[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　ω

0.1　(1) 関数 $f(t) = \cos(\omega t)$ の（片側）ラプラス変換

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

を求めなさい．ただし，e は自然対数の底で，s はその実数部が正の複素数である．

(2) $s = c + i\phi$ とおく．ここで，i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ で，c, ϕ は実数とする．このとき，$G(\phi) = \lim_{c \to +0} cF(c + i\phi)$ を求めなさい．

(北海道大 2009)　　(m20090103)

0.2　関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

とし, 関数 $F(\omega)$ のフリーエ逆変換 $f(t)$ を

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

とするとき．次の設問に答えよ．ただし, $i = \sqrt{-1}$ であり，途中の計算手順を詳しく記述すること．

(1) 関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が $e^{-a\omega^2}$ であるとき，もとの関数 $f(t)$ を求めよ．ただし，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

を利用せよ．ここで，$a > 0$ である．

(2) 以下の関係式を満たす関数 $f(t)$ を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) f(\tau) d\tau = e^{\frac{t^2}{2}}$$

(北海道大 2011)　　(m20110102)

0.3　1 の 3 乗根のうち 1 でない解を ω, ω' とする．以下の設問に答えなさい．

(1) $\omega\omega' = 1$ を示しなさい．

(2) $\omega^2 = \overline{\omega} = \omega'$ を示しなさい．ただし，$\overline{\omega}$ は ω の複素共役を表す．

(3) $\omega^{100} + \omega^{50} + 1$ を求めなさい．

(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{99} \omega^k$ を求めなさい．

(北海道大 2021)　　(m20210104)

0.4　次の問いに答えよ．

(1) $f(\theta) = \sin\theta$ を, 以下のマクローリンの定理を用いて無限級数へ展開せよ．

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

（ただし $0 < \theta < 1$）

(2) $f(i\theta) = e^{i\theta}$ を無限級数へ展開せよ. ただし, i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ とする．

(3) $f(\theta)=\cos\theta$ を無限級数へ展開し，$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を証明せよ.

(4) $f(t)=5+0.4\sin\omega t+0.4\sin 2\omega t+0.3\cos 2\omega t+0.3\sin 3\omega t$ を, 以下の形式に書き直した場合の係数 C_2 と C_{-2} を求めよ.

$$f(t)=\sum_{n=-3}^{3} C_n e^{in\omega t}$$

(5) $f(t)=0.4\sin 2\omega t+0.3\cos 2\omega t$ を, 以下の形式に書き直した場合の係数 A を求めよ.

$$f(t)=A\sin(2\omega t+\phi)$$

（岩手大 2004） (m20040303)

0.5 2 階微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=\sin\Omega t$$

について, 次の問いに答えなさい. ただし, 初期条件

$$t=0 \text{ のとき，} x=\frac{dx}{dt}=0$$

とする. また, ω と Ω は正の定数とする.

(1) $\omega\neq\Omega$ のとき, 微分方程式の解を求めなさい.

(2) $\omega=\Omega$ のとき, 微分方程式の解を求めなさい.

(岩手大 2010) (m20100303)

0.6 (1) 微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ の一般解を求めなさい．ただし，$\omega\neq 0$ とする.

(2) $\omega=1$ のとき，微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=2\sin 3t$ の一般解を求めなさい.

(3) (2) において，$t=0$ のとき $x=0$，$\dfrac{dx}{dt}=0$ を満たす解を求めなさい.

(岩手大 2015) (m20150304)

0.7 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\omega^2u=0$$

（お茶の水女子大 2000） (m20000609)

0.8 次の行列の行列式を計算し，それが 0 となる x の値をすべて求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega & 1 & x \\ \omega & 1 & 2 & x^2 \\ \omega^2 & \omega^2 & 4 & x^3 \\ 1 & \omega & 8 & x^4 \end{pmatrix}$$

ただし，$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ である.

(お茶の水女子大 2020) (m20200603)

0.9 (1) 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2b\frac{dx}{dt}+\omega^2x=0$$

の一般解を，$b^2-\omega^2\leq 0$ の場合について求めよ.

(2) 上式を，初期条件 $t=0$ で $x=0$， $\dfrac{dx}{dt}=1$ のもとに解き，$b>0$ の時の解の特徴を表す概略グラフを描け.

(東京大 1998）　(m19980701)

0.10 方程式

$$z^{17}=1$$

を満たす複素数のうち, 1 でないものをひとつとり, ω とする. 以下の問に答えよ.

(1) この方程式を満たす 1 でない複素数は,

$$\omega^{\pm 1},\ \omega^{\pm 2},\ \omega^{\pm 3},\cdots,\ \omega^{\pm 8}$$

で全てであることを示せ.

(2)

$$f_n=\omega^n+\omega^{-n}$$

と書くとき, 以下の各式が成り立つことを示せ.

$$f_i f_j=f_{i+j}+f_{i-j}\,,$$

$$f_{-i}=f_i\,,$$

$$f_{i+17}=f_i\,.$$

(3)

$$f_1+f_2+f_4+f_8=\alpha_0\,,$$

$$f_3+f_5+f_6+f_7=\alpha_1$$

とおくと, α_0 , α_1 は方程式

$$X^2+X-4=0$$

の 2 解であることを示せ.

(4)

$$f_1+f_4=\beta_0\,,$$

$$f_2+f_8=\beta_1\,,$$

$$f_3+f_5=\beta_2\,,$$

$$f_6+f_7=\beta_3\,,$$

とおくと, β_0 , β_1 は方程式

$$X^2-\alpha_0 X-1=0$$

の 2 解で, β_2 , β_3 は方程式

$$X^2-\alpha_1 X-1=0$$

の 2 解であることを示せ.

(5) f_1 , f_4 を 2 解とする 2 次方程式を一つ作れ. さらにこれを用いて, ω の満たす 2 次方程式を一つ作れ, 必要ならば係数に α_0〜α_3 , β_0〜β_3 などを用いてよい.

(東京大 2002)　(m20020704)

0.11 複素数 $z(t)=e^{i\omega t}$ を考える．ただし，t は 0 以上の実数，i は虚数単位，e は自然対数の底である.

