $y=0$ 平面（$z-x$ 平面）と交わる点を P とする．$\lambda\to\infty$ の時の P の座標を求めなさい．

（ヒント ： $\lambda\to\infty$ の時の点 P を透視画法では消点 (Vanishing Point) と呼んでいる）

(千葉大 2015)　　(m20151205)

0.187 (1) $x=0$ 近傍で次の近次式が成り立つように，定数 A_i $(i=0.1,2,3,4)$ を求めなさい．

$\cos(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4$

(2) 次の関数をテイラー展開しなさい．

$\log(x+1)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{x}$ の極限値を求めなさい．

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{1+x^2}}$ の極限値を求めなさい．

(千葉大 2016)　　(m20161201)

0.188 実数 $t\geq0$，実数 $a>0$ について定義された関数 $f(t)=\sinh at$ に対して，以下の式で定義される関数 $F(s)$ を求めなさい．

$$F(s)=\int_o^\infty f(t)\exp(-st)\,dt$$

(千葉大 2016)　　(m20161206)

0.189 次の問に答えなさい．ただし，$\log x$ の底は，自然対数の底 (e) とする．

(1) (a) 関数 $\log(1+x)$ と $x\cos x$ を，それぞれ 3 次の項までマクローリン展開しなさい．

(b) $\displaystyle\lim_{x\to0+0}\left(\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x\cos x}\right)$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n+3^n}$ を求めなさい．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\log x+\sqrt{\log x}}-\sqrt{\log x-\sqrt{\log x}}\right)$ を求めなさい.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}(1-\tanh x)^{\frac{1}{\sin x}}$ を求めなさい.

(千葉大 2017)　　(m20171201)

0.190 (1) 次の積分の値を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-a(x^2+y^2\}dxdy$$

(2) 関数 $f(a)$ を $f(a)=\displaystyle\int_0^{\infty}\exp(-ax^2)dx$ と定義する．$f(a)$ を微分することにより，次の積分の値を求めよ．ただし，n は正の整数とする．

$$\int_0^{\infty}x^2\exp(-x^2)dx \qquad\qquad \int_0^{\infty}x^{2n}\exp(-x^2)dx$$

(筑波大 2001)　　(m20011306)

0.191 定積分　$I(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_0^{\infty}\exp(-\alpha x)\frac{\sin\beta x}{x}dx \quad (\alpha\geqq 0\,,\ \beta\neq 0)$

をパラメータ β について微分することにより　$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\mathrm{sign}(\beta)\frac{\pi}{2}$　を導け．

ここで，$\mathrm{sign}(\beta)$ は β の符号 $(\pm)$(β が正値の場合は $+$，負値の場合は $-$) を意味する．

(筑波大 2003)　　(m20031303)

0.192 行列　$A=\begin{pmatrix}1-p & p\\ q & 1-q\end{pmatrix}$　を考えよう．ここで，パラメータ p,q の変動範囲は $0<p<1\,,\ 0<q<1$ であるとする．このとき次の (1),(2),(3) の各問いに答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルはノルムが 1 となるように規格化して示せ．

(2) 行列 A の n 乗，A^n を求めよ．

(3) 行列 A の n 乗の n が大きい場合の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}A^n$ を求めよ．

(筑波大 2003)　　(m20031316)

0.193 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}-2\sqrt{x+y}+\sqrt{2}$ とすると, この関数は $0<x,y<\infty$ において下に凸である. $f(x,y)$ が最小値をとるときの x,y の値, および関数の最小値を求めよ.

（筑波大 2004）　　(m20041313)

0.194 (1) $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　を導け．

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}x^n e^{-ax^2}dx \quad (a>0,\ n$ は自然数)　を求めよ．

(筑波大 2004)　　(m20041314)

0.195 次の微分方程式を解くために，以下の設問に答えよ．

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}x_1 &= 2x_1-2x_2\\[2mm] \dfrac{d}{dt}x_2 &= -x_1+3x_2\end{cases}$$

(1) 行列 A を　$A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$　とおく．この行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるように行列 P を定め，行列 A を対角化せよ．

(3) ベクトル $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ とおく．$\mathbf{x}$ と A を用いて，上の微分方程式を表せ．

(4) ベクトル $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおく．$P\mathbf{y} = \mathbf{x}$ として，これを設問 (3) で求めた表現に代入せよ．また，この y_1，y_2 に関する微分方程式の一般解を求めよ．

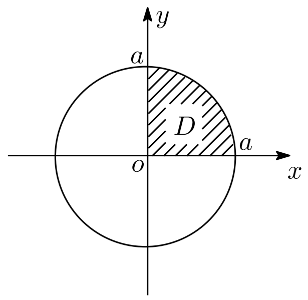
(5) x_1，x_2 の一般解を求めよ．

(6) $t = 0$ における初期値 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に対応する解 x_1，x_2 の，$t \to \infty$ における振る舞いを調べよ．

(筑波大 2004)　　(m20041321)

0.196 (1) 積分 $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ．
ただし, 積分領域 D は
$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq a^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ $(a > 0)$ とする．

(2) (1) の結果を利用し, 領域 $D_\infty = \{(x, y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ における広義積分 $\displaystyle\iint_{D_\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ．



(筑波大 2005)　　(m20051311)

0.197 $f(x) = e^{-x}\sin x$ について以下の問いに答えなさい．

(1) $f'(x)$ を求め，$0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で $f'(x) = 0$ となる点をすべて挙げなさい．

(2) $y = f(x)$ の概略図をグラフで示しなさい．　(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を求めなさい．

(筑波大 2006)　　(m20061301)

0.198 環境中における生物の増殖速度は条件が良好な場合，個体数濃度 (x) に比例する．すなわち，比例定数（マルサス指数）を m として，

$$\frac{dx}{dt} = mx \qquad \text{(式 1)}$$

と書くことができる．この数理モデルについて以下の問いに答えなさい．

(1) (式 1) を初期条件 $t = 0$ において $x = x_0$ として解き，グラフに図示しなさい．

(2) 環境容量の有限性を考えると (1) の答えは，時間が経過していくと不合理である．この場合，増殖速度は個体数濃度 (x) と空き容量 $(K - x)$ の積に比例するとして

$$\frac{dx}{dt} = mx(K - x) \qquad \text{(式 2)}$$

と変更される．K は環境容量を表す定数．(式 2) を初期条件 $t = 0$ において $x = x_0$ として解き，x の時間変化の概略をグラフに示し，$x \to \infty$ の挙動を説明しなさい．

(筑波大 2006)　　(m20061302)

0.199 次の極限を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left\{ \frac{1}{2}\log(x + 1) + \log(\sqrt{3x + 2} - \sqrt{3x}) \right\}$

(筑波大 2006)　　(m20061322)

0.200 確率変数 X, Y の同時確率密度関数 $f(x,y) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$ から，確率変数 $Z = X + Y$ が従う分布の確率密度関数を導出せよ．ここで，$-\infty < x < \infty$，$-\infty < y < \infty$ とする．

(筑波大 2007)　　(m20071304)

0.201 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x) = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ の導関数を求めよ．

(筑波大 2007)　　(m20071310)

0.202 (1) 原点に中心をもつ楕円 $x^2 - xy + y^2 = 1$ の，長軸および短軸の長さをそれぞれ求めよ．また，この楕円の概形を，主軸の方向がわかるように描け．

(2) 楕円 $x^2 - xy + y^2 = 1$ の長軸を x 軸に一致させる回転（ただし，回転角は $-\dfrac{\pi}{2}$ より大きく $\dfrac{\pi}{2}$ より小さいとする）による変換 g と，y 軸方向の拡大による変換 f を合成した変換 $f \circ g$ により，元の楕円は円に変換される．行列 A を用いて $f \circ g\ :\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すとき，A 及びその逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) 次の積分を求めよ．　$\displaystyle\iint_D e^{-(x^2-xy+y^2)}dxdy \quad \{(x,y) \mid -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty\}$

(筑波大 2007)　　(m20071312)

0.203 関数 $f(x) = x \cdot \ln x \quad (x > 0)$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $f'(x)$，$f''(x)$ を求めよ．　(2) 関数 $f(x)$ の極値と増減を求めよ．

(3) $x \to +0$ および $x \to +\infty$ における関数 $f(x)$ の極限値を求めよ．

(4) 関数 $f(x)$ のグラフの概形を示せ．

曲線 $y = x \cdot \ln x$ と x 軸と $x = a \quad (0 < a < 1)$ とで囲まれた部分の面積を $S(a)$ とおく．

(5) $S(a)$ を求めよ．　(6) $S(a)$ の極限値 $\displaystyle\lim_{a\to+0} S(a)$ を求めよ．

参考： グラフの描画には自然対数の底として $e = 2.72$ の値を用いなさい．

(筑波大 2007)　　(m20071314)

0.204 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{2\cdot4} + \frac{1}{3\cdot5} + \cdots$ の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$ の値を求めよ．

ただし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$ である（π は円周率）．

(筑波大 2007)　　(m20071335)

0.205 自然対数の底 e は　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$　と定義される．対数関数 $f(x) = \log x$ の x に関する微分が $1/x$ となることを微分の定義　$\displaystyle\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x\to0}\frac{\log(x+\Delta x) - \log x}{\Delta x}$　に基づき示しなさい．

(筑波大 2008)　　(m20081303)

0.206 (1) $t = \sqrt{y^2 - x^2}$ と置換することにより，次の積分を計算せよ．ただし，$x > 0$ とする．

$$\int_x^{\infty} \frac{y}{1+y^2}\,\frac{dy}{\sqrt{y^2-x^2}}$$

(2) 次の累次積分を計算せよ． $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^\infty \frac{y}{1+y^2}\frac{dy}{\sqrt{y^2-x^2}}$

(筑波大 2008)　　(m20081316)

0.207 (1) 極座標変換により，次の積分を計算せよ． $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

(2) 上の結果を用いて，次の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

(筑波大 2008)　　(m20081317)

0.208 いろいろな関数を，多項式で表現してみよう．ある関数 $f(x)$ が,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

のように，定数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ を用いて x の多項式であらわされるとしよう．このとき,

(1) $f(0) = a_0$，$f'(0) = a_1$，$f''(0) = 2a_2$ であることを示せ.

(2) 0 以上の任意の整数 n について，$f^{(n)}(0) = n!\,a_n$ であることを示せ．ここで，$f^{(n)}(x)$ は，$f(x)$ を n 回，微分したものである（$f(x)$ の n 階導関数）．ゼロの階乗は 1 とする.

(3) $\displaystyle f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ とできることを示せ.

(4) 関数 $\sin x$ は，このような多項式で表現できることがわかっている．具体的に $\sin x$ をこのような多項式で表現せよ.

(5) 関数 $\cos x$ や関数 e^x も，このような多項式で表現できることがわかっている．具体的に $\cos x$ と e^x をそれぞれ，このような多項式で表現せよ.

(6) 任意の実数 θ について，$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ となることを示せ，ただし，i は虚数単位とする.

(筑波大 2008)　　(m20081319)

0.209 指数関数 e^x の性質に関する以下の問いに答えなさい.

(1) 自然数 n を用いて定義された以下の極限値を考える.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

(1a) 2 項展開の公式を用いて下の関係式を示しなさい.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

(1b) さらに $\dfrac{1}{n!} < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ を用いて $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が有界であることを示しなさい.

(2) 有界なる単調数列は収束するので (1) で与えられた極限は極限値をとり，これを e と書くことにする．この e が自然数の底である．　このとき以下を示しなさい.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

(3) 上記の (2) を使って

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

が成立することをまず示し，その上で微分の定義に基づいて $\{e^x\}' = e^x$ を示しなさい.

(4) $f(x) = e^x$ を n 次のマクローリン展開（$x = 0$ のまわりでのテイラー展開）し，その剰余項を求めなさい.

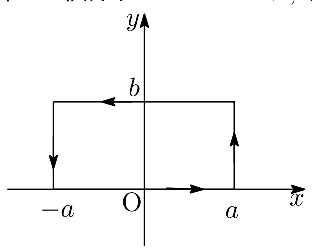
(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0$ を示し，これを用いて $e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ を示しなさい.

(筑波大 2009) (m20091302)

0.210 (1) 次の式が成り立つことを示せ. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$

(2) 複素関数 $f(z)=e^{-z^2}$ を下図の四角形に沿って積分することにより, 次の定積分の値を求めよ. ただし, $a>0,\ b>0,\ i=\sqrt{-1}$ である.

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2ibx-x^2}\,dx$$



(筑波大 2010) (m20101312)

0.211 $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx$ を求めなさい.

(筑波大 2010) (m20101314)

0.212 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\infty}e^{-x}|\sin x|\,dx$$

必要があれば次の公式を用いてもよい.

$$\int e^{-x}\sin x dx=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C\quad (C \text{ は積分定数})$$

(筑波大 2011) (m20111302)

0.213 x の関数 $f(x)=e^{-x^2}$ に関して以下の問題に答えなさい.

(1) f を 1 回微分した導関数 $f'(x)$ を求めなさい.

(2) f を n 回微分した導関数を $f^{(n)}(x)$ と表すとき，ある n 次の多項式 $\phi_n(x)$ によって，$f^{(n)}(x)=\phi_n(x)e^{-x^2}$ と表せることを証明しなさい.

(3) n を任意に固定する．このとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f^{(n)}(x)$ は収束するか．それとも発散するか．理由を付して答えなさい.

(筑波大 2011) (m20111306)

0.214 正しく作られたサイコロを用いて，“3 の倍数が出るまでサイコロを振り続ける”というゲームを行う．このとき以下の問題に答えなさい.

(1) ちょうど n 回目に 3 の倍数が出る確率を P_n と表す．このとき，以下の極限値を求めなさい.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}P_n$$

(2) 3 の倍数が出たときに 100 円もらえるとすると，このゲームによる獲得金額の期待値を求めなさい.

(3) 3 の倍数が出たときにもらえる金額を，1 回目なら 100 円，2 回目なら $100(1+r)$ 円，3 回目なら $100(1+r)^2$ 円というように，サイコロを振る回数が増えるにしたがって $(1+r)$ 倍する．但し，$r>0$ とする．このとき，このゲームによる獲得金額の期待値が有限な値になるためには，正の数 r は，ある範囲内 $0<r<r_0$ にある必要がある．このような r_0 のうち，最も大きな値を求めなさい.

(筑波大 2011)　　(m20111312)

0.215　方程式 $\sin x = 0$ の解は $x = m\pi(0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots)$ であることから，多項式

$$g_n(x) = Cx\left[\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\right]\ \left[\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\right]\cdots\left[\left(1-\frac{x}{n\pi}\right)\left(1+\frac{x}{n\pi}\right)\right]$$

は，定数 C を適切に選べば $x=0$ のまわりで $\sin x$ の良い近似であることがわかっている．
ここで，n は正の大きな整数である．この多項式と $x=0$ のまわりでのベキ級数展開
$\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$ を比較する．ここで，$a_k (k = 0, 1, 2, \cdots)$ は定数である．

(1)　$\sin x$ のベキ級数展開の 3 次の項まで，すなわち a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ．

(2)　多項式 $g_n(x)$ と (1) で求めたベキ級数展開との 1 次の項の係数が一致するように C の値を決めよ

(3)　多項式 $g_n(x)$ と (1) で求めたベキ級数展開との 3 次の項の係数は $n \to \infty$ の極限で一致する．
このことを使って，無限級数 $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} + \cdots$ の和 S を求めよ．

(筑波大 2012)　　(m20121310)

0.216　$S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$（$n$ は自然数）について以下の問いに答えよ．

(1)　$\log(n+1) < S_n \leq 1 + \log n$ を示せ.

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\log n} = 1$ を示せ.

(筑波大 2012)　　(m20121319)

0.217　広義積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$$

が収束するような実数 α の値の範囲を求めよ.

(筑波大 2012)　　(m20121326)

0.218　$\mathbb{R}$ の部分集合 A の上限，下限をそれぞれ $\sup A,\ \inf A$ で表す．このとき，以下を示せ．

(1)　$A \subset \mathbb{R}$ が上に有界でかつ空でないとすると，

$$\sup A = -\inf(-A)$$

が成り立つ．ただし，$-A = \{-a \,|\, a \in A\}$ とする．

(2)　$A, B \subset \mathbb{R}$ がともに上に有界でかつ空でないとすると，

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$$

が成り立つ．ただし，$A + B = \{a + b \,|\, a \in A,\ b \in B\}$ とする．

(3)　$A, B \subset [0, \infty)$ がともに上に有界でかつ空でないとすると，

$$\sup AB = (\sup A)(\sup B)$$

が成り立つ．ただし，$AB = \{ab \,|\, a \in A,\ b \in B\}$ とする．

(筑波大 2012)　　(m20121328)

0.219　積分を利用して，次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$$

(筑波大 2013)　　(m20131303)

0.220 次の問いに答えよ.

(1) $\sinh x$ と $\cosh x$ をマクローリン展開せよ.

(2) 次の積分を計算せよ.

$$\int_0^1 \cosh x\,dx$$

(3) 次の積分を計算せよ.

$$\int_0^1 (1-x)\cosh x\,dx$$

(4) $n=0,1,2,\cdots$ に対して次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\int_0^1 (1-x)^n \cosh x\,dx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n!}{(2m+n+1)!}$$

(筑波大 2013) (m20131304)

0.221 関数 $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ について以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ. 極値の極大, 極小についても調べよ.

(2) 次の積分領域 D_a における関数 $f(x,y)$ の 2 重積分 $\displaystyle\iint_{D_a} f(x,y)dxdy$ を求めよ. ただし, $a>0$ とする.

$$D_a = \left\{(x,y)\,\middle|\, x^2+y^2 \leq a^2\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\right\}$$

(3) 次の積分領域 E_a における関数 $f(x,y)$ の 2 重積分 $\displaystyle\iint_{E_a} f(x,y)dxdy$ の $a\to\infty$ における極限値を求めたい. その導出過程を (2) の結果等と図を用いて説明し, 極限値を示せ.

$$E_a = \left\{(x,y)\,\middle|\, 0 \leq x \leq a\,,\ o \leq y \leq a\right\}$$

(4) (3) の結果を用いて次の積分値を求めよ.

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$$

(筑波大 2013) (m20131306)

0.222 N 人のグループで意見が集約される過程を考える. グループ内の各構成員は意見 A か意見 B を持つとする. 各時刻 t から $t+1$ にかけて $(t=1,2,\cdots)$, 構成員 1 人の意見が変化する可能性があるとする. この時, 意見 A を持つ人の人数 i は, $i=1,2,\cdots,N-1$ の時, <u>確率 $\alpha\ (>0)$ で $i+1$ 人に増え, 確率 $\beta\ (>0)$ で $i-1$ 人に減り, 確率 $1-\alpha-\beta\ (\geq 0)$ で i 人のままだ</u>とする. また, 全員の意見が A か B のどちらかに集約されたら $(i=N$ か $i=0)$, それ以降は意見変更は起こらないとする. 以下の問いに答えよ.

(1) $N=3\,,\ \alpha=1/2\,,\ \beta=1/2$ のケースを考える. 「時刻 $t=1$ で $i=2$ のとき, 時刻 $t=6$ までに全員の意見が A に集約されている確率」を求めよ.

(2) 「時刻 t で意見 A の数が i 人のとき, 時刻 $t\to\infty$ で全員の意見が A に集約されている確率」を $x(i,t)$ と書くこととする. $N=3\,,\ \alpha=1/2\,,\ \beta=1/2$ のとき, $x(2,1)$ を求めよ.

(3) 任意の $N,\ i,\ \alpha,\ \beta$ に関して $x(i,1)$ は $x(i,2)$ と等しくなる. 理由を述べよ.

(4) 上記の問題文の下線部に注意し, $x(i,1)$ を, $x(i,2),\ x(i+1,2),\ x(i-1,2),\ \alpha,\ \beta$ のすべてを用いた式で表せ.

(5) $x(i,1)=x(i,2)=x_i\ (i=0,1,2,\cdots,N)$ とおき, x_i についての漸化式により x_1 を求めよ.

(筑波大 2013)　　(m20131318)

0.223　関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=\begin{cases} x-[x] & 0\le x-[x]<\frac{1}{2} \\ 1-(x-[x]) & \frac{1}{2}\le x-[x]<1 \end{cases}$$

で定義する．ただし $[x]$ は x 以下の最大の整数を表す．$x\in\mathbb{R}$ に対して

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(2^k x)}{2^k}$$

とおく．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の，$-1\le x\le 1$ におけるグラフを描け．

(2) 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して，$g(x)\le 1$ が成り立つことを示せ．

(3) 関数 $g(x)$ は連続であることを示せ．

(4) 自然数 n に対して，$g\left(\dfrac{1}{2^n}\right)=\dfrac{n}{2^n}$ を示せ．

(5) 関数 $g(x)$ は $x=0$ において微分不可能であることを示せ．

(筑波大 2014)　　(m20141315)

0.224　$f:X\to X$ を集合 X 上の写像とし，写像 $f^n:X\to X$ を，$n\ge 1$ のとき $f^n=\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{n\text{ 個}}$，$f^0=\mathrm{id}_X$（=X 上の恒等写像）で定義する．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $f\left(\displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty}f^n(X)\right)\subseteq\displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty}f^n(X)$ が成り立つことを示せ．

(2) f が単射ならば，$f\left(\displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty}f^n(X)\right)=\displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty}f^n(X)$ が成り立つことを示せ．

(筑波大 2014)　　(m20141316)

0.225　$\phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ $(-\infty<x<\infty)$ とおく．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)dx=1$ を示せ．

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mu x}\phi(x)dx$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\int_{-\infty}^{y}\phi(x)dx\right)e^{\mu y-\frac{\mu^2}{2}}dy$ を求めよ．ただし，$\mu>0$ とする．

(筑波大 2015)　　(m20151304)

0.226　2 変数関数 $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ について以下の問いに答えよ．

(1) 積分 $I=\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$，$D=\{(x,y)\mid x\ge 0,\ y\ge 0\}$ を求めたい．そこで，$D_a=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2,\ x\ge o,\ y\ge 0\right\}$，$a>0$ として，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\iint_{D_a}f(x,y)dxdy$ を極座標 r,θ を用いて計算することにより，I の値を求めよ．

(2) (7) の結果を用いて積分 $J=\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-t^2dt}$ の値を求めよ．

(筑波大 2015)　　(m20151307)

0.227 n は 1 以上の整数とする．2 変数関数

$$f(x,y)=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i-x)^2}{y}+n\log y \qquad (-\infty<x<\infty,\ y>0)$$

について，次の問いに答えよ．

(1) 等式

$$\sum_{i=1}^{n}(i-x)^2=n(\mu-x)^2+n\delta$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\mu=\dfrac{n+1}{2}$，$\delta=\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i-\mu)^2}{n}$ である．

(2) $f(x,y)$ の最小値を求めよ．

(筑波大 2016) (m20161303)

0.228 曲線 $A: y=x\cdot e^x$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 曲線 A，x 軸 $(y=0)$，そして $x=a$ $(a<0)$ により囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{a\to-\infty}S(a)$ の値を求めなさい．

(筑波大 2016) (m20161307)

0.229 関数 $f(x)$ と f の定義域に含まれる区間 $[0,1]$ を考える．

$$x_i=\frac{i}{n} \qquad (i=0,1,\cdots,n)$$

で与えられる区間 $[0,1]$ の分割に対して，

$$I_k=(x_{k-1},x_k] \qquad (k=1,\cdots,n)$$

とし，次の和を定義する．

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sup_{x\in I_k}f(x)$$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\inf_{x\in I_k}f(x)$$

この S_n, s_n がそれぞれ $n\to\infty$ において極限を持つとき，

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n,$$

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n$$

とする．$S=s$ ならば関数 f が区間 $[0,1]$ で積分可能であるといい，

$$S=s=\int_0^1 f(x)dx$$

と書く．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $f(x)=x$ とするとき，(a) S_n, s_n を求め，(b) f が $[0,1]$ 上で積分可能かどうかを示せ．

(2) 以下の関数 f が $[0,1]$ 上で積分可能かどうかを示せ．

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\text{ が無理数}) \\ x & (x\text{ が有理数}) \end{cases}$$

ただし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ である．

(筑波大 2016)　　(m20161312)

0.230 (1) 関数 $f(x)=e^x$ をマクローリン展開（$x=0$ のまわりでテイラー展開）せよ．

(2) 以下の性質 (A) を用いて，次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{1!}+\frac{n-1}{2!}+\cdots+\frac{2}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right)$$

(A) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=\alpha$$

が成り立つ．

(3) 上の性質 (A) を証明せよ．

(筑波大 2017)　　(m20171312)

0.231 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}}\exp\left\{-\dfrac{(\log_e x-\mu)^2}{2}\right\}$　　$(0<x<\infty\,;\ -\infty<\mu<\infty)$ とおく．

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^{m} f(x)dx=\frac{1}{2}$ となる m を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} xf(x)dx$ を求めよ．

(筑波大 2017)　　(m20171316)

0.232 (1) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある実数 $\alpha\in\mathbb{R}$ に収束するならば有界であることを証明せよ．

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha\in\mathbb{R}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\beta\in\mathbb{R}$ が成り立つとする．このとき等式 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta$ を証明せよ．

(3) 区間 $I\subset\mathbb{R}$ 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset I$ は $n\longrightarrow\infty$ のとき点 $\alpha\in I$ に収束し，関数 f は点 $\alpha\in I$ で連続であるとする．このとき等式 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f(\alpha)$ を証明せよ．

(4) 写像 $f:X\to Y$ と $g:Y\to Z$ の合成 $g\circ f:X\to Z$ は単射であるとする．このとき f も単射であることを示せ．

(筑波大 2017)　　(m20171318)

0.233 留数定理を用いて，以下の定積分の値を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{x^2-2x+2}dx$$

ただし，m は実定数とする．

(筑波大 2018)　　(m20181305)

0.234 Newton 法は方程式 $f(x)=0$ を満たす解 x の近似解を数値的に求める手法の 1 つである．具体的な手順は，以下の通りである．まず，漸化式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,,\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

を構成する．ここで，$f'(x_n)=\dfrac{d}{dx}f(x_n)\neq 0$ とする． 次に，この漸化式を適当な初期値 x_0 の下で解き，数列 $x_1,\ x_2,\ \cdots$ を計算する． 解が存在する場合には，その収束値 x_∞ は $f(x_\infty)=0$ を満たす．上述の Newton 法に関して，以下の設問に答えよ．

(1) Newton 法で x_0 から x_1 を求めることは，点 $(x_0,\ f(x_0))$ における $y=f(x)$ の接線と x 軸の交点を求めることになっている．これを示せ．

(2) Newton 法の漸化式から得られる数列 $\{x_n\}$，$n=0,\ 1,\ \cdots$ は，初期値 x_0 が $f(x)=0$ の解の近傍にあるときに収束し，その収束値は $f(x)=0$ の解を与える．これを以下の＜定理＞を用いて示せ．ただし，$f'(x)\neq 0$ かつ $f''(x)=\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ は連続であるとする．

＜定理＞

関数 $\varphi(x)$ が閉区間 I で微分可能で，$\varphi(x)$ の値域は I に含まれ，I では

$$\left|\frac{d}{dx}\varphi(x)\right|\leq k<1$$

であるとする．このとき，反復法 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ によって方程式 $x=\varphi(x)$ のただ 1 つの根 x_∞ が得られる．

(筑波大 2018)　　(m20181306)

0.235 二つのメーカー X および Y からなる市場において，各メーカーのユーザー数を調査したい．毎年メーカー X のユーザーのうち $\dfrac{1}{10}$ がメーカー Y のユーザーとなり，一方で，メーカー Y のユーザーのうち $\dfrac{1}{5}$ がメーカー X のユーザーとなる，それ以外は同じメーカーのユーザーのままでいるものとし，ユーザーの総数は変化しない．このとき以下の問いに答えなさい．

(1) ある年におけるメーカー X, Y のユーザー数をそれぞれ x_n，y_n で表す． このとき翌年におけるそれぞれのメーカーのユーザー数 x_{n+1}，y_{n+1} を二次正方行列 A を使って以下の形で表す．行列 A を具体的に示しなさい．

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

(2) A の固有値および固有ベクトルを求めなさい．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P を一つ求めるとともに，P の逆行列 P^{-1} を求めなさい．

(4) 行列 A^n を求めなさい．

(5) (4) の結果を使って，$n\to\infty$ としたときのメーカー X および Y のユーザー数の比率を求めなさい．

(筑波大 2018)　　(m20181316)

0.236 $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数の列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられている．

(1) 「 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ 上で関数 $f(x)$ に各点収束する 」の定義を述べよ．

(2) 「 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ 上で関数 $f(x)$ に一様収束する 」の定義を述べよ．

(3) 次の関数列が $\mathbb{R}$ 上で定数関数 0 に一様収束するかを判定せよ.

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

(4) $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ 上で関数 $f(x)$ に一様収束しているとする. すべての $n = 1, 2, \cdots$ について $f_n(x)$ が連続関数ならば, $f(x)$ も連続関数であることを示せ.

(筑波大 2018) (m20181321)

0.237 確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ は互いに独立で, 平均 μ, 分散 σ^2 のある同一の確率分布に従うとする. ここで, 2 つの μ の推定量

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} v_i X_i, \qquad \tilde{\mu} = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i$$

を考える. ただし,

$$-\infty < \mu < \infty,\ 0 < \sigma^2 < \infty$$

,

$$v_i = \frac{2(n+1-i)}{n(n+1)}, \qquad w_i = \frac{2(n-i)}{n(n-1)}$$

で, n は 2 以上の整数である. なお, 解答の際には,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

を利用して良い.

(1) $\hat{\mu}$ が μ の不偏推定量であることを示せ.

(2) $\tilde{\mu}$ が μ の不偏推定量であることを示せ.

(3) $\hat{\mu}$ の分散を求めよ.

(4) $\tilde{\mu}$ の分散を求めよ.

(5) (1)〜(4) から, $\hat{\mu}$ と $\tilde{\mu}$ どちらの推定量がより μ の推定にに適していると言えるか. その理由とともに答えよ.

(筑波大 2019) (m20191312)

0.238 (1) $f(x)$ は $x \geqq 0$ において定義された実数値連続関数であって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して広義積分 $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ が収束すると仮定する. このとき, 任意の正の実数 $a, b\ (a < b)$ に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx$$

(2) $f(x)$ は (1) の仮定を満たすとする. (1) の等式を用いて, 任意の正の実数 $a, b\ (a < b)$ に対して,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \log \frac{b}{a}$$

が成り立つことを示せ.

(3) 次の広義積分の値を求めよ. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2} dx$

(筑波大 2019) (m20191317)

0.239 $y=\tan x$ の逆関数を $y=\arctan x$ と書く．ある y の値に対して $y=\tan x$ を満たす x は多数存在するが，定義域を $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ に限る場合，$y=\tan x$ は単射となり一意に逆関数を定義することができる．この定義域における $y=\tan x$ の逆関数を $y=\mathrm{Arctan}\,x$ と書くこととする．

上記の定義域において，次の問に答えよ

① $y=\mathrm{Arctan}\,x$ について，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2}$ を証明せよ．

② 次の無限級数 S の値を求めよ．ただし，その導出過程を示すこと．

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

(筑波大 2020)　　(m20201305)

0.240 次の定積分の値を求めなさい．

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$$

(筑波大 2020)　　(m20201310)

0.241 (1) 以下の命題を証明せよ．

(a) V, W を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，f は V から W への線形写像であるとする．V の有限個の元 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{v}_k$ について，$f(\boldsymbol{v}_1)$, $f(\boldsymbol{v}_2)$, $\cdots$, $f(\boldsymbol{v}_k)$ が線形独立ならば，$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{v}_k$ も線形独立である．

(b) α は 1 より大きい定数とする．このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}$ は収束する．

(2) 以下の命題に対する反例を与え，それが反例であることを示せ．

(a) $\mathbb{R}$ 上の数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 U_1, U_2, U_3 が $U_1\cap U_2=U_1\cap U_3=U_2\cap U_3=\{0\}$ を満たせば，部分空間の和 $U_1+U_2+U_3$ は直和である．

(b) $\mathbb{Z}$ の任意の部分集合 A, B に対して，$P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ が成り立つ．ただし，集合 X に対して，$P(X)$ は X のべき集合（X の部分集合全体の集合）を表す．

(c) 写像 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ に対して，写像 $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ であって合成写像 $g\circ f$ が $\mathbb{Z}$ 上の恒等写像に等しいものが存在すれば，f は全単射である．

(筑波大 2020)　　(m20201317)

0.242 定積分 $I_n=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}dx\quad(n=1,2,\cdots)$ について，以下の問いに答えよ．

(a) I_1 を求めよ．

(b) $I_n\ \ (n\geqq 2)$ を求めよ．

(筑波大 2022)　　(m20221303)

0.243 (1) $x>0$ に対して，次の関数を定義する．

$$\Gamma(x)\equiv\int_0^{\infty}u^{x-1}e^{-u}du$$

任意の正の整数 n に対して，$\Gamma(n+1)=n!$ が成り立つことを示せ．

(2) 次の定積分を $u=-(n+1)\log x\ \ (\Leftrightarrow x=e^{-\frac{u}{n+1}})$ とする置換積分により計算せよ．ただし，n は任意の正の整数を表す．

$$\int_0^1 x^n(\log x)^n dx$$

(3) 以下の恒等式を証明せよ．

$$\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} \quad \left\{= \lim_{n\to\infty}(1+2^{-2}+3^{-3}+\cdots+n^{-n})\right\}$$

ただし，(2) の結果，および，次のマクローリン展開の結果を用いること．

$$x^{-x} = e^{(-x\log x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x\log x)^n}{n!}$$

また，積分 $\int$ と和 $\sum$ の順序は交換してもよいとする．

(筑波大 2022)　　(m20221307)

0.244　次の 2 重積分について，以下の問いに答えなさい．

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{f(x,y)}dxdy$$

(1) $f(x,y) = -x^2 - y^2$ とし，I を求めなさい．

(2) $f(x,y) = -ax^2 - 2bxy - cy^2$ とし，I を求めなさい．ただし，$a > 0,\ b^2 - ac < 0$ とする．

(筑波大 2022)　　(m20221311)

0.245　$F(x,y) = xy\tan y + \pi\tan y - x$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\tan x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3) \quad (x\to 0)$ を満たす実数 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$ を求めよ．
ただし，$o(\cdot)$ はランダウの記号（スモール・オー）を表す．

(2) 1 以上の整数 n に対し，開区間 $\left(\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\pi,\ \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi\right)$ を I_n とおく．各 I_n における方程式

$$\tan x = \frac{1}{x} \qquad (x \in I_n)$$

の解を x_n とする．$d_n = x_n - n\pi$ とおくとき $F\left(\dfrac{1}{n},\ d_n\right) = 0$ を示せ．

(3) $x = 0$ を含む開区間 I と，I において定義された微分可能な関数 $\varphi(x)$ であって

$$F(x,\ \varphi(x)) = 0 \quad (x \in I), \quad \varphi(0) = 0$$

を満たすものが存在することを示せ．

(4) (2) の x_n を

$$x_n = n\pi + b_1\frac{1}{n} + b_2\frac{1}{n^2} + b_3\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad (n\to\infty)$$

と表示したときの実数 $b_1,\ b_2,\ b_3$ を求めよ．

(筑波大 2022)　　(m20221316)

0.246　$f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^2}$ とする．

(1) 正数 R に対し，次が成り立つことを示せ．

$$\int_0^R\left(\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)dx\right)dy \leqq \int_0^R\left(\int_0^R f(x,y)dx\right)dy \leqq \int_0^{\sqrt{2}R}\left(\int_0^{\sqrt{2R^2-y^2}} f(x,y)dx\right)dy$$

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^R\left(\int_0^R f(x,y)dx\right)dy$ の値を求めよ．

(埼玉大 2000)　　(m20001402)

0.247 実数 θ に対して $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}x^n$ とおく.

(1) 右辺の級数は $|x|<1$ で収束することを示せ.

(2) $f'(x)=\frac{\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$ を示せ. $\left[\text{ヒント}:\sin t=\frac{1}{2i}\left(e^{it}-e^{-it}\right)\right]$

(埼玉大 2002) (m20021401)

0.248 実数 α に対し, $f(x)=\begin{cases}0 & (x\leq 0)\\ x^{\alpha}\sin\frac{1}{x} & (x>0)\end{cases}$ とおく.

(1) $\alpha>1$ のとき, $f(x)$ は $-\infty<x<\infty$ で微分可能であることを示せ.

(2) $\alpha\leq 1$ のとき, $f(x)$ は $x=0$ で微分可能でないことを示せ.

(3) $\alpha>1$ のとき, $f'(x)$ が $-\infty<x<\infty$ で連続となる α の範囲を求めよ.

(埼玉大 2003) (m20031402)

0.249 $a>0$ とするとき, $\int_0^{\infty}e^{-ax}\sin x dx$ を求めよ.

(埼玉大 2003) (m20031404)

0.250 $f(x)=\frac{3e^{2x}+4\sin x}{2e^{2x}+e^{-x}}$ とおく.

(1) $\lim_{x\to\infty}f(x)$ を求めよ. (2) $\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1}f(x)\,dx$ を求めよ.

(埼玉大 2004) (m20041402)

0.251 (1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は次を満たすとする.

すべての自然数 n に対して $a_n\geqq 0$ であり, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$ である.

このとき, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ は成立するか. 成立するならば証明し, 成立しないならば反例をあげよ.

(2) 次の条件をすべて満たす関数 f の例を挙げよ.

- f は区間 $[0,\infty)$ で定義された連続関数である.
- すべての $x\in[0,\infty)$ に対し $f(x)\geqq 0$ である.
- $\int_0^{\infty}f(x)dx<\infty$ である.
- $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ が成立しない.

(埼玉大 2005) (m20051407)

0.252 (1) 関数 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ をマクローリン展開することにより, 次式を導き出せ.

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{i=1}^{\infty}{}_{\alpha}\mathrm{C}_i x^i \quad\cdots\cdots\cdots①$$

ただし, ${}_{\alpha}\mathrm{C}_i$ は次式で表される. ${}_{\alpha}\mathrm{C}_i=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!}$ $(i\geq 1)$

(2) 式 ① を用いて次の関数 $g(x)$ のマクローリン展開式を x^3 の項まで求めよ. $g(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$

(埼玉大 2007) (m20071401)

0.253 (1) 次の等式を示せ。

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\cdots+(-1)^{n-1}t^{n-1}+(-1)^n\frac{t^n}{1+t} \qquad (t\neq -1)$$

(2) 上式を利用して，次の式を示せ．

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x) \qquad (x > -1)$$

ただし，$R_n(x) = (-1)^n \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt$ とする．

(3) $0 \leq x \leq 1$ のとき $R_n(x) \to 0 \quad (n \to \infty)$ を示せ．

(4) $-1 < x < 0$ のとき $R_n(x) \to 0 \quad (n \to \infty)$ を示せ．

(埼玉大 2007)　　(m20071410)

0.254 n を自然数とし，$D_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{n} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x - \frac{1}{n}\right\}$ とおく．α を $0 < \alpha < 1$ を満たす定数とする．次を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_{D_n} \frac{dxdy}{(x-y)^\alpha}$ を求めよ．

(2) (1) の積分値を I_n とおいたとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

(埼玉大 2009)　　(m20091407)

0.255 $x > 0$ に対して

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x)$ を求めよ.

(2) $F'(x)$ を求めよ. ただし, 等式

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{e^{-xt}\sin t}{t}\right\}dt$$

が成り立つことを用いてよい.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0} F(x)$ を求めよ.

(埼玉大 2010)　　(m20101403)

0.256 (1) 区間 $(0,1]$ で定義された実数値連続関数 $f(x)$ で

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx < \infty \quad \text{かつ} \quad \int_0^1 |f(x)|^2\,dx = \infty$$

を満たす例を一つ挙げよ.

(2) 区間 $[1,\infty)$ で定義された実数値連続関数 $g(x)$ で

$$\int_1^\infty |g(x)|\,dx < \infty \quad \text{かつ} \quad \sup_{1\leq x<\infty} |g(x)| = \infty$$

を満たす例を一つ挙げよ.

(埼玉大 2010)　　(m20101404)

0.257 $\alpha > 0$ とする．$x \geqq 1$ で定義された関数 $f_\alpha(x)$ は,

$$x \in [n, n+1) \text{ において} \quad f_\alpha(x) = \frac{1}{n^\alpha}$$

となるものとする．ただし，n は自然数とする．このとき

$$\int_1^{N+1} f_\alpha(x)dx = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$$

となることを利用して次の問いに答えよ.

(1) $\alpha > 1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ が収束することを示せ.

(2) $\alpha \leqq 1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ が発散することを示せ.

(埼玉大 2011)　　(m20111410)

0.258 (1) $x = x_0$ 付近で連続な関数 $f(x)$ に対し，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$ が成り立つ関数 $\delta(x)$ がある．$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} 3\delta(x)e^{-ixy}dx$ の値を求めよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする.

(2) 関数 $f(x), g(x)$ があり，それぞれ $F(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx$ ，$G(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ixy}dx$ とするとき，次式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx\right)e^{-iyz}dz$ が収束するとして，これを，$F(y)$ および $G(y)$ を用いて表せ．ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx < \infty$，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|dx < \infty$ とする.

(埼玉大 2014)　　(m20141403)

0.259 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ がある．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列が存在するために必要な，$a \neq \pm\infty$ 以外の条件を求めよ.

(2) $a = 4$ のとき，行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列を求めよ.

(群馬大 2007)　　(m20071501)

0.260 関数 $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+1} + x^2 - 2x}{x^{2n} + 1}$ について，

(1) $f(-1), f(0), f(1)$ の値を求めよ.

