[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　π

0.1　周期が 2π の次の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x \leq 0) \\ 1 & (0 < x \leq \pi) \end{cases}$$

(北海道大 2005)　　(m20050102)

0.2　図 1 に示す周期が 2π の関数 $y(x) = \begin{cases} -x & (-\pi < x \leq 0) \\ x & (0 < x \leq \pi) \end{cases}$ のフーリエ級数を求めなさい.

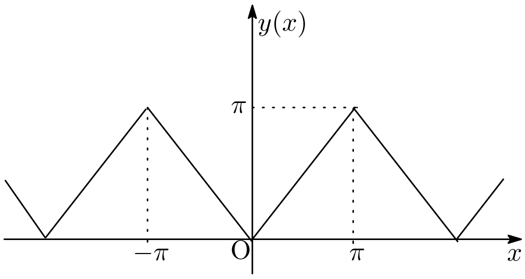
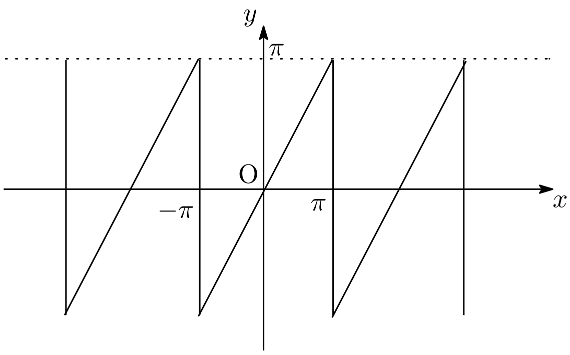


図 1

(北海道大 2006)　　(m20060103)

0.3　(1)　次の周期 2π の周期関数（下図参照）をフーリエ展開せよ.　$f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi)$

(2)　$x = \dfrac{\pi}{2}$ とおいて，π を与える次の式を導出せよ.　$\pi = 4\left(1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \cdots\right)$



(北海道大 2007)　　(m20070104)

0.4　(1)　次の関数 $f(x)$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$ のフーリエ級数を求めなさい.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

(2)　次の関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(k)$ を

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

とし，$i = \sqrt{-1}$ とする．次の関数のフーリエ変換 $F(k)$ を求めなさい.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

(北海道大 2008)　　(m20080104)

0.5　z, w は複素数であり，$i = \sqrt{-1}$ である．また，x, y, r, θ は実数である.

(1) 複素数 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ が与えられたとき，$w^n = z$（n は正の整数）の根は n 個であり，

$$w_k = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1)$$

と表せることを示せ．

(2) 方程式 $w^5 = 1$ を満たす 1 つの解が，$w = \cos 72^\circ + i\sin 72^\circ$ と表せることを示せ．また，$\cos 72^\circ$ の値を求めよ．

(3) 複素数 $z = x + iy$ が与えられたとき，関数 $w(z) = e^z$ が正則であることを証明せよ．

(北海道大 2009)　　(m20090101)

0.6 区間 $[-\pi, \pi]$ で定義される関数を $f(x) = x^2$ とする. このとき, 以下の設問 (1)，(2) に答えよ.

(1) $f(x)$ をフーリエ級数展開せよ．

(2) (1) の結果を利用して，

$$\pi^2 = 6 \times \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots\cdots\right)$$

を導出せよ．

(北海道大 2010)　　(m20100103)

0.7 以下の設問に答えよ．途中の計算手順を詳しく記述すること．

(1) $f(x) = x$ を区間 $[-\pi, \pi]$ 上でフーリエ級数に展開した結果が

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(nx)}{n}$$

となることを示せ．

(2) $-\pi \leq a \leq \pi$ を満たす任意の定数 a に対して，x の区間 $[-\pi, \pi]$ において

$$x^2 = a^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx) - \cos(na)}{n^2}$$

が成立することを示せ．

(3) (2) の結果を用いて，x の区間 $[-\pi, \pi]$ において

$$x^3 - \pi^2 x = 12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(nx)}{n^3}$$

を導け．

(北海道大 2012)　　(m20120104)

0.8 微分方程式と周期関数について，以下の設問に答えよ．途中の計算手順も，詳しく記述すること．

(1) 次の微分方程式を解き，一般解 $y(x)$ を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 10y = 0$$

(2) 次の微分方程式を解き，一般解 $y(x)$ を求めよ．なお，n は 1 以上の整数である．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 10y = \cos nx$$

(3) 関数 $g(x)$ は，周期 2π の周期関数であり，原点を含む 1 周期は次式で表される．
この関数をフーリエ級数に展開せよ．

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{8}\left(1 + \dfrac{2x}{\pi}\right) & (-\pi \leq x < 0) \\ \dfrac{\pi^2}{8}\left(1 - \dfrac{2x}{\pi}\right) & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$$

(4) 次の微分方程式を解き，一般解 $y(x)$ を求めよ．なお，右辺は (3) の周期関数 $g(x)$ である．

$$\frac{d^2y}{dx^2}+10y=g(x)$$

(北海道大 2013)　　(m20130102)

0.9 f を周波数とするとき，時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[g(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

で与えられる．ここで，$i=\sqrt{-1}$ である．ある関数 $m(t)$ のフーリエ変換を $M(f)$ とするとき，オイラーの公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ を利用して，$m(t)\cos(2\pi f_0 t)$ のフーリエ変換が $M(f-f_0)$ および $M(f+f_0)$ を用いて表せることを示せ．

(北海道大 2014)　　(m20140103)

0.10 デカルト座標系 (x,y) と極座標 (r,θ) の関係が次のように与えられている．このとき，以下の設問に答えよ．

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ r\geq 0,\ ,\ 0\leq\theta\leq 2\pi$$

(1) 次の行列 J のすべての成分を r, θ の式で表せ．

$$J=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{bmatrix}$$

(2) 次の積分 A を求めよ．ただし $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$ とする．

$$A=\int_D x^2\,dxdy$$

(3) 次の行列 G のすべての成分を r, θ の式で表せ．ただし $r>0$ とする．

$$G=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\theta}{\partial x} & \dfrac{\partial\theta}{\partial y}\end{bmatrix}$$

(北海道大 2015)　　(m20150101)

0.11 f を周波数とするとき，時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$F[g(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

で与えられる．ここで，$i=\sqrt{-1}$ である．このとき，以下の設問に答えよ．

(1) 下記の関数 $P(t)$ を横軸 t として図示し，そのフーリエ変換を求めよ．

$$P(t)=\begin{cases}1 & ,\ |t|<t_0\\ 0 & ,\ |t|>t_0\end{cases}\qquad (t_0>0)$$

(2) 関数 $P(t+4t_0)+P(t-4t_0)$ を横軸 t として図示し，そのフーリエ変換を求めよ．

(北海道大 2015)　　(m20150104)

0.12 周期 2π の周期関数　$f(x)=\dfrac{x^2}{\pi}$　$\left(-\pi\leq x\leq\pi\right)$　のフーリエ級数 $S[f]$ を求めよ．

(北海道大 2016)　　(m20160103)

0.13 次式の関数について，次の各設問に答えなさい．ただし，$0 < D < 1$ とする．

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leqq x < -D\pi) \\ 1 & (-D\pi \leqq x < D\pi) \\ 0 & (D\pi \leqq x < \pi) \end{cases}$$

設問 1. 次式で示されるフーリエ級数の各係数を求めなさい．

$$f(x) = \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

設問 2. 上式において，n が偶数の項の係数がすべて 0 となる D の条件を求めなさい．

(北海道大 2018)　　(m20180105)

0.14 f を周波数とするとき，時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

で与えられる．また，時間 t の関数 $p(t)$ と $q(t)$ の畳み込みは

$$p(t) * q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)q(t-\tau)d\tau$$

で与えられる．ここで $i = \sqrt{-1}$ である．このとき，以下の設問に答えなさい．

(1) 次の関数 $g(t)$ を横軸 t として図示しなさい．

$$g(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

(2) 次の関数 $h(t)$ を横軸 t として図示しなさい．

$$h(t) = g(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

(3) $g(t)$ のフーリエ変換を求めなさい．

(4) $h(t)$ のフーリエ変換を求めなさい．

(北海道大 2019)　　(m20190104)

0.15 周期 2π の関数

$$f(x) = x^2 \qquad (-\pi \leqq x < \pi)$$

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

について，次式のようにフーリェ級数展開したとき，各係数 a_0，a_n，b_n を求めなさい．

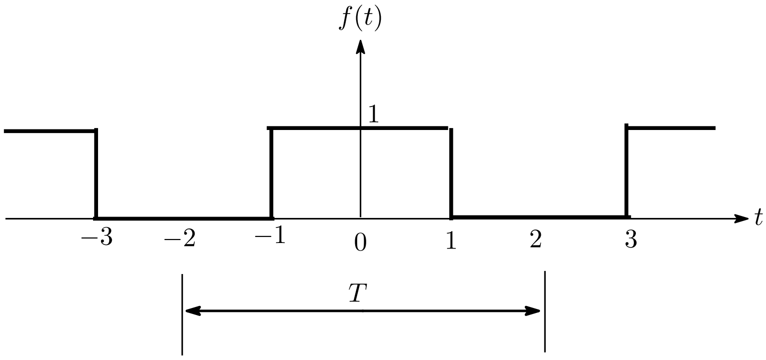
$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

(北海道大 2020)　　(m20200105)

0.16 次の図のような矩形パルス（周期 $T = 4$）をフーリエ級数展開するとき，

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos\left(2\pi\frac{n}{T}t\right) + b_n \sin\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)\right\}$$

で表すことができる．以下の設問に答えなさい．



(1) a_0, a_n および b_n を T を用いた式で表しなさい.

(2) $T=4$ のときの a_0, a_n および b_n を求めなさい.

(北海道大 2022)　　(m20220104)

0.17 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \tan x dx \quad \left(\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\text{である.}\right)$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\, dx$

(北見工業大 2015)　　(m20150204)

0.18 関数 $y=e^{-x}\sin x$ （ただし，$0<x<2\pi$ の範囲で考える）について次の問 (1), (2) に答えよ.

(1) y' および y'' を計算せよ.

(2) y', y'' の符号を調べ，増減・凹凸がはっきりわかるようにグラフを描け.

(北見工業大 2017)　　(m20170204)

0.19 $-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$ での $x=\tan y$ の逆関数を $y=\arctan x$ とする.

(1) $\arctan x$ の導関数を書け. （証明は省略しても良い. ）

(2) 関数 $f(x)=\arctan x-\log\sqrt{1+x^2}$ の $0\leqq x\leqq\sqrt{3}$ での最大値と最小値を求めよ.

(北見工業大 2019)　　(m20190203)

0.20 関数 $r=f(\theta)$ に関する常微分方程式

$$\frac{d^2f}{d\theta^2}+f=a$$

に関し，次の問に答えよ．ただし，a は正の定数である.

(1) 上の常微分方程式の一般解を求めよ.

(2) 一般解の積分定数を次の条件によって決定せよ.

$$\theta=0 \text{ において } \quad f=2a,\quad \frac{df}{d\theta}=0$$

(3) θ の範囲を $-\pi\leqq\theta\leqq\pi$ とする．(r,θ) を極座標とするとき，方程式 $r=f(\theta)$ で表される図形の概形を描け.

(4) 前問の図形によって囲まれる面積を求めよ.

(岩手大 1996)　　(m19960302)

0.21 区間 $[a,b]$ 上の関数 $f(x)$, $g(x)$ は,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=0$$

が成り立つとき互いに直交しているという．以下の問いに答えよ.

(1) 次の (a)〜(e) に示した関数が区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上で互いに直交していることをそれぞれ示せ．ただし，k, l はともに自然数である．

(a) $\dfrac{1}{2}$ と $\cos kx$

(b) $\dfrac{1}{2}$ と $\sin kx$

(c) $\cos kx$ と $\sin lx$

(d) $\cos kx$ と $\cos lx \quad (k \neq l)$

(e) $\sin kx$ と $\sin lx \quad (k \neq l)$

(2) 区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上の任意の関数 $f(x)$ は，$\dfrac{1}{2}$，$\cos kx$，$\sin kx$ の線形和によって

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \end{aligned}$$

と表すことができる（これをフーリエ級数展開という）．係数 $a_0,\ a_k,\ b_k$ をそれぞれ $f(x)$ を用いて表せ．

(3) 次の関数 $f(x)$ を区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上でフーリエ級数に展開せよ．

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

(岩手大 2009)　　(m20090301)

0.22 xy 平面上の曲線 C が極座標では

$$r = 1 + \sin\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

と表されるとき, 次の問いに答えなさい.

(1) 曲線 C の概形を図示しなさい.

(2) 曲線 C の囲む面積 S を求めなさい.

(岩手大 2010)　　(m20100305)

0.23 曲面 $\left(\sqrt{x^2+y^2} - a\right)^2 + z^2 = b^2 \ \ (a > b > 0)$ で囲まれる立体について，次の問いに答えなさい.

(1) 次の文中の $\boxed{（ア）}$ から $\boxed{（エ）}$ に正しい式を入れなさい.

この立体の xy 平面上の断面は．立体を囲む曲面の方程式に $z = 0$ を代入した際に，解として得られる 2 つの円 $\boxed{（ア）}$ 及び $\boxed{（イ）}$ で囲まれる領域 D_1 である.

この立体の xz 平面上の断面である領域 D_2 は 2 つの円 C_1 及び円 C_2 によって構成される.

円 C_1 及び円 C_2 は方程式 $\boxed{（ウ）}$ 及び $\boxed{（エ）}$ で与えられる.

(2) 領域 D_1 及び領域 D_2 を図示しなさい.

(3) 次の文中の $\boxed{（オ）}$ から $\boxed{（キ）}$ に正しい式を入れなさい.

この立体は円 C_1 または円 C_2 を z 軸まわりに回転して得られる回転体である.

この立体の体積 V は式 ① で与えられる.

$$V = \pi \int_{-b}^{b} \boxed{（オ）}\, dx \quad \cdots\cdots ①$$

① 式より，この立体の体積は $V = \boxed{\quad（カ）\quad}$ と求まる．

また，この立体を囲む曲面のうち，$z \geqq 0$ の部分は関数 $z = \boxed{\quad（キ）\quad}$ で表される．

この立体の体積 V は定義域 D_1 に関する積分として次式で与えられる．

$$V = 2\iint_{D_1} \boxed{\quad（キ）\quad}\, dxdy \quad \cdots\cdots ②$$

(4) xy 平面上の極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて ② 式を極座標系の式に変換しなさい．

(岩手大 2015)　　(m20150303)

0.24 2 つの曲線 $y = \cos 2x \ (0 \leqq\ x \leqq \pi)$,　$y = \sin x \ (0 \leqq\ x \leqq \pi)$ とその曲線によって囲まれた図形 S について，次の問いに答えなさい．

(1) 2 つの曲線を図示し，また図形 S を斜線で図示しなさい．

(2) 2 つの曲線の交点の x 座標を求めなさい．

(3) 図形 S を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めなさい．

(岩手大 2016)　　(m20160304)

0.25 関数 $f(x) = e^{-x}\sin x$ について，次の問に答えなさい．

(1) $f(x)$ の第 1 次導関数と第 2 次導関数を求めなさい．

(2) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における $f(x)$ の増減表を作成し，この範囲における $f(x)$ のグラフの概形をかきなさい．また，極値と変曲点の座標も示しなさい．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めなさい．

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ を求めなさい．

(岩手大 2020)　　(m20200303)

0.26 次の問いに答えなさい．

(1) 極座標変換 $x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta$ （ただし，$r \geqq\ 0\,,\ 0 \leqq \theta < 2\pi$) によって，$xy$ 平面上の領域 D が $r\theta$ 平面上の領域 D' に対応しているとする．このとき，関数 f の重積分について，次の式が成り立つことを示しなさい．

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\theta\,,\ r\sin\theta)rdrd\theta$$

(2) xy 平面上の領域 D が $1 \leqq\ x^2 + y^2 \leqq\ 9$ で与えられるとき，次の重積分の値を求めなさい．

$$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy$$

(秋田大 2003)　　(m20030402)

0.27 次の不定形の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x^2 - x}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - x - 1}{x^2}\right)$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\Bigl(\tan x - \sec x\Bigr)$

(秋田大 2015)　　(m20150402)

0.28 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin(x-a)|dx$ 　(a は $0 < a < \pi$の定数)　　(2) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$

(秋田大 2016)　　(m20160402)

0.29 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos x dx$　　　　(2) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$

(秋田大 2019)　　(m20190401)

0.30 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{a}$ を法線ベクトルに持つ原点を通る $\mathbb{R}^3$ 内の平面を π とする．$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，平面 π に関して対称なベクトルを対応させる写像を f とすると，f は線形写像になっている．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，$f(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{a}$ を用いて表せ（内積を用いよ）．

(2) $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる 3×3 行列を A とするとき，行列 A を求めよ．

(3) A の固有値と，それぞれの固有値に対応する固有空間を求めよ．

(秋田大 2019)　　(m20190404)

0.31 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2+x}} dx$　　ただし，$t = \sqrt{x^2+x} - x$ と置換して求めよ．

(秋田大 2020)　　(m20200401)

0.32 x を実数とし, 関数 $f(x)$ を　$f(x) = x - \sin x$　と定義する．このとき, 以下の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(2) $f'(x) = 0$ を満たすすべての実数 x および $f''(x) = 0$ を満たすすべての実数 x をそれぞれ求めよ．

(3) 関数 $y = f(x)$ の区間 $-2\pi \leqq x \leqq 2\pi$ における増減, 極値, グラフの凹凸, 変曲点を調べ, 増減表を書き, グラフの概形を描け．

(4) 任意の実数 x について不等式　$|x| \geqq \sin|x|$　が成り立つことを証明せよ．

(東北大 2006)　　(m20060502)

0.33 x, y を実数とし，$0 < x < 2\pi$，$0 < y < 2\pi$ の表す領域において，関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ を満足するすべての点 (x,y) を求めよ．

(3) $f(x,y)$ の極大値，極小値を求めよ．

(4) 曲面 $z = f(x,y)$ 上の $x = \dfrac{\pi}{2}$，$y = \dfrac{\pi}{2}$ に対応する点における接平面の方程式を求めよ．

(東北大 2007)　　(m20070505)

0.34 x を実数とし，　関数 $f(x)$ を

$$f(x) = e^{-x} \cos x$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の第 n 次導関数を $\dfrac{d^nf}{dx^n}$ とするとき，

$$\frac{d^nf}{dx^n}=\left(-\sqrt{2}\right)^n e^{-x}\cos\left(x-\frac{n\pi}{4}\right)$$

であることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(2) 関数 $y=f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べ，増減表を書き，グラフの概略を描け．

(3) 曲線 $y=f(x)$ $\left(\text{区間 } 0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(東北大 2011)　　(m20110502)

0.35 $\dfrac{2x}{\pi} \leqq \sin x \leqq x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が成り立つことを示せ．

(東北大 2015)　　(m20150502)

0.36 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ で表される xy 平面上の曲線について，以下の問に答えよ．ただし，a は正の実数とする．

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として示せ．

(2) この曲線の概形を描き，曲線の全長を求めよ．

(3) この曲線が囲む面積を求めよ．

(東北大 2015)　　(m20150503)

0.37 xyz 空間の曲面 $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$ について，以下の問に答えよ．ただし，a,b,c は正の実数とする．

(1) 曲面 $f(x,y,z)=0$ が囲む体積 V を求めよ．

(2) 点 $P(1,2,3)$ が曲面 $f(x,y,z)=0$ 上の点となるとき，a,b,c が満たす式を求めよ．

(3) 曲面 $f(x,y,z)=0$ 上の点 $P(1,2,3)$ における接平面 π_P および法線 n_P の式を求めよ．

(4) (2) の条件下で，(1) の体積 V が最小となる a,b,c の値を求めよ．

(東北大 2015)　　(m20150504)

0.38 関数 $f(x)$ を，以下のように定義する．次の問いに答えよ．

$$f(x)=e^{2x}(\cos^2 x-\sin^2 x)\quad(0 \leqq x \leqq \pi)$$

(1) $f(x)=0$ となる x を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．また，この関数の増減表を示せ．

(3) k を実数とする．$f(x)=k$ の実数解の個数を求めよ．

(東北大 2018)　　(m20180502)

0.39 xyz 空間における点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる．

$$\begin{cases} x(t)=a\cos t \\ y(t)=\sin t \\ z(t)=-a\sin t \end{cases}$$

ここで，a は正の実数である．$0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする．以下の問に答えよ．

(1) $t=\dfrac{\pi}{2}$ と $t=\pi$ のそれぞれに対し，点 P の座標とその点における曲線 C の接線方向を表すベクトルを求めよ．

(2) 曲線 C 上の任意の点 P における接線の方程式を求めよ．

(3) 曲線 C が平面上の曲線であることを示し，その平面の方程式と単位法線ベクトルを求めよ．

(4) 曲線 C が xz 平面に投影した曲線で囲まれる領域 D の面積を求めよ．

(東北大 2018)　　(m20180503)

0.40 xy 平面上の点 P の座標 (x,y) が，実数 t を媒介変数として次の式で与えられる．

$$\begin{cases} x(t)=(1+\cos t)\cos t \\ y(t)=(1+\cos t)\sin t \end{cases}$$

ここで，$0\leqq t\leqq\pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $x(t)$ および $y(t)$ の増減表を作成し，曲線 C の概形を図示せよ．

(2) 曲線 C の長さを求めよ．

(3) 曲線 C と直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$ によって囲まれる領域の面積 A を求めよ．

(東北大 2019)　　(m20190501)

0.41 任意の自然数 n に対する数列を以下の定積分により定義する．

$$I_n=\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^{2n-1}x}$$

(1) I_1 を求めよ．

(2) I_2 を求めよ．必要であれば次の関係式を用いよ．

$$\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{1}{\cos^3 x}$$

(3) I_n に成立する漸化式を求めよ．

(4) 以下に示す極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nI_n}{2^n}$$

(東北大 2020)　　(m20200502)

0.42 次の関数 $f(x,y)$ について，以下の問に答えよ．x, y の範囲はそれぞれ $0<x<\pi/2$, $0<y<\pi/2$ とする．

$$f(x,y)=\sin(x+y)+\cos(x-y)$$

(1) 次の偏導関数を求めよ．

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

(2) 次式を満足する (x,y) の値をすべて求めよ．

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

(3) $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．

(東北大 2021)　　(m20210506)

0.43 $D = \{(x, y)\ ;\ 0 \leq x + y \leq \pi, 0 \leq x - y \leq \pi\}$ としたとき，

$$\iint_D (x - y)\sin(x + y)\,dxdy$$

を求めよ．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970605)

0.44 関数

$$f(x) = |\cos x| \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

のフーリエ級数を求めよ．

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090608)

0.45 次の方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(\boldsymbol{r}) = a\delta(\boldsymbol{r}), \tag{a}$$

に関する以下の問いに答えなさい．ここで右辺の a は正の実数，$\delta(\boldsymbol{r})$ は 3 次元のデルタ関数

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{b}$$

である．

(1) 関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ のフーリエ変換を

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k}) \tag{c}$$

とした時，これが方程式 (a) を満たすということから関数 $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$ を求めなさい．

(2) 積分要素 $d\boldsymbol{k}$ の直交座標系 (k_x, k_y, k_z) から極座標系 (k, θ, ϕ) への変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k} = \int_0^{\infty} dk \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi |J| \tag{d}$$

で与えられる．このときのヤコビアン J を書きなさい．ここで $k = |\boldsymbol{k}|$ である．また (d) の右辺が

$$\int_0^{\infty} k^2 dk \int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \tag{e}$$

と書けることを示しなさい．

(3) 問 (1) で求めた $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$ を使って，(c) から $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めなさい．必要があれば，公式

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2} \tag{f}$$

を用いてもよい．

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130606)

0.46 逆三角関数 $f(x) = \sin^{-1} x$ (ただし，$-\pi/2 \leq f(x) \leq \pi/2$) について，以下の問いに答えよ．