(1) ω が実数であるとき，$z(t)$ は複素平面上で t の関数としてどのような軌跡を描くかを，ω が正の場合，負の場合について図示せよ．$z(t)$ の移動方向を矢印で示し，実軸，虚軸との交わる点の位置も明示すること．

(2) ω が複素数 $a+ib$ で表されるとき（a は正の実数，b は 0 でない実数），$z(t)$ は複素平面上で t の関数としてどのような軌跡を描くか図示せよ．$z(t)$ の移動方向を矢印で示し，実軸，虚軸と交わる最初の 4 点（出発点も含める）の値を求め，複素平面上に図示せよ．また，$b/a \to \infty$ で軌跡はどのような曲線になるかを図示せよ．

(3) (2) において，$z_n = z(n)$，ただし n を整数とする．複素平面上における z_{n+1} と z_n の間の距離 $d_n = |z_{n+1} - z_n|$ を a, b, n の関数として求めよ．

(4) (3) で求めた d_n を用いて，$D = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} d_n$ を a, b, N の関数として求めよ． また，a を固定して $b \to \infty$ および $b \to 0$ の極限をとったときの D の値を求めよ．ただし N は自然数とする．

(東京大 2009)　　(m20090701)

0.12　i を虚数単位とし，z は複素数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 次の複素数を $x+iy$（x, y は実数）の形ですべて求めよ．ただし，x, y の表式に三角関数を含んではならない．

(a) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^3$　　(b) $i^{1/2}$　　(c) $\dfrac{(1-i)^6}{(1+i)^8}$

(2) 関数 $z = \tan\omega = \dfrac{\sin\omega}{\cos\omega}$ の逆関数を $\omega = \tan^{-1} z$ で表す．

(a) 次の式が成り立つことを示せ．　$\tan^{-1} z = \dfrac{i}{2}\log\left(\dfrac{i+z}{i-z}\right)$

ただし，log は複素対数関数である．

(b) $\tan^{-1} z$ の z に関する微分を求めよ．

(3) 複素平面において，曲線 C を $z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とする．

(a) 次の積分 $I(k)$ を求めよ．ここで，k は $0 < k < 1$ の定数とする．　$I(k) = \displaystyle\int_C \frac{1}{k^2 z^2 + 1} dz$

(b) $k = 2 - \sqrt{3}$ のとき，I の値を求めよ．

(4) 実積分 J の値を留数定理により求めることを考える．　$J = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx$

(a) J の積分範囲を $[-\infty, \infty]$ と変形して，被積分関数に e^{ix} を用いて J を表せ．

(b) 関数 $f(z) = 1/(z^2+1)^2$ とする．複素平面において，図 1 の半径 Γ（円弧 ADB）の半径 R が十分に大きい時，次のことが成り立つことを示せ．　$\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z) dz = 0$

(c) 図 1 の C に関する周回積分を考えることにより，J の値を求めよ．

このとき，複素平面の上半平面において，

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z) e^{iz} dz = 0$$

であることを用いてよい．

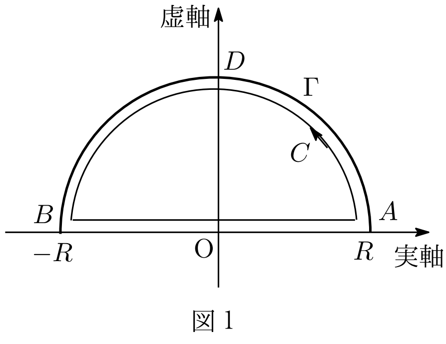


図 1

(東京大 2020)　　(m20200703)

0.13 x を変数とする関数を $f(x)$ とする．複素単位を $i=\sqrt{-1}$ として，

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}dx$$

によって決まる ω の関数 $F(\omega)$ を関数 $f(x)$ のフーリエ変換という． $F(\omega)$ から逆に $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x}d\omega$$

によって求めることができる．この逆を逆フーリエ変換という．

関数 $F(\omega)$ を ω で微分することを考える．

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}dx$$

より微分と積分を入れ換えると，

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\omega}\big(f(x)\, e^{-i\omega x}\big)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\big(-ixf(x)\, e^{-i\omega x}\big)dx$$

となり，関数 $(-ix)f(x)$ のフーリエ変換が $\dfrac{d}{d\omega}F(\omega)$ であることがわかる．このことを利用して以下の設問に答えなさい．ただし，ここで扱う全ての関数は微分と積分の順序を交換できる性質を満たしていることを仮定する．

(1) ω に関する $F(\omega)$ の決める関数 $\dfrac{d^2}{d\omega^2}F(\omega)$ が関数 $(-x^2)f(x)$ のフーリエ変換であることを示しなさい．

(2) 逆フーリエ変換が $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ になる関数を $F(\omega)$ によって表しなさい．

(3) 微分方程式

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}-x^2f(x)=-(2n+1)f(x)\ ,\ \lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0 \qquad (*)$$

の解 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が満たす微分方程式を導きなさい．ただし， n は零以上の整数である．

(4) 設問 (3) の結果から，式 $(*)$ の微分方程式の解のフーリエ変換に関する性質を５０字程度で述べなさい．

(千葉大 2001) (m20011204)

0.14 x を変数とする関数を $f(x)$ とする．複素単位を $i=\sqrt{-1}$ として，

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

によって決まる ω の関数 $F(\omega)$ を関数 $f(x)$ のフーリェ変換という．$F(\omega)$ から逆に $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

によって求めることができる．この変換を逆フーリェ変換という．

関数 $F(\omega)$ を ω で微分することを考える．

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

より微分と積分とを入れ換えると，

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\omega}\Big(f(x)e^{-i\omega x}\Big)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\Big(-ixf(x)e^{-i\omega x}\Big)dx$$

となり，関数 $(-ix)f(x)$ のフーリェ変換が $\dfrac{d}{d\omega}F(\omega)$ であることがわかる．このことを利用して以下の設問に答えなさい．ただし，ここで扱う全ての関数は微分と積分との順序を交換できる性質を満たしていることを仮定する．

(1) ω に関する $F(\omega)$ の決める関数 $\dfrac{d^2}{d\omega^2}F(\omega)$ が関数 $(-x^2)f(x)$ のフーリエ変換であることを示しなさい．

(2) 逆フーリエ変換が $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ になる関数を $F(\omega)$ によって表しなさい．

(3) 微分方程式

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} - x^2f(x) = -(2n+1)f(x)\ , \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \qquad\qquad (*)$$

の解 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が満たす微分方程式を導きなさい．ただし，n は零以上の整数である．

(4) 設問 (3) の結果から，式 $(*)$ の微分方程式の解のフーリエ変換に関する性質を 50 字程度で述べなさい．

(千葉大 2002)　　(m20021205)

0.15 ω は 1 の立方根で $\omega \neq 1$ であるとする．

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega & \omega^2 & \omega^3 & 1 \\ \omega^2 & \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^3 & 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix} = \pm 3\sqrt{3}i \quad \text{を証明せよ．}$$

(筑波大 1998)　　(m19981303)

0.16 xy 平面上において原点を中心とする半径 b の円周上を等速度で運動する点の時刻 t における位置は $x = b\cos(\omega t + \phi)$, $y = b\sin(\omega t + \phi)$ で表すことができる．ここに，ω, ϕ は定数で，それぞれ，角速度，位相と呼ばれる．

