[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　n!

0.1 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，

(1) 固有値を求めよ．

(2) 単位固有ベクトルを求めよ．

(3) $\exp(X) = E + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$ と定義されている時，$\exp(tA)$ を求めよ．ただし，t ： 定数

(北海道大 1997)　(m19970102)

0.2 次のような行列 A 考える．

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

ここで，a は実定数とする．次の問に答えよ．

(1) A^2, A^3 を求めよ．

(2) 一般の正の整数 n に対する A^n を求めよ．A^n の形を正しく推定し，数学的帰納法により証明すればよい．

(3) 行列 A に対し，A^0，指数関数 $\exp A$ を次のように定義する．

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

$\exp A$ を求めよ．なお，行列の無限級数の和を求めるためには，各成分ごとに無限級数の和を求めればよい．

(岩手大 1998)　(m19980311)

0.3 次の問いに答えよ.

(1) $f(\theta) = \sin\theta$ を, 以下のマクローリンの定理を用いて無限級数へ展開せよ.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

（ただし $0 < \theta < 1$）

(2) $f(i\theta) = e^{i\theta}$ を無限級数へ展開せよ. ただし, i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ とする．

(3) $f(\theta) = \cos\theta$ を無限級数へ展開し，$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を証明せよ．

(4) $f(t) = 5 + 0.4\sin\omega t + 0.4\sin 2\omega t + 0.3\cos 2\omega t + 0.3\sin 3\omega t$ を, 以下の形式に書き直した場合の係数 C_2 と C_{-2} を求めよ.

$$f(t) = \sum_{n=-3}^{3} C_n e^{in\omega t}$$

(5) $f(t) = 0.4\sin 2\omega t + 0.3\cos 2\omega t$ を, 以下の形式に書き直した場合の係数 A を求めよ.

$$f(t) = A\sin(2\omega t + \phi)$$

（岩手大 2004）　(m20040303)

0.4 関数 $f(x)$ の $x=a$ を中心とするテイラー展開は以下のように与えられる.

$$f(x) \sim f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \cdots$$

ただし, $f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の第 n 次導関数 $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ を表す. また, $f'(x)$ および $f''(x)$ は $f(x)$ の導関数 $\dfrac{df}{dx}$ および第 2 次導関数 $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ をそれぞれ表す. 特に, $-1 < x < 1$ に対する関数 $\dfrac{1}{1-x}$ および $-\infty < x < \infty$ に対する関数 e^x の $x=0$ を中心とするテイラー展開はそれぞれ次のように与えられる.

$$\frac{1}{1-x} \sim \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad , \qquad e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

x を実数とし, 関数 $g(x)$ と $h(x)$ を

$$g(x) = e^{x^2} \qquad , \qquad h(x) = \frac{e^{x^2}}{2-x}$$

と定義する.

(1) $g(x)$ の $x=0$ を中心とするテイラー展開を求めよ.

(2) 問 (1) の結果を用いて, $h(x)$ の $x=0$ を中心とするテイラー展開の x^2 の項までを求めよ.

(3) $h(x)$ の導関数 $h'(x)$ を求めよ.

(4) $y = h(x)$ の $-\infty < x < \infty$ における発散する点, 極値を与える点に注意して, グラフの概略を描け.

（東北大 2004） (m20040502)

0.5 N を自然数とする．このとき，次の各問に答えよ;

(1) $y \geq 0$ に対して，次が成り立つことを示せ.

$$e^y \geq \frac{y^N}{N!}$$

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-2x}(1+x)^N dx$ の収束・発散を調べよ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ を $\displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} t\left(1+\log\frac{1}{t}\right)^N dt \quad (n=1,2,\cdots)$ で定める．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(お茶の水女子大 2021) (m20210604)

0.6 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!} \sin\Big(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\Big)\pi$ を求めたい.

$\displaystyle f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} \sin\Big(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\Big)\pi$ とするとき，以下の問に答えよ.

(1) $f'(\theta)$ を無限級数の形を用いて表せ.

(2) $f''(\theta)$ を $f(\theta)$ を用いて表せ.

(3) $f(\theta)$ を求め， $\displaystyle f(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!} \sin\Big(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\Big)\pi$ を計算せよ.

(東京大 1999） (m19990702)

0.7 (1) 複素変数の指数関数 e^x の級数展開は次式で表される.

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

上式を利用して, $\cos z$, $\sin z$ の級数展開を求めよ.

(2) 次の複素関数を特異点 $z = 0$ のまわりでローラン展開し $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ の形で表せ. また, 特異点の種類を答えよ.

$$f_1(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right), \qquad f_2(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}, \qquad f_3(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

(3) 次の積分を求めよ.

$$I = \oint_C f_3(z) dz$$

ただし, 積分路 C は複素平面上で原点を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を反時計回りに一周するものとする.

(東京大 2001) (m20010703)

0.8 指数関数 e^x のテイラー展開

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

を拡張して，行列 A の指数関数 e^A を，

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots$$

と定義する．ただし，I は単位行列である．いま，行列 e^A が

$$e^A = \begin{bmatrix} 2 - e^{-1} & -1 + e^{-1} \\ 2 - 2e^{-1} & -1 + 2e^{-1} \end{bmatrix}$$

と与えられたとき，以下の問に答えよ．

(1) 行列 e^A を対角化せよ．

(2) 正則行列 P に対して，$P^{-1}e^A P = e^{(P^{-1}AP)}$ が成り立つことを示せ．

(3) 行列 A を求めよ．

(東京大 2004) (m20040704)

0.9 2 行 2 列の行列 $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) A^2, A^{-1}, $|A|$ を求めよ.

(2) A の全ての固有値を求めよ.

(3) $(A - I)^2 = 0$ が成り立つことを示せ. ただし, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(4) 任意の実数 t について, ある t の多項式 $g(t)$ と定数 a, b が存在して

$$t^{100} = g(t)(t-1)^2 + at + b$$

が成り立つ. a と b を求めよ.

(5) A^{100} を A と I を用いて表せ.

(6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}$ を自然対数の底 e を用いて表せ. ただし, $A^0 = I,\ 0! = 1$ である.

(東京大 2010)　　(m20100701)

0.10 (1) N 個の同じボールを n_1 個, n_2 個, n_3 個 $(n_1 + n_2 + n_3 = N)$ の組に分ける組み合わせの総数が以下の式で表されることを示せ.

$$\frac{N!}{n_1!n_2!n_3!}$$

(2) N 個の同じボールを n_1 個, n_2 個, $\cdots$, n_m 個 $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} n_i = N\right)$ の組に分ける組み合わせの総数 W はいくつになるか. 導出過程とともに示せ.

(3) (2) で得られた W を用いて, $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log_e W$ を計算することを考える.