(1) $y = f(x)$ のグラフを描け．

(2) $\cos\left(\sin^{-1} x\right)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ を x で微分せよ．

(4) $f(x)$ の不定積分を求めよ．

(5) $y = f(x)$ として $y''(1 - x^2) = y'x$ がり立つことを示せ．

(6) $f(x)$ をマクローリン展開せよ．

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170605)

0.47 関数 $f(x)$ は区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ で $f(x) = |x|$ の周期 2π の周期関数とする．$f(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190611)

0.48 次の式で定義される実対称行列 A を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを全て求めよ．

(2) 任意の 3 次元ベクトルが行列 A の固有ベクトルの線形結合で表されることを示せ．

(3) 行列 $\sin\left(\dfrac{1}{2}\pi A\right)$ とその固有値を求めよ．

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200605)

0.49 a を正の定数とするとき，極形式 $r = a(1 + \cos\theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ で囲まれる領域について，以下の各問いに答えよ．

(1) 囲まれる領域の周の長さを求めよ．

(2) 囲まれる領域の面積を求めよ．

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200611)

0.50 極座標に関する以下の各問に答えよ．

(1) 極座標を用いて $r = 1 + \cos\theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$ で表される曲線の長さを求めよ．

(2) 次の広義積分 I について，極座標の考え方を用いることで I^2 を求めよ．また，I を求めよ．

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210607)

0.51 次の積分を計算せよ．

$$\int_0^1 \frac{2\pi j e^{2\pi jt}}{e^{2\pi jt} - \alpha} \cdot \left\{ \frac{2\pi j e^{2\pi jt}}{e^{2\pi jt} - \alpha} \right\}^* dt$$

ただし，α は $|\alpha| \neq 1$ なる任意の複素数，j は虚数単位，“ $*$ ” は複素共役を表すとする．

(東京大 1997)　　(m19970704)

0.52 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!} \sin\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi$ を求めたい．

$f(\theta) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} \sin\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $f'(\theta)$ を無限級数の形を用いて表せ．

(2) $f''(\theta)$ を $f(\theta)$ を用いて表せ．

(3) $f(\theta)$ を求め，$f(\pi) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!} \sin\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi$ を計算せよ．

(東京大 1999)　　(m19990702)

0.53 極座標 (r,θ) で表せる２次元領域 $r>1$, $0\leq\theta<2\pi$ で

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0 \qquad \text{(i)}$$

を満たし，境界条件

$$u(1,\theta)=\cos 3\theta \quad 0\leq\theta<2\pi \qquad \text{(ii)}$$

$$\lim_{r\to\infty}u(r,\theta)=0 \quad 0\leq\theta<2\pi \qquad \text{(iii)}$$

を満たす解 $u(r,\theta)$ を以下の手順で求めよ．

(1) (i) の解として $u(r,\theta)=f(r)g(\theta)$ と表せるものを考える．これを (i) に代入し，左辺が r のみの関数，右辺が θ のみの関数であるような式を導け．

(2) この式が上記の２次元領域に対応する任意の (r,θ) に対して成立するためにはその両辺は r , θ によらない定数でなくてはならない．そこで，この定数を c として f の r に関する微分方程式と g の θ に関する微分方程式を導け．

(3) m を整数として $f(r)=r^m$ とおき，定数 c を m で表せ．次に，これを g の θ に関する微分方程式に代入し，(i) の解で，$u_m(r,\theta)=f(r)g(\theta)$ の形のものを求めよ．

(4) d_m を定数として，(i) の解で $u(r,\theta)=\displaystyle\sum_m d_m u_m(r,\theta)$ の形の解を考え，それが境界条件 (ii),(iii) をみたすようにして求める解 $u(r,\theta)$ 定めよ．

(東京大 2000)　　(m20000705)

0.54 以下の問いに答えよ．ただし，解とともに導出過程も示せ．

(1) 複素数 A_n を係数とする複素多項式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n(z-a)^n$$

を考える．ただし，z は複素変数，a は複素数，n は整数とする．複素平面上で a の周りを反時計回りに一周する経路 C に沿った積分について，以下の式が成り立つことを示せ．ここでは i を虚数単位とする．

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i A_{-1}$$

必要であれば以下のコーシーの積分定理を用いて良い．

複素関数 $g(z)$ が複素平面上の閉曲線 C' とその内部 D' で正則あれば．
C' を一周する経路に沿って $g(z)$ を積分すると，その結果はゼロである．

(2) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

(3) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

(4) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$$

(東京大 2012)　　(m20120704)

0.55 半径 r の円周に内接する正 m 角形 $(m\geqq 3)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) この正 m 角形の面積 A_m を求め，m が無限大のときの極限を算出せよ．ただし，下記の関係を用いてよい．

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(2) この正 m 角形を底面とする高さ h の正 m 角柱を考える．図 1 は，$M = 6$ の場合の例である．この側面は m 個の長方形（$2m$ 個の直角三角形）で構成される．側面の総面積 B_m を求め，m が無限大のときの極限を算出せよ．

(3) この正 m 角柱の底面を面内で角 π/m だけ正 m 角形の中心で回転して得られる高さ h の多面体を考える．この多面体は，正反 m 角柱と呼ばれる．図 2 は，$m = 6$ の場合の例である．この側面は $2m$ 個の二等辺三角形で構成される．側面の総面積 C_m を求め，m が無限大のときの極限を算出せよ．

(4) 正反 m 角柱の高さを h/n $(n \geqq 2)$ にして n 段積み重ねることを考える．図 3 は $M = 6$, $n = 2$ の例である．この側面は $2mn$ 個の二等辺三角形で構成される．側面の総面積 D_{mn} を求めよ．さらに，$n = m^2$ の場合を考え，m が無限大のときの D_{mn} の極限を算出せよ．

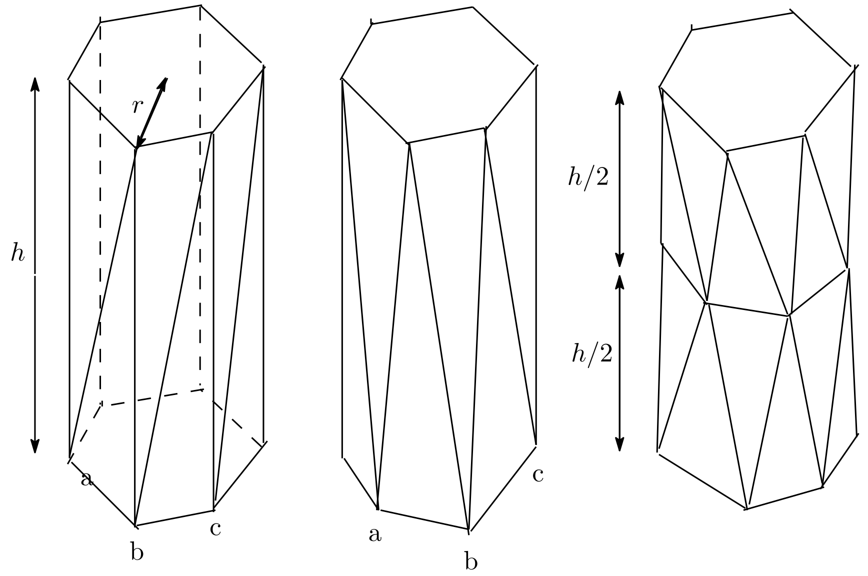


図 1　　図 2　　図 3

(東京大 2013)　　(m20130703)

0.56 以下の問いに答えよ．i は虚数単位はとする．

(1) 実数 a は $|a| < 1$ 満たすとする．留数定理を用いて，複素積分

$$\int_C \frac{dz}{(z + ai)(az + i)}$$

を求めよ．ただし，積分路 C は $|z| = 1$ であり，反時計回りに回るものとする．

(2) $0 < \gamma < \pi/2$ として，積分値

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \cos\gamma \sin\theta}$$

を次の手順で求めよ．

(a) $z = e^{i\theta}$ と変数変換を行うことにより複素積分に変形する．このとき，

$$I = \int_C f(z) dz$$

を満たす複素関数 $f(z)$ を求めよ．ただし，積分路 C は $|z| = 1$ であり，反時計回りに回るものとする．

(b) 複素関数 $f(z)$ の極を全て求めよ.

(c) 積分路 C 内に含まれる極を全て求めよ.

(d) 留数定理を用いて, 積分値 I を求めよ.

(東京大 2017)　(m20170704)

0.57　2 つの正方行列 A, B を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}+1 & \frac{1}{\sqrt{2}}-1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}-1 & \frac{1}{\sqrt{2}}+1 & 1 \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

とし, 行列 C を $C = BAB^{-1}$ とする. 以下の問いに答えよ. なお, 以下では任意のベクトル $\overrightarrow{x}$ に対し $\overrightarrow{x}^T$ はその転置を表すものとする. また, 行列 I を単位行列とし, ある正方行列 X に対して $\exp(X)$ を

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots$$

と定義する.

(1) 行列 A の固有値を複素数の範囲で求めよ.

(2) 行列 C の固有値を複素数の範囲で求めよ.

(3) あるスカラー変数 t に対して $\exp(At)$ を求めよ.

(4) 3 次元ベクトル $\overrightarrow{x}$ に対してスカラー関数 $f(\overrightarrow{x})$ を

$$f(\overrightarrow{x}) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \exp\left(C\frac{2\pi k}{n} \right) \overrightarrow{a} - \overrightarrow{x} \right\}^T \left\{ \exp\left(C\frac{2\pi k}{n} \right) \overrightarrow{a} - \overrightarrow{x} \right\}$$

とおく. ただし, n は $n > 1$ を満たす整数, $\overrightarrow{a}$ は以下のような 3 次元ベクトルである.

$$\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

関数 $f(\overrightarrow{x})$ を最小にする $\overrightarrow{x}$ は, ある単位ベクトル $\overrightarrow{b}$ を用いて以下のような形式で表せる.

$$\overrightarrow{x} = \boxed{\text{(ア)}} \left(\sum_{k=1}^{n} \boxed{\text{(イ)}} \right) \overrightarrow{b}$$

(a) (ア) と (イ) に入る数式を書け. 必要であれば a_1, a_2, a_3, n, k を用いてよい. なお, 行列を含まない形式で解答すること.

(b) $\overrightarrow{b}$ を求めよ.

(5) (4) で求めた $\overrightarrow{x}$ に対して, $n \to \infty$ としたときの $\overrightarrow{x}$ を a_1, a_2, a_3 を用いて表せ.

(東京大 2018)　(m20180705)

0.58　i を虚数単位とし, z は複素数とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 次の複素数を $x + iy$（x, y は実数）の形ですべて求めよ. ただし, x, y の表式に三角関数を含んではならない.

(a) $\left(1 - \sqrt{3}i\right)^3$　　(b) $i^{1/2}$　　(c) $\dfrac{(1-i)^6}{(1+i)^8}$

(2) 関数 $z = \tan\omega = \dfrac{\sin\omega}{\cos\omega}$ の逆関数を $\omega = \tan^{-1} z$ で表す.

(a) 次の式が成り立つことを示せ. $\tan^{-1} z = \dfrac{i}{2}\log\left(\dfrac{i+z}{i-z}\right)$

ただし, log は複素対数関数である.

(b) $\tan^{-1} z$ の z に関する微分を求めよ.

(3) 複素平面において, 曲線 C を $z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とする.

(a) 次の積分 $I(k)$ を求めよ. ここで, k は $0 < k < 1$ の定数とする. $I(k) = \displaystyle\int_C \frac{1}{k^2z^2+1}dz$

(b) $k = 2-\sqrt{3}$ のとき, I の値を求めよ.

(4) 実積分 J の値を留数定理により求めることを考える. $J = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx$

(a) J の積分範囲を $[-\infty, \infty]$ と変形して, 被積分関数に e^{ix} を用いて J を表せ.

(b) 関数 $f(z) = 1/(z^2+1)^2$ とする. 複素平面において, 図 1 の半径 Γ（円弧 ADB）の半径 R が十分に大きい時, 次のことが成り立つことを示せ. $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz = 0$

(c) 図 1 の C に関する周回積分を考えることにより, J の値を求めよ.

このとき, 複素平面の上半平面において,

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)e^{iz}dz = 0$$

であることを用いてよい.

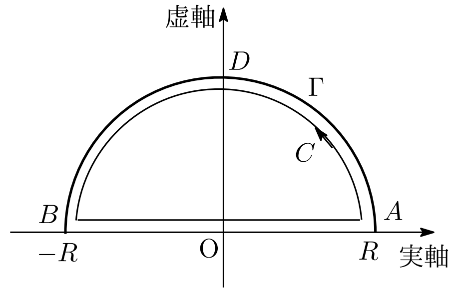


図 1

(東京大 2020) (m20200703)

0.59 $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; |x|+|y| \leqq \pi\right\}$ とするとき, 次の積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{e^{x+y}\cos(x+y)}{(x-y)^2+\pi^2}dxdy$$

(東京工業大 2020) (m20200804)

0.60 点 $P(1,2,3)$ から平面 $\pi : x+2y+2z = 2$ に下ろした垂線の足を H とするとき, 線分 HP の長さを求めなさい.

(東京農工大 2006) (m20060901)

0.61 A は 3 行 3 列の行列で, その (i,j) 成分が $\sin\left(\dfrac{7i+5j-1}{6}\pi\right)$ となるものとする.

(1) A の行列式を計算しなさい.

(2) 連立 1 次方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解のうちで $x^2+y^2+z^2 = 1$ を満たすものをすべて求めなさい.

(東京農工大 2014) (m20140904)

0.62 原点を中心とし, 半径 2 の円周を C とするとき,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{9z^2+\pi^2}\,dz$$

を計算せよ.

(電気通信大 1994) (m19941005)

0.63 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2}\,dx\right) dy$

(2) $\displaystyle\iint_D (x-y)\sin(x+y)\,dx\,dy,\quad D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : 0 \leqq x-y \leqq \pi,\ 0 \leqq x+y \leqq \pi\}$

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2},\quad D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4\}$

(電気通信大 1998)　　(m19981002)

0.64 次の各複素積分の値を求めよ.

ただし, 積分路は原点を中心として半径 1 の円周上を反時計回りに一周するものとする.

(1) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{z^2} dz$　　(2) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{z(1+2z)} dz$

(電気通信大 2005)　　(m20051006)

0.65 関数 $y=f(x)$ のグラフ C が　$(x,y)=(\sin t\,,\ t\cos t)\,,\quad (0 \le t \le \pi/2)$　と表されるとする. $t=\pi/4$ のときの C 上の点を $P(x_0, y_0)$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $f'(x_0)$ を計算し, 点 P における C の接線の方程式を求めよ.

(2) $f''(x_0)$ を計算せよ.　　(3) 曲線 C と x 軸とが囲む部分の面積を求めよ.

(電気通信大 2007)　　(m20071004)

0.66 (1) $u=\tan\dfrac{x}{2}$ とおく. $\sin x\,,\ \cos x$ を u を用いて表せ.

(2) $\displaystyle I_1=\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx\,,\quad I_2=\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$ を求めよ.

(電気通信大 2008)　　(m20081003)

0.67 関数 $u(x,y,t)=\dfrac{1}{4\pi t}e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}\quad (t>0)$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ および $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ を計算せよ.

以下では, $t>0$ を定数とする.

(2) $u(x,y,t)$ の $x.y$ に関するマクローリン展開

$$u(x,y,t)=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+\cdots$$

の係数 $a_{00},\ a_{10},\ a_{01},\ a_{20},\ a_{11},\ a_{02}$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\iint_{x^2+y^2\le R^2} u(x,y,t)\,dxdy$ を計算せよ.

(電気通信大 2013)　　(m20131003)

0.68 次の重積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x+2y)\sin^2(x-2y)dxdy\quad D=\left\{(x,y)\ :\ 0\le x+2y\le\pi\,,\ 0\le x-2y\le\frac{\pi}{4}\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \log\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\quad D=\left\{(x,y)\ :\ 1\le x^2+y^2\le 4\,,\ 0\le y\le x\right\}$

(電気通信大 2013)　　(m20131004)

0.69 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy\,,\qquad D=\{(x,y) : x^2+y^2 \leqq\ y\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (x-y)^2\cos^2(x+y)\,dxdy\,,\qquad D=\{(x,y):|x|+|y|\leqq\pi\}$

(電気通信大 2014)　　(m20141004)

0.70 以下の問いの答えよ．ただし，$i=\sqrt{-1}$ とする．

(1) $z=e^{i\theta}$ とおくとき，$\sin\theta$ を z の式で表せ．

(2) 複素関数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4iz-1}$ の極をすべて求め，各極における留数を計算せよ．

(3) 定積分 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\sin\theta}$ の値を求めよ．

(電気通信大 2015)　　(m20151005)

0.71 複素関数 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ に対して，以下の各問いに答えよ．ただし，$i=\sqrt{-1}$ で，e は自然対数の底とする．

(1) $f(z)$ のすべての極を求め，各極における留数を求めよ．

(2) $z=Re^{i\theta}$ $(R>1,\ 0\leqq\theta\leqq\pi)$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$|f(z)|\leqq\frac{1}{R^2-1}$$

(3) 広義積分 $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx$ を求めよ．

(電気通信大 2016)　　(m20161005)

0.72 $0<a<1$ を満たす実数 a に対して，以下の問いに答えよ．

(1) 次の複素関数 $f(z)$ の特異点をすべて求め，$f(z)$ の各特異点における留数を求めよ．
ただし，i は虚数単位とする．　　$f(z)=\dfrac{1}{az^2-i(a^2+1)z-a}$

(2) 次の定積分 $I(a)$ を求めよ．　　$I(a)=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a^2-2a\sin\theta+1}$

(電気通信大 2019)　　(m20191005)

0.73 次の重積分の値をそれぞれ計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy\,,\quad D=\left\{(x,y):x\geqq0,\ y\geqq0,\ \sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \sin(x^2)\,dxdy\,,\quad D=\left\{(x,y):0\leqq y\leqq x\leqq\sqrt{\pi}\right\}$

(電気通信大 2020)　　(m20201004)

0.74 (1) $z^4+1=0$ となる複素数 z を求めよ．

(2) $x=\sqrt{\tan\theta}$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して，導関数 $\dfrac{dx}{d\theta}$ を x の式で表せ．

(3) 広義積分 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan\theta}\,d\theta$ を求めよ．

(電気通信大 2020)　　(m20201005)

0.75 領域 D ： $-\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{2}{3}\pi,\ -\dfrac{\pi}{3}<y<\dfrac{2}{3}\pi$ で定義される関数

$$f(x,y)=2\sin^2x-2\sin x\sin y-\sin^2y$$

に関する以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ を求めよ.

(2) $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ をみたす点 $(a,b)\in D$ をすべて求めよ.

(3) $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ.

(電気通信大 2021)　　(m20211003)

0.76 3次元空間において，点 $A(3,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(0,0,1)$ を含む平面を α とする．次の問に答えよ．

(1) 平面 α と xy 平面のなす角を θ ($0<\theta<\pi/2$) とするとき，$\cos\theta$ を求めよ．

(2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ．

(3) 平面 α と原点を中心とする半径1の球との交わりを xy 平面に正射影して出来る図形の面積を求めよ．

(横浜国立大 1993)　　(m19931102)

0.77 (1) m,n を整数とするとき，以下の式が成り立つことを示せなさい.

$$\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx=0$$

(2) 次の周期関数について解答しなさい.

$$f(x)=\begin{cases}-k & (-\pi<x<0)\\ k & (0<x<\pi)\end{cases}\quad,\quad f(x+2\pi)=f(x)\qquad k>0$$

この関数を以下のように無限級数で表すとき，その係数 a_0, a_n, b_n を求めなさい．さらに，求められる無限級数を $n=7$ の項まで示しなさい.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

(横浜国立大 2008)　　(m20081105)

0.78 次の定積分を計算しなさい.

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sin^2 2x dx$$

(横浜国立大 2016)　　(m20161106)

0.79 次の関数をフーリエ級数 $y=a_0+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ に展開せよ.

(1) 区間 $x=[-\pi,\ \pi]$ で定義される関数 $y=\begin{cases}a\ :\ x\geq 0\,,\quad a\ \text{は実定数}\\ 0\ :\ x<0\end{cases}$

(2) 区間 $x=[0,\ \pi]$ で定義される三角関数 $y=a\sin(nx)\cos(nx)$　ここで n は整数

(3) 区間 $x=[0,\ \pi]$ で定義される一次関数 $y=x$

(横浜国立大 2017)　　(m20171102)

0.80 複素数 α に対する複素関数 $f(\alpha)$ を次のように定義する．

$$f(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{e^z}{z-\alpha}dz$$

ただし，C は複素平面上の単位円：$|z|=1$ である．このとき，$f(2)$ と $f(0.5+0.5i)$ を求めよ．

(千葉大 1997)　　(m19971204)

0.81 原点を O とする左手系の直交座標を，x-O-y とする．原点 O を，$(x,y)=(1,2)$ に平行移動した座標系を X-O'-Y とする．座標系 X-O'-Y をその原点 O' の周りに反時計方向に，$\pi/4$ 回転した座標系を x'-O'-y' とする．原点 O の周りに反時計方向に，座標系 x-O-y を $\pi/4$ 回転した座標系を X'-O-Y' とする．X'-O-Y' の原点を $(X',Y')=(1,2)$ に平行移動した座標系を x''-O''-y'' とする．これらの座標系に関して以下の設問に答えなさい．

(1) 座標系 x-O-y と座標系 x'-O'-y' との関係を図示しなさい．

(2) 座標系 x-O-y と座標系 x''-O''-y'' との関係を図示しなさい．

(3) x-y 座標系の原点を中心とする半径 1 の円を C とする．座標系 x'-y', x''-y'' において，この図形を式で表しなさい．

(千葉大 2001)　　(m20011203)

0.82 重積分に関する以下の問いに答えなさい．

(1) 領域 $D=\{(x,y,z)\mid x,y,z\geq 0\,,\ x+y+z\leq \pi/2\}$ を図示しなさい．

(2) 次の不定積分を求めなさい．ただし，a は定数である．
$$\int x\sin(a+x)dx$$

(3) D を積分領域として，次の 3 重積分の値を求めなさい．
$$\iiint_D z\sin(x+y+z)dxdydz$$

(千葉大 2007)　　(m20071208)

0.83 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ （ただし，$a,\ b>0$）が下に図示されている．点 A の座標は $(a,0)$，点 B の座標は $(0,b)$ であり，点 P(x_0,y_0) は楕円の弧 AB（第一象限）上の点（ただし，点 A と点 B を除く）である．次の設問に答えなさい．

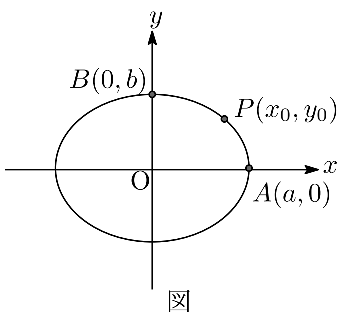
(1) 点 P で楕円に接する接線の方程式を $x,\ y,\ a,\ b,\ x_0,\ y_0$ を用いて表しなさい．

(2) $x_0=a\cos\theta,\ y_0=b\sin\theta$ （ただし，$0<\theta<\pi/2$ ）とおいたとき，設問 (1) で求めた接線の方程式を $x,\ y,\ a,\ b,\ \theta$ を用いて表しなさい．

(3) 設問 (2) で求めた接線の方程式と x 軸および y 軸との交点をそれぞれ点 C および点 D とするとき，線分 CD の長さを $a,\ b,\ \theta$ を用いて表しなさい．

(4) 線分 CD の長さが最小となる θ の値を $a,\ b$ を用いて表しなさい．

(5) 線分 CD の最小値を $a,\ b$ を用いて表しなさい．



図

(千葉大 2017)　　(m20171207)

0.84 関数 $f(x)=a\sin x$ 　(ただし，$-\pi/2\leqq\ x\leqq\pi/2$) を考える．

(1) $y=f(x)$ の逆関数 $x=f^{-1}(y)$ を求めよ．

(2) 逆関数 $x=f^{-1}(y)$ の導関数 $\dfrac{dx}{dy}$ を求めよ．

(筑波大 2001)　　(m20011302)

0.85 以下の設問 (1),(2) に答えなさい.