(1) 位置を時間に対して微分すると速度ベクトル $\vec{v}$ が得られる．$\vec{v}$ を求め成分表示しなさい．

(2) 速度ベクトルをさらに時間に対して微分すると加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ が得られる．$\vec{\alpha}$ を求め成分表示しなさい．また，$\vec{\alpha}$ と $\vec{v}$ は互いに直交することを示しなさい．

(3) ベクトル $\vec{\alpha}$, $\vec{v}$ の絶対値 $|\vec{\alpha}|$, $|\vec{v}|$ を計算しなさい．

(筑波大 2003)　　(m20031312)

0.17 複素数 z についての方程式 $\sin z = 3i$ を考える．i は虚数単位である．以下の問いに答えよ．

(1) $\omega = e^{iz}$ とする．$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ の関係を使い，この方程式を ω に関する 2 次方程式に書き換えよ．

(2) (1) で求めた ω に関する 2 次方程式を解き，その解を極表示 $re^{i\theta}$ の形で表せ．

(3) $\sin z = 3i$ の解を $x + iy$ $(x, y$ は実数) の形で求めよ．

(筑波大 2013)　　(m20131310)

0.18 次の微分方程式の一般解を求めよ. ただし，$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ である．

(1) $2x^2y' = x^2 + y^2$

(2) $y'' + 2\varepsilon y' + {\omega_0}^2 y = F\sin\omega x$ 　　（ただし, $\varepsilon \neq 0$, ${\omega_0}^2 > \varepsilon^2$）

(埼玉大 2005)　　(m20051403)

0.19 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ とし, Ω で定義された実数値関数 f を

$$f(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

とする．ただし，$\tan^{-1}$ は正接関数 $\tan$ の定義域を $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ に制限したものの逆関数である．
また, $D = \{(x,y) \in \Omega \mid 2 \leqq x^2 + y^2 \leqq 3,\ 0 \leqq y \leqq x\}$ とおく. 次の問に答えよ．

(1) f の 1 階の偏導関数をすべて求めよ.

(2) f の 2 階の偏導関数をすべて求めよ.

(3) D を図示せよ.

(4) 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ.

(埼玉大 2005)　　(m20051406)

0.20 k を 2 以上の自然数とし，$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y \in \mathbb{R}\right\}$ 上で定義された関数 $f(x,y) = x^x + xy^k$ を考える.

(1) $f_x = f_y = 0$ を満たす点を求めよ.

(2) $k = 2$ のとき，(1) で求めた点で関数 f は極値をとるかどうかを判定せよ.

(3) $k = 3$ のとき，(1) で求めた点で関数 f は極値をとるかどうかを判定せよ.

(埼玉大 2014)　　(m20141407)

0.21 複素関数 $\omega = \dfrac{z-i}{z+i}$ について

(1) $z = 1$ のとき，$|\omega| = 1$ であることを示せ.

(2) z を ω の式で表せ.

(3) z 平面の円 $|z+1| = \sqrt{2}$ は，ω 平面内のどのような曲線に写るか.

(茨城大 2003)　　(m20031704)

0.22 z は複素数で，$z^n = 1$ を満たす 1 の n 乗根（但し，n は自然数）であるとする．このとき，以下の小問に答えよ.

(1) 全ての z（n 乗根）を求めよ．また要点を押さえて，n 乗根の概略を複素平面上に図示せよ.

(2) 1 でない n 乗根の一つを ω とし，$\omega^2,\ \cdots,\ \omega^{n-1}$ のいずれも 1 でないとする．また，m が自然数で n の倍数でないとき，次の 2 式 $P,\ S_m$ の値を求めよ.

$$P = (1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{n-1})\ ,$$

$$S_m = 1 + \omega^m + \omega^{2m} + \cdots + \omega^{(n-1)m}\ .$$

(3) $n = 10$ の場合を考え，$\omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \cdots,\ \omega^9$ がいずれも 1 にならないような ω はいくつあるか求めよ.

(山梨大 2018)　　(m20181803)

0.23 (1) 複素数 z に対する二項方程式 $z^5 = 1$ の解を全て求めよ．また，$z \neq 1$ の解の一つを ω として，1 以外の全ての解を ω を用いて表し，1 を含む全ての解を複素平面上に図示せよ.

(2) 複素数 z に対する二項方程式 $z^5 = 5$ の全ての解を，前問 (1) の ω を用いて表せ.

(3) 複素数 α をそれ自身に変換する写像を ε，α を $\omega\alpha$ に変換する写像を σ とするとき，合成写像 $\sigma^2,\ \sigma^3,\ \sigma^4$ によって，α はどのように変換されるか答えよ.

(4) 前問 (3) の写像 σ の合成写像 σ^{n+4} $(n = 1,2,3,4,5)$ により α を変換せよ.

(山梨大 2019)　　(m20191803)

0.24 以下の問に答えよ.

(1) $F(\omega) = \displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-j\omega t}dt$ を求め，$F(\omega)$ のグラフを描け.

(2) $F'(\omega) = \dfrac{dF(\omega)}{d\omega}$ を $\omega = 0$ 以外で求めよ.

(3) $y = \tan(a\omega)$ のグラフを，横軸を $a\omega$ 軸，縦軸を y 軸とする座標平面に，$-\dfrac{\pi}{2} \leq a\omega \leq \dfrac{5\pi}{2}$ の範囲で描け.

(4) $F(\omega) = 0$ となる $a\omega$ の値の位置を，問 (3) で描いた座標平面に $\bullet$ 印で示せ.

(5) $F'(\omega) = 0$ となる $a\omega$ の値の位置を，問 (3) で描いた座標平面に $\odot$ 印で示せ.

(新潟大 2014)　　(m20142004)

0.25 虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を含む指数関数 $e^{i\theta}$ を三角関数で表す公式はオイラーの公式と呼ばれる．物理の問題を扱うには，よく似た行列の関係式を用いると便利なことが多い．このことに関連した以下の問いに答えよ.

(1) オイラーの公式を書け．つまり，実数 θ に対して $e^{i\theta}$ を三角関数を用いて表せ.

(2) 二次正方行列 I および J を

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する．J^2 を計算し，J^2 と I の間に成り立つ関係式を求めよ.

(3) 一般に二次正方行列 X に対し，そのゼロ乗 X^0 および指数関数 e^X は次式で定義される：

$$X^0 = I, \qquad e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n = I + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \cdots$$

(2) の関係式に着目すると，行列 $e^{\theta J}$ は I に比例する部分と J に比例する部分の和

$$e^{\theta J} = f(\theta) I + g(\theta) J$$

で表すことができる．このとき，関数 $f(\theta)$ および $g(\theta)$ を求めよ.

なお，必要ならば，三角関数のベキ展開（テイラー・マクローリン展開）が次式で与えられることを用いてもよい.