(a) $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log_e N = 0$ となることを示せ.

(b) $N \to \infty$ $\left(N = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} n_i\right)$ としたとき, $\dfrac{n_i}{N}$ はそれぞれある値 p_i に収束する. すなわち $p_i = \displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{n_i}{N}$ $(i = 1, 2, \cdots m)$. このとき, $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log_e W$ を p_i のみで表せ.

ただし以下に示す $k!$ (k は正の整数) に関する不等式を用いてよい.

$$\sqrt{2\pi}k^{k+1/2}e^{-k+1/(12k+1)} < k! < \sqrt{2\pi}k^{k+1/2}e^{-k+1/12k}$$

(東京大 2010)　　(m20100705)

0.11 下表のように, ロット 1 には合計 100 個の製品の中, 不良品が 3 個あり, ロット 2 には合計 150 個の製品の中, 不良品が 6 個あるとする. このとき, 以下の質問に答えよ.

	良品	不良品	合計
ロット 1	97	3	100
ロット 2	144	6	150
合計	241	9	250

(1) 2 つのロットの中から 1 つのロットを選び, さらにその箱の中から 1 個の製品を選び出すものとする. ただし, 各ロットは等確率で選ばれる. このとき

(a) 不良品が選ばれる確率を求めよ.

(b) 不良品が選ばれたとき, それがロット 1 の製品である確率を求めよ.

(2) ロット 2 の製品を 30 個調べるとき, その中に r 個の不良品が含まれる確率を $P(r)$ $(r = 0, 1, 2, \cdots, 6)$ とする. このとき, $P(r)$ の式を r と 2 項係数を使って表せ. ただし, 2 項係数は

$${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,,\quad k = 0, 1, 2, \cdots, n$$

で定義される.

(電気通信大 2005)　　(m20051009)

0.12 無限回微分可能な関数 $f(x)$ を，定数 a の周りで Taylor 級数に展開すると，

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

となる．ただし，

$$f^{(n)}(a) = \left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right]_{x=a}$$

である．この関係を基に以下の設問に答えなさい．

(1) (a) e^x を原点 0 の周りに Taylor 級数に展開しなさい．

(b) $\cos x$ を原点 0 の周りに Taylor 級数に展開しなさい．

(c) $\sin x$ を原点 0 の周りに Taylor 級数に展開しなさい．

(2) (1) の結果を用いて，次の Euler の公式が成り立つことを示しなさい．ただし， i は虚数単位で， $i^2 = -1$ である．

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

(3) (2) の結果を基に，次の等式が成り立つことを示しなさい．

$$e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)}$$

(千葉大 2000） (m20001201)

0.13 実数の定数 $\alpha,\ \beta$ に対し，行列 $A,\ P$ を

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) P^n $(n \geqq 2)$ を求めよ．

(2) $A,\ A^2$ を $\alpha,\ \beta,\ I,\ P,\ P^2$ を用いて表せ．ただし，I は 3 次の単位行列を表す．

(3) A^n $(n \geqq 2)$ を $n,\ \alpha,\ \beta,\ I,\ P,\ P^2$ を用いて表せ．A^n はどのような行列になるか．

(4) $\exp A$ を $\alpha,\ \beta$ を用いてできるだけ簡単な行列の形に直せ．ただし，$\exp A$ は，

$$\exp A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots$$

で定められる行列を表す．

(5) $\exp(-A)$ を $\alpha,\ \beta,\ I,\ P,\ P^2$ を用いて表し，$(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$ であることを証明せよ．

(筑波大 2001) (m20011308)

0.14 $f(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2 \cdot 1}x^2 + \dfrac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1}x^3 + \cdots + \dfrac{1}{n!}x^n + \cdots$ (式 1)

について, 次の問に答えなさい．

(1) 項別微分を行ない導関数 $f'(x)$ を求めなさい．

(2) 微分方程式 $f(x) = f'(x)$ 満たす関数を $f(x) = \exp(x)$ と定義するとき (式 1) はこの定義を満足することを説明しなさい．

(3) 新しい関数 $ch(x)$, $sh(x)$ を

$$ch(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$$

$$sh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$$

で定義するとき, $ch(x)$ および $sh(x)$ の間には

$$sh'(x) = ch(x)$$

$$ch'(x) = sh(x)$$

$$(ch(x))^2 - (sh(x))^2 = 1$$

なる関係があることを示しなさい．

（筑波大 2004） (m20041312)

0.15 いろいろな関数を，多項式で表現してみよう．ある関数 $f(x)$ が，

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

のように，定数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ を用いて x の多項式であらわされるとしよう．このとき，

(1) $f(0) = a_0$，$f'(0) = a_1$，$f''(0) = 2a_2$ であることを示せ．

(2) 0 以上の任意の整数 n について，$f^{(n)}(0) = n!\,a_n$ であることを示せ．ここで，$f^{(n)}(x)$ は，$f(x)$ を n 回，微分したものである（$f(x)$ の n 階導関数）．ゼロの階乗は 1 とする．

(3) $f(x) = \dfrac{f(0)}{0!} + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ とできることを示せ．

(4) 関数 $\sin x$ は，このような多項式で表現できることがわかっている．具体的に $\sin x$ をこのような多項式で表現せよ．

(5) 関数 $\cos x$ や関数 e^x も，このような多項式で表現できることがわかっている．具体的に $\cos x$ と e^x をそれぞれ，このような多項式で表現せよ．

(6) 任意の実数 θ について，$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ となることを示せ，ただし，i は虚数単位とする．

(筑波大 2008)　　(m20081319)

0.16 指数関数 e^x の性質に関する以下の問いに答えなさい．

(1) 自然数 n を用いて定義された以下の極限値を考える．

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(1a) 2 項展開の公式を用いて下の関係式を示しなさい．

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

(1b) さらに $\dfrac{1}{n!} < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ を用いて $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が有界であることを示しなさい．

(2) 有界なる単調数列は収束するので (1) で与えられた極限は極限値をとり，これを e と書くことにする．この e が自然数の底である．　このとき以下を示しなさい．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

(3) 上記の (2) を使って

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

が成立することをまず示し，その上で微分の定義に基づいて $\{e^x\}' = e^x$ を示しなさい．

(4) $f(x) = e^x$ を n 次のマクローリン展開（$x = 0$ のまわりでのテイラー展開）し，その剰余項を求めなさい．

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!} = 0$ を示し，これを用いて $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ を示しなさい．

(筑波大 2009)　　(m20091302)

0.17 $g(x)$ を整数係数の多項式とする，$n \geqq 1$ を与えられた自然数として，

$$f(x) = x^n g(x)$$

とする．このとき，すべての $k = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，$f^{(k)}(0)$ は $n!$ の倍数になることを示せ．ただし，$f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ の k 回微分してできる多項式を表す．