(2) $y = f(x)$ のグラフを描け.

(図書館情報大 1998)　　(m19981603)

0.261 関数 $g(x) = xe^{-\frac{x}{2}}\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)$ について以下の $\boxed{ア}$〜$\boxed{ク}$ にあてはまる値を求めよ.

(1) $g(x) = 0$ を満たす x の値は $\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ である.

(2) $g(x)$ の傾きが 0 となる x の値は $\boxed{ウ}$，$\boxed{エ}$ である.

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} g(x)dx = \boxed{オ}$ である.

(4) $g(x)$ のマクローリン展開の第 3 次までの項は

$$g(x) \approx \boxed{カ}\,x + \boxed{キ}\,x^2 + \boxed{ク}\,x^3$$

となる．ただし関数 $f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \cdots$$

である.

(図書館情報大 2002)　　(m20021607)

0.262 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$ を求めよ．ただし，$a > 0$, $b > 0$ である.

(茨城大 1999)　　(m19991701)

0.263 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ を求めよ．

(茨城大 1999) (m19991702)

0.264 $f_0(x)$ を値 1 をとる定数関数とするとき，次の各問に答えよ．

(1) $f_1(x)=\displaystyle\int_0^x f_0(t)dt$， $f_2(x)=\displaystyle\int_0^x f_1(t)dt$， $f_3(x)=\displaystyle\int_0^x f_2(t)dt$ を求めよ．

(2) $f_n(x)=\displaystyle\int_0^x f_{n-1}(t)dt$ （ただし，$n=1,2,3,\cdots$）を求めよ．

(3) $E(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ とおくとき $\dfrac{d}{dx}E(x)$ を求めよ．

(茨城大 1999) (m19991703)

0.265 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$ を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(茨城大 1999) (m19991704)

0.266 集合 S を $S=\left\{a \mid a=\dfrac{p}{10^k},\ k \text{ は 1 以上の整数},\ p \text{ は } 1\leq p<10^k \text{である整数}\right\}$
と定義するとき，次の各問に答えよ．

(1) $a\in S$ の小数表示を，a に対応する k と p を用いて説明せよ．

(2) S は無限集合であることを示せ．

(3) 任意の $a\in S$ に対して，$x_n\notin S$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=a$ となる数列 $\{x_n\}$ が構成できることを示せ．

(茨城大 2001) (m20011703)

0.267 複素数の数列 $z_n=\left(\dfrac{i}{2}\right)^n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ について，次の各問に答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}z_n$ を求めよ． (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}z_n$ を求めよ． (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nz_n$ を求めよ．

(茨城大 2007) (m20071704)

0.268 3 次正方行列 $A=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 1\end{bmatrix}$ について，以下の各問に答えよ．

(1) A の固有値 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$ および対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ を一組求めよ．

(2) ベクトル列 $\boldsymbol{u}_n$ を $\boldsymbol{u}_n=A^n\begin{bmatrix}\varepsilon\\ -1+2\varepsilon\\ 2+\varepsilon\end{bmatrix}$， $(n=0,1,2,\cdots)$ で定める．ただし，$\varepsilon=2^{-100}$
とし，A^0 は単位行列を表す．このとき，$\boldsymbol{u}_n$ を (1) で求めた $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ の一次結合で表せ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，ユークリッドノルムを $||\boldsymbol{x}||=\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$ とする．(2) で与えた $\boldsymbol{u}_n$ について，以下を調べよ．

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}||\boldsymbol{u}_n||$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{||\boldsymbol{u}_{n+1}||}{||\boldsymbol{u}_n||}$ (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\boldsymbol{u}_n}{||\boldsymbol{u}_n||}$

(d) $\left|\left|\boldsymbol{u}_n-\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}\right|\right|\leq 2^{-10}$ なる n の存在の有無.

(茨城大 2007) (m20071707)

0.269 $f(t)$ を $[0,\infty)$ 上で連続かつ広義積分可能な関数とする． また a,b は $a,b>0$ を満たす実数とし，$g(x,y)=f(a^2x^2+b^2y^2)$ とおく．以下の各問いに答えよ．

(1) $f(t)$ が $[0,\infty)$ 上で広義積分可能であることの定義を記述せよ．

(2) 変数変換

$$\begin{cases} x = \dfrac{r}{a}\cos\theta \\ y = \dfrac{r}{b}\sin\theta \end{cases}$$

によって，$r\theta$ 平面内の集合 $[\,0,\ 1\,]\times\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ は xy 平面内のどのような集合に写るか図示せよ．

(3) 等式

$$\iint_{[0,\infty)\ \times\ [0.\infty)} g(x,y)dxdy = \frac{\pi}{4ab}\int_0^{\infty} f(t)dt$$

が成り立つことを示せ．

(4)

$$I(a,b)=\iint_{[0,\infty)\ \times\ [0.\infty)} e^{-a^2(x^2+1)-b^2(y^2+1)}dxdy$$

とする．(3) の結果を用いて，条件 $a^2+b^2=1$ の下での $I(a,b)$ の最小値を求めよ．

(茨城大 2009)　　(m20091706)

0.270 以下の問に答えよ．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2^x-e^x\log2-1+\log2}{x^2}$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

(2) 関数 $f(x)=xe^{-x^2}$ の区間 $[0,\infty)$ における最大値と最小値を求めよ．

(茨城大 2013)　　(m20131701)

0.271 有理関数 $f(x)=\dfrac{5}{(x^2+1)(x+2)}$ について，以下の各問に答えよ．

(1) $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}+\dfrac{c}{x+2}$ を満たす定数 a,b,c を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ を求めよ．

(茨城大 2015)　　(m20151701)

0.272 複素関数 $f(z)=(x^2-2x+3)e^{z-1}$ について，以下の各問に答えよ．

(1) $f(z)$ の $z=1$ を中心にするテイラー展開を

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-1)^k$$

と書くとき，a_1, a_2 をそれぞれ求めよ．

(2) C は複素平面上の円 $|z|=2$ を正の向きに一周する閉曲線とする．次の複素積分を計算せよ．

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-1)^n}\,dz$$

ただし，n は 3 以上の自然数とする．

(茨城大 2015)　　(m20151704)

0.273 $-\infty < x < \infty$ において，微分可能な関数 $y(x)$ が次の等式

$$y(x) = x^2 + \int_0^x ty(t)dt$$

を満たしているとする．関数 $y(x)$ を求めよ．

(茨城大 2016) (m20161706)

0.274 n を正の整数，a を正の実数とする．xy 平面内の領域 $D_a = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\right\}$ 上の 2 重積分

$$I_a(n) = \iint_{D_a} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^n} dxdy$$

について，以下の各問いに答えよ．

(1) $I_a(1)$ を求めよ．

(2) $n \geq 2$ のとき，$I_a(n)$ を求めよ．

(3) $n \geq 2$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{a \to \infty} I_a(n)$ を求めよ．

(茨城大 2017) (m20171703)

0.275 次の関数を考える．

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)^2$$

$0 \leqq t$ に対して $D(t) = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 1,\ f(x, y) \geqq t\right\}$ とするとき，次の小問 (1), (2) および (3) に答えよ．

(1) 極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta (r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ を用いて，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_{D(0)} f(x, y)dxdy$$

(2) 平面上の集合 $D(t)$ が表す領域の面積を $F(t)$ とするとき，$F(t)$ を求めよ．
ただし，平面上の集合 $D(t)$ が表す領域が空集合である場合や正の面積を持たない場合の t では $F(t) = 0$ とする．

(3) 次の等式を示せ．

$$\int_0^\infty F(t)dt = \iint_{D(0)} f(x, y)dxdy$$

(茨城大 2018) (m20181703)

0.276 $-\infty < x < \infty$ である x に対して，$\tan y = x$ 満たす y で $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす唯一のものを $y = \mathrm{Arctan}\, x$ と表わす．以下の各問に答えよ．

(1) $\cos(\mathrm{Arctan}\, x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ を示せ．

(2) 曲面 $z = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 上の点 $P = \left(1, 1, \dfrac{\pi}{4}\right)$ での接平面を求めよ．

(3) 関数 $y = x\sqrt{x^2 + 1} + \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ の微分を求めよ．

(4) 曲面 $z = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ の，xy 平面上の有界閉領域 $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqq 1\right\}$ の真上にある部分の曲面積を求めよ．

(茨城大 2022) (m20221702)

0.277 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$ を求めよ．

(山梨大 2004) (m20041801)

0.278 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{e^x + e^y}\, dxdy$$

(信州大 2005) (m20051903)

0.279 (1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$ を示せ.

(2) $f(x)$ を区間 $[-1,1]$ 上で定義された連続関数とする. このとき,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{-1/n}^{1/n} |f(x)|^n dx\right)^{1/n} = |f(0)| \qquad \text{となることを示せ.}$$

(信州大 2008) (m20081904)

0.280 (1) $|x| \leq \dfrac{1}{2}$ ならば, $|\log(1+x) - x| \leq 2x^2$ が成立することを証明せよ.

(2) 次の等式を証明せよ.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1 + \frac{1}{n}\cos\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \cos x\, dx$$

(信州大 2012) (m20121903)

0.281 次の問いに答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dr$ を計算せよ.

(2) 2 重積分 $I_n = \displaystyle\iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ を計算せよ.

ただし, $D_n = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2+y^2 \leqq \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^2\right\} \quad (n = 1,2,3,\cdots)$ とする.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ. また, $I_n > \pi$ を満たす最小の自然数 n を求めよ.

(信州大 2013) (m20131902)

0.282 $p > 2$ は実数とする. $D_n = \{(x,y)\,|\,0 \leqq x \leqq n,\ 0 \leqq y \leqq n\}$ $(n = 1,2,\cdots)$ とおき, 領域 D_n 上の 2 重積分 $\quad I_n(p) = \displaystyle\iint_{D_n} \frac{dxdy}{(1+x+y)^p} \quad$ を考える.

(1) $I_n(p)$ を計算し, 極限値 $I(p) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n(p)$ を求めよ. (2) $\displaystyle\int_3^\infty I(p)dp$ を計算せよ.

(信州大 2016) (m20161902)

0.283 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\sqrt{x^2-1}}$ を求めよ.

(2) 実数 p, q は, $p > 1,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たすとする. このとき, $a \geqq 0,\ b \geqq 0$ を満たすすべての実数 a, b に対して, 不等式 $\quad ab \leqq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \quad$ が成り立つことを示せ.

(信州大 2017) (m20171901)

0.284 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - x + 1}$ を求めよ.

(2) 等式 $\dfrac{1}{x^3+1} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$ が x ついての恒等式となるように, 定数 a, b, c の値を定めよ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$ の値を求めよ.

(信州大 2017) (m20171902)

0.285 関数列 $f_n(x) = xe^{-nx}$ $n = 1, 2, 3, \cdots$ が区間 $[0, \infty)$ 上で一様収束するかどうか判定せよ.

(信州大 2018) (m20181907)

0.286 積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2 + 2xy - 4y^2)dxdy$$

を求めよ.

(信州大 2019) (m20191908)

0.287 実数 p は $0 < p \leqq 1$ を満たすとする. $D_n = \left\{(x, y) \;\middle|\; \dfrac{1}{n} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x - \dfrac{1}{n}\right\}$ $(n = 2, 3, \cdots)$ とおき, 領域 D_n 上の 2 重積分

$$I_n(p) = \iint_{D_n} \frac{dxdy}{(x-y)^p}$$

を考える. このとき, 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n(p)$ を調べ. それが存在する場合は極限値を求めよ.

(信州大 2020) (m20201902)

0.288 (1) 次の不定積分を求めよ.

$$\int \tan^{-1}\sqrt{x}\,dx$$

(2) $\mathbb{R}^2$ 内の領域 D を $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x + y \leq 1,\ 0 \leq x - 2y \leq 1\right\}$ で定めるとき, 2 重積分

$$\iint_D (3x + 2y)dxdy$$

の値を求めよ.

(3) f は $[0, 1]$ 上の実数値連続関数で, $\displaystyle\int_0^1 |xf(x)|dx < \infty$ であるとする. このとき, 次の関数が $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを示せ.

$$g(x) := \int_0^1 \cos(xy)f(y)dy$$

(信州大 2020) (m20201906)

0.289 広義積分 $I = \displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2 + \sin x}dx$ の収束・発散を調べよ.

(信州大 2021) (m20211902)

0.290 $D_n = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leqq x \leqq y\ ,\ \dfrac{1}{n} \leqq y \leqq 1\right\}$ $(n = 2, 3, \cdots)$ とおき, 領域 D_n 上の 2 重積分

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

を考える. このとき, 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ.

(信州大 2022) (m20221903)

0.291 関数 $f(x)$ は開区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ において,

$$f(x) = \log\cos x$$

で定義されているとする. このとき, 次に問いに答えよ. ただし, 対数は自然対数である.

(1) $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の 2 次までのマクローリン展開を求めよ. また, 剰余項 $R_3(x)$ を求めよ.

(3) 極限 $\lim_{n\to\infty}\cos^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ を求めよ．

(信州大 2023)　　(m20231901)

0.292 自然対数の底を e とする．

(1) 任意の正整数 k に対して，$\lim_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda}\lambda^k = 0$ を証明せよ．

(2) 任意の正整数 n に対して，$g_n(\lambda) = \int_0^\lambda x^n e^{-x}dx$ と置くとき，$g_n(\lambda)$ を求めよ．

(3) $\lim_{\lambda\to\infty} g_n(\lambda)$ を求めよ．

(新潟大 1998)　　(m19982003)

0.293 (1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ は収束することを示せ．

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^k}{k}$ は $a\in[0,1)$ のとき収束することを示せ．

(新潟大 1998)　　(m19982004)

0.294 一般項が次の式で表される数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限値を求めるとともに，その値が極限値になることを証明せよ．

(1) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

(2) $\dfrac{10^n}{n!}$

(3) $\sqrt[n]{a}$,　(a は正の定数)

(新潟大 1999)　　(m19992002)

0.295 次の問いに答えよ．

(1) どんな無理数 p に対しても，有理数の列 $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\lim_{n\to\infty} q_n = p$ となるものが存在する．その理由を述べよ．

(2) どんな有理数 q に対しても，無理数の列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\lim_{n\to\infty} p_n = q$ となるものが存在する．その理由を述べよ．

(3) 関数 f を次のように定義する．

$$f(x) = \begin{cases} x & (\ x \text{ が無理数のとき }) \\ 0 & (\ x \text{ が有理数のとき }) \end{cases}$$

このとき，f の連続性を述べよ．

(新潟大 2000)　　(m20002001)

0.296 次の極限値を求めよ．

(1) $\lim_{x\to+\infty}\left\{\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+x}\right\}$　　(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$　　(3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log_2(1+x)}{x}$

(新潟大 2001)　　(m20012001)

0.297 周期 2π の関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

と書かれた時，$f(x)$ はフーリエ級数展開されたという．一般に，係数 a_n, b_n は

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

として求められる．今，$f(x)$ が，区間 $-\pi < x \leq \pi$ で

$$f(x) = x$$

である時，フーリエ級数の係数 a_n, b_n を求めよ．

(新潟大 2001)　　(m20012010)

0.298 数列 $\{a_n\}$ に対して，$a_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$ の定義は，「任意の $\varepsilon > 0$ に対してある番号 n_0 があって，$n \geq n_0$ である任意の n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ」である．

$a_n \to \alpha \ \ (n \to \infty)$，$a_n \to \beta \ \ (n \to \infty)$ であるとき，$a_n + b_n \to \alpha + \beta \ \ (n \to \infty)$ が成り立つことを上の定義に従って証明せよ．ただし，α, β は実数とする．

(新潟大 2002)　　(m20022003)

0.299 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値を λ_1，λ_2 ($|\lambda_1| > |\lambda_2|$) とし，対応する固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$ とする．

(1) λ_1，λ_2，$\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$ を求めよ．

(2) 正の実数 a, b をとり，

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

と定める．このとき a, b の選び方によらずに極限値 $L = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ が定まることを示し，その値 L を求めよ．

(新潟大 2002)　　(m20022005)

0.300 $a > 0$ とする．実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_1 = a$ とし，$n \geqq 1$ に対して，　$a_{n+1} = a + \dfrac{1}{a_n}$ と定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $a_1 < a_3 < a_4 < a_2$ を示せ．

(2) 数列 $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$，$\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ はそれぞれ単調増加，単調減少であることを示せ．

(3) $n \geqq 2$ に対して，　$|a_{n+1} - a_n| < \dfrac{1}{1+a^2}|a_n - a_{n-1}|$　が成立することを示せ．

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在することを示し，その値を求めよ．

(新潟大 2003)　　(m20032001)

0.301 次の問いに答えよ．

(1) 定積分を用いて，極限値 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k^2}$ を求めよ．

(2) $\beta > 2$ に対して，定積分 $\displaystyle\int_2^{\beta} \frac{dx}{x(\log x)^{\alpha}}$ を求めよ．ただし，$\alpha > 0$ とする．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^{\alpha}}$ は存在するかどうかを調べ，存在する場合はその値を求めよ．ただし，$\alpha > 0$ とする．

（新潟大 2004）　　(m20042002)

0.302 次の級数の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^n \quad (a > 0)$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{3^n}$

(新潟大 2005)　　(m20052001)

0.303 自然数 n に対して, $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t dt$ とおく. 次の問に答えよ.

(1) 任意の実数 x に対して, $1+x \leqq e^x$ を示せ.

(2) $(1-x^2)^n \leqq e^{-nx^2}$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ および $e^{-nx^2}\leqq (1+x^2)^{-n}$ $(-\infty<x<\infty)$ を示せ.

(3) $x=\cos t$ とおくことにより, $\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^n dx=I_{2n+1}$ を示せ.

(4) $x=\tan t$ とおくことにより, $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}dx=I_{2n-2}$ $(n\geqq 2)$ を示せ.

(5) $\sqrt{n}\,I_{2n+1}\leqq \displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx\leqq\sqrt{n}\,I_{2n-2}$ $(n\geqq 2)$ を示せ.

(新潟大 2005)　　(m20052003)

0.304 次の級数が収束するときはその和を求めよ．発散するときはその理由を述べよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$

(新潟大 2006)　　(m20062001)

0.305 $0<x$ において定義された関数 $f(x)=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{C}{x^n}$ が $x=p$ $(0<p)$ において極値をとるとき，以下の問いに答えよ．ただし，C は正の実数，n は 2 以上の整数である．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ を求めよ．　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)$ を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．　(4) C の値を，p および n を用いて表せ．

(5) この関数の極値を，p および n を用いて表せ．　(6) この関数の概形をグラフで示せ．

(新潟大 2006)　　(m20062014)

0.306 関数 $F(x)$ は　$F(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$　で与えられるものとする.

また,　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}F(x)=\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　であることがわかっている.

(1) $\dfrac{dF(x)}{dx}$ を求めよ.　(2) $\displaystyle\int_x^{\infty}e^{-t^2}dt$ を $F(x)$ を用いて表せ.

(3) e^{-t^2} のマクローリン展開（$t=0$ の周りでのテイラー展開）を用いて，$x=0.1$ のときの $F(x)$ の値の近似値を有効数字 4 桁で求めよ.

(4) 次の定積分の値を求めよ.　(a) $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-a^2t^2}dt$　（a は正の定数とする）　(b) $\displaystyle\int_0^{\infty}t^2e^{-t^2}dt$

(新潟大 2008)　　(m20082001)

0.307 $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{ax}|\sin x|\,dx$（ただし $a<0$）を求めたい.

(1) $I_n=\displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}e^{ax}|\sin x|\,dx$ としたとき，I_n と I_{n+1} が満たす関係式を求めよ.

(2) $S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}I_i$ としたとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を I_1 を用いて表現せよ.

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{ax}|\sin x|\,dx=\lim_{n\to\infty}S_n$ となる理由を述べよ.

(4) I_1 を実際に計算し, $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{ax}|\sin x|\,dx$ を求めよ.

(新潟大 2010)　　(m20102005)

0.308　等比数列 $\{a_n\}$ が $a_3=\dfrac{4}{3}$ および $a_5=\dfrac{16}{27}$ であるとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ を求めよ．

(新潟大 2012)　　(m20122004)

0.309　次の関数 $f(x)$ が $x=0$ において微分可能であるとき以下の問に答えよ．ただし，e は自然対数の底であり，a,b は定数とする．

$$f(x)=\begin{cases} e^x & (x<0\,\text{のとき}) \\ (ax+b)e^{-x} & (x \geqq 0\,\text{のとき}) \end{cases}$$

(1)　定数 a,b を求めよ．

(2)　関数 $f(x)$ の増減を調べ，曲線 $y=f(x)$ の概形を描け．

(3)　定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ の値を求めよ．

(新潟大 2012)　　(m20122009)

0.310　次の各問いに答えよ．

(1)　$0<a<1$ を満たす任意の実数 a に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}na^n=0$ を示せ．

(2)　$0<a<1$ を満たす任意の実数 a に対して，次の級数の収束・発散を調べよ．収束するときはその和も求めよ．

$$\sum_{n=1}^{\infty}na^{n-1}$$

(3)　次の関数の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-3\sin x}{x^3}$$

(4)　次の関数の極限値を求めよ．

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

(新潟大 2012)　　(m20122014)

0.311　関数 $f(x)=x^2e^{-2x}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　関数 $f(x)$ の極値および変曲点の x 座標を求めよ．

(2)　曲線 $y=f(x)$ の概形を描け．

(3)　広義積分

$$\int_0^{\infty}f(x)dx$$

を求めよ．

(新潟大 2013)　　(m20132003)

0.312　3 次元空間上のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ を x 軸のまわりで角度 θ だけ回転するとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{V}}'$ へ変換される．この関係を 3 × 3 行列 $U(\theta)$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{V}}'=U(\theta)\overrightarrow{\mathrm{V}}$$

と書く．ここで，$U(\theta)$ は

$$U(\theta)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

で与えられる．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $U(\theta)$ の行列式 $\det U(\theta)$ を求めよ.

(2) 行列 $U(\theta)$ の逆行列 $U(\theta)^{-1}$ を求めよ.

(3) 行列 K を

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

としたとき, K^2, K^3, および K^4 を求めよ. さらに, 正の整数 m に対して, K^{2m} と K^{2m-1} を求めよ.

(4) 一般に, 正方行列 X の指数関数は無限級数

$$e^X = E + X + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}X^n$$

で定義される. ここで, E は単位行列を表し, $X^0 = E$ である. 問 (3) の結果を利用して,

$$e^{\theta K} = U(\theta)$$

となることを示せ.

(新潟大 2014) (m20142017)

0.313 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, dx$ を求めよ.

(新潟大 2015) (m20152008)

0.314 $a_1 = e,\ a_{n+1} = \dfrac{e}{n+1}a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定義される数列 a_n について, 以下の問いに答えよ. ただし, e は自然対数の底である.

(1) a_n を n の式で表せ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ.

(新潟大 2015) (m20152009)

0.315 等式 $\tan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ で成り立つような定数 a_n のうち a_0 から a_5 までを求めよ.

(新潟大 2015) (m20152017)

0.316 正の定数 $a > 0$ と自然数 n に対して, 等式

$$\left(1 + \frac{b_n}{n}\right)^n = 1 + a$$

が成り立つように数列 $\{b_n\}$ を定める. また, 関数 $f(x)$ を $f(x) = (1+a)^x$ により定める. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) b_n を a と n を用いて表せ.

(2) 関数 $f(x)$ の $x = 0$ における微分係数 $f'(0)$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ.

(4) b_n と b_{n+1} の大小関係を不等式で表せ.

(新潟大 2016) (m20162013)

0.317 以下のように行列 $A,\ B,\ C$ を定義する．

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{i\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

また，I を 3×3 の単位行列とする．ここで，i は虚数単位で $i=\sqrt{-1}$ である．

(1) $A^2+B^2+C^2=kI$ となることを示し，定数 k を求めよ．

(2) A の固有値を求めよ．

(3) 一般に，正方行列 M の指数関数 e^M は，無限級数 $e^M \equiv \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}M^n$ で定義される．α を実定数としたとき，

$$e^{i\alpha C} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$$

（問題ではこうなっていましたが，$(2,2)$ 成分は 1 になるものと思われます）

となることを示せ．

(4) ベクトル $\overrightarrow{v}(\phi)$ を $\overrightarrow{v}(\phi) = \dfrac{\sin\phi}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{i\cos\phi}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と定義する．

このとき，$e^{i\alpha C}\overrightarrow{v}(\phi) = \overrightarrow{v}(\phi')$ と書けることを示し，ϕ' を求めよ．ただし，ϕ と ϕ' は実定数である．

(新潟大 2017)　　(m20172017)

0.318 次の (1),(2) の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x+2}{3x^2+2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x-3^x}{4^x+3^x}$

(新潟大 2018)　　(m20182003)

0.319 自然数 n に対して，

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$

と定義する．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $H_1(x),\ H_2(x),\ H_3(x),\ H_4(x)$ を求めよ．

(2) $\dfrac{d}{dx}H_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$ を示せ．

(3) $H_n(x)$ は n 次の多項式であることを示せ．

(4) $n \geqq 3$ のとき，任意の実数 $T>0$ に対して

$$\int_0^T xH_n(x)e^{-x^2}dx = -TH_{n-1}(T)e^{-T^2} - H_{n-2}(T)e^{-T^2} + H_{n-2}(0)$$

なることを示せ．

(5) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} xH_6(x)e^{-x^2}dx$ を求めよ．

(新潟大 2018)　　(m20182011)

0.320 整数 $n \geqq 0$ に対して，$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$ とする．次の各問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して $I_{2n-1} = \dfrac{(2^n\cdot n!)^2}{2n\cdot(2n)!}$，$I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n\cdot n!)^2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$ を求めよ.　　　　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}\cdot(n!)^2}{\sqrt{n}\cdot(2n)!}$ を求めよ.

(新潟大 2019)　　(m20192014)

0.321 虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ を含む指数関数 $e^{i\theta}$ を三角関数で表す公式はオイラーの公式と呼ばれる．物理の問題を扱うには，よく似た行列の関係式を用いると便利なことが多い．このことに関連した以下の問いに答えよ．

(1) オイラーの公式を書け．つまり，実数 θ に対して $e^{i\theta}$ を三角関数を用いて表せ．

(2) 二次正方行列 I および J を

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

で定義する．J^2 を計算し，J^2 と I の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3) 一般に二次正方行列 X に対し，そのゼロ乗 X^0 および指数関数 e^X は次式で定義される：

$$X^0=I,\qquad e^X=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}X^n=I+X+\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{3!}X^3+\cdots$$

(2) の関係式に着目すると，行列 $e^{\theta J}$ は I に比例する部分と J に比例する部分の和

$$e^{\theta J}=f(\theta)I+g(\theta)J$$

で表すことができる．このとき，関数 $f(\theta)$ および $g(\theta)$ を求めよ．

なお，必要ならば，三角関数のベキ展開（テイラー・マクローリン展開）が次式で与えられることを用いてもよい．

$$\cos\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n}\qquad =1-\frac{1}{2!}\theta^2+\cdots$$

$$\sin\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}=\theta-\frac{1}{3!}\theta^3+\cdots$$

(4) (3) で求めた行列 $e^{\theta J}$ に対して，その行列式の値を答えよ．

次に，これまでの結果の応用として，調和振動子の運動を表す微分方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega^2x(t)=0$$

の解 $x(t)$ を求めたい．ここで ω は正の定数である．以下の問いに答えよ．

(5) 変数 $p(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$ および $q(t)=\omega x(t)$ を用いると，この微分方程式は,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}p(t)\\ q(t)\end{pmatrix}=K\begin{pmatrix}p(t)\\ q(t)\end{pmatrix}$$

の形に表すことができる．ここで K は t に依らない二次正方行列である．行列 K を答えよ．

(6) (5) の微分方程式の解は次式で与えられる：

$$\begin{pmatrix}p(t)\\ q(t)\end{pmatrix}=e^{Kt}\begin{pmatrix}p(0)\\ q(0)\end{pmatrix}$$

以上のことから，初期条件 $p(0)=p_0$，$q(0)=q_0$ に対応する解 $x(t)$ を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222006)

0.322 次の無限級数の和を求めよ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots\cdots$$

(長岡技科大 1992） (m19922102)

0.323 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．(n は自然数，E は単位行列とする．)

(1) $(A-E)(A+\frac{1}{2}E)$ を計算せよ．

(2) x^n を $(x-1)(x+\frac{1}{2})$ で割った余りを $a_n x + b_n$ とする．a_n, b_n を n の式で表せ．

(3) $A^n = a_n A + b_n E$ と表せることを示せ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．

(長岡技科大 1996) (m19962104)

0.324 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 2^n}$ を求めよ．

(長岡技科大 2001) (m20012103)

0.325 (1) 1 周期が T である関数 $f(t)$ は, 以下のようにフーリエ級数展開される．

$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ として C_n および θ_n を, a_n および b_n で表せ. 但し, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ とする．

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t\Big) \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\big(n\omega_0 t - \theta_n\big) \end{aligned}$$

(2) 上式におけるフーリエ係数 a_n および b_n は, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ として,

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt \quad , \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により計算できる. 1 周期において, 次式で定義される関数 $f(t)$ をフーリエ級数展開せよ．

$$f(t) = \begin{cases} -1 & , \quad -\dfrac{T}{2} \le t < 0 \\ 1 & , \quad 0 \le t \le \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

(3) $\sin^2 t$ および $\sin^3 t$ を, それぞれフーリエ級数展開せよ．

(4) $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$ となることを証明せよ．

(長岡技科大 2005) (m20052106)

0.326 連続時間 $t[s]$ の関数 $f(t)$ のフーリエ変換は,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

により計算される．このことを利用して以下の問に答えよ．ただし，$j = \sqrt{-1}$ であり，ω [rad/s] は角周波数を表す．また，a は正の実数とする．

(1) 関数 $f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < t < a \\ 0 & , \quad t < 0,\ t > a \end{cases}$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，$f(t)$ と $|F(\omega)|$ をそれぞれ図示せよ．ただし，$|F(\omega)|$ は複素関数 $F(\omega)$ の絶対値を意味する．

(2) $f(t) = \begin{cases} \exp(-at) & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，$f(t)$ と $|F(\omega)|$ をそれぞれ図示せよ．

(3) $f(t-a)$ のフーリエ変換が $F(\omega)e^{-j\omega a}$ となることを証明せよ．

(4) $f(at)$ のフーリエ変換が $a > 0$ に対して $\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$ となることを証明せよ．

(長岡技科大 2006)　　(m20062105)

0.327 n を自然数，p を $0 < p < 1$ を満たす実数とする．また，点 X が地点 A か地点 B のどちらかにあるとする．X に対し，次の規則に従って操作を行う．

規則

- X が A にあるときは，確率 p で X を A にとどめ，確率 $1-p$ で X を B に移動させる．
- X が B にあるときは，必ず X を A に移動させる．

最初 X が A にあるとする．n 回の操作の後に X が A にある確率を a_n で表す．例えば $a_1 = p$ である．下の問いに答えなさい．

(1) a_2 を求めなさい．

(2) a_{n+1} を p と a_n を用いて表しなさい．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めなさい．

(長岡技科大 2022)　　(m20222104)

0.328 (1) 関数 $f(x) = \log(1+x)$ に対して，$f^{(n)}(x)$，$n = 0, 1, 2, \cdots$ を求めよ．

(2) 関数 $g(x) = \log\dfrac{1+x}{1-x}$ に対して，$g(x)$ のマクローリン展開を書け．すなわち $g(x)$ をべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の形で表せ．

(金沢大 1999)　　(m19992203)

0.329 関数 $f(t)$ は 2 回連続的微分可能で，$f(t), f'(x), f''(x)$ は有界とする．

$s > 0$ に対して $g(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st} f''(x)\,dt = s^2 g(s) - sf(0) - f'(0)$ を示せ．

(2) ω は定数とする．$f(t) = \sin\omega t$ のとき，$g(s)$ を求めよ．

(金沢大 1999)　　(m19992212)

0.330 (1) 関数 $\sin\dfrac{1}{x}$ を微分せよ．　　(2) 関数 $\sin^{-1} x$ を微分せよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin^{-1}\frac{1}{x}$ を求めよ．

(金沢大 2001)　　(m20012201)

0.331 $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$，$\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ について，次の問いに答えよ．

(1) n 階導関数 $\sinh^{(n)} t$，$\cosh^{(n)} t$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ．

(2) $\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sinh t \end{cases}$ とおく．t を消去し，x と y の関係を求めよ．
また，$-\infty < t < \infty$ のとき，点 (x, y) の描く曲線の概形を示せ．

（金沢大 2004）　　(m20042201)

0.332　閉領域 $D(R)=\{(x,y)\mid 1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ R^2\}$ $(R>1)$ に対して,

$$I_a(R)=\iint_{D(R)}\frac{1}{(x^2+y^2)^a}dxdy \quad (a>0)$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $I_a(R)$ を求めよ.

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} I_a(R)$ を調べよ.

(金沢大 2004)　　(m20042202)

0.333　領域 $D(R)=\left\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\leqq\ R^2\ ,\ y\geqq\ |x|\right\}$ $(R>0)$ に対して

$$I(R)=\iint_{D(R)}(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)^2}dxdy$$

とおく. 次の問に答えよ.

(1) $I(R)$ を計算せよ.

(2) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} I(R)$ を求めよ.

(金沢大 2005)　　(m20052203)

0.334　行列 $A=\begin{pmatrix} k & \frac{1}{3} \\ 1-k & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ (k は定数, $0<k<1$) について, 次の問に答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.　　(2) A を対角化せよ.

(3) $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n\end{pmatrix}$ $(n=1,2,\cdots)$ とするとき, 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n+d_n)$ を求めよ.

(金沢大 2006)　　(m20062201)

0.335　$f(x)$ を $f'(x)=f(x)$, $f(0)=1$ を満たす関数とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $(e^{-x}f(x))'=0$ を示せ. また, これを用いて $f(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ.

(3) (2) の結果を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$ の値を求めよ.

(金沢大 2007)　　(m20072202)

0.336　$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4\end{pmatrix}$ とする. 次に答えよ.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $n\to\infty$ のとき, $3^{-n}A^n$ はどのような行列に近づくか.

(金沢大 2007)　　(m20072204)

0.337　(1) ある定数 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ と正の定数 M が存在して

$$\left|\ \log(1+x)-\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\ \right|\leqq\ Mx^{n+1}\quad (0\leqq\ x\leqq\ 1)$$ が成り立つとき, $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\log 2$ を示せ.

(金沢大 2007)　　(m20072208)

0.338 n を自然数とし，I_n を次の広義積分で定める．$I_n = \displaystyle\int_1^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx$ 　このとき，次の問いに答えよ．

(1) I_1 の値を求めよ．

(2) $n \geq 2$ のとき，次の漸化式が成り立つことを示せ． 　$I_n = \dfrac{1}{e} + (n-1)I_{n-1}$

(3) 次式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ． 　$I_n = \dfrac{(n-1)!}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{k!}$

(4) 次の極限値を求めよ． 　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{I_n}{(n-1)!}$

(金沢大 2007) 　(m20072210)

0.339 (1) 自然数 n に対して，集合 $D_n = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq n^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ における関数 $e^{-x^2-y^2}$ の積分 $\displaystyle\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy$ 　を求めよ．

(2) 集合 $R_n = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \leq x \leq n\,,\ 0 \leq y \leq n\}$ に対して，
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\iint_{R_n} e^{-x^2-y^2}dxdy - \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy\right) = 0$ 　となることを示せ．

(3) 次の積分の値を求めよ． 　$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$

(金沢大 2007) 　(m20072212)

0.340 (1) 変数変換 $x = u,\ y = uv$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ．

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy,\ D = \{(x,y) \mid 1 \leqq\ x \leqq\ 2,\ 0 \leqq\ y \leqq\ x\}$ を求めよ．

(3) $R > 1$ とし，$D_R = \{(x,y) \mid 1 \leqq\ x \leqq\ R,\ 0 \leqq\ y \leqq\ x\}$ とおく．実数 α について，極限値
$\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\iint_{D_R}\frac{x^{\alpha}}{x^2+y^2}dxdy$ 　が存在するかどうか調べよ．存在する場合はその値を求めよ．

(金沢大 2008) 　(m20082203)

0.341 実数 x と正の整数 n に対して，$R_n(x)$ を

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} + R_n(x)$$

によって定める．ただし，$\arctan x$ は $y = \tan x\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数である．このとき，次に答えよ．

(1) $1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-t^2)^{n-1} = \dfrac{1-(-t^2)^n}{1+t^2}$ を用いて，$R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-t^2)^n}{1+t^2}dt$ となることを示せ．

(2) $|x| \leq 1$ のとき $R_n(x) \to 0\ (n \to \infty)$ となることを示せ．

(金沢大 2008) 　(m20082208)

0.342 関数 $\tan x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 公式 $\dfrac{d}{dy}\tan y = \tan^2 y + 1$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を利用して

$$(x^2+1)f'(x) = 1 \quad (-\infty < x < \infty)$$

となることを示せ．

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$(x^2+1)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$$

が成立することを示せ．

(3) $m = 1, 2, 3, \cdots$ に対して, 微分係数 $f^{(2m+1)}(0)$ の値を求めよ.

(金沢大 2010) (m20102202)

0.343 (1) $x = u\cosh v\,,\ y = u\sinh v$ とおく.

$$1 \leqq\ u \leqq\ 2\,,\ -\infty < v < \infty \text{ のとき } x \geqq\ 1\,,\ 1 \leqq\ x^2 - y^2 \leqq\ 4$$

となることを示せ. ただし, $\cosh v = \dfrac{e^v + e^{-v}}{2}\,,\ \sinh v = \dfrac{e^v - e^{-v}}{2}$ である.

(2) 変数変換 $x = u\cosh v\,,\ y = u\sinh v$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ を求めよ.

(3) 重積分

$$\iint_D \frac{\log(x^2 - y^2)}{x}\,dxdy$$

を計算せよ. ただし $D = \bigl\{(x, y)\,|\,x \geqq\ 1,\ 1 \leqq\ x^2 - y^2 \leqq\ 4\bigr\}$ とする.

(金沢大 2010) (m20102203)

0.344 関数 $f(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ.

(2) $D_a = \{(x, y)\mid x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0,\ 2 \leqq\ x^2 + y^2 \leqq\ a^2\}$ とする.

$$\lim_{a\to\infty}\iint_{D_a}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy$$

を求めよ.

(金沢大 2011) (m20112203)

0.345 次の問に答えよ.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(1 + x^2)^2}\,dx$ の値を求めよ.

(2) 自然数 n に対して $I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{(1 + x^2)^{n+1}}\,dx$ とおくとき, 広義積分 I_n と I_{n+1} の間に成り立つ関係式を求めよ.

(3) I_n の値を求めよ.

(金沢大 2011) (m20112206)

0.346 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して,

$$A\vec{p_i} = \lambda_i\vec{p_i}\,,\ |\vec{p_i}| = 1\ (i = 1, 2, 3)\,,\quad \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$$

とする. ここで, $|\vec{p}|$ はベクトル $\vec{p}$ の長さとする. 次の問いに答えよ.

(1) $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ を求めよ.

(2) $\vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\ \vec{p}_3$ を求めよ.

(3) $\vec{x} = x_1\vec{p}_1 + x_2\vec{p}_2 + x_3\vec{p}_3$ とする. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|A^n\vec{x}| = \infty$ となるための $x_1,\ x_2,\ x_3$ の条件を述べよ.

(金沢大 2012) (m20122201)

0.347 $x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $f'(x) < 0$ となる x の範囲を求めよ.

(2) $N \geqq 3$ に対して,

$$\sum_{n=3}^{N} f(n) < \int_2^N f(x)dx$$

が成り立つことを示せ. ただし必要ならば, $e < 3$ であることは証明なしで用いてよい.

(3) $f(x)$ の不定積分を求めよ.

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ が収束することを示せ.

(金沢大 2012)　　(m20122206)

0.348 行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 6 & -6 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値を λ_1, λ_2, λ_3 $(\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ とする. $i = 1,2,3$ に対して, λ_i に対応する固有ベクトルでその第 1 成分が 1 のものを $\boldsymbol{u}_i$ とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $i = 1,2,3$ に対して, λ_i および $\boldsymbol{u}_i$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3$ とし, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \boldsymbol{v}$ とおく. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{z_n}$ を求めよ.

(金沢大 2014)　　(m20142201)

0.349 任意の x, y, z について

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x + y + 4z \\ -4x + 3y + 2z \\ -x + y + z \end{pmatrix}$$

となる $3 \times\ 3$ 行列 A を考える. 次の問いに答えよ.

(1) A を求めよ.

(2) A の固有値 λ_1, λ_2, λ_3 $(\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ と, それぞれに対応する長さ 1 の固有ベクトル p_1, p_2, p_3 を求めよ.

(3) B を A の逆行列, n を自然数とするとき, B^n の固有値を $\mu_1^{(n)}$, $\mu_2^{(n)}$, $\mu_3^{(n)}$ $(\mu_1^{(n)} < \mu_2^{(n)} < \mu_3^{(n)})$ とおく. 数列 $a_n = \dfrac{\mu_1^{(n)}\mu_3^{(n)}}{\mu_2^{(n)}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ に対して, 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束発散を調べよ. 収束する場合はその値を求めよ.

