[選択項目] 年度：1991〜2023 年 文中： $\oint$

0.1 (1) 複素変数の指数関数 e^x の級数展開は次式で表される.

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

上式を利用して, $\cos z$, $\sin z$ の級数展開を求めよ.

(2) 次の複素関数を特異点 $z = 0$ のまわりでローラン展開し $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ の形で表せ. また, 特異点の種類を答えよ.

$$f_1(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right), \qquad f_2(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}, \qquad f_3(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

(3) 次の積分を求めよ.

$$I = \oint_C f_3(z)dz$$

ただし, 積分路 C は複素平面上で原点を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を反時計回りに一周するものとする.

(東京大 2001) (m20010703)

0.2 以下の問いに答えよ．ただし，解とともに導出過程も示せ.

(1) 複素数 A_n を係数とする複素多項式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z-a)^n$$

を考える．ただし，z は複素変数，a は複素数，n は整数とする．複素平面上で a の周りを反時計回りに一周する経路 C に沿った積分について，以下の式が成り立つことを示せ．ここでは i を虚数単位とする.

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i A_{-1}$$

必要であれば以下のコーシーの積分定理を用いて良い.

複素関数 $g(z)$ が複素平面上の閉曲線 C' とその内部 D' で正則あれば.

C' を一周する経路に沿って $g(z)$ を積分すると，その結果はゼロである.

(2) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

(3) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

(4) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$$

(東京大 2012) (m20120704)

0.3 複素積分を利用して実数積分を求めることを考える．以下の問いに答えよ.

(1) まず，ガウス積分と呼ばれる実数積分 $I(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ を考える．α は正の定数であり; x は実数である．y を実数とするとき，$\{I(\alpha)\}^2$ は以下の式で表される．

$$\begin{aligned}\{I(\alpha)\}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2}dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)}dxdy\end{aligned}$$

この式を極座標 (r,θ) 表示に変換せよ．

(2) $I(\alpha)=\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$ となることを導出過程とともに示せ．

(3) 図 4.1 に示すように x 軸を実軸，y 軸を虚軸とする複素平面上において半径 R の扇形で C_1，C_2，C_3 からなる経路 C を反時計回りに一周することを考える．i を虚数単位とし，z を複素数とするとき，以下の積分を求めよ．

$$\oint_C e^{iz^2}dz$$

(4) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_2} e^{iz^2}dz=0$ となることを示せ．ただし，$0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$ において，$\sin\varphi\ge\dfrac{2\varphi}{\pi}$ を用いてよい．

(5) 上記のガウス積分と複素積分を用いて，実数積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\sin x^2dx$ の値を求めよ．

(6) 実数積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ の値を求めよ．

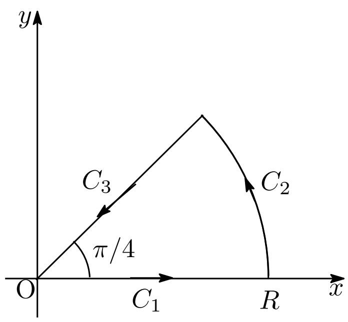


図 4.1

(東京大 2015)　　(m20150704)

0.4 以下の問いに答えよ．i は虚数単位とする．また, z は複素数とする．

(1) $\sin z=10$ を z について解け．

(2) i^i, 3^i それぞれについて実部と虚部を求めよ．

(3) ある周回経路 C に沿った複素平面上の周回積分

$$\oint_C \frac{1}{z^2+1}dz$$

を考える．経路 C の取り方によって積分値がどのように変化するか考えたい．極の配置を図示し，経路の例を 1 つずつ示しながらとりうる積分値を全て列挙せよ．

(4) z に関する関数

$$\frac{1}{z^2-3z+2}$$

の収束域 $1<|z|<2$，および $2<|z|$ に対するローラン級数を求めよ．

(5) 実積分

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4}dx$$

を，留数の定理を用いて求めたい．適切な複素平面での積分路を定めて図示し，積分値を求めよ．

(東京大 2016)　　(m20160704)