(筑波大 2009)　　(m20091314)

0.18 積分を利用して，次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$$

(筑波大 2013)　　　(m20131303)

0.19 次の問いに答えよ．

(1) $\sinh x$ と $\cosh x$ をマクローリン展開せよ．

(2) 次の積分を計算せよ．

$$\int_0^1 \cosh x\,dx$$

(3) 次の積分を計算せよ．

$$\int_0^1 (1-x)\cosh x\,dx$$

(4) $n=0,1,2,\cdots$ に対して次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\int_0^1 (1-x)^n\cosh x\,dx=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n!}{(2m+n+1)!}$$

(筑波大 2013)　　　(m20131304)

0.20 (1) 関数 $f(x)=e^x$ をマクローリン展開（$x=0$ のまわりでテイラー展開）せよ．

(2) 以下の性質 (A) を用いて，次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{1!}+\frac{n-1}{2!}+\cdots+\frac{2}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right)$$

(A) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=\alpha$$

が成り立つ．

(3) 上の性質 (A) を証明せよ．

(筑波大 2017)　　　(m20171312)

0.21 (1) $x>0$ に対して，次の関数を定義する．

$$\Gamma(x)\equiv\int_0^{\infty}u^{x-1}e^{-u}du$$

任意の正の整数 n に対して，$\Gamma(n+1)=n!$ が成り立つことを示せ．

(2) 次の定積分を $u=-(n+1)\log x$ $(\Leftrightarrow x=e^{-\frac{u}{n+1}})$ とする置換積分により計算せよ．ただし，n は任意の正の整数を表す．

$$\int_0^1 x^n(\log x)^n dx$$

(3) 以下の恒等式を証明せよ．

$$\int_0^1 x^{-x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-n}\quad\left\{=\lim_{n\to\infty}(1+2^{-2}+3^{-3}+\cdots+n^{-n})\right\}$$

ただし，(2) の結果，および，次のマクローリン展開の結果を用いること．

$$x^{-x}=e^{(-x\log x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x\log x)^n}{n!}$$

また，積分 $\int$ と和 $\sum$ の順序は交換してもよいとする．

(筑波大 2022)　　　(m20221307)

0.22 コインの表裏を出す確率事象に対して，表がでる確率が 0.1 で裏がでる確率が 0.9 であるとする．この事象を n 回行う試行を考える．

n 回の試行を行ったとき，表が k 回出現する確率分布 $P(k)$ が次式で与えられることを示せ．

$$P(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \qquad \text{ただし } p = 0.1$$

n が 100 であるとき，k に関して $P(k)$ が，$k = 10$ で最大になることを示せ．

(山梨大 2016) (m20161803)

0.23 (1) 関数 $f(x)$ が $x = 0$ を含む区間で n 回微分可能であるとき，下式を満たす点 $\theta(0 < \theta < 1)$ が存在する．ただし，$f^{(n)}(x)$ は第 n 次導関数とする．

$$f(x) = f(0) + xf^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)$$

上式の最終項を除いた n 項までの和の部分を関数 $f(x)$ の近似式と呼ぶ．

$f(x) = (1+x)^k$ (k は任意の実数) を 2 次式で近似し，$\sqrt{1.1}$ の近似値を求めなさい．

(2) n 回微分可能な関数 $f(x)$，$g(x)$ の積 $f(x)\cdot g(x)$ の第 n 次導関数 $\Big(f(x)\cdot g(x)\Big)^{(n)}$ が次の式で与えられることを数学的帰納法によって証明しなさい．

$$\Big(f(x)\cdot g(x)\Big)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i f^{(n-i)}(x)\cdot g^{(i)}(x)$$

(山梨大 2016) (m20161804)

0.24 一般項が次の式で表される数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限値を求めるとともに，その値が極限値になることを証明せよ．

(1) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(2) $\dfrac{10^n}{n!}$

(3) $\sqrt[n]{a}$， (a は正の定数)

(新潟大 1999) (m19992002)

0.25 3 次元空間上のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ を x 軸のまわりで角度 θ だけ回転するとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{V}}'$ へ変換される．この関係を 3 × 3 行列 $U(\theta)$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{V}}' = U(\theta)\overrightarrow{\mathrm{V}}$$

と書く．ここで，$U(\theta)$ は

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

で与えられる．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $U(\theta)$ の行列式 $\det U(\theta)$ を求めよ．

(2) 行列 $U(\theta)$ の逆行列 $U(\theta)^{-1}$ を求めよ．

(3) 行列 K を

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

としたとき，K^2，K^3，および K^4 を求めよ．さらに，正の整数 m に対して，K^{2m} と K^{2m-1} を求めよ．

(4) 一般に，正方行列 X の指数関数は無限級数

$$e^X = E + X + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}X^n$$

で定義される．ここで，E は単位行列を表し，$X^0 = E$ である．問 (3) の結果を利用して，

$$e^{\theta K} = U(\theta)$$

となることを示せ.

(新潟大 2014)　　(m20142017)

0.26 以下のように行列 A, B, C を定義する.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{i\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

また，I を 3×3 の単位行列とする．ここで，i は虚数単位で $i = \sqrt{-1}$ である.

(1) $A^2 + B^2 + C^2 = kI$ となることを示し，定数 k を求めよ.

(2) A の固有値を求めよ.

(3) 一般に，正方行列 M の指数関数 e^M は，無限級数 $e^M \equiv \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}M^n$ で定義される．α を実定数としたとき，

$$e^{i\alpha C} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$$

（問題ではこうなっていましたが, $(2, 2)$ 成分は 1 になるものと思われます）

となることを示せ.

(4) ベクトル $\vec{v}(\phi)$ を $\vec{v}(\phi) = \dfrac{\sin\phi}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{i\cos\phi}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と定義する.

このとき，$e^{i\alpha C}\vec{v}(\phi) = \vec{v}(\phi')$ と書けることを示し，ϕ' を求めよ．ただし，ϕ と ϕ' は実定数である.

(新潟大 2017)　　(m20172017)

0.27 整数 $n \geqq 0$ に対して，$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ とする．次の各問いに答えよ.

(1) 自然数 n に対して $I_{2n-1} = \dfrac{(2^n \cdot n!)^2}{2n \cdot (2n)!}$, $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2} \cdot \dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$ を求めよ.　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}\cdot(n!)^2}{\sqrt{n}\cdot(2n)!}$ を求めよ.

(新潟大 2019)　　(m20192014)

0.28 虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を含む指数関数 $e^{i\theta}$ を三角関数で表す公式はオイラーの公式と呼ばれる．物理の問題を扱うには，よく似た行列の関係式を用いると便利なことが多い．このことに関連した以下の問いに答えよ.