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n} \qquad = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \cdots$$

$$\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1} = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots$$

(4) (3) で求めた行列 $e^{\theta J}$ に対して，その行列式の値を答えよ.

次に，これまでの結果の応用として，調和振動子の運動を表す微分方程式

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

の解 $x(t)$ を求めたい．ここで ω は正の定数である．以下の問いに答えよ.

(5) 変数 $p(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ および $q(t) = \omega x(t)$ を用いると，この微分方程式は,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$$

の形に表すことができる．ここで K は t に依らない二次正方行列である．行列 K を答えよ.

(6)　(5) の微分方程式の解は次式で与えられる：

$$\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = e^{Kt} \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$$

以上のことから，初期条件 $p(0) = p_0$, $q(0) = q_0$ に対応する解 $x(t)$ を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222006)

0.26　(1)　1 周期が T である関数 $f(t)$ は, 以下のようにフーリエ級数展開される.
$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ として C_n および θ_n を, a_n および b_n で表せ. 但し, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ とする.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t\Big) \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\big(n\omega_0 t - \theta_n\big) \end{aligned}$$

(2)　上式におけるフーリエ係数 a_n および b_n は, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ として,

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t\, dt \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t\, dt \quad , \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により計算できる. 1 周期において, 次式で定義される関数 $f(t)$ をフーリエ級数展開せよ.

$$f(t) = \begin{cases} -1 & , \quad -\dfrac{T}{2} \leq t < 0 \\ 1 & , \quad 0 \leq t \leq \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

(3)　$\sin^2 t$ および $\sin^3 t$ を, それぞれフーリエ級数展開せよ.

(4)　$\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$ となることを証明せよ.

(長岡技科大 2005)　　(m20052106)

0.27　連続時間 $t[s]$ の関数 $f(t)$ のフーリエ変換は,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

により計算される．このことを利用して以下の問に答えよ．ただし，$j = \sqrt{-1}$ であり，ω [rad/s] は角周波数を表す．また，a は正の実数とする．

(1)　関数 $f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < t < a \\ 0 & , \quad t < 0,\ t > a \end{cases}$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，$f(t)$ と $|F(\omega)|$ をそれぞれ図示せよ．ただし，$|F(\omega)|$ は複素関数 $F(\omega)$ の絶対値を意味する．

(2)　$f(t) = \begin{cases} \exp(-at) & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，$f(t)$ と $|F(\omega)|$ をそれぞれ図示せよ．

(3)　$f(t-a)$ のフーリエ変換が $F(\omega)e^{-j\omega a}$ となることを証明せよ．

(4)　$f(at)$ のフーリエ変換が $a > 0$ に対して $\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$ となることを証明せよ．

(長岡技科大 2006)　　(m20062105)

0.28　微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$（$\omega$ は正の定数）について，以下の問いに答えよ．

(1)　一般解を求めよ.

(2) 初期条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = 2$ を満たす解を求めなさい.

(3) 前問で求めた解が $y(1) = 0$ を満たすような ω の値を求めなさい.

(長岡技科大 2008)　　(m20082104)

0.29 関数 $f(t)$ は2回連続的微分可能で, $f(t), f'(x), f''(x)$ は有界とする.

$s > 0$ に対して $g(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ とするとき，次の問に答えよ.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f''(x)\, dt = s^2 g(s) - sf(0) - f'(0)$ を示せ.

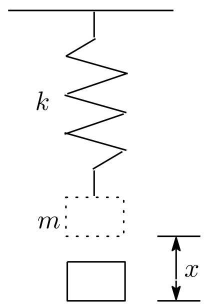
(2) ω は定数とする. $f(t) = \sin \omega t$ のとき, $g(s)$ を求めよ.

(金沢大 1999)　　(m19992212)

0.30 t の関数 $x(t)$ に対し，初期条件 $x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = 0$ の下で，微分方程式 $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$ の解を求めなさい. ただし，$\dot{x} = \dfrac{dx}{dt},\ \ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ であり，$0 < \gamma < \omega_0$ とする.

(金沢大 2021)　　(m20212212)

0.31 図のように，バネ定数が k で，質量を無視できるバネに，質量 m のおもりを吊り下げる. つりあった位置から，上下方向に振動させる時の変位を x とする. このとき，時間 t に対するおもりの運動は，次の運動方程式によって表現できる.



$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

(1) $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とおくとき，$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ は，上の運動方程式の一般解であることを示しなさい.

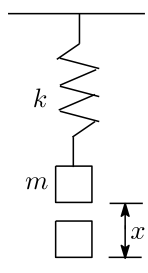
(2) $m = 0.16(kg),\ k = 4(kg/sec^2)$ とするとき，おもりの運動の周期を求めなさい.

(3) $t = 0$ において，$x = 2(cm),\ \dfrac{dx}{dt} = 0(cm/sec)$ とするとき，定数 A, B の値を求め，3秒間の変位のグラフのおよその形を示せ.

(福井大 2006)　　(m20062418)

0.32 図のように，バネ定数が k で，質量を無視できるバネに，質量 m のおもりを吊り下げる. つりあった位置から，上下方向に振動させる時の変位を x とする. このとき，時間 t に対するおもりの運動は，次の運動方程式によって表現できる.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$



(1) $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とおくとき，$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ は，上式の一般解であることを示せ.

(2) $m = 2.25(kg),\ k = 4\pi^2(kg\cdot m/s^2/m)$ とするとき，おもりの振動の周期を求めなさい.

(3) $t = 0$ において，$x = 2(cm),\ \dfrac{dx}{dt} = 0\ (cm/s)$ とするとき，定数 A, B の値を求め，3秒間の変位と時間の関係のおよその形を示せ.

(福井大 2012)　　(m20122423)

0.33 以下の積分をおこないなさい．ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする．

(1) $\displaystyle\int e^{-i\omega t}dt$ (2) $\displaystyle\int_0^{1-i}(iz+2)dz$ なお，積分経路は直線とする．

(福井大 2016) (m20162423)

0.34 $\dfrac{\partial}{\partial t}\cos(kx - \omega t + \theta)$ を計算せよ．

(福井大 2018) (m20182416)

0.35 関数 $f(x)$ が以下のように与えられている．

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1 \\ 1 & |x| < 1 \end{cases}$$

この関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $\displaystyle F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$ を求めよ．

(福井大 2020) (m20202413)

0.36 次式は，1 質点 1 自由度モデルの自由振動の運動方程式である．なお，m:質量，c:減衰係数，k:剛性であり，$x(t)$: 時間 t の関数である変位である．

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

(1) 両辺を m で除し，$\omega^2 = \dfrac{k}{m}$，$2h = \dfrac{c}{m\omega}$ とおいて，上式を書き換えなさい．