(金沢大 2015)　　(m20152201)

0.350 次の広義積分の収束・発散を判定せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 3x}$　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$　　(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 1}}$

(金沢大 2015)　　(m20152206)

0.351 次の微分, 積分を計算しなさい.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(x^{\sin x}\right)$　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

(金沢大 2015)　　(m20152209)

0.352 λ を実数，$t > 0$ とする．このとき，閉領域

$$D_t = \left\{(x, y) \in R^2 \mid x \geqq\ 0,\ x^2 + y^2 \leqq\ t^2\right\}$$

上の重積分

$$I(t) = \iint_{D_t} (1 + x^2 + y^2)^\lambda dxdy$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) $I(t)$ を具体的に t の式で表せ．

(2) $t \to \infty$ としたとき，$I(t)$ の収束・発散を調べ，収束する場合はその極限値を求めよ．

(金沢大 2016) (m20162205)

0.353 n を自然数とし，I_n を次の広義積分で定める． $I_n = \displaystyle\int_1^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$

(1) I_1 の値を求めよ．

(2) $n \geq 2$ のとき，次の漸化式が成り立つことを示せ． $I_n = \dfrac{1}{e} + (n-1) I_{n-1}$

(3) 次式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ． $I_n = \dfrac{(n-1)!}{e} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{k!}$

(4) 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{(n-1)!}$

(金沢大 2016) (m20162214)

0.354 (1) 自然数 n に対して，集合 $D_n = \left\{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq n^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$ における関数 $e^{-x^2-y^2}$ の積分 $\displaystyle\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dxdy$ を求めよ．

(2) 集合 $\left\{(x, y) \in R^2 \mid 0 \leq x \leq n,\ 0 \leq y \leq n\right\}$ を R_n と表すとき，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\iint_{R_n} e^{-x^2-y^2} dxdy - \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dxdy \right) = 0$ を示せ．

(3) 次の積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

(金沢大 2016) (m20162216)

0.355 行列 $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を考える．次の各小問に答えよ．

(1) P の固有値をすべて求めよ．またそれぞれの固有値に属する固有ベクトルを一つずつ求めよ．ただし固有ベクトルの成分は整数値に選べ．

(2) $\boldsymbol{v}$ を (1) で求めた固有ベクトルの線形結合として表せ．

(3) $P^n \boldsymbol{v}$ を求めよ．さらに極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P^{2n+1}\boldsymbol{v}$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P^{2n}\boldsymbol{v}$ を求めよ．

(金沢大 2016) (m20162237)

0.356 (1) $\dfrac{x}{1+x} \leqq \log(1+x) \leqq x \quad (x > -1)$ を示せ．

(2) 実数列 $\{a_n\}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を満たすとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n$ を求めよ．

(3) 実数列 $\{b_n\}$ は有界数列とする．もし $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{b_n}{n}\right)^n$ が収束するならば，$\{b_n\}$ も収束することを示せ．

(金沢大 2017) (m20172203)

0.357 (1) 不等式 $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < \dfrac{\pi}{6}$ を示せ.

(2) n を自然数とする．広義積分

$$I_n = \int_1^{\infty} e^{1-t}\frac{1}{t^n}dt$$

は関係式

$$I_1 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k! + (-1)^{n+1}(n+1)!\, I_{n+2}$$

を満たすことを示せ.

(金沢大 2017) (m20172205)

0.358 関数 $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x \leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ について，次の問いに答えよ.

(1) $x > 0$ に対し，$f'(x)$ と $f''(x)$ を計算せよ.

(2) 正の整数 n に対し，$\displaystyle\lim_{y\to\infty} y^n e^{-y} = 0$ を示せ.

(3) $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ であることを示せ.

(金沢大 2017) (m20172207)

0.359 (1) 任意の非負整数 $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0$$

が成り立つことを示せ.

(2) 次の関数 $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

(3) (2) の関数 $f(x)$ は $\boldsymbol{R}$ 上で 2 回微分可能であり，2 階導関数 $f''(x)$ は $x = 0$ で連続であることを示せ.

(4) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け.

(金沢大 2018) (m20182203)

0.360 $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ を収束する単調増加数列とし，その極限値を p とする．自然数 $n = 1, 2, \cdots$ に対して，$\boldsymbol{R}$ 上の関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n}|x - p_k|$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ.

(1) $f_1(x)$，$f_3(x)$ の最小値を与える x を求めよ.

(2) $f_{2n+1}(x)$ の最小値を与える点を q_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n$ を求めよ.

(金沢大 2018) (m20182204)

0.361 定数 $a > 0$ を与えて，開区間 $\left(0, \dfrac{\pi}{a}\right)$ 上で関数 $f(x) = \dfrac{\cos(ax)}{\sin(ax)}$ を考える．次の問いに答えよ.

(1) $x = 0$ での右側極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} f(x)$ と $x = \dfrac{\pi}{a}$ での左側極限 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{a}-0} f(x)$ をそれぞれ調べよ.

(2) $f(x)$ は $\left(0, \dfrac{\pi}{a}\right)$ 上で，$f'(x) = -a\left(1 + f(x)^2\right)$ を満たすことを示せ.

(3) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在することを示し，その導関数 $(f^{-1})'(x)$ を求めよ．

(4) (3) の関数 $f^{-1}(x)$ と $f(b)=b$ を満たす定数 b $\left(0<b<\dfrac{\pi}{a}\right)$ に対して，広義積分

$$\int_b^\infty \frac{1}{(1+x^2)\left\{1+\left(f^{-1}(x)\right)^2\right\}}dx$$

を a と b を用いて表せ．

(金沢大 2018)　　(m20182207)

0.362　関数 $f(x,y)=(x+y)e^{-(x^2+y^2)}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 曲面 $z=f(x,y)$ 上で点 $(1,0,f(1,0))$ における接平面の方程式を $z=ax+by+c$ と表すとき，定数 a,b,c を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値を調べよ．

(3) 次の広義重積分の値を求めよ．必要ならば，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを利用してよい．

$$\iint_D f(x,y)dxdy,\quad D=\{(x,y)\,|\,x\geqq 0,\ y\geqq 0\}$$

(金沢大 2018)　　(m20182208)

0.363　次の問いに答えよ．

(1) 実数 α に対し，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ が存在するような α の値の範囲を求めよ．

(2) $L>1$ に対し，集合 D_L を

$$D_L=\left\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\ \middle|\ 1\leqq x^2+y^2\leqq L^2\right\}$$

と定める．実数 β に対し，極限値

$$\lim_{L\to\infty}\iint_{D_L}\frac{dxdy}{1+(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}$$

が存在するような β の値の範囲を求めよ．

(金沢大 2019)　　(m20192208)

0.364　$x\in\boldsymbol{R}$ に対して，

$$f(x)=x\left(\log\left(x^2+\frac{1}{2}\right)-2\right)+\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x\right)$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x\log(x)}$ を求めよ．

(2) f の導関数を求めよ．

(3) f の極値を求めよ．

(金沢大 2020)　　(m20202207)

0.365　関数

$$f(t)=\frac{1}{1+e^{-t}}\ \ (t\in\boldsymbol{R}),\qquad F(x)=\int_0^x f(t)dt\ \ (x\in\boldsymbol{R})$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}f(t)$ および $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}f(t)$ を求めよ．

(2) $y = f(t)$ のグラフの概形を図示せよ.

(3) $y = F(x)$ のグラフは下に凸であることを示せ.

(4) $a > 0$ に対して, 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{F(ax)}{x}$ を求めよ.

(金沢大 2021)　　(m20212201)

0.366 α を実数とする. 2 以上の自然数 n に対して, n 次の正方行列 A_n を

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \alpha & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

により定める. ここで, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ である.

また, $a_n = \det(A_n)$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) a_2, a_3 を求めよ.

(2) a_n を求めよ.

(3) $\alpha \geq 0$ のとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(金沢大 2021)　　(m20212204)

0.367 次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\int \sqrt{3x+1}\, dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1} dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x} dx$

(富山大 2000)　　(m20002303)

0.368 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が $a_n \to 2\ (n \to \infty)$ と $b_n \to 1\ (n \to \infty)$ を満たすとき,

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\, b_n \to 2 \qquad (n \to \infty)$$

を示せ.

(富山大 2003)　　(m20032308)

0.369 数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ において, 部分列 $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n-1}\}$ がともに α に収束するならば $\{a_n\}$ も α に収束することを示せ.

(富山大 2004)　　(m20042315)

0.370 次の積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)} dx$$

(富山大 2005)　　(m20052312)

0.371 (1) 直交座標の二重積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\, dxdy$ を変数変換
$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$
によって, 極座標 $(r,\ \theta)$ の二重積分に変換せよ.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ の値を求めよ．

(富山大 2010)　　(m20102305)

0.372 $-1 < a < 1$ のとき，次の問いに答えよ．

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{inx}$ $(x \in R)$ は R 上一様に絶対収束することを示せ．ただし，i は虚数単位を表す．

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx$ $(x \in R)$ の和を求めよ．

(富山大 2011)　　(m20112303)

0.373 次の級数の収束に関する主張は正しいか; 正しければ証明を与え，正しくなければ反例をあげよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束する $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束する $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ が絶対収束する．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ が絶対収束する $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束する．

(富山大 2012)　　(m20122309)

0.374 区間 $I = [1, \infty)$ における関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\cdots}$ について，次の問いに答えよ．ただし，

$$f_n(x) = \frac{n}{2 + nx}$$

とする．

(1) 区間 I における極限関数 $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．

(2) 上の (1) における収束は一様収束であるかどうか調べよ．

(富山大 2013)　　(m20132309)

0.375 $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数とする．また，$x_0 \in \mathbb{R}$ とする．このとき，次の (a)，(b) は同値であることを示せ．

(a) $f(x)$ は $x = x_0$ で連続である．

(b) x_0 に収束する任意の実数列 $\left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(x_0)$ である．

(富山大 2015)　　(m20152302)

0.376 $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ を有界な実数列とするとき，

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

ならば，$\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ．

ただし，$\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n$，$\displaystyle\liminf_{n\to\infty} a_n$ はそれぞれ数列 $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ の上極限，下極限を表す．

(富山大 2016)　　(m20162303)

0.377 $\mathbb{N}$ を自然数全体の集合とする．$a_n \geq 0\ (n \in \mathbb{N})$ とし，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が実数 α に収束するとする．

このとき，全単射 $f\ :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対し $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = \alpha$ となることを示せ．

(富山大 2016)　　(m20162304)

0.378 関数 $f(x) = (1+kx)e^{kx} \quad (x \geqq 0)$ について，次の各問いに答えよ．ただし，k は実数である．

(1) 次の積分 $I(X)$ を X を用いて表せ．ただし，$X > 0$ とする．

$$I(X) = \int_0^X f(x)dx$$

(2) $k = -1$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{X \to \infty} I(X)$ を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{X \to \infty} I(X)$ が有限のとき，関数 $f(x)$ の広義積分は存在する．関数 $f(x)$ の広義積分が存在するための条件を，k についての不等式で表せ．

(富山大 2017)　　(m20172305)

0.379 k を正の整数，α を複素数とするとき，微分方程式

$$x\frac{d}{dx}f(x) - \alpha\frac{d}{dx}f(x) + kf(x) = 0$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) この微分方程式を解け．

(2) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$ の値が有限となるような解 $f(x)$ をもつための，α の条件を求めよ．

(福井大 2000)　　(m20002407)

0.380 次式に示す微分方程式に対して下記の設問に答えよ．

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - ax(t) = 0 \quad （a \text{ は非零の実定数}）$$

(1) 次に示す初期条件の下で解 $x(t)$ を求めよ．また，$a > 0$，$a < 0$ に対する解 $x(t)$ の特徴を明らかにせよ．

$$x(0) = x_0\ ,\ \ \frac{dx}{dt}(0) = 0$$

(2) $a > 0$ とする．このとき $\displaystyle\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$ を満たす非零の初期条件を求めよ．

(福井大 2003)　　(m20032411)

0.381 (1) 次の定積分を示せ．m と n は整数とする．

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx dx = 0\ ,\ \ \int_0^{2\pi} \cos nx dx = 0$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0\,(m \neq n) \\ \pi\,(m = n) \end{cases}$

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0\,(m \neq n) \\ \pi\,(m = n) \end{cases}$

(2) $x(t)$ を周期 T の周期関数とするとき，$x(t)$ を次のように書くことができる．

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2\pi k}{T}t + b_k \sin\frac{2\pi k}{T}t\right)$$

このとき，(1) の知見を活用し，$a_k\ (k \geq 0)$，$b_k\ (k \geq 1)$ を $x(t)$ を用いて表せ．

(福井大 2003)　　(m20032417)

0.382 極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x-x^2}{2-6x+3x^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} i}{n^2-1}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

（福井大 2004）　　(m20042405)

0.383 空中を速度の二乗に比例した空気抵抗を受けながら落下している質量が $m\ [kg]$ の物体の運動方程式は, 地表から鉛直上向きに x 座標をとれば,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - mg$$

で与えられる. ただし, $g\ [m/s^2]$ は重力加速度の大きさ, $c\ [kg/m]$ は比例定数とする.

十分高い上空から落下させたときの終端速度 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{dx}{dt}$ を求めよ.

(福井大 2005)　　(m20052410)

0.384 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{3x}\sqrt{1-e^{3x}}dx$

(福井大 2005)　　(m20052413)

0.385 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

(福井大 2005)　　(m20052417)

0.386 (1) 関数 $f(x) = \log(1+x)$（ただし $x > -1$）の 1〜4 階の導関数（つまり $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, および $f^{(4)}(x)$ ）をそれぞれ求めよ．

(2) (1) の結果にもとづき, 上で定義された関数 $f(x)$ の n 階の導関数を推測し，$f^{(n)}(x)$ が実際に推測された関数で表現されることを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) (2) の結果を使い，関数 $f(x)$ のマクローリン展開（$x = 0$ でのテーラー展開）を，無限級数の和の形 $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \text{の形}\right)$ で求めよ,

(4) (3) の結果を用いて，関数 $g(x) = \log\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)$（ただし $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$）のマクローリン展開を，無限級数の和の形で求めよ（経過を書く必要はあるが，証明の必要はなし）．

(福井大 2008)　　(m20082401)

0.387 関数 $f(x) = (x^2+4x)e^{-x}$ について以下の問いに答えよ．

(1) 1 階の導関数 $f'(x)$，2 階の導関数 $f''(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ．

(2) $0 \leq x < \infty$ の範囲で増減表を書き，$y = f(x)$ のグラフを描け．

(福井大 2008)　　(m20082402)

0.388 以下に示されるような関数 $y(x)$ に関する常微分方程式が与えられている.

$$2\frac{d^2y}{dx^2}+\alpha\frac{dy}{dx}+2y=4$$

ここで, α は実数であるとし, 以下の問いに答えよ.

(1) $\alpha=5,\ y(0)=0,\ \dfrac{dy(0)}{dx}=-2$ とするとき, 微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ.

(2) $x\to\infty$ とするとき, $\alpha>0$ という条件下では $y(x)$ がある有限の定数 y_p に収束することが知られている（すなわち $\displaystyle\lim_{x\to\infty}y(x)=y_p$）. そのときの y_p の値を求めよ.

(3) (2) の条件の下で $y(x)$ が収束するとき, $y(x)$ が振動しながら収束するための α の条件を求めよ.

(福井大 2008)　　(m20082410)

0.389 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5^x-3^x}{5^x+3^x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\Big(\cos x\Big)^{\frac{1}{x^2}}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\Big(1+8x\Big)^{\frac{1}{x}}$

(福井大 2008)　　(m20082413)

0.390 (1) 内径が a, 外径が b である球殻の体積を, 極座標系での 3 重積分を使って表し, その値を求めよ. ただし, 極座標 (r,θ,ϕ) は, 直角座標 (x,y,z) を使って,

$$x=r\sin\theta\cos\phi\,,\ y=r\sin\theta\sin\phi\,,\ z=r\cos\theta\quad(0\le r\le\infty\,,\ 0\le\theta\le\pi\,,\ 0\le\phi\le2\pi)$$

で定義される.

(2) 楕円 $x^2-xy+y^2=4$ の面積を求めよ.

(福井大 2009)　　(m20092402)

0.391 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\log x}{1-x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}x}{x}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$　（n は正の整数）

(福井大 2009)　　(m20092407)

0.392 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$ がある.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ. n は整数とし, $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ 以外の $\boldsymbol{x}$ を求めること.

(福井大 2010)　　(m20102409)

0.393 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin x-x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0+}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}\right)$　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n+2}{3n^2+4}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\Big(\sqrt{9n^2+2n}-3n\Big)$　　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

(福井大 2010)　　(m20102413)

0.394 次に示す微分方程式について以下の問いに答えよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2a\frac{dy}{dx}+5y=f(x)$$

(1) $f(x) = 5$ として，以下の問いに答えよ．

(a) この微分方程式の特解 y_s を求めよ．

(b) この微分方程式の余関数（斉次方程式の一般解）が $C_1e^{\alpha x} + C_2e^{\beta x}$（ただし　$\alpha,\ \beta$ は異なる実数）の形となり，$x \to \infty$ で 0 に収束するための a の条件を求めよ．

(2) $a = 1,\ f(x) = 10\sin x,\ y(0) = -1,\ \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0$ として，この微分方程式を解け．

(福井大 2011)　　(m20112410)

0.395　次の公式を使って極限値を求めよ．

〈公式〉$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1\ ,\quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log_e(1+2x)}{x}$

(福井大 2012)　　(m20122403)

0.396　次式はマクローリン展開の一般式である．

$$f(x) = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad \text{ただし，} f^{(n)} \text{は } n \text{ 次導関数を示す．}$$

(1) $f(x) = e^x$ の $n = 4$ までのマクローリン展開を示すとともに，e の近似値を求めよ．

(2) $f(x) = \sin x$ および $f(x) = \cos x$ について，$n = 5$ までのマクローリン展開を示せ．

(3) 上の結果を利用して $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ を示せ; ただし，$i^2 = -1$ である．

(福井大 2012)　　(m20122424)

0.397　次の式を計算せよ．なお，$\alpha > 1$ とする．

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\alpha}}$$

(福井大 2013)　　(m20132402)

0.398　極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x - x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x}$

(福井大 2013)　　(m20132405)

0.399　$t < 0$ で $f(t) = 0$ である関数 $f(t)$ のラプラス変換は，以下のように与えられる．

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

次の関数のラプラス変換を求めよ．

(1) $f(t) = e^{at}$

(2) $\displaystyle f(t) = \int_0^t \cos(t-\tau)\cos\tau d\tau$

(福井大 2014)　　(m20142426)

0.400　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$　　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{4x^3-3x^2+2}{e^x}$

(福井大 2015)　　(m20152401)

0.401　$\displaystyle I=\iint_R e^{-(x^2+y^2)}dxdy$　$(R\ :\ 0\leq x^2+y^2\leq a^2)$ の値を求めよ．さらに，$a\to\infty$ としたときの I の値を用いて，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$ の値を求めよ．

(福井大 2015)　　(m20152406)

0.402　y を x の関数とするとき，微分方程式

$$\left(\frac{y'}{y}\right)'+a=0\quad（a \text{ は実数の定数}）$$

について，以下の問いに答えよ．

(1)　この微分方程式を，条件 $y(0)=1,\ y'(0)=0$ のもとで解け．

(2)　上の (1) で求めた解 y について $\displaystyle I=\int_{-\infty}^{\infty}y^2dx$ とおく．I が有限になるための a に関する必要十分条件を示せ．また，その必要十分条件が満たされるとき，a を用いて I を表せ．なお，正規分布（ガウス分布）の確率密度関数の性質を利用してもよい．

(福井大 2015)　　(m20152413)

0.403　連立微分方程式

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax\ -\ y-6\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=5x-2y+1\end{cases}$$

について，以下の問いに答えよ．ただし，この微分方程式の解 $x(t),\ y(t)$ を要素とするベクトルを $\boldsymbol{r}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ とする．ただし，$a\neq\dfrac{5}{2}$ とする．

(1)　任意の t に対して $\boldsymbol{r}(t)$ が不変となるような解 $\boldsymbol{r}_0\in\mathbb{R}^2$ を，a を用いて表せ．

(2)　今，$\boldsymbol{d}(t)=\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}_0=\begin{pmatrix}X(t)\\Y(t)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ とするとき，$X(t)$ および $Y(t)$ に関する連立微分方程式を導け．

(3)　(2) で求めた連立微分方程式を満たす解 $\boldsymbol{d}(t)$ が，任意の初期値に対して $t\to+\infty$ で $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ に収束する条件を a を用いて表せ．

(4)　$a=-4$，初期値ベクトル $\boldsymbol{r}(0)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ としたときの解 $\boldsymbol{r}(t)$ を求めよ．

(福井大 2016)　　(m20162410)

0.404　以下の積分をおこないなさい．

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x\ln x}dx$　　　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx$

(福井大 2016)　　(m20162421)

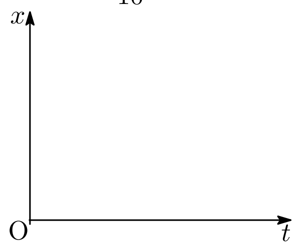
0.405 以下の微分方程式について答えなさい．（なお，$\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ である.）

$$\dot{x} = \left(1 - \frac{x}{K}\right) x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，K は正の定数である.

(1) 十分時間が経過したとき，つまり $t \to \infty$ のとき，x はどうなるかを答えなさい.

(2) $t = 0$ のとき，$x = \dfrac{K}{10}$ であった．t - x のグラフを描きなさい.



(3) 微分方程式 ① の解を求めなさい.

(福井大 2016)　　(m20162424)

0.406 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 及びベクトル $\boldsymbol{q}_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ を用いて以下のような漸化式を定義する. このとき，以下の設問に答えよ.

$$\boldsymbol{q}_{n+1} = A\boldsymbol{q}_n \quad (n \text{ は整数})$$

(1) $\boldsymbol{q}_n$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{\varepsilon}_n = \dfrac{{}^T\boldsymbol{q}_n\, A\, \boldsymbol{q}_n}{{}^T\boldsymbol{q}_n\, \boldsymbol{q}_n}$ 及び $\boldsymbol{p}_n = \dfrac{\boldsymbol{q}_n}{|\boldsymbol{q}_n|}$ とするとき，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 及び $\boldsymbol{p}_n$ を求めよ．ここで，${}^T\boldsymbol{q}_n$ は $\boldsymbol{q}_n$ を転置したベクトルである.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 及び $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}_n$ を求めよ.

(福井大 2018)　　(m20182406)

0.407 関数 $f(t)$ のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

について，以下の問に答えなさい．ただし，$\theta(t-\alpha)$ は単位階段関数で

$$\theta(t-\alpha) = \begin{cases} 1 & (t \geq \alpha) \\ 0 & (t < \alpha) \end{cases}$$

によって定義される.

(1) 単位階段関数 $\theta(t)$ および $\theta(t-1)$ のラプラス変換を求めなさい.

(2) $\mathcal{L}[e^{-(t-1)}\theta(t-1)]$ について，変数 s を用いて表しなさい．必要であれば以下の関係を用いてもよい.

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha)\theta(t-\alpha)] = e^{-s\alpha}F(s)$$

(福井大 2018)　　(m20182410)

0.408 $\displaystyle\int_0^\infty \left\{\int_0^1 \sqrt{x}e^{-2y}dx\right\}dy$ を計算せよ.

(福井大 2018)　　(m20182417)

0.409 次の定積分を求めよ.

(1) $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\, dx$ (2) $I = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x \, dx$

(福井大 2020) (m20202403)

0.410 次の重積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

(福井大 2020) (m20202405)

0.411 関数 $f(x)$ が以下のように与えられている.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1 \\ 1 & |x| < 1 \end{cases}$$

この関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$ を求めよ.

(福井大 2020) (m20202413)

0.412 関数 $f(t)$ $(t \geq 0)$ のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \ (s > 0)$$

について考える. 以下の問いに答えよ.

(1) $f(t) = \cos^2 t$ $(t \geq 0)$ のラプラス変換を求めよ. $\mathcal{L}[\cos^2 t]$

(2) $f(t) = t \sin at$ $(t \geq 0,$ 定数 $a \neq 0)$ のラプラス変換を求めよ. $\mathcal{L}[t \sin at]$

(福井大 2020) (m20202414)

0.413 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx) dx$ (2) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

ただし, m および n は正の整数とする.

(福井大 2021) (m20212402)

0.414 (1) 複素フーリエ級数展開を用いて以下の関数が成立することを示せ

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

(2) 関数 $f(t)$ 及び $g(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega)$ 及び $G(\omega)$ と表す. このとき, 以下のフーリエ変換が $F(\omega)G(\omega)$ となることを示せ.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(t-u) du$$

(福井大 2021) (m20212412)

0.415 次の定積分を求めよ,

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3 - \cos 2x}\, dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x \, dx$

(福井大 2022) (m20222414)

0.416 以下の行列 $\mathbf{S}$ に関する問いに答えよ．ただし，θ は実数である．

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\mathbf{S}$ を対角化せよ．

(2) n を自然数とし，$\mathbf{S}^n$ を求めよ．

(3) 行列 $\mathbf{S}$ 及び実数 x を用いた指数関数はそれぞれ以下の式で定義される．
$\exp(\mathbf{S})$ を計算せよ．

$$\exp(\mathbf{S}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{S}^n}{n!} \qquad\qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(福井大 2022) (m20222418)

0.417 $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ を含む定積分，あるいは不定積分に関し，以下の問いに答えよ．ただし，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \sqrt{2\pi} \tag{1}$$

であることを用いてよい．答えを導く思考過程あるいは計算過程を丁寧に記述すること．

(1) 式 (1) を利用して，定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{2}x)dx$ の値を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int xf(\sqrt{2}x)dx$ を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(\sqrt{2}x)dx$ の値を求めよ．

(福井大 2022) (m20222424)

0.418 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2(x^2+1)}dx$ を求めよ．

(静岡大 2004) (m20042501)

0.419 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin 2x\,dx$ を求めよ． (2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2}{x(x+2)}\,dx$ を求めよ．

(静岡大 2006) (m20062504)

0.420 $a>0$ とし，$D(a) = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq a\,,\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}\}$ とおく．
このとき 2 重積分 $\displaystyle I(a) = \iint_{D(a)} \frac{y}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy$ について，次の問いに答えよ．

(1) $D(a)$ を図示し，$I(a)$ の値を求めよ． (2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty} I(a)$ を求めよ．

(静岡大 2006) (m20062505)

0.421 以下の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int_1^5 \frac{\log x}{x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{5+x^2}$

(3) $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)\,dxdy\ ,\quad D = \{(x,y) \mid 4 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$

(静岡大 2008) (m20082502)

0.422 $f(x) = e^{\sin x}$ のマクローリン展開を $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とするとき, 定数 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$ を求めよ．

(静岡大 2010) (m20102505)

0.423 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$ を求めよ．

(2) $f(x) = \dfrac{-4x+6}{x^2-4x+3}$ のマクローリン展開を求めよ.

(静岡大 2011) (m20112501)

0.424 次の関数 f のマクローリン (Maclaurin) 展開 $\left(f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)$ を求めよ.

(1) $f(x) = e^{x^2}$ (2) $f(x) = \log(2+x) \quad (-2 < x < 2)$

(静岡大 2012) (m20122504)

0.425 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3+1}\,dx$

(静岡大 2013) (m20132504)

0.426 次の不定積分，定積分，広義積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-x-2}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \log(1+x)dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$

(岐阜大 2003) (m20032601)

0.427 次の積分値を求めよ. ただし, $a > 0$ とする.

$$I = \int_0^{\infty} e^{-ax^2}dx$$

(岐阜大 2005) (m20052602)

0.428 関数 $p(x)$ が $p(x) = \begin{cases} 0 & (x < -a) \\ \dfrac{x}{a^2} + \dfrac{1}{a} & (-a \leqq x < 0) \\ -\dfrac{x}{a^2} + \dfrac{1}{a} & (0 \leqq x \leqq a) \\ 0 & (a < x) \end{cases}$

で与えられるとき，以下の問いに答えよ．ただし，$a > 0$ である.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$ を求めよ. (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2p(x)dx$ を求めよ.

(岐阜大 2006) (m20062609)

0.429 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = (1-y)y$ について，次の問いに答えよ.

(1) 初期条件 $y(0) = a$ をみたす解を求めよ．ただし，a は正の実数とする.

(2) 上で求めた解 $y(x)$ について，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x)$ を求めよ.

(岐阜大 2007) (m20072605)

0.430 次の (1)〜(3) の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ （ヒント：極座標変換）

(岐阜大 2009) (m20092612)

0.431 次のパラメータ表示で与えられる xyz 空間内の曲線 C と直線 ℓ について, 以下の問いに答えよ. ただし, 空間内の二点 P, Q に対して, 二点間の距離を $\overline{PQ}$ で表す.

C : $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = \cos\theta + \sin\theta \end{cases} \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ $\qquad \ell$: $\begin{cases} x = t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty)$

(1) P を曲線 C 上の点, Q を直線 ℓ 上の点とするとき, $\overline{PQ}^2$ を θ と t の式で表せ.

(2) P を曲線 C 上の点, Q を直線 ℓ 上の点とするとき, $\overline{PQ}$ の最小値, および, そのときの P と Q の座標を求めよ.

(岐阜大 2010) (m20102604)

0.432 a を 1 より大きい定数とする．方程式

$$\tan^{-1} x = \frac{ax}{1+x^2}$$

の区間 $(0, \infty)$ における実数解の個数を求めよ．ただし，$\tan^{-1} x$ は x の逆正接関数で，$\tan^{-1} 0 = 0$ とする.

(岐阜大 2011) (m20112601)

0.433 $y(x)$ を未知関数とする微分方程式

$$y'' + 2y' + ay = 0 \qquad (*)$$

に対して以下の問に答えよ．ただし，a は定数とする.

(1) $a = 1$ のとき，方程式 $(*)$ の一般解を求めよ.

(2) $a > 0$ のとき，方程式 $(*)$ の任意の解 y に対し $\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$ が成り立つことを示せ.

(岐阜大 2011) (m20112607)

0.434 以下の式でガンマ関数 $\Gamma(t)$ を定義する.

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx\,,\ t > 0.$$

次の問に答えよ．ただし， $t > 0$ のとき $\lim_{x \to \infty} e^{-x} x^t = 0$ となることは証明しなくても使ってよい.

(1) $t > 0$ に対して $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ となることを示せ.

(2) 自然数 n に対して $\Gamma(n+1) = n!$ となることを示せ.

(3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2$，すなわち

$$\left(\int_o^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx\right)\left(\int_o^\infty e^{-y} y^{-\frac{1}{2}} dy\right)$$

を x, y の 2 変数関数の重積分で表せ.

(4) 変数 (x, y) から (r, θ) への変数変換

$$\begin{cases} \sqrt{x} = r\cos\theta, \\ \sqrt{y} = r\sin\theta \end{cases}$$

に対してヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

(5) 前問 (4) の変数変換を用いて (3) の重積分を計算し $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ を求めよ.

(岐阜大 2014) (m20142601)

0.435 自然数 m に対して

$$I(m) = \int_0^1 \frac{1}{x^m + 1}\, dx$$

と定める．以下の問に答えよ.

(1) 定積分 $I(1)$, $I(2)$ の値を求めよ.

(2) 実数 $r \neq -1$, 自然数 N に対し,

$$\frac{1}{r+1} = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n r^n + \frac{(-1)^{N+1} r^{N+1}}{r+1}$$

となることを示せ.

(3) 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

の値を求めよ.

(岐阜大 2015) (m20152601)

0.436 微分方程式

$$(E) \quad y' + yx = 1 + x + x^2$$

を考える. 以下の問に答えよ.

(1) 同次方程式 $y' + yx = 0$ の一般解を求めよ.

(2) (E) の一般解を求めよ.

(3) (E) の解で, 条件 $y(0) = 0$ を満たすものを求めよ.

(4) (3) で求めた y について, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{2x + \sin x}$ を求めよ.

(岐阜大 2020) (m20202606)

0.437 $y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする. 以下の問に答えよ.

(1) 微分方程式

$$(E_1) \quad y' - yx = 0$$

の一般解を求めよ.

(2) 微分方程式

$$(E_2) \quad y' - yx\cos(x^2) = 0$$

の一般解を求めよ.

(3) e を自然対数の底として, α, β を実数とする. 微分方程式

$$(E_3) \quad y' - \alpha y = e^{\beta x}$$

の一般解を求めよ.

(4) γ を実数とする. 微分方程式

$$(E_4) \quad y' - yx(\gamma + \cos(x^2)) = 0$$

の解 $y(x)$ で初期条件 $y(0) = 1$ を満たすものを求めよ. $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{x}$ の収束・発散を判定せよ.

(岐阜大 2022) (m20222602)

0.438 e を自然対数の底とする.

(1) 次の不定積分 I を求めよ. $\displaystyle I = \int \frac{dx}{9e^x + 4e^{-x} + 6}$

(2) 次の広義積分 J の値を求めよ. $J=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{9e^x+4e^{-x}+6}$

(岐阜大 2022) (m20222606)

0.439 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

(豊橋技科大 1998) (m19982706)

0.440 次の各問いに答えよ.

(1) 次の無限数列の一般項を示し，収束・発散を調べ，収束する場合にはその極限値を求めよ.

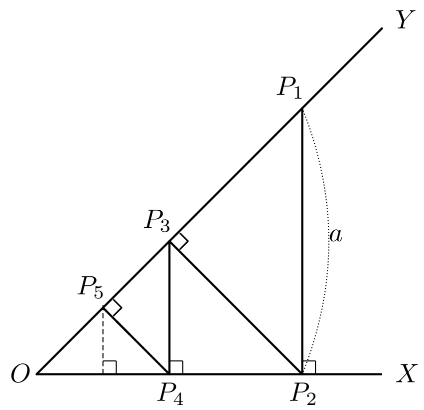
(a) $\dfrac{3}{1}$, $\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{7}{7}$, $\dfrac{9}{10}$, $\dfrac{11}{13}$, $\cdots\cdots$

(b) $\sqrt{2}-\sqrt{1}$, $\sqrt{4}-\sqrt{2}$, $\sqrt{6}-\sqrt{3}$, $\cdots\cdots$

(2) 図において，$\angle XOY=\pi/4$, P_1P_2 の長さを a とする．OY 線上の点 P_1 から，OX 線上に垂線を下ろした点を P_2 とする．さらに点 P_2 から OY 線上に垂線を下ろし，その点を P_3 とする．同様に順次 , P_4 , P_5 , $\cdots\cdots$ を無限にとるものとする．このとき，次の問いに答えよ.

(a) 垂線（線分）の和を級数で示せ.

(b) 垂線（線分）の和を求めよ.



(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$ を求めよ.

(豊橋技科大 1999) (m19992704)

0.441 次の極限値を求めよ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+4+6+\cdots+2n}{n^2}\right)$

(豊橋技科大 2001) (m20012707)

0.442 以下に示す関数について次の問いに答えよ. $f(x)=xe^{-x}$

(1) 関数 $f(x)$ を微分せよ.

(2) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点を求め，増減表を作成せよ．また，$y=f(x)$ の概形を描け.

(3) 関数 $f(x)$ の表す曲線と x 軸と $x=q$ $(q>0)$ の直線とで囲まれる図形の面積を $S(q)$ とする．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{q\to\infty}S(q)$ を求めよ.

(豊橋技科大 2006) (m20062706)

0.443 (1) $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は次の式で計算される．

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

この関係を用いて，以下に示す関数のラプラス変換を求めよ．

ただし，以下の計算では，$(\mathrm{Re}[s] > 0)$ とする．

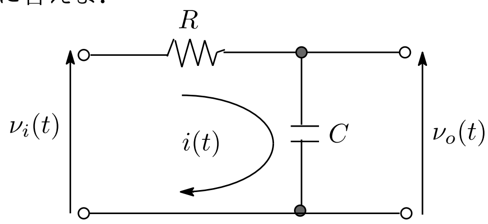
(a) $f(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$ ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$

(b) $f(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(c) $f(t) = t\,u(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(d) $f(t) = e^{-\alpha t}u(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t \geq 0 \quad (\alpha > 0) \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(2) 右図に示すように直列 RC 回路について以下の問いに答えよ．



(a) 図に示すように，入力電圧を $\nu_i(t)$，出力電圧を $\nu_o(t)$，ならびに，電流を $i(t)$ とするとき，これらの関係を示す回路方程式を記述せよ．

ただし，$t = 0$ のとき，$\nu_o(t) = 0$ である．

(b) $\nu_i(t)$, $\nu_o(t)$ ならびに $i(t)$ のラプラス変換を，それぞれ $V_i(s)$, $V_o(s)$ そして $I(s)$ と表すものとする．このとき，(a) で求めた回路方程式をラプラス変換して，次の伝達関数 $G(s)$ を求めよ．

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

(c) $\nu_i(t)$ が次のように与えられるとき

$$\nu_i(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

出力電圧 $\nu_o(t)$ のラプラス変換 $V_o(s)$ を求めよ．

(d) $V_o(s)$ をラプラス逆変換して出力電圧 $\nu_o(t)$ を求めよ．

(e) $G(s)$ をラプラス逆変換して，インパルス応答 $g(t)$ を求めよ．

(f) インパルス応答 $g(t)$ を用いて，(c) で定義した入力電圧があるときの出力電圧 $\nu_o(t)$ を求めよ．

(豊橋技科大 2006) (m20062708)

0.444 二つの封筒 A, B と，1 から 9 までの番号のいずれか一つが記されたカードの集合がある．封筒 A には，1 から 9 までそれぞれ 1 枚ずつ全部で 9 枚のカードを入れる．封筒 B には，1 から 9 までそれぞれ m 枚 $(m \geq 1)$ ずつ全部で $9m$ 枚のカードを入れる．以下の問いに答えよ．

(1) 封筒 A から無作為に 2 枚のカードを引くとき，その組み合わせが 1 と 2 である確率を求めよ．

(2) 封筒 B から無作為に 2 枚のカードを引くとき，その組み合わせが 1 と 2 である確率を求めよ．

(3) 封筒 A から引いた 2 枚のカードの番号の組み合わせと，封筒 B から引いた 2 枚のカードの番号の組み合わせが一致する確率を，$m = 3$ および $m \to \infty$ の場合について求めよ．

(4) 封筒 A と封筒 B それぞれから無作為に n 枚 $(1 \leq n \leq 9)$ ずつカードを引く．A から引いたカードと B から引いたカードの両方に，同じ番号のカードが少なくとも 1 枚含まれるための必要十分条件を，m と n を用いて示せ．

(豊橋技科大 2007)　　(m20072705)

0.445 (1) 次の関数の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$

(2) 次の関数を微分せよ．ただし，$x \neq 0$ とする．　$\exp\left(-\sin\dfrac{1}{x}\right)$

(3) 次の関数を微分せよ．ただし，$x \pm a \neq 0$ とする．　$\log\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$

(豊橋技科大 2009)　　(m20092701)

0.446 定積分 $I(n,a)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}x^{2n}\,dx$ について以下の問いに答えよ．ただし，n は 0 または正の整数，a は実数とする．

(1) $n=0,\ a=1$ のとき，$I(0,1)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ である．

$a>0$ のとき，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ であることを証明せよ．

(2) 問 (1) の結果を用いて定積分 $I(n,a)$ を n と a の関数として表せ．ただし，n は 1 以上とする．

(豊橋技科大 2009)　　(m20092702)

0.447 赤い玉, 白い玉, 青い玉を不透明な袋の中に入れる. 以下の問いを読んで, 既約分数で答えよ.

(1) 袋の中に赤い玉 3 個, 白い玉 5 個, 青い玉 8 個が入っている.

(a) 袋の中から玉を 1 個取り出し, 色を確認してから袋に戻す. 袋の中をよくかき混ぜてから, 改めて玉を 1 個取り出したとき, 取り出された玉が最初に取り出した玉と同じ色である確率を答えよ.

(b) 袋の中から玉を 2 個同時に取り出すとき, 取り出された玉が赤 1 個と白 1 個である確率を答えよ.

(c) 袋の中から玉を 2 個同時に取り出すとき, 取り出された玉が異なる色である確率を答えよ.

(2) 袋の中に赤い玉 $3n$ 個, 白い玉 $5n$ 個, 青い玉 $8n$ 個が入っている（n は自然数）. この袋の中から玉を 2 個同時に取り出すとき, 取り出された玉が同じ色である確率を $p(n)$ と表すことにする. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}p(n)$ を答えよ.

(豊橋技科大 2010)　　(m20102701)

0.448 (1) 次式が成り立つような定数 a の値を求めよ.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x+a-\sqrt{x^2+x+1}\right)=1$$

(2) 次の関数を微分せよ.

$$f(x)=\log\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

(豊橋技科大 2011)　　(m20112705)

0.449 関数の増大を示す最も基本的なものとして次の等式がある．

「 任意の整数 $m>0$ に対して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^m}{e^x}=0$ 」

この等式は関数の増大について何を示しているのか．また，この等式が成立する理由を説明せよ．

(名古屋大 1999)　　(m19992801)

0.450 つぼ U には白球 1 個と黒球 1 個の計 2 個, つぼ V には白球 2 個と黒球 1 個の計 3 個が入っている. 各つぼから 1 球ずつ取って, U のつぼから取った球は V のつぼへ, V のつぼから取った球は U のつぼへ入れる手続きを n 回行なうとき, U に白球が 2 個ある確率を p_n，白球 , 黒球が 1 個ずつある確率を q_n，黒球が 2 個ある確率を r_n とする. 以下の問に答えよ.

(1) p_1, q_1, r_1 を求めよ.

(2) p_n, q_n, r_n を p_{n-1}, q_{n-1}, r_{n-1} を用いて表せ.

(3) この手続きを無限回行なうと確率 p_n, q_n, r_n がそれぞれ一定値 p, q, r になること（すなわち, $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, $\lim_{n\to\infty} q_n = q$, $\lim_{n\to\infty} r_n = r$）が分かっているとする. このとき p, q, r の値を求めよ.

(名古屋大 2005)　　(m20052805)

0.451 水 1ℓ を 2 つの瓶 A, B に適当に分け，瓶 A, 瓶 B に入っている水の量をそれぞれ x_0, y_0 とする.