(1) オイラーの公式を書け．つまり，実数 θ に対して $e^{i\theta}$ を三角関数を用いて表せ.

(2) 二次正方行列 I および J を

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する．J^2 を計算し，J^2 と I の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3) 一般に二次正方行列 X に対し，そのゼロ乗 X^0 および指数関数 e^X は次式で定義される：

$$X^0 = I, \qquad e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n = I + X + \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{3!} X^3 + \cdots$$

(2) の関係式に着目すると，行列 $e^{\theta J}$ は I に比例する部分と J に比例する部分の和

$$e^{\theta J} = f(\theta) I + g(\theta) J$$

で表すことができる．このとき，関数 $f(\theta)$ および $g(\theta)$ を求めよ．

なお，必要ならば，三角関数のベキ展開（テイラー・マクローリン展開）が次式で与えられることを用いてもよい．

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} \qquad = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \cdots$$

$$\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots$$

(4) (3) で求めた行列 $e^{\theta J}$ に対して，その行列式の値を答えよ．

次に，これまでの結果の応用として，調和振動子の運動を表す微分方程式

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

の解 $x(t)$ を求めたい．ここで ω は正の定数である．以下の問いに答えよ．

(5) 変数 $p(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ および $q(t) = \omega x(t)$ を用いると，この微分方程式は,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$$

の形に表すことができる．ここで K は t に依らない二次正方行列である．行列 K を答えよ．

(6) (5) の微分方程式の解は次式で与えられる：

$$\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = e^{Kt} \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$$

以上のことから，初期条件 $p(0) = p_0$，$q(0) = q_0$ に対応する解 $x(t)$ を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222006)

0.29 $f(x)$ を $f'(x) = f(x)$，$f(0) = 1$ を満たす関数とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\left(e^{-x} f(x)\right)' = 0$ を示せ．また，これを用いて $f(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ．

(3) (2) の結果を用いて $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$ の値を求めよ．

(金沢大 2007)　　(m20072202)

0.30 (1) 関数 x のマクローリン展開は次式で表される.

$$f(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

これをもとに, 次の関係式を示せ.（注意： $f^{(n+1)}(\theta x)$ は 'θx' の $(n+1)$ 階導関数である）

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}\ ,$$

$$R_{n+1} = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^{n+1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

(2) (1) の関係式で $n=1$ とした関数 x のマクローリン展開は次式で表される.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+\theta x)^2} \qquad (0 < \theta < 1)$$

これを用いて, $\log 1.01$ の近似値として 0.01 を採用したときの誤差は 0.00005 より小であることを示せ.

(福井大 2005) (m20052402)

0.31 次式はマクローリン展開の一般式である.

$$f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad \text{ただし，} f^{(n)} \text{は } n \text{ 次導関数を示す.}$$

(1) $f(x) = e^x$ の $n=4$ までのマクローリン展開を示すとともに，e の近似値を求めよ.

(2) $f(x) = \sin x$ および $f(x) = \cos x$ について，$n=5$ までのマクローリン展開を示せ.

(3) 上の結果を利用して $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ を示せ; ただし，$i^2 = -1$ である.

(福井大 2012) (m20122424)

0.32 以下の行列 $\mathbf{S}$ に関する問いに答えよ．ただし，θ は実数である.

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\mathbf{S}$ を対角化せよ.

(2) n を自然数とし，$\mathbf{S}^n$ を求めよ.

(3) 行列 $\mathbf{S}$ 及び実数 x を用いた指数関数はそれぞれ以下の式で定義される.
$\exp(\mathbf{S})$ を計算せよ.

$$\exp(\mathbf{S}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{S}^n}{n!} \qquad\qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(福井大 2022) (m20222418)

0.33 以下の式でガンマ関数 $\Gamma(t)$ を定義する.

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{t-1}dx\ ,\ t > 0.$$

次の問に答えよ．ただし， $t > 0$ のとき $\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^t = 0$ となることは証明しなくても使ってよい.

(1) $t > 0$ に対して $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ となることを示せ.

(2) 自然数 n に対して $\Gamma(n+1) = n!$ となることを示せ.

(3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2$，すなわち

$$\left(\int_o^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx\right)\left(\int_o^\infty e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}dy\right)$$

を x, y の 2 変数関数の重積分で表せ．

(4) 変数 (x, y) から (r, θ) への変数変換

$$\begin{cases} \sqrt{x} = r\cos\theta, \\ \sqrt{y} = r\sin\theta \end{cases}$$

に対してヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ．

(5) 前問 (4) の変数変換を用いて (3) の重積分を計算し $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ を求めよ．

(岐阜大 2014)　　(m20142601)

0.34 以下の文章の空欄に適当な式を記入せよ．

(1) 連続関数 $f(x)$ の微分は次の公式で定義される．

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\boxed{1} - f(x)}{h}$$

この公式に基づき e^x の微分を求めよう．

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{2}}{h}$$

ここで，$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ と展開できることを利用すると，

$$(e^x)' = e^x\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \cdots + \frac{\boxed{3}}{n!} + \cdots\right)$$

$$= e^x\lim_{h\to 0}\left(1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \cdots + \frac{\boxed{4}}{n!} + \cdots\right)$$

$$= \boxed{5}$$

と求まる．

(2) x^x の微分を次の手順で求めよう．ただし，$x > 0$ とし，また自然対数を log で表すものとする．

$y = x^x$ の両辺の対数をとると，

$$\log y = \boxed{6}$$

この式の両辺を x で微分すると，

$$\boxed{7} = \boxed{8} + x\cdot\frac{1}{x} = \boxed{9} + 1$$

この式から，y' を x で表すと，

$$y' = \boxed{10}$$

と求まる．

(豊橋技科大 1997)　　(m19972703)

0.35 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は次の式で表される．

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{1}{2!}f^{(2)}(0)x^2 + \cdots\frac{1}{n!}f^{(n)}x^n + \cdots$$

ただし，$f^{(n)}(0)$ は $x = 0$ での n 階微分である．このとき，次の関数のマクローリン展開を，$n = 2$ まで表せ．

(1) $f(x) = \sin x$

(2) $f(x) = \cos x$

(豊橋技科大 1997) (m19972706)

0.36 次のサイクロイド曲線に対して，以下の問いに答えよ．

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases} \qquad (a > 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

(1) 曲線の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(2) $\theta = \pi$ における接線の方程式を求めよ．

(3) 曲線を x 軸のまわりに回転させるときにできる立体の体積を求めよ．なお，次の公式を用いてもよい．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & (n:\text{偶数}) \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n:\text{奇数}) \end{cases}$$

ただし，$n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots 2 & (n:\text{偶数}) \\ n(n-2)(n-4)\cdots 1 & (n:\text{奇数}) \end{cases}$

(名古屋大 2008) (m20082802)

0.37 n が自然数のとき，不等式 $n! \geqq 2^{n-1}$ が成立することを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(三重大 2007) (m20073109)

0.38 (1) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)\,dx$ としたとき, I^2 を極座標を用いて計算し $I = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$ となることを示せ. ただし, $a > 0$ とする. 次に $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-x^2)\,dx$ の値を求めよ.