(2) a をゼロでない定数とするとき，$x(t) = ae^{\lambda t}$ が運動方程式の解となるための条件を示せ．

(3) 上の結果を利用して $x(t)$ の一般解を示せ．

(4) $0 < h < 1$ の時，(3) で得られた解を，三角関数を用いて表せ．

(福井大 2020) (m20202433)

0.37 (1) 複素フーリエ級数展開を用いて以下の関数が成立することを示せ

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

(2) 関数 $f(t)$ 及び $g(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega)$ 及び $G(\omega)$ と表す．このとき，以下のフーリエ変換が $F(\omega)G(\omega)$ となることを示せ．

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du$$

(福井大 2021) (m20212412)

0.38 次式は，単振動の運動方程式である．なお，m : 質量，k : バネ定数，x : 変位，t : 時間である．

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

(1) 角速度 ω(rad/s) を m および k を用いて表しなさい．
なお，上に示した運動方程式の解は $x = A\cos(\omega \cdot t) + B\sin(\omega \cdot t)$ になる．
ここに，A, B は初期値によって決まる定数である．

(2) $m = 1$ (kg), $k = 1$ (N/m) の場合について，$t = 0$ 秒における初期値を $x = 1$ (m), $\dfrac{dx}{dt} = 0$ (m/s) として 単振動の運動方程式を解きなさい．

(福井大 2022) (m20222411)

0.39 (1) $\dfrac{dy}{dx}=-ky+\cos\omega x$ を解け．　(2) $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1-y^2}{1-x^2}=0$ を解け．

(3) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}+x^2y^3$ を解け　（ヒント：$u=y^{-2}$ と置け）．

(静岡大 2006)　(m20062508)

0.40 (1) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+{\omega_0}^2x=0$ の一般解を求めよ．ここで，ω_0 は正の定数とする．

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+{\omega_0}^2x=\cos(\omega t)$ の特解を求めよ．ここで，ω は正の定数であるが，特に，次の 2 つの場合に分けて特解を求めよ: (a) $\omega\neq\omega_0$ の場合 ; (b) $\omega=\omega_0$ の場合．

(静岡大 2007)　(m20072509)

0.41 関数 $f(t)=ae^{-bt}\sin(\omega t+c)$ について，次の問いに答えよ．ただし，a,b,c,ω は正の定数とする．

(1) $t\geq 0$ での関数 $f(t)$ の概略図を描け．

(2) 関数 $f(t)$ の極大，極小が $\tan(\omega t+c)=\dfrac{\omega}{b}$ を満たす t のときに生ずることを示せ．

(豊橋技科大 2003)　(m20032705)

0.42 次の不定積分を求めなさい．ただし，e は自然数の底，ω は実定数とする．

$$\int e^x\cos\omega x dx$$

(三重大 2005)　(m20053108)

0.43 次の不定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int\left(x^2+2x+3+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)dx$

(2) $\displaystyle\int\{\sin(\omega t+a)+\cos(\omega t+b)\}\,dt$　ただし，ω，a，b は定数である．

(3) $\displaystyle\int\sin^3\theta\ d\theta$

(三重大 2006)　(m20063101)

0.44 位置ベクトル $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ と定ベクトル $\boldsymbol{w}=(0,0,\omega)$（ただし，$\omega$ は定数）を考える．以下の問に答えよ．

(1) これらのベクトルの外積で定義されるベクトル $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{w}\times\ \boldsymbol{r}$ を求めよ．

(2) C を反時計回りの向きをもつ xy 平面上の原点を中心とする半径 R の円とする．C に沿っての周回積分 $\displaystyle\oint_C\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{I}$ を計算せよ．ただし $d\boldsymbol{I}$ は C に沿った微小線素ベクトルである．

(3) $\boldsymbol{A}$ の回転 $\nabla\times\ \boldsymbol{A}$ を求めよ．

(4) $\boldsymbol{e}_z$ を z 軸向きの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_z=(0,0,1)$ とし，D を上述の C で囲まれた半径 R の円盤領域とする．重積分 $\displaystyle\iint_D(\nabla\times\ \boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{e}_z\,dxdy$ を計算せよ．

(三重大 2013)　(m20133116)

0.45 変数 t の関数 $x(t)$ の満たす微分方程式に関する以下の問いに答えよ．

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ．　$\dfrac{d^2x}{dt^2}+{\omega_0}^2x=0$　ここで，ω_0 は正の定数とする．

(2) 次の微分方程式を考える． $\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\lambda\dfrac{dx}{dt}+{\omega_0}^2x=0$ ここで，ω_0 および λ は正の定数とする．$\lambda^2-{\omega_0}^2=-\omega^2<0$ （ω：正の定数）である場合の一般解を求めよ．

(3) (1) および (2) の微分方程式で記述できると思われる物理現象の例を一つずつあげよ．

(奈良女子大 2008) (m20083207)

0.46 位置ベクトル $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ と定数ベクトル $\boldsymbol{\omega}=(0,0,\omega)$ からベクトル積（外積）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{r}\times\ \boldsymbol{\omega}$ を作った．このベクトル $\boldsymbol{A}$ について以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル A の成分 A_x，A_y，A_z を求めよ．

(2) $\mathrm{div}\,A=\nabla A$ を求めよ．

(3) $\mathrm{rot}\,A=\nabla\times\ A$ を求めよ．

ただし，$\nabla=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\ \dfrac{\partial}{\partial y},\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ である．

(奈良女子大 2009) (m20093208)

0.47 次の微分方程式について以下の問いに答えよ．

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$

(1) 次の $x(t)$ はこの微分方程式の解であることを示せ．

$$x(t)=C_1\sin(\omega t)+C_2\cos(\omega t)$$

ここで，$C_1,\ C_2$ は定数である．

(2) この $x(t)$ は次のように表すこともできる．

$$x(t)=B_1e^{+i\omega t}+B_2e^{-i\omega t}$$

このとき，$B_1,\ B_2$ と $C_1,\ C_2$ の関係を求めよ．

(奈良女子大 2010) (m20103205)

0.48 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+{\omega_0}^2x=A\cos(\omega t)\qquad\cdots(\text{ア})$$

の一般解 $x(t)$ は，$A=0$ の場合の一般解 $x_0(t)$ と $A\neq 0$ の特解 $x_1(t)$ の和 $x_0(t)+x_1(t)$ で表される．以下の問いに答えよ．ただし，$A,\ \omega,\ \omega_0$ は実定数である．

(1) $x_0(t)$ を求めよ．

(2) $x_1(t)=\alpha\cos(\omega t)+\beta\sin(\omega t)$ とおいて式 (ア) に代入し，未知定数 α と β を決定することにより $x_1(t)$ を求めよ．ただし，$\omega\neq\omega_0$ とする．

(3) 初期条件が $x(0)=x_0$，$\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0$ の場合，式 (ア) の解を求めよ．また，$\omega\to\omega_0$ とした時，その解はどうなるか．

(奈良女子大 2012) (m20123203)

0.49 微分方程式に関する以下の問いに答えよ．

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{dy}{dx}=(y+1)(x^2+2x)$$

(2) 解の形として $x = ae^{i\omega t}$ を仮定し，以下に示す手順で微分方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \lambda\frac{dx}{dt}$$

を解く．ここで，a は正の実定数で ω は複素定数とする．

(a) $\dfrac{dx}{dt}$ を計算し，それを x を用いて表せ.