(1) $f(x,y) = \tan x + \tan y - \tan(x+y) \quad (0 \leq x < \pi\,,\ 0 \leq y < \pi)$ の極値を求めなさい.

(2) 半径 r の円に外接する三角形のうち，最小の面積をもつのはどのような場合か．また，その最小値はいくらか.

(筑波大 2003) (m20031311)

0.86 $f(x) = e^{-x}\sin x$ について以下の問いに答えなさい.

(1) $f'(x)$ を求め，$0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で $f'(x) = 0$ となる点をすべて挙げなさい.

(2) $y = f(x)$ の概略図をグラフで示しなさい.

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を求めなさい.

(筑波大 2006) (m20061301)

0.87 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots$ の値を求めよ.

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$ の値を求めよ.

ただし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$ である（π は円周率）.

(筑波大 2007) (m20071335)

0.88 3 次元ユークリット空間 $\boldsymbol{R}^3$ における平面 $W_1 : x+y+z=0$ および $W_2 : x+y-z=0$ について以下の設問に答えよ.

(1) W_1 , W_2 に垂直な直線を l_1 , l_2 とする. これらの直線が原点を通るとき, l_1 , l_2 を表す方程式を求めよ.

(2) l_1 , l_2 の両者と直交する直線 l_3 を表す方程式を求めよ.

(3) W_1 と W_2 の交線を表す方程式を求めよ.
また, この交線と前問で求めた直線 l_3 のなす角 θ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$ とする) を求めよ.

(筑波大 2010) (m20101310)

0.89 長方形の閉領域 $D = \{(x,y)\,|\, 0 \leqq\ x \leqq \pi\,,\ 0 \leqq\ y \leqq \dfrac{\pi}{2}\}$ における次の関数 $f(x,y)$ の最大値, 最小値およびその時の x , y の値を求めなさい.

$$f(x,y) = \sin x\,\sin y\,\sin(x+y)$$

(筑波大 2010) (m20101319)

0.90 関数 $f(x) = \sin 2x$ の $x = \pi/2$ におけるテイラー展開について以下の問いに答えよ.

(1) $(x-\pi/2)^4$ の項までテイラー展開を求めよ．ただし，ここでは剰余項は求めなくてよい.

(2) $\pi/2 < x < \pi$ を満たす範囲の x に対して，剰余項 R_5 は $|R_5| < \dfrac{\pi^5}{5!}$ を満たすことを示せ.

ただし，(1),(2) において $f(x)$ の $x = a$ におけるテイラー展開は，正の整数 n に対して

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + R_{n+1}$$

と表される．ここで，剰余項 R_{n+1} は，$a < p < x$ である p が存在して，

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(p)(x-a)^{n+1}$$

と表される.

(筑波大 2011) (m20111314)

0.91 正弦関数 $\sin x$ の逆関数 $\mathrm{Sin}^{-1}x$ を用いた関数の導関数について以下の問いに答えよ．ただし，$\mathrm{Sin}^{-1}x$ は値域を閉区間 $[-\pi/2, \pi/2]$ に制限した主値を表す関数である．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\mathrm{Sin}^{-1}x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ であることを示せ．

(2) 定義域 $-1 < x < 0$ および $0 < x < 1$ において $\dfrac{d}{dx}\left(\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{1-x^2}\right)$ を求めよ．

(筑波大 2011)　　(m20111316)

0.92 方程式 $\sin x = 0$ の解は $x = m\pi(0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots)$ であることから，多項式

$$g_n(x) = Cx\left[\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\right]\left[\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\right]\cdots\left[\left(1-\frac{x}{n\pi}\right)\left(1+\frac{x}{n\pi}\right)\right]$$

は，定数 C を適切に選べば $x = 0$ のまわりで $\sin x$ の良い近似であることがわかっている．

ここで，n は正の大きな整数である．この多項式と $x = 0$ のまわりでのベキ級数展開

$\sin x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ を比較する．ここで，$a_k(k = 0, 1, 2, \cdots)$ は定数である．

(1) $\sin x$ のベキ級数展開の 3 次の項まで，すなわち a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ．

(2) 多項式 $g_n(x)$ と (1) で求めたベキ級数展開との 1 次の項の係数が一致するように C の値を決めよ

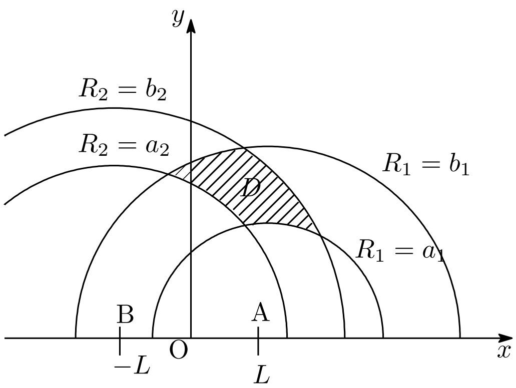
(3) 多項式 $g_n(x)$ と (1) で求めたベキ級数展開との 3 次の項の係数は $n \to \infty$ の極限で一致する．このことを使って，無限級数 $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} + \cdots$ の和 S を求めよ．

(筑波大 2012)　　(m20121310)

0.93 xy 平面の $y > 0$ なる領域（上半面）の点 $P(x, y)$ に対して，点 $A(L, 0)$ および点 $B(-L, 0)$ からの距離の二乗

$$R_1 = (x-L)^2 + y^2\ , \qquad R_2 = (x+L)^2 + y^2$$

を考える．ここで $L > 0$ とする．また，$f(x, y) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)$ とする．



(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) c をゼロでない定数とし，xy 平面の上半面において $f(x, y) = c$ で表される曲線を考える．この曲線上の任意の点 (x_0, y_0) における法線の方程式を求めよ．そして，その法線と x 軸との交点が c と L だけで決まることを示せ．

(3) a_1, a_2, b_1, b_2 を正の定数とし，$R_1 = a_1$ と $R_1 = b_1$ で指定される円がそれぞれ $R_2 = a_2$ と $R_2 = b_2$ で指定される円と交わる場合を考える（図を参照）．ここで $a_1 < b_1$，$a_2 < b_2$ とし，xy 平面の上半面において $a_1 \leq R_1 \leq b_1$，$a_2 \leq R_2 \leq b_2$ で指定される領域を D とするとき，D を x 軸の周りに回転して出来る回転体の体積は

$$V = 2\pi\int_D y\,dxdy$$

で与えられる．x, y に関する積分を R_1，R_2 に関する積分に変換することにより V を求めよ．

(4) xy 平面を複素平面と考え，点 $P(x,y)$ を複素数 $z=x+iy$ に対応させ，
複素関数 $g(z)=\log\left(\dfrac{z-L}{z+L}\right)$ を考える．$z-L=r_1e^{i\theta_1}$，$z+L=r_2e^{i\theta_2}$ とおくことにより，$g(z)$ の実部は $f(x,y)$ に一致することを示せ．ただし，$0<r_1$，$0<r_2$，$0<\theta_1<\pi$，および $0<\theta_2<\pi$ とする．さらに $g(z)$ の虚部は三角形 PAB のどの内角に対応するか答えよ．

(筑波大 2016)　　(m20161315)

0.94 $f(x,y)=x^2+y^2$ とし，xyz 直交座標系において曲面 $S:z=x^2+y^2$ を考える．この座標系上の点を (x,y,z) と表し，座標系の原点を $O(0,0,0)$ とする．

(1) 点 $A(1,1,2)$ における曲面 S の接平面を π とする．π の方程式を求めよ．

(2) (1) の接平面 π と平行で原点 O を通る平面を π_0 とし，平面 π_0 と曲面 S の交線の xy 平面への正射影を曲面 C とする．C はどのような図形になるか．

(3) (2) の平面 π_0 と曲面 S で囲まれた領域を D とする．このとき，3 重積分

$$I=\iiint_D(x^2+y^2)dxdydz$$

の値を求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191306)

0.95 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;-\pi<x<\pi \text{ かつ } 0<y<\pi\right\}$ とする．

関数 $f(x,y)=\sin x-\sin y+\sin(x+y)$ の D における極値をすべて求めよ．

(筑波大 2020)　　(m20201315)

0.96 $F(x,y)=xy\tan y+\pi\tan y-x$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\tan x=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+o(x^3)\quad(x\to 0)$ を満たす実数 a_0，a_1，a_2，a_3 を求めよ．
ただし，$o(\cdot)$ はランダウの記号（スモール・オー）を表す．

(2) 1 以上の整数 n に対し，開区間 $\left(\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\pi,\ \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi\right)$ を I_n とおく．各 I_n における方程式

$$\tan x=\frac{1}{x}\qquad(x\in I_n)$$

の解を x_n とする．$d_n=x_n-n\pi$ とおくとき $F\left(\dfrac{1}{n},\ d_n\right)=0$ を示せ．

(3) $x=0$ を含む開区間 I と，I において定義された微分可能な関数 $\varphi(x)$ であって

$$F(x,\ \varphi(x))=0\qquad(x\in I),\qquad \varphi(0)=0$$

を満たすものが存在することを示せ．

(4) (2) の x_n を

$$x_n=n\pi+b_1\frac{1}{n}+b_2\frac{1}{n^2}+b_3\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\qquad(n\to\infty)$$

と表示したときの実数 b_1，b_2，b_3 を求めよ．

(筑波大 2022)　　(m20221316)

0.97 (1) $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ とする．ただし，θ は $0<\theta<2\pi$，$\theta\neq\pi$ を満たす実数とする．
次の条件 (a),(b),(c) をすべて満たすような α_1，α_2，$\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$ の組を 1 つ求めよ．

(a) α_1 , α_2 は相異なる複素数である.

(b) $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ は複素数を成分とする 2 次元ベクトルで，どちらも零ベクトルではなく，さらに $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)$ と $\dfrac{i}{2}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)$ はともに実数を成分とするベクトルになる.

(c) $A\boldsymbol{p}_1=\alpha_1\boldsymbol{p}_1$ かつ $A\boldsymbol{p}_2=\alpha_2\boldsymbol{p}_2$ を満たす.

(2) B を 2 次の実正方行列とし，B のどの固有値も実数でないと仮定する.

(i) 次の (d),(e),(f) をすべて満たすような β_1 , β_2 , $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ の組が存在することを示せ.

(d) 正の実数 r と，$0<\theta<2\pi$, $\theta\neq\pi$ を満たす実数 θ を用いて，$\beta_1=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, $\beta_2=r(\cos\theta-i\sin\theta)$ と表される.

(e) $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ は複素数を成分とする 2 次元ベクトルで，どちらも零ベクトルでなく，さらに $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2)$ と $\dfrac{i}{2}(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{q}_2)$ はともに実数を成分とするベクトルになる.

(f) $B\boldsymbol{q}_1=\beta_1\boldsymbol{q}_1$ かつ $B\boldsymbol{q}_2=\beta_2\boldsymbol{q}_2$ を満たす.

(ii) 2 次の実正則行列 M が存在して，

$$M^{-1}BM=\begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

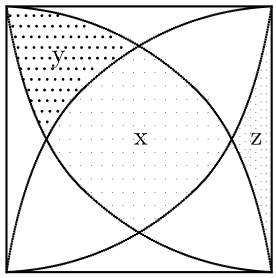
となることを示せ.

(埼玉大 2009)　　(m20091405)

0.98 右下の図形は 1 辺の長さ 1 の正方形の中に，各頂点を中心として半径 1 の円弧を 4 つ描いたものである．図の x,y,z それぞれの領域の面積をやはり x,y,z で表す．

(1) 次の各式の空欄を埋めて，x,y,z の満たす連立方程式を作れ．ただし，π は円周率である．

$$\begin{cases} \square x+\square y+\square z=1 \\ \square x+\square y+\square z=\dfrac{\pi}{4} \\ x+2y+z=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{\square}}{\square} \end{cases}$$



(2) x を求めよ．

(図書館情報大 1999)　　(m19991601)

0.99 2 つの曲線

$$C_1: z=e^{i\theta} \qquad (\,0\leqq\theta\leqq\pi\,)$$
$$C_2: z=\frac{3}{2}e^{i\theta}-\frac{1}{2} \qquad (\,0\leqq\theta\leqq\pi\,)$$

が与えられているとする．次の各問に答えよ．

(1) C_1, C_2 を図示せよ．

(2) $\displaystyle\int_{C_1}\frac{1}{z}dz$ を求めよ．

(3) コーシーの積分定理を使って，$\displaystyle\int_{C_2}\frac{1}{z}dz$ を求めよ．

ただし，(2) と (3) における積分路の向きは，$\theta=0$ のときの点から $\theta=\pi$ のときの点にむかう向きを正の向きとする．

(茨城大 2000)　　(m20001704)

0.100 (x, y) を平面上の直交座標，(r, θ) を極座標とする．以下の問に答えよ．

$\rho > 0$ とする．関数 $f(x, y) = r \sin 2\theta$ の正方形 $A = \{(x, y) \mid 0 < x < \rho,\ 0 < y < \rho\}$ 上の積分

$$I(\rho) = \iint_A f(x, y) dxdy$$

と扇形 $B = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid 0 < r < \rho,\ 0 < \theta < \pi/2\}$ 上の積分

$$J(\rho) = \iint_B f(x, y) dxdy$$

の大小関係を積分計算によらずに論ぜよ．次に積分計算を行って $I(\rho)$ と $J(\rho)$ を ρ の式で表し，大小関係を比較せよ．

(茨城大 2007)　　(m20071705)

0.101 複素平面において，0 を始点，π を終点とする曲線 $C : z(t) = t + i \sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$ を考える．以下の各問に答えよ．

(1) 曲線 C を複素平面上に図示せよ．

(2) 導関数 $z'(t)$ を求めよ．

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_C \overline{z} dz$ を計算せよ．ただし，$\overline{z}$ は z の共役複素数を表す．

(茨城大 2016)　　(m20161707)

0.102 次の関数を考える．

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)^2$$

$0 \leqq t$ に対して $D(t) = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 1,\ f(x, y) \geqq t\right\}$ とするとき，次の小問 (1), (2) および (3) に答えよ．

(1) 極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta (r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ を用いて，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_{D(0)} f(x, y) dxdy$$

(2) 平面上の集合 $D(t)$ が表す領域の面積を $F(t)$ とするとき，$F(t)$ を求めよ．
ただし，平面上の集合 $D(t)$ が表す領域が空集合である場合や正の面積を持たない場合の t では $F(t) = 0$ とする．

(3) 次の等式を示せ．

$$\int_0^\infty F(t) dt = \iint_{D(0)} f(x, y) dxdy$$

(茨城大 2018)　　(m20181703)

0.103 i を虚数単位とするとき，以下の各問に答えよ．

(1) $x = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，複素数 $1 - e^{i2x}$ を $a + ib$ $(a, b$ は実数$)$ の形で答え，その絶対値を求めよ．

(2) 前問 (1) で得られた複素数 $a + ib$ を $re^{i\theta}$ の形で表せ．ただし，$r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(3) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，$1 - e^{i2x}$ の絶対値が $\sqrt{2}$ になるときの x を求めよ．

(茨城大 2020)　　(m20201707)

0.104 $-\pi \leqq x \leqq \pi$ で定義された関数 $f_n(x) \quad (n = 1, 2, 3)$ を考える．$f_i(x)$ と $f_j(x)$ との内積 $(f_i,\ f_j)$ を $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f_i(x) f_j(x) dx$ と定義するとき，$i,\ j$ をそれぞれ $1, 2, 3$ のいずれかとして，次の設問に答えよ．

(1) $f_1(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}x+1\right)$, $f_2(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}x-1\right)$ とすると，$(f_1,\ f_1) = (f_2,\ f_2) = 1$, $(f_1,\ f_2) = 0$ が成り立つことを示せ.

(2) $f_3(x) = ax^2 + b$ $(a,\ b$ は定数$)$ とするとき，$(f_1,\ f_3) = (f_2,\ f_3) = 0$, $(f_3,\ f_3) = 1$ となるような $a,\ b$ を求めよ.

(3) $f_i(-x) = Mf_i(x)$ のように，x を $-x$ と変換する操作を M と書く． M によってベクトル $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ はどのように変換されるか，その行列表現を求めよ.

(4) 直交行列 A によってベクトル $\boldsymbol{f}$ が，ベクトル $\boldsymbol{g} = A\boldsymbol{f}$ に移るとする．操作 M によって $\boldsymbol{g}$ がその定数倍になるような A と $\boldsymbol{g}$ を求めよ.

(山梨大 2017)　　(m20171802)

0.105 開区間 $(-\pi,\ \pi)$ において，実関数 $f(x)$ が微分可能であり，その導関数 $f'(x)$ が連続であるとする．このような $f(x)$ を用いて，a_n（但し，n は自然数）が次式で定義されているとき，以下の小問に答えよ.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

(1) $f(x) = \sin x$ のとき，微分の定義に従って，導関数 $f'(x)$ を導け.

(2) $f(x) = \sin 3x$ のとき，a_n を求めよ.

(3) $f(x) = x$ のとき，a_n を求めよ.

(山梨大 2018)　　(m20181801)

0.106 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq \pi\}$ とする．次の積分の値を求めよ． $\displaystyle\iint_D x^2\sin(x^2+y^2)dxdy$

(信州大 2007)　　(m20071903)

0.107 領域 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 < x < \dfrac{5}{6}\pi\ ,\ 0 < y < \dfrac{5}{6}\pi\right\}$ で定義された
2 変数関数 $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$ について，次の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $f_x(x, y)$ および $f_y(x, y)$ を求めよ． また，第 2 次偏導関数 $f_{xx}(x, y)$ ，$f_{xy}(x, y)$ および $f_{yy}(x, y)$ を求めよ.

(2) $f_x(x, y) = 0$ かつ $f_y(x, y) = 0$ を満たす領域 D 内の点 (x, y) をすべて求めよ.

(3) 関数 $f(x, y)$ の領域 D における極値を求めよ.

(信州大 2013)　　(m20131901)

0.108 次の極限を調べ，それが存在する場合は極限値を求め，存在しない場合はその理由を述べよ.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,\pi)} \frac{\cos xy}{x^2 + y^2 - 2}$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2 + y^2 + y^4}$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)^3 + y^3 - 1}{(x^2-1)^3 - y + 1}$

(信州大 2015)　　(m20151901)

0.109 平面内の領域 $D = \{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ で定義される 2 変数関数 $f(x, y)$ に対して，$\triangle f(x, y) = f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)$ と定める．また，$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ \ (r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とし，$z = f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，領域 D で $f(x, y)$ の 2 階までのすべての偏導関数が存在して，それらはすべて連続である．

(1) $z_r,\ z_\theta$ を $r,\ \theta,\ f_x,\ f_y$ を用いて表せ．

(2) $z_{rr} + \dfrac{1}{r} z_r + \dfrac{1}{r^2} z_{\theta\theta} = \triangle f$ を示せ．

(3) $f(x, y) = \dfrac{y^2}{x^2 + y^2} \log(x^2 + y^2)$ のとき，$\triangle f(x, y)$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする;

(信州大 2016)　　(m20161901)

0.110 2 変数関数 $f(x, y) = -\sin^3 x + 2\sin x \cos^2 y$ について，次の問いに答えよ．

(1) $D = \{(x, y) \mid 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi\}$ における $f(x, y)$ の極値を求めよ．

(2) $E = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \pi\}$ における $f(x, y)$ の最大値，最小値を求めよ．

(信州大 2018)　　(m20181901)

0.111 周期 2π の関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

と書かれた時，$f(x)$ はフーリエ級数展開されたという．一般に，係数 a_n, b_n は

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

として求められる．今，$f(x)$ が，区間 $-\pi < x \leq \pi$ で

$$f(x) = x$$

である時，フーリエ級数の係数 a_n, b_n を求めよ．

(新潟大 2001)　　(m20012010)

0.112 極座標表示の曲線 $C\ :\ r = 1 + \cos\theta\ \ \ (-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$ について，次の各問に答えよ．

(1) xy 座標で表したとき，x と y の最大値，最小値を求めよ．また，C の概形を描け．

(2) C で囲まれる図形の面積を求めよ．

(3) C の長さを求めよ．

(新潟大 2009)　　(m20092009)

0.113 座標平面において，曲線 $C : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ で囲まれた図形を F とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) F の概形をかけ．

(2) 媒介変数表示 $x = \cos^3\theta,\ y = \sin^3\theta\ \ \ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ を用いて，F の面積を求めよ．

(3) 媒介変数表示 $x = \cos^3\theta,\ y = \sin^3\theta\ \ \ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ を用いて，F の周りの長さを求めよ．

(新潟大 2012)　　(m20122016)

0.114 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, dx$ を求めよ．

(新潟大 2015)　　(m20152008)

0.115 等式 $\tan x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ で成り立つような定数 a_n のうち a_0 から a_5 までを求めよ.

(新潟大 2015) (m20152017)

0.116 行列 $\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値を求め，各固有値に対応する 2 つの固有ベクトルの交角 θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を示せ

(新潟大 2016) (m20162007)

0.117 自然数 n に対して，

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx\ , \qquad J_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx$$

とするとき，次の各問いに答えよ.

(1) 次の公式を利用して，$I_{n+2} = I_n$ を示せ.

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

(2) I_n を求めよ.

(3) 数列 $\{J_n\}$ が等差数列になることを示せ.

(4) J_n を求めよ.

(新潟大 2016) (m20162011)

0.118 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け. $\sqrt{2}\sin 2x - \sqrt{2}\sin x - 2\cos x + 1 < 0$

(新潟大 2019) (m20192009)

0.119 整数 $n \geqq 0$ に対して，$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ とする．次の各問いに答えよ.

(1) 自然数 n に対して $I_{2n-1} = \frac{(2^n \cdot n!)^2}{2n \cdot (2n)!}$，$I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$ であることを示せ.

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$ を求めよ. (3) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{\sqrt{n} \cdot (2n)!}$ を求めよ.

(新潟大 2019) (m20192014)

0.120 $0 \leqq x \leqq 2\pi,\ 0 \leqq y \leqq 2\pi$ における実数値関数 $f(x, y) = \sin^2 x - 3\sin(x+y)$ の最大値と最小値を求めよ. また，その時の (x, y) のすべての組を求めよ.

(新潟大 2019) (m20192016)

0.121 $D = \left\{(x, y) \,\middle|\, 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 1\right\}$ のとき，次の重積分の値を求めよ．積分順序を変更してもよい.

$$\iint_D \sin(\pi y^2) dxdy$$

(新潟大 2020) (m20202005)

0.122 $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲において x 軸に垂直な平面による切口が半径 $1 + \sin x$ の円で与えられる回転体の体積 V を求めよ．回転体は x 軸を中心に回転しているとする.

(新潟大 2022) (m20222008)

0.123 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{A}$ を対角化する行列 $\boldsymbol{P}$ のうち, $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となるものを求めよ.

ただし, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ とする. また, θ を求めよ. さらに, $\boldsymbol{P}$ を用いて $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ.

(3) 前問 (2) の条件において, $\mathbf{P}^6$ を求めよ.

(新潟大 2022) (m20222009)

0.124 変数変換 $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ $(a, b$ は正定数$)$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき, (x, y) の動く領域 D を図示せよ.

(2) ヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\, dxdy$ を求めよ.

(金沢大 2000) (m20002202)

0.125 $0 < x < \pi$ のとき

$$x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

となることを示せ.

(金沢大 2010) (m20102206)

0.126 実数 ℓ に対して, 連続関数 $f_\ell\ :\ (-\pi,\ \pi) \to \boldsymbol{R}$ を

$$f_\ell(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\sin \ell\theta}{\sin\theta} & (\theta \neq 0), \\ a & (\theta = 0) \end{cases}$$

と定める. 次の問いに答えよ.

(1) a を求めよ.

(2) f_ℓ は $\theta = 0$ で微分可能であることを示せ.