(2) $f(z) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt$ とするとき, n を 0 または正の整数として

(i) $f(n+1) = n!$, (ii) $f(n+\frac{1}{2}) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$ となることを示せ.

(三重大 2010) (m20103112)

0.39 次の各数列は収束するか，収束する場合はその極限値を求めよ．

(1) $\dfrac{2n^2 - n}{n^2 + 1}$ (2) $\dfrac{(-1)^n}{n}$ (3) $(-1)^n \dfrac{n-1}{n}$ (4) $\dfrac{2^n}{n!}$

(奈良女子大 2002) (m20023205)

0.40 関数 $f(z)$ を次のように定義する．

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{e^z - 1} & (z \neq 0) \\ 1 & (z = 0) \end{cases}$$

この関数は $|z| < 2\pi$ において解析的である．テイラー展開を

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

のように表し，ベルヌーイ数 B_n , $n = 0, 1, 2, \cdots$ を定義する．$B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$ を示せ．さらに，$(e^z - 1)f(z) = z$ のべき級数展開から，B_n が次の漸化式を満たすことを示せ．

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0$$

ただし，$\binom{n}{k}$ は２項係数を表す．

(京都大 2002)　　(m20023305)

0.41　N を 0 または正の整数をとる確率変数とする．ポアソン分布では $N=n$ となる確率が次の分布関数で与えられる．

$$p(N=n)=a^n e^{-a}/n!$$

(1)　ポアソン分布の平均値 $<n>=\sum_0^\infty np(N=n)$ が a となることを示せ．

(2)　面積 S の運動場に全部で M 粒の雨滴が落ちたとする．運動場の微少な部分（面積 A）に落ちた雨滴の数を L とするとき，その確率分布 $p(L=l)$ は $p=A/S$ として次の２項分布で与えられる．

$$p(L=l)=[M!/l!(M-l)!]p^l(1-p)^{M-l}$$

$a=(M/S)A$ を導入し，適切な極限を考えることにより２項分布からポアソン分布を導け．

(京都大 2002)　　(m20023307)

0.42　ある事象の起こる確率 p が与えられているとき，n 回の独立試行を行って事象が k 回起こる確率を b_k とする（これをパラメータ n,p の二項分布という）．なお，以下の問いでは，$q=1-p$ として，次の二項定理を利用してよい．　$(px+q)^n=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k p^k q^{n-k} x^k$

ここで，${}_nC_k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ は二項係数である．

(1)　確率 b_k を記し，$\sum_{k=0}^{n} b_k=1$ となることを示せ．

(2)　二項分布の平均値 μ と分散 σ^2 を求めよ．

(3)　事象が起こる回数を確率変数 r として，r に関するチェビシェフの不等式を次式で表す．

$$P(|r-\mu|\leq a\sigma)\geq 1-\frac{1}{a^2}$$

ここで，a は適当な正の数である．試行回数を増やせば，事象の起こる割合は一定の値 p に近づくことを示せ．

(京都大 2006)　　(m20063303)

0.43　$f(z)$ が $z=a$ を中心とする単位円 C の内部および周上で正則であるとき，以下を証明せよ．

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-in\theta}f(a+e^{i\theta})d\theta\ , \qquad n=1,2,\cdots$$

(京都大 2008)　　(m20083306)

0.44　(1)　自然数 $n=1,2,...$ に対して $n!\geqq 2^{n-1}$ が成り立つことを示せ．

(2)　級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ は収束して，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\leqq 2$ を満たすことを示せ．

(京都工芸繊維大 2001)　　(m20013404)

0.45　行列 $A=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ の指数関数 $\exp(A)$ を求める. ただし, a,b および c は実数ある. また, E を単位行列として, 行列 A の指数関数 $\exp(A)$ を

$$\exp(A)=E+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n$$

のように定義する.

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.

(2) 行列 A は対称行列であるので, 適当な直交行列によって対角化される. 行列 A を対角化する直交行列の中で対称行列となる直交行列 P を 1 つ求めよ.

(3) 行列 A の指数関数 $\exp(A)$ を求めよ.

(4) $\exp(A)$ の行列式 $|\exp(A)|$ を求めよ.

(大阪大 2010) (m20103501)

0.46 n を自然数, k を n 以下の自然数とする, n 人の学生が k 個のグループに分かれ, 各グループで円状に並ぶときの並び方の総数を $S(n,k)$ と表す. ただし, 各グループは 1 名以上の学生を含むものとする.

(1) $S(4,2)=11$ であることを, すべての並び方を列挙することで示せ. ただし, 学生を A,B,C,D で表し, A で 1 つのグループ, B,C,D でもう 1 つのグループを構成し, B,C,D がこの順で円状に並ぶことを $\{[A],[B,C,D]\}$ と表すものとする.

なお, $\{[A],[B,C,D]\}$ と $\{[B,C,D],[A]\}$ や $\{[C,D,B],[A]\}$ は同じ並び方を表すが, 解答ではこの並び方を表すのにどの形式を用いてもよい.

(2) $S(n,k)=(n-1)S(n-1,k)+S(n-1,k-1)$ が成立することを示せ. ただし, $S(0,0)=1$, 各 $i(i \geq 1)$ に対して $S(i,0)=0$ とし, 任意の $i,j\,(i<j)$ に対して $S(i,j)=0$ とする.

(3) H_n を

$$H_n = \frac{S(n+1,2)}{n!}$$

とする. H_n を, n を用いて表せ.

(4) 設問 (3) の H_n が, 任意の自然数 $n(n \geq 1)$ に対して,

$$\frac{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}{2} < H_n \leq \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$$

を満たすことを示せ. ただし, $\lfloor x \rfloor$ は, x 以下の最大の整数を表すものとする¿

(大阪大 2011) (m20113507)

0.47 非負の整数 n に対して

$$S_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$$

とおく. このとき, 各問に答えよ.

(1) $n \geqq 2$ に対して等式 $S_n = \dfrac{n-1}{n} S_{n-2}$ を示し, n の偶奇で場合分けをして, S_n の値を求めよ.