(b) $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ を計算し，それを x を用いて表せ.

(c) ω が満たすべき方程式を導け.

(d) 上で求めた方程式を解くことによって，ω を求めよ.

(奈良女子大 2014)　　(m20143203)

0.50 以下の微分方程式を考える.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(ア)$$

ただし，μ, ω は正の定数である．以下の問に答えよ.

(1) $x(t) \propto \exp(-at)$ の形の解を考える．$x(t)$ が式（ア）の解となる a の値を，μ と ω を用いて表せ.

(2) $a = a_R \pm ia_I$ のとき，式（ア）の解は振動しながら減衰する．このとき μ と ω が満たす不等式を答えよ．ただし，a_R と a_I は実数で，$i = \sqrt{-1}$ である.

(3) 前問 (2) の場合に，初期条件が $x(0) = 0$，$\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 1$ であるときの 式（ア）の解を求め，a_R と a_I を用いて表せ.

(奈良女子大 2015)　　(m20153203)

0.51 (1) 関数 $f(x) = \arctan\left(\dfrac{2}{x}\right)$ を x で微分せよ.

(2) 関数 $f(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$ を考える．ここで，ω_0, γ は正の実定数とする．以下の問いに答えよ;

(a) 極限値 $\displaystyle\lim_{\omega\to\infty} f(\omega)$ を求めよ.

(b) $\omega > 0$ の範囲で，$f(\omega)$ が極大をもつために満たすべき ω_0 と γ に対する条件式を求めよ．またその時の ω を求めよ.

(奈良女子大 2017)　　(m20173204)

0.52 以下の微分方程式を考える.

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\[2ex] m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -k_1x_2 - k_2(x_2 - x_1) \end{cases}$$

ただし，m, k_1, k_2 は正の実定数である．以下の問いに答えよ.

(1) これら 2 つの方程式を $X_1 = x_1 + x_2$, $X_2 = x_1 - x_2$ で定義される X_1, X_2 に対する方程式に書き直せ．また，$\omega = \sqrt{\dfrac{k_1}{m}}$，　$\omega' = \sqrt{\dfrac{k_1 + 2k_2}{m}}$ とおいて，X_1, X_2 に対する一般解を求めよ.

(2) $t = 0$ で，$x_1 = 1$, $x_2 = 0$ かつ $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ を満たす解 $x_1(t)$, $x_2(t)$ を求めよ．ここで，$v_1 = \dfrac{dx_1}{dt}$，　$v_2 = \dfrac{dx_2}{dt}$ とする.

(奈良女子大 2017)　　(m20173206)

0.53 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする．以下の量を計算せよ．

(1) r の勾配 ∇r

(2) $\dfrac{1}{r}$ の勾配 $\nabla \dfrac{1}{r}$

(3) $\boldsymbol{r}$ の発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{r}$

(4) $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ (ω は正の実定数) とするときの，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ の回転 $\nabla \times \boldsymbol{v}$

ここで，∇ は以下で定義される微分演算子である．

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

(奈良女子大 2017) (m20173207)

0.54 実数のパラメータ θ に依存する行列 $A(\theta)$ が

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{2}{3}\cos^2\theta & -\dfrac{2}{3}\cos\theta\sin\theta \\ -\dfrac{2}{3}\cos\theta\sin\theta & 1 - \dfrac{2}{3}\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

で与えられている．$\mathbb{R}^2$ の点 $\boldsymbol{x}$ をデカルト座標系 $O - x_1x_2$ を用いて $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2)$ と表す．これらを用いて，集合 $\Omega(\theta)$ を

$$\Omega(\theta) = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \cdot A(\theta)\} \boldsymbol{x} \leq 1\}$$

と定義する．ここに，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{2} x_i y_i$$

である．このとき，次の (1)〜(4) に答えよ．

(1) $A(\theta)$ のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化して単位ベクトルとせよ．

(2) $\Omega(\theta)$ の概形を描け．

(3) $\Omega(0) \cap \Omega(\pi/2)$ の面積を求めよ．

(4) $\displaystyle\bigcup_{0 \leq \theta \leq \pi/2} \Omega(\theta)$ を図示し，その面積を求めよ．ここに，$\boldsymbol{x} \in \displaystyle\bigcup_{0 \leq \theta \leq \pi/2} \Omega(\theta)$ とは，$0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$ なる θ_0 があって，$\boldsymbol{x} \in \Omega(\theta_0)$ となることである．

(京都大 2015) (m20153305)

0.55 連続時間信号 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

で定義する．ただし，t は時間を表す実数，ω は角周波数を表す実数であり，$j = \sqrt{-1}$ とおいている．このとき，

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

で与えられる連続時間信号 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ と振幅スペクトル $|F(\omega)|$ を求めなさい．

(京都工芸繊維大 2008) (m20083405)

0.56 微分方程式に関する以下の問いに答えよ．

(1) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}+4y=0$ の一般解を求めよ.

(2) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}+4y=\cos\omega t$ の特殊解を $y=P\cos\omega t+Q\sin\omega t$ と表すとき, 係数 P と Q 求めよ. ただし, ω は実数で $\omega>0$ である.

(大阪大 2010)　　(m20103503)

0.57 次の問いに答えよ. ただし, z, ω は複素数とし, i は虚数単位とする.

(1) $|5z-i|=|3z-7i|$ なる方程式を満足する z を複素平面上で図示し, どのような図形となるか答えよ.

(2) z に対し,

$$w=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}z-1}{2z+2\sqrt{3}}$$

なる変数変換を行った場合, w が満たす方程式を複素平面上に図示せよ.

(大阪大 2010)　　(m20103504)

0.58 関数 $x(t)$, $y(t)$ に関する次の連立微分方程式について，以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-2x-2y+\cos 2t\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=x\end{cases}$$

(1) $x(t)$ および $y(t)$ の一般解を求めよ.

(2) 初期条件 $x(0)=y(0)=0$ として $x(t)$ と $y(t)$ を求めよ.

(3) $t\to\infty$ において $x(t)$ が $A\cos(\omega t+\theta)$ なる関数形に漸近することを示し，その時の A, ω, θ の値を求めよ．ただし，A, ω, θ は実数であり，$A>0$, $\omega>0$, $0\leq\theta<2\pi$ とする．また，θ は逆三角関数を用いて表しても構わない.