(3) 積分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_\ell(\theta)d\theta$ の値を $\ell = 2, 3$ の場合に求めよ.

(金沢大 2014) (m20142208)

0.127 (1) $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(-1 < x < 1)$ を示せ. ここで, $\sin^{-1} x$ は逆正弦関数を表す.

(2) 座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi)$$

に対するやコビ行列式 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

(3) 重積分

$$\iint_D \frac{y}{(x^2 + y^2)\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\, dxdy$$

を求めよ. ただし, $D = \left\{(x, y)\ \middle|\ \dfrac{1}{4} \leqq\ x^2 + y^2 \leqq \dfrac{3}{4},\ 0 \leqq\ y \leqq\ x\right\}$ とする.

(金沢大 2015) (m20152203)

0.128 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = xi + yj + zk$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 曲面 S の面要素を dS, dS に垂直な単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ として以下の問いに答えなさい.

(1) $\nabla \cdot \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ を計算しなさい. ただし $y \neq 0$ とする.

(2) 原点 O を含まない閉曲面 S に対して, 以下の面積分を求めなさい.

$$\iint_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3} dS$$

(3) 原点 O を含む半径 a の球面 S に対して, 次の式が成り立つことを示しなさい.

$$\iint_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3} dS = 4\pi$$

(4) (3) の関係式が, 原点 O を含む任意の閉曲面 S に対して成り立つことを示しなさい.

(金沢大 2015) (m20152210)

0.129 $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geq 2)$ を示せ.

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cos^5 x dx$ を求めよ.

(金沢大 2016) (m20162221)

0.130 x は $0 < x < 1$ を満たす実数とし, n は $n > 2$ を満たす整数とする.

(1) $f(x) = \sin^{-1} x$ の導関数を求めよ. ここで, $\sin^{-1} x$ は $\sin x$ の逆関数である.

(2) $\sqrt{1-x^2} < \sqrt{1-x^n} < 1$ を示せ.

(3) $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^n}} dx < \frac{\pi}{6}$ を示せ.

(金沢大 2016) (m20162222)

0.131 被積分関数に自然対数を含んでいる定積分

$$I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$$

の値が $0.18 < I < 0.28$ となることを確かめる. 次の問いに答えよ.

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき, 不等式

$$\frac{\log(1+x)}{1+x^2} \geqq \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)(1-x^2)$$

が成り立つことを示し, これを用いて $I \geqq \dfrac{11}{60}$ であることを導け.

(2) 2 つの等式

$$1 + \tan\theta = \frac{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\cos\theta} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

および

$$\int_0^{\pi/4} \log\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right\} d\theta = \int_0^{\pi/4} \log(\cos\theta) d\theta$$

がそれぞれ成り立つことを示し, これらを用いて定積分 I を計算せよ.

(3) $\pi < 3.2$ および $\log 2 < 0.7$ であることと問題 (1)(2) の結果を合わせて，
$0.18 < I < 0.28$ であることを確かめよ．

(金沢大 2019)　　(m20192202)

0.132 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)) = (\cos t,\ \sin t,\ t)$ で表される曲線を考える．

(a) $\boldsymbol{r}(t)$ での単位接線ベクトルを求めなさい．

(b) $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲で，この曲線に沿って線積分 $\displaystyle\int_C xy^2 ds$ を求めなさい．ただし ds は曲線の線素とする．

(金沢大 2021)　　(m20212213)

0.133 $x = a\cos\theta\,,\ y = b(1+\sin\theta)$ $(\pi \leq \theta \leq 2\pi\,,\ a, b$ は正の定数$)$ によって描かれる $x-y$ 平面上の曲線 S について，次の問いに答えよ．

(1) θ を消去して，x, y の関係式を導け．

(2) S のおおよその形を描け．

(3) y 軸（鉛直方向）を回転軸としてできる曲線 S の回転面を内壁とする容器 A に水を注ぐ，水位が $b/2$ のときの水量 V を求めよ．ここで，水位とは x 軸からの水面の高さをいう．

(4) 関数 $y = cx^2$ $(c > 0)$ の y 軸を回転軸としてできる回転体 B を，容器 A 内に入れたとき，(3) で注がれた水があふれないための c の条件を求めよ．

(富山大 2003)　　(m20032303)

0.134 次の計算をせよ．計算の概略も示すこと．

(1) $\displaystyle\int \arctan\frac{x}{2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^4 x - 6cos^6 x)\,dx$

(富山大 2015)　　(m20152306)

0.135 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \sin y,\ 0 \leq y \leq \pi\}$ のとき，二重積分 $\displaystyle\iint_D xdxdy$ の値を求めよ．

(富山大 2018)　　(m20182304)

0.136 θ の範囲が $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，次の式で定義される xy 平面上の曲線に囲まれる領域の面積を求めよ．

$$\begin{cases} x = 2\sin\theta \\ y = 2\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

(富山大 2020)　　(m20202303)

0.137 関数 $f(X) = \sqrt{3}\sin X + \cos X$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 関数 $f(X)$ の導関数 $f'(X)$ を求めなさい．

(2) 関数 $f(X)$ の区間 $0 \leq X \leq \pi$ における最大値 f_M と最小値 f_m を求めなさい．

(3) 関数 $f(X)$ の定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(X)dX$ を求めなさい．

(4) 関数 $f(X)$ の区間 $0 \leq X \leq \pi$ でのグラフの概略を示しなさい．

(福井大 2000)　　(m20002406)

0.138 (1) 次の定積分を示せ．m と n は整数とする．

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mxdx = 0\,,\ \int_0^{2\pi} \cos nxdx = 0$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0\,(m \neq n) \\ \pi\,(m = n) \end{cases}$

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0\,(m \neq n) \\ \pi\,(m = n) \end{cases}$

(2) $x(t)$ を周期 T の周期関数とするとき，$x(t)$ を次のように書くことができる．

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2\pi k}{T}t + b_k \sin\frac{2\pi k}{T}t\right)$$

このとき，(1) の知見を活用し，$a_k\,(k \geq 0)$, $b_k\,(k \geq 1)$ を $x(t)$ を用いて表せ．

(福井大 2003)　　(m20032417)

0.139 以下の積分 $I_1 \sim I_4$ を求めなさい.

$I_1 = \displaystyle\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx$　　　$I_2 = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx\ \sin nx dx$　$(m, n$ は正の整数)

$I_3 = \displaystyle\int x^2 \sin ax dx \quad (a \neq 0)$　　　$I_4 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \sin 2x dx$　(I_4は有効数字 2 桁で求めなさい.)

（福井大 2004）　　(m20042408)

0.140 半径 r の円の面積を積分により計算し, その値が πr^2 となることを証明しなさい.

（福井大 2004）　　(m20042409)

0.141 点 $P(x, y)$ は，時間 t の時，$x = a\cos(2\pi t)$, $y = a\sin(2\pi t)$ の位置にあるものとする．

(1) $a = e^{-t}$ とする時，$-1 \leq t \leq 1$ の範囲で，時間 t に対する a および x の描く図形のおよその形を示せ．

(2) $-1 \leq t \leq 1$ の範囲で，点 P の描く図形のおよその形を示せ．

(3) $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ をそれぞれ求めよ．　　(4) 点 P の時刻 t における速度を求めよ．

(福井大 2006)　　(m20062419)

0.142 関数 $y = e^{-x}\sin x$, $x \geq 0$ について以下の問いに答えよ.

(1) $0 \leq x \leq 4\pi$ の範囲で, この関数の概形を示せ. このとき $y = e^{-x}$ の概形も示せ.

(2) $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で, この関数のグラフと x 軸とに囲まれた部分の面積を求めよ.

(3) k を整数とする時, $k\pi \leq x \leq (k+1)\pi$ の範囲で, この関数のグラフと x 軸とに囲まれた部分の面積を求めよ.

(4) $x \geq 0$ の範囲で, グラフと x 軸との間に囲まれた面積の総和を求めよ.

(福井大 2008)　　(m20082418)

0.143 (1) 内径が a, 外径が b である球殻の体積を, 極座標系での 3 重積分を使って表し, その値を求めよ. ただし, 極座標 (r, θ, ϕ) は, 直角座標 (x, y, z) を使って,

$$x = r\sin\theta\cos\phi\,,\ y = r\sin\theta\sin\phi\,,\ z = r\cos\theta \quad (0 \leq r \leq \infty\,,\ 0 \leq \theta \leq \pi\,,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi)$$

で定義される.

(2) 楕円 $x^2 - xy + y^2 = 4$ の面積を求めよ.

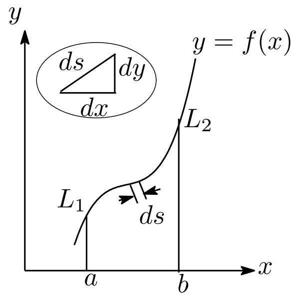
(福井大 2009)　　(m20092402)

0.144 次の各問にしたがって，半径 R の円の円周の長さを求めよ．

(1) 右の図のように，関数 $f(x)$ の L_1 から L_2 の長さは $\displaystyle\int_{L_1}^{L_2} ds$ で求めることができる．

$$\int_{L_1}^{L_2} ds = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

となることを導け．



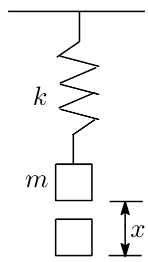
(2) 点 (x, y) と x 軸との間の角度を θ とすると，x および y を θ の関数で表せ．また，dy/dx を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_{L_1}^{L_2} ds = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ の積分の式を用いて，半径 R の円の円周の長さが $2\pi R$ となることを示せ．ただし，計算の途中過程も必ず示すこと．

(福井大 2011)　　(m20112404)

0.145 図のように，バネ定数が k で，質量を無視できるバネに，質量 m のおもりを吊り下げる．つりあった位置から，上下方向に振動させる時の変位を x とする．このとき，時間 t に対するおもりの運動は，次の運動方程式によって表現できる．

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$



(1) $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とおくとき，$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ は，上式の一般解であることを示せ．

(2) $m = 2.25(kg)$，$k = 4\pi^2(kg\cdot m/s^2/m)$ とするとき，おもりの振動の周期を求めなさい．

(3) $t = 0$ において，$x = 2(cm)$，$\dfrac{dx}{dt} = 0\ (cm/s)$ とするとき，定数 A, B の値を求め，3 秒間の変位と時間の関係のおよその形を示せ．

(福井大 2012)　　(m20122423)

0.146 累次積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left\{\int_x^{2x}\sin(x+y)dy\right\}dx$ の<u>積分順序を変更</u>して，積分の値を求めよ．
また<u>積分領域も図示</u>せよ．

(福井大 2013)　　(m20132410)

0.147 次の設問に答えなさい．

(1) プールの水面の高さ h が，時間 t に関し $k\dfrac{h}{b}A\,dt = -a\,dh$ を満足するように変化している．ただし k, a, b, A は定数である．$t = 0$ のとき $h = h_0$ ，$t = t_1$ のとき $h = h_1$ として，定数 k を求めなさい．

(2) 時間 t での位置 (x, y) が $(e^t\cos t,\ e^t\sin t)$ で与えられる動点 P がある．ただし $0 \leq t \leq 2\pi$ とする．

(a) $t = 0$ における位置を示せ．

(b) 座標 x の時間 t に関するグラフの概形を示せ．

(c) $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を求めよ．

(d) $0 \leq t \leq 2\pi$ での動点 P の移動距離を求めよ．

(福井大 2013)　　(m20132419)

0.148　以下の (1) および (2) の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}$　　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}$

(福井大 2014)　　(m20142417)

0.149　単振子の周期 T は，振子の長さを ℓ，重力の加速度を g とすれば，$T=2\pi\sqrt{\ell/g}$ で与えられる．ℓ，g が微小量 $\triangle\ell$，$\triangle g$ だけ変化するときの T の変化量を $\triangle T$ とするとき，$\triangle T$ が近似的に以下の式で表されることを示せ．

$$\frac{\triangle T}{T}=\frac{1}{2}\left(\frac{\triangle\ell}{\ell}-\frac{\triangle g}{g}\right)$$

(福井大 2015)　　(m20152405)

0.150　次の関数を微分せよ．

(1) $y=(x^2+2)^4$　　(2) $y=\sin(3x+\pi)$　　(3) $y=\sin x\cdot\cos^2 x$　　(4) $y=x^{2x}$

(福井大 2015)　　(m20152415)

0.151　関数 $y=e^{-x}\cos x,\quad 0\leq x\leq 2\pi$ について，以下の問に答えよ．

(1)　この関数の概形を示せ．

(2)　この関数と x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ．

(福井大 2015)　　(m20152417)

0.152　時間 t での位置が $(x=\cos t+t\sin t,\ y=\sin t-t\cos t)$ で与えられる動点 P がある．

(1)　$t=0$ における位置を求めよ．

(2)　$0\leq t\leq 2\pi$ での動点の軌跡の概形を示せ．

(3)　$\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を求めよ．

(4)　$0\leq t\leq 2\pi$ での動点 P の移動距離を求めよ．

(福井大 2015)　　(m20152418)

0.153　曲率 $\rho^{(注)}$ に関する以下の微分方程式について答えなさい．

$$y''=\rho(1+{y'}^2)^{\frac{1}{2}}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ただし，$y'=\dfrac{dy}{dx}$ とする．

(1)　$\dfrac{d\rho}{dx}$ を求めなさい．

(2)　円の方程式 $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ のとき，(1) の曲率 ρ に関する x の微分 $\dfrac{d\rho}{dx}$ が 0 となり，曲率 ρ は一定であることを示しなさい．

(3)　ρ を定数として，微分方程式 ① を解きなさい．必要であれば，以下の置換法 $y'=\nu=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いること．

（注）曲線上の各点において，その曲線の曲がりの程度を示す値．

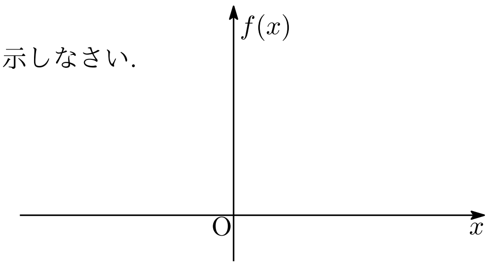
(福井大 2015)　　(m20152425)

0.154　平均 μ，分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ は，確率密度関数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

をもつ．

(1) $N(10,4)$ に従う確率変数 X の確率密度関数を図示しなさい．



(2) 確率変数 X が正規分布 $N(10,4)$ に従うとき，次の確率を求めなさい．
必要に応じて，別紙の標準正規分布表を用いなさい．

(i) $P[X>13]$ (ii) $P[8<X<12]$

(福井大 2015) (m20152426)

0.155 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin 3x| dx$ （必要であれば，変数変換 $3x=t$ を使用せよ.）

(福井大 2016) (m20162403)

0.156 テイラーの定理を使って，$f(x,y)=\sin xy$ を $(x-\pi/2)$ と $(y-1)$ の 2 次のベキまで展開せよ．

(福井大 2016) (m20162404)

0.157 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^2 (x^3+x^2+5x+3+4\pi\sin\pi x+e^{2x})dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^3\cos x dx$

(福井大 2018) (m20182426)

0.158 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle I=\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$ (2) $\displaystyle I=\int_0^{\infty} e^{-x}\sin x\,dx$

(福井大 2020) (m20202403)

0.159 非負の整数 n，および $-1 \leqq x \leqq 1$ を満たす任意の実数 x に対して，

$$T_n(x)=\cos nz,\quad \text{ただし，}\cos z = x \tag{1}$$

と定義する．式 (1) において，$n=0$ とおくと

$$T_0(x)=\cos 0 = 1 \tag{2}$$

となり，$n=1$ とおくと

$$T_1(x)=\cos z = x \tag{3}$$

となる．以下の問いに答えよ．

(a) 加法定理

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \tag{4}$$

を利用し，$T_2(x)$ を x の多項式として表せ．

(b) $T_n(x)$ は，$T_{n+1}(x)$ と $T_{n-1}(x)$ によって

$$T_n(x)=\frac{T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x)}{2x} \tag{5}$$

と表される．これを次のようにして証明したい．以下の下線部 (A)〜(C) を適当に埋めよ．

【証明】式 (1) の定義と式 (4) の加法定理を用いると

$$T_{n+1}(x) = \cos(nz + z) = \cos nz \cos z - \underline{\hspace{3cm}}\text{(A)} \tag{6}$$

$$T_{n-1}(x) = \cos(nz - z) = \underline{\hspace{6cm}}\text{(B)} \tag{7}$$

と書ける．式 (6) と式 (7) の各辺を加えると

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = \underline{\hspace{3.5cm}}\text{(C)} \tag{8}$$

が得られる．式 (8) の右辺を変形すると

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \tag{9}$$

となり，これより式 (5) が導きられる．

(c) 式 (5) に基づいて，$T_3(x)$ を x の多項式として表せ.

(d) $T_3(x)$ を用いて，$\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ の多項式として表せ.

(e) (d) の結果を利用して，次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta \tag{10}$$

ちなみに，$T_n(x)$ は第一種チェビシェフ多項式と呼ばれ，cos の n 倍角の公式の導出やチェビシェフ展開に基づく関数の近似表現等に利用される有名な多項式である.

(福井大 2020)　　(m20202422)

0.160　次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^e x^2 \log x dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 2x dx$

(福井大 2020)　　(m20202425)

0.161　次式で表される曲線（サイクロイド）と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ.

$$x = 2(t - \sin t)$$
$$y = 2(1 - \cos t)$$
ここで，$0 \leq t \leq 2\pi$

(福井大 2021)　　(m20212422)

0.162　次の関数を微分せよ.

(1) $y = \log\left(5\sqrt{x^2+1} + 5x\right)$　　(2) $y = \dfrac{-e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(3) $y = \cos\dfrac{5\pi}{x^2+5}$　　(4) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(福井大 2022)　　(m20222401)

0.163　次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^2 e^{2x}\sqrt{e^x}\ dx$　　(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\ dx$

(福井大 2022)　　(m20222403)

0.164　$f(x) = 4\sin x \cdot \cos 2x + \cos x \cdot \sin 2x\ \ (0 \leq x \leq \pi)$ の最大値を求めよ.

(福井大 2022)　　(m20222404)

0.165　次の積分の値を計算せよ.

$$\iint_D \sin(x+y)\cos(x-y)dxdy\ , \qquad D = \left\{(x,\ y)\ \middle|\ 0 \leq x+y \leq \frac{\pi}{2}\ ,\ 0 \leq x-y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

(福井大 2022)　　(m20222416)

0.166 基本周期が 2π である関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開を考える．以下の問いに答えよ．

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \left(0<x\leq\dfrac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{\pi}{2}<x\leq\dfrac{3\pi}{2}\right) \\ 1 & \left(\dfrac{3\pi}{2}<x\leq 2\pi\right) \end{cases}$$

(1) 以下の積分を計算せよ．

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\ dx \quad (n\neq 0)$$

(2) 以下の積分を計算せよ．

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\ dx \quad (n\neq 0)$$

(3) 基本周期が 2π である関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開を求めよ．

(福井大 2022)　　(m20222423)

0.167 半径 a の球面の xyz 座標を媒介変数 $(\theta,\ \phi)$ で

$$\boldsymbol{r}=(x,y,z)=(a\sin\theta\cos\phi,\ a\sin\theta\sin\phi,\ a\cos\theta)$$

と表す．ただし，$0\leq\theta\leq\pi$, $0\leq\phi\leq 2\pi$ である．以下の問いに答えよ．

(1) 以下のベクトル積

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\phi}$$

を求めよ．また，これは何を表すか答えよ．

(2) 次の積分を求め，何を表すか答えよ．

$$\iint_D \left|\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\phi}\right|\right| d\theta d\phi$$

ただし，$||\cdot||$ はベクトルの長さを表し，領域 D は $\theta,\ \phi$ の動く範囲，すなわち $D=\{(\theta,\ \phi\mid 0\leq\theta\leq\pi,\ 0\leq\phi\leq 2\pi)\}$ である．

(3) 球面の x 座標 $x=a\sin\theta\cos\phi$ に対して，次の積分を求めよ．

$$\iint_D x\left|\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\phi}\right|\right| d\theta d\phi$$

(福井大 2022)　　(m20222427)

0.168 平面 π : $ax+2y-z=6$ と直線 l : $\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z+2}{7}$ について以下の問いに答えよ．

(1) π と l が平行となるように a の値を定めよ．

(2) 平面 π 内にあって直線 l と平行で l に最も近い直線 m の式を求めよ．

(3) 2 直線 l, m の距離を求めよ．

(静岡大 2008)　　(m20082504)

0.169 次の極限値を求めなさい．

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x\sin(x)-\frac{\pi}{2}}{\cos(x)}\right)$　　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2}\right)$

(静岡大 2015)　　(m20152501)

0.170 関数 $f(x)=\cos(ax)\cos(bx)$ の第 n 次導関数は

$$f^{(n)}(x)=\frac{(a+b)^n}{2}\cos\left((a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{(a-b)^n}{2}\cos\left((a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

となることを示しなさい.

(静岡大 2015) (m20152502)

0.171 次の微分方程式を解け.

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=\cos t$$

ただし，$t=0$ のとき，$y=e^{2\pi}+e^{\pi}+0.1$ であり，$t=\pi$ のとき，$y=1.9$ である.

(岐阜大 1998) (m19982601)

0.172 xyz 空間における平面 $\pi: x+2y+3z-5=0$ および直線 $g: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-5}=\dfrac{z+3}{2}$ について，次の問に答えよ.

(1) 平面 π の単位法線ベクトルを求めよ.

(2) 直線 g の単位方向ベクトルを求めよ.

(3) 平面 π と直線 g の交点の座標を求めよ.

（岐阜大 2004） (m20042605)

0.173 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int\cos(2\pi x)dx$ (2) $\displaystyle\int\cos^2(2\pi x)dx$

(岐阜大 2006) (m20062615)

0.174 コンピュータのグラフィックディスプレイに (x,y) 座標系の原点を中心とする半径 r の円を描くことを考える．このとき，半径 r の円は，x 軸となす角 θ（反時計回りを正方向とする）をパラメータとして

$$\begin{cases} x=\boxed{\quad（ア）\quad} \\ y=\boxed{\quad（イ）\quad} \end{cases}$$

と表現できるから，円を n 等分して，$\Delta\theta=2\pi/n$ より $\Delta\theta$ を求め，

$\theta_0=0,\ x_0=r,\ y_0=0$

$\theta_{i+1}=\theta_i+\Delta\theta \quad (i=0,1,2,\cdots,n-1)$

として，

$$\begin{cases} x_{i+1}=\boxed{\quad（ウ）\quad} \\ y_{i+1}=\boxed{\quad（エ）\quad} \end{cases}$$

より，次々と点の座標 (x_0,y_0), (x_1,y_1), $\cdots$,(x_n,y_n) を求め，これらの 2 点間を順次，直線で結んでいけば円を描くことができる．上記の（ア）～（エ）に入る式を答えよ．ただし,（ウ）,（エ）については，r,θ_i,θ_{i+1} は使わない形で答えよ．

(岐阜大 2006) (m20062622)

0.175 $X=\{x : |x|\leq\pi,\ x\in\boldsymbol{R}\}$, $Y=\{y : |y|\leq 1,\ y\in\boldsymbol{R}\}$ とする． 以下で定義する写像 f について (1),(2) に答えなさい．ただし，$\boldsymbol{R}$ は実数全体の集合を表すものとする.

$$f : X\to Y\ ,\quad x\mapsto\sin x\ .$$

(1) f が単射であるか否かを理由と共に答えなさい.

(2) f が全射であるか否かを理由と共に答えなさい.

(岐阜大 2008)　　(m20082609)

0.176 $y(x)$ を未知関数とする, 次の常微分方程式 (A) について, 以下の問いに答えよ.

$$y'(x) - \tan(x)\, y(x) = 2e^{2\sin(x)} \ , \qquad -\pi/2 < x < \pi/2 \tag{A}$$

(1) $y(x; y_0)$ を初期条件 $y(0) = y_0$ を満たす微分方程式 (A) の解とするとき, $y(x; y_0)$ を求めよ. ただし, y_0 は実数とする.