「瓶 A 中の水の 1 割と，瓶 B 中の水の 2 割を，それぞれ小瓶 C, D へ抜き取り，小瓶 C の水を瓶 B に，小瓶 D の水を瓶 A へ入れる」という手続きを n 回繰り返した後，瓶 A, 瓶 B に入っている水の量をそれぞれ x_n, y_n とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) x_n, y_n を次のように行列を用いた漸化式で表すとき，行列 T を求めよ.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

(2) 行列 T の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(3) x_n, y_n を，x_0, y_0 および n を用いて表せ.

(4) $n \to \infty$ としたときの，x_n/y_n の値を求めよ.

(名古屋大 2008)　　(m20082801)

0.452 次の行列 A を考える.

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) A の全ての固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ．なお固有ベクトルの大きさは 1 とする.

(2) 定数 a, b, c, d に対して，$aA^4 + bA^3 + cA^2 + dA$ は単位行列となった．a, b, c, d を一組求めよ.

(3) 大きさが 1 のベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ に A^k を乗じた $A^k\boldsymbol{v}$ を考える．ここで k は正の整数である.

(i) $A^k\boldsymbol{v}$ を v_1, v_2 を用いて表せ.

(ii) $k \to \infty$ としたとき，$A^k\boldsymbol{v}$ の大きさの最大値を示し，それを与える $\boldsymbol{v}$ をすべて求めよ.

(名古屋大 2018)　　(m20182805)

0.453 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ の値を求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ の値を求めよ.

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ の値を求めよ.

(4) $I_n = \displaystyle\int (\log x)^n\,dx$ の漸化式を導き，I_3 を求めよ．なお，n は 0 以上の整数とする.

(名古屋大 2022)　　(m20222803)

0.454 次の 2×2 の行列 A について以下の問に答えよ．本問題において，ベクトルは 2 次元の縦ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を意味する.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(1)　A の固有値とそれぞれの固有値に対する一つの固有ベクトルを求めよ．

(2)　(1) で求めた固有値と固有ベクトルを用いて行列 E と B を適当に定め，行列 A を

$$A = EBE^{-1}$$

の形で表せ．ここで，E^{-1} は E の逆行列で B は $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ のような形である．

(3)　(2) で定めた E と B を用いて，A^n はどのように表すことができるか．ここで，A^n は n 個の A を掛け合わせたものである．
（ヒント）まず，$A = EBE^{-1}$ の表現を用いて A^2 がどのようになるかを調べよ．

(4)　ベクトル全体の集合を V と書く．V の任意の二つの要素 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$，$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$，に対して，

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

とする．ベクトルの列 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \cdots$ が一つのベクトル $\mathbf{x}$ に対して，

$$\lim_{n \to \infty} d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) = 0$$

を満たすとき，この列は $\mathbf{x}$ に収束すると言う．
$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ を一つのベクトルとし，行列 A を用いて，
$\mathbf{a}, A\mathbf{a}, A^2\mathbf{a}, A^3\mathbf{a}, \cdots$ なる列をつっくたとき，この列が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に収束ことを示せ．(3) で求めた A^n の表現を用いよ．

(名古屋工業大 1997)　　(m19972904)

0.455　関数 $f(x,y)$ が

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\ , & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0\ \ , & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

で与えられるとき，重積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy$$

を求めよ．

(名古屋工業大 1998)　　(m19982905)

0.456　次の積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1} x}{1 + x^2}\, dx$

(名古屋工業大 1999)　　(m19992901)

0.457　(1)　二次元平面上の第一象限において $0 \leq x^2 + y^2 \leq R$ によって定められる部分を A とする．次の A 上での重積分を求めよ．$a > 0$ とする．

$$\iint_A e^{-(ax)^2 - (ay)2} dx\ dy$$

ただし，次の変数変換を用いて計算を行うこと．

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

(2)　(1) で求めたことを用いて次の積分を求めよ．

$$\int_0^{+\infty} e^{-(ax)^2} dx$$

(名古屋工業大 1999)　　(m19992904)

0.458 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{1+x+x^2})$

(名古屋工業大 2000) (m20002901)

0.459 $\Gamma(a)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx$ をガンマ関数という．

(1) $a>0$ のとき，$\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$ が成り立つことを示せ．

(2) a が自然数である時，$\Gamma(a)=(a-1)!$ が成り立つことを示せ．

(名古屋工業大 2000) (m20002903)

0.460 (1) 級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$ を求めよ．

(2) $\log(1+t)=t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{n}+\cdots$ ， $-1<t\leq 1$ を利用して，
関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+x}{3-x}\right)$ を $x-1$ のべき級数に展開せよ．

(名古屋工業大 2006) (m20062905)

0.461 関数 $f(x)$ が $[0,\infty)$ において微分可能で，次の微分方程式を満たす．

$$f'(x)-\frac{1}{x+1}f(x)=(x+1)^2e^x$$

このとき，

(1) 微分方程式の一般解 $f(x)$ を求めよ．

(2) 初期条件 $f(0)=1$ を満たす特殊解 $f(x)$ を求めよ．

(名古屋工業大 2009) (m20092907)

0.462 無限級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+4}$ を求めよ。

(名古屋工業大 2011) (m20112906)

0.463 微分方程式 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ は，条件 $\dfrac{\partial}{\partial y}P(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}Q(x,y)$ を満たすとき，完全形という．関数 $f(x)$ は $(0,\infty)$ で微分可能 かつ $f(\pi)=1$ である．微分方程式

$$\Big(\sin x-f(x)\Big)\frac{y}{x}\,dx+f(x)\,dy=0\ ,\quad x>0$$

は完全形とするとき，次の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) 微分方程式の一般解を求めよ．

(名古屋工業大 2012) (m20122908)

0.464 次の問いに答えよ．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$ の値を求めよ．

(2) 関数 $F(x)$ が $F(x)=\displaystyle\int_1^{\sqrt{x}}\left(2-\frac{1}{3t}\right)dt$， $x>0$ によって定義される．このとき，$F(x)$ の増減範囲を調べ，極値を求めよ．

(名古屋工業大 2013)　　(m20132907)

0.465 (1) 次の不定積分を求めよ．　$\displaystyle\int\frac{dx}{3+\cos x}$

(2) 次の広義積分が収束するかどうか判定せよ．　$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+1}}$

(名古屋工業大 2020)　　(m20202902)

0.466 確率分布が以下の (1),(2) の場合について，確率変数 X の定める分布関数 $F(x)$ と $\alpha>0$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{F(x)-F(x-\alpha)\}\,dx=\alpha$$

が成り立つことを示せ．

(1) $P(X=0)=p>0,\ P(X=1)=q>0,\ p+q=1$ の場合．

(2) 確率変数 X が連続型で，密度関数 $f(x)$ をもつ場合．

（愛知県立大 2000）　　(m20003004)

0.467 関数 $y=f(x)=\sqrt[3]{x^2(x+3)}$ について，以下の問に答えなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\{y-(mx+b)\}=0$ となるように，係数 m,b の値を決定しなさい．極限値を求めるときには，途中の計算過程もわかるようにしなさい.「$x=1/t$ への変形，テイラー展開，ロピタルの定理」等の工夫のうち，一部，または全部の工夫をすることにより，答えを求める方法もある．

(2) (1) で求めた直線 $y=mx+b$ は，一般に何と呼ばれるか？答えなさい.（漢字で書くと，より望ましい）．

(3) $f(x)$ を 1 回微分，2 回微分した式を，それぞれ，求めなさい．

(4) (1)〜(3) をもとに，$f(x)$ のグラフの概形を書きなさい．途中の手順も示しなさい．また，極大値，極小値，変曲点，x 軸，y 軸との交点などが，もしあれば，それぞれ，その座標をグラフ中に示しなさい．

(三重大 2003)　　(m20033101)

0.468 (1) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ であることを導け. ただし, $\alpha>0$ とする.

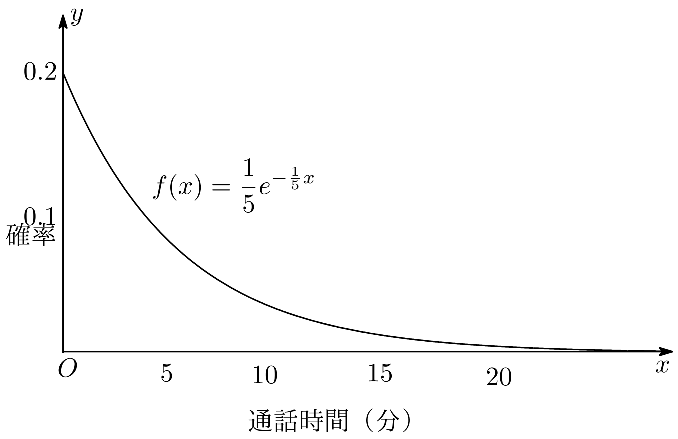
(2) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\alpha x^2}dx$ を求めよ．

(三重大 2005)　　(m20053111)

0.469 ある人の電話の通話時間 x(分) との頻度確率との関係（確率分布）が

$$f(x)=\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}\qquad(\ x>0,\ e\ \text{は自然対数の底})$$

で表されるものとする時，次の (1)〜(5) の問いに答えなさい．



(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ の値を求めなさい．

(2) 通話時間が 10 分である（ちょうど 10 分後に通話が終了する）確率を求めなさい．

(3) 通話が 10 分以内に終了する確率を求めなさい．

(4) 通話を始めてから 10 分が経過している時点において，さらにその後 10 分以内に通話が終了する確率を求めなさい．

(5) この人の平均通話時間を求めなさい。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \cdot e^{-ax} = 0$，$(a > 0)$ である．

（三重大 2006）　　(m20063109)

0.470　正の整数 N を 8 進数で表した時，n 桁の数になったとする．

(1) N の取り得る最大値と最小値（例えば，$n = 2$ に限れば，$8 \leqq N \leqq 63$）を n を用いて表せ．（答のみの記載でも良い）

(2) (1) の結果を用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 N}{n}$ を求めなさい.（途中経過を，詳しく答案用紙に記載せよ.）

（三重大 2006）　　(m20063114)

0.471　(1) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ であることを導け．ただし，$\alpha > 0$ とする．

(2) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx$ を求めよ．

（三重大 2006）　　(m20063119)

0.472　次の極限および級数を求めよ．（ただし，答だけでなく，なぜそうなるのかの説明も必要である．）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-an}$　　（ただし，$a > 0$）

（三重大 2008）　　(m20083103)

0.473　$p(x) = 2xe^{-x^2}$，　$q(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$ とする時，　$f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p(t) \cdot q(t - x)dt$ のグラフの概要を下の xy 平面に描きなさい．グラフの概要には最大値や変曲点を明示すること．

（三重大 2009）　　(m20093102)

0.474　以下の積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^2 6x^5 - \frac{2}{x}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty 9x^2 e^{-3x} dx$

(三重大 2009)　　(m20093108)

0.475 次の積分の値を求めなさい. ただし, 定数 a は $a > 0$, e は自然対数の底とする.

$$\int_0^\infty xe^{-ax^2}\, dx$$

(三重大 2010)　　(m20103108)

0.476 (1) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty \exp(-ax^2)\, dx$ としたとき, I^2 を極座標を用いて計算し $I = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$ となることを示せ.

ただし, $a > 0$ とする. 次に $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^2 \exp(-x^2)\, dx$ の値を求めよ.

(2) $f(z) = \displaystyle\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$ とするとき, n を 0 または正の整数として

(i) $f(n+1) = n!$,　　(ii) $f(n+\frac{1}{2}) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$　　となることを示せ.

(三重大 2010)　　(m20103112)

0.477 以下の (1) については不定積分を, (2) と (3) については積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{4x+1}{4x^2+2x+6}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty t^2 e^{-at} dt$

(3) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

(三重大 2012)　　(m20123102)

0.478 (1) $y = f(x)$ と 2 直線 $x = a$, $x = b$ と x 軸で囲まれる面積は，次式の定積分の定義により求めることができる.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \triangle x$$

ただし，$f(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続とし，$\triangle x = (b-a)/n$, $x_k = a + k\triangle x$ とする．上記の積分の定義を用いて，$\displaystyle\int_0^1 xdx$ を求めなさい．ただし，導出過程も示すこと.

(2) 問 (1) の定積分の定義を用いて,

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots\cdots + \frac{1}{2n}\right)$ を求めなさい.

(三重大 2015)　　(m20153101)

0.479 微分方程式 $0 = dy + aydx$ で表される関数 $y = f(x)$ について以下の (1)〜(3) の問いに解答せよ．ただし，a は実数で $a > 0$ とする.

(1) $f(0) = a$ の時，与えられた微分方程式を解き，$f(x)$ を x のみの関数として表せ.

(2) $g(x) = xf(x)$ とする時，極値や変曲点を示して $y = g(x)$ のグラフの概形を描け.

(3) 以下の極限値を求めよ.

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^\infty g(x)dx}{\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx}$$

(三重大 2017)　　(m20173113)

0.480　時間 t の関数 $f(t) = p(1 - e^{-qt})$ について，以下の問いに答えよ．ただし，p, q は正の実数である．

(1)　$g(t) = \displaystyle\int_0^t f(t)dt$ を求めよ．

(2)　$\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t)$ を求めよ．

(3)　$0 \leqq t$ に対する $f(t)$ の変化を図示せよ．ただし $\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t)$ がどうなるかも図示すること．

(4)　$0 \leqq t$ に対する $g(t)$ の変化を図示せよ．ただし $\displaystyle\lim_{t\to\infty} g(t)$ がどうなるかも図示すること．

(5)　$f(t)$ が満たす微分方程式を求めよ．

(三重大 2018)　　(m20183103)

0.481　以下の極限値を求めなさい．

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m^5} \sum_{n=1}^{m} n^4$$

(三重大 2022)　　(m20223108)

0.482　$\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \ (s > 0)$ に対して以下の等式を証明せよ．

(1)　$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$　　(2)　$\Gamma(n) = (n-1)!$　（n は正の整数）

(2)　$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$　（必要ならば $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$を使ってもよい）

(奈良女子大 2001)　　(m20013205)

0.483　$y(\rho)$ に関する 2 階の常微分方程式

$$\frac{d^2 y(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dy(\rho)}{d\rho} + \left\{1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right\} y(\rho) = 0$$

を考える. ここで, 変数 ρ の範囲は，$0 \leq \rho < \infty$ であり，l は正の整数である．

(1)　いま，$y(\rho)$ を

$$y(\rho) = \frac{u(\rho)}{\rho}$$

とおいて, この方程式に代入すると，$u(\rho)$ についての方程式

$$\frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} + p(\rho)u(\rho) = 0 \qquad (a)$$

が得られる. このときの $p(\rho)$ を求めよ．

(2)　つぎに，(1) で得られた方程式 (a) の $\rho \to \infty$ および $\rho \to 0$ の極限における $u(\rho)$ の漸近解を求めてみよう．

(a)　$\rho \to \infty$ のとき $p(\rho)$ 近似形を求め, $u(\rho)$ の漸近形が満たす方程式をかけ. また, このときの $u(\rho)$ は, λ をパラメータとして

$$u(\rho) = e^{\lambda\rho}$$

の形で与えられる. この方程式から λ を求め, $u(\rho)$ の一般解を求めよ．

(b)　$\rho \to 0$ のとき $p(\rho)$ 近似形を求め, $u(\rho)$ の漸近形が満たす方程式をかけ. また, このときの $u(\rho)$ は, λ をパラメータとして

$$u(\rho) = \rho^{\lambda}$$

の形で与えられる. この方程式から λ を求め, $u(\rho)$ の一般解を求めよ．

(奈良女子大 2004)　　(m20043205)

0.484 関数 $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+4}$ に関して次の問いに答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ.

(奈良女子大 2007) (m20073202)

0.485 a を正の定数とする. $xy-$ 平面上の 2 つの曲線

$$C_1 \ : \ y=-\frac{x^2}{2}+a \quad (-\infty<x<\infty),$$
$$C_2 \ : \ y=-\log x \quad (\ x>0\ )$$

について考える. いまこれらの曲線はただ 1 つの共有点を持つとする. 次の問いに答えよ.

(1) a の値を求めよ.

(2) 直線 $y=a$ と C_2 の交点の座標を求めよ.

(3) C_1 , C_2 と直線 $y=a$ で囲まれる図形の面積を求めよ.

(奈良女子大 2007) (m20073203)

0.486 関数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x(x-1)}+\dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)} \quad (x\neq 0,1,2)$ に関して次の問いに答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ.

(奈良女子大 2008) (m20083202)

0.487 関数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ に関して次の問いに答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ.

(奈良女子大 2009) (m20093202)

0.488 F_n が次のように定義されているとする.

$$F_n \equiv \int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx$$

このとき, 以下の問いに答えよ. ただし, n は正の整数である.

(1) F_1 を求めよ.

(2) n が 2 より大きいときの漸化式は次のようになることを示せ.

$$F_n=\frac{n-1}{2}F_{n-2}$$

(奈良女子大 2009) (m20093206)

0.489 関数 $f(x)=\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})\ \ (x>0)$ に関して次の問に答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ.

(奈良女子大 2010) (m20103202)

0.490 次の定積分 I に関する以下の問いに答えよ.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$$

(1) 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx$$

(2) 変数を変えることで, I^2 は次のように書けることを示せ.

$$I^2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$$

(3) この 2 次元積分は直交座標 (x, y) から極座標 (r, θ) に変換することで求めることができる. 積分を実行して I^2 を求め, $I = \sqrt{\pi}$ であることを示せ.

ただし, $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ であり, $dxdy = rdrd\theta$ である.

(奈良女子大 2010)　　(m20103204)

0.491 次の定積分を求めよ. ただし, $a,\ b$ は正の定数であるとする.

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin(bx)\, dx$$

(奈良女子大 2010)　　(m20103207)

0.492 関数 $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+2x+1}$ に対して, 次の問に答えよ.

(1) 極限値 $\lim_{x\to 0} f(x)$ および $\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ.

(奈良女子大 2011)　　(m20113202)

0.493 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-ax} dx \quad (a > 0)$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha}\log x\, dx \quad (\alpha > -1)$

(奈良女子大 2011)　　(m20113205)

0.494 次の積分を求めよ. ただし, a は実定数である.

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \exp(-ax)dx \qquad (a \neq 0)$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi+a}^{\pi+a} \sin(mx)\sin(nx)\, dx \qquad (m, n$ は正の整数$)$

(奈良女子大 2012)　　(m20123202)

0.495 関数 $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$ に対して, 次の問に答えよ.

(1) 極限値 $\lim_{x\to 0} f(x)$ および $\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ.

(奈良女子大 2012)　　(m20123207)

0.496 関数 $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}\ \ (x > -1)$ に対して, 次の問に答えよ.

(1) 極限値 $\lim_{x\to 0} f(x)$ および $\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ.

(奈良女子大 2013)　　(m20133202)

0.497 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

(奈良女子大 2013)　　(m20133205)

0.498 次の積分を求めよ．ただし，a は正の実定数である．

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos x dx$

(奈良女子大 2014)　　(m20143202)

0.499 以下の級数の収束，発散を判定せよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

(奈良女子大 2014)　　(m20143206)

0.500 次の積分を求めよ．ただし，a は正の定数，n は正の整数である．

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} r^3 \exp\left(-ar^2\right) dr$ 2　　(1) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^n x\,\cos x\,dx$

(奈良女子大 2015)　　(m20153202)

0.501 関数 $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $(-\infty < x < \infty)$ に対して，次の問に答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次導関数を求めよ．

(奈良女子大 2015)　　(m20153207)

0.502 初項 $a_1 = \sqrt{2}$ であり，次の漸化式を満たす数列 $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．

$$a_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{a_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

数学的帰納法を用いて，次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，不等式 $a_n < 2$ を示せ．

(2) 数列 $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加であることを示せ．

(奈良女子大 2016)　　(m20163203)

0.503 正の実数 a に対して，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ が成り立つことを利用して，

定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-1)^2 e^{-a(x^2-2x)}dx$ を計算せよ．

(奈良女子大 2016)　　(m20163206)

0.504 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$a_1 = 1\,, \qquad a_n = \frac{a_{n-1}+2}{a_{n-1}+1} \quad (n \geq 2)$$

と定められている．以下の問いに答えよ．

(1) a_2, a_3 を求めよ．

(2) $n \geq 2$ に対し　$a_n - \sqrt{2} = -\dfrac{\sqrt{2}-1}{a_{n-1}+1}(a_{n-1} - \sqrt{2})$ が成り立つことを示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ を示せ.

(奈良女子大 2017)　　(m20173202)

0.505 $x \geq 0$ 定義された関数 $f(x) = e^{-x}\sin x$ ついて，以下の問いに答えよ.

(1) f の増減おいび凹凸を調べ，$y = f(x)$ のグラフの概形を書け.

(2) f の最大値を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_0^\infty |f(x)|dx < \infty$ であることを示せ.

(4) $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を求めよ.

(奈良女子大 2017)　　(m20173203)

0.506 (1) 関数 $f(x) = \arctan\left(\dfrac{2}{x}\right)$ を x で微分せよ.

(2) 関数 $f(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$ を考える．ここで，ω_0，γ は正の実定数とする．以下の問いに答えよ;

(a) 極限値 $\displaystyle\lim_{\omega\to\infty} f(\omega)$ を求めよ.

(b) $\omega > 0$ の範囲で，$f(\omega)$ が極大をもつために満たすべき ω_0 と γ に対する条件式を求めよ．またその時の ω を求めよ.

(奈良女子大 2017)　　(m20173204)

0.507 $a < b$ となる正の実数 a, b に対して，数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次で定義する.

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, \quad b_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$$

以下の問いに答えよ.

(1) $n \geqq 2$ に対し，$a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1}$ が成り立つことを示せ.

(2) $n \geqq 2$ に対し，$b_n - a_n < \dfrac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}$ が成り立つことを示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ となる実数 α が存在することを示せ.

(奈良女子大 2018)　　(m20183202)

0.508 a を正の定数として，$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \exp(-ax^2)dx$ の値を以下の手順で求めよう.

$$I = \int_{-\infty}^\infty \exp(-ax^2)dx = \int_{-\infty}^\infty \exp(-ay^2)dy$$

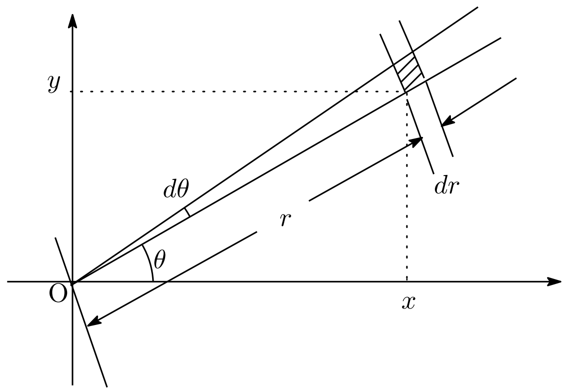
であるから，

$$I^2 = \int_{-\infty}^\infty \exp(-ax^2)dx \int_{-\infty}^\infty \exp(-ay^2)dy = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp\left[-a(x^2+y^2)\right] dxdy$$

という面積分を実行し，その結果の平方根をとればよい．このとき，点 (x, y) の位置ベクトルを $\overrightarrow{r}$ として，$r = |\overrightarrow{r}|$，$\overrightarrow{r}$ と x 軸のなす角を θ とおく.

(1) x および y を r と θ の式で表せ.

(2) 下図の斜線部の微小面積を，r, dr, θ, $d\theta$ のうち必要なものを用いて表せ．



(3) I^2 を xy 直交座標による面積分から r と θ で表される極座標での面積分に変換せよ．

(4) 前問の面積分を実行し，それにより I の値を求めよ．

(奈良女子大 2018) (m20183205)

0.509 r を $|r| < \dfrac{1}{2}$ をみたす実数とする．実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ が，任意の自然数 n に対し以下の関係式をみたすとする．

$$a_{n+1} = r(b_n + c_n), \quad b_{n+1} = r(c_n + a_n), \quad c_{n+1} = r(a_n + b_n)$$

以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n + c_n) = 0$ となることを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) = 0$ となることを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となることを示せ．

(奈良女子大 2019) (m20193202)

0.510 p を $0 < p < 1$ をみたす実数とする．行列 A および数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \ a_1 = 1, \ b_1 = 0, \ \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \ (n \geqq 2)$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) $k \geqq 1$ に対し，A^k を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$ であることを示せ．

(奈良女子大 2022) (m20223202)

0.511 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ を求めよ． (2) $\displaystyle\lim_{M\to\infty}\int_0^M f(x)dx$ を求めよ．

(奈良女子大 2022)　　(m20223204)

0.512 関数 $f(z)$ を次のように定義する．

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{e^z - 1} & (z \neq 0) \\ 1 & (z = 0) \end{cases}$$

この関数は $|z| < 2\pi$ において解析的である．テイラー展開を

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

のように表し，ベルヌーイ数 B_n , $n = 0, 1, 2, \cdots$ を定義する．$B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$ を示せ．さらに，$(e^z - 1)f(z) = z$ のべき級数展開から，B_n が次の漸化式を満たすことを示せ．

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0$$

ただし，$\dbinom{n}{k}$ は 2 項係数を表す．

(京都大 2002)　　(m20023305)

0.513 N を 0 または正の整数をとる確率変数とする．ポアソン分布では $N = n$ となる確率が次の分布関数で与えられる．

$$p(N = n) = a^n e^{-a}/n!$$

(1) ポアソン分布の平均値 $< n >= \sum_0^{\infty} np(N = n)$ が a となることを示せ．

(2) 面積 S の運動場に全部で M 粒の雨滴が落ちたとする．運動場の微少な部分（面積 A）に落ちた雨滴の数を L とするとき，その確率分布 $p(L = l)$ は $p = A/S$ として次の 2 項分布で与えられる．

$$p(L = l) = [M!/l!(M - l)!]p^l(1 - p)^{M-l}$$

$a = (M/S)A$ を導入し，適切な極限を考えることにより 2 項分布からポアソン分布を導け．

(京都大 2002)　　(m20023307)

0.514 次のラプラスの積分を考える．　$I(a) = \displaystyle\int_0^{\infty} \exp[-x^2] \cos 2ax \, dx$　以下の問に答えよ．

(1) 平面の直角座標 (x, y) から極座標 (r, θ) への変換公式を用いて，$x^2 + y^2$ および $dxdy$ を極座標で表せ．

(2) 積分 $I(0)$ の値は $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ と求められることを，$I(0)^2$ を計算して示せ．

(3) 積分 $I(a)$ の値を求めよ．例えば，$I(a)$ を a に関して微分してみる．

(京都大 2006)　　(m20063304)

0.515 (1) 複素数 w に対して，級数

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=1}^{\infty} (-w)^{n-1} , \quad (|w| < 1) \ \cdots ①$$

の両辺を $w = 0$ から $w = z$ まで積分することで，複素関数 $\mathrm{Log}(1 + z)$ を $z = 0$ において，テイラー展開せよ．ただし，$\mathrm{Log}(1 + z)$ は $-\pi <\mathrm{Im} \log(1 + z) \leq \pi$ なる $\log(1 + z)$ の主値を表す．級数 ① の項別積分可能性は明らかとしてよい．

(2) 任意の複素数 z について

$$\lim_{n\to\infty} n\mathrm{Log}\left(1+\frac{z}{n}\right)=z\ \cdots ②$$

を示せ.

(3) ② を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^z$ を示せ.

(京都大 2006) (m20063307)

0.516 $x>0$ に対して $\displaystyle\log x=\int_1^x\frac{1}{t}\,dt$ と定義して, $\log x$ の性質を定積分の性質から導きたい. (1)〜(2) に答えよ.

(1) 定積分の性質を用いて, 等式 (a)〜(d) を示せ.

(a) $\log x_1x_2=\log x_1+\log x_2 \qquad (x_1,x_2>0)$

(b) $\displaystyle\log x^{\frac{n}{m}}=\frac{n}{m}\log x \qquad (m,n$ は正整数$)$

(c) $\displaystyle\log e=1 \qquad \left(e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$

(d) $\displaystyle\frac{d}{dx}\log x=\frac{1}{x}$

(2) 上で定義した $\log x$ の逆関数を $\exp(x)$ とするとき, 以下の等式 (e)〜(h) を示せ.

(e) $\exp(x_1+x_2)=\exp(x_1)\exp(x_2)$

(f) $\exp(1)=e$

(g) $\displaystyle\exp\left(\frac{n}{m}\right)=e^{\frac{n}{m}} \qquad (m,n$ は正整数$)$

(h) $\displaystyle\frac{d}{dx}\exp(x)=\exp(x)$

(京都大 2008) (m20083301)

0.517 関数

$$f(x)=\frac{1}{x^2-a-ibx}$$

について, 以下の設問に答えよ. ただし, x は実変数, a と b は正の実定数, $i=\sqrt{-1}$ である.

(1) $f(x)$ を変形して

$$f(x)=A\left(\frac{1}{x-z_1}-\frac{1}{x-z_2}\right)$$

としたとき, z_1 および z_2 を求め, 複素平面上に図示せよ. ただし, A, z_1, z_2 は複素数の定数である.

(2) ζ を実数とし, 積分

$$I(\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-\zeta}\,dx$$

のコーシーの主値, すなわち

$$I(\zeta)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{\zeta-\varepsilon}\frac{f(x)}{x-\zeta}\,dx+\int_{\zeta+\varepsilon}^{\infty}\frac{f(x)}{x-\zeta}\,dx\right) \qquad ①$$

を考える. 式 ① の積分路は実数軸上にあるが, 図 1 で示した複素平面内における積分路 C_1, C_2, C_3 に沿った複素積分を利用することにより, $I(\zeta)$ を求めることができる. ここで, C_1 は原点を中心とした半径 R の下半円周, C_2 は ζ を中心とした半径 ε の下半円周, C_3 はこれらの半円周とそれらを結ぶ実数軸の線分で構成される閉曲線であり, いずれも図中の矢印に沿って積分するものとする.

(a) C_1 に沿った積分路の $R\to\infty$ での極限値を求めよ.

(b) ε が十分小さいとき，C_2 に沿った積分値を求めよ．

(c) C_3 に沿った積分値を求めよ．

(d) 以上の結果から，$I(\zeta)$ を求めよ．

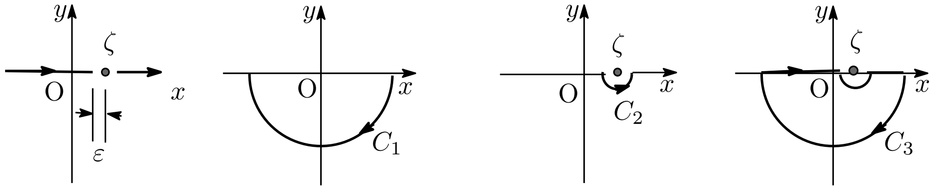


図 1　左から順に，式 ① の積分路，C_1, C_2, C_3 を示す．

(京都大 2008)　　(m20083305)

0.518　平面 $\boldsymbol{R}^2$ の座標系 (x, y) と実数値のパラメータ t を用いて表される曲線

$$C\ :\ \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

について以下の (1)〜(4) に答えよ．

(1) 曲線 C とその x 軸に平行な接線との接点の座標を求めよ．また，y 軸に平行な接線との接点の座標を求めよ．

(2) 曲線 C が自分自身と交差する点の座標を求めよ．さらに，その交点において 2 本ある曲線 C の接線の傾きを求めよ．

(3) (1),(2) の結果を用い，さらに $t \to \pm\infty$ のときの様子に注意して，曲線 C の概形を描け．

(4) 曲線 C によって囲まれる領域の面積を求めよ．

(京都大 2009)　　(m20093301)

0.519　半径 a の円に内接する正 n 辺形の面積を A_n, 外接する正 n 辺形の面積を B_n とおく. 半径 a の円の面積を C として，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{C - A_n}{B_n - C}$ を求めよ．（3 角関数のテイラー展開は既知として使ってよい．）

(京都大 2010)　　(m20103302)

0.520　確率密度 X の確率密度関数が $f(x)$ で与えられているとき, 積率母関数 $M_X(t)$ を $M_X(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$ で定義する．また, 2 つの関数 $p(x)$, $q(x)$ の合成積 $p * q(x)$ を $p * q(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p(u)q(x-u)du$ で定義する. 以下の (1)〜(3) に答えよ. ただし, 計算に必要となる確率密度関数の積分に関する仮定は適宜用いてよい.

(1) 確率変数 X, Y は互いに独立で, 同時確率密度関数が $f(x)g(y)$ で与えられているとする. このとき, 確率変数 $Z = X + Y$ の確率密度関数 $h(z)$ が $h(z) = f * g(z)$ で与えられることを示せ.

(2) 独立な確率変数 X, Y に対し, $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$ がなりたつことを示せ.

(3) 確率変数 X の平均 m_X と分散 σ_X^2 は, それぞれ次のように与えられることを示せ.

$$m_X = \left.\frac{dM_X}{dt}\right|_{t=0}\ ,\ \sigma_X^2 = \left.\frac{d^2 M_X}{dt^2}\right|_{t=0} - \left(\left.\frac{dM_X}{dt}\right|_{t=0}\right)^2$$

(京都大 2010)　　(m20103303)

0.521　複素関数

$$g(z) = \frac{1}{e^{iz} - 1}$$

について, 以下の各問に答えよ.

(1) $g(z)$ の全ての極とその位数, 及び留数を求めよ.

(2) 適切に正の実数 a を選ぶと, $g(z)$ は $0 < |z| < a$ において

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n z^n\,, \qquad c_n \in \mathbb{C} \qquad (n = m,\ m+1,\ m+2,\ \cdots)\,, \qquad c_m \neq 0\,, \qquad m \in \mathbb{Z}$$

の形にローラン展開できる. このような実数 a のうち, 最大のものを求めよ.

(3) (2) における整数 m と, 係数 $c_m,\ c_{m+1},\ c_{m+2}$ を求めよ.

(4) 次の積分を求めよ. ただし, 積分の向きは反時計まわりにとるものとする.

$$\int_{|z|=100} g(z)\,dz$$

(京都大 2010)　　(m20103308)

0.522 数列 $\{a_n\}$ を　$a_1 = 3,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{3}{a_n}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$
によって定めるとき，次の (1)〜(3) に答えよ．

(1) $n \geq 1$ であるすべての n に対して，$a_n > \sqrt{3}$ であることを証明せよ．

(2) $n \geq 1$ であるすべての n に対して，$a_{n+1} - \sqrt{3} < \dfrac{1}{2}\left(a_n - \sqrt{3}\right)$ であることを証明せよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3}$ であることを証明せよ．

(京都大 2012)　　(m20123302)

0.523 　スマートフォン業界のシェア争いを考える，A 社，B 社の 2 社が熾烈なシェア争いをしている．ある年 k 年（k は非負整数）の各社のシェアがそれぞれ a_k%　，b_k%　$(a_k + b_k = 100)$ とする．翌年（$k+1$ 年）の各社のシェアは,

$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}_k = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{x}_k$ で与えられるものとする.

$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 90 \end{bmatrix}$ として，次の問 (1)〜(2) に答えよ.

(1) $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$ とする.

(a) $\boldsymbol{x}_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ を求めよ.

(b) $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix}$ を求めよ.

(c) $n \to \infty$ の場合の各社のシェアを求めよ.

(2) $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$ とする．$n \to \infty$ の場合の各社のシェアを求めよ.

(京都大 2013)　　(m20133302)

0.524 次の (1)〜(6) に答えよ．ただし，log は自然対数を表す.

(1) k を自然数とし，$f(x)$ を $k \leq x \leq k+1$ で連続な狭義単調減少関数とする．このとき，不等式

$$\int_k^{k+1} f(x)dx < f(k)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $n=1,2,\cdots$ に対して，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ とおく．$S_n>\log(n+1)$ が成り立つことを示せ.

(3) (2) で定義した S_n に対し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ.

(4) $x>1$ において関数 $g(x)=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は狭義単調減少であることを示せ.

(5) k を 3 以上の自然数とする．(4) で定義した関数 $g(x)$ に対し，不等式

$$g(k)<\frac{1}{\log(k-1)}-\frac{1}{\log k}$$

が成り立つことを示せ.

(6) $n=2,3,\cdots$ に対して，$T_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(\log k)^2}$ とおく．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n$ が存在することを示せ.

(京都大 2019)　　(m20193304)

0.525 (1) 次の積分の値を求めよ.

（イ）$\displaystyle\int_e^3 x^2\log_e x\,dx$　　（ロ）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x\,dx$　　（ハ）$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2+x}{4x^2+1}dx$

(2) 次の広義積分の値を求めよ.

（イ）$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$　　（ロ）$\displaystyle\int_0^\infty\frac{1}{x^2}\log_e(1+x^2)\,dx$

(京都大 2022)　　(m20223303)

0.526 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})^x$ を求めよ.

(京都工芸繊維大 2000)　　(m20003401)

0.527 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2000)　　(m20003402)

0.528 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2000)　　(m20003405)

0.529 (1) 自然数 $n=1,2,...$ に対して $n!\geqq 2^{n-1}$ が成り立つことを示せ.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ は収束して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\leqq 2$ を満たすことを示せ.

(京都工芸繊維大 2001)　　(m20013404)

0.530 実数 $p>0$ について　$\Gamma(p)=\displaystyle\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$　とおく．次の (1), (2) を証明せよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{e^x}=0$　（ただし，a は実数）　　(2) $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$

(京都工芸繊維大 2002)　　(m20023404)

0.531 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right\}$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2003)　　(m20033401)

0.532 積分 $\displaystyle\int_0^\infty\frac{2x}{(2x^2+1)(x^2+1)}dx$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2003)　　(m20033404)

0.533 次の定積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

(京都工芸繊維大 2006) (m20063407)

0.534 次の積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x+2e^{-x}+2}dx$

(京都工芸繊維大 2007) (m20073403)

0.535 連続時間信号 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

で定義する．ただし，t は時間を表す実数，ω は角周波数を表す実数であり，$j=\sqrt{-1}$ とおいている．このとき，

$$f(t)=\begin{cases} e^{-t} & (t \geqq 0) \\ 0 & (t<0) \end{cases}$$

で与えられる連続時間信号 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ と振幅スペクトル $|F(\omega)|$ を求めなさい．

(京都工芸繊維大 2008) (m20083405)

0.536 正数 R について，$I(R)=\displaystyle\int_0^R x^3e^{-x^2}dx$ とおく．

(1) 積分 $I(R)$ の値を求めよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{R\to\infty} I(R)$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2010) (m20103402)

0.537 (1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log\left(1+\frac{3}{x}\right)$ および $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)$ を求めよ．

(2) 積分 $\displaystyle\int_1^{\infty}\log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)dx$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2011) (m20113402)

0.538 (1) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+1}$ を求めよ． (2) 広義積分 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{dx}{x^3+1}$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2016) (m20163402)

0.539 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}$ および $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2017) (m20173402)

0.540 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=e^{2x-y}$ の解 $y=y(x)$ で，$y(0)=1$ を満たすものを求めよ．さらに，極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2018) (m20183405)

0.541 xy 平面の領域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<\infty,\ -\infty<y<\infty\}$ で定義される関数

$$f(x,y)=\log x+\frac{2y^2+2y+1}{2x^2}$$

を考える．

(1) 関数 $f(x,y)$ の 1 次および 2 次の偏導関数をすべて求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2020)　　(m20203404)

0.542 (1) 関数 $z = z(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ に関する微分方程式

$$(*) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} - 6z = 4e^t$$

を考える.

(a) 微分方程式 $\dfrac{d^2z}{dt^2} + \dfrac{dz}{dt} - 6z = 0$ の一般解を求めよ.

(b) $(*)$ の一般解を求めよ.

(2) 関数 $y = y(x)$ $(x > 1)$ に関する微分方程式

$$(**) \qquad (x-1)^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2(x-1)\frac{dy}{dx} - 6y = 4x - 4$$

を考える. 変数変換 $x(t) = e^t + 1$ $(-\infty < t < \infty)$ により, $z(t) = y\left(x(t)\right)$ とおく.

(a) $\dfrac{dz}{dt}$ および $\dfrac{d^2z}{dt^2}$ を $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ および x を用いて表せ.

(b) $(x-1)^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2(x-1)\dfrac{dy}{dx} - 6y = \dfrac{d^2z}{dt^2} + \dfrac{dz}{dt} - 6z$ が成り立つことを示せ.

(c) $(**)$ の一般解を求めよ.

(京都工芸繊維大 2020)　　(m20203405)

0.543 広義積分 $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{6x-4}{x^3-4x}dx$ を求めよ.

(京都工芸繊維大 2021)　　(m20213403)

0.544 x の関数 $f(x) = 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$ を考える.

(1) $f(x)$ の増減を調べ, 極値を求めよ.

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ.

(3) 関数 $y = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$ $(x \geqq 0)$ の値域を求めよ.

(京都工芸繊維大 2022)　　(m20223402)

0.545 区間 $I = [-\pi, \pi]$ で連続な関数 $f(x)$ に対して

$$R(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx\ , \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

とするとき, 次の問に答えよ.

(1) $|a| < 1$ なる実数 a に対して

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a^j \cos jx$$

としたとき

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} R(k)$$

を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ が I で非負であるとき

$$|R(k)| \leq R(0)\ , \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

が成り立つことを示せ.

(大阪大 1996)　　(m19963502)

0.546 $I_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{(\sqrt{x})^{n-1}}{1+\sqrt{x}}dx$ に対し,

(1) I_0 , I_1 を求めよ.

(2) $I_n + I_{n-1}$ を求めて, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ を示せ.

(3) (1),(2) より, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2$ を証明せよ.