(大阪大 2016)　　(m20163509)

0.59 (1) $\omega=\exp z$ により，z 平面の直線 $x=A$（定数）が ω 平面で描く図形を説明せよ.

(2) 次の定積分の値を求めよ．ただし，$|a|\neq 1$ とする.

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-2a\,\cos\theta+a^2}\,d\theta$$

(大阪府立大 2011)　　(m20113609)

0.60 行列 $\Lambda=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{bmatrix}$ $(a,b,c\in\mathbb{C})$ に対して，次の問に答えよ.

以下，I は 3 次の単位行列を表し，ω は 1 の 3 乗根 $\omega=\dfrac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$ を表す.

(1) Λ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) A が $A=aI+b\Lambda+c\Lambda^2$ と表されることを用いて，A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(3) 等式　$\det(A)=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c)$　を示せ.

(神戸大 2017)　　(m20173801)

0.61 (1) 曲線 $y = \cosh x$ $(0 \leqq x \leqq \log 3)$ の長さを求めよ．ただし，$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ である．

(2) $\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\}$ のとき，$\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy$ を求めよ．

(広島大 2009)　　(m20094101)

0.62 $f(x, y) = (x - 1)(y + 1)$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) グラフ $z = f(x, y)$ の $(x, y) = (0, 1)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた接平面，yz 平面，zx 平面，xy 平面の 4 つの平面によって囲まれる四面体の体積を求めよ．

(3) (2) の四面体の 4 つの面のうち xy 平面上にある面を Ω とする．
このとき，$\displaystyle\iint_\Omega f(x, y)dxdy$ を求めよ．

(広島大 2009)　　(m20094105)

0.63 A を複素数を成分とする 2 次正方行列とし，ω を 1 の 3 乗根の一つとする．さらに

$$Ax_1 = \omega x_1, \quad Ax_2 = \omega^2 x_2$$

を満たすベクトル $x_1, x_2 (\neq 0)$ があったとする．このとき，次の各問いに答えなさい．

(1) $AP = P\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$ を満たす行列 P があることを示しなさい．

(2) $\omega \neq 1$ のとき，x_1, x_2 は一次独立であることを示しなさい．

(3) $\omega \neq 1$ のとき，A^3 を求めなさい．

（高知大 2001）　　(m20014506)

0.64 $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ とする．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) 空間内の点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ における曲面 $z = f(x, y)$ の接平面の方程式を求めよ．

(3) 空間における領域

$$\Omega = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leqq a^2 \ \ 0 \leqq z \leqq f(x, y)\right\}$$

の体積を求めよ．ただし，$0 < a < 1$ とする．

(愛媛大 2013)　　(m20134603)

0.65 次の問いに答えよ．

(1) $\cos \omega t$ のラプラス変換を求めよ．

(2) $e^{at} \sin \omega t$ のラプラス変換を求めよ．

(3) 上記の結果を利用して，方程式

$$\int_0^t f(t - \tau) \cos \omega\tau d\tau = e^{at} \sin \omega t$$

を満たす関数 $f(t)$ を求めよ．

(九州大 2001)　　(m20014709)

0.66 ω を実数として，$y(x)$，$-\infty < x < \infty$ に関する二階常微分方程式　$y'' + 2y' + y = \sin \omega x$　を考える．

(1) $\omega = 0$ のとき，この微分方程式の一般解を求めよ．

(2) $\omega \neq 0$ のとき，この微分方程式の一般解を求めよ．

(3) 各 ω に対して，$x \to -\infty$ のとき $y(x)$ が有界にとどまる解はただ一つ存在することを示せ．

(九州大 2007)　　(m20074706)

0.67 (1) (a) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$ について，$x = 0$ および $x = L$ において $y = 0$ となる解を求めよ．ただし，ω, L は正の実数である．

(b) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\gamma\omega\dfrac{dy}{dx} + \omega^2 y = F\cos\omega x$ について，$x = 0$ において $y = 0$, $\dfrac{dy}{dx} = 0$ となる解を求めよ．ただし，γ, ω, F は実数であり，$\omega > 0$, $0 < \gamma < 1$ である．

(2) (a) 次の微分方程式の一般解を求めよ．$\dfrac{dy}{dx} + y = y^2$

(b) (a) の解を利用して，次の微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} + (2x+1)y - y^2 = x^2 + x + 1$ の一般解を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084706)

0.68 (1) 次の周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \left(-\pi \leqq x < -\dfrac{\pi}{4}\right) \\ 1 & \left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq x < \dfrac{3\pi}{4}\right) \\ -1 & \left(\dfrac{3\pi}{4} \leqq x < \pi\right) \end{cases}, \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

(2) 関数 $f(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$ で定義する．次式で定義される関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，関数 $y = F(\omega)$ のグラフの概形を描け．なお，T は正の実数とする．

$$f(t) = \begin{cases} a & (|t| \leqq T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

(3) 関数 $f(t)$ は $t > 0$ で定義されているものとし，$f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$ で定義するとき，以下の問いに答えよ．

(a) $f(t) = \sin\omega t$ のラプラス変換が $F(s) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ であることを示せ．

(b) $f(t) = \cos\omega t$ のラプラス変換が $F(s) = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ であることを示せ．

(c) $f(t) = a + bt$ のラプラス変換が $F(s) = \dfrac{as+b}{s^2}$ であることを示せ．

(九州大 2012)　　(m20124704)

0.69 (1) 周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を次のように定める．以下の問いに答えよ．

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 0, 1, \cdots), \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

(a) 任意の実数 α に対して $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\cos nx dx = a_n$ が成立することを示せ．

(b) 整数 n と実数 x に対して $\cos n(x+\pi) = \begin{cases} \cos nx & (n \text{ が偶数}) \\ -\cos nx & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$ が成立する．

このことを踏まえ，関数 $g(x) = f(x+\pi)$ のフーリエ係数 $a'_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx dx$, $b'_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx dx$ を a_n, b_n を用いて表せ.

(2) 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$ とおく．以下の問いに答えよ.

(a) $f(x) = e^{-|x|}$ のフーリエ変換を求めよ.

(b) フーリエの積分定理（逆フーリエ変換）を利用して，次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos u}{1+u^2}du$$

(九州大 2013)　　(m20134703)

0.70 (1) (a) 周期 $2L$ の区分的に連続な関数 $f(x)$ をフーリエ級数で表現した式を示し，そのフーリエ係数を求める式を示せ.

(b) 次の関数 $f(x)$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} -2x-4 & (-2 \leqq x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 4-2x & (0 < x \leqq 2) \end{cases}$$

(2) $t > 0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \mathfrak{L}[f(t)] = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ とする．必要ならば下記の表にある関係式を用いて，次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．また (b) については，$f(t)$ $(t > 0)$ のグラフをかけ.