(2) (1) の解 $y(x; y_0)$ について, 極限 $\displaystyle\lim_{x \to -\pi/2} y(x; y_0)$ が有限な値となるような初期値 y_0 はあるか. もしもあるなら, そのときの初期値 y_0 と $\displaystyle\lim_{x \to -\pi/2} y(x; y_0)$ を求めよ. また, もしもないのであれば, その理由を述べよ.

(岐阜大 2010)　　(m20102605)

0.177 $0 \leqq x \leqq \pi$ で定義された関数 $f(x)$ が以下のように与えられている.

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ & \\ -1 & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi\right) \end{cases}$$

$f(x)$ を $g(x)$ で近似するとき，近似誤差 I は以下の積分と考えるものとする.

$$I = \int_0^{\pi} \big(f(x) - g(x)\big)^2\, dx$$

(1) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\, dx$ を計算せよ.

(2) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} (\cos x)^2\, dx$ を計算せよ.

(3) 定数 a を用いて，$g(x) = a \cdot \cos x$ で近似するとき，誤差 I を計算せよ.

(4) $g(x) = a \cdot \cos x$ で近似するとき，誤差 I を最小にする a を計算せよ.

公式 $\cos a \cdot \cos b = \dfrac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$ を利用してもよい.

(豊橋技科大 1997)　　(m19972705)

0.178 直線上を運動する点 P の出発してから t 秒後の位置が，$x = e^{-\pi t} \cos \pi t$ で表されるとき，出発してから 3 秒後の速度を求めよ.

(豊橋技科大 1998)　　(m19982704)

0.179 以下に示す関数について次の各問に答えよ.

$$f(x) = \cos x + x \sin x$$

(1) 関数 $f(x)$ を微分せよ.

(2) $[-2\pi\,,\, 2\pi]$ の区間における関数 $f(x)$ の極値を求め，増減表を作成せよ．また，この関数の概形を描け.

(3) $[-2\pi\,,\, 0]$ および $[0\,,\, 2\pi]$ の区間における関数 $f(x)$ のそれぞれの最小点を結ぶ，直線の式 $g(x)$ を求めよ．そして，この直線 $g(x)$ と関数 $f(x)$ で囲まれる領域の面積を求めよ.

(豊橋技科大 2001)　　(m20012706)

0.180 xy 直交座標系の点列 (x_i, y_i) , $i = 1, \cdots, N$ に対し，各点からの垂直距離の 2 乗和が最小となるような直線を求めたい．次の各問いに答えよ.

(1) 次の文章中の空欄 $\boxed{\quad ア \quad}$〜$\boxed{\quad コ \quad}$ に適当な数式を入れよ．

各点に単位質量を置いたときの重心を G とすると，その座標は

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\quad ア \quad} \\ \boxed{\quad イ \quad} \end{pmatrix} \tag{1}$$

となる．xy 座標系に対し，この重心 G を原点として，角度 θ で回転させた uv 座標系を考える．このとき

$$\begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \tag{2}$$

とおけば，(x_i, y_i) と (u_i, v_i) との関係は θ を用いて

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\quad ウ \quad} & \boxed{\quad エ \quad} \\ -\boxed{\quad エ \quad} & \boxed{\quad ウ \quad} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \end{pmatrix} \tag{3}$$

で与えられる．もし求めたい直線を u 軸にとれば，問題は

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^{N} v_i^2 \tag{4}$$

で定義される $J(\theta)$ を最小にする角度 θ を求めることに等しい．

式 (3) の v_i を θ で微分し，u_i を用いて表すと

$$\frac{\partial v_i}{\partial \theta} = \boxed{\quad オ \quad} \tag{5}$$

となるから，式 (4) を θ で微分して 0 とおけば

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = -2\sum_{i=1}^{N} u_i v_i = 0 \tag{6}$$

を得る．この式 (6) に，式 (3) を代入することにより，

$$\boxed{\quad カ \quad}\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i' = \boxed{\quad キ \quad}\sum_{i=1}^{N}({x_i'}^2 - {y_i'}^2) \tag{7}$$

となり，次式を得る．

$$\frac{2\boxed{\quad キ \quad}}{\boxed{\quad カ \quad}} = \frac{2\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i'}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N}({x_i'}^2 - {y_i'}^2)} \tag{8}$$

式 (8) の左辺は，倍角の公式により

$$\frac{2\boxed{\quad キ \quad}}{\boxed{\quad カ \quad}} = \boxed{\quad ク \quad} \tag{9}$$

と書けるから，式 (8) は

$$\boxed{\quad ク \quad} = \frac{2\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i'}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N}({x_i'}^2 - {y_i'}^2)} \tag{10}$$

となる．よって，式 (10) の右辺を計算して，式 (4) を最小化する θ を求めればよい．

式 (4) を最小化する θ を $\hat{\theta}$ とし，求めたい直線が重心 G を通ることを用いれば，直線の式は

$$y = \tan\hat{\theta}\left(x - \boxed{\quad ケ \quad}\right) + \boxed{\quad コ \quad} \tag{11}$$

として与えられる．

(2) 4 点 $(-1, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$ があるとする．

(a) これらの 4 点に単位質量を置いたときの重心 G の座標を求めよ．

(b) これらの 4 点に関し，$\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i'$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} {x_i'}^2$ および $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} {y_i'}^2$ を求めよ．

(c) これらの 4 点からの垂直距離の 2 乗和が最小となる直線の傾き θ を求めよ．ただし，分数は既約分数とし，三角関数およびその逆関数はそのままでよい（例：$\cos\dfrac{7}{4}\pi$ や $\sin^{-1}\dfrac{1}{3}$ など）．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062710)

0.181　次の関数を微分せよ．

$$f(x) = \frac{1}{\tan x} \quad (x \neq n\pi,\ n \text{ は整数})$$

(豊橋技科大 2012)　　(m20122704)

0.182　次の不定積分を求めよ．

$$\int e^x \cos \pi x dx$$

(豊橋技科大 2013)　　(m20132702)

0.183　xy 平面上の曲線 $y = \cos(x - \pi) + 1$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ と直線 $y = 0$ に囲まれた図形 D について，次の問いに答えよ．

(1)　D の面積 S を求めよ．

(2)　D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

(3)　D を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_2 を求めよ．

(豊橋技科大 2017)　　(m20172705)

0.184　xy 平面上の二つの曲線 $y = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と $y = -\sin 2x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ とで囲まれる領域 R がある．以下の問いに答えよ．

(1)　曲線 $y = \sin x$ と曲線 $y = -\sin 2x$ の交点を $0 < x < \pi$ の範囲で求めよ．

(2)　領域 R を図示せよ．

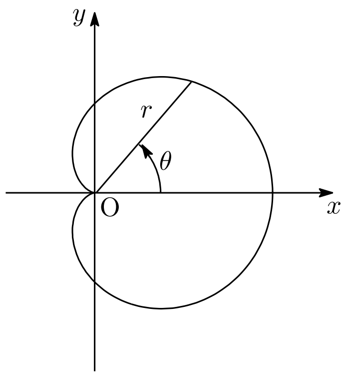
(3)　領域 R の面積 S を求めよ．．

(4)　曲線 $y = \sin x$ と 曲線 $y = |\sin 2x|$ の交点を $0 < x < \pi$ の範囲で求めよ．

(5)　領域 R を x 軸を中心として 1 回転させて得られる回転体の体積 V を求めよ．

(豊橋技科大 2018)　　(m20182704)

0.185　極方程式 $r = 1 + \cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ で表される曲線について，以下の問いに答えよ．



(1)　曲線上の点の座標 (x, y) を，θ を用いて表せ．

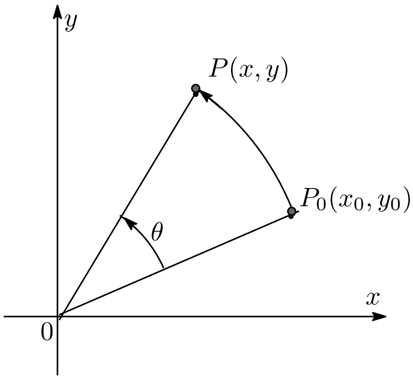
(2)　曲線上の $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ における点を P とする．点 P における曲線の接線の方程式を，x と y を用いて表せ．

(3)　曲線に囲まれた領域の面積を求めよ．

(4) 曲線の全長を求めよ．

(豊橋技科大 2020)　　(m20202703)

0.186 図のように，xy 平面上の点 $P_0(x_0, y_0)$ を原点 O のまわりに θ だけ回転した点 $P(x, y)$ に移す座標変換は次の線形変換により表される．また，このときの変換行列を $A(\theta)$ と定義する．以下の設問に答えよ．



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) xy 平面上の点を x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍する変換行列 B を a と b を用いて表せ．

(2) xy 平面上の点を原点 O のまわりに $(-\theta)$ 回転し，その後 x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍し，最後に原点 O のまわりに θ 回転する線形変換を考える．このときの変換行列 C を a, b, $\cos\theta$ および $\sin\theta$ を用いて表せ．

(3) 次に示す変換行列 D の固有値を求め，それぞれの固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルをすべて求めよ．

$$D = \begin{pmatrix} \dfrac{11}{4} & \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{4} & \dfrac{9}{4} \end{pmatrix}$$

(4) 変換行列 C が変換行列 D に等しいとき，a, b および θ の値を求めよ．ただし，θ は $0 \leq \theta \leq \pi/2$ の範囲にあるとする．

(豊橋技科大 2021)　　(m20212701)

0.187 $n = 1, 2, 3$ に対して，次のように定める関数 $A_n(x)$ と定積分 B_n がある．以下の設問に答えよ．

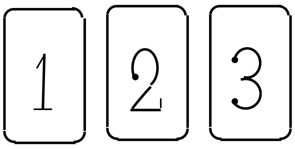
$$A_1(x) = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad A_2(x) = \sin x, \quad A_3(x) = \sin^3 x \quad (\pi/3 \leq x \leq \pi/2)$$

$$B_n = \int_{\pi/3}^{\pi/2} A_n(x)dx$$

(1) $\pi/3 < x_0 < \pi/2$ のとき，$A_1(x_0)$, $A_2(x_0)$, $A_3(x_0)$ を値の小さい方から順に並べよ．

(2) 定積分 B_1, B_2, B_3 をそれぞれ求めよ．

(3) 図のように，3 枚のカードに 1 から 3 までの数字が 1 つずつ書かれている． この 3 枚のカードの中から無作為にカードを 1 枚選び，そのカードに書かれている数字を n とする．この操作を 2 度行うとき，少なくとも 1 度は $B_n > 1/2$ となる数字 n が書かれているカードを選ぶ確率を求めよ．ただし，1 度目の操作後に選んだカードは元に戻し，2 度目でも 1 度目と同じ操作を行うものとする．



(豊橋技科大 2021)　　(m20212705)

0.188 関数 $f(x,y)=(2y^2+3y-2)\sin\bigl((2x+y)\pi\bigr)$ について答えよ.

(1) 偏導関数 $f_x,\ f_y$ をそれぞれ求めよ.

(2) $0\leqq x\leqq 1,\ \ 0\leqq y\leqq 1$ において, $f_x(x,\ y)=f_y(x,\ y)=0$ をみたす点 $(x,\ y)$ をすべて求めよ.

(豊橋技科大 2023)　　(m20232702)

0.189 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D y\sin(x+y)dxdy,\quad D=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ x+y\leqq\pi,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xydxdy,\quad D=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ \left|x-\frac{1}{\sqrt{3}}y\right|\leqq 1,\ \left|x+\frac{1}{\sqrt{3}}y\right|\leqq 2\right\}$

(豊橋技科大 2023)　　(m20232703)

0.190 (1) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{6x^2+2x}{x^3+3x^2-x-3}\,dx$ を求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1\pi(x^3+x)\cos\left\{\frac{\pi}{4}(x^2+1)\right\}dx$ を求めよ.

(名古屋大 2006)　　(m20062803)

0.191 次のサイクロイド曲線に対して, 以下の問いに答えよ.

$$\left\{\begin{array}{l} x=a(\theta-\sin\theta)\\ y=a(1-\cos\theta)\end{array}\right.\qquad(a>0,\ 0\leq\theta\leq 2\pi)$$

(1) 曲線の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(2) $\theta=\pi$ における接線の方程式を求めよ.

(3) 曲線を x 軸のまわりに回転させるときにできる立体の体積を求めよ. なお, 次の公式を用いてもよい.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\,\dfrac{\pi}{2} & (n:\text{偶数})\\[2ex] \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n:\text{奇数})\end{array}\right.$$

ただし, $n!!=\left\{\begin{array}{ll} n(n-2)(n-4)\cdots 2 & (n:\text{偶数})\\ n(n-2)(n-4)\cdots 1 & (n:\text{奇数})\end{array}\right.$

(名古屋大 2008)　　(m20082802)

0.192 次式 (n は整数) で示される関数のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} -\dfrac{1}{2} & (2n-1)\pi<x\leqq\ 2n\pi\\ \ \ 1 & 2n\pi<x\leqq\ (2n+1)\pi\end{array}\right.$$

(名古屋大 2016)　　(m20162803)

0.193 互いに直交する三つの単位ベクトル $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ による正規直交座標系において,

曲線 C を $\boldsymbol{r}(t)=\cos t\,\boldsymbol{i}+\sin t\,\boldsymbol{j}+2t\,\boldsymbol{k}\quad(0\leqq t\leqq\pi)$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{r}(t)$ および $\boldsymbol{k}$ に直交する単位ベクトル $\boldsymbol{u}(t)$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{k}$ および設問 (1) で求めた $\boldsymbol{u}(t)$ の三つのベクトルに囲まれる 4 面体の体積を求めよ．

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{F}(x,\ y,\ z) = x\ \boldsymbol{i} + y\ \boldsymbol{j} + z\cos z\ \boldsymbol{k}$ を考える．ベクトル場 $\boldsymbol{F}(x,\ y,\ z)$ の曲線 C 上の線積分を求めよ．

(名古屋大 2022)　　(m20222802)

0.194 (1) $x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ の最大値を求めよ．

(2) (1) を利用して，π^e と e^π の大小関係を調べよ．

(名古屋工業大 2007)　　(m20072901)

0.195 関数 $f(x,y) = \cos x + \cos y + \cos(x-y)$ について，3 点

$$\text{(i)}\ (x,y) = (0,0)\ ,\qquad \text{(ii)}\ (x,y) = \left(\frac{2\pi}{3},\ -\frac{2\pi}{3}\right)\ ,\qquad \text{(iii)}\ (x,y) = (\pi,0)$$

は，$f_x(x,y) = 0$, $f_y(x,y) = 0$ を満たす．このとき各点で $f(x,y)$ が極値を取るかどうかを判定せよ．また，極値を取る場合には極値を求めよ．

(名古屋工業大 2018)　　(m20182903)

0.196 区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ で定義された 2 つの関数 $s_1(x), s_2(x)$ が次の性質をもつとしょう．

$$\int_{-\pi}^{\pi}\{s_1(x)\}^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi}\{s_2(x)\}^2 dx = 1\ ,\quad \int_{-\pi}^{\pi} s_1(x)s_2(x)dx = 0$$

(1) 定積分 $f(a,b) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{x - as_1(x) - bs_2(x)\}^2 dx$ を最小にする a, b を与える表式を求めなさい．(定積分の形になる．)

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{x - a\sin x - b\sin 2x\}^2 dx$ を最小にする a, b の値を求めなさい．

(三重大 2002)　　(m20023112)

0.197 xy 平面上の曲線 $r = (1+\cos\theta)$ の概形を描け．またこの曲線の全長を求めよ．ただし r は動径，θ は r が x 軸となす角で $-\pi \leq \theta \leq \pi$ とする．　(三重大 2012)　　(m20123110)

0.198 3 次元直交座標系の xyz 空間に点 A(0, 1, 1)，点 B($-a$, 0, 1)，点 C($a\cos t$, $a\sin t$, 0) がある．ただし，a は正の実数で，$0 \leqq t < 2\pi$ である．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $\angle ACB = \theta$, $t = \pi$ とした場合，$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ となる a を求めなさい．

(2) (1) の条件において，$\triangle ABC$ の面積を求めなさい．

(3) $\triangle ABC$ の重心を G とする．点 C について t を変化させたとすると，$\overrightarrow{AG}$ と $\overrightarrow{AC}$ が垂直となるような a がただ一つ決まる場合の $\cos t$ と $\sin t$ を求めよ．

(三重大 2016)　　(m20163102)

0.199 xy 平面上のサイクロイドは，θ をパラメータとして

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

で与えられる．ただし，a は正の定数である．この曲線の $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ 部分の長さを求めよ．

(三重大 2016)　　(m20163114)

0.200 次の不定積分，定積分を求めよ．（e は自然対数の底である.）

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+1}dx =$　　(2) $\displaystyle\int xe^{-x}dx =$

(3) $\displaystyle\int_1^2 (x-1)(x-2)dx =$　　(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx =$

(三重大 2020)　　(m20203102)

0.201 次の積分を求めよ．ただし，a は実定数である．

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \exp(-ax)dx \qquad (a \neq 0)$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi+a}^{\pi+a} \sin(mx)\sin(nx)\,dx \qquad (m, n$ は正の整数)

(奈良女子大 2012)　　(m20123202)

0.202 次の積分を求めよ．ただし，a は正の定数，n は正の整数である．

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} r^3 \exp\bigl(-ar^2\bigr)\,dr\ 2$　　(1) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^n x\, \cos x\, dx$

(奈良女子大 2015)　　(m20153202)

0.203 (1) 次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{5x-4}{2x^2+x-6}dx$$

(2) 自然数 m, n に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\, \sin nx\, dx = \begin{cases} \pi & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

(奈良女子大 2016)　　(m20163202)

0.204 正の実数 a に対して，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ が成り立つことを利用して，

定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-1)^2 e^{-a(x^2-2x)}dx$ を計算せよ．

(奈良女子大 2016)　　(m20163206)

0.205 与えられた条件の下で，以下の関数を微分せよ．

(1) $y = xe^x$

(2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$ ，(σおよび m は正の定数)

(3) $y = \sin^{-1} x$　(x のとりうる値は $\left[-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right]$ を満たす範囲のみとする)

(奈良女子大 2018)　　(m20183204)

0.206 2 次元の xy 平面内の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ に関する以下の問いに答えよ．

ただし，$a > b > 0$ であり，また楕円の離心率を

$$\tilde{e} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

とする．

(1) 楕円の周囲の長さ L は
$$L = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\tilde{e}^2\cos^2\theta}\, d\theta$$
で与えられることを示せ.

(2) 離心率 $\tilde{e}$ が 1 より十分小さいとき，長さ L は近似的に
$$L = 2\pi a\left(1-\frac{1}{4}\tilde{e}^2\right)$$
となることを示せ.

(奈良女子大 2022) (m20223207)

0.207 関数 $r = a(1+\cos\theta)$ が領域 $A\{-\pi \le \theta \le \pi\}$ で定義されている．以下の問いに答えよ.

(1) この閉曲線の長さ L を求めよ.

(2) この閉曲線に囲まれた面積 S を求めよ.

(京都大 1998) (m19983302)

0.208 関数 $f(z)$ は $z=a$ において m 位の極 (m は正の整数) をもつとする.
$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = \lim_{z\to a}\frac{1}{(m-1)!}\,\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big((z-a)^m f(z)\Big)$$
を証明せよ．ただし，C は $z=a$ を囲む適当なサイズの単純閉曲線である.

(京都大 2002) (m20023306)

0.209 t を実変数とし，複素数平面上において $z=-1$ を内部に含む単純閉曲線を C とするとき，以下の積分を求めよ.
$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{ze^{tz}}{(z+1)^3}\,dz$$

(京都大 2008) (m20083307)

0.210 R^2 に直交座標系 $O-xy$ をとり，次式で定義される曲線 C を考える.
$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta + b\cos 2\theta \\ y &= a\sin\theta + b\sin 2\theta \end{aligned} \qquad (0 \le \theta \le 2\pi)$$
ここに，$a,\ b$ は正の数であり，$a \ne b$ を満たすものとする．このとき問 (1)〜(3) に答えよ.

(1) $\Phi(\theta)$ は，次式を満たす連続関数であるとする.
$$(a\cos\theta + b\cos 2\theta)\tan\Phi(\theta) = a\sin\theta + b\sin 2\theta \qquad (0 \le \theta \le 2\pi)$$
このとき，$\dfrac{d\Phi}{d\theta}$ を θ の関数として求めよ.

(2) $a=2,\ b=1$ のとき，C の概形を描け．また $\Phi(0)=0$ であるとき，$\Phi(2\pi)$ を求めよ.