(大阪大 1997) (m19973502)

0.547 実数値関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{1-2x\cos y + x^2}}\, dy$$

とするとき, 次の問に答えよ.

(1) $f(0)$ の値を求めよ.

(2) 積分を用いずに $f(x)$ を表せ.

(3) $f(x)$ のグラフの概形をかけ.

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} f(x)\, dx$ を求めよ.

(大阪大 1999) (m19993502)

0.548 区間 $(0,\infty)$ 上で定義された実数値関数 $x(t)$ が次の積分方程式

$$x(t) = \int_0^t \sin(2(t-u)) \cdot x(u)du + t$$

を満たすとする. このとき, $x(t)$ を求めよ.

(大阪大 2001) (m20013504)

0.549 $a, b > 0$, $a \neq b$ とし, 常微分方程式の初期値問題,

$$\begin{cases} u'(t) + a\,u(t) = 0 & (0 < t < \infty) \\ v'(t) + b\,v(t) - a\,u(t) = 0 & (0 < t < \infty) \\ u(0) = 1 & \\ v(0) = 0 & \end{cases}$$

を考える.

(1) 解 $u(t)$, $v(t)$ を求めよ.

(2) $v(t)$ の増減を調べ, グラフの概形を描け.

(3) $v(t)$ の最大値を求めよ.

(大阪大 2002) (m20023503)

0.550 (1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を用いて, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - x^2} dx$ を計算せよ.

(2) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)(x^2+1)} dx$ の値を求めよ.

(大阪大 2002) (m20023505)

0.551 (1) 関数 $f(x) = x^2$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)$$

とフーリエ級数展開したとき, $a_n (n \geqq 0)$, $b_n (n \geqq 1)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ を示せ.

(大阪大 2002)　　(m20023506)

0.552 s を実数, v を実数を成分とする 3 次元ベクトルとして,

$$A_s = E - sv\,{}^t v$$

と定義する. E は単位行列, ${}^t v$ は v の転置ベクトルを表す. ただし, v は零ベクトルではないとする. 以下の問に答えよ.

(1) A_s が直交行列となる s をすべて求めよ.

(2) 必要があれば, A_s が対称行列であることを用いて, A_s の固有値をすべて求めよ.

(3) 実数を成分とする 3 次元列ベクトル x_0 に対して

$$x_{i+1} = A_s x_i \quad i = 0, 1, 2, \cdots$$

と定める. このとき, すべてのベクトル x_0 に対して, x_i が収束するための s の範囲を求めよ. また, その時の極限 x_∞ を x_0 と v を用いて表せ. ただし, x_i が x_∞ に収束するとは, x_i の各成分が x_∞ の各成分に収束することである.

(大阪大 2004)　　(m20043506)

0.553 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{3^n}$ について，次の問に答えよ.

(1) 無限級数の第 N 部分和 $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{3^n}$ を求めよ.

(2) (1) で求めた第 N 部分和を用いて，S_N が収束するかどうか判定せよ．収束する場合は，収束値を求めよ.

必要があれば，$(1+a)^N = \displaystyle\sum_{j=0}^{N}{}_N C_j a^j \geq 1 + Na + \frac{N(N-1)}{2}a^2$ の関係を用いよ．但し，N は自然数，a は正の実数であるとする.

(大阪大 2006)　　(m20063502)

0.554 閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上で定義された，1 階連続微分可能（1 階導関数が存在して連続）な奇関数 $f(t)$ が与えられている.

(1) 実数列 $\{a_k\}$ を次のように定める：　$a_k := \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\ dt\,, \quad k = 1, 2, \cdots .$

このとき　$\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = 0$　を示しなさい．また　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2 < \infty$　であることを示しなさい.

(2) 上記 (1) で定めた実数列 $\{a_k\}$ に対して，　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2 dt \ = \ \sum_{k=1}^{\infty}{a_k}^2$　が成立したとすると，

$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t) - \sum_{k=1}^{N} a_k \sin kt\right|^2 dt = 0$　となることを示しなさい．また，この逆も成立することを示しなさい.

(大阪大 2006)　　(m20063510)

0.555 次の無限級数の第 N 項までの部分和 $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n$ を求めよ．また，$\displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N = S$ として無限級数の和 S を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+3)} = \frac{1}{1{\cdot}2{\cdot}4} + \frac{1}{2{\cdot}3{\cdot}5} + \frac{1}{3{\cdot}4{\cdot}6} + \frac{1}{4{\cdot}5{\cdot}7} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+3)} + \cdots$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)r^n = 3r + 4r^2 + 5r^3 + 6r^4 + \cdots + (n+2)r^n + \cdots$

ただし，$|\,r\,| < 1$ とする．必要ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ なる関係を用いてもよい．

(大阪大 2007)　　(m20073505)

0.556 (1) 空間上の直交座標 (x, y, z) を極座標 (r, θ, φ) ：

$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad (r > 0,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi < 2\pi)$

に変換するとき，そのヤコビアン（関数行列式）を計算しなさい．

(2) 広義積分　$\displaystyle I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}}\,dx\,dy\,dz$

について，$\alpha = \dfrac{1}{2}$ のときの値 $I\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めなさい．

(3) $I(\alpha)$ が収束する α の範囲を求めなさい．

(4) 広義積分　$\displaystyle J(\alpha,\ \beta) = \iiint_B \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}\,|\,\log(x^2+y^2+z^2)\,|^{\beta}}\,dx\,dy\,dz$

が収束するような $\alpha,\ \beta$ の満たすべき条件を求めなさい．

ただし，$B = \left\{(x, y, z)\ :\ x^2 + y^2 + z^2 < \dfrac{1}{4}\right\}$.

(大阪大 2007)　　(m20073506)

0.557 あるパーティで，n 人の参加者が 1 つずつプレゼントを持ち寄り，主催者がこれを集めて，帰りに n 人の参加者に 1 つずつランダムに配るものとする．このとき，自分が持ってきたプレゼントを持って帰る人が少なくとも 1 人出る確率を $Q(1, n)$ とする．参加者に 1 番から n 番までの番号をつける．i 番の参加者が自分のプレゼントを持ち帰るという事象を M_i とする．

(1) M_i が起こる確率を n の式で表せ．

(2) $i_1, i_2, \cdots, i_m$ をそれぞれ 1 以上 n 以下の相異なる m 個の整数とする．事象 $M_{i_1},\ M_{i_2},\ \cdots\ M_{i_m}$ が同時に起こる確率を n と m の式で表せ．

(3) 事象 E が起こる確率を $P(E)$ と書く．2 つの事象 A_1 と A_2 が同時に起こる確率を $P(A_1 \cap A_2)$，A_1 と A_2 のうち少なくとも 1 つが起こる確率を $P(A_1 \cup A_2)$ と書く．

このとき $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ である．一般に $N(\geqq 1)$ 個の事象 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ のうち少なくとも 1 つが起こる確率 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N)$ は

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N) = \sum_{l=1}^{N} (-1)^{l-1} S_l \tag{i}$$

$$\text{ここで } S_l = \sum_{k_1 < k_2 < \cdots < k_l} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \cdots \cap A_{k_l}) \tag{ii}$$

である．ただし，式 (ii) の右辺の $\sum$ は，N 個の整数 $1, 2, \cdots, N$ の中から相異なる l 個の整数 $k_1, k_2, \cdots, k_l$ を選ぶあらゆる組み合わせについて和をとることを意味する．特に $l = 1$ のときは $S_1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} P(A_j)$ である．式 (i) を数学的帰納法で示せ．

(4) $Q(1, n) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{1}{j!}$ を示せ．　　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q(1, n)$ を求めよ．

(大阪大 2007)　　(m20073508)

0.558 次の積分の値を留数定理を用いて求めよ． $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx$

(大阪大 2007) (m20073510)

0.559 (1) 関数 $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ を $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ とフーリエ級数に展開したとき，a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$，b_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ を示せ.

(大阪大 2007) (m20073511)

0.560 X, Y を標準正規分布 $N(0,1)$ に従う独立な確率変数とし，その和を W，W の絶対値を Z とおく．すなわち， $W = X + Y$， $Z = |W|$ である．$N(0,1)$ の確率密度関数 $f(x)$ を使って，関数 $\Phi(t)$ を $\Phi(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(x) dx$ で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 確率変数 W の分布を求めよ．

(2) 非負定数 z に対して，確率 $P(Z < z)$ を関数 Φ を用いて表せ.

(3) 確率変数 Z の平均を求めよ．

(大阪大 2007) (m20073512)

0.561 n, k が自然数のとき，広義積分 $I_{n,k}$ を次のように定義する． $I_{n,k} = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{k+1}} dx$

(1) $I_{1,k}$ を求めよ．

(2) $n - 1 - k < 0$ のとき，次の関係が成り立つことを示せ． $I_{n,k} = \dfrac{n-1}{k} I_{n-1,k-1}$

(3) $n - 1 - k < 0$ のとき，$I_{n,k}$ を求めよ．

(4) $x \geq 1$ のとき，自然数 k に依存するある実数 C_k が存在して， $\dfrac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{k+1}} \geq \dfrac{C_k}{x^{2k-2n+3}}$ となることを示せ.

(5) 上記 (4) の不等式を使って $n - 1 - k \geq 0$ のとき, $I_{n,k} = \displaystyle\lim_{L \to \infty} \int_0^L \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{k+1}} dx = \infty$ を示せ.

(大阪大 2008) (m20083501)

0.562 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0.5 \\ 1 & a+0.5 \end{pmatrix}$ について，以下の設問に答えよ．ただし，a は実数とする．

(1) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解をもつために，a が満たすべき条件を示せ.

(2) x_1, x_2, b_1, b_2 を実数とする． $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ が存在するために，a, b_1, b_2 が満たすべき条件をすべて述べよ．また，それぞれの場合の解あるいは解集合を求めよ.

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めて，A を対角化せよ.

(4) A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする.

(5) 任意の 2 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}$ について， $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} A^n \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となるための a の範囲を求めよ．ただし， $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} A^n \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ はベクトル $A^n \boldsymbol{x}$ の各成分が 0 に収束することをいう.

(大阪大 2008) (m20083502)

0.563 連立微分方程式 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= \quad y + a(x^3 + xy^2) \\ \dfrac{dy}{dt} &= \quad -x + a(x^2y + y^3) \end{cases}$

の解で，初期時刻 $t = 0$ において $(0, 0)$ でないものを考える．ただし a は定数とする．このような $(x(t),\ y(t))$ について以下が成り立つことを示せ．

(1) $a = 0$ のとき，t の周期関数である．

(2) $a > 0$ のとき，$t > 0$ では有限時刻を越えて延長できない．

(3) $a < 0$ のとき，すべての $t > 0$ に対して存在し，$t \to \infty$ で $(0, 0)$ に収束する．

(大阪大 2008) (m20083504)

0.564 $|a| < 1$ とする．以下の式を示せ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a^n \cos nx + a^2 \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx = 2a \cos x \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx$
ただし $\cos(n + 1)x + \cos(n - 1)x = 2 \cos nx \cos x$ を用いよ．

(2) $\displaystyle 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos x + a^2}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{1 - 2a \cos x + a^2}\, dx = \frac{\pi a^n}{1 - a^2}$

(大阪大 2008) (m20083506)

0.565 次に示す漸化式により帰納的に定められた数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ について，以下の問いに答えよ．

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{2} a_n$$

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 4 \quad b_{n+2} = \frac{b_n + b_{n+1}}{2}$$

(1) $\{a_n\}$ の初項から第 N 項までの和 A_N を求めよ．

(2) $n \to \infty$ のとき $\{A_n\}$ の収束・発散を調べ，収束する場合にはその極限値を求めよ．

(3) 第 n 項が $c_n = b_{n+1} - b_n$ で与えられる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(5) $n \to \infty$ のとき $\{b_n\}$ の収束・発散を調べ，収束する場合にはその極限値を求めよ．

(大阪大 2008) (m20083510)

0.566 常微分方程式

$$4y''(x) + y(x)(4e^{2x} - 1) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad (*)$$

を考える．

(1) $t = e^x$ と変換することによって $z(t) = y(\log t)$ に関する常微分方程式を導け．

(2) $z(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+\rho}$ $(\rho \in \mathbb{R},\ c_0 \neq 0)$ とおく．この級数を (1) で得られた常微分方程式に代入し係数比較することにより ρ と c_k $(k = 1, 2, \cdots)$ の間に成立する関係式を導け．また，$\rho = \pm 1/2$ を導け．

(3) $c_1 = 0$ とする．(2) で得られた関係式から c_k を定め，基本解 $z_1(t),\ z_2(t)$ を求めよ．

(4) $(*)$ の常微分方程式の基本解 $y_1(x),\ y_2(x)$ で

$$e^x(y_1(x)^2 + y_2(x)^2) = 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

を満たすものを一組求めよ.

(大阪大 2009) (m20093505)

0.567 自然数 n に対して

$$I_n(t) = \frac{1}{\pi^n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\left(\dfrac{t}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k\right)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+{x_k}^2\right)}\,dx_1\cdots dx_n \quad (t \in \mathbb{R})$$

とおく.

(1) 留数定理を用いて $I_1(t)$ を求めよ.

(2) $I_n(t)$ を求めよ.

(大阪大 2009) (m20093506)

0.568 閉区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x\sin x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

と定義する.

(1) $f(x)$ のフーリエ係数

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を求めよ.

(2) (1) で求めた a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ に対して,

$$\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2 = \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ.

(大阪大 2009) (m20093507)

0.569 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ の指数関数 $\exp(A)$ を求める. ただし, a, b および c は実数ある. また, E を単位行列として, 行列 A の指数関数 $\exp(A)$ を

$$\exp(A) = E + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n$$

のように定義する.

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.

(2) 行列 A は対称行列であるので, 適当な直交行列によって対角化される. 行列 A を対角化する直交行列の中で対称行列となる直交行列 P を 1 つ求めよ.

(3) 行列 A の指数関数 $\exp(A)$ を求めよ.

(4) $\exp(A)$ の行列式 $|\exp(A)|$ を求めよ.

(大阪大 2010) (m20103501)

0.570 自然数 n に対し, 以下のように定義される数列 $\{a_n\}$ について, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ.

ただし, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ ($|r| < 1$) を用いてもよい.

(1) $\displaystyle a_n = \sum_{k=n}^{2n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ (2) $\displaystyle a_n = \sum_{k=1}^{n+1} (k-2)\left(\frac{1}{2}\right)^k$

(大阪大 2010) (m20103502)

0.571 関数 f を, 実軸上で定義された周期 1 の連続微分可能な実数値関数とする. この f に対して $\hat{f}(k)$ を

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 e^{-2\pi ikt} f(t)\, dt$$

と定義する. このとき, 複素数 z に対して

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} \hat{f}(k) \bar{z}^{|k|}$$

とおく.

(1) 任意の $r \in (0,1)$ に対して, $u(z)$ は $|z| \leq r$ で絶対かつ一様収束することを示せ.

(2) $u = u(z)$ は実数値関数で, $z = x + iy$ とするとき,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

となることを示せ.

(3) 任意の $r \in (0,1)$ に対して, $z = re^{2\pi i\theta}$ とするとき,

$$u(z) = \int_0^1 f(t) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi(\theta-t))+r^2}\, dt$$

となることを示せ.

(大阪大 2010) (m20103509)

0.572 n が整数全体を動くとして, 級数が絶対収束する数列 $\{\alpha_n\}$ と $\{\beta_n\}$ を考える.

すなわち $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|$ と $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\beta_n|$ が収束するとする. これらの数列を用いて関数 f, g を

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{2\pi inx}$$

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{2\pi inx}$$

とフーリエ展開する.

(1) $p(x)=f(x)g(x)$ を $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi inx}$ の形にフーリエ展開したときのフーリエ係数 c_n を求めよ.

(2) $q(x)=\displaystyle\int_0^1 f(x-s)g(s)\,ds$ を $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{2\pi inx}$ の形にフーリエ展開したときのフーリエ係数 d_n を求めよ.

(大阪大 2010)　　(m20103510)

0.573 実数を成分に持つ, 対称かつ正定値な n 次正方行列を B とする. その (i,j) 成分を B_{ij} と書くことにする. n 次元実ベクトルを $\boldsymbol{x}={}^t(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$, $\boldsymbol{y}={}^t(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$ と表し, その内積を $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i$ と定める（ ^{t} は転置を表す）. 行列 B の行列式を $\det B$, 逆行列を B^{-1} と表すことにする.

(1) 任意の実数 s と $b>0$ に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ts}e^{-\frac{t^2}{2b}}\,dt=e^{\frac{bs^2}{2}}$$

(2) 任意の n 次元実ベクトル $\boldsymbol{y}$ に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det B}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\ dx_1\,dx_2\,\cdots\,dx_n=e^{\frac{1}{2}(B\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}$$

(3) $1\leqq\ j,k\leqq\ n$ に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det B}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} x_jx_ke^{-\frac{1}{2}(B^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\ dx_1\,dx_2\,\cdots\,dx_n=B_{jk}$$

(4) n 次正方行列 A に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det B}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\ dx_1\,dx_2\,\cdots\,dx_n=\mathrm{Tr}(AB)$$

ここで, $\mathrm{Tr}(AB)$ は行列 AB の対角成分の和を表す.

(大阪大 2010)　　(m20103511)

0.574 次に示す漸化式により帰納的に定められた数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，n は自然数を表す.

$$a_1=2\ ,\quad a_2=6\ ,\quad a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=2$$

(1) 第 n 項が $b_n=a_{n+1}-a_n$ で与えられる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ

(3) 次の式で定義される和 S_n を求めよ.

$$S_n=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{a_m}$$

(4) $n\to\infty$ における S_n の極限値を求めよ.

(大阪大 2011)　　(m20113501)

0.575 $g(x)$ を周期 2π の連続関数とする．以下を示せ.

(1) $\displaystyle\lim_{m\to-\infty}\int_0^{2\pi} g(x)\sin mx\,dx=0$

(2) 有限三角級数

$$p_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\ . \quad n = 1, 2, \cdots$$

に対して

$$\lim_{m \to -\infty} \int_0^{2\pi} g(x) p_n(mx) dx = a_0 \int_0^{2\pi} g(x) dx$$

(3) 上の $p_n(x)$ が $n \to +\infty$ で $p(x)$ に $[0, 2\pi]$ 上一様収束するとき

$$\lim_{m \to -\infty} \int_0^{2\pi} g(x) p(mx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(x) dx \cdot \int_0^{2\pi} g(x) dx$$

(大阪大 2011)　　(m20113510)

0.576 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ が，行列 $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$,　$A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -11 & 4 \\ -30 & 11 \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ , \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \frac{1}{3^n}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\ , \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

と定義される．ここで n は自然数とする．以下の問いに答えよ．

(1) PAP^{-1} を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 第 n 項が $c_n = 2^n b_n$ で与えられる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ならびに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ を求めよ．

(大阪大 2012)　　(m20123501)

0.577 以下の設問に答えよ．

(1) 次式を証明せよ．

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x) - \left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}\right)}{x^3} = 0 \qquad (a)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)}{x^2} = 0 \qquad (b)$$

(2) 次式を証明せよ．

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n - \left(1 - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{3n^2}\right)}{\dfrac{1}{n^2}} = 0$$

(3) 問 (1), 問 (2) の結果を用いて，次式を証明せよ．

$$\lim_{n \to \infty} n^2 \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2}\right) \right\} = 0$$

(大阪大 2012)　　(m20123505)

0.578 (1)

$$f(x)=\left(\frac{x^2}{\pi}-\cos(x)\right),\quad (0\leq x<2\pi)$$

で定義された周期 2π を持つ関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\}$$

とフーリエ級数に展開したとき,

$$a_n,\ (n=0,1,2,\cdots),\ b_n,\ (n=1,2,\cdots)$$

を求めよ.

(2) (1) の結果を利用して

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

の値を求めよ.

(大阪大 2012) (m20123510)

0.579 $\{a_n\}$ は数直線上の点 A_n の座標に対応する数列であり，自然数 n に対して $A_n(a_n)$ は次のように帰納的に定められる.

線分 A_nA_{n+1} を $2:1$ に内分する点を $A_{n+2}(a_{n+2})$ とする．ただし，$a_1=0$，$a_2=1$ とする.

以下の問いに答えよ.

(1) a_3，a_4，a_5 の各項が，それぞれ $\frac{2}{3}$，$\frac{7}{9}$，$\frac{20}{27}$ で与えられることを示せ.

(2) a_{n+2} を a_{n+1} および a_n を用いて表せ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求め，$n\to\infty$ のときの a_n の値を示せ.

(大阪大 2013) (m20133501)

0.580 (1) 以下を示せ.

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{z}{z^2+1}e^{iz}dz=\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{z}{z^2-1}e^{iz}dz=0$$

ただし，正の実数 R に対し

$$\Gamma_R=\{Re^{i\theta}\,\big|\,0\leq\theta\leq\pi\}$$

であり，積分の向きは反時計回りにとるものとする.

(2) 積分

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+1}\sin x\,dx$$

の値を求めよ.

(3) 積分

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2-1}\sin x\,dx$$

の値を求めよ.

(大阪大 2013) (m20133506)

0.581 確率変数 X は確率密度関数

$$p(x)=C_kx^{k-1}e^{-x},\quad (x\geq 0)$$

を持つとする．ただし，k は自然数で，C_k は $\int_0^{\infty}p(x)dx=1$ で定まる正の数とする.

(1) 正の数 C_k，および $E[e^{-tX}]$, $(t \geq 0)$ を求めよ．

(2) 確率変数列 $X_1, \cdots, X_n$ は互いに独立に同一分布に従うとし，その確率密度関数を $p(x)$ とする，このとき，

$$q_n(t) = E[e^{-t(X_1+\cdots+X_n)}]\ , \quad (t \geq 0)$$

を求めよ．

(3) 極限値

$$\lim_{n\to\infty} q_n\left(\frac{1}{n}\right)$$

を求めよ．

(大阪大 2013)　　(m20133508)

0.582 m を自然数，k を 2 以上の自然数とする．x_0 を正の実数とし，関数 $x(t)$ に対する常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) - t^m x(t)^k = 0 \quad (t > 0)\ , \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{$*$}$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) $y(t) = x(t)^{1-k}$ とおくとき，$y(t)$ が満たす常微分方程式を導け．

(2) 広義積分

$$\int_0^\infty t^m e^{-(k-1)t} dt$$

を求めよ．

(3) 初期値問題 $(*)$ の解 $x(t)$ に対して，$\displaystyle\lim_{t\to t_0-0} |x(t)| = \infty$ となる正の実数 t_0 が存在するとき解 $x(t)$ は爆発するということにする．解 $x(t)$ が爆発するような正の実数 x_0 の範囲を求めよ．

(大阪大 2014)　　(m20143504)

0.583 $\{f_k(x)\}_{k=1.2.\cdots}$ を閉区間 $I(\subset \mathbb{R})$ で定義された実数値連続関数の列とする．二つの条件を考える．

$$\text{条件 1 :}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\Big|f_k(x)\Big| < \infty, \qquad x \in I$$

$$\text{条件 2 :}\quad \max_{x\in I}\left|\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \to 0 \qquad (m, n \to \infty)$$

条件 1 が満たされるとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は I において絶対収束するという．条件 2 が満たされるとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は I において一様収束するという．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = |x| \quad (x \in [-\pi,\ \pi])$ のフーリエ級数

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

を求めよ．

(2) (1) で求めた級数 $s(x)$ が $[-\pi, \pi]$ において絶対収束することを示せ．

(3) (1) で求めた級数 $s(x)$ が $[-\pi, \pi]$ において一様収束することを示せ．

(大阪大 2014)　　(m20143506)

0.584 N を自然数とする．ボタンを押下すると 1 から N までの整数の中から一つの数字をランダムに表示する機械がある．ボタンを離すと表示された数字は消える．それぞれの数字は等確率で表示される．ボタンの押下を n 回行い表示された数字を $X_1, \cdots, X_n$ とし，これらは互いに独立な確率変数とする．$T = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$ とおき，T を用いて N を推定したい．事象 A の生起確率を $P(A)$ と書く．以下の問いに答えよ．

(1) $P(T \leq t) = \{P(X_1 \leq t)\}^n \quad (t = 1, \cdots, N)$ を示せ．

(2) $P(T = t) \quad (t = 1, \cdots, N)$ を求めよ．

(3) 期待値 $E(T)$ が次式で与えられることを示せ．

$$E(T) = N - \sum_{t=1}^{N} \left(\frac{t-1}{N}\right)^n$$

(4) 次式を示せ．

$$\lim_{N\to\infty} \frac{E(T)}{N} = \frac{n}{n+1}$$

(大阪大 2014) (m20143507)

0.585 実数 x に対し $y = \sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ と定義すると $\sinh x$ は逆関数をもつ． そこで逆関数を $\mathrm{sh}^{-1}(x)$ と表す．以下の設問に答えよ．

(1) $\mathrm{sh}^{-1}(x)$ を求めよ．

(2) 正の実数 a について $\quad S(a) = \frac{1}{a}\int_0^a \mathrm{sh}^{-1}(x)dx \quad$ と定義する．$S(a)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{a\to 0} S(a)$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{a\to\infty} \{S(a) - \log a\}$ を求めよ．

(大阪大 2015) (m20153505)

0.586 m を 6 以上の偶数，n を $3 \leqq n \leqq \dfrac{m}{2}$ を満たす自然数とする．正 m 角形の m 個の頂点に， 時計回りに $1, 2, 3, \cdots, m$ と番号をふる．この m 個の頂点から n 個の頂点を無作為に選んで n 角形を作る．ただし，頂点が一つでも異なる n 角形は異なるものとする．このとき，以下の設問に答えよ．

(1) $m = 8$ のとき，辺上，または内部に正 8 角形の中心を持たない 3 角形の総数を答えよ．

(2) n 角形が，辺上，または内部に正 m 角形の中心を持たない確率を $P_{n,m}$ とする．$P_{n,m}$ を n と m を用いて表せ．また，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} P_{n,m}$ を求めよ．

(大阪大 2016) (m20163503)

0.587 実定数 a, b, c は $b^2 - ac > 0,\ b > 0$ を満たしている．$D = b^2 - ac$ と記す．以下の設問に答えよ．

(1) 連立常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} + bx + cy = 0,\ t \geq 0$$
$$\frac{dy}{dt} - ax - by = 0,\ t \geq 0$$

の解 $x = x(t),\ y = y(t)$ で初期条件 $x(0) = 0,\ y(0) = 1$ を満たすものを求め $b,\ c,\ D$ と t を用いて表せ．

(2) (1) の解 $y = y(t)$ に対して，$y(t) > 0$ が任意の $t \geq 0$ に対して成立することを示せ．

(3) (1) の解を用いて

$$z(t) = \frac{x(t)}{y(t)}, \quad t \geq 0$$

と置くと

$$\frac{dz}{dt} + az^2 + 2bz + c = 0, \quad z(0) = 0$$

を満たすことを示せ．

(4) $\lim_{t\to\infty} z(t)$ と $\lim_{t\to\infty} \dfrac{dz(t)}{dt}$ の値を求め $b,\ c,\ D$ を用いて表せ.

(大阪大 2016)　　(m20163504)

0.588 (1) α は整数でない実数とする．$\cos(\alpha x)$ $(-\pi < x < \pi)$ をフーリエ級数展開せよ．すなわち

$$\cos(\alpha x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\Big\}\ , \qquad -\pi < x < \pi$$

を満たす

$$a_n\ , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$
$$b_n\ , \quad n = 1, 2, \cdots$$

を求めよ.

(2) y は $\sin y \neq 0$ を満たす実数とする．(1) の結果を利用して

$$\frac{1}{\sin y} = \frac{1}{y} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left\{\frac{1}{y+n\pi} + \frac{1}{y-n\pi}\right\}$$

が成立することを示せ.

(大阪大 2016)　　(m20163506)

0.589 関数 $x(t),\ y(t)$ に関する次の連立微分方程式について，以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 2y + \cos 2t \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

(1) $x(t)$ および $y(t)$ の一般解を求めよ.

(2) 初期条件 $x(0) = y(0) = 0$ として $x(t)$ と $y(t)$ を求めよ.

(3) $t \to \infty$ において $x(t)$ が $A\cos(\omega t + \theta)$ なる関数形に漸近することを示し，その時の $A,\ \omega,\ \theta$ の値を求めよ．ただし，$A,\ \omega,\ \theta$ は実数であり，$A > 0,\ \omega > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi$ とする．また，θ は逆三角関数を用いて表しても構わない.

(大阪大 2016)　　(m20163509)

0.590 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に関して以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A が対角化する直交行列 P の中で対称行列を求めよ.

(3) A の逆行列を，問い (1)，(2) で求めた A の固有値と P を用いて表せ.

(4) 問い (3) の結果を用いて，連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ の解を求めよ.

(5) 問い (3) の結果および直交行列の性質 $P^T P = I$ を用いて，正の整数 n に対する連立方程式 $A^n\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ の解 $\boldsymbol{x}_{(n)}$ を $P,\ n$ および A の固有値を用いて表せ．，$n \to \infty$ としたときの $\boldsymbol{x}_{(n)}$ の極限を示せ．ただし，P^T は P の転置行列を，I は単位行列を表す.

(大阪大 2016)　　(m20163510)

0.591 複素数 $z = x + iy$ について以下の問いに答えよ．ただし，x, y は実数，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) 複素数 $1 + \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{99}$ の絶対値と偏角を求めよ．

(2) 曲線 C を放物線 $y = x^2 - 1$ の $z = -1$ から $z = 1$ に向かう曲線とする．このとき，複素関数 $f(z) = \overline{z} + z^2$ を C 上で積分せよ（$\overline{z}$ は z の共役複素数）．

(3) 複素数 $g(z) = \dfrac{1}{(z-1)(3-z)}$ において，中心が $z = 0$ のべき級数展開を求めよ．ただし，$|z| < 3$ とし，この範囲で収束するものをすべて求めること．なお，以下の幾何級数を用いてもよい．

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}\ , \qquad |z| < 1$$

(大阪大 2018) (m20183503)

0.592 関数 $f(x)$ は区間 $(-\infty,\ \infty)$ で 2 回微分可能であるとする．関数 $g(x)$ を

$$g(x) = f(x)^2 - 2f(x) - f'(x)$$

と定める．ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である．2 変数関数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ をそれぞれ

$$u(x, y) = f(x - y)\ , \qquad v(x, y) = g(x - y)$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) $f(x) = e^{-2x}$ であるとき，偏導関数

$$\frac{\partial u}{\partial x}\ , \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial y}$$

をそれぞれ求めよ．

(2) 2 変数関数

$$w = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{\partial u}{\partial x}$$

を v の偏導関数を用いて表せ．

(3) a を正の実数とする．$|f(0) - 1| < a$ であり，すべての x について $g(x) = a^2 - 1$ であるとする．このとき

$$\lim_{y \to \infty} u(x, y)$$

を求めよ．

(大阪大 2019) (m20193505)

0.593 以下 α を与えられた実数とする．1 階微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2x(t) + e^{-t}$$

の，初期条件 $x(0) = \alpha$ を満たす解を $x_\alpha(t)$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 1 階微分方程式

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2y(t)$$

の，初期条件 $y(0) = 1$ を満たす解 $y(t)$ を求めよ．

(2) $y(t)$ を (1) で求めた関数とする．関数 $C(t)$ を $C(t) = \dfrac{x_\alpha(t)}{y(t)}$ によって定めると，

$$\frac{dC(t)}{dt} = e^{-3t}\ , \qquad C(0) = \alpha$$

が成り立つことを示せ．

(3) $\lim_{t\to\infty} x_\alpha(t) = \infty$ となるための α に対する必要十分条件を求めよ.

(大阪大 2019)　　(m20193508)

0.594 (1) 次の (1-1),(1-2) で与えられる，周期 2π の関数のフーリエ級数をそれぞれ求めよ．すなわち，$f(x)$ が連続な点で

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\}$$

が成り立つような

$$a_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$
$$b_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

をそれぞれ求めよ.

(1-1) $f(x) = \cos^2 x + \cos x$

(1-2) $f(x) = x \quad (-\pi < x \leqq \pi)\,, \quad f(x + 2\pi) = f(x)$

(2) (1) の結果を利用して，等式

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

を示せ.

(大阪大 2019)　　(m20193510)

0.595 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & a \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．ただし，a, b は実数とする.

(1) A の固有値と，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求め，すべての固有値と固有ベクトルが実数であるための条件を述べよ.

(2) A の逆行列が存在するための条件を述べ，逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) 問い (2) の結果を用い，逆行列 A^{-1} が存在するときの連立方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ の解を求めよ.

(4) A を対角化する行列 P を一つ示し，A を対角化せよ.

(5) A^n を求めよ．また，$n \to \infty$ のとき A^n のすべての要素が実数を持ち，かつ発散しないための a, b の範囲を示せ.

(大阪大 2020)　　(m20203501)

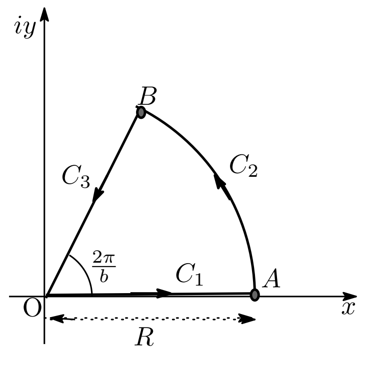
0.596 積分 $I = \int_0^\infty \frac{1}{x^b + 1} dx$ を考える．ただし，b は正の整数とする．この積分を計算するため，右下図に示す複素平面上の扇形の周に沿う単位閉曲線 C を考え，以下の図のように経路 C_1, C_2, C_3 を定める． ただし，x, y は実数で，AB は原点を中心とする半径 R $(R > 1)$ で中心角が $\frac{2\pi}{b}$ の円弧である.

C_1 ：原点 O から線分 OA に沿って点 A に至る経路

C_2 ：点 A から円弧 AB に沿って点 B に至る経路

C_3 ：点 B から線分 BO に沿って原点 O に至る経路

このとき，複素数 $z = x + iy$ について以下の問に答えよ.
ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする.



(1) $I_3 = \displaystyle\int_{C_3} \frac{1}{z^b+1}dz$ を，$I_1 = \displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z^b+1}dz$ を用いて表せ．

(2) 閉曲線 C で囲まれた領域内における $f(z) = \dfrac{1}{z^b+1}$ の特異点を求め，そこでの留数を計算せよ．

(3) 留数定理および $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_2} \frac{1}{z^b+1}dz = 0$ を用いて，I を計算せよ．ただし，i を用いずに表せ．

(大阪大 2020)　　(m20203503)

0.597　2 変数関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

で定める．ここで，関数 $\theta = \tan^{-1}s$ は，関数

$$s = \tan\theta \quad \left\{-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$$

の逆関数である．2 変数関数 $g(x,y)$ を

$$g(x,y) = h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)e^{f(x,y)}$$

で定める．ここで，関数 $h(r)$ は区間 $(0,\infty)$ を定義域とし，区間 $(0,\infty)$ において 1 回微分可能とする．以下の問いに答えよ．

(1) 2 変数関数 $p(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ の x についての偏導関数 $p_x(x,y)$ を求めよ．

(2) 2 変数関数 $q(x,y) = e^{f(x,y)}$ の x についての偏導関数 $q_x(x,y)$ と y についての偏導関数 $q_y(x,y)$ を求めよ．

(3) $g(x,y)$ の定義域において，等式

$$-yg_x(x,y) + xg_y(x,y) - h'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)e^{f(x,y)} = 0$$

が成り立っているとする． ここで，$g_x(x,y)$ は $g(x,y)$ の x についての偏導関数，$g_y(x,y)$ は $g(x,y)$ の y についての偏導関数，$h'(r)$ は $h(r)$ の導関数を表す． $h(1) = 1$ を満たす $h(r)$ を求めよ．

(大阪大 2021)　　(m20213506)

0.598　$\alpha > 0,\ \beta > 0,\ x_0 > 0$ として，次の微分方程式の初期値問題を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - \beta x^2,\ t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

(1) $x(t)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} x(t)$ を求めよ．

(3) $\dfrac{\alpha}{\beta} \neq x_0$ のとき，$x(t)$ が区間 $t \geqq 0$ において単調関数であることを示せ．

(大阪大 2022)　　(m20223505)

0.599　定数 C は正の実数とし，確率変数 X は $f(x) = \dfrac{C}{1+x^2}$ $(-\infty < x < \infty)$ を確率密度関数にもつとする．以下の設問に答えよ．

(1) 定数 C を求めよ．

(2) 確率変数 Y を $Y = \cos X$ によって定める．このとき，Y の期待値と分散を留数定理を用いることによって求めよ．

(大阪大 2022)　　(m20223508)

0.600 (1) 関数 $y = y(x)$ が微分方程式

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 2xy + (1+x^2)^2 + y^2$$

を満たしているとする．このとき，関数 $z = z(x)$ を

$$z = \frac{y}{1+x^2}$$

によって定義する．z が満たす微分方程式を求めよ．

(2) (1) の微分方程式の，初期条件 $y(0) = 0$ の下での解を求めよ．

(3) (2) で求めた解は，0 を含むある有界開区間 $(a,\ b)$ 上で連続であり

$$\lim_{x \to a+0} |y(x)| = \lim_{x \to b-0} |y(x)| = \infty$$

を満たしている．このような $a,\ b$ を求めよ．

(4) 関数 $u = u(x)$ が微分方程式

$$(1+x^2)\frac{du}{dx} = 2xu + (1+x^2)\sqrt{(1+x^2)^2 + u^2}$$

を満たしているとする．この微分方程式の，初期条件 $u(0) = 0$ の下での解を求めよ．

(大阪大 2022)　　(m20223509)

0.601 (1) -1 の 5 乗根を求めよ．

(2) 次の積分を留数を用いて求めよ． $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)(x^2+4)}$

(大阪府立大 2006)　　(m20063603)

0.602 (1) z を複素数とするとき，$e^z = 3i$ を満たす z を求めよ．ただし，i は虚数単位である．

(2) $a > 0$ の時，以下の積分値を留数解析を用いて求めよ． $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+a^4}\,dx$

(大阪府立大 2007)　　(m20073601)

0.603 n を 0 以上の整数とし，

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x^2+y^2)^{n/2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

とおく．このとき, 次の問いに答えよ．ただし. 任意の自然数 ℓ に対して, $\displaystyle\lim_{t\to\infty} t^{\ell} e^{-t^2} = 0$ となることは証明なしに用いてもよい．

(1) 極座標への変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を用いて, J_n を r に関する積分のみで表示せよ．

(2) J_0 の値を求めよ．

(3) n を 2 以上の自然数とするとき, J_n と J_{n-2} の関係式を求め, さらに J_{10} の値を求めよ．

(大阪府立大 2010)　　(m20103602)

0.604 留数解析を用いて, 次の積分値を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{1+x^6} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} dx$$

(大阪府立大 2010)　　(m20103609)

0.605 次の問いに答えよ．

(1) 次の等式が任意の実数 t に対して成立することを示せ.

$$\int_0^t (s^2+1)^{-\frac{3}{2}} ds = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty (s^2+1)^{-\frac{3}{2}} ds$ の値を求めよ.

(大阪府立大 2011)　　(m20113601)

0.606 関数 $X(r,\theta) = r\cos\theta$, $Y(r,\theta) = r\sin\theta$ の定義域はいずれも $D = (0,\infty) \times (-\pi,\pi)$ とする．次の問いに答えよ.

(1) 2つの集合

$$A = \big\{\big(X(r,\theta_0), Y(r,\theta_0)\big) \,|\, r \in (0,\infty)\big\},\ B = \big\{\big(X(r_0,\theta), Y(r_0,\theta)\big) \,|\, \theta \in (-\pi,\pi)\big\}$$

を1つの座標平面上に図示せよ．ただし，$\theta_0 \in (-\pi,\pi)$, $r_0 \in (0,\infty)$ は定数である.

(2) 行列 $J(r,\theta) = \begin{pmatrix} X_r(r,\theta) & Y_r(r,\theta) \\ X_\theta(r,\theta) & Y_\theta(r,\theta) \end{pmatrix}$ とその行列式 $|J(r,\theta)|$ を求めよ．ただし,

$$X_r = \frac{\partial X}{\partial r},\ Y_r = \frac{\partial Y}{\partial r},\ X_\theta = \frac{\partial X}{\partial \theta},\ Y_\theta = \frac{\partial X}{\partial \theta}$$

である.

(3) 2つのベクトル $\big(X_r(r,\theta), Y_r(r,\theta)\big)$, $\big(X_\theta(r,\theta), Y_\theta(r,\theta)\big)$ が直交することを示せ.

(大阪府立大 2011)　　(m20113602)

0.607 (1) 次の方程式において，z についてすべての解を極形式で表せ．また，それを複素平面上に図示せよ．ただし，i は虚数単位である.　　$z^3 = -2+2i$

(2) 留数定理を用いて，次の積分値を求めよ.　　$I = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^4+1} dx$

(大阪府立大 2016)　　(m20163601)

0.608 自然数 n に対して，I_n を　$I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{n+1}} dx$　とおくとき，次の問いに答えよ.

(1) I_1 の値を求めよ.

(2) I_{n+1} を I_n と n を用いて表せ.

(3) I_n の値を求めよ.

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (I_{n+1} + I_{n+2} + \cdots + I_{2n})$ を求めよ.

(大阪府立大 2016)　　(m20163608)

0.609 (1) z 平面上に領域 $0 < y < 2$ が $w = 1/z$ により写像される w 平面上の領域を示せ.

(2) 複素積分を用いて，次の定積分の値を求めよ.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4+16} dx$$

(大阪府立大 2018)　　(m20183603)

0.610 非負の整数 n に対して

$$S_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$$

とおく．このとき，各問に答えよ.