0.5 i を虚数単位とする．以下の問いに答えよ．

(1) $-i$ の 3 乗根

$$A = (-i)^{1/3}$$

を考える．

(a) A を全て求めて $a+ib$ の形で答えよ．a と b は実数とする．ただし，最終的な a と b の表式に三角関数を用いてはならない．

(b) A の全ての点を複素平面上に図示せよ．

(2) x と y を実数として複素数 $z = x + iy$ を考える．次の関数に関して以下の問いに答えよ．

$$u = \sin x \cosh y$$

(a) u を実数部分として持つ正則関数 $w(z)$ を求めよ．

(b) $\dfrac{dw(z)}{dz}$ を求めよ．

(3) 次の複素関数積分 I を考える．

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^5 - 3iz^4/2 + z^3}dz$$

ただし，積分路は複素平面上の単位円周上を反時計回りに一周するものとする

(a) 全ての極と対応する次数と留数を求めよ．

(b) 積分 I を求めよ．

(東京大 2018)　　(m20180704)

0.6 三次元空間の中にデカルト直交座標系 $O-XYZ$ 座標系が定義されている．

$y=0$ 平面（$z-x$ 平面）上の点 $A=(x_0, 0, z_0)$ を始点とし，一定方向で $y=0$ 平面から遠ざかる点 B がある．線分 AB の長さは λ で，線分 AB の方向ベクトルは，球座標系にならって，水平角（緯度）θ，方位角（経度）φ とする．ただし，$-90^\circ < \theta < 90^\circ$，$0^\circ < \varphi < 180^\circ$．点 B の座標は，$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ から，

$$B = (\lambda\cos\theta\cos\varphi + x_0\ ,\ \lambda\cos\theta\sin\varphi\ ,\ \lambda\sin\theta + z_0)$$

で与えられる．定点 E を $E=(0,-a,h)$，$a>0$ として，点 E と点 B を結ぶ直線が $y=0$ 平面（$z-x$ 平面）と交わる点を P とする．$\lambda \to \infty$ の時の P の座標を求めなさい．

（ヒント ： $\lambda \to \infty$ の時の点 P を透視画法では消点 (Vanishing Point) と呼んでいる）

(千葉大 2015)　　(m20151205)

0.7 3 次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とします．x, y, z は直交座標系の座標で，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は, 規格化された基底ベクトルです. 3 次元ベクトル場

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{grad}\ U(r)$$

について以下の問に答えなさい. ここで,

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}\ ,\ \ U(r) = \exp(-ar)$$

で，a は定数です.

(1) div $\boldsymbol{A}$ (2) rot $\boldsymbol{A}$

(3) 3次元ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を, 中心が座標の原点で半径が R の球の球面上を面積分した値 B を求めなさい.

$$B = \oint \boldsymbol{A} \cdot da$$

(金沢大 2005) (m20052210)

0.8 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と定ベクトル $\boldsymbol{w} = (0, 0, \omega)$ （ただし，ω は定数）を考える．以下の問に答えよ．

(1) これらのベクトルの外積で定義されるベクトル $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{w} \times \ \boldsymbol{r}$ を求めよ．

(2) C を反時計回りの向きをもつ xy 平面上の原点を中心とする半径 R の円とする．C に沿っての周回積分 $\displaystyle\oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{I}$ を計算せよ．ただし $d\boldsymbol{I}$ は C に沿った微小線素ベクトルである．

(3) $\boldsymbol{A}$ の回転 $\nabla \times \ \boldsymbol{A}$ を求めよ．

(4) $\boldsymbol{e}_z$ を z 軸向きの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_z = (0, 0, 1)$ とし，D を上述の C で囲まれた半径 R の円盤領域とする．重積分 $\displaystyle\iint_D (\nabla \times \ \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{e}_z \, dxdy$ を計算せよ．

(三重大 2013) (m20133116)

0.9 次の問いに答えよ．

(1) z を複素数とし，複素平面上の閉曲線 C を $|z - a| = r$ （r は正の実数, a は複素数) とする．このとき積分

$$\oint_C \frac{dz}{(z-1)^n}$$

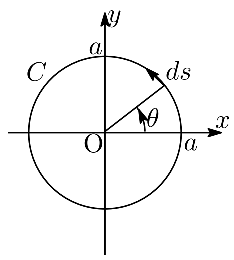
を $n = 1, n = 2, n = 3$ の各々の場合について計算せよ．ただし，一周積分は正の向き（反時計回り）とする．