(3) $a=2,\ b=1$ のとき，次の積分を求めよ.
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2+b^2+2ab\cos\theta}$$

(京都大 2014) (m20143306)

0.211 実数のパラメータ θ に依存する行列 $A(\theta)$ が
$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{2}{3}\cos^2\theta & -\dfrac{2}{3}\cos\theta\sin\theta \\ -\dfrac{2}{3}\cos\theta\sin\theta & 1-\dfrac{2}{3}\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

で与えられている．$\mathbb{R}^2$ の点 $\boldsymbol{x}$ をデカルト座標系 $O-x_1x_2$ を用いて $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2)$ と表す．これらを用いて，集合 $\Omega(\theta)$ を

$$\Omega(\theta)=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\cdot A(\theta)\}\boldsymbol{x}\leq 1\}$$

と定義する．ここに，$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2$ に対して

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{2}x_iy_i$$

である．このとき，次の (1)〜(4) に答えよ．

(1) $A(\theta)$ のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化して単位ベクトルとせよ．

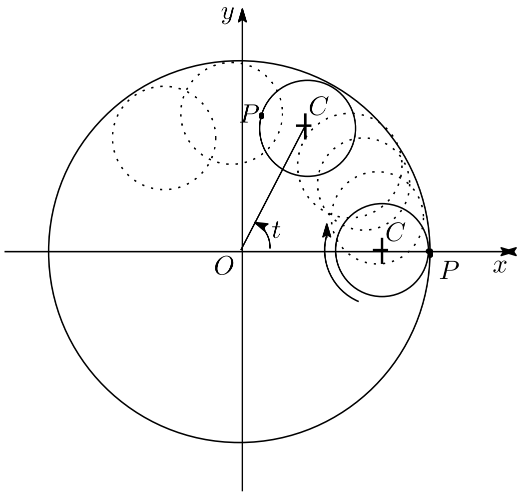
(2) $\Omega(\theta)$ の概形を描け．

(3) $\Omega(0)\cap\Omega(\pi/2)$ の面積を求めよ．

(4) $\displaystyle\bigcup_{0\leq\theta\leq\pi/2}\Omega(\theta)$ を図示し，その面積を求めよ．ここに，$\boldsymbol{x}\in\displaystyle\bigcup_{0\leq\theta\leq\pi/2}\Omega(\theta)$ とは，$0\leq\theta_0\leq\pi/2$ なる θ_0 があって，$\boldsymbol{x}\in\Omega(\theta_0)$ となることである．

(京都大 2015)　　(m20153305)

0.212 原点を中心とした半径 a の大円がある．大円の中に半径 $a/4$ の小円があり，初期状態において座標 $(a,0)$ にある点 P で大円に内接している．　小円が大円に内接したまま時計回りに回転すると，小円は反時計回りに大円の内側を移動する．　点 P は小円の移動と回転に従って移動する．大円と小円の接触点では滑りは生じないものとする．　このとき，(1)〜(6) に答えよ．



(1) 原点 O と小円の中心 C を結ぶ線分と x 軸が成す角が t のとき，　点 P の座標 (x_p,y_p) を t で表せ，ただし，$0<t<\pi/2$ とする．

(2) 点 P の軌跡のうち第 1 象限の部分 $(0<t<\pi/2)$ の曲線の方程式を求めよ．

(3) 小円が大円の中を一周して元の位置に戻るまでに点 P が描く軌跡 M を解答用紙に作図せよ．

(4) 軌跡 M の全長を求めよ．

(5) 軌跡 M で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(6) 軌跡 M のうち，$0<t<\pi/2$ における接線が x 軸および y 軸によって切り取られる線分の長さを求めよ．

(京都大 2016)　　(m20163302)

0.213 e_1, e_2 を，n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の単位ベクトルとし，両者がなす角 θ は $0 < \theta < \pi/2$ をみたすものとする．e_1 によって張られる $\mathbb{R}^n$ の 1 次元部分空間を L_1，e_2 によって張られる $\mathbb{R}^n$ の 1 次元部分空間を L_2 とし，$\mathbb{R}^n$ から L_1, L_2 への正射影をあらわす線形変換をそれぞれ P_1, P_2 とする．問 1 〜問 4 に答えよ．

問 1 P_1 の固有値を，重複度を含めてすべて答えよ．また，0 でない固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

問 2 $P_1 + P_2$ の固有値を，重複度を含めてすべて答えよ．また，0 でない固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

問 3 $P_1 - P_2$ は，$\pm\sin\theta$ を固有値としてもつことを示せ．

問 4 $P_1 - P_2$ の固有値 $\sin\theta$ に対応する固有ベクトルを，e_1 とのなす角 α が $\pi/2$ より小さくなるようにとったとき，$\alpha = \pi/4 - \theta/2$ であることを示せ．

(京都大 2018)　　(m20183303)

0.214 (1) 次の微分方程式の一般解を，定数 C を用いて求めよ．

(イ) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 + y - 6$

(ロ) $\dfrac{dy}{dx} = 2 + \dfrac{y}{x} + e^{-\frac{y}{x}}$

(ハ) $\left(\dfrac{3}{x} + \dfrac{y}{x^2}\right) dx + \left(3y - \dfrac{1}{x}\right) dy = 0$

(2) 次の微分方程式の一般解を，定数 C を用いて求めよ．
なお，積分因子は $\sin x$ である．

$$(2\sin y\cos x - 2)\,dx + \cos y\sin x\,dy = 0 \qquad (0 < x < \pi)$$

(京都大 2022)　　(m20223301)

0.215 xy 平面の領域

$$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; \frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq x^2\right\}$$

に対して，重積分 $\displaystyle\iint_D \sin\left(\frac{y}{x}\right) dxdy$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2010)　　(m20103404)

0.216 xy 平面上の図形 D : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\quad (0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq r \leqq e^{\theta})$ に対して，

重積分 $\displaystyle\iint_D 1dxdy$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2013)　　(m20133404)

0.217 (1) 関数 $f(x) = x^2$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ を

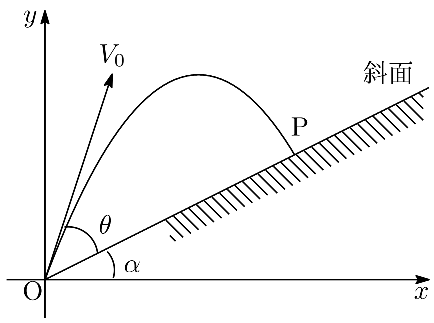
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$$

とフーリエ級数展開したとき，$a_n (n \geqq 0)$, $b_n (n \geqq 1)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ を示せ．

(大阪大 2002)　　(m20023506)

0.218 右図のように水平面と α $(0 < \alpha < \pi/2)$ の角をなす斜面において，初速度 V_0 で斜面に対して θ $(\theta > 0,\ 0 < \alpha + \theta < \pi/2)$ の方向に物体を投げる．以下の問いに答えよ．



(1) 物体の軌跡の x および y 座標は時間 t を媒介変数とするとき，

$$x = V_0 t\cos(\alpha+\theta)$$
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t\sin(\alpha+\theta)$$

で与えられる．ただし，g は重力加速度である．斜面上の到達距離 OP を求めよ．

(2) 到達距離が最大となる投射角度 θ およびその時の到達距離 OP を求めよ．

(大阪大 2004)　　(m20043503)

0.219 閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上で定義された，1 階連続微分可能（1 階導関数が存在して連続）な奇関数 $f(t)$ が与えられている．

(1) 実数列 $\{a_k\}$ を次のように定める：　$a_k := \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\ dt,\quad k = 1, 2, \cdots.$

このとき　$\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = 0$　を示しなさい．また　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2 < \infty$　であることを示しなさい．

(2) 上記 (1) で定めた実数列 $\{a_k\}$ に対して，　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2$　が成立したとすると，

$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t) - \sum_{k=1}^{N} a_k \sin kt\right|^2 dt = 0$　となることを示しなさい．また，この逆も成立することを示しなさい．

(大阪大 2006)　　(m20063510)

0.220 (1) 空間上の直交座標 (x, y, z) を極座標 (r, θ, φ) ：

$x = r\sin\theta\cos\varphi,\quad y = r\sin\theta\sin\varphi,\quad z = r\cos\theta\quad (r > 0,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi)$

に変換するとき，そのヤコビアン（関数行列式）を計算しなさい．

(2) 広義積分　$I(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} dx\,dy\,dz$

について，$\alpha = \dfrac{1}{2}$ のときの値 $I\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めなさい．

(3) $I(\alpha)$ が収束する α の範囲を求めなさい．

(4) 広義積分　$J(\alpha,\ \beta) = \displaystyle\iiint_B \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha \mid \log(x^2+y^2+z^2) \mid^\beta} dx\,dy\,dz$

が収束するような $\alpha,\ \beta$ の満たすべき条件を求めなさい．

ただし，$B = \left\{(x, y, z)\ :\ x^2+y^2+z^2 < \dfrac{1}{4}\right\}$.

(大阪大 2007)　　(m20073506)

0.221 (1) 関数 $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ を　$f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx)$　とフーリエ級数に展開したとき，a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, b_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$　を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ を示せ．

(大阪大 2007)　　(m20073511)

0.222 $|a| < 1$ とする．以下の式を示せ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a^n \cos nx + a^2 \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx = 2a\cos x \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx$
ただし $\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos nx \cos x$ を用いよ．

(2) $\displaystyle 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx = \frac{1-a^2}{1-2a\cos x + a^2}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{1-2a\cos x + a^2}\,dx = \frac{\pi a^n}{1-a^2}$

(大阪大 2008)　　(m20083506)

0.223 自然数 n に対して

$$I_n(t) = \frac{1}{\pi^n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\dfrac{t}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+{x_k}^2\right)}\,dx_1\cdots dx_n \quad (t \in \mathbb{R})$$

とおく．

(1) 留数定理を用いて $I_1(t)$ を求めよ．

(2) $I_n(t)$ を求めよ．

(大阪大 2009)　　(m20093506)

0.224 閉区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x\sin x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

と定義する．

(1) $f(x)$ のフーリエ係数

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を求めよ．

(2) (1) で求めた a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ に対して，

$$\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2 = \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ．

(大阪大 2009)　　(m20093507)

0.225 正の値をとる確率変数 X が確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} x^{-1} \exp\left\{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (x > 0\,,\ \mu \in \mathbb{R}\,,\ \sigma^2 > 0)$$

をもつとし，$Y = \log X$ とする．

(1) $n = 1, 2, \cdots$ に対して，Y^n の期待値を $g_n = E[Y^n]$ とする．このとき，

$$g_{n+2} = \mu g_{n+1} + (n+1)\sigma^2 g_n$$

が成り立つことを示せ.

(2) $n = 1, 2, \cdots$ のとき，$E[(Y-\mu)^n]$ を求めよ.

(大阪大 2009)　　(m20093508)

0.226 関数 f を, 実軸上で定義された周期 1 の連続微分可能な実数値関数とする. この f に対して $\hat{f}(k)$ を

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 e^{-2\pi ikt} f(t)\, dt$$

と定義する. このとき, 複素数 z に対して

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} \hat{f}(k) \bar{z}^{|k|}$$

とおく.

(1) 任意の $r \in (0, 1)$ に対して, $u(z)$ は $|z| \leq r$ で絶対かつ一様収束することを示せ.

(2) $u = u(z)$ は実数値関数で, $z = x + iy$ とするとき,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

となることを示せ.

(3) 任意の $r \in (0, 1)$ に対して, $z = re^{2\pi i\theta}$ とするとき,

$$u(z) = \int_0^1 f(t) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(2\pi(\theta - t)) + r^2}\, dt$$

となることを示せ.

(大阪大 2010)　　(m20103509)

0.227 n が整数全体を動くとして, 級数が絶対収束する数列 $\{\alpha_n\}$ と $\{\beta_n\}$ を考える.
すなわち $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|$ と $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\beta_n|$ が収束するとする. これらの数列を用いて関数 $f,\ g$ を

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{2\pi inx}$$

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{2\pi inx}$$

とフーリエ展開する.

(1) $p(x) = f(x)g(x)$ を $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi inx}$ の形にフーリエ展開したときのフーリエ係数 c_n を求めよ.

(2) $q(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x-s)g(s)\, ds$ を $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{2\pi inx}$ の形にフーリエ展開したときのフーリエ係数 d_n を求めよ.

(大阪大 2010)　　(m20103510)

0.228 実数を成分に持つ, 対称かつ正定値な n 次正方行列を B とする. その (i,j) 成分を B_{ij} と書くことにする. n 次元実ベクトルを $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$, $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$ と表し, その内積を $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$ と定める（ ^{t} は転置を表す）. 行列 B の行列式を $\det B$, 逆行列を B^{-1} と表すことにする.

(1) 任意の実数 s と $b > 0$ に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ts} e^{-\frac{t^2}{2b}}\, dt = e^{\frac{bs^2}{2}}$$

(2) 任意の n 次元実ベクトル $\boldsymbol{y}$ に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det B}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\ dx_1\, dx_2\, \cdots\, dx_n = e^{\frac{1}{2}(B\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}$$

(3) $1 \leqq\ j, k \leqq\ n$ に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det B}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_j x_k e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\ dx_1\, dx_2\, \cdots\, dx_n = B_{jk}$$

(4) n 次正方行列 A に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det B}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\ dx_1\, dx_2\, \cdots\, dx_n = \mathrm{Tr}(AB)$$

ここで, $\mathrm{Tr}(AB)$ は行列 AB の対角成分の和を表す.

(大阪大 2010)　　(m20103511)

0.229 複素数 z に関する方程式

$$z^4 + (1-a^2)|z|^4 - a^2\overline{z}^4 = 0 \quad (*)$$

について以下の問いに答えよ．ただし，$|z|$ は z の絶対値，$\overline{z}$ は z の共役複素数を表す．また，a は ± 1 以外の実数とする．

(1) 恒等式 $|z|^2 = z\overline{z}$ が成り立つことを示せ.

(2) 方程式 $(*)$ の解を $z = x + iy$（ i は虚数単位，x, y は実数 ）と表すとき，x と y が満たす関係式を求めよ．

(3) 方程式 $(*)$ の $z = 0$ 以外の解のうち，任意の 2 つの解を $z_1,\ z_2$ とするとき，$\arg(z_2) - \arg(z_1)$ が取りうる値を $-\pi \leq \arg(z_2) - \arg(z_1) < \pi$ の範囲ですべて求めよ．ただし，$\arg(z_1),\ \arg(z_2)$ はそれぞれ $z_1,\ z_2$ の偏角を表す.

(4) $\dfrac{z_2}{z_1}$ は実数または純虚数となることを示せ.

(大阪大 2011)　　(m20113503)

0.230 (1) 以下を示せ.

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z}{z^2+1} e^{iz} dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z}{z^2-1} e^{iz} dz = 0$$

ただし，正の実数 R に対し

$$\Gamma_R = \{Re^{i\theta}\, \big|\, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

であり，積分の向きは反時計回りにとるものとする.

(2) 積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1} \sin x\, dx$$

の値を求めよ.

(3) 積分

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2-1} \sin x \, dx$$

の値を求めよ．

(大阪大 2013)　　(m20133506)

0.231 $\{f_k(x)\}_{k=1.2.\cdots}$ を閉区間 $I(\subset \mathbb{R})$ で定義された実数値連続関数の列とする．二つの条件を考える．

$$\text{条件 1}: \quad \sum_{k=1}^{\infty} \Big| f_k(x) \Big| < \infty, \qquad x \in I$$

$$\text{条件 2}: \quad \max_{x \in I} \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \to 0 \qquad (m, n \to \infty)$$

条件 1 が満たされるとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は I において絶対収束するという．条件 2 が満たされるとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は I において一様収束するという．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = |x| \quad (x \in [-\pi,\ \pi])$ のフーリエ級数

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

を求めよ．

(2) (1) で求めた級数 $s(x)$ が $[-\pi, \pi]$ において絶対収束することを示せ．

(3) (1) で求めた級数 $s(x)$ が $[-\pi, \pi]$ において一様収束することを示せ．

(大阪大 2014)　　(m20143506)

0.232 ベクトル $\boldsymbol{p} = (p_x,\ p_y,\ p_z)$, $\boldsymbol{q} = (q_x,\ q_y,\ q_z)$ に対して，$\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ の内積，外積をそれぞれ $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}$ と表す．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x,\ A_y,\ A_z)$, $\boldsymbol{B} = (B_x,\ B_y,\ B_z)$, $\boldsymbol{C} = (C_x,\ C_y,\ C_z)$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B)$$

(2) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (4,3,5)$, $\boldsymbol{b} = (3,1,4)$, $\boldsymbol{c} = (8,3,2)$ が作る平行六面体の体積を求めよ．

(3) 空間内に直交座標系をとる．$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ をそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルとする．

$$\boldsymbol{e}_r = \cos u \, \cos v \, \boldsymbol{i} + \sin u \, \cos v \, \boldsymbol{j} + \sin v \, \boldsymbol{k}$$

とおく．正の定数 R に対して，原点を中心とした半径 R の球面 S は，次の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ で表せる．

$$\boldsymbol{r} = R\mathbf{e}_r, \quad 0 \leqq u \leqq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqq v \leqq \frac{\pi}{2}$$

球面 S 上の各点 P における外向き法線ベクトルが，点 P の位置ベクトルと同じ向きをもつように S の向きを定める．このとき，ベクトル $\boldsymbol{F} = \dfrac{u}{R}\boldsymbol{e}_r$ に対して，S における次の面積分を求めよ．

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot dS$$

(大阪大 2015)　　(m20153503)

0.233 以下のの問いに答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位であり，a, b は $a > b > 0$ を満たす定数とする．

(1) 次の式で表される曲線 C を複素平面上に図示せよ．

$$C : z = z(t) = a\ \cos t + i\, b\ \sin t \qquad (0 \leqq\ t \leqq\ 2\pi)$$

(2) (1) で与えられた曲線 C に沿う次の積分の値を求めよ．

$$\int_C \frac{1}{z} dx$$

(3) 次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt$$

(大阪大 2015)　　(m20153504)

0.234 (1) 複素変数 z の関数 $f(z) = \overline{z}$ は正則であるか否かを判定せよ．ただし，$\overline{z}$ は z の複素共役とする．

(2) $a > b > 0$ となる実定数 a, b において，積分 $\quad I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\cos t} \quad$ の値を求めよ．

(3) 複素平面 C から 1 点 α だけを除いた領域 $D(\alpha) = C - \{\alpha\}$ において，複素変数 z の関数 $g(z) = 1/(z - \alpha)$ の原始関数を求めよ．もし存在しないならばその理由を述べよ．

(大阪大 2016)　　(m20163505)

0.235 (1) α は整数でない実数とする．$\cos(\alpha x)$ $(-\pi < x < \pi)$ をフーリエ級数展開せよ．すなわち

$$\cos(\alpha x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big\}, \qquad -\pi < x < \pi$$

を満たす

$$a_n\ , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$
$$b_n\ , \quad n = 1, 2, \cdots$$

を求めよ．

(2) y は $\sin y \neq 0$ を満たす実数とする．(1) の結果を利用して

$$\frac{1}{\sin y} = \frac{1}{y} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{y + n\pi} + \frac{1}{y - n\pi} \right\}$$

が成立することを示せ．

(大阪大 2016)　　(m20163506)

0.236 関数 $x(t)$, $y(t)$ に関する次の連立微分方程式について，以下の問いに答えよ．

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 2y + \cos 2t \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{array} \right.$$

(1) $x(t)$ および $y(t)$ の一般解を求めよ．

(2) 初期条件 $x(0) = y(0) = 0$ として $x(t)$ と $y(t)$ を求めよ．

(3) $t \to \infty$ において $x(t)$ が $A\cos(\omega t + \theta)$ なる関数形に漸近することを示し，その時の A, ω, θ の値を求めよ．ただし，A, ω, θ は実数であり，$A > 0$, $\omega > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ とする．また，θ は逆三角関数を用いて表しても構わない．

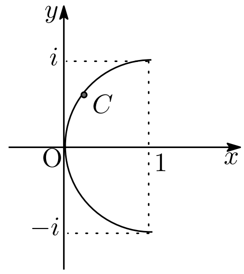
(大阪大 2016)　　(m20163509)

0.237 複素数 $z = x + iy$, $w = u + iv$ について以下の問いに答えよ．ただし，x, y, u, v は実数，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{e^{2\pi z}-1}{z-i}$

(2) 複素関数 $w=f(z)=\dfrac{z-1}{z-i}$ により，z 平面上の図形 $|z-1|<\sqrt{2}$ は，w 平面上でどのような図形に写されるかを図示せよ．

(3) 右図に示す通り，$z=1$ を中心とする単位円の左半分に沿った $z=1-i$ から $z=1+i$ に至るまでの曲線を経路 C とするとき，$\displaystyle\int_C\frac{1}{z^2-2z-3}dz$ を求めよ．



(大阪大 2017)　　(m20173504)

0.238 (1) 実 2 変数の実数値関数 $u(x,y)$ と $v(x,y)$ に対して，複素変数 z の関数 f を

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)\qquad(z=x+iy)$$

で定める．$f(0)=0$ かつ

$$v(x,y)=ye^x\cos y+(x+1)e^x\sin y$$

であるとき，f が複素平面上で正則となる $u(x,y)$ を求めよ．

(2) $0<a<1$ とする．積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1-a\cos\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta$ の値を求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193509)

0.239 (1) 次の (1-1),(1-2) で与えられる，周期 2π の関数のフーリエ級数をそれぞれ求めよ． すなわち，$f(x)$ が連続な点で

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\}$$

が成り立つような

$$a_n\quad(n=0,1,2,\cdots),$$
$$b_n\quad(n=1,2,\cdots)$$

をそれぞれ求めよ．

(1-1) $f(x)=\cos^2 x+\cos x$

(1-2) $f(x)=x\quad(-\pi<x\leqq\pi)\ ,\qquad f(x+2\pi)=f(x)$

(2) (1) の結果を利用して，等式

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

を示せ.

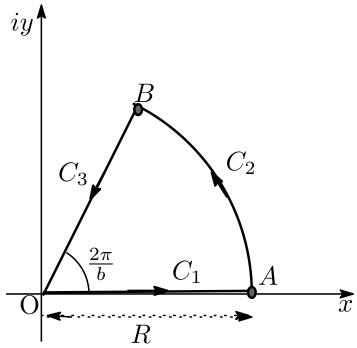
(大阪大 2019)　　(m20193510)

0.240 積分 $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{x^b+1}dx$ を考える．ただし，b は正の整数とする．この積分を計算するため，右下図に示す複素平面上の扇形の周に沿う単位閉曲線 C を考え，以下の図のように経路 C_1, C_2, C_3 を定める． ただし，x, y は実数で，AB は原点を中心とする半径 R $(R>1)$ で中心角が $\dfrac{2\pi}{b}$ の円弧である．

C_1 ：原点 O から線分 OA に沿って点 A に至る経路

C_2 ：点 A から円弧 AB に沿って点 B に至る経路

C_3 ：点 B から線分 BO に沿って原点 O に至る経路



このとき，複素数 $z = x + iy$ について以下の問に答えよ．
ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) $I_3 = \displaystyle\int_{C_3} \frac{1}{z^b+1} dz$ を，$I_1 = \displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z^b+1} dz$ を用いて表せ．

(2) 閉曲線 C で囲まれた領域内における $f(z) = \dfrac{1}{z^b+1}$ の特異点を求め，そこでの留数を計算せよ．

(3) 留数定理および $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} \frac{1}{z^b+1} dz = 0$ を用いて，I を計算せよ．ただし，i を用いずに表せ．

(大阪大 2020)　　(m20203503)

0.241　原点を中心とした半径 r $(r \neq 0)$ の球面 S は媒介変数 u, v（ラジアン単位）を用いて，

$$\boldsymbol{r}\big(= \boldsymbol{r}(u,\ v)\big) = r\,\boldsymbol{i}_r = r\cos u\cos v\ \boldsymbol{i}_x + r\sin u\cos v\ \boldsymbol{i}_y + r\sin v\ \boldsymbol{i}_z$$

$$(0 \leqq u \leqq 2\pi,\ -\pi/2 \leqq v \leqq \pi/2)$$

と表すことができる．ここで，$\boldsymbol{i}_x$, $\boldsymbol{i}_y$, $\boldsymbol{i}_z$ は x, y, z 座標のそれぞれの基本ベクトルであり，$\boldsymbol{i}_r$ は $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトルである．

(1) $\dfrac{\partial r}{\partial u} \times \dfrac{\partial r}{\partial v}$ を r, $\boldsymbol{i}_r$, v で表せ．

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{R} = \dfrac{u^2}{r}\boldsymbol{i}_r$ とするとき，$\boldsymbol{R}$ の球面 S に沿う面積分，

$$\iint_S \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}\, dS$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の外向きの単位法線ベクトルとする．

(大阪大 2021)　　(m20213502)

0.242　2 変数関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

で定める．ここで，関数 $\theta = \tan^{-1} s$ は，関数

$$s = \tan\theta \quad \left\{-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$$

の逆関数である．2 変数関数 $g(x,y)$ を

$$g(x,y) = h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) e^{f(x,y)}$$

で定める．ここで，関数 $h(r)$ は区間 $(0,\infty)$ を定義域とし，区間 $(0,\infty)$ において 1 回微分可能とする．
以下の問いに答えよ．

(1) 2 変数関数 $p(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ の x についての偏導関数 $p_x(x,y)$ を求めよ．

(2) 2 変数関数 $q(x,y) = e^{f(x,y)}$ の x についての偏導関数 $q_x(x,y)$ と y についての偏導関数 $q_y(x,y)$ を求めよ．

(3) $g(x,y)$ の定義域において，等式

$$-yg_x(x,y)+xg_y(x,y)-h'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)e^{f(x,y)}=0$$

が成り立っているとする． ここで，$g_x(x,y)$ は $g(x,y)$ の x についての偏導関数，$g_y(x,y)$ は $g(x,y)$ の y についての偏導関数，$h'(r)$ は $h(r)$ の導関数を表す． $h(1)=1$ を満たす $h(r)$ を求めよ．

(大阪大 2021) (m20213506)

0.243 $0 \leqq \theta < 2\pi,\ 0 \leqq \phi < 2\pi$ とする．3 次の正方行列 $A,\ B$ を次式で定義し，$C=AB$ とする．

$$A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}$$

なお，虚数単位は $i\ (=\sqrt{-1})$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 行列 C の行列式の値を求めよ．

(2) 行列 C のすべての固有値およびそれらの絶対値を求めよ．

(大阪大 2022) (m20223506)

0.244 $x,\ y$ は次のような変数 θ の関数である．

$$x=a(\theta-\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta) \qquad (a>0,\ 0\leqq\theta\leqq\ 2\pi)$$

2 次元直交座標系 $(x,\ y)$ において，$x,\ y$ が表す曲線（サイクロイド）と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めなさい．

(大阪府立大 2010) (m20103613)