(1) $n \geqq 2$ に対して等式 $S_n = \dfrac{n-1}{n}S_{n-2}$ を示し，n の偶奇で場合分けをして，S_n の値を求めよ．

(2) 比 $\dfrac{S_{2n}}{S_{2n-1}}$ を考え，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n}}{S_{2n-1}}$ の値を求めることで，次を示せ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$$

(大阪府立大 2018)　　(m20183604)

0.611 ℓ, m, n を自然数として，次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{\ell\to\infty}\left(1-\frac{1}{\ell}\right)^{2\ell}$

(2) x が有理数であるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty}\{\cos(m!\pi x)\}^{2n}\right]$

(3) x が無理数であるとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}\{\cos(m!\pi x)\}^{2n}\right]$

(大阪府立大 2019)　　(m20193605)

0.612 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の各問に答えよ．

(1) $\{a_n\}$ が有界な単調増加数列であることを証明せよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(神戸大 1996)　　(m19963802)

0.613 $f(x) = a^x$ とする．$(0 < a)$

(1) $f(x)$ を $x = 0$ でマクローリン展開せよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{a^x} = 0$ $(1 < a)$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} a^x x^n = 0$ $(0 < a < 1)$ を証明せよ．

(神戸大 1996)　　(m19963804)

0.614 $a_1 = 2$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$ で定められた数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ について，次の各問に答えよ．

(1) $a_n \geq a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ であることを示せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(神戸大 1997)　　(m19973804)

0.615 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$ の値を求めよ．

(神戸大 1999)　　(m19993801)

0.616 $I_n = \displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x^2}dx$　I_n と I_{n+2} の関係を調べ，I_{2n+1} を求めよ．

(神戸大 1999)　　(m19993802)

0.617 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$ であることを証明せよ．

(神戸大 2000)　　(m20003801)

0.618 $(-\infty, \infty)$ 上で定義された実数値関数 $f(x)$ が任意の $a \leq b,\ 0 < t < 1$ に対し

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

を満たすとき下に凸であるという．$f(x)$ を $(-\infty, \infty)$ 上で定義された微分可能な実数値関数とするとき，$f'(x)$ が単調増加なら $f(x)$ は下に凸であることを上の定義に基づいて示せ．

（神戸大 2001） (m20013802)

0.619 R を正の実数とし，$D_R = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leq R^2\}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の積分を計算せよ． $I_R = \displaystyle\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} I_R$ を求め，それを用いて，次の積分の値を計算せよ． $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

(神戸大 2002) (m20023802)

0.620 (1) n を自然数とするとき， $\dfrac{1}{2^{n-1}+1} + \dfrac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} > \dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ．

(2) 上のことを使って， $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ が成り立つことを示せ．

(神戸大 2004) (m20043801)

0.621 x を 0 でない実数とする．このとき，次の等式を示せ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left\{1 + \cos\left(\frac{1}{n}x\right) + \cos\left(\frac{2}{n}x\right) + \cdots + \cos\left(\frac{n-1}{n}x\right)\right\} = \frac{\sin x}{x}$$

(神戸大 2004) (m20043802)

0.622 $f(x)$ をすべての $x \geq 1$ に対して定義された単調増加な連続関数とする．$f(x) > 0$ であるとするとき，次の各問いに答えよ．

(1) $f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) \leq \displaystyle\int_1^n f(x)dx \leq f(2) + \cdots + f(n-1) + f(n)$ を示せ．

(2) $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$ とする．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{F(n)} = 0$ を仮定する．そのとき，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(n)}{F(n)} = 1$ を示せ．

(神戸大 2007) (m20073805)

0.623 次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ について次の問いに答えよ． $a_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{a_n}$

(1) $a_1 = 2$ または $a_1 = 4$ のとき， $a_n = a_1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を確認せよ．

(2) $a_1 < 2$ のとき， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ を示せ．

(3) $a_1 > 4$ のとき， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ を示せ．

(4) $4 > a_1 > 2$ のとき， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ を示せ．

(神戸大 2007) (m20073807)

0.624 $0 < a < 1$ を満たす実数 a に対して，$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して A^n を求めよ．

(2) 自然数 n に対して $S_n = E + A + A^2 + \cdots + A^n$ とおく．ただし，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ が存在し，$(E-A)^{-1}$ に等しいことを示せ．

(神戸大 2008) (m20083807)

0.625 (1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^4}$ を求めよ.

(2) 球 $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ と円柱 $x^2+y^2 \leq x$ の共有部分の体積を求めよ.

(神戸大 2009) (m20093804)

0.626 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) $n = 1, 2, \cdots$ に対して, A^n を求めよ.（答えのみでよい）.

(2) $S_n = I + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^k A^k}{k!}$ とおくとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ.

(神戸大 2009) (m20093806)

0.627 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を正数からなる数列で, 不等式

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成立するものとする. この時, 以下の問いに答えよ.

(1) 全ての自然数 n について $a_n \leq \dfrac{a_1}{n^2}$ となることを示せ.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することを示せ.

(神戸大 2011) (m20113803)

0.628 $x = x(t)$ を変数 t の C^∞ 級関数とする. このとき, 次の微分方程式を解け.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 4 = 0$$

ただし, $x(0) = \dfrac{dx}{dt}(0) = 0$ とする.

(神戸大 2012) (m20123805)

0.629 以下の問に答えよ.

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散することを示せ.

(2) m 桁の自然数のうちで, 0 の文字が入らないものの個数を答えよ. 例えば $m = 3$ のときなら, $111, 112, 113, \cdots, 119, 121, \cdots, 999$ の個数で, 9^3 である.

(3) (1) の和から n に 0 の文字が入った項, 例えば, $\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{20}, \cdots, \dfrac{1}{100}, \dfrac{1}{101}, \cdots$ などを抜いた級数を $\boldsymbol{S}$ とする. すなわち,

$$\boldsymbol{S} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \cdots$$

このとき, $\boldsymbol{S}$ は収束することを示せ.

(神戸大 2012) (m20123806)

0.630 z は $|z| = 1$, $z \neq 1$ を満たす複素数とする. このとき, 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n} + \cdots \qquad (*)$$

が（ある複素数に）収束することを示したい. 以下の問いに答えよ. 非負整数 n に対し $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k$ とおく.

(1) 非負整数 n に対し $|S_n| \leq \dfrac{2}{|1-z|}$ であることを示せ.

(2) $m > n$ であるような正の整数 m, n に対し次が成り立つことを示せ.

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{z^k}{k} = \sum_{k=n}^{m-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{S_m}{m} - \frac{S_{n-1}}{n}$$

(3) (1),(2) を用いて，以下の条件 (C) が成り立つことを示せ.

任意の正の実数 ε に対し，正の整数 N が存在して，
$m > n \geq N$ であるような任意の整数 m, n に対して
$\left| \displaystyle\sum_{k=n}^{m-1} \frac{z^k}{k} \right| < \varepsilon$ が成り立つ. $\qquad (C)$

（コーシーの収束条件定理によれば，条件 (C) は級数 $(*)$ の収束と同値であるため，(3) より級数 $(*)$ の収束が証明できることになる.）

(神戸大 2014) (m20143810)

0.631 実係数行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+t^2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

について，次の問に答えよ.

(1) A^2, A^3, A^4 を求めよ.

(2)

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$$

を $B_n = x_n E + y_n A$ とするとき，

$$B = \left(\lim_{n \to \infty} x_n \right) E + \left(\lim_{n \to \infty} y_n \right) A$$

を求めよ．ここで E は単位行列を表す.

(3) $B = E$ を満たすような t を求めよ.

(神戸大 2015) (m20153803)

0.632 実数 $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$f_n(x) = \min_{k \in \mathbb{Z}} \left| x - \frac{k}{2^n} \right|$$

と定義する．$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合である．次の問に答えよ.

(1) 関数 f_0, f_1, f_2 のグラフの概形を書け.

(2) 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して級数

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \qquad (*)$$

は収束することを示せ.

(3) $(*)$ で与えられる $x \in \mathbb{R}$ の関数 $S(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを示せ.

(神戸大 2015) (m20153807)

0.633 行列 $A = \begin{pmatrix} \dfrac{11}{6} & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ に対して，$B = \displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} k A^{k-1}$ とする．ただし，A^0 は単位行列 E を表すものとする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) B を求めよ.

(2) $(E-A)^2B$ を計算せよ.

(神戸大 2016)　　(m20163802)

0.634 $D_0(x)\equiv 1,\ D_n(x)=1+\sum_{k=1}^{n}2\cos kx\ (n\geq 1)$, $F_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(x)\ (n\geq 0)$ で $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{D_n\}$ と $\{F_n\}$ を定義する．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $D_n(x)\sin\frac{x}{2}=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x$ となることを示せ.

(2) $F_n(x)\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2(n+1)}\Big\{1-\cos(n+1)x\Big\}=\frac{1}{n+1}\sin^2\frac{n+1}{2}x$ となることを示せ.

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}F_n(y)dy=2\pi$ となることを示せ.

(4) $0<\delta<\pi$ なる δ に対して $\lim_{n\to\infty}\int_{\delta\leq|y|\leq\pi}F_n(y)dy=0$ となることを示せ.

(神戸大 2016)　　(m20163805)

0.635 自然数 n に対して，次数 n 以下の実数係数 1 変数多項式全体からなる実ベクトル空間 P_n を考え,

$$H_n(x)=e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$$

とおく．以下の各問に答えよ.

(1) $H_0(x),\ H_1(x),\ H_2(x)$ を具体的に求めよ.

(2) $H_n(x)$ が次数 n の多項式であることを示せ.

(3) $H_0(x),\ H_1(x),\ \cdots,\ H_n(x)$ が P_n の基底をなすことを示せ.

(4) $0\leqq\ m<n$ を満たす任意の整数 m について，次の式が成り立つことを示せ.

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^mH_n(x)e^{-x^2}dx=0$$

(神戸大 2016)　　(m20163807)

0.636 $(-1,1)$ で定義された C^{∞}-級関数 $f(x)$ は次の微分方程式を満たすとする：

$$(1-x^2)f'(x)-xf(x)=1,\quad f(0)=0.$$

自然数 n に対し，$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ とおく.

(1) a_n を求めよ.

(2) $\int_0^1(1-x^2)^ndx\leqq\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$ が成り立つことを示せ．ただし，不等式 $1-x\leqq e^{-x}\quad(0\leqq x\leqq 1)$ および等式 $\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明せずに用いてよい.

(3) $n\to\infty$ のとき数列 $\{a_n\}$ の収束・発散を判定せよ．また，収束するときは極限値を求めよ.

(神戸大 2018)　　(m20183805)

0.637 (1) $\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ を求めよ.

ただし，$D=\Big\{(x,y)\mid x,y\in R,\ 0\leqq x^2+y^2<\infty\Big\}$ とする.

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ となることを示せ.

(神戸大 2018)　　(m20183809)

0.638 S を 2×2 実対称行列とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 行列 S が正定値（すべての固有値が正）のとき，S の $(1,1)$ 成分，$(2,2)$ 成分は 0 でないことを示せ.

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty \exp(-x_1^2-x_2^2)\,dx_1\,dx_2$ を極座標に変換することにより求めよ.

(3) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}x^TSx\right)dx_2$ を x_1 の関数として求めよ．ただし，$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ であり，S は正定値とする.

(神戸大 2021)　　(m20213803)

0.639 (1) 微分方程式 $y'=-y-1,\ y(0)=0$ の解 $y(x)$ を求めよ.

(2) 次の漸化式

$$y_{k+1}=(1-h)y_k-h \qquad (k\geq 0) \qquad y_0=0$$

で決まる数列 y_k の一般項を求めよ．ここで h は 0 でない定数とする.

(3) x,n を正整数，$h=1/n$ とおくとき，

$$y_{xn}\to y(x)\,, \qquad n\to+\infty$$

を示せ.

(神戸大 2021)　　(m20213804)

0.640 行列 A とベクトル $\boldsymbol{u}$ を

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

で定める．次の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{u}$ は A の固有ベクトルであることを示せ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正方行列 P を 1 つ求めよ.

(3) 上記の P に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} P^{-1}A^nP$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ.

(神戸大 2023)　　(m20233801)

0.641 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

(鳥取大 2000)　　(m20003902)

0.642 次の各積分を求めよ．ただし $a>0$ とする.

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^a}$　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}$

(鳥取大 2001)　　(m20013901)

0.643 微分可能な関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は次式で与えられる.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

このことを用いて, 次の問いに答えなさい.

(1) $y=\log_e x$ の導関数を求めなさい. ただし, $e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ とする.

(2) $y=x^n$ の導関数を求めなさい. ただし, n は正の整数とする.

（鳥取大 2004） (m20043901)

0.644 次の積分を計算しなさい.

(1) $\displaystyle\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx$ ただし, L は正で, n, m は正の整数をとるものとする.

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}x^2e^{-ax+b}dx$ ただし, a は正とする.

（鳥取大 2004） (m20043902)

0.645 次の計算をせよ.

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

(鳥取大 2005) (m20053902)

0.646 次の積分を計算せよ.

(1) $I_1=\displaystyle\int\frac{1}{a^2x^2-b^2}dx$, $a>0$, $b>0$ (2) $I_2=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx$, $a>0$

(鳥取大 2006) (m20063903)

0.647 確率変数 N はポアソン分布 $P(N=n)=\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$, $\lambda>0$, $n=0,1,2,\cdots$ に従うとする. このとき, N の期待値を求めなさい（ 注意 ： $e^{\lambda}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}$ が成り立つ ）

(鳥取大 2007) (m20073922)

0.648 関数 $\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^{\infty}x^{s-1}e^{-x}\,dx$ は広義積分を用いて定義された実変数 s の関数である。これについて, 以下の問に答えよ.

(1) $\Gamma(1)$ を求めよ.

(2) $\Gamma(s)$ に対して, x について部分積分をすることによって, 任意の $s>1$ に対して $\Gamma(s)=(s-1)\Gamma(s-1)$ となることを示せ.

(鳥取大 2010) (m20103906)

0.649 (1) n を正の整数とする. このとき,

$$\sin^{2n+1}x\leqq\sin^{2n}x\leqq\sin^{2n-1}x\quad(0\leqq x\leqq\pi/2)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $\sin^0 x=1$ $(0\leqq x\leqq\pi/2)$ と定め, $n=0,1,2,\cdots$ に対して $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$ とおく. このとき, $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ $(n\geqq 2)$ が成り立つことを示せ.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\right)^2$ を求めよ．

(岡山大 2003) (m20034001)

0.650 実数 x に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}$ を求めよ．

(岡山大 2003) (m20034002)

0.651 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_1=3$, $b_1=1$, $c_1=-1$,

$$a_{n+1}=3a_n+b_n+c_n\ ,\ b_{n+1}=a_n+2b_n\ ,\ c_{n+1}=a_n+2c_n \qquad (n \geqq 1)$$

によって定義する．これらの数列の一般項を求めよ．

(岡山大 2003) (m20034004)

0.652 (1) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\tan^{-1}x}{x^2}dx$ を求めよ.

(2) 2つの関数 $\dfrac{\tan^{-1}x}{x}$ と $\dfrac{\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x}{x}$ は各々区間 $[1,\infty)$ で広義積分可能かどうかを答えよ.

(岡山大 2005) (m20054002)

0.653 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続な増加関数であるとき，区間 $(a,b]$ 上の関数 $F(x)$ を $F(x)=\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ で定義する．このとき次の各問いに答えよ.

(1) $F(x)$ の x による微分 $F'(x)$ を $f(x)$ と $F(x)$ を使って表せ.

(2) 区間 $(a,b]$ において $f(x)-F(x)\geqq 0$ であることを示せ.

(3) 区間 $(a,b]$ において $F(x)$ は増加関数となることを示せ.

(4) 区間 $(0,\infty)$ で定義される関数 $F(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ は増加関数であることを示せ.

(岡山大 2007) (m20074002)

0.654 数直線 $(-\infty,\infty)$ 上の関数 $F(x)$ と $f(x)$ を

$$F(x)=x^2\log(1+x^2)\ ,\quad f(x)=F'(x)$$

によって定義する．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $g(x)=\displaystyle\int_0^x (tf'(t)-f(t))\,dt$ を求めよ.

(2) $f'(x)>\dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{2F(x)}{x^2}>0 \quad (x\neq0)$ が成り立つことを示せ.

(3) $g(x)$ は下に凸な関数であることを示せ.

(岡山大 2009) (m20094001)

0.655 区間 $[0,\infty)$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対する広義積分

$$\int_0^{\infty}f(x)e^{-sx}dx=\lim_{M\to\infty}\int_0^M f(x)e^{-sx}dx \quad (s>0)$$

を考える．以下の問いに答えよ.

(1) 自然数 n に対して，

$$\int_0^{\infty}x^ne^{-sx}dx=\frac{n}{s}\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-sx}dx$$

が成り立つことを示せ.

(2) 非負の整数 n に対して，$\displaystyle\int_0^{\infty}x^ne^{-sx}dx$ の値を求めよ.

(3) $s > 1$ のとき,

$$\int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{(-x)^n}{n!} e^{-sx} dx = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \frac{(-x)^n}{n!} e^{-sx} dx$$

が成り立つことを示せ.

(岡山大 2009) (m20094002)

0.656 (1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^x}\,dx$ を求めよ.

(2) 自然数 n に対して, 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x}\,dx$ を求めよ.

(3) $x \geqq 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ が有界ならば, 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(x)}{e^x}\,dx$ は収束することを証明せよ.

(岡山大 2011) (m20114002)

0.657 関数 $f(x)$, $f_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ を, 閉区間 $[a, b]$ 上で微分可能であり, それらの導関数は $[a, b]$ 上で連続とし,

(i) すべての n について $\quad f_n(a) = f(a)$,

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n'(x) - f'(x)|\,dx = 0$,

を満たすものとする. このとき次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ を $f(a)$ と $f'(x)$ を使って表せ.

(2) $f_n(x)$ は $f(x)$ に各点収束することを示せ.

(3) $f_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束することを示せ.

(岡山大 2012) (m20124001)

0.658 関数 $a_{m,n}(x)$ $(m, n \in \mathbb{N})$ を

$$a_{m,n}(x) = \cos^{2n}(m!\pi x)$$

とし, 関数 $g_m(x)$ $(m \in \mathbb{N})$ および $f(x)$ を

$$g_m(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{1 + a_{m,n}(x)}$$

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} g_m(x)$$

で定める. 以下の問いに答えよ.

(1) x が無理数のとき $g_m(x)$ を求めよ.

(2) x が有理数のとき $f(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ は $x = 0$ で連続であることを示せ.

(4) $f(x)$ は $x = 0$ で微分不可能であることを示せ.

(岡山大 2013) (m20134001)

0.659 ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=3}^\infty \frac{1}{n(n-1)} x^n$ について以下の問いに答えよ.

(1) 収束半径 r を求めよ.

(2) $|x| < r$ に対して

$$f(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n$$

とする．第 2 次導関数 $f''(x)$ を x の有理式で表せ．

(3) $f(x) = (1-x)\log(1-x) + x - \dfrac{x^2}{2}$ を示せ．

(岡山大 2014)　　(m20144001)

0.660 (1) 不等式 $0 \leqq t - \log(1+t) \leqq \dfrac{t^2}{2}$ $(t \geqq 0)$ が成り立つことを示せ．

(2) 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

は $K = 1$ のときに発散し，$k = 2$ のとき収束することを示せ．

(3) 全ての $x > 0$ に対して，級数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

は発散することを示せ．

(4) 全ての $x \geqq 0$ に対して，級数

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\log\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right\}^2$$

は収束することを示せ．

(岡山大 2015)　　(m20154002)

0.661 関数 $f_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ を

$$f_n(x) = c_n \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^n$$

で定める．ただし，c_n は正の定数で

$$\int_0^{\pi} f_n(x)dx = 1$$

となるように選ぶ．以下の問いに答えよ．

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^n \sin x dx$$

を求めよ．

(2) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $c_n < \dfrac{n+1}{2}$ が成り立つことを示せ．

(3) $0 < x \leqq \pi$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．

(岡山大 2016)　　(m20164001)

0.662 関数 $f(x)$ を $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ で定める．以下の問いに答えよ．

(1) e^x のマクローリン展開を書け．

(2) a_k $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ を $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ により定める．a_k $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ の値を求めよ．

(3) $f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ で表す．$f^{(99)}(0)$ を求めよ．

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ が収束するか発散するかを判定せよ.

(岡山大 2016) (m20164002)

0.663 (1) 関数 $g(x) = \sqrt{1+x}$ のマクローリン展開は

$$g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}n} \begin{pmatrix} 2n-2 \\ n-1 \end{pmatrix} x^n$$

であることを示せ．ただし，$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ とする．また，右辺の無限級数の収束半径は 1 であることを示せ.

(2) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

で定めるとき，$f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} x^n$$

であることを示せ.

(3) 上の問い (2) の $f(x)$ のマクローリン展開について，その収束半径を求めよ.

(岡山大 2017) (m20174001)

0.664 (1) 自然数 n に対して，$f_n(x) = nxe^{-nx^2} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ とするとき，関数列 $\{f_n(x)\}$ はある連続関数に収束することを示せ．また，

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \quad \text{および} \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

の値を求めよ.

(2) $\lambda > 0$ とする．自然数 n に対して，$g_n(x) = n^{\lambda}xe^{-nx^2} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ とするとき，関数列 $\{g_n(x)\}$ はある連続関数に収束することを示せ．また，

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx$$

が成り立つための λ の条件を求めよ.

(岡山大 2017) (m20174002)

0.665 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，$\mathbb{R}$ 上の関数 $f_n(x)$ を $f_n(x) = \sqrt{\dfrac{1}{n^2} + x^2}$ で定める．次に答えよ.

(1) $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ で連続であることを示せ.

(3) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ での微分可能性を調べよ.

(広島大 2003) (m20034101)

0.666 (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqq 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$ を示せ.

(2) 正の実数 x に対し，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right)$ が収束することを示せ.

(3) 正の実数 x に対し　$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n}\right)$　とおく．r を正の整数とするとき $f(r)=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{r-1}+\frac{1}{r}$　を示せ．

(広島大 2003)　　(m20034105)

0.667 次の定積分を導け（計算せよ）．ただし，$a>0$ とする．

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

ヒント：$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx\right)^2=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2}dy$ であるから，
x,y の 2 重積分を求めればよい．

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-ax^2}dx$

(広島大 2003)　　(m20034106)

0.668 $n=0,1,2,\cdots$ とし, 積分 $I_n(t)=\int_0^t e^{-x}(1+x)^n dx$ を考える. 次の問に答えよ.

(1) すべての n に対して, $\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)^n}{e^x}=0$ を示せ.

(2) すべての n に対して, 極限 $\lim_{t\to\infty} I_n(t)$ が存在することを示せ.

(3) $a_n=\lim_{t\to\infty} I_n(t)$ とおく. $n\geqq 1$ のとき, $a_n-na_{n-1}=1$ が成り立つことを示せ.

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n!}$ を求めよ.

(広島大 2005)　　(m20054102)

0.669 正方行列

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値と対応する固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を一つ求めよ.

(3) 零ベクトルではないベクトル $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^3$ に対して, 次のように帰納的に $\boldsymbol{x}_n$ を定義する.

$$\boldsymbol{x}_{n+1}=\frac{1}{||A\boldsymbol{x}_n||}A\boldsymbol{x}_n \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$n\to\infty$ とするとき, $\boldsymbol{x}_n$ が A の絶対値が一番大きな固有値に対する固有ベクトルに収束するならば, $\boldsymbol{x}_0$ は絶対値が一番大きな固有値に対する固有ベクトルと直交しないことを示せ. ただし, $||\cdot||$ は, ベクトルの大きさを表すものとする.

(広島大 2005)　　(m20054105)

0.670 a,b は実定数で $a\neq 0$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 不定積分 $\int e^{ax}\sin bx\,dx$,　$\int e^{ax}\cos bx\,dx$ を求めよ．

(2) 1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+ay=\cos bx \qquad (*)$$

の一般解を求めよ．

(3) 初期値 $y(0)$ がどのような値であっても，$x \to \infty$ のとき微分方程式 $(*)$ の解 $y(x)$ が収束するための必要十分条件を a と b を用いて表せ.

(広島大 2006)　　(m20064105)

0.671 次の定積分を計算せよ． $\displaystyle\int_0^\infty \cos(ax)e^{-x}dx$ (ただし, a は正定数)

(広島大 2006)　　(m20064107)

0.672 以下の微分方程式を解け．さらに，それぞれについて $\displaystyle\lim_{t\to\infty} u(t)$ を求めよ.

(1) $\dfrac{du}{dt} + u = 1\ ,\quad u(0) = 0$　　(2) $\dfrac{du}{dt} + \dfrac{1}{1+t^2}u = 0\ ,\quad u(0) = 1$

(3) $\dfrac{du}{dt} = u(1-u)\ ,\quad u(0) = \dfrac{1}{2}$

(広島大 2008)　　(m20084102)

0.673 (1) 関数 e^x , $\sin x$, $\log(1+x)$ をそれぞれ $x=0$ のまわりでテイラー展開せよ.

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$ を求めよ.

(3) 関数 $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ の極値を求めよ.

(広島大 2010)　　(m20104101)

0.674 (1) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを示せ.

(3) 積分 $I(c) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2cx\, dx$ について， $\dfrac{dI(c)}{dc}$ を c, $I(c)$ を用いて表せ.

(4) 積分 $I(c)$ を求めよ.

(広島大 2010)　　(m20104102)

0.675 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y}\, dxdy$ を求めよ.

(広島大 2011)　　(m20114103)

0.676 (1) $\cos x$ の $x=0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ.

(2) $\log(1-x)$ の $x=0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ.

(3) (1) と (2) を用いて, $\log\cos x$ の $x=0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ.

(4) a を実数とするとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \cos^n \frac{a}{\sqrt{n}} = e^{-\frac{a^2}{2}}$ が成り立つことを示せ.

(広島大 2011)　　(m20114105)

0.677 以下の問いに答えよ.

(1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ が発散することを示せ.

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\log(n+1)}$ の収束・発散を調べよ.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log(1+x)}\right)$ を求めよ.

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ を求めよ.

(広島大 2012)　　(m20124102)

0.678 $u(r)$ は区間 $(0,\ \infty)$ 上で 2 回微分可能な関数とし，さらに，$u''(r)$ が $(0,\ \infty)$ 上で連続であるとする．関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = u(r) \quad (\text{ただし，} r = \sqrt{x^2+y^2})$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = u''(r) + \dfrac{1}{r}u'(r)$ を示せ．

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$ が成り立つためには，

$$u(r) = a\log r + b \quad (a, b \text{ は定数})$$

と表されることが必要十分であることを示せ．

(広島大 2012)　　(m20124103)

0.679 以下の問いに答えよ．

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{r\sqrt{\log r}}\,dr$ の値を求めよ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{r(\log r)^2}\,dr$ の値を求めよ．

(広島大 2012)　　(m20124105)

0.680 以下の各命題について，正しければ証明し，正しくなければ反例を用いてそのことを説明せよ．

(1) 区間 $(0, \infty)$ 上で微分可能な関数 $f(x)$ が $x = a$ で最大値を取るならば，$f'(a) = 0$ を満たす．

(2) 区間 $[0, \infty)$ 上で微分可能な関数 $f(x)$ が $x = a$ で最大値を取るならば，$f'(a) = 0$ を満たす．

(3) 区間 $I = [0, 1]$ 上の非負値連続関数 $f(x)$ が $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0$ を満たすならば，任意の $x \in I$ に対し $f(x) = 0$ となる．

(4) 区間 $I = [0, 1]$ 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ と I 上の関数 $f(x)$ に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ が任意の $x \in I$ で成り立つとする．このとき，$f(x)$ も I 上の連続関数である．

(5) $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x, y) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

は，原点 $(0, 0)$ において連続である．

(広島大 2013)　　(m20134106)

0.681 以下の問いに答えよ．

(1) e^x の $x = 0$ のまわりでのテイラー展開

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

の係数 a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を書け，（答だけでよい）

(2) k を自然数とするとき，$\displaystyle\lim_{t\to+0} t(\log t)^k = 0$ であることを示せ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$ の値を求めよ．

(4) 自然数 k に対して，広義積分 $I_k = \displaystyle\int_0^1 (\log x)^k\,dx$ の値を求めよ．

(広島大 2013)　　(m20134110)

0.682 次の積分 I_n について以下の問いに答えよ．

$$I_n = \int_0^{\infty} e^{-x}x^n dx \quad (n \text{ は零または正の整数})$$

(1) I_0 を求めよ．

(2) I_n と I_{n+1} の間に成り立つ漸化式を求めよ．

(3) 漸化式を利用することにより I_n を求めよ．

(広島大 2014)　　(m20144103)

0.683 一般項 $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ をもつ数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に関して，以下の問いに答えよ．

(1) $n=1,2,\cdots$ および $k=0,\cdots,n$ に対し，${}_nC_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ とする．このとき，不等式

$$\frac{{}_nC_k}{n^k} \leq \frac{{}_{n+1}C_k}{(n+1)^k}$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n=1,2,\cdots$ に対し，$a_n < a_{n+1}$ を示せ．

(3) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界であることを示せ．

(4) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ．

(広島大 2014)　　(m20144108)

0.684 実数列 $\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体のなす実ベクトル空間を V とし，級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} {a_i}^2$ が収束するような実数列 $\{a_n\}$ 全体の集合を W とする．以下の問いに答えよ．

(1) W が V の部分ベクトル空間をなすことを示せ．

(2) $\{a_n\}$, $\{b_n\} \in W$ に対して，級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ が絶対収束することを示せ．

(3) $\{a_n\}\cdot\{b_n\} = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ は W 上の内積であることを示せ．

(4) $a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, $b_n = \left(\dfrac{5}{7}\right)^n$ のとき，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の交角 θ を求めよ．ただし，内積空間の元 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対してノルムを $||\boldsymbol{a}|| := \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$ と書くとき，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の交角とは $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ||\boldsymbol{a}||\,||\boldsymbol{b}||\cos\theta$ を満たす実数 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ のことである．

(広島大 2014)　　(m20144109)

0.685 実数 ℓ に対して $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ を次で定める．

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^{\ell}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．

(1) f が原点 $(0,0)$ において連続であるための ℓ の条件を求めよ．

(2) f が原点 $(0,0)$ で x について偏微分可能であるための ℓ の条件を求めよ．

(3) $\ell=1$ のとき，極限

$$J=\lim_{R\to\infty}\iint_{x^2+y^2\leq R^2} f(x,y)dxdy$$

を考える．変数変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ により，J は

$$J=\lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \frac{\sin\left(r^4\varphi(\theta)\right)}{r}dr\right)d\theta$$

となることを示せ．ここで，$\varphi(\theta)=\cos^4\theta+\sin^4\theta$ である．

(4) $\ell=1$ のとき (3) の極限 J が存在することを示し，その値を求めよ．
その際，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ は収束し，その値が $\dfrac{\pi}{2}$ であることを用いても良い．

(広島大 2014)　　(m20144110)

0.686 (1) 広義積分 $I=\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ の値を求めよ．

(2) $J=\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{x}$ とおく．J を求めよ．

(3) 定数 $C>0$ と $R>0$ が存在して $x\geq R$ ならば $\log(1+x^2)<C\sqrt{x}$ となることを示せ．

(4) 広義積分 $K=\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^2}dx$ の値を求めよ．

(広島大 2015)　　(m20154102)

0.687 $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{4}{a_n+4}$ で定義される数列について，以下の問いに答えよ．

(1) 任意の自然数 n に対して，$\dfrac{4}{5}\leq a_n\leq 1$ を示せ．

(2) $b_n=a_{n+1}-a_n$ とする．級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ が収束することを示せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示し，極限値を求めよ．

(広島大 2015)　　(m20154104)

0.688 逆正弦関数 $f(x)=\sin^{-1}x$ を考える．ただし，f の値域は閉区間 $[-\pi/2,\ \pi/2]$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 開区間 $(-1,1)$ において f の導関数 f' を求めよ．

(2) $n=0,1,2,\cdots$ と $-1<x<1$ に対して，

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)=(2n+1)xf^{(n+1)}(x)+n^2f^{(n)}(x)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$f^{(n)}$ は f の n 次導関数を表す．

(3) $n=0,1,2,\cdots$ に対して，$\dfrac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n)!}=\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ であることを示せ．ただし，$0!=1$ とする．

(4) F は開区間 $(-1,1)$ 上の C^∞ 級関数とする．自然数 N と $N+1$ 個の実数 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_N$ に対して，$g_N(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{N}a_kx^k$ と定める．ただし，$x^0=1$ とする．このとき，

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-g_N(x)}{x^N}=0$$

となるための必要十分条件は，$a_k=\dfrac{F^{(k)}(0)}{k!}$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ N)$ であることを示せ．

(5) 自然数 N に対して，$S_N=\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\frac{(2k)!\,(2N-2k)!}{(k!)^2\big((N-k)!\big)^2}$ を求めよ．

(広島大 2016)　　(m20164104)

0.689 (1) $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t\ \ (a>0)$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．ただし，途中の計算式も解答用紙に明記すること．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$ の値を求めよ．ただし，途中の計算式も解答用紙に明記すること．

(広島大 2016)　　(m20164109)

0.690 実数 x に対し，

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\qquad \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\qquad \tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$$

と定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)=\tanh x$ のグラフを描け．増減表を書き，変曲点があればすべて求めること．

(2) $|f(x)|\leq\dfrac{4}{5}$ を満たす x からなる区間を求めよ．

(3) $f''(x)+2f(x)\Big(1-f(x)^2\Big)=0$ が成り立つことを示せ．

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)^2dx$ を求めよ．

(広島大 2017)　　(m20174102)

0.691 (1) n を自然数として，$\sin x$ の n 次導関数が $\sin(x+a_n)$ となるような実数 a_n を一つ求めよ．

(2) 数列 $\Big\{b_k\Big\}_{k=0}^{\infty}$ が存在して，任意の実数 x と任意の自然数 n に対して

$\left|\sin x-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}b_kx^k\right|\leq\dfrac{|x|^n}{n!}$　が成り立つ．b_k を求めよ．

(3) $0.841<\sin 1<0.842$ であることを示せ．

(4) $\sin 1$ は無理数であることを示せ．

(広島大 2017)　　(m20174104)

0.692 積分 $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ を考える．重積分 I^2 を，二次元極座標を用いて計算することにより，I を求めよ．

(広島大 2018)　　(m20184107)

0.693 s を正の実数とするとき，ガンマ関数 $\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^{\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$ について，$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ を示せ．

(広島大 2018)　　(m20184108)

0.694 a を正の実数とする．以下の問いに答えよ．ただし，任意の正整数 k に対し，

$$\lim_{t\to\infty} t^ke^{-t}=0$$

が成立することは証明なしに用いてもよい．

(1) 任意の非負整数 n に対し，ある正の実数 C が存在して，$x\geqq 1$ において

$$x^ne^{-ax^2}\leqq Cx^{-2}$$

が成立することを示せ．さらに，任意の非負整数 n に対し，広義積分

$$\int_0^{\infty} x^ne^{-ax^2}dx$$

が収束することを示せ．

(2) 非負整数 n に対し,

$$I_n(a) = \int_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx$$

とおく．$I_1(a)$ および $I_3(a)$ を a を用いて表せ.

(3) $I_n(a)$ を (2) で定めた値とする．非負整数 m に対し，$I_{2m+1}(a)$ を a と m を用いて表せ.

(4) $I_n(a)$ を (2) で定めた値とする．$I_4(a)$ を a を用いて表せ．ただし,

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

であることは証明なしに用いてもよい.

(広島大 2021)　　(m20214103)

0.695 非負整数 n に対し,

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

と定める．ただし，$0! = 1$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) x を実数とする．級数

$$\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$$

は $4|x| < 1$ のとき絶対収束し，$4|x| > 1$ のとき発散することを示せ.

(2) $4|x| < 1$ 満たす実数 x に対し,

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$$

と定める．このとき,

$$(1-4x)f'(x) = 2f(x)$$

が成り立つことを示せ．ここで，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す.

(3) $4|x| < 1$ 満たす実数 x に対し,

$$\sqrt{1-4x}\sum_{n=0}^\infty a_n x^n = 1$$

が成り立つことを示せ.

(4) 級数

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}$$

は ∞ に発散することを示せ.

(広島大 2021)　　(m20214105)

0.696 (1) 次の定積分が収束するかどうかを判定し, 収束する場合はその値を求めよ.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \qquad (\ \alpha\text{は正の定数とする})$$

(2) $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 4\,,\ x+y \geq 2\}$ とするとき, 重積分 $\displaystyle\iint_D x\,dx\,dy$ の値を求めよ.

(広島市立大 2005)　　(m20054201)

0.697 2 重積分 . $S = \displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy\ ,\quad D = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$ を求めることによって,

$I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx$　　を求めたい．このとき以下の問いに答えよ.

(1) $S = I^2$ を示せ.

(2) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と変数変換して S を求めよ．また，I を求めよ.

(広島市立大 2008)　　(m20084201)

0.698 $x > 0$ とする. $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $y = f(x)$ の増減, 凹凸および変曲点を調べ, グラフの概形を描け.

(広島市立大 2010)　　(m20104204)

0.699 無限積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$,　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{1+x^2}\,dx$ の収束発散を調べ，収束する場合はその値を求めよ.

(広島市立大 2012)　　(m20124201)

0.700 次の微分方程式について，以下の問いに答えよ．ただし，a, b は 0 でない定数とする.

$$\frac{dx}{dt} = a - bx$$

(1) この微分方程式の一般解を求めよ.

(2) 初期条件「$t = 0$ のとき $x = 0$」を満たす解を求めよ.

(3) $t \to \infty$ のとき，(2) で求めた解の極限を求めよ.

(広島市立大 2013)　　(m20134203)

0.701 次の極限値を求めよ.　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{2x}$

(山口大 2001)　　(m20014309)

0.702 積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\sin x\,dx$ を求めなさい.

(山口大 2002)　　(m20024301)

0.703 定積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\,dx$ を計算しなさい.

（山口大 2004）　　(m20044303)

0.704 $f(x) = \tan^{-1} x$ のとき, 次の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の導関数を求めよ.

(2) 次の等式を数学的帰納法により証明せよ. ただし，$y = f(x)$ とする.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (n-1)!\,\cos^n y\,\sin\left(ny + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(3) $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ とすると, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$f^{(2m)}(0) = 0, \quad f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m (2m)! \qquad (m = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

(4) 関数 $f(x)$ をマクローリン展開せよ.

(5) 次の等式を証明せよ.

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1}$$

(山口大 2005)　　(m20054311)

0.705 次の極限値を求めよ. (1) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2^n}$ (2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}$

(徳島大 1998) (m19984402)

0.706 次の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ (2) $\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$ （ n は正の整数） (4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\sin^{-1}x}{x^3}$

(徳島大 1999) (m19994401)

0.707 次の問に答えよ.

(1) $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とする. このとき, 行列式 $J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を r,θ で表せ.

(2) (1) で求めた J に対して, $I=\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^\infty f(r\cos\theta,r\sin\theta)Jdr$ であることを用いて, $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ のとき I の値を求めよ.

(徳島大 1999) (m19994402)

0.708 自然数 n に対し, $f_n(x)=nx^n-nx^{2n}$ $(0\leqq x\leqq 1)$ とする.

(1) $f_n(x)$ の最大値を求めよ. (2) $\lim_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ を求めよ.

(2) $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$ が成立することを示せ.

(徳島大 2001) (m20014401)

0.709 微分方程式 $x^2y'+2xy=1$ $(x>0)$ を考える.

(1) すべての解について $\lim_{x\to\infty}y(x)$ を求めよ.

(2) $y(1)=y(2)$ となる解 $y(x)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた $y(x)$ のグラフを描け.

(徳島大 2001) (m20014403)

0.710 関数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ $(x>0)$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $\lim_{x\to+\infty}\log f(x)$ を求めよ. (2) $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ を求めよ.

(2) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{d}{dx}f(x)$ を求めよ.

(徳島大 2003) (m20034401)

0.711 $y=y(x)$ に対する微分方程式 $y''+y'-2y=0$ を考える.

(1) 一般解を求めよ.

(2) a を定数として, 初期条件 $y(0)=1$, $y'(0)=a$ を満たす解を求めよ.

(3) (2) の解が $\lim_{x\to+\infty}y(x)=0$ となるように, a の値を定めよ.

(徳島大 2003) (m20034403)

0.712 一般項が $a_n\geqq 0$ の級数（正項級数）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ に対して, 次を示せ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ および $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ は収束する.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ が収束するとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ が収束しても $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しないことがある. その具体的な例を示せ.

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束, 発散に関係なく $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2a_n}$ は収束する.

（徳島大 2004） (m20044401)

0.713 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ $(n=1,2,\cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ について, 次の問に答えよ.

(1) $1 < a_n < 2$ $(n=1,2,\cdots)$ が成り立つことを示せ.

(2) $a_n < a_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$ が成り立つことを示せ.

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(徳島大 2005) (m20054402)

0.714 $y = y(x)$ が微分方程式 $y'' + 2y' + 5y = 0$ を満たす. 次の問に答えよ.

(1) 微分方程式の一般解を求めよ. ただし, 最終結果に複素数が現れてはならない.（必要ならオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いてもよい.）

(2) 初期条件 $y(0) = y'(0) = -e^{\frac{3}{4}\pi}$ を満たす微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた $y(x)$ に対し, $y\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)$ と $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x)$ を求めよ.

(徳島大 2005) (m20054404)

0.715 $x \neq 0$ として, $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{x}$ を考える.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ を求めよ.　(2) $f'(x)$ を求めよ.　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x)$ を求めよ.