(2) 比 $\dfrac{S_{2n}}{S_{2n-1}}$ を考え, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_{2n}}{S_{2n-1}}$ の値を求めることで, 次を示せ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$$

(大阪府立大 2018) (m20183604)

0.48 正の整数 n, および実数 x に対し

$$e^x = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta_{x,n} x}$$

と表し, 数列 $\{\theta_{x,n}\}$ を定義する. ここで, $0 < \theta_{x,n} < 1 \ \ (n = 1, 2, \cdots)$ である. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) 次の式が成り立つことを示せ.

$$e^{\theta_{x,n} x} = 1 + \frac{x}{n+2} e^{\theta_{x,n+1} x}$$

(2) 極限値 $\lim_{x\to 0}\theta_{x,n}$ を求めよ.

（神戸大 2004）　　(m20043803)

0.49 $(-1,1)$ で定義された C^∞-級関数 $f(x)$ は次の微分方程式を満たすとする：

$$(1-x^2)f'(x)-xf(x)=1,\quad f(0)=0.$$

自然数 n に対し，$a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ とおく.

(1) a_n を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^n dx \leqq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$ が成り立つことを示せ．ただし，不等式 $1-x\leqq e^{-x}$　$(0\leqq x\leqq 1)$ および等式 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明せずに用いてよい.

(3) $n\to\infty$ のとき数列 $\{a_n\}$ の収束・発散を判定せよ．また，収束するときは極限値を求めよ.

(神戸大 2018)　　(m20183805)

0.50 自然数 n に対し，$P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ とおく．このとき次の各問いに答えよ.

(1) $P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x)$ を求めよ.

(2) 自然数 n を固定する．各 $j=0,1,...,n-1$ に対し，多項式 $\dfrac{d^j}{dx^j}(x^2-1)^n$ は x^2-1 で割り切れることを数学的帰納法を用いて証明せよ.

(3) 次の関係式が成り立つことを示せ.

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases}\dfrac{2}{2n+1} & (n=m)\\ 0 & (n\neq m)\end{cases}$$

ただし必要ならば $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}t\ dt=\frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}$ を用いてよい.

(鳥取大 2001)　　(m20013902)

0.51 n 回連続微分可能な関数 $f(x)$ は x が 0 に近い範囲では

$$\sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

で近似することができる（ $f^{(n)}(0)$ は $f(x)$ を n 回微分し $x=0$ としたもの ） これを利用して, 以下の関数の 5 次の近似式の $a_0,\cdots,a_5$ と $b_0,\cdots,b_5$ を求めよ.

$$e^x\ \text{の近似式}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$$

$$\cos x\ \text{の近似式}=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4+b_5x^5$$

(鳥取大 2005)　　(m20053905)

0.52 確率変数 N はポアソン分布　$P(N=n)=\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$, $\lambda>0,\ n=0,1,2,\cdots$ に従うとする．このとき，N の期待値を求めなさい（ 注意 ： $e^\lambda=\displaystyle\sum_{n=0}^\infty\frac{\lambda^n}{n!}$ が成り立つ ）

(鳥取大 2007)　　(m20073922)

0.53 $f(x)=\cos(x)$ は x が十分小さい範囲で,

$$f(x)\approx\sum_{n=0}^4\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{1}$$

と 4 次式近似できる. ただし $f^{(n)}(x)$ は n 次導関数とする. これについて, 以下の問に答えよ

(1) $f(x),\ f^{(1)}(x),\ f^{(2)}(x),\ f^{(3)}(x),\ f^{(4)}(x)$ を計算し, 式 (1) 右辺の具体的関数形を書け.

(2) 関数 $g(x)$

$$g(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2} \tag{2}$$

について, (1) で求めた $\cos(x)$ の近似式を用いることで, $g(x)$ の近似式を求めよ.

(3) (2) で得られた近似式より, $g(0.1)$ の近似値を計算せよ. 必要なら $1/24 \approx 0.042$ を用いて良い.

(鳥取大 2010) (m20103903)

0.54 区間 $[0,\infty)$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対する広義積分

$$\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M f(x)e^{-sx}dx \quad (s>0)$$

を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) 自然数 n に対して,

$$\int_0^\infty x^n e^{-sx}dx = \frac{n}{s}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-sx}dx$$

が成り立つことを示せ.

(2) 非負の整数 n に対して, $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-sx}dx$ の値を求めよ.

(3) $s>1$ のとき,

$$\int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{(-x)^n}{n!}e^{-sx}dx = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \frac{(-x)^n}{n!}e^{-sx}dx$$

が成り立つことを示せ.

(岡山大 2009) (m20094002)

0.55 (1) 関数 $g(x) = \sqrt{1+x}$ のマクローリン展開は

$$g(x) = 1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}n}\begin{pmatrix} 2n-2 \\ n-1 \end{pmatrix} x^n$$

であることを示せ. ただし, $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ とする. また, 右辺の無限級数の収束半径は 1 であることを示せ.

(2) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$$

で定めるとき, $f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} x^n$$

であることを示せ.

(3) 上の問い (2) の $f(x)$ のマクローリン展開について, その収束半径を求めよ.

(岡山大 2017) (m20174001)

0.56 $n = 0,1,2,\cdots$ とし, 積分 $I_n(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-x}(1+x)^n dx$ を考える. 次の問に答えよ.

(1) すべての n に対して, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)^n}{e^x} = 0$ を示せ.

(2) すべての n に対して, 極限 $\lim_{t\to\infty} I_n(t)$ が存在することを示せ.

(3) $a_n = \lim_{t\to\infty} I_n(t)$ とおく. $n \geqq 1$ のとき, $a_n - na_{n-1} = 1$ が成り立つことを示せ.

(4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n!}$ を求めよ.

(広島大 2005) (m20054102)

0.57 試行毎の確率 p, 試行回数 N の二項分布 $P(n) = \dfrac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n}$ は, $p \ll 1$, $n \ll N$ の場合に平均値 $s = Np$ のポアソン分布 $P(n) = \dfrac{1}{n!}s^n e^{-s}$ に近付くことを示せ. 必要なら $e^{-p} \approx 1-p \quad (p \ll 1)$ を用いてよい.

(広島大 2013) (m20134105)

0.58 一般項 $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ をもつ数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に関して, 以下の問いに答えよ.

(1) $n = 1, 2, \cdots$ および $k = 0, \cdots, n$ に対し, ${}_nC_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ とする. このとき, 不等式

$$\frac{{}_nC_k}{n^k} \leq \frac{{}_{n+1}C_k}{(n+1)^k}$$

が成り立つことを示せ.

(2) $n = 1, 2, \cdots$ に対し, $a_n < a_{n+1}$ を示せ.

(3) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界であることを示せ.

(4) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ.

(広島大 2014) (m20144108)

0.59 逆正弦関数 $f(x) = \sin^{-1} x$ を考える. ただし, f の値域は閉区間 $[-\pi/2, \ \pi/2]$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 開区間 $(-1, 1)$ において f の導関数 f' を求めよ.