0.245 関数 $X(r,\theta)=r\cos\theta$，$Y(r,\theta)=r\sin\theta$ の定義域はいずれも $D=(0,\infty)\times\ (-\pi,\pi)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 2 つの集合

$$A=\left\{\big(X(r,\theta_0),Y(r,\theta_0)\big)\,|\,r\in(0,\infty)\right\},\ B=\left\{\big(X(r_0,\theta),Y(r_0,\theta)\big)\,|\,\theta\in(-\pi,\pi)\right\}$$

を 1 つの座標平面上に図示せよ．ただし，$\theta_0\in(-\pi,\pi)$，$r_0\in(0,\infty)$ は定数である．

(2) 行列 $J(r,\theta)=\begin{pmatrix} X_r(r,\theta) & Y_r(r,\theta) \\ X_\theta(r,\theta) & Y_\theta(r,\theta) \end{pmatrix}$ とその行列式 $|J(r,\theta)|$ を求めよ．ただし，

$$X_r=\frac{\partial X}{\partial r},\ Y_r=\frac{\partial Y}{\partial r},\ X_\theta=\frac{\partial X}{\partial \theta},\ Y_\theta=\frac{\partial X}{\partial \theta}$$

である．

(3) 2 つのベクトル $\big(X_r(r,\theta),Y_r(r,\theta)\big)$，$\big(X_\theta(r,\theta),Y_\theta(r,\theta)\big)$ が直交することを示せ．

(大阪府立大 2011) (m20113602)

0.246 非負の整数 n に対して

$$S_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx$$

とおく．このとき，各問に答えよ．

(1) $n\geqq 2$ に対して等式 $S_n=\dfrac{n-1}{n}S_{n-2}$ を示し，n の偶奇で場合分けをして，S_n の値を求めよ．

(2) 比 $\dfrac{S_{2n}}{S_{2n-1}}$ を考え，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n}}{S_{2n-1}}$ の値を求めることで，次を示せ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}$$

(大阪府立大 2018)　　(m20183604)

0.247 留数を用いて，次の定積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{5-3\sin\theta}d\theta$

(大阪府立大 2019)　　(m20193603)

0.248 周期 2π の関数 $f(x)=x \quad (-\pi<x\leq\pi)$ のフーリエ級数を求めよ．

(大阪府立大 2019)　　(m20193604)

0.249 ℓ,m,n を自然数として，次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{\ell\to\infty}\left(1-\frac{1}{\ell}\right)^{2\ell}$

(2) x が有理数であるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty}\{\cos(m!\pi x)\}^{2n}\right]$

(3) x が無理数であるとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}\{\cos(m!\pi x)\}^{2n}\right]$

(大阪府立大 2019)　　(m20193605)

0.250 パラメータ表示の曲線 $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t)\end{cases}$ 　$0\leqq t\leqq 2\pi$ 　の長さを求めよ．

(関西大 2003)　　(m20033702)

0.251 次の重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D xdxdy,$ 　　$D:\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\leq 1$，$x\geq 0$，$y\geq 0$，ただし，$a,b>0$

(2) $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)dxdy,$ 　　D は 3 直線 $x=0, y=0, x+y=\pi/2$ で囲まれる三角形の内部

(3) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy,$ 　　$D:x^2+y^2\leq a^2$

(神戸大 2003)　　(m20033806)

0.252 $r:[a,b]\longrightarrow \boldsymbol{R}^+$ を連続微分可能な関数とし，$(x,y)-$ 平面上の曲線 $x=r(\theta)\cos\theta$，$y=r(\theta)\sin\theta$，$a\leq\theta\leq b$ を α とする．ここで $0\leq a\leq b\leq\pi/2$．曲線 α 上の各点と原点を結ぶ線分から出来る扇形領域の面積を $\mathcal{A}$，α の長さを $\mathcal{L}$ とするとき

$$\mathcal{A}=\int_a^b f(r)d\theta\ ,\qquad \mathcal{L}=\int_a^b g(r,r')d\theta$$

となる $f(r)$ と $g(r,r')$ を与えよ．さらに $r(\theta)=1/\cos\theta$ の場合の $\mathcal{A}$ または $\mathcal{L}$ の上記公式を用いて

$$\int_0^{\pi/3}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\sqrt{3}$$

を説明せよ．

(神戸大 2006)　　(m20063804)

0.253 $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ とおく．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $n=1,2,\cdots$ に対して，A^n を求めよ．（答えのみでよい）．

(2) $S_n = I + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^k A^k}{k!}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

(神戸大 2009) (m20093806)

0.254 x, y 実数とし，

$$f(x,y) = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) $f_x(x,y),\ f_y(x,y)$ を求めよ.

(2) 曲線 $z = f(x,y)$ の, 点 $(1,1,\pi/4)$ における接平面と法線の方程式を求めよ.

(3) $f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)$ を求めよ.

(神戸大 2010) (m20103804)

0.255 次の重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x+y)^2 \sin(\pi\,|x-y|)dxdy\ ,\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, |x+y| \leq 1,\ |x-y| \leq 1\}.$

(2) $\displaystyle\iint_D \log(1+x^2+y^2)dxdy\ ,\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x+y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}.$

(神戸大 2011) (m20113806)

0.256 $D_0(x) \equiv 1,\ D_n(x) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2\cos kx\ (n \geq 1)\ ,\ \ F_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x)\ (n \geq 0)$ で $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{D_n\}$ と $\{F_n\}$ を定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $D_n(x)\sin\dfrac{x}{2} = \sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x$ となることを示せ.

(2) $F_n(x)\sin^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2(n+1)}\Big\{1-\cos(n+1)x\Big\} = \dfrac{1}{n+1}\sin^2\dfrac{n+1}{2}x$ となることを示せ.

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)dy = 2\pi$ となることを示せ.

(4) $0 < \delta < \pi$ なる δ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\delta\leq|y|\leq\pi} F_n(y)dy = 0$ となることを示せ.

(神戸大 2016) (m20163805)

0.257 xy 平面上に 4 点 $P=(0,\pi),\ Q=(\pi,0),\ R=(2\pi,\pi),\ S=(\pi,2\pi)$ をとり，四辺形 $PQRS$ で囲まれた領域（周上の点も含む）を D とする．関数 $f(x,y) = \cos x + \sin y$ について以下の各問に答えよ．

(1) D の内部における $f(x,y)$ の極値を調べよ.
（ここで，D の内部とは D から周上の点を除いた領域である.）

(2) D における $f(x,y)$ の最大値と最小値を求めよ.

(神戸大 2016) (m20163808)

0.258 xy 平面上の 4 点 $P=(1,0),\ Q=(3,0),\ R=(1,2\pi),\ S=(3,2\pi)$ を頂点とする長方形で囲まれた（境界以上の点も含む）領域を D とする．関数 $f(x,y) = (4x-x^2)(\sin y+2)$ を考える．以下の各問に答えよ.

(1) D の内部における $f(x,y)$ の極値を求めよ．ただし，D の内部とは D から D の境界上の点を除いた領域である.

(2) D における $f(x,y)$ の最大値と最小値を求めよ．

(神戸大 2019)　　(m20193803)

0.259 (1) xy 平面上の領域

$$D = \left\{(x,y) \mid x^2 + (y-1)^2 \leq 1\right\}$$

が極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$ によって対応する θr 平面上の領域を E とする．D と E を図示せよ．

(2) xyz 空間内の領域 $A,\ B$ を次のように定める．

$$A = \left\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad 0 \leq z\right\}$$

$$B = \left\{(x,y,z) \mid x^2 + (y-1)^2 \leq 1\right\}$$

A と B の共通部分の体積を求めよ．

(神戸大 2020)　　(m20203804)

0.260 次の関数の与えられた領域における最大値と対応する座標を求めよ．

(1) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x + 1} + \sin x\ , \quad 0 \leq x \leq \pi\ .$

(2) $g(x,y) = -x^2 - x - y^2\ , \quad - \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\ .$

(鳥取大 2008)　　(m20083903)

0.261 実数 x に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}$ を求めよ．

(岡山大 2003)　　(m20034002)

0.262 (1) 座標平面上の点を直線 $y = ax$（a は実数）に関して対称な点に移す一次変換を考える．
$a = \tan\dfrac{\theta}{2}\ (-\pi < \theta < \pi)$ とおくとき, この一次変換を表す行列 A を θ を用いて表せ.

(2) 2 次直交行列 B の行列式が -1 であるとき, B の表す一次変換はある直線に関して対称な点を対応させる変換であることを示せ.

(岡山大 2010)　　(m20104004)

0.263 (1) $y = \dfrac{\log x}{x}\ \ (x > 0)$ のグラフを描け．

(2) 3^π と π^3 はどちらが大きいか，理由を付けて答えよ．

(岡山大 2011)　　(m20114001)

0.264 $|x| \neq 1$ なる実数 x に対して

$$f(x) = \int_0^\pi \log(1 - 2x\cos t + x^2)dt$$

で関数 $f(x)$ を定義する．次の各問いに答えよ．

(1) $f(x) = f(-x)$ を示せ．

(2) $f(x) + f(-x) = f(x^2)$ を示せ．

(3) $x \neq 0$ のとき，$f(x) = 2\pi\log|x| + f(\frac{1}{x})$ を示せ．

(4) $|x| < 1$ のとき，$f(x)$ を求めよ．

(5) $|x| > 1$ のとき，$f(x)$ を求めよ．

(岡山大 2012)　　(m20124002)

0.265 関数 $a_{m,n}(x)$ $(m, n \in \mathbb{N})$ を

$$a_{m,n}(x) = \cos^{2n}(m!\pi x)$$

とし，関数 $g_m(x)$ $(m \in \mathbb{N})$ および $f(x)$ を

$$g_m(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{1 + a_{m,n}(x)}$$

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} g_m(x)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) x が無理数のとき $g_m(x)$ を求めよ．

(2) x が有理数のとき $f(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ は $x = 0$ で連続であることを示せ．

(4) $f(x)$ は $x = 0$ で微分不可能であることを示せ．

(岡山大 2013) (m20134001)

0.266 (1) 整式 $x^4(1-x)^4$ を整式 $1 + x^2$ で割った商と余りを求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}$ を求めよ．

(3) 不等式 $\pi < \dfrac{22}{7}$ を示せ．

(4) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$x(1-x) \leqq \dfrac{1}{4}$ が成り立つことを用いて，不等式 $\pi > \dfrac{22}{7} \cdot \dfrac{1024}{1025}$ を示せ．

(岡山大 2014) (m20144002)

0.267 関数 $f_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ を

$$f_n(x) = c_n \left(\frac{1 + \cos x}{2}\right)^n$$

で定める．ただし，c_n は正の定数で

$$\int_0^\pi f_n(x)dx = 1$$

となるように選ぶ．以下の問いに答えよ．

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos x}{2}\right)^n \sin x dx$$

を求めよ．

(2) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $c_n < \dfrac{n+1}{2}$ が成り立つことを示せ．

(3) $0 < x \leqq \pi$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．

(岡山大 2016) (m20164001)

0.268 (1) 次の積分を計算せよ．ただし，n, m は自然数である．

$$\int_{-1}^1 x \sin n\pi x dx \qquad \int_{-1}^1 \sin n\pi x \sin m\pi x dx$$

(2) 次の等式を示せ．

$$\int_{-1}^1 \left\{x - \sum_{k=1}^n \frac{2(-1)^{k-1}}{k\pi} \sin k\pi x\right\}^2 dx = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

(広島大 2001) (m20014102)

0.269 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ．ただし，a は実数とする．

(1) 行列 A の階数を求めよ．

(2) 三つの平面

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \quad x - y + z = 0 \\ \pi_2 &: \quad 2x + y - 4z = 0 \\ \pi_3 &: \quad x + 2y + az = 0 \end{aligned}$$

の交点全体はどのような図形になるかを述べ，その理由を説明せよ．

(3) $a = -5$ のとき，A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(広島大 2006) (m20064104)

0.270 2 次の実正方行列全体のなすベクトル空間を V とし，その任意の元 A, B に対して

$$(A, B) = \mathrm{tr}\left({}^tAB\right),$$

とおく．ただし，${}^tA$ は A の転置行列とし，$\mathrm{tr}\, C$ は行列 C のトレースとする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) (A, B) は内積であることを示せ．

(2) A と B が

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

で与えられているとき，(A, B) を求め，さらに A と B のなす角 θ を求めよ．

ただし，$0 \leqq \alpha - \beta \leqq \pi$ とする．

(3) (2) で定義した A に対して，線形写像 $f : V \to \mathbb{R}$ を $f(X) = (A, X)$ $(X \in V)$ で定義する．このとき $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求め，$\mathrm{Ker}\, f$ の正規直交基底を 1 組求めよ．

(広島大 2009) (m20094104)

0.271 実数列 $\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体のなす実ベクトル空間を V とし，級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} {a_i}^2$ が収束するような実数列 $\{a_n\}$ 全体の集合を W とする．以下の問いに答えよ．

(1) W が V の部分ベクトル空間をなすことを示せ．

(2) $\{a_n\}$, $\{b_n\} \in W$ に対して，級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ が絶対収束することを示せ．

(3) $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ は W 上の内積であることを示せ．

(4) $a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, $b_n = \left(\dfrac{5}{7}\right)^n$ のとき，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の交角 θ を求めよ．ただし，内積空間の元 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対してノルムを $||\boldsymbol{a}|| := \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$ と書くとき，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の交角とは $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ||\boldsymbol{a}||\ ||\boldsymbol{b}|| \cos\theta$ を満たす実数 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ のことである．

(広島大 2014) (m20144109)

0.272 (1) 2 以上の自然数 n に対して，

$$\int \cos^n \frac{x}{3} dx = \frac{3}{n} \cos^{n-1} \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} \frac{x}{3} dx$$

が成り立つことを示せ．

(2) $f(\theta) = \cos^3 \dfrac{\theta}{3}$ とし，xy平面上の曲線

$$C \ : \begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\sin\theta \end{cases} \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

を考える．次の (i)，(ii)，(iii) に答えよ．

(i) C の概形を図示せよ（x 軸，y 軸との交点の座標も記すこと）．

(ii) C の長さを求めよ．

(iii) C で囲まれた部分の面積を求めよ．

(広島大 2016) (m20164102)

0.273 逆正弦関数 $f(x) = \sin^{-1} x$ を考える．ただし，f の値域は閉区間 $[-\pi/2,\ \pi/2]$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 開区間 $(-1, 1)$ において f の導関数 f' を求めよ．

(2) $n = 0, 1, 2, \cdots$ と $-1 < x < 1$ に対して，

$$(1 - x^2)f^{(n+2)}(x) = (2n+1)xf^{(n+1)}(x) + n^2 f^{(n)}(x)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$f^{(n)}$ は f の n 次導関数を表す．

(3) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，$\dfrac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n)!} = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ であることを示せ．ただし，$0! = 1$ とする．

(4) F は開区間 $(-1, 1)$ 上の C^∞ 級関数とする．自然数 N と $N+1$ 個の実数 a_0，a_1，$\cdots$，a_N に対して，$g_N(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k x^k$ と定める．ただし，$x^0 = 1$ とする．このとき，

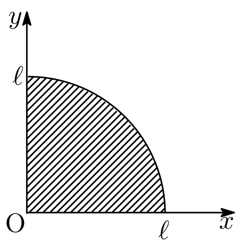
$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - g_N(x)}{x^N} = 0$$

となるための必要十分条件は，$a_k = \dfrac{F^{(k)}(0)}{k!}$ $(k = 0,\ 1,\ \cdots,\ N)$ であることを示せ．

(5) 自然数 N に対して，$S_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(2k)!\,(2N-2k)!}{(k!)^2\big((N-k)!\big)^2}$ を求めよ．

(広島大 2016) (m20164104)

0.274 下図のように，半径 ℓ の円の 1/4 である扇形の一様な板片を，円の中心であった部分が原点と重なり，直線部分が x 軸と y 軸に重なるように置いてある．このとき，この板片の重心の位置座標（x 座標と y 座標の値）を求めよ．



(広島市立大 2006) (m20064203)

0.275 2 変数関数 $f(x, y) = \sin(x + 2y)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) f の勾配ベクトル $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ を求めよ．

また，勾配ベクトルの具体的な値を $(0, 0)$，$(0, \pi/4)$，$(0, \pi/2)$ において求めよ．

(2) 座標平面上の 4 点 $(0,0)$, $(0,\pi/2)$, $(\pi,0)$, $(\pi,-\pi/2)$ を頂点とする平行四辺形が定める領域を D とする（図 1）. 2 重積分 $\displaystyle\iint_D |f(x,y)|\,dxdy$ の値を求めよ.

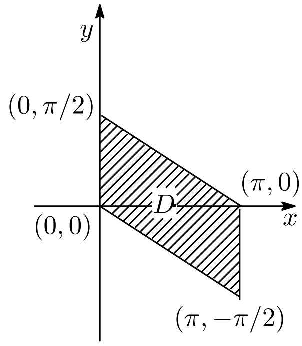


図 1

(広島市立大 2012)　　(m20124204)

0.276 次の方程式を解きなさい.　　$\cos 3\theta + \cos\theta = 0 \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

(山口大 2001)　　(m20014304)

0.277 次の式を $r\sin(x+\alpha)$, $-\pi < \alpha \leqq \pi$ の形に表せ.　　$\sin x - \sqrt{3}\cos x$

(山口大 2001)　　(m20014306)

0.278 $f(x) = x \ (-\pi \leqq x < \pi)$, $f(x+2\pi) = f(x)$ の Fourier 級数を求めなさい.

(山口大 2003)　　(m20034312)

0.279 (1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx$ （ n : 整数）をそれぞれ求めなさい.

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx$　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx$　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx$　（n, m : 正整数）をそれぞれ求めなさい.

(3) 周期 2π をもち, $f(x) = \begin{cases} -\pi/4 & (-\pi < x < 0 \text{ のとき}) \\ \pi/4 & (0 < x < \pi \text{ のとき}) \end{cases}$ で定義される関数をフーリエ級数に展開しなさい.

(山口大 2007)　　(m20074301)

0.280 $0 \leq x \leq r$, $0 \leq y \leq r$ 区間（r : 定数）で x 軸と y 軸, $x^2 + y^2 = r^2$ で囲まれる部分の面積 S が $\pi r^2/4$ であることを積分を用いて示しなさい.

(山口大 2010)　　(m20104303)

0.281 下に示す関数 y の最大値および最小値を求めなさい. また, そのときの θ の値を求めなさい.

$$y = \cos^2\theta + \sin\theta \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

(山口大 2015)　　(m20154303)

0.282 次の初期値問題について答えなさい.

(1) 次の微分方程式の一般解を求めなさい.
$$\frac{dy}{dx} = -y\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

(2) さらに, 次の式を満足する上記 (1) で求めた一般解の特殊解を求めなさい.
$$y(0) = \frac{1}{2}$$

(山口大 2017)　　(m20174301)

0.283 $y = y(x)$ が微分方程式 $y'' + 2y' + 5y = 0$ を満たす. 次の問に答えよ.

(1) 微分方程式の一般解を求めよ. ただし, 最終結果に複素数が現れてはならない.（必要ならオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いてもよい.）

(2) 初期条件 $y(0) = y'(0) = -e^{\frac{3}{4}\pi}$ を満たす微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた $y(x)$ に対し, $y\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)$ と $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x)$ を求めよ.

(徳島大 2005)　　(m20054404)

0.284 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{x^2-\pi^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-e^{-x})}{\sin x - x\cos x}$

(徳島大 2012)　　(m20124406)

0.285 $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\log x}}dx\ ,\quad J = \int_0^1 \sqrt{-\log x}\ dx$ を考える．次の問いに答えよ.

(1) $0 < x < 1$ において $\sqrt{-\log x}$ を微分せよ.

(2) J を I で表せ.

(3) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を利用して J を求めよ.

(徳島大 2014)　　(m20144402)

0.286 $0 < a < \dfrac{1}{2}$ とし，xy 平面上の領域を $D = \left\{(x,y)\ ;\ y \leqq\ x \leqq \dfrac{1}{2},\ a \leqq\ y \leqq \dfrac{1}{2}\right\}$ とする．次の問いに答えよ.

(1) D を図示せよ.

(2) $\displaystyle I_a = \iint_D \cos\left(\pi(x-a)^2\right) dxdy$ を求めよ.

(3) (2) の I_a について，$\displaystyle\lim_{a\to\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}-a\right)^{-2} I_a$ を求めよ.

(徳島大 2014)　　(m20144403)

0.287 $D = \{(x,y)\ :\ x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0,\ x+y \geqq\ 1\}$ とする．次の問いに答えよ.

(1) $u = x+y,\ v = \dfrac{y}{x+y}$ とおく．x, y を u, v の式で表せ．また，行列式 $J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^1 v\sin(\pi v)dv$ を求めよ.

(3) $f(x,y) = \dfrac{y}{x+y}e^{-(x+y)}\sin\left(\dfrac{\pi y}{x+y}\right)$ に対して，$\displaystyle I = \iint_D f(x,y)dxdy$ を求めよ．ここで，(1) の変換により $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dv \int_1^\infty f\big(x(u,v),\ y(u,v)\big)|J(u,v)|du$ となることを用いてよい.

(徳島大 2015)　　(m20154403)

0.288 $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ とする．関数

$$f_n(x) = \frac{x^n(x-\pi)^n}{n!}$$

に対し，

$$a_n = \int_0^\pi f_n(x) \sin x dx$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の式を示せ．

$$f_{n+1}(x) = \frac{x(x-\pi)}{n+1} f_n(x)$$

(2) 次の式を示せ．

$$f''_{n+2}(x) = 2f_{n+1}(x) + (2x-\pi)^2 f_n(x)$$

(3) 次の式を示せ．

$$a_{n+2} = (-4n-6)a_{n+1} - \pi^2 a_n$$

(4) a_3 を求めよ．

(高知大 2013)

0.289 次の極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)$ を求めよ．

(高知大 2016) (m20164505)

0.290 α と β について連立方程式

$$\begin{cases} \sin\beta = 2\sin\alpha + 2 \\ \sin\beta = -\sin\alpha + h \end{cases}$$

について（但し，$0 \leq \alpha \leq 2\pi$，$0 \leq \beta \leq 2\pi$ とする．），以下の問いに答えよ．

(1) 連立方程式が解を持つ為の h の範囲を求めよ．

(2) (1) の範囲の各 h について，解の個数を求めよ．

(3) h が (1) の範囲にある時，$h^3 - h$ が最小となる h の値と最小値を求めよ．

(高知大 2020) (m20204501)

0.291 $D = \{(x, y)\ ;\ x^2 + y^2 \leqq \pi^2\}$ とするとき, 次の重積分を求めよ.

$$\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$$

(愛媛大 2004) (m20044606)

0.292 (1) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\cos\frac{4}{x}\right)^{x^2}$

(2) x の関数 $x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x$ を微分せよ．

(3) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi$$

ただし，$\cos^{-1} x$ の値域は $[0,\ \pi]$ とする．

(愛媛大 2015) (m20154601)

0.293 (1) 次の不定積分を求めよ． $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2-1)} dx$

(2) 次の広義積分を求めよ．ただし，$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いてよい．

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2e^{-x^2}dx$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} x^2e^{-x^2-2x-2}dx$

(愛媛大 2015) (m20154602)

0.294 (1) 次の不定積分と定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin^2 x\,dx$

(2) 次の広義積分を求めよ．

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2+3}$$

(愛媛大 2022) (m20224607)

0.295 次の各問いに答えよ．

(1) $f(z)$ は単位円 $|z| \leqq 1$ で正則で，円周 $|z| = 1$ 上で $|f(z)| \leqq M$ を満たす．コーシーの積分公式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-a}dz, \qquad (|a| < 1)$$

を用いて，$|f(0)| \leqq M$ を示せ．

(2) $g(z) = \dfrac{a-z}{1-\overline{a}z}$ は円周 $|z| = 1$ 上で $|g(z)| = 1$ を満たすことを示せ．

(3) この $g(z)$ との合成関数を用いることにより，上の (1) の条件を満たす関数 $f(z)$ は単位円内のすべての点で $|f(z)| \leqq M$ を満たすことを示せ．

(九州大 1999) (m19994707)

0.296 $f = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{4}z^2 - 1$ とする. 座標系の原点を O, x, y, z 軸上で正の向きをもつ単位ベクトルをそれぞれ i, j, k とし, 以下の問に答えよ．

(1) スカラー場 f の勾配を計算せよ．

(2) 曲面 $f = 0$ 上の点 $P(x_0, y_0, z_0)$ における勾配ベクトル a とベクトル $\overrightarrow{OP}$ とのなす角を, z_0 を用いて表せ．

(3) $x = \sin\theta\cos\varphi$, $y = \sin\theta\sin\varphi$, $z = 2\cos\theta$ とおく．ただし, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ である. 曲面 $f = 0$ 上の点 $Q(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ 2\cos\theta)$ における接平面を張る二つのベクトルの組を示し, 法線ベクトルを計算せよ．

(4) (3) と同じ表記の下で, $0 \leq \theta \leq \theta_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ により囲まれる曲面の面積を $S(\theta_0)$ とする. $\dfrac{dS}{d\theta_0}$ を求めよ．ただし, $0 \leq \theta_0 \leq \pi$ である．

（九州大 2004） (m20044707)

0.297 複素平面上の中心 a, 半径 r の半円 $C_r(a)$ を $C_r(a) = \{z = a + re^{i\theta}\ ;\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$ で定める. ただし, $i = \sqrt{-1}$ である．

(1) 正則関数 $f(z)$ に対して次式を示せ. $z = a + \varepsilon e^{i\theta}$ とおいて考えよ．

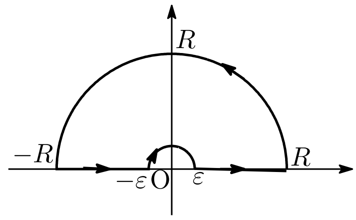
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{z-a}dz = i\pi f(a)$$

(2) 不等式 $\dfrac{2}{\pi}\theta \leq \sin\theta \left(0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が成立つことを示せ．

(3) (2) の結果を用いて次式を証明せよ．

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R(0)} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$

(4) 関数 $\dfrac{e^{iz}}{z}$ の積分を図の矢印に示す道に沿って考えること により, 定積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ の値を計算せよ.