(a) $F(s) = \dfrac{2}{s(s+1)(s+2)}$

(b) $F(s) = \dfrac{-s+2}{s^2+2s+4}$

表：
$$\boxed{\begin{array}{l} \mathfrak{L}[1] = \dfrac{1}{s},\quad \mathfrak{L}[t^n] = \dfrac{n!}{s^{n+1}}\ (n = 1, 2, \cdots),\quad \mathfrak{L}[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a},\quad \mathfrak{L}[\sin\omega t] = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}, \\ \mathfrak{L}[\cos\omega t] = \dfrac{s}{s^2+\omega^2},\ \mathfrak{L}[f(at)] = \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right),\ \mathfrak{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a),\ \mathfrak{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau}F(s) \end{array}}$$

(九州大 2016)　　(m20164703)

0.71 $f(t) = Ae^{-\lambda t}\sin(\omega t + \theta)$ が解となるような，t を独立変数とする f の 2 階微分方程式を一つ書け．ここで A, λ, ω, θ は定数とする.

(佐賀大 2014)　　(m20144902)

0.72 次の $\nu(t)$ で表される正弦波交流

$$\nu(t) = V_m \sin\omega t$$

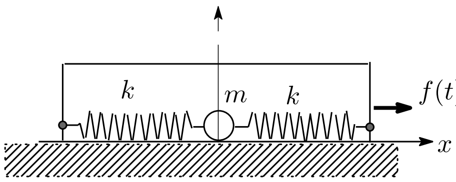
の実効値 $|V|$

$$|V| = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \nu(t)^2 dt}$$

を求めよ．ここで $\omega T = 2\pi$ とする.

(佐賀大 2014)　　(m20144904)

0.73 図に示すように，滑らかな台の上にのせた，軽い容器の中にバネ定数 k の軽いバネで両側から支えられた質量 m のおもりの運動を考える．なお，「軽い」とは質量ゼロを意味し，おもりと容器，容器と台の間の摩擦は無いものとする．いま，容器に対して $f(t) = \sin\omega t$ の外力が加えられたときの，おもりの中心位置 $x(t)$ を導出せよ．ただし，$t = 0$ において $x = 0$，$\dfrac{dx}{dt} = 1$ とする．



(佐賀大 2018)　　(m20184929)

0.74 方程式 $z^5 = 1$ を満足するすべての z について以下に問いに答えなさい.

(1) 与えられた方程式を満足する z のうち, $z = 1$ を除いて偏角が最小のものを $z = \omega$ とする. このとき与えられた方程式のすべての解は $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ であることを示しなさい. ただし, 複素数 z の偏角 $\arg z$ は $0 \leq \arg z \leq 2\pi$ の範囲で考えることにする.

(2) (1) で定義した ω は

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$$

を満足していることを示しなさい.

（長崎大 2004）　　(m20045013)

0.75 関数 $f(t)$ に関するフーリエ変換を $F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$ で定義するとき, 以下の問に答えよ.

(1) $f(t)$ が実数で偶関数の時 $F(\omega)$ が実数になることを証明せよ.

(2) $f(t)$ が $f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad |t| \leq T \\ 0 & , \quad |t| > T \end{cases}$　ただし T は正の実数　で与えられるとき, フーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ.

(3) 上で求めたフーリエ変換 $F(\omega)$ を, 横軸を ω，縦軸を $|F(\omega)|$ として図示せよ.

(長崎大 2005)　　(m20055007)

0.76 次式で定義される I_n について，以下の問いに答えよ.

$$I_n = \int_0^n e^{-st}\cos\omega t\,dt$$

ただし，s, ω, n は正の実数である.

(1) I_n を求めなさい.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めなさい.

(長崎大 2009)　　(m20095003)

0.77 $f(t) = \sin\omega t$　($\omega \neq 0$ の実数) とするとき，$t\sin\omega t$ のラプラス変換を求めよ.

(大分大 2012)　　(m20125105)

0.78 下記の X, Y の連立方程式において，X, Y ともに 0 以外の解が存在するための ω の値を求めなさい.

$$\begin{bmatrix} 500-\omega & -200 \\ -200 & 200-\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(鹿児島大 2012)　　(m20125423)

0.79 次の設問に答えなさい.

(1) 列ベクトル $A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ と行ベクトル $B = \begin{bmatrix} d & e & f \end{bmatrix}$ を用いて，次の行列積を計算しなさい.

① AB ② BA

(2) 次の行列の階数を求めなさい.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 3 & 16 \end{pmatrix}$$

(3) 次の行列の逆行列を求めなさい.

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$$

ただし，ω は $x^3 = 1$ の 1 つの虚数解とする.

(鹿児島大 2014) (m20145403)

0.80 次の微分を求めなさい.

$$\frac{d}{dt}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

(鹿児島大 2017) (m20175406)

0.81 次の定積分の値 I を求めなさい. $I = \int_0^t e^x \sin \omega x \, dx \quad (t > 0)$

(室蘭工業大 2008) (m20085505)

0.82 (1) $R > 0$ とする. $\Omega(R) = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2,\ 0 \leq y \leq x\right\}$ とするとき，

重積分 $\displaystyle\iint_{\Omega(R)} \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2} dxdy$ を計算せよ.

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_0^R \left(\int_0^x \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2} dy \right) dx$ を求めよ.

(3) α を定数とし，$(x, y) \neq (0, 0)$ に対して $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\alpha/2}$ と定める. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ.

(島根大 2016) (m20165804)

0.83 (1) $f(t) = e^{-|t|}$ のフーリエ変換を求めなさい.

(2) $\displaystyle\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega}{1+\omega^2} d\omega$ と $\displaystyle\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega}{1+\omega^2} d\omega$ の値を求めなさい.

(和歌山大 2009) (m20096504)

0.84 (1) 正数 L に対し $\omega = \dfrac{2\pi}{L}$ と置く. 整数 k に対し，次式が成り立つことを示しなさい.

$$\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{ik\omega t} dt = \begin{cases} 1 & (k = 0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

(2) (1) の条件のもと，自然数 n に対し，$D_n(t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega t}$ とおく. このとき，以下の式が成立することを示しなさい.

(a) $\displaystyle\frac{1}{L} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} D_n(t) dt = 1$

(b) $\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-\frac{l}{2}}^{0} D_n(t)dt = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{0}^{\frac{l}{2}} D_n(t)dt = \dfrac{1}{2}$

(c) $D_n(t+L) = D_n(t)$

(d) $D_n(t) = \dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})\omega t)}{\sin(\frac{\omega}{2}t)}$

(和歌山大 2015)　　(m20156507)