(徳島大 2007) (m20074402)

0.716 $0 \leqq a \leqq 1$ に対して, 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a & 1 & -1 \\ 0 & 9a & 3 \\ \frac{3}{4}a & 1 & -a \end{pmatrix}$ とする. 次の問いに答えよ. ここで, $\det(M)$ は正方行列 M の行列式を表す.

(1) $\det(A)$ を求めよ.

(2) $f(a) = \det(A)$ とする. $f(a)$ のグラフを図示せよ.

(3) n を自然数とする. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \det(A^n)$ を求めよ.

(徳島大 2011) (m20114401)

0.717 $\alpha > 1$ とする. 広義積分 $I_\alpha = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^\alpha}\,dx$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $x^{1-\alpha}\log x$ を微分せよ.

(2) $R > 1$ とする. $\displaystyle\int_1^{R} \frac{\log x}{x^\alpha}\,dx$ を求めよ.

(3) I_α を求めよ.

(徳島大 2011)　　(m20114402)

0.718　広義積分 $I=\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$t=x+\sqrt{x^2+1}$ おいたとき，x を t で表せ．

(2)　(1) の変数変換により，I を t の積分に変換せよ．

(3)　I の値を求めよ．

(徳島大 2012)　　(m20124403)

0.719　$I=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\log x}}dx$,　$J=\displaystyle\int_0^1 \sqrt{-\log x}\ dx$ を考える．次の問いに答えよ．

(1)　$0<x<1$ において $\sqrt{-\log x}$ を微分せよ．

(2)　J を I で表せ．

(3)　$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を利用して J を求めよ．

(徳島大 2014)　　(m20144402)

0.720　$f(x)=x\log\left(e+\dfrac{1}{x}\right)\quad(x>0)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$\alpha=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ とする．α を求めよ．

(2)　(1) で求めた α に対して，$\beta=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\Big(f(x)-\alpha x\Big)$ とする．

$t=\dfrac{1}{x}$ とおくと，$x\to\infty$ のとき $t\to+0$ であることを利用して，β を求めよ．

(3)　(1),(2) で求めた α, β に対して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(\alpha x+\beta)}{\frac{1}{x}}$ を求めよ．

(徳島大 2015)　　(m20154402)

0.721　$D=\{(x,y)\ :\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0,\ x+y\geqq\ 1\}$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　$u=x+y,\ v=\dfrac{y}{x+y}$ とおく．x,y を u,v の式で表せ．また，行列式 $J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$ を求めよ．

(2)　$\displaystyle\int_0^1 v\sin(\pi v)dv$ を求めよ．

(3)　$f(x,y)=\dfrac{y}{x+y}e^{-(x+y)}\sin\left(\dfrac{\pi y}{x+y}\right)$ に対して，$I=\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ を求めよ．ここで，(1) の変換により $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^1 dv\int_1^\infty f\big(x(u,v),\ y(u,v)\big)|J(u,v)|du$ となることを用いてよい．

(徳島大 2015)　　(m20154403)

0.722　実数 x の関数 $\varphi(x)$ および $\varphi_N(x)$ を

$$\varphi(x)=e^{-x^2},\quad \varphi_N(x)=N\varphi(Nx)\qquad(N=1,2,3,\cdots)$$

で定義する．実係数の多項式 $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$ が与えられたものとして，次の各問いに答えなさい．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_N(x)p(x)dx$ の値を求めなさい．

(2) 実数 c に対して，極限 $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_N(x-c)p(x)dx$ の値を求めなさい．

なお，解答に必要なら $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\sqrt{\pi}$ を用いてもよい．

（高知大 2001） (m20014501)

0.723 自然数 n に対して $H_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{H_n\}$ は発散することを示せ． (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{H_n}{\log n}=1$ であることを示せ．

（高知大 2001） (m20014502)

0.724 実数 x の関数 $S_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k$ について，次の各問いに答えなさい．

(1) 等式 $S_n(x)=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ が成り立つことを示しなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n(x)$ が収束する x の範囲を求めなさい．

(3) $S_n(x)$ の導関数 $S_n'(x)$ を求めなさい．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n'(x)$ が収束する x の範囲を求めなさい．

（高知大 2001） (m20014503)

0.725 $f(x)$ を閉区間 $I=[a,b]$ 上の連続関数とする. I 上に $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n$ を

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

となるように選び, I の分割と呼び Δ で表す. また

$$|\Delta|=\max_{1\leq i\leq n}(x_i-x_{i-1})$$

とする. さらに $x_{i-1}\leq\xi_i\leq x_i$ を満たす ξ_i をとり, $\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$ をこの分割の代表系と呼び, $\xi(\Delta)$ で表す. このとき

$$S\left(f,\xi(\Delta)\right)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

を分割 Δ とその代表系 $\xi(\Delta)$ に関するリーマン和と呼ぶ. 任意の分割の列と任意の代表系に対して

$$\lim_{|\Delta|\to0}S\left(f,\xi(\Delta)\right)$$

が一意に存在する. その極限 S を $f(x)$ の I における積分といい

$$\int_a^b f(x)dx=S$$

とかく. この定義を用いて次の問に答えよ. ただし, 以下において $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で正値連続な関数とし

$$f_{in}=f(a+i\delta_n)\,,\qquad \delta_n=\frac{b-a}{n}$$

とする.

(1) 次の式を示せ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{1n}+f_{2n}+\cdots f_{nn}}{n}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

(2) 次の式を示せ.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f_{1n}f_{2n}\cdots f_{nn}}=\boldsymbol{e}^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f(x)dx}$$

(3) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)}$$

(高知大 2005) (m20054501)

0.726 次の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ は, $|x|<K$ で少なくとも $(n+1)$ 回微分可能であるとする. このとき, $f(x)$ の n 次のマクローリン展開式（すなわち, $x=0$ を中心とする n 次のテーラー展開式）を求めよ（証明は不要）.

(2) $|x|<1$ における関数 $f(x)=(1+x)^{-1}$ の n 次のマクローリン展開式において, ラグランジュの剰余項 $R_{n+1}(x)$ を求め, $\lim\limits_{n\to\infty}R_{n+1}(x)=0$ を示せ.

(3) (2) の $f(x)$ のマクローリン級数展開を求めよ.

(高知大 2005) (m20054503)

0.727 n を自然数とし

$$f_n(x)=\max\left\{-\frac{3}{4n^3}x^2+\frac{3}{2n^2}x\,,\ 0\right\}$$

とする．ここで $\max\{a,b\}$ は a と b の小さくない方を表すとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^\infty f_n(x)dx$

(2) $x\in[0,\infty)$ に対して，次の極限値を求めよ． $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$

(3) 次を示せ． $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx\neq\int_0^\infty\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx$

(高知大 2006) (m20064502)

0.728 $\alpha>0$ のとき，広義積分 $f(t)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}x^{t-1}dx$ は $t>0$ に対して定義される．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $f(1)$ を求めよ.

(2) $t>0$ に対して，$\lim\limits_{x\to\infty}e^{-\alpha x}x^t=0$ を示せ.

(3) $t>0$ に対して，$\alpha f(t+1)=tf(t)$ が成り立つことを示せ.

(4) 正の整数 n に対して，$f(n+1)$ を求めよ.

(高知大 2007) (m20074503)

0.729 数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ を次のように定義する.

① $a_1=1$

② n が素数のときは $a_n=n$

③ $n\geq 2$ が素数でないときは $a_n=\dfrac{1}{m}$, ただし, m は n の 2 以上の約数の中で最小のものとする.

このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 初項から第 10 項までを求めよ.

(2) $\dfrac{1}{2}$ に収束する部分列をひとつ求めよ.

(3) 0 に収束する部分列をひとつ求めよ.

(4) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しないことを示せ.

(高知大 2010) (m20104501)

0.730 べき級数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ を考える．次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の項別微分を求めよ.

(2) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ は収束することを示せ.

(3) $f(x)$ は開区間 $(-1, 1)$ で収束することを示せ.

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} f(x)dx$ の値を求めよ.

(高知大 2011) (m20114502)

0.731 次の問いに答えよ.

(1) 微分可能な関数 $f(x)$ が微分可能な逆関数 $f^{-1}(x)$ を持つとする．このとき，次の式を示せ,

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

(2) $f(x) = \tan x$ とし，$\tan x = t$ とおく．(1) を用いて次の式を示せ.

$$(f^{-1})'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

(3) (2) を用いて次の式を示せ.

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{3}$$

(4) 次の値を求めよ.

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

(高知大 2013) (m20134501)

0.732 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{x^2} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $x \neq 0$ のとき，$f'(x)$ を求めよ.

(2) 任意の実数 x に対して，$|f(x)| \leqq x^2$ であることを示せ.

(3) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能かどうかを理由を挙げて答えよ.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xf'(x)$ を求めよ.

(高知大 2014) (m20144501)

0.733 次の問いに答えよ.

(1) 実数 s に対して，不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{s+x}dx$ を求めよ.

(2) 正の整数 n と正の実数 t に対して $f_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t+\frac{k}{n}}$ とおく.
t を固定したとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(t)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた極限を $f(t)$ とおく． $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{f(t)}{\log(1-e^{-t})}$ を求めよ．

(高知大 2015) (m20154501)

0.734 $f(x)$ は開区間 $(-1,1)$ 上で連続な正値関数で,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = 1$$

を満たすとする．さらに，正の整数 n ごとに実数直線 $\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f_n(x)$ を,

$$f_n(x)=\begin{cases} nf(nx) & \left(x\in\left(-\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n}\right)\text{のとき}\right)\\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

で与える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$ を求めよ．

(2) N を正の整数とし，ε を正の数とする．$\mathbb{R}$ 上で定義された連続関数 $g(x)$ が閉区間 $\left[-\dfrac{1}{N},\ \dfrac{1}{N}\right]$ 上で $\Big|g(x)\Big|<\varepsilon$ を満たせば，$n>N$ を満たす任意の整数 n に対して,

$$-\varepsilon \leqq \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x)dx \leqq \varepsilon$$

であることを示せ．

(3) $\mathbb{R}$ 上で定義された任意の連続関数 $h(x)$ に対して，$a_n=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)h(x)dx$ とおく．

このとき，$g(x)=h(x)-h(0)$ に対して (2) の結果を利用することにより，
数列 $\{a_n\}$ は $n\to\infty$ のとき $h(0)$ に収束することを示せ．

(高知大 2016) (m20164502)

0.735 次の極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)$ を求めよ．

(高知大 2016) (m20164505)

0.736 (1) 任意の $x>0$ に対して

$$\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}$$

が成り立つような定数 a,b,c を求めよ．

(2) $r>0$ のとき，次の広義積分の値を r を用いて表せ．

$$\int_r^{\infty}\frac{dx}{x(x+1)^2}$$

(3) (2) で求めた広義積分の値を $I(r)$ とおく． $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\big(r^2 I(r)\big)$ を求めよ．

(高知大 2017) (m20174502)

0.737 正の整数 n と実数 $x<1$ に対して，$R_{n+1}(x)=\log(1-x)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}$ とおく．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{R_{n+1}(x)}{x^{n+1}}$ の値を求めよ．

(2) $|x| < 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} R_{n+1}(x) = 0$ を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{R_4(x)}{\dfrac{1}{1-x^2} - 1 - x^2}$ の値を求めよ．

(高知大 2019)　　(m20194501)

0.738 $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ とする．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x \to -0} f(x)$ を求めよ．

(4) $y = f(x)$ の増減を調べて，グラフを描け．

(愛媛大 2000)　　(m20004601)

0.739 $0 < a < 1$ とする．

(1) $\displaystyle\int_a^1 \log x dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{a \to 0} \int_a^1 \log x dx$ を求めよ．ただし，計算途中で不定形の極限ができた場合，その計算過程も明記すること．

(3) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log k - \log n \right)$ を求めよ．

(愛媛大 2000)　　(m20004602)

0.740 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{4 - \cos^2 x} dx$

（愛媛大 2004）　　(m20044602)

0.741 $f(x)$ を $(0, \infty)$ 上で 2 回微分可能な関数とする．$0 < a < b$ とし，

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{K}{2}(b-a)^2$$

を満たす定数を K とする．

(1) $F(x) = f(b) - \{f(x) + f'(x)(b-x) + \dfrac{K}{2}(b-x)^2\}$ とおくとき，$F'(x)$ を求めよ．

(2) $K = f''(a + \theta(b-a))$ を満たす $0 < \theta < 1$ が存在することを示せ．

(3) すべての $x > 0$ に対して $f''(x) \geqq \delta$ を満たす定数 $\delta > 0$ が存在するとき，

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

であることを示せ．

(愛媛大 2005)　　(m20054608)

0.742 (1) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \sqrt{x}(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1})$　　(b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$

(2) 次の関数を微分せよ．

(a) $x \sin^{-1} x$　　(b) $\log \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$　　(c) $a^{x \log x}$（ただし，a は $a \neq 1$ である正の定数）

(愛媛大 2006)　　(m20064601)

0.743 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}\tan^{-1} x$ について，次の各問に答えよ．

(1) $f(x)$ は区間 $(0, \infty)$ 上単調減少であることを示せ．

(2) 次の定積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} x^3 f\left(\frac{1}{2}x^2\right) dx$

(愛媛大 2006) (m20064606)

0.744 $a > 0$ とし，$x_n = \left(\dfrac{a}{1+a}\right)^n$, $n = 1, 2, \cdots$ とする．

(1) $\{x_n\}$ は有界な単調減少数列であることを示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ の値を求めよ． (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx_n$ の値を求めよ．

(愛媛大 2006) (m20064608)

0.745 n を自然数とするとき，関数 $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{t^n}{t^{2n}+2}dt$ について次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ が $x = 1$ で極値を持つように n の値を定めよ．

(2) (1) の n に対して $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ を求めよ．

(愛媛大 2006) (m20064610)

0.746 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{(x+a)(x+b)} - \sqrt{(x-a)(x-b)}\right\}$ （a, b は定数） (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x \tan(t^2)dt$

(愛媛大 2006) (m20064611)

0.747 すべての実数 x に対して，$f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^3+1}{t^2+1}dt$ とする．

(1) $f(x)$ を計算せよ． (2) $x > 0$ のとき $f(x) > 0$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$ の値を求めよ．

(愛媛大 2007) (m20074608)

0.748 (1) 次の不定積分を計算せよ．ただし，$x > 0$ で n は自然数とする． $\displaystyle\int x^n \log x\, dx$

(2) 次の定積分を計算せよ． $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\, dx$

(3) 3 点 $A = (-x_1, x_2, 0)$, $B = (0, x_2, x_3)$, $C = (x_1, 0, x_3)$ を頂点とする三角形の面積を求めよ．

(4) 次の極限値を求めよ．ただし，a は定数とする． $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k+a}$

(愛媛大 2008) (m20084607)

0.749 (1) (a) 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{\cos x} - 1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0$ を示せ． ただし，n は自然数とする．

(2) 次の関数の導関数を求めよ．

(a) $\log|2x+1|$ (b) $\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ (c) $(\sin x)^{\sin x}$

(愛媛大 2008) (m20084608)

0.750 (1) 次の広義積分を求めよ. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)\tan^{-1} x}$

(2) 次の不定積分を求めよ. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)^2}$

(愛媛大 2008) (m20084609)

0.751 (1) 次の曲線の長さを求めよ.

$$y = \frac{1}{2}\log x - \frac{1}{4}x^2 \quad (1 \leqq x \leqq e)$$

(2) $a > 0$ のとき, 次の広義積分が収束するための a の条件を求め, そのときの積分の値を求めよ.

$$\int_e^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^a}\,dx$$

(愛媛大 2009) (m20094602)

0.752 (1) $x = \sin t \left(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおいて, 次の不定積分を求めよ. ただし, 最終的な答えは x の関数で表わすこと.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

(2) $S(x) = \displaystyle\int_1^x \log t\,dt$ とする. 次の値を求めよ.

(a) $S'(e)$ (b) $S(e)$ (c) $\displaystyle\int_1^e e^{S(x)}\log x\,dx$ (d) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{S(x)}}{x^x}\,dx$

(愛媛大 2010) (m20104602)

0.753 (1) $f(x) = \tan^{-1} x + \tan^{-1}\dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ とおく. ただし, $\tan^{-1} x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする.

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ. (b) $f(2)$ の値を求めよ.

(2) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - e^{-4x}}{\sin 5x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{\log x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}\right)$

(愛媛大 2011) (m20114607)

0.754 (1) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

(2) x の関数 $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ を微分せよ.

(3) $f(x) = \cos^{-1}(\sin x)$ とおく. ただし, $\cos^{-1} x$ の値域は $[0, \pi]$ とする.

(a) $f(\frac{\pi}{2})$ を求めよ.

(b) $f(x)$ を微分せよ.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f'(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f'(x)$ を求めよ.

(愛媛大 2013) (m20134601)

0.755 $f(x) = \dfrac{x}{(\log x)^2}$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)}$ を求めよ.

(2) 区間 $(1, \infty)$ における関数 $y = f(x)$ の増減を調べ, そのグラフをかけ.

(3) $D = \{(x, y) \mid x > 1,\ y \geqq f(x)\}$ とする. 領域 D における $x + y$ の最小値を求めよ.

(愛媛大 2014)　　(m20144601)

0.756 (1) 次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{x^3 - x - 1}{x^2 + 1} dx$$

(2) 次の広義積分を求めよ．

$$\int_1^{\infty} \frac{2}{e^x - e^{-x}} dx$$

(愛媛大 2014)　　(m20144602)

0.757 (1) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\cos \frac{4}{x}\right)^{x^2}$

(2) x の関数 $x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x$ を微分せよ．

(3) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi$$

ただし，$\cos^{-1} x$ の値域は $[0,\ \pi]$ とする．

(愛媛大 2015)　　(m20154601)

0.758 (1) 次の不定積分を求めよ．　$\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2-1)} dx$

(2) 次の広義積分を求めよ．ただし，$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いてよい．

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx$　　(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$　　(c) $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} x^2 e^{-x^2-2x-2} dx$

(愛媛大 2015)　　(m20154602)

0.759 $a > 1$ とし，$f(x) = (e^x - 1)(e^x - a)$ とおく．

(1) 関数 $y = f(x)$ の増減，極値，および $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ を調べ，グラフの概形をかけ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(3) S を (2) で求めた値とするとき，$\displaystyle\lim_{a \to 1+0} \frac{S}{(a-1)^3}$ を求めよ．

(愛媛大 2016)　　(m20164604)

0.760 $a,\ b$ は実数で，$a > 0$ とする．関数 $f(x) = \dfrac{bx+1}{x^2+a}$ が $x = -1$ で極値 $\dfrac{1}{2}$ をとるとき，以下の問いに答えよ．

(1) $a,\ b$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の増減，極値および極限 $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ を調べ，グラフの概形を描け．

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸，y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(愛媛大 2017)　　(m20174611)

0.761 (1) 次の関数の導関数を求めよ．ただし，a は正の定数とする．

(a) $\sin^{-1}(x^2)$　　(b) $x^{\sin x}$　$(x > 0)$　　(c) $\log\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)$

(2) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x}$

(愛媛大 2018)　　(m20184601)

0.762 (1) 次の不定積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$ (b) $\displaystyle\int e^{\cos x}\sin 2x dx$

(2) 次の広義積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+3}$$

(愛媛大 2018) (m20184602)

0.763 (1) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2x\tan x-\frac{\pi}{2}}{\sin x-\cos x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log\left(\frac{x+2}{x+4}\right)$

(2) $f(x)=\sqrt{x+2}$ とする.

(a) 3 階までの導関数 $f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)$ を求めよ.

(b) 次の式

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-a_0-a_1x-a_2x^2}{x^2}=0$$

が成り立つように定数 $a_0,\ a_1,\ a_2$ を定めよ.

(愛媛大 2021) (m20214601)

0.764 次の不定積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+\sin^2 x)\tan x}dx$ (b) $\displaystyle\int x^9 e^{-x^{10}}dx$

0.765 次の広義積分が収束するように定数 a を定め，そのときの広義積分の値を求めよ.

$$\int_1^{\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}-\frac{a}{\sqrt{x}}\right)dx$$

(愛媛大 2021) (m20214602)

0.766 (1) 次の極限値を求めよ．ただし，$[x]$ は，実数 x を超えない最大の整数とする.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+3x^2)}{\log(5+7x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0} \frac{x^2-[3x]x+2}{x-1}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^{x/2} \frac{dt}{(\sin x)\sqrt{1-t^2}}$

(2) 次の関数の導関数を求めよ.

(a) $\sqrt{1+\cos^2 x}$ (b) $\sin^{-1}(\log x)$

(愛媛大 2022) (m20224606)

0.767 (1) 次の不定積分と定積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin^2 x\,dx$

(2) 次の広義積分を求めよ.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2+3}$$

(愛媛大 2022) (m20224607)

0.768 $\{a_n\}$ を数列とする.

(1) $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = a$ となることを示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = a$ であっても $\lim_{n\to+\infty} a_n$ が存在するとは限らないことを反例によって示せ.

(九州大 1997) (m19974702)

0.769 a , b , c を実定数とするとき

$$Q = Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \ , \quad -\infty < x, y < +\infty$$

について，次の問に答えよ.

(1) $Q = (x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる実対称行列 A を求めよ.

(2) $(x,y) \neq (0,0)$ ならば $Q < 0$ となる a , b , c の条件を求めよ.

(3) (2) で求めた条件のもとで A の固有値がすべて負になることを示せ.

(九州大 1997)　　(m19974704)

0.770 重積分 $\displaystyle\iint_D (y^2 - x^2)e^{-(x+y)^2}\,dx\,dy$ の値を求めよ.
ただし, $D = \{\,(x,y) \mid 0 \leq y - x \leq y + x < +\infty\,\}$ である.

(九州大 1998)　　(m19984705)

0.771 1つのさいころを続けて振るとき，以下の問いに答えよ.

(1) k 回目に初めて 1 の目が出る確率 p_k $(k = 1, 2, \cdots)$ を求めよ．また $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kp_k$ を求めよ.

(2) k 回目に 2 度目の 1 の目が出る確率 q_k $(k = 2, 3, \cdots)$ を求めよ.

(九州大 2000)　　(m20004704)

0.772 次の積分の計算をしなさい.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin x}\log(1 + \sin x)dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} t^2 e^{-t} dt$

(九州大 2001)　　(m20014701)

0.773 z を複素数とする．複素平面上の経路 C に沿う積分 $\displaystyle\int_C \frac{e^{az}}{1 + e^z}dz$ $(0 < a < 1)$ について次の問に答えよ.

(1) 積分路 C を 4 点 $-R, R, R + i2\pi, -R + i2\pi$ $(R > 0)$ を頂点とする長方形にとるとき，C で囲まれる領域内にある特異点，およびその点における留数を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x}dx$ $(0 < a < 1)$ を計算せよ.

(九州大 2003)　　(m20034708)

0.774 複素平面上の中心 a, 半径 r の半円 $C_r(a)$ を $C_r(a) = \{z = a + re^{i\theta}\ ;\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$ で定める. ただし, $i = \sqrt{-1}$ である.

(1) 正則関数 $f(z)$ に対して次式を示せ. $z = a + \varepsilon e^{i\theta}$ とおいて考えよ.

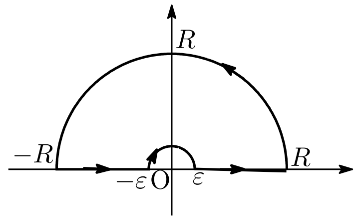
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{z - a}dz = i\pi f(a)$$

(2) 不等式 $\dfrac{2}{\pi}\theta \leq \sin\theta \left(0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が成立つことを示せ.

(3) (2) の結果を用いて次式を証明せよ.

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R(0)} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$

(4) 関数 $\dfrac{e^{iz}}{z}$ の積分を図の矢印に示す道に沿って考えること により, 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ の値を計算せよ.



（九州大 2004）　　(m20044708)

0.775 (1) 2つの任意の自然数 m, n について，次をそれぞれ示せ.

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$　　(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0\ ;\ m \neq n \\ \pi\ ;\ m = n \end{cases}$

(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0\ ;\ m \neq n \\ \pi\ ;\ m = n \end{cases}$

(2) 周期 2π の関数 $f(x)$ がフーリエ級数に展開できる，つまり　$f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ と表現できるとき，

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$　(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos pxdx$　(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin pxdx$　$(\ p = 1, 2, \cdots)$

をそれぞれ計算せよ.

(3) 周期 2π の関数 $f(x) = |x|\ ;\ -\pi < x \leq \pi$ をフーリエ級数に展開せよ.

(4) (3) の結果を用いて，

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$　(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$　(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$　をそれぞれ計算せよ.

（九州大 2006）　　(m20064704)

0.776 有名な公式 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\quad (a > 0)$
の両辺を a に関して微分して,「形式的に微分と積分の順序を交換」すれば

$$-\frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}} = \frac{d}{da}\left(\int_0^\infty e^{-ax^2}dx\right) = \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial a}e^{-ax^2}\right)dx = -\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}dx\ ,$$

すなわち

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}} \qquad (*)$$

となる．この問題の目的は，$(*)$ が実際に成立することを上の手順で示すことである.

(1) 任意の $h > 0$ に対して，不等式　$0 \leqq \dfrac{e^{-hx^2} - 1}{h} + x^2 \leqq \dfrac{hx^4}{2}\ ,\quad x \in \mathbb{R}$　を示しなさい.

(2) $\displaystyle\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2}dx < \infty$ を示しなさい.

(3) (1), (2) を用いて $(*)$ を示しなさい.

（九州大 2006）　　(m20064705)

0.777 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を関数とし、$\alpha, \beta, x_0 \in \mathbb{R}$ とする.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば，正数 M が存在し，すべての n に対して $|a_n| \leqq M$ となることを示しなさい.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ となることを示しなさい.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) \neq \alpha$ とする．このとき，正数 $\varepsilon > 0$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ となる実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在し，$|f(x_n) - \alpha| \geq \varepsilon\ (n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示しなさい.

(4) 次の二つの条件が同値であることを示しなさい.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$.

(b) 実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ を満たせば，$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$.

(九州大 2006)　　(m20064709)

0.778 e を自然対数の底とするとき，関数 $f(x) = e^{-x^2}$ と，その n 次 (n 階) 導関数 $f^{(n)}(x)$ を考える．以下の問に答えよ．

(1) $f^{(n)}(x) = p_n(x)e^{-x^2}$ と表すとき，多項式 $p_1(x)$, および $p_2(x)$ を求めよ．

(2) 任意の非負整数 k に対して，$\lim_{x\to+\infty} x^k f(x) = 0$ となることを示せ．

(3) 次の広義積分 $I = \int_o^{+\infty} p_1(x)p_2(x)f(x)dx$ の値を求めよ．

(九州大 2006)　　(m20064713)

0.779 連続型の確率変数を X とする．X が a 以下の値をとる確率を $P_X(a)$ とし，$P_X(a)$ が以下で与えられているものとする．以下の設問に答えよ．

$$P_X(a) = \begin{cases} 0 & (-\infty \leq a < -T) \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi a}{2T}\right) & (-T \leq a \leq T) \\ 1 & (T \leq a \leq \infty) \end{cases}$$

(1) X が値 X_0〜X_1（ただし，$X_0 < X_1$ とする）のいずれかをとる確率を求めよ．

(2) X が任意の定数 B となる確率を求めよ．　(3) X の確率密度関数 $p(X)$ を求めよ．

(4) X の平均を求めよ．　(5) X の標準偏差を求めよ．

(九州大 2007)　　(m20074704)

0.780 正の実数 $p > 0$ に対して，定積分 $f_n(p) = \int_0^1 \dfrac{1}{1+nx^p}\,dx$, $n = 1, 2, \cdots$ を考える．

(1) 次の極限値を求めよ．$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, f_n(2)$

(2) $0 < \varepsilon < 1$ に対して $f_n(p)$ の積分区間を $[\,0,\ \varepsilon\,]$ と $[\,\varepsilon,\ 1\,]$ に分けることにより次の不等式を示せ．

$$0 < f_n(p) < \varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{1+n\varepsilon^p}$$

(3) (2) を用い $\lim_{n\to\infty} f_n(p) = 0$ であることを示せ．

(九州大 2007)　　(m20074705)

0.781 ω を実数として，$y(x)$, $-\infty < x < \infty$ に関する二階常微分方程式 $y'' + 2y' + y = \sin\omega x$ を考える．

(1) $\omega = 0$ のとき，この微分方程式の一般解を求めよ．

(2) $\omega \neq 0$ のとき，この微分方程式の一般解を求めよ．

(3) 各 ω に対して，$x \to -\infty$ のとき $y(x)$ が有界にとどまる解はただ一つ存在することを示せ．

(九州大 2007)　　(m20074706)

0.782 a を正の定数，e を自然対数の底とし，$f(x) = e^{ax}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して，$f(x)$ の n 次（n 階）導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ のマクローリン展開（x の巾 (べき) 級数の形での展開）を求めよ．

(3) N を自然数とするとき，次の級数の和を求めよ．$\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \frac{x^n}{(n-N)!}$

(九州大 2007)　　(m20074710)

0.783 (1) $n=0,1,2$ に対して，次の不定積分を求めよ． $\displaystyle\int \frac{x^n}{x^2+1}dx$

(2) n を負でない整数とするとき，次の広義積分は収束するか発散するか，いずれであるかを判定せよ．収束する場合は広義積分の値を求め，発散する場合はその理由を示せ．

$$\int_1^{\infty} \frac{x^n}{x^2+1}dx$$

(九州大 2007)　　(m20074711)

0.784 xy 平面上の任意の点の 1 秒ごとの移動の様子が，次の行列 A で表される一次変換によって与えられるとする．

$$A=\begin{pmatrix} 5/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

xy 平面上の点 (x_0, y_0) が n 秒後に到達する点 (x_n, y_n) は，次の漸化式によって与えられる．ただし，n は $n \geq 1$ の整数．

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

(1) 原点から見たいくつかの方向では，時間と共に向きが変化しない．すなわち，ゼロベクトルでない $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し，次の関係式が成り立つ．

$$A\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}$$

上式を満たす固有値 λ の値 a, b と，それぞれに対する固有ベクトル $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ を求めよ．ただし，$a<b$ とし，(p,q), (r,s) はそれぞれ整数の組で，$p>0$, $r>0$ とする．

(2) 前問の結果を用いて，$P=\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ．

(3) 座標 (x_n, y_n) を (x_0, y_0) と n を用いて表せ．
（ヒント）$(P^{-1}AP)^n=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)=p^{-1}A^nP$

(4) 前問の (x_0, y_0) が，媒介変数 s を用いて $(x_0, y_0)=(s,s)$ で表される直線上の任意の点であるとする．s が実数全体を動くとき，(x_n, y_n) の描く図形の方程式を求めよ．また，$n\to\infty$ のとき，この図形はどのような図形に近づくか答えよ．

(九州大 2008)　　(m20084701)

0.785 あるセルフサービスのカフェテリアでは，昼に 3 種類のランチメニューがある．客は順番に並んで，メニュー 1, メニュー 2, メニュー 3 のどれか一つのメニューを選ぶとする．N 番目の客がメニュー j を選んだとき $N+1$ 番目の客がメニュー i を選ぶ確率は a_{ij} であるとする．($i, j=1,2,3$, a_{ij} は N に依存しない.) 一方，N 番目の客がメニュー j を選ぶ確率を $p_j(N)$ と置く．

(1) N 番目の客がメニュー j を選んだとき $N+2$ 番目の客がメニュー i を選ぶ確率を a_{ij} を使って表せ.

(2) $i\neq j$ である時 $a_{ij}=q$ (q は i, j によらない正の数, $q>0$) $a_{ii}=p$ (p は i によらない正の数 , $p>0$) とする．このとき q と p が満たすべき関係式を述べよ．

(3) (2) の仮定をする．3 行 3 列の行列 A を ij 成分が a_{ij} となる 3 行 3 列の行列とする．A^2 を単位行列と F で表せ．ただし，F は次で定まる行列とする．

$$F=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) (2) の仮定のもとで行列 A のべき乗 A^N を求めよ．これを使い N 番目の客がメニュー 1 を選ぶ確率 $p_1(N)$ を $p_i(1)$ $(i=1,2,3)$ と q で表す公式を求めよ．

(5) (2) の仮定のもとで $\lim\limits_{N\to\infty} p_j(N)$ を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084704)

0.786 A 君と B 君はそれぞれコインを a 枚，b 枚持っている．2 人のコインの合計枚数を $N(N=a+b,\ N>0)$ とする．中を見ることができない箱の中に，$p:(1-p)$ の割合で赤いボールと白いボールが入っており，そこから 1 個のボールを取り出す．ただし，$0<p<1$ とする．赤いボールがでたら A 君が B 君からコインを 1 枚受け取り，白いボールがでたら A 君が B 君にコインを 1 枚渡す．コインの受け渡し後，取り出したボールは元の箱の中に戻すものとする．この操作を繰り返し，A 君，B 君のどちらか一方のコインが無くなった時点で，無くなった方を負けとする．A 君が a 枚のコインを持っている時に A 君が負ける確率を $R(a)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $R(0)$ と $R(N)$ はそれぞれいくつか.

(2) A 君が a 枚コインを持っている時に赤いボールを取り出せば，$R(a)$ であった A 君の負ける確率が $R(a+1)$ となり，白いボールを取り出せば $R(a-1)$ となる． このことから $R(a)$ を $R(a+1)$, $R(a-1)$, p を用いて表せ．ただし，$0<a<N$ とする．

(3) $R(0)$ として (1) で求めた値を利用し，さらに $R(1)=r_1$ とするとき，(2) で求めた関係式から $R(a)$ を求めよ．

(4) (1) で求めた $R(N)$ と (3) の結果を用いて $r_1(=R(1))$ を求めよ．

(5) a を変えずに $b\to\infty$ とした時の $R(a)$ を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084705)

0.787 xyz 空間において，　$z=e^{-(x^2+y^2)}$　で表される曲面 Σ がある．以下の問いに答えよ．

(1) 曲面 Σ と　$z=0,\ x^2+y^2=na^2$　によって囲まれる部分の体積 V_n を求めよ．ただし，n は自然数である．

(2) 曲面 Σ と　$z=0,\ x=a,\ x=-a,\ y=a,\ y=-a$　によって囲まれる部分の体積を V とする．xy 平面において，　$y=e^{-x^2},\ y=0,\ x=a,\ x=-a$　で囲まれる部分の面積を S とした時，V と S の関係を示せ．

(3) V を V_1, V_2 と比較することによって，　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$　を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084708)

0.788 $G(x,t)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4t}\right)$ とおく．ただし，$\exp z=e^z$ である．

(1) $t>0$ のとき

$$\frac{\partial G}{\partial t}-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=0$$

であることを示せ.

(2) $t>0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x,t)\,dx=1$$

であることを示せ．ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}=\sqrt{\pi}$ を用いてよい.

(3) f を $\boldsymbol{R}=(-\infty,\ \infty)$ 上の有界な連続関数とするとき，すべての $x\in\boldsymbol{R}$ に対して，

$$\lim_{t\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t)f(y)\,dy=f(x)$$

であることを証明せよ.

(九州大 2008)　　(m20084712)

0.789 A を $n\times\ n$ 実行列とする．V を n 実ベクトル $\boldsymbol{v}$ で

$$\lim_{m\to\infty} A^m\boldsymbol{v}=0 \quad (m \text{ は自然数})$$

となるものの全体とする．

(1) V は $\boldsymbol{R}^n$ の線形部分空間であることを示せ．

(2) $n=3$ で

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -9/4 & 1/2 \\ -3/2 & 1 & 1/2 \\ 3/2 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

とするとき，A の固有値は $-1,\ 2\pm\sqrt{2}$ であることを示せ．

(3) A が (2) で与えられるとき V を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084713)

0.790 (1) 区間 $I=(0,1)$ で定義された微分可能な非負関数 $g(x)$ が区間 I で $f(x)=e^{-x^2}$ に対して $f(g(x))=x$ を満たすとき，区間 I において，$g(x)$ および導関数 $g'(x)$ を求めよ．

(2) 次の広義積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{xg'(x)}$

ただし，　$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　を用いてよい．

(九州大 2008)　　(m20084717)

0.791 $\displaystyle f(x)=\sin\frac{x}{2},\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx\,,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx\,,$

$\displaystyle g(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ とおく．ただし，n を自然数とする．

(1) フーリエ係数 a_n , b_n を計算せよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ は発散することを示せ．

(3) フーリエ級数 $g(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ で収束することを示せ．

(4) $x=\pm\pi$ で $f(x)$ と $g(x)$ がどのような関係にあるか述べよ．

(九州大 2009)　　(m20094703)

0.792 a を正の定数とするとき, 以下の各問いに答えよ. ただし, e は自然対数の底とする.

(1) 任意の自然数 n に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-ax}=0$$

(2) 次の広義積分の値を求めよ.

$$\int_0^\infty x^2e^{-ax}\,dx$$

(3) 次の広義積分の値を求めよ.

$$\int_0^\infty xe^{-ax^2}\,dx$$

(九州大 2010)　　(m20104709)

0.793　$a=4,\ 0,\ -4$ のそれぞれの場合に対して, 以下の問いに答えよ.

(1)　次の不定積分をを求めよ.

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx$$

(2)　次の広義積分について, 収束する場合には広義積分の値を求め, 発散する場合にはその理由を示せ.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{|x^2+a|}\,dx$$

(九州大 2010)　　(m20104710)

0.794　次の各問いに答えよ.

(1)　広義積分 $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^3}}$ を求めよ.

(2)　広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{|x-2|}}$ は収束するか発散するか，いずれであるかを判定せよ.

(九州大 2011)　　(m20114701)

0.795　$3\times\ 3$ 行列 B, C をそれぞれ

$$B=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

とし，点 $P_n(x_n,\ y_n,\ z_n)\quad (n=1,2,3,\cdots)$ を $x_1=y_1=z_1=1$,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}=B\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

によって定める．このとき，次の問いに答えよ.

(1)　行列 C の逆行列 C^{-1} を求めよ.

(2)　ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ はそれぞれ行列 B の固有ベクトルであることを示せ.

(3)　$a_n,\ b_n,\ c_n\quad (n=1,2,3,\cdots)$ を,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

によって定めるとき，$a_{n+1},\ a_n$ の間に成立する関係式を求めよ.

(4)　$n\to\infty$ としたとき，点 P_n はある点 P_∞ に近づくことを示し，点 P_∞ を求めよ.