（九州大 2004）　(m20044708)

0.298 (1) ２つの任意の自然数 m, n について，次をそれぞれ示せ.

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx dx = 0$　(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx = \begin{cases} 0\ ;\ m \neq n \\ \pi\ ;\ m = n \end{cases}$

(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx = \begin{cases} 0\ ;\ m \neq n \\ \pi\ ;\ m = n \end{cases}$

(2) 周期 2π の関数 $f(x)$ がフーリエ級数に展開できる，つまり $\displaystyle f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$ と表現できるとき，

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$　(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos pxdx$　(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin pxdx$　$(\ p = 1, 2, \cdots)$

をそれぞれ計算せよ.

(3) 周期 2π の関数 $f(x) = |x|\ ;\ -\pi < x \leq \pi$ をフーリエ級数に展開せよ.

(4) (3) の結果を用いて，

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$　(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$　(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$　をそれぞれ計算せよ.

(九州大 2006)　(m20064704)

0.299 連続型の確率変数を X とする．X が a 以下の値をとる確率を $P_X(a)$ とし，$P_X(a)$ が以下で与えられているものとする．以下の設問に答えよ.

$$P_X(a) = \begin{cases} 0 & (-\infty \leq a < -T) \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi a}{2T}\right) & (-T \leq a \leq T) \\ 1 & (T \leq a \leq \infty) \end{cases}$$

(1) X が値 $X_0 \sim X_1$（ただし，$X_0 < X_1$ とする）のいずれかをとる確率を求めよ.

(2) X が任意の定数 B となる確率を求めよ.　(3) X の確率密度関数 $p(X)$ を求めよ.

(4) X の平均を求めよ.　(5) X の標準偏差を求めよ.

(九州大 2007)　(m20074704)

0.300 $G(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4t}\right)$ とおく．ただし，$\exp z = e^z$ である.

(1) $t > 0$ のとき

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0$$

であることを示せ.

(2) $t > 0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty}G(x,t)\,dx = 1$$

であることを示せ．ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ を用いてよい.

(3) f を $\boldsymbol{R} = (-\infty,\ \infty)$ 上の有界な連続関数とするとき，すべての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$\lim_{t\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}G(x-y,t)f(y)\,dy = f(x)$$

であることを証明せよ.

(九州大 2008)　　(m20084712)

0.301 (1) 実数 $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq 1$ に対して，等式 $\dfrac{1+t^2}{t(1+t-t^2)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b+ct}{1+t-t^2}$ が成り立つように a, b, c を定めよ．

(2) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくとき，$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ ，$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ と表せることを示せ．

(3) 変数変換 $t = \tan\dfrac{x}{2}$ を行い，次の定積分 $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)\sin x}$ の値を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084718)

0.302 3 次元空間内で

$V = \{(x, y, z)\ ;\ x = t\cos\theta\ ,\ y = t\sin\theta\ ,\ z = r\ ,\ 0 \leq t \leq r\ ,\ 0 \leq r \leq 3\ ,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$

で表される集合 V を考える．

(1) V の体積を求めよ．

(2) L を平面

$$z = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + 1$$

とし, $S = V \cap L$ とおく．

$$\min\{z\ ;\ (x, y, z) \in S\} \qquad \max\{z\ ;\ (x, y, z) \in S\}$$

を求めよ．

(九州大 2010)　　(m20104705)

0.303 (1) 次の周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \left(-\pi \leqq x < -\dfrac{\pi}{4}\right) \\ 1 & \left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq x < \dfrac{3\pi}{4}\right) \\ -1 & \left(\dfrac{3\pi}{4} \leqq x < \pi\right) \end{cases} \qquad , \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

(2) 関数 $f(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$ で定義する．次式で定義される関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，関数 $y = F(\omega)$ のグラフの概形を描け．なお，T は正の実数とする．

$$f(t) = \begin{cases} a & (|t| \leqq T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

(3) 関数 $f(t)$ は $t > 0$ で定義されているものとし，$f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$ で定義するとき，以下の問いに答えよ．

(a) $f(t) = \sin\omega t$ のラプラス変換が $F(s) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ であることを示せ．

(b) $f(t) = \cos\omega t$ のラプラス変換が $F(s) = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ であることを示せ．

(c) $f(t) = a + bt$ のラプラス変換が $F(s) = \dfrac{as+b}{s^2}$ であることを示せ．

(九州大 2012)　　(m20124704)

0.304 関数 $f(x) = \sin(\log x)\quad (x > 0)$ を考える．$f'(x)$，$f''(x)$ をそれぞれ $f(x)$ の 1 次および 2 次の導関数とする．また，π は円周率，e は自然対数の底とする．以下の問いに答えよ．

(1) $1 \leqq x \leqq e^{\pi}$ において $f'(x)=0$ となる x を求めよ.

(2) $1 \leqq x \leqq e^{\pi}$ において $f''(x)<0$ となる x の範囲を求めよ.

(3) 2 点 $(1, f(1))$, $(e^{\pi/2}, f(e^{\pi/2}))$ を通る直線の方程式を求めよ.

(4) $\dfrac{e^{\pi/4}-1}{e^{\pi/2}-1} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が成り立つことを示せ.

(九州大 2012)　　(m20124705)

0.305 以下の問いに答えよ.

(1) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ. ただし, c は定数である.

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - c^2$$

(2) 次の $y(x)$ に関する微分方程式を, $y(0)=1,\ y(0.5)=2e$ のもとで解け.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + \pi^2 + 4 = 0$$

(3) 一定温度 T_a に維持されたオーブンに鉄球を入れて温めるとき, 時刻 t での鉄球の温度 $T(t)$ の変化率は $T_a - T(t)$ に比例する. これを微分方程式の形に定式化し, $T(t)$ を求めよ.

(九州大 2013)　　(m20134702)

0.306 (1) 周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を次のように定める. 以下の問いに答えよ.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n=0,1,\cdots), \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n=1,2,\cdots)$$

(a) 任意の実数 α に対して $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\cos nx dx = a_n$ が成立することを示せ.

(b) 整数 n と実数 x に対して $\cos n(x+\pi) = \begin{cases} \cos nx & (n\text{ が偶数}) \\ -\cos nx & (n\text{ が奇数}) \end{cases}$ が成立する.

このことを踏まえ, 関数 $g(x)=f(x+\pi)$ のフーリエ係数 $a'_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx dx$, $b'_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx dx$ を a_n, b_n を用いて表せ.

(2) 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$ とおく. 以下の問いに答えよ.

(a) $f(x) = e^{-|x|}$ のフーリエ変換を求めよ.

(b) フーリエの積分定理（逆フーリエ変換）を利用して, 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos u}{1+u^2} du$$

(九州大 2013)　　(m20134703)

0.307 (1) 次の周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = |x| \quad (-\pi \leqq x < \pi)\,, \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ であることを示せ.

(3) $t>0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ とする. 以下の問いに答えよ.

(a) a を定数とするとき，$\mathcal{L}[e^{at}](s)$ を求めよ．また，$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = F(s-a)$ を示せ．

(b) $\dfrac{dF(s)}{ds} = \mathcal{L}[-tf(t)](s)$ が成り立つことを示せ．また，これを用いて $F(s) = \log\left(\dfrac{s+1}{s}\right)$ のラプラス逆変換を求めよ．

(九州大 2014)　　(m20144703)

0.308 C を区間 $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で定義された媒介変数方程式 $x(t) = e^t \sin t,\ y(t) = e^t \cos t$ で表される xy 平面上の曲面とする．

(1) 導関数 $\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt},\ \dfrac{dy}{dx}$ をそれぞれ求めよ．

(2) 曲線 C の増減を調べ，xy 平面上にグラフをかけ．ただし，$e^{\frac{\pi}{4}} \fallingdotseq 2.19$ である．

(3) 曲線 C の x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(九州大 2015)　　(m20154703)

0.309 直交座標系の x, y, z 軸の基本ベクトルを $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ とし，位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とする．閉曲線 $C : \boldsymbol{r} = 2\cos\theta\boldsymbol{i} + 2\sin\theta\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\ (0 \leqq \theta \leqq\ 2\pi)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 閉曲線 C 上の点における大きさ 1 の接ベクトルを求めよ．

(2) スカラー場 $\varphi = \dfrac{1}{4}x^2y$ の 閉曲線 C に沿う線積分を求めよ．

(3) 閉曲線 C で囲まれた円板を S とし，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{A} = -\frac{1+z}{x^2}\boldsymbol{i} + \frac{z^2}{xy}\boldsymbol{j} + (x^2z - y)\boldsymbol{k}$$

とする．$(\bigtriangledown\varphi)\times\ \boldsymbol{A} + \varphi(\bigtriangledown\times\ \boldsymbol{A})$ の S 上の面積分を求めよ．

(九州大 2016)　　(m20164704)

0.310 (1) $f(x) = \begin{cases} 1\,, & (0 \le x \le 1) \\ 0\,, & (\text{上記以外}) \end{cases}$ とする．以下の設問に答えよ．

(a) $f(x)$ 自身の畳み込み積分 $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)dy$ を求めよ．

(b) $f(x)$ のフーリエ変換 $F(u)$ を求めよ．

(c) $g(x)$ のフーリエ変換 $G(u)$ が $F(u)^2$ で与えられることを示せ．

(2) $f(x)$ が $f(x) = x\ ,\quad (-\pi \le x \le \pi)$ で与えられる周期関数とする．ここで周期 T は 2π である．$f(x)$ を $f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$ によりフーリエ級数展開し，$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2$ であることを示せ．なお，i は虚数単位を表す．また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ である．

(九州大 2017)　　(m20174708)

0.311 $x \geqq 1$ において，関数 $f(x)$ を次の式で定義する．

$$f(x) = \sin(\log x)$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $y \geqq 1$ なる y を固定するとき，次の積分を求めよ．

$$g(y) = \int_1^y f(x)dx$$

(2) $1 \leqq y \leqq e^{2\pi}$ における $g(y)$ の最大値および最小値を求めよ．ただし，e は自然対数の底，π は円周率である．

(九州大 2018)　　(m20184707)

0.312 直交座標系において，x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とする．
ベクトル場 $\boldsymbol{a} = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}\,\boldsymbol{i} - 2xye^{-x^2-y^2}\,\boldsymbol{j} + 2z\,\boldsymbol{k}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\nabla \times \boldsymbol{a}$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a} = \nabla\phi$ となるようなスカラー関数 ϕ が存在するか否かを答えよ．存在する場合は，ϕ を求めよ．ただし，原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ において $\phi = 0$ とする．

(3) 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = 2\cos t\,\boldsymbol{i} + 2\sin t\,\boldsymbol{j} + t\,\boldsymbol{k}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ で与えられる曲線 C 上で，線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r}$ の値を求めよ．

(九州大 2021)　　(m20214703)

0.313 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ を求めよ．

(2) 以下に順に答えよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を示せ．

(b) $1 + \cos x = 2\left(\sin\dfrac{\pi - x}{2}\right)^2$ を示せ．

(c) 上の (a) と (b) を使って，$\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}$ を求めよ．

(3) $\dfrac{d}{dx}e^{x^x}$ を求めよ．

（九州芸術工科大 2001）　　(m20014801)

0.314 曲線 $y = 2\sin x$ において，

(1) $x = \pi/3$ [rad] の点における接線の傾きを求め，この接線と直交する直線が曲線 y と接する点 (x, y) の値を求めなさい．ただし，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ とする．

(2) 接線と直交する直線が曲線と接点を持たない x の範囲を式および図で示しなさい．

(佐賀大 2003)　　(m20034902)

0.315 直線上を時刻 t における速度が $v = \sin 2\pi t$ で与えられる点 P が動く．$t = 0$ から $t = 5$ までに点 P が移動する距離を求めよ．また実際に動いた道のりを求めよ．

(佐賀大 2003)　　(m20034915)

0.316 次の各問に答えよ．

(1) $x > 0$ のとき次の不等式が成り立つことを示せ．

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

(2) $y = \log|x + \sqrt{x^2 + a}\,|$ $(a \neq 0)$ を微分せよ．

(3) $y = x\sin x$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$ のグラフの概形を描け．

（佐賀大 2004）　　(m20044907)

0.317 $x^2\cos 3x$ の n 次導関数を求めよ．ただし，$g(x) = \cos ax$ $(a > 0)$ のとき，$g^{(n)}(x) = a^n\cos\left(ax + \dfrac{n}{2}\pi\right)$ となることを証明せずに使用してもよい．

(佐賀大 2006)　　(m20064914)

0.318 一つの質点が x 軸上を加速度 a で運動する．時刻 t における加速度が $a = 2\pi\cos 2\pi t$ で与えられるとき，時刻 t における点の位置 x を求めよ．ただし，$t = 0$ における位置および速度は 0 とする．

(佐賀大 2006)　　(m20064928)

0.319 (1) 関数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ を $x = 0$ の周りでテイラー展開し，x^3 の項まで書け.

(2) 微分方程式 $y''(x) + 9y(x) = 0$ の一般解を求めよ.

(3) 関数 $f(x) = x$（定義域を $-\pi \leq x \leq \pi$ とする）を　$f(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}[\, a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\,]$

と書くとき，a_0, a_n, b_n を求めよ.

(佐賀大 2007)　　(m20074906)

0.320 次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+x^2-1}{x+1}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\sin(\pi x)\,dx$

(佐賀大 2012)　　(m20124912)

0.321 曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ で囲まれる領域の面積が πab で与えられることを定積分を用いて示せ.

(佐賀大 2013)　　(m20134902)

0.322 次の積分について，問いに答えよ．ただし，log は自然対数である.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^4+x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1}dx$ を求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 x^2\log x dx$ を求めよ.

(3) $D = \left\{(x, y)\ :\ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$ として，2 重積分 $\displaystyle\iint_D \cos(x+y)dxdy$ を求めよ.

(佐賀大 2016)　　(m20164903)

0.323 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{2x^2-6}{(x-1)^2(x+1)}dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$

(佐賀大 2016)　　(m20164912)

0.324 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2+4)}$ を求めよ.　　(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$ を求めよ.

(3) $D = \left\{(x, y)\ :\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2\right\}$ として，2 重積分 $\displaystyle\iint_D xy dxdy$ を求めよ.

(佐賀大 2016)　　(m20164927)

0.325 $f(x, y) = \sin^2(x) - \cos(y)$　$\left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \pi\right)$ の極値を求めよ.

(佐賀大 2021)　　(m20214917)

0.326 太さを無視できる糸を巻き付けた半径 R の円柱がある．糸を張りながら円柱から外すとき以下の問いに答えよ.

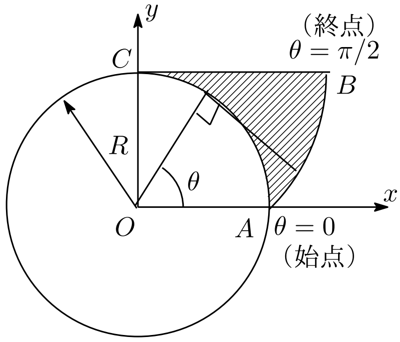
(1) 図のように $\theta=0$ の位置からはじめて $\theta=\pi/2$ まで糸が外れた．円柱から外れた糸の長さ BC はいくらか．

(2) θ の位置まで糸が外れたとき，糸の先端の x および y 座標を R と θ を用いて表せ．

(3) $\theta=\pi/2$ まで糸を外す間に，糸の先端が描く曲線の長さ AB は次式で計算できる．

$$AB=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

上式を計算して曲線 AB の長さを求めよ．



(4) 図中の斜線部分の面積 $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A}=R^2\left\{\int_0^{\pi/2}\left(\theta\sin\theta\cos\theta+\theta^2\sin^2\theta\right)d\theta-\frac{\pi}{4}\right\}$$

で与えられる．右辺に含まれる定積分 $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\theta\sin\theta\cos\theta\,d\theta$ の値を求めよ．

(長崎大 2007)　　(m20075002)

0.327 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\,\sin x\,dx$ を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{x^2}\,dx$ を求めよ．

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy\,,\quad D=\{(x,y)\mid 0\le x\le y\le 1\}$ を計算せよ．

(4) 平面曲線が $\begin{cases} x=e^t\sin t \\ y=e^t\cos t\end{cases}\ ,\quad \left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$ で与えられるとき，曲線の長さ L を求めよ．

(長崎大 2007)　　(m20075004)

0.328 (1) 不定積分 $\displaystyle\int(1+x)\sqrt{1-x}\,dx$ を求めよ．

(2) $D=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 4\,,\ x\ge 0\}$ とするとき，領域 D を図示し，次の 2 重積分を求めよ．

$$I=\iint_D\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$$

(3) xy 平面上での曲線が次式で与えられるとき，その長さを求めよ．

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t)\end{cases}\qquad (0\le t\le 2\pi\,,\ a>0)$$

(長崎大 2009)　　(m20095012)

0.329 関数 $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)\quad(0\leqq\ x<2\pi,\ 0\leqq\ y<2\pi)$ の極値を求めよ．求める過程も記述すること．

(長崎大 2011)　　(m20115015)

0.330 次の関数 $f(x)$ の $[-\pi,\ \pi]$ におけるフーリエ級数を求めなさい．

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (-\pi\le x\le 0) \\ -1 & (0<x<\pi)\end{cases}\ ,\qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

(大分大 2009)　　(m20095103)

0.331 座標平面上の助変数表示をもつ曲線

$$C\ :\ \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = -1 + \cos t \end{cases} \qquad (0 \leqq\ t \leqq\ 2\pi)$$

について次の問いに答えよ.

(1) 曲線 C の概形を示せ.

(2) 曲線 C の長さを求めよ.

(大分大 2009) (m20095104)

0.332 1 周期が次のように定義された周期 2π の周期関数 $ft)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (-\pi < t \leqq\ 0) \\ 1 & (0 < t \leqq \pi) \end{cases}$$

(大分大 2011) (m20115103)

0.333 1 周期が次のように定義された周期 2π の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (-\pi \leqq\ t \leqq\ 0) \\ -1 & (0 < t < \pi) \end{cases}$$

(大分大 2012) (m20125103)

0.334 1 周期が次のように定義された周期 2π の周期関数 $f(t)$ のグラフを描き，そのフーリエ級数を求めよ.

$$f(t) = \begin{cases} -\pi & (-\pi < t \leqq\ 0) \\ 2t - \pi & (0 < t \leqq \pi) \end{cases}$$

(大分大 2012) (m20125106)

0.335 次のように定義される周期関数 $f(x)$ について，以下の問いに答えなさい.

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi \leq x < \pi), \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

(1) 関数 $f(x)$ のグラフの概形を描きなさい.

(2) 関数 $f(x)$ の $(-\pi,\ \pi)$ におけるフーリエ級数を求めなさい.

(大分大 2013) (m20135102)

0.336 周期関数 $f(x) = |x|\ \ (-\pi \leq x < \pi), \quad f(x + 2\pi) = f(x)$ の $(-\pi,\ \pi)$ におけるフーリエ級数は次のようになる.

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

これを用いて，次の公式を証明せよ.

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

(大分大 2013) (m20135104)

0.337 $S = \displaystyle\int_0^{\pi} (x - a\cos x - b)^2 dx$ とするとき，以下の問いに答えなさい.

(1) $A = \displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x dx,\ B = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx$ をそれぞれ求めなさい.

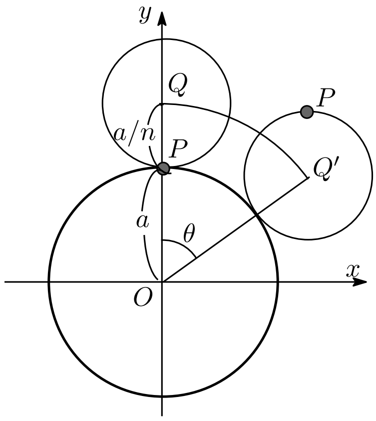
(2) S を最小とする a と b を求めなさい.

(熊本大 2015) (m20155202)

0.338 下図で示すように，固定された原点 O を中心とする半径 a の円の外側を半径 a/n の円が転がっていくとき，以下の問いに答えなさい．ただし n は自然数である．

(1) Q から Q' へ半径 a/n の円が転がった．$\angle QOQ'$ を θ とするとき，θ を用いて点 P の軌跡 $(x,\ y)$ を表しなさい．

(2) $0 \leq \theta \leq 2\pi$ だけ回転したとき，点 P の軌跡の全長を求めなさい．



(熊本大 2022)　　(m20225204)

0.339 複素数 $z_1 = 1 + i,\ z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ について，次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．以下では，$z = re^{i\theta}$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ を複素数 z の極形式という．

(1) $z_1,\ z_2$ を極形式で表せ．

(2) $z_1 z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2}$ を極形式で表せ．

(宮崎大 2013)　　(m20135304)

0.340 複素数 $z = 2 + 2\sqrt{3}i$ について，次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) z を複素平面上に図示せよ．

(2) 絶対値 $|z|$ と偏角 $\arg z$ の値を，それぞれ求めよ．ただし，$0 \leqq \arg z < 2\pi$ とする．

(3) z を極形式で表せ．

(宮崎大 2016)　　(m20165302)

0.341 重積分

$$I = \iint_D \sin\frac{2x+y}{9}dxdy\ , \qquad D = \left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leqq\ y \leqq\ x,\ x + \frac{y}{2} \leqq\ 3\pi\right\}$$

について，次の各問に答えよ．

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) 等式 $I = \displaystyle\int_{\boxed{\text{ア}}}^{\boxed{\text{イ}}} \left(\int_{\boxed{\text{ウ}}}^{\boxed{\text{エ}}} \sin\frac{2x+y}{9}dx \right) dy$ の空欄 $\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまる数値あるいは数式を答えよ．

(3) 重積分 I の値を求めよ．

(宮崎大 2016)　　(m20165305)

0.342 次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 絶対値 2，偏角 $\dfrac{5}{3}\pi$ の複素数を，$x + yi$ $(x,\ y$ は