(2) $n = 0, 1, 2, \cdots$ と $-1 < x < 1$ に対して,

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) = (2n+1)xf^{(n+1)}(x) + n^2 f^{(n)}(x)$$

が成り立つことを示せ. ただし, $f^{(n)}$ は f の n 次導関数を表す.

(3) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して, $\dfrac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n)!} = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ であることを示せ. ただし, $0! = 1$ とする.

(4) F は開区間 $(-1, 1)$ 上の C^{∞} 級関数とする. 自然数 N と $N+1$ 個の実数 a_0, a_1, $\cdots$, a_N に対して, $g_N(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k x^k$ と定める. ただし, $x^0 = 1$ とする. このとき,

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x) - g_N(x)}{x^N} = 0$$

となるための必要十分条件は, $a_k = \dfrac{F^{(k)}(0)}{k!}$ $(k = 0, \ 1, \ \cdots, \ N)$ であることを示せ.

(5) 自然数 N に対して, $S_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(2k)!\,(2N-2k)!}{(k!)^2\big((N-k)!\big)^2}$ を求めよ.

(広島大 2016) (m20164104)

0.60 (1) n を自然数として, $\sin x$ の n 次導関数が $\sin(x + a_n)$ となるような実数 a_n を一つ求めよ.

(2) 数列 $\left\{b_k\right\}_{k=0}^{\infty}$ が存在して，任意の実数 x と任意の自然数 n に対して
$\left|\sin x - \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k\right| \leq \dfrac{|x|^n}{n!}$ 　が成り立つ．b_k を求めよ．

(3) $0.841 < \sin 1 < 0.842$ であることを示せ．

(4) $\sin 1$ は無理数であることを示せ．

(広島大 2017)　　(m20174104)

0.61 非負整数 n に対し，

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

と定める．ただし，$0! = 1$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) x を実数とする．級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

は $4|x| < 1$ のとき絶対収束し，$4|x| > 1$ のとき発散することを示せ．

(2) $4|x| < 1$ 満たす実数 x に対し，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

と定める．このとき，

$$(1-4x)f'(x) = 2f(x)$$

が成り立つことを示せ．ここで，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す．

(3) $4|x| < 1$ 満たす実数 x に対し，

$$\sqrt{1-4x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$$

が成り立つことを示せ．

(4) 級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}$$

は ∞ に発散することを示せ．

(広島大 2021)　　(m20214105)

0.62 関数 $f(x) = \dfrac{1}{2x^2+3x+1}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{1}{ax+b}$ の n 次導関数 $(n \geqq 1)$ が $\dfrac{a^n \cdot (-1)^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$ であることを示せ．ただし，a, b は 0 でない定数とする．

(2) 等式 $f(x) = \dfrac{p}{x+1} + \dfrac{q}{2x+1}$ を満たす定数 p, q を求めよ．

(3) $f(x)$ の n 次導関数 $(n \geqq 1)$ を求めよ．

(4) $f(x)$ の $x=0$ を中心とするテイラー級数展開をせよ．(一般項も記すこと)．

(広島市立大 2002)　　(m20024201)

0.63 次の極限値を求めよ．(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}$ 　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$

(徳島大 1998)　　(m19984402)

0.64 $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ とする．関数

$$f_n(x) = \frac{x^n(x-\pi)^n}{n!}$$

に対し，

$$a_n = \int_0^{\pi} f_n(x) \sin x dx$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の式を示せ．

$$f_{n+1}(x) = \frac{x(x-\pi)}{n+1} f_n(x)$$

(2) 次の式を示せ．

$$f''_{n+2}(x) = 2f_{n+1}(x) + (2x-\pi)^2 f_n(x)$$

(3) 次の式を示せ．

$$a_{n+2} = (-4n-6)a_{n+1} - \pi^2 a_n$$

(4) a_3 を求めよ．

(高知大 2013)

0.65 関数 $f(x)$ の点 a での Taylor 展開は，関数 $f(x)$ を点 a の近くで一番よく近似する n 次式が

$$f_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n$$

だと言うことを主張している．関数 $f(x) = -\log(1-x)$ の $x = 0$ の近くでの振舞いに関する以下の問いに答えよ．

(1) 点 0 の近くで関数 $f(x)$ を一番よく近似する 0 次式 $f_0(x)$ を求めよ．

(2) 点 0 の近くで関数 $f(x)$ を一番よく近似する 1 次式 $f_1(x)$ を求めよ．

(3) 点 0 の近くで関数 $f(x)$ を一番よく近似する 2 次式 $f_2(x)$ を求めよ．

(4) 点 0 の近くで関数 $f(x)$ を一番よく近似する n 次式 $f_n(x)$ を求めよ．

(5) 以下の 4 つの関数のグラフを，$-1 \leq x < 1$ の範囲で，重ねて描け：

$$y = f(x), \quad y = f_0(x), \quad y = f_1(x), \quad y = f_2(x).$$

(九州大 2009)　　(m20094710)

0.66 (1) (a) 周期 $2L$ の区分的に連続な関数 $f(x)$ をフーリエ級数で表現した式を示し，そのフーリエ係数を求める式を示せ．

(b) 次の関数 $f(x)$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} -2x-4 & (-2 \leqq x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 4-2x & (0 < x \leqq 2) \end{cases}$$

(2) $t > 0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \mathfrak{L}[f(t)] = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ とする．必要ならば下記の表にある関係式を用いて，次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．また (b) については，$f(t)$ $(t > 0)$ のグラフをかけ．

(a) $F(s) = \dfrac{2}{s(s+1)(s+2)}$

(b) $F(s) = \dfrac{-s+2}{s^2+2s+4}$

表：

$$\mathfrak{L}[1] = \frac{1}{s}, \quad \mathfrak{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \ (n = 1, 2, \cdots), \quad \mathfrak{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}, \quad \mathfrak{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$
$$\mathfrak{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \ \mathfrak{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), \ \mathfrak{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a), \ \mathfrak{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau}F(s)$$

(九州大 2016)　　(m20164703)

0.67 何回でも微分できる関数 $f(x), g(x)$ をそれぞれ f, g と書く. 次の等式がすべての自然数 n に対して成り立つことを証明せよ.

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

ただし, 一般に, 関数 h の第 n 次導関数を $h^{(n)}$ と書き,$h^{(0)} = h$ とする.

(佐賀大 2005)　　(m20054901)

0.68 $x = 0$ を含む開区間で無限回微分可能な関数 $f(x)$ のマクローリン展開は以下のようになる.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

これを用いて, ネイピアの数 e を小数点以下第 3 位まで計算せよ.