(2) 上の結果を用いて $\displaystyle\oint_C \frac{3z^2 - 4z}{(z-1)^3} dz$ を計算せよ．ただし，C は $|z - 1| = 2$ とする．

(九州大 2000) (m20004703)

0.10 ベクトル関数 f が $f = 4y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$ で与えられるとき，
右に示す円 $C\left(x^2 + y^2 = a^2\,,\ z = 0\right)$ 上で次の線積分を行え．
ただし, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は, それぞれ,
x , y , z 方向の単位ベクトルである．

$$I = \oint_C f \cdot ds$$



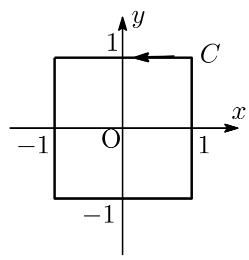
(長崎大 2005) (m20055008)

0.11 点 (x, y, z) での位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とし，$r = |\boldsymbol{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ とするとき，以下の問いに答えよ．ここで，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は，それぞれ，$x, y.z$ 方向の単位ベクトルを表す．

(1) $\nabla \cdot \left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$ を計算せよ．

(2) 右図の閉曲線 $C(z = 0)$ に沿って，次の線積分を計算せよ．

$$\oint_C \boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r}$$



(長崎大 2008) (m20085007)

0.12 直交座標系において，スカラー関数 $f = yz^2$ とベクトル関数 $\boldsymbol{A} = (A_x,\ A_y,\ A_z) = (-y,\ x,\ 1)$ が与えられているとき，以下の問いに答えよ．

(1) rot $\boldsymbol{A}$ を求めよ．

(2) $\mathrm{div}(f\boldsymbol{A})$ を求めよ．

(3) 4 点 $P(1,1,0),\ Q(-1,1,0),\ R(-1,-1,0),\ S(1,-1,0)$ を頂点とする四角形の辺に沿って $P \to Q \to R \to S \to P$ の順に一周する線積分 $\displaystyle\oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．ただし，$d\boldsymbol{r}$ は線積分における微小線素ベクトルを表す．

(室蘭工業大 2017)　　(m20175509)

0.13 直交座標系において，ベクトル関数 $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z) = (2y, -2x, z)$ が与えられているとき，以下の問いに答えよ．ただし，$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x},\ \dfrac{\partial}{\partial y},\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ である．

(1) $\nabla(A\cdot A)$　$(=\mathrm{grad}(A\cdot A))$ を求めよ．

(2) $\nabla\cdot(xyzA)$　$(=\mathrm{div}(xyzA))$ を求めよ．

(3) $\nabla\times A$　$(=\mathrm{rot}A)$ を求めよ．

(4) 4 点 $P(1,1,0),\ Q(-1,1,0),\ R(-1,-1,0),\ S(1,-1,0)$ を頂点とする四角形の辺に沿って $P \to Q \to R \to S \to P$ の順に一周する線積分 $\displaystyle\oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．
ただし，$d\boldsymbol{r}$ は線積分における線素ベクトルを表す．

(室蘭工業大 2021)　　(m20215504)

0.14 次の (1)〜(3) に答えなさい．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 次の関数の組 (A) と (B) のうち，コーシー・リーマンの方程式を満たすものを選びなさい．

(A) $u = e^x\cos y,\ v = e^x\sin y$

(B) $u = e^x\sin y,\ v = e^x\cos y$

(2) (1) で選んだ $u,\ v$ に対して，$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),\ z = x + iy$ とおくとき，$f'(z)$ を求めなさい．

(3) (2) の関数 $f(z)$ に対して，次の積分の値を求めなさい．ただし, 積分路 C は $|z| = 1$ とし，向きは反時計回りとする．

$$\oint_C \frac{f(z)}{z}dz$$

(和歌山大 2018)　　(m20186505)