(九州大 2011)　　(m20114704)

0.796　(1)　次の周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \left(-\pi \leqq x < -\dfrac{\pi}{4}\right) \\ 1 & \left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq x < \dfrac{3\pi}{4}\right) \\ -1 & \left(\dfrac{3\pi}{4} \leqq x < \pi\right) \end{cases},\qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

(2) 関数 $f(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$ で定義する．次式で定義される関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，関数 $y=F(\omega)$ のグラフの概形を描け．なお，T は正の実数とする．

$$f(t)=\begin{cases} a & (|t| \leqq T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

(3) 関数 $f(t)$ は $t>0$ で定義されているものとし，$f(t)$ のラプラス変換を $F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$ で定義するとき，以下の問いに答えよ．

(a) $f(t)=\sin\omega t$ のラプラス変換が $F(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ であることを示せ．

(b) $f(t)=\cos\omega t$ のラプラス変換が $F(s)=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ であることを示せ．

(c) $f(t)=a+bt$ のラプラス変換が $F(s)=\dfrac{as+b}{s^2}$ であることを示せ．

(九州大 2012)　　(m20124704)

0.797 関数 $f(x)=\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$ $(-\infty<x<\infty)$ を考える．ただし，e は自然対数の底とする．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の値域を求めよ．

(2) 定積分 $I=\int_a^b f(x)dx$ の値を求めよ．ただし，$a=\dfrac{1}{4}\log 2$, $b=\dfrac{1}{4}\log 3$ とする．

(九州大 2012)　　(m20124706)

0.798 (1) 周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を次のように定める．以下の問いに答えよ．

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n=0,1,\cdots), \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n=1,2,\cdots)$$

(a) 任意の実数 α に対して $\dfrac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\cos nx dx=a_n$ が成立することを示せ．

(b) 整数 n と実数 x に対して $\cos n(x+\pi)=\begin{cases} \cos nx & (n\text{ が偶数}) \\ -\cos nx & (n\text{ が奇数}) \end{cases}$ が成立する．

このことを踏まえ，関数 $g(x)=f(x+\pi)$ のフーリエ係数 $a_n'=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx dx$, $b_n'=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx dx$ を a_n, b_n を用いて表せ．

(2) 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$ とおく．以下の問いに答えよ．

(a) $f(x)=e^{-|x|}$ のフーリエ変換を求めよ．

(b) フーリエの積分定理（逆フーリエ変換）を利用して，次の定積分を求めよ．

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos u}{1+u^2}du$$

(九州大 2013)　　(m20134703)

0.799 (1) 次の周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(x)=|x| \quad (-\pi \leqq x<\pi), \qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ であることを示せ．

(3) $t>0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)=\mathcal{L}[f(t)](s)=\displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ とする．以下の問いに答えよ．

(a) a を定数とするとき，$\mathcal{L}[e^{at}](s)$ を求めよ．また，$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s)=F(s-a)$ を示せ．

(b) $\dfrac{dF(s)}{ds}=\mathcal{L}[-tf(t)](s)$ が成り立つことを示せ．また，これを用いて $F(s)=\log\left(\dfrac{s+1}{s}\right)$ のラプラス逆変換を求めよ．

(九州大 2014)　　(m20144703)

0.800 a,b,c は $a>0,\ b>0,\ c>0$ なる定数とする．$x>0,\ y>0$ において 2 変数関数 $f(x,y)$ を次の式で定義する．

$$f(x,y)=\frac{cy}{ax^2+by^2}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ．

(2) $x>0$ なる x を固定するとき，次の積分（広義積分）を求めよ．

$$\int_0^1 f(x,y)\,dy$$

(3) $y>0$ なる y を固定するとき，次の積分（広義積分）を求めよ．

$$\int_0^\infty f(x,y)\,dx$$

(九州大 2015)　　(m20154709)

0.801 (1) (a) 周期 $2L$ の区分的に連続な関数 $f(x)$ をフーリエ級数で表現した式を示し，そのフーリエ係数を求める式を示せ．

(b) 次の関数 $f(x)\ (-2\leqq\ x\leqq\ 2)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(x)=\begin{cases}-2x-4 & (-2\leqq\ x<0)\\ 0 & (x=0)\\ 4-2x & (0<x\leqq\ 2)\end{cases}$$

(2) $t>0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)=\mathfrak{L}[f(t)]=\displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ とする．必要ならば下記の表にある関係式を用いて，次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．また (b) については，$f(t)\ (t>0)$ のグラフをかけ．

(a) $F(s)=\dfrac{2}{s(s+1)(s+2)}$

(b) $F(s)=\dfrac{-s+2}{s^2+2s+4}$

表：

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathfrak{L}[1]=\dfrac{1}{s},\quad \mathfrak{L}[t^n]=\dfrac{n!}{s^{n+1}}\ (n=1,2,\cdots),\quad \mathfrak{L}[e^{at}]=\dfrac{1}{s-a},\quad \mathfrak{L}[\sin\omega t]=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2},\\ \mathfrak{L}[\cos\omega t]=\dfrac{s}{s^2+\omega^2},\ \mathfrak{L}[f(at)]=\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right),\ \mathfrak{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a),\ \mathfrak{L}[f(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s)\end{array}}$$

(九州大 2016)　　(m20164703)

0.802 a, b は $a>1,\ b>0$ なる定数とする．$x \geqq 0$ において関数 $f(x)$ を次の式で定義する． $f(x)=a^{-bx}$

(1) $f(x)$ の導関数を求めよ．

(2) 次の積分（広義積分）を求めよ． $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$

(3) 次の積分（広義積分）を求めよ． $\displaystyle\int_0^{\infty} a^{-x}\cos x dx$

(九州大 2016) (m20164707)

0.803 (1) $f(x)=\begin{cases} 1\,, & (0 \le x \le 1) \\ 0\,, & (\text{上記以外}) \end{cases}$ とする．以下の設問に答えよ．

(a) $f(x)$ 自身の畳み込み積分 $g(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)dy$ を求めよ．

(b) $f(x)$ のフーリエ変換 $F(u)$ を求めよ．

(c) $g(x)$ のフーリエ変換 $G(u)$ が $F(u)^2$ で与えられることを示せ．

(2) $f(x)$ が $f(x)=x\,,\quad (-\pi \le x \le \pi)$ で与えられる周期関数とする．ここで周期 T は 2π である．$f(x)$ を $f(x)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$ によりフーリエ級数展開し，$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$ であることを示せ．なお，i は虚数単位を表す．また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ である．

(九州大 2017) (m20174708)

0.804 xy 座標平面上の点 P の移動について考える．

時刻 $t=n$（n は正の整数）における点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{p}_n=(x_n,\ y_n)$ を次の漸化式で定める．

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad n=1,2,3,\cdots$$

点 P の始点は，正の実数 s を用いて，$\boldsymbol{p}_0=(x_0, y_0)=(1, s)$ で与えられるとする．

以下の問いに答えよ．

(1) (x_n, y_n) を n と s を用いて表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}$ を求めよ．

(九州大 2019) (m20194701)

0.805 区間 $(0,\infty)$ 上の関数 $f(x)=e^{-(\log x)^2}$ について以下の問いに答えよ．

(1) 導関数 $f'(x),\ f''(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $y=f(x)$ の増減，凹凸を調べグラフの概形を描け．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ を求めよ．

(九州大 2019) (m20194705)

0.806 確率 $p(0<p<1)$ で表，確率 $1-p$ で裏がでるコインを n 回独立に投げる．以下の問いに答えよ．

(1) n 回のうち表が出た回数を表す確率変数を X とする．X の値が k $(k \in \{0, 1, \cdots, n\})$ となる確率 $P(X=k)$ を求めよ．

(2) X の期待値 $E[X]$ について，$E[X]=np$ が成り立つことを示せ．

(3) λ を正の定数として $p = \dfrac{\lambda}{n}$ とすると，以下が成り立つことを示せ.

$$\lim_{n\to\infty} P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

ただし，任意の実数 a について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$ を用いてよい.

(九州大 2020)　　(m20204708)

0.807　周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

で表される．以下の問いに答えよ.

(1) 区間 $[-\pi, \pi)$ において次のように定義される周期 2π の関数 $g(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$g(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$$

(2) 区間 $[-\pi, \pi)$ において次のように定義される周期 2π の関数 $h(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(3) 次の無限級数の和を求めよ.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

(九州大 2021)　　(m20214704)

0.808　以下の問いに答えよ．ただし，$\mathbb{R}$ は実数全体を表すとする.

(1) 次の広義積分は収束することを示せ.

$$\int_0^{\infty}\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\,dx$$

(2) $D_1 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\leq x,\ 0\leq y\leq 1\right\}$ として，次の広義積分の収束・発散を調べよ.

$$I_1 = \iint_{D_1} e^{-x^2 y}\,dxdy$$

(3) $D_2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\right\}$ として，次の広義積分の収束・発散を調べよ.

$$I_2 = \iint_{D_2} e^{-x^2 y}\,dxdy$$

(九州大 2021)　　(m20214710)

0.809　(1) $e = \displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ を使って以下を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

(2) (a) $a>0, x>0$ のとき，$e^{ax} \geq 1 + ax + \dfrac{a^2x^2}{2}$ であることを使って $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-ax}$ を求めよ.

(b) 上の結果を使って $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^5 e^{-x}$ を求めよ.

(c) 同じく (a) の結果を使って $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$ を求めよ.

(九州芸術工科大 2003)　　(m20034801)

0.810 以下の関数の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

（佐賀大 2001） (m20014901)

0.811 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+3})$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-5\sin 2x}{x\cos x}$

(佐賀大 2003) (m20034906)

0.812 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ が収束することを示せ.

(佐賀大 2003) (m20034911)

0.813 次の定積分を求めよ, a は正の定数である.

(1) $\displaystyle\int_1^2 dx\ \log x$ (2) $\displaystyle\int_{-a}^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty dx\ e^{-ax^2}$ (4) $\displaystyle\int_0^\infty dx\ \frac{\sin x}{x}$

(佐賀大 2005) (m20054910)

0.814 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{5}}{x-3}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x}{5x^2-4x+7}$

(佐賀大 2006) (m20064935)

0.815 (1) 関数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ を $x=0$ の周りでテイラー展開し, x^3 の項まで書け.

(2) 微分方程式 $y''(x)+9y(x)=0$ の一般解を求めよ.

(3) 関数 $f(x)=x$（定義域を $-\pi\leq x\leq\pi$ とする）を $\displaystyle f(x)=a_0+\sum_{n=1}^\infty[\,a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\,]$

と書くとき, a_0, a_n, b_n を求めよ.

(佐賀大 2007) (m20074906)

0.816 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x\log x\,dx$ （ 不定積分．積分定数を C とせよ．）

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-3x^2}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\frac{\sin x}{x}\,dx$

(4) $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy$ $\Big($但し, $D=\big\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1,\ x\leq y\leq\sqrt{x}\ \big\}\Big)$

(佐賀大 2007) (m20074907)

0.817 次の関数の極限を求めよ．ただし, log は自然対数とする.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

(佐賀大 2007) (m20074909)

0.818 $f(x)=e^{-x}\sin x$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 定数 $a>0$ に対して, 定積分 $I_a=\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$ を部分積分法で求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ を求めよ.

(佐賀大 2007) (m20074911)

0.819 次の関数の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$

(佐賀大 2007) (m20074915)

0.820 $x>0$ で次の定積分で定義された関数 $f(x)$ について，以下の問いに答えよ.

$$f(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

(1) 次の等式を証明せよ．ただし，$x>1$ とする.

$$f(x)=(x-1)f(x-1)$$

(2) x が自然数 n のとき，次式を示せ.

$$f(n)=(n-1)!$$

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ を示し，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ.

(佐賀大 2009) (m20094903)

0.821 $f(x)=-\dfrac{2\tan^{-1}x}{x^3}$ とおく．ただし，$\tan^{-1}x$ は $\tan x$ の逆関数である.

(1) $\displaystyle\int f(x)dx=\frac{\tan^{-1}x}{x^2}+\frac{1}{x}+\tan^{-1}x+C$ を示せ．ただし，C は積分定数である.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ を求めよ.

(佐賀大 2009) (m20094907)

0.822 次の関数の極限を求めよ. ただし, $a>0$ とし, log は自然対数とする.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{\sin x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log\left(1+\frac{2}{x}\right)$

(佐賀大 2010) (m20104908)

0.823 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-x-10}{x-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$

(佐賀大 2010) (m20104917)

0.824 $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ について，以下の積分を計算せよ．ただし，$\lambda>0,\ x>0$ である.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty xf(x)dx$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty x^2f(x)dx$

(佐賀大 2015) (m20154902)

0.825 次の無限級数の和を求めなさい.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n(n+1)}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{1+3^n}{5^n}$

(佐賀大 2015) (m20154907)

0.826 次の関数をマクローリン展開して係数 a_n を求めよ.

$$e^x=\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$$

(佐賀大 2015) (m20154909)

0.827 関数 $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}$ を満たす係数 A,B,C,D を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を求めよ．

(佐賀大 2015) (m20154916)

0.828 次の関数の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^2-3ax+2a^2}{x^2-a^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

(佐賀大 2016) (m20164901)

0.829 次の積分をせよ．ただし，$\lambda>0$ である．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}dx$ (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}dx$ (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^2\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}dx$

(佐賀大 2016) (m20164922)

0.830 次の関数の極限を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$

(佐賀大 2016) (m20164925)

0.831 大気中に置かれた物体が冷却する速さは，その物体の温度と周囲の温度の差に比例する．次の設問に答えなさい．

(1) 周囲温度（一定）を θ_{at}，比例定数を k とおき，時刻 t における物体の温度 θ を表す微分方程式を答えなさい．

(2) θ の一般解を答えなさい．

(3) 初期条件 $t=0$ のとき $\theta=\theta_0$ として, θ の特殊解を答えなさい．

(4) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta$ を答えなさい．

(佐賀大 2016) (m20164934)

0.832 次の極限値を求めなさい..

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)}-\frac{x}{x^2-1}\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3\arcsin\frac{x}{5}}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\left\{\log(3x+1)-\log 3x\right\}$

(佐賀大 2018) (m20184901)

0.833 次の積分をせよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \sin 2xe^{-x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty \cos 2xe^{-x}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^1 x(x^2+1)^5\,dx$

(佐賀大 2021) (m20214912)

0.834 次の積分を求めよ．ただし，$\log$ は自然対数であり，e は自然対数の底である．

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+1}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^{2x}\,dx$

(佐賀大 2021) (m20214916)

0.835 次の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x+\infty}\frac{x-\cos x}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^x$

(佐賀大 2021) (m20214920)

0.836 関数 $f(x)=\log x$ の $x=1$ におけるテイラー級数を $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x-b)^k$ の形で求めよ.

(佐賀大 2022) (m20224914)

0.837 行列 A, T を $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & -5\end{bmatrix}$, $T=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ とし, ベクトル $\boldsymbol{s}$ を $\boldsymbol{s}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ とする. また, t を $t\geq 0$ の実数とし, 指数関数 e^{-3x}, e^{-t} を用いて行列 $E(t)$ を $E(t)=\begin{bmatrix}e^{-3t} & 0\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}$ とする. これらの行列やベクトルに関して以下の問いに答えなさい.

(1) $\boldsymbol{x}(t)=TE(t)T^{-1}\boldsymbol{s}$ とする. この $\boldsymbol{x}(t)$ を求めなさい.

(2) $y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)$ とする. このとき

$$J=\int_0^{\infty}y(t)^2dt$$

を求めなさい.

(3) 行列 $Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ とする. また, 未知数 p, q, r を用いて未知の対称行列を $P=\begin{bmatrix}p & q\\ q & r\end{bmatrix}$ とする. この P を

$$PA+A^TP=-Q$$

を満足するように決定し, $W=\boldsymbol{s}^TP\boldsymbol{s}$ を求めなさい. ただし, A^T は行列 A の転置行列を表し, $\boldsymbol{s}^T$ はベクトル $\boldsymbol{s}$ を転置したものを表す. （長崎大 2004） (m20045011)

0.838 関数 $f(t)$ に関するフーリエ変換を $F(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$ で定義するとき, 以下の問に答えよ.

(1) $f(t)$ が実数で偶関数の時 $F(\omega)$ が実数になることを証明せよ.

(2) $f(t)$ が $f(t)=\begin{cases}1 & , \quad |t|\leq T\\ 0 & , \quad |t|>T\end{cases}$ ただし T は正の実数　で与えられるとき, フーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ.

(3) 上で求めたフーリエ変換 $F(\omega)$ を, 横軸を ω, 縦軸を $|F(\omega)|$ として図示せよ.

(長崎大 2005) (m20055007)

0.839 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$$

(長崎大 2005) (m20055016)

0.840 次の値を求めよ.

(1) $I(R)=\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq R^2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

(2) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx$ 　　注：問 (1) の結果を引用してもよい.

(長崎大 2008) (m20085005)

0.841 次式で定義される I_n について，以下の問いに答えよ．

$$I_n = \int_0^n e^{-st} \cos \omega t \, dt$$

ただし，s, ω, n は正の実数である．

(1) I_n を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} I_n$ を求めなさい．

(長崎大 2009)　　(m20095003)

0.842 (1) $N \times M$ の行列 A と $P \times Q$ の行列 B があるとき，行列の積 AB が定義できる条件を述べよ．

(2) 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解を持つための条件を述べよ．ただし，A は $N \times N$ の正方行列，$\boldsymbol{x}$ は N 次元の列ベクトル，$\boldsymbol{0}$ は N 次元の 0 ベクトルである．

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & z & 1 \\ x & 1 & z & 2 \\ 1 & 0 & b & c \\ 2 & 0 & b & c \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

(4) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2a & 1-2a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．また，A^n が $n \to \infty$ のとき収束するための条件および $\displaystyle\lim_{n \to \infty} A^n$ を求めよ．ただし，$a \neq 1$ である．

(長崎大 2009)　　(m20095010)

0.843 次の定積分を求めよ．

$$\int_2^3 \frac{1}{(2x-9)^3} \, dx \qquad\qquad \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

(長崎大 2010)　　(m20105004)

0.844 関数 $y = \dfrac{x^2}{e^x}$ について，以下の問題に答えよ．

(1) y の 1 次導関数および 2 次導関数を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} y$ および $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} y$ を求めよ．

(3) この関数の増減表を作成せよ．

(4) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$ のグラフの概形を描け．

(長崎大 2011)　　(m20115004)

0.845 座標平面上を動く点 P の時刻 t における位置が

$$\begin{cases} x = e^{-t} \cos t \\ y = e^{-t} \sin t \end{cases} \qquad (0 \leqq t < +\infty)$$

で与えられている．

(1) $t = \dfrac{\pi}{6}$ のときの点 P の位置を求めよ．

(2) $t = \dfrac{\pi}{3}$ のときの点 P の速度ベクトルを求めよ．

(3) $0 \leqq t \leqq 4\pi$ の間に点 P の進む距離を求めよ．

(大分大 2010)　　(m20105101)

0.846 周期関数 $f(x)=|x|\ \ (-\pi \leq x < \pi),\quad f(x+2\pi)=f(x)$ の $(-\pi,\ \pi)$ におけるフーリエ級数は次のようになる.

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

これを用いて，次の公式を証明せよ.

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

(大分大 2013)　　(m20135104)

0.847 ガンマ関数は，$\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}dx\quad (s>0)$ で定義される．次の問いに答えなさい.

(1) 部分積分法を用いて，$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ が成り立つことを示しなさい.

(2) $\Gamma(n+1)=n!$ となることを示しなさい．ただし，n は負でない整数である.

(熊本大 2008)　　(m20085202)

0.848 関数 $y=e^{-3x}$ において, 次の問いに答えなさい.

(1) この関数のグラフを描きなさい.

(2) グラフ曲線上の任意の点 A より x 軸に下ろした垂線の足を B とし, 点 A における接線と x 軸との交点を C とするとき, 線分 BC の長さを求めなさい.

(3) 積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-3x}\,dx$ と $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-3x}\,dx$ を求めなさい.

(熊本大 2010)　　(m20105203)

0.849 関数 $f(x)=e^{-x}\sin x\quad (x \geqq\ 0)$ において，次の問に答えなさい.

(1) a と b を実数とし，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ を求めなさい.

(2) n を自然数とし，区間 $(n-1)\pi \leqq\ x \leqq\ n\pi$ において，曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めなさい.

(3) $f(x)$ の極大値を与える x を小さい順に $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$ とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ の値を求めなさい.

(熊本大 2011)　　(m20115202)

0.850 ベクトル $\boldsymbol{x}(n)=\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$ に，次の関係があるとする.

$$\boldsymbol{x}(n+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n)$$

ただし，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ である.

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(2) $\boldsymbol{x}(n)$ を求めなさい.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}(n)$ を求めなさい.

(熊本大 2015)　　(m20155201)

0.851 次の級数について, 収束・発散を調べよ. 収束する場合, その値を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

(鹿児島大 2005)　　(m20055412)

0.852 次の関数を積分せよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x(1+x)}$

(鹿児島大 2006)　　(m20065412)

0.853 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{4x^2+6x+3}$ を求めよ．　(鹿児島大 2007)　　(m20075414)

0.854 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ を求めなさい．ただし，n は正の整数とする．

(鹿児島大 2011)　　(m20115415)

0.855 次の問いに答えよ．

(1) x^n の n 階導関数を求めなさい．また，e^{ax} の n 階導関数を求めなさい．ただし，n は，自然数であり，$a>0$ とする．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^n e^{-ax}$ を求めなさい．ただし，n は，自然数であり，$a>0$ とする．

(鹿児島大 2013)　　(m20135411)

0.856 以下の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$　　(2) $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{\log x}{x^2}dx$

(鹿児島大 2015)　　(m20155402)

0.857 次の定積分を計算しなさい．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{4+x^2}dx$　　(2) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1}{(5x+4)^3}dx$

(鹿児島大 2018)　　(m20185421)

0.858 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は，　$\displaystyle f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$　で与えられる．ただし，$f^{(n)}(0)$ は $x=0$ における $f(x)$ の n 階導関数である．$x\to 0$ のとき，$e^x\sin x$ の漸近展開を x^3 の項まで求めよ．

(室蘭工業大 2007)　　(m20075507)

0.859 定積分 $\displaystyle\int_{0}^{\infty}e^{-x}\sin x dx$ を計算しなさい．

(室蘭工業大 2016)　　(m20165501)

0.860 定積分 $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{1}{(2x+1)(x+1)}dx$ を計算しなさい．

(室蘭工業大 2016)　　(m20165505)

0.861 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)$ を求めよ．　(2) $f(x)=e^{\sin^{-1}x}$ を微分せよ．

(3) $\displaystyle\int\log(1+x^2)dx$ を求めよ．

(岡山県立大 2006)　　(m20065601)

0.862 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-4x^2}{8x^4+5x^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{4x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x\right)$

(香川大 2016)　　(m20165701)

0.863 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4x^2+3x-6}-2x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2x^2-2x-1}{2x^3}$

(香川大 2020)　　(m20205701)

0.864 逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ と逆余弦関数 $\cos^{-1}x$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 次の値を求めよ.

(i) $\sin^{-1}(-1)$,　(ii) $\cos^{-1}0$,　(iii) $\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(iv) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

(2) $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ.

(3) $y=\sin^{-1}x$ の微分と不定積分を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$ の値を求めよ.

(島根大 2005)　　(m20055806)

0.865 関数 $f(x)=(ax+b)e^{cx}\quad(c\neq 0)$ を考える. 以下の問に答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$, 2 階導関数 $f''(x)$, さらに n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ を求めよ.

(3) $0<c<1$ のとき , $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nc^n=0$ を証明せよ.

$\left(\text{ヒント : } c=\dfrac{1}{1+\alpha}\quad(\alpha>0)\quad\text{とおいて}\ (1+\alpha)^n\ \text{の 2 項展開を考えよ.}\right)$

(4) $0<c<1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x)+f'(x)+f''(x)+\cdots+f^{(n)}(x)\right)$$

を求めよ.

(島根大 2005)　　(m20055811)

0.866 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ を収束数列とする．いま，$n>N$ なるすべての自然数に対して $\alpha_n\leq\beta_n$ が成り立つような十分大きな自然数 N が存在する時，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n\leq\lim_{n\to\infty}\beta_n$ であることを証明せよ。

(島根大 2006)　　(m20065807)

0.867 次の広義積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx$　　(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{1+x^2}dx$

(島根大 2006)　　(m20065809)

0.868 (1) 関数 $\dfrac{\log x}{x}$ の不定積分を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_n^{2n}\frac{\log x}{x}dx$ は正の無限大に発散することを示せ.

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}$ が収束するならば，その極限値を求めよ．もし発散するならば，その理由を述べよ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ をみたす数列 a_n に対して　$b_n=a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{2n}$　とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$ は正しいだろうか ? 正しければその理由を述べよ．もし正しくなければ反例を一つ与えよ.

(島根大 2007)　　(m20075805)

0.869 n の関数 $f(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $f(1)$ の値を求めよ．

(2) $f(n+1) = nf(n)$ を証明せよ．

(3) n が自然数のとき，$f(n+1) = n!$ を証明せよ．

(4) $f(\frac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ を証明せよ．

(5) $\dfrac{f(3)f(-\frac{5}{2})}{f(\frac{3}{2})}$ の値を求めよ．なお，$f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ である．

(島根大 2007)　　(m20075808)

0.870 $u = u(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{\frac{-x^2}{4t}}$ であるとき，$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いて次式 $\int_{-\infty}^\infty u(x,t)dx = 1$ が成り立つことを示せ．ただし，t はパラメータ (>0) とする．

(島根大 2007)　　(m20075811)

0.871 一般に，関数 $f(x)$ が周期 2π の周期関数で，区間 $[-\pi,\pi]$ でいくつか（有限個）の点を除いて連続であるとき，次のように三角関数の級数に展開できる．これを $f(x)$ のフーリエ級数という．

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)dx,\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\cos nx dx,\quad b_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\sin nx dx\quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

周期 2π の周期関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} -2x & (-\pi \leqq x \leqq 0) \\ 2x & (0 < x \leqq \pi) \end{cases}$$ のとき，$f(x)$ のフーリエ級数を求めよ

(島根大 2007)　　(m20075814)

0.872 (1) 次の関数の第 3 次導関数を求めよ．　$x^2 \sin x$

(2) 次の級数が収束することを示せ．　$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{1}{n}$

(3) 次の積分を求めよ．　$\displaystyle\int_0^1 \sin^{-1} x\, dx$

(島根大 2008)　　(m20085802)

0.873 (1) 関数 $f(x) = (x+1)e^{-2x}$ について，$f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ．また，3 以上の整数 n に対して第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $y = x^x$ $(x>0)$ の極値を求めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x\, dx$ の値を求めよ．

(4) 曲線 $y = x\cos x$ $\left(0 \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2}\right)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ．

(島根大 2009)　　(m20095802)

0.874 次の行列 A について以下の設問に答えよ. ただし, $0 < a < 1/2$ とする.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$

(1) A^2 を計算せよ.

(2) $|A|$ を計算せよ.

(3) A^{-1} を求めよ.

(4) A の固有値と, それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルを大きさが 1 になるように規格化すること.

(5) A^{-1}, A^2 および A^n の固有値を求めよ. ただし, n は自然数とする.

(6) A^n を求めよ.

(7) $\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ.

(島根大 2010)　　(m20105812)

0.875 以下の各設問に答えよ．ただし，x は実数とする．

(1) 関数 $f(x)$, $g(x)$ を $f(x)=x-\tan^{-1}x$, $g(x)=x-x\sin x$ と定義する．以下の問いに答えよ．

(a) 導関数 $f'(x)$, 第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(b) 導関数 $g'(x)$, 第 2 次導関数 $g''(x)$ を求めよ．

(c) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}$ の値を求めよ．

(2) 関数 $y(x)$ を $y(x)=(x^2+1)e^{-x}$ と定義する．以下の問いに答えよ．

(a) 導関数 $y'(x)$, 第 2 次導関数 $y''(x)$ を求めよ．

(b) $\lim_{x\to\infty} y(x)=0$ であることを示せ．

(c) $y'(x)$, および $y''(x)$ の符号を用いて，関数 $y(x)$ の増減表を作成せよ．また，関数 $y(x)$ のグラフの概形をかけ．

(島根大 2012)　　(m20125801)

0.876 自然数 $n=1,2,\cdots$ に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=n^2x^{n+1}\log x \quad (x>0)$$

と定める．次の問いに答えよ．

(1) $f_n(x)$ の最小値を求めよ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ を計算せよ．

(3) $0<x\leq1$ を満たす各 x に対して $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．さらに $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とするとき，次の等式が成り立つかどうかを調べよ．

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$$

(島根大 2016)　　(m20165803)

0.877 (1) $R>0$ とする．$\Omega(R)=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq R^2,\ 0\leq y\leq x\right\}$ とするとき，
重積分 $\displaystyle\iint_{\Omega(R)}\frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}dxdy$ を計算せよ．

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^R\left(\int_0^x\frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}dy\right)dx$ を求めよ．

(3) α を定数とし，$(x,y)\neq(0,0)$ に対して $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\alpha/2}$ と定める．$\displaystyle\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(島根大 2016)　　(m20165804)

0.878 (1) $f(x)$ は $(-\infty,\ +\infty)$ で定義された連続関数とする．$F(x)=\displaystyle\int_{-x}^{x}f(t)dt$ とおくとき，導関数 $F'(x)$ を $f(x)$ を用いて表せ．

(2) $f(x)$ は $(-\infty,\ +\infty)$ で定義された下に凸な連続関数とする．このとき，すべての $x>0$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$2xf(0) \leqq \int_{-x}^{x} f(t)dt$$

(島根大 2019)　　(m20195806)

0.879　$f(x,y)=\dfrac{4}{(2+x^2+y)^2}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の偏導関数を求めよ．

(2) 点 $P(1,-1,1)$ における，曲面 $z=f(x,y)$ の接平面の方程式を求めよ．

(3) $a>0$ に対して，$D(a)=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leq x\leq a\ ,\ 0\leq y\leq x^2\right\}$ とおく．
2 重積分　$I(a)=\displaystyle\iint_{d(a)} f(x,y)\,dxdy$　を計算せよ．さらに $\displaystyle\lim_{a\to\infty} I(a)$ を求めよ．

(島根大 2020)　　(m20205807)

0.880　次式を示せ．ただし，e^x のテイラー展開を利用せよ。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=\infty \qquad (\alpha : 定数)$$

(首都大 2003)　　(m20035904)

0.881　無限積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{-1}{x(1+x^2)}dx$ を求めなさい．

(首都大 2017)　　(m20175904)

0.882　次の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log(\sin x)$

(首都大 2019)　　(m20195906)

0.883　$-\infty<x<\infty$ に対して

$$f(x)=\begin{cases} 1 & 0\leqq x\leqq 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $-\infty<x<\infty$ に対して，$F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ を求めよ．

(2) $-\infty<x<\infty$ に対して，$g(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)f(x-t)dt$ を求めよ．

(3) $-\infty<x<\infty$ に対して，(2) で求めた $g(x)$ を用いて $G(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)dt$ を求めよ．

(東京都立大 2020)　　(m20205911)

0.884　実数 $x\geq 0$ に対する実関数 $f_k(x)$ について，以下の微分方程式の初期値問題が与えられている．

$$\frac{df_k(x)}{dx}+2f_k(x)=f_{k-1}(x),\quad f_k(0)=1$$

ただし，k は自然数である．また，すべての実数 $x\geq 0$ に対して $f_0(x)=0$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f_1(x)$ を求めよ．

(2) $f_2(x)$ を求めよ．

(3)　$f_k(x)$ を k を用いて表し，以下を求めよ．

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)$$

(東京都立大 2020)　　(m20205912)

0.885　極限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\tan^{-1}(3x)-\frac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．ただし，$\tan^{-1}$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．

(滋賀県立大 2021)　　(m20216001)

0.886　広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2e^{-3x}dx$ を求めよ．

(滋賀県立大 2021)　　(m20216003)

0.887　関数 $F_n(x)=x^ne^{-x}$ について，以下の問に答えよ．ただし，$n\geq 2$ とする．

(1)　$x\geq 0$ において $F_n(x)$ が最大・最小となる x の値をそれぞれ求めよ．

(2)　$x>0$ において $F_n(x)$ の変曲点となる x の値を求めよ．

(3)　$x\geq 0$ における $y=F_n(x)$ のグラフの概形を描け．

(4)　$n=3$ の場合について，

$$I_n=\int_0^{\infty} F_n(x)dx$$

の値を求めよ．

(宇都宮大 2005)　　(m20056102)

0.888　$\displaystyle\int_0^{\infty} \lambda xe^{-\lambda x}dx$　を解け．

(工学院大 2004)　　(m20046203)

0.889　$a<1$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n(1-a)a^n=\frac{a}{1-a}$ となることを証明せよ．

(工学院大 2005)　　(m20056203)

0.890　次の極限値を求めよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^3}{\sqrt{x}}$

(はこだて未来大 2007)　　(m20076303)

0.891　n を自然数とし，関数 $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\sin(nx)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{df_n}{dx}(x)=\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)$ が成立する x の値を，区間 $[0,\ \pi]$ から求めよ．

(はこだて未来大 2008)　　(m20086303)

0.892　a を正定数，n を自然数とし，定積分 $\displaystyle I_n(a)=\int_0^a xe^{-nx}\,dx$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1)　$I_n(a)$ を求めよ．　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n(a)$ を求めよ．

(はこだて未来大 2008)　　(m20086304)

0.893　$y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対する正接関数 $\tan y$ の逆関数を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ とする．すなわち，

$$y=\mathrm{Tan}^{-1}x \iff x=\tan y \qquad \left(x\in(-\infty,\ \infty),\ y\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Tan}^{-1}1$ の値を求めよ.

(2) $\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{3\sqrt{3}}{7}$ の値を求めよ.
ただし，必要であれば，次の正接関数に対する加法定理は既知として用いてよい.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

(はこだて未来大 2009)　　(m20096303)

0.894 自然数 n に対して

$$I(n)=\int_1^e\frac{1}{x^n}\log x\,dx$$

とおくとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 部分積分法を用いて, $f(2)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I(n)$ を求めよ.

(はこだて未来大 2010)　　(m20106304)

0.895 $x_n = r^{n-1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で与えられる数列 $\{x_n\}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，$0<|r|<1$ とする.

(1) 第 N 項までの和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}x_n$ を求めよ.

(2) (1) で求めた和について，$N\to\infty$ としたときの極限 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ を求めよ.

(3) 和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}nx_n$ を求めよ.

(4) (3) で求めた和について，$N\to\infty$ としたときの極限 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx_n$ を求めよ.
ただし，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}Nr^N=0$ $(|r|<1)$ であることを用いてよい.

(はこだて未来大 2011)　　(m20116305)

0.896 関数 $f_n(x)=nx(1-x)^n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ について，以下の問いに答えよ.

(1) n を固定するとき，$f_n(x)$ の閉区間 $[0,1]$ での最大値を M_n，それを与える x の値を x_n とする.
このとき，M_n と x_n をそれぞれ n で表せ.

(2) (1) の M_n と x_n に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}M_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ をそれぞれ求めよ.

(はこだて未来大 2012)　　(m20126304)

0.897 $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対する正接関数 $\tan y$ の逆関数を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ とする．すなわち,

$$y=\mathrm{Tan}^{-1}x \iff x=\tan y \qquad \left(x\in(-\infty,\infty),\ y\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

とする．以下の問いに答えよ.

(1) $y=\mathrm{Tan}^{-1}x$ のグラフの概形を描け.

(2) $\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{2}{3}+\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{5}$ の値を求めよ．ただし，必要であれば，次の正接関数に対する加法定理は既知として用いてよい.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

(はこだて未来大 2013)　　(m20136305)

0.898 n を自然数とし，定積分 $I_n = \int_0^1 xe^{-nx}dx$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) I_n を求めよ．

(2) $\lim_{n\to\infty} n^2 I_n$ を求めよ．

(はこだて未来大 2013)　　(m20136306)

0.899 (1) $\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-x}$ を求めなさい．

(2) $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}+\dfrac{z^2}{5^2}=3$ で表される曲面の，点 $(2,3,5)$ における法線の方程式を求めなさい．

(3) 次の 2 重積分を極座標変換を利用して求めなさい．

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy\ , \quad D=\{(x,y)\mid x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0\}$$

(和歌山大 2008)　　(m20086502)

0.900 (1) $f(t)=e^{-|t|}$ のフーリエ変換を求めなさい．

(2) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin\omega}{1+\omega^2}\,d\omega$ と $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\cos\omega}{1+\omega^2}\,d\omega$ の値を求めなさい．

(和歌山大 2009)　　(m20096504)

0.901 周期 X の周期関数

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (\ |x| \leqq\ d/2\ ) \\ 0 & (\ d/2<|x| \leqq\ X/2) \end{cases}$$

について次の問いに答えなさい. ただし, $0<d<X$ である.

(1) $f(x)$ をフーリエ級数に展開しなさい.

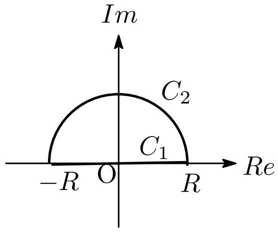
(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi\alpha}{n}$ の値を求めなさい. ただし, $0<\alpha<1$ とする.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi\alpha}{2n-1}$ の値を求めなさい. ただし, $0<\alpha<1$ とする.

(和歌山大 2010)　　(m20106504)

0.902 R を 1 より大きい実数として, 図のように複素平面上で線分 C_1 と上半円周 C_2 からなる曲線 $C=C_1+C_2$ が与えられている. ただし, 曲線 C の向きは反時計まわりとする.

複素関数 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ について, 次の問いに答えなさい.



(1) C_2 上で $|f(z)| \leqq \dfrac{1}{R^2-1}$ が成り立つことを示しなさい.

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ の値を求めなさい.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x+i\sin x}{x^2+1}\,dx$ の値を求めなさい.

(和歌山大 2010)　　(m20106505)

0.903 次の各問いに答えなさい.

(1) サイコロを 3 回振るとき 1 の目が出る回数を X とする．X の確率分布表を示しなさい．

(2) 確率変数 X が $P(X=k)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ （ $\lambda>0$, k は 0 以上の整数 ）で与えられる確率分布に従うとき，次の各問いに答えなさい．

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)=1$ を示しなさい．

(b) 確率変数 X の平均が λ であることを示しなさい．

(和歌山大 2011)　　(m20116503)

0.904 $f(x)=x\sin x\quad(-\infty<x<\infty)$ のマクローリン展開を 3 次の項まで求めなさい．

(和歌山大 2012)　　(m20126503)

0.905 次の各問いに答えなさい．

(1) $\displaystyle\int e^x\cos nx\,dx$ を求めなさい．ただし n は正の整数とする．

(2) $\displaystyle\int e^x\sin nx\,dx$ を求めなさい．ただし n は正の整数とする．

(3) 関数 $f(x)=e^x\quad(-\pi\leq x\leq\pi)$ をフーリエ級数展開 $f(x)\approx\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n\cos nx+b_n\sin nx\Big]$ したとき，係数 $a_n(n\geq 0)$, $b_n(n\geq 1)$ を求めなさい．

(和歌山大 2012)　　(m20126507)

0.906 関数 $f(t)=|t|\quad(-1<t<1)$ について，次の各問いに答えなさい．

(1) $f(t)$ をフーリエ級数に展開しなさい．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ の値を求めなさい．

(和歌山大 2013)　　(m20136506)

0.907 次の極限値を求めなさい．

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$$

(和歌山大 2016)　　(m20166501)

0.908 (1) $f(x)=|\sin x|\ (-\pi\leq x\leq\pi)$ で定められる周期関数をフーリエ級数に展開しなさい．

(2) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2(2m+1)^2}$ の値を求めなさい．

(和歌山大 2016)　　(m20166507)

0.909 関数 $f(x)$ に対する次式の積分をフーリエ変換と定義する．ただし，i は虚数単位，e は自然対数の基底である．

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iux}dx$$

また，2 つの関数 $g(x)$, $h(x)$ に対する次式の積分をたたみこみと定義する．

$$g(x)*h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x-\alpha)h(\alpha)d\alpha$$

フーリエ変換およびたたみこみに関する次の (1)〜(3) に答えなさい．

(1) 次式で与えられる関数 $f_1(x)$ のフーリエ変換 $F_1(u)$ を求めなさい．

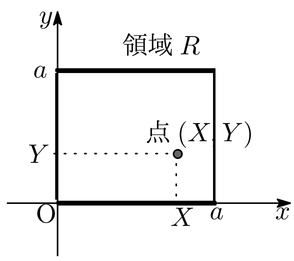
$$f_1(x) = \begin{cases} 1\,, & \left(x \leq \left|\dfrac{1}{2}\right| \text{の場合}\right) \\ 0\,, & \left(x > \left|\dfrac{1}{2}\right| \text{の場合}\right) \end{cases}$$

(2) 関数 $f_1(x)$ 同士のたたみこみによって得られる関数を $f_2(x)$ とする．関数 $f_2(x)$ を求め，その概略図を描きなさい．

(3) 関数 $f_2(x)$ のフーリエ変換 $F_2(u)$ を求めなさい．

(和歌山大 2017)　　(m20176509)

0.910 右図の一辺の長さが a の正方形領域 R からランダムに 1 つの点を選択する試行を考える．選択された点の座標を (X, Y) としたとき，X および Y は連続確率変数と扱うことができ，それらの同時確率密度関数は次式で与えられるものとする，



$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\,, & (0 \leq x \leq a,\ \text{かつ},\ 0 \leq y \leq a \text{ の場合}) \\ 0\,, & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

ただし，a は正の実数である．領域 R 内であれば，x および y の値に関わらず同時確率密度関数が等しいことから，この試行は領域 R から一様ランダムに点を選択するものである．この試行に関する次の (1)〜(3) に答えなさい．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)dxdy$ の値を求めなさい．

(2) 同時確率密度関数 $f_{X,Y}(x, y)$ を用いて，$X \leq \dfrac{a}{3}$ となる確率を求めなさい．

(3) $Z = X + Y$ とする．領域 R 内のどの位置の点が選択された場合に $Z \geq a$ となるか，すなわち，$Y \geq -X + a$ となるかを考え，それを基に，$Z \geq a$ となる確率を求めなさい．

(和歌山大 2017)　　(m20176510)

0.911 微分方程式 $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0$ に対して，次の (1)〜(3) に答えなさい．

(1) 一般解を求めなさい．

(2) 初期条件 $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ を満たす解を求めなさい．

(3) (2) で求めた解 $y(t)$ に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} y(t)$ を求めなさい．

(和歌山大 2018)　　(m20186504)

0.912 関数 $f(x)$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ x & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

のフーリエ級数展開を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

とするとき，次の (1)〜(3) に答えなさい．

(1) a_0 を求めなさい．

(2) a_n，$n = 1, 2, 3, \cdots$ を求めなさい．

(3) b_n，$n = 1, 2, 3, \cdots$ を求めなさい．

(和歌山大 2018)　　(m20186506)

0.913 関数 $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ のマクローリン展開を $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とするとき，係数 a_n を求めよ．

(和歌山大 2022)　　(m20226502)

0.914 次の文章を読み，(1)〜(5) に答えよ．次の関数 $f(x)$ は，理学，工学の分野でしばしば現れる関数である．

$$f(x) = \frac{1}{x - ia}$$

ここで，a は正の実数 $(a > 0)$，i は虚数単位 $(i^2 = -1)$，x は実数，定義域は $-\infty < x < \infty$ である．

(1) 関数 $f(x)$ の実数部，および虚数部が，次のように書けることを示せ．

$$u(x) = \frac{x}{x^2 + a^2} \qquad\qquad v(x) = \frac{a}{x^2 + a^2}$$

(2) 関数 $u(x)$，および $v(x)$ の x に関する微分をそれぞれ計算せよ．

$$\frac{d\,u(x)}{dx} \qquad\qquad \frac{d\,v(x)}{dx}$$

(3) 関数 $u(x)$，および $v(x)$ のグラフの概形を図示せよ．

(4) 関数 $u(x)$，および $v(x)$ を $0 < x < a$ の範囲で定積分せよ．

$$\int_o^a u(x)dx \qquad\qquad \int_0^a v(x)dx$$

(5) $x = a$ における関数の値 $f(a)$ を記せ．さらに $f(a)$ を複素平面上にベクトルとして図示せよ．

(大阪市立大 2007)　　(m20076601)

0.915 (1) 級数の和 $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k!(k+2)}{(k+3)!}$ を求めよ．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

(2) $f(x) = e^{2x^2}$ のマクローリン級数を x^3 の項まで求めよ．また，$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 1}{x^2}$ を求めよ．

(3) 初期値問題 (a) と微分方程式 (b) の解が一致するよう α を定め，(b) の一般解を求めよ．

(a) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}$ ，$y(0) = e^{-1}$　　(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + \alpha y = 8e^{-x}$

(京都府立大 2008)　　(m20086701)