(佐賀大 2005)　　(m20054935)

0.69 (1) $f(x) = \exp(x)$ のとき，$f'(x)$ と $f''(x)$ はどのように表されますか.

(2) $f(x) = \exp(x)$ のとき，$f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$ はどうなりますか.

(3) マクローリンの定理は次式で表される.

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\,x^2/2! + \cdots$$
$$\cdots + f^{(n-1)}(0)\,x^{n-1}/(n-1)! + f^{(n)}(\theta x)\,x^n/n! \quad (0 < \theta < 1)$$

$f(x) = \exp(x)$ をマクローリンの定理を用いて第 4 項まで示しなさい.
（マクローリン展開）ただし，$\exp(x) = e^x$ である.

(4) 上記のマクローリン展開を第 4 項まで計算して，$\exp(1)$ を小数点以下 2 桁まで求めなさい.

(佐賀大 2007)　　(m20074902)

0.70 $x = 0$ を含む開区間で無限回微分可能な関数 $f(x)$ のマクローリン展開は以下のようになる.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

これを参考に $e^{0.2}$ の値を小数点以下第 4 位まで計算せよ.

(佐賀大 2009)　　(m20094924)

0.71 $f(x) = \cos 3x$ を, マクローリン展開の公式

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

を用いて x の 2 次式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ (a_0〜a_2は係数) で近似することを考える.

(1) 2 次式中の係数 a_0，a_1，a_2 を求めよ.

(2) 近似式を利用して $\cos 0.6$ の近似値を計算せよ.

(佐賀大 2010)　　(m20104919)

0.72 $x=0$ を含む開区間で無限回微分可能な関数 $f(x)$ のマクローリン展開は以下のようになる．

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x++\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

これを参考に $\mathrm{e}^{0.1}$ の値を小数点以下第 4 位まで計算せよ．

(佐賀大 2013) (m20134920)

0.73 つぎの関係を示せ．

(1) n が正の奇数 $n=1,3,5,\cdots$ のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx=\frac{(n-1)!!}{n!!}$$

(2) n が正の偶数 $n=2,4,6,\cdots$ のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx=\frac{\pi}{2}\frac{(n-1)!!}{n!!}$$

ここで !! は 1 つ飛ばしの階乗を表す．たとえば $4!!=4\cdot2=8,\ 5!!=5\cdot3\cdot1=15$ である．

(佐賀大 2018) (m20184927)

0.74 ガンマ関数は，$\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx \quad (s>0)$ で定義される．次の問いに答えなさい．

(1) 部分積分法を用いて，$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ が成り立つことを示しなさい．

(2) $\Gamma(n+1)=n!$ となることを示しなさい．ただし，n は負でない整数である．

(熊本大 2008) (m20085202)

0.75 x の n 次多項式関数 $f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n$ について，以下の問題に答えなさい．ただし，a_0，a_1，a_2，$\cdots$，a_n，a は，定数とする．また，必要に応じて，階乗記号 $n!=n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1$ を用いてよい．

(1) $f(x)$ の 1 階導関数 $f'(x)$，2 階導関数 $f''(x)$，3 階導関数 $f'''(x)$，n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ を計算しなさい．

(2) $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ が成立することを示しなさい．

(鹿児島大 2012) (m20125425)

0.76 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は， $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ で与えられる．ただし，$f^{(n)}(0)$ は $x=0$ における $f(x)$ の n 階導関数である．$x\to0$ のとき，$e^x\sin x$ の漸近展開を x^3 の項まで求めよ．

(室蘭工業大 2007) (m20075507)

0.77 (1) $a>0$ のとき，$\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\pi$ を満たす a の値を求めよ．

(2) 関数 $g(x)$ は，関数 $f(x)$ に対して， $g(x)=f(0)+\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad , \quad (m=1,2,3,\cdots)$

と定義される．ここで，$f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の n 階の導関数を表す．$f(x)=e^{2x}$ とするとき，$g(x)$ を，$m=3$ として求めなさい．

(室蘭工業大 2008) (m20085508)

0.78 正の整数 N が 1 に較べて充分大きいとき，$N!$ は $(N\ln N - N)$ と近似できることを示せ．ただし，$\ln N = \log_e N$ である．

(室蘭工業大 2011)　　(m20115504)

0.79 n の関数 $f(n) = \displaystyle\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $f(1)$ の値を求めよ．

(2) $f(n+1) = nf(n)$ を証明せよ．

(3) n が自然数のとき，$f(n+1) = n!$ を証明せよ．

(4) $f(\frac{1}{2}) = 2\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ を証明せよ．

(5) $\dfrac{f(3)f(-\frac{5}{2})}{f(\frac{3}{2})}$ の値を求めよ．なお，$f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ である．

(島根大 2007)　　(m20075808)

0.80 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

で与えられる，$f(x) = \sin x$ のマクローリン展開を求めよ．ただし，x の 7 次の項までを具体的に記述して，それ以上の高次の項は $\cdots$ で省略してよい．

(滋賀県立大 2009)　　(m20096001)

0.81 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は次で与えられる．

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

(1) 関数 $f(x) = (1+x)\sin x - x\cos x$ のマクローリン展開を書き下せ. ただし, x^4 の項までを明確に求め, それよりも高次の項は $\cdots$ と略してよい.

(2) (1) の結果を使って, 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\sin x - x\cos x}{x^2}$$

(滋賀県立大 2010)　　(m20106002)

0.82 次の関係式を用いながら，あとの問いに答えなさい．

$${}_n\mathrm{C}_m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} \qquad ①$$

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0\ a^n + {}_n\mathrm{C}_1\ a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2\ a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\ b^n \qquad ②$$

なお，以下では集合 X の要素数を $|X|$ と表す．

(1) 次式が成り立つことを示しなさい．

$${}_{n+1}\mathrm{C}_k = {}_n\mathrm{C}_{k-1} + {}_n\mathrm{C}_k$$

(2) 次式が成り立つことを示しなさい．

$${}_n\mathrm{C}_0\ 2^n + {}_n\mathrm{C}_1\ 2^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2\ 2^{n-2} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 3^n$$

(3) 要素数が $q(q>0)$ である有限集合 A の部分集合のうち，要素数が $r(r \leq q)$ である集合全体を次式の $P_r(A)$ と表す．

$$P_r(A) = \left\{ B \,\middle|\, B \subseteq A,\ \text{かつ},\ |B| = r \right\}$$

このとき，$|P_r(A)|$ を q と r を用いて表しなさい．

(4) 要素数が $n(n>0)$ である有限集合 A の部分集合全体を $P(A)$ としたとき，$|P(A)|$ を，途中の式を省略せずに n を用いて表しなさい．

(岩手県立大 2013)　　(m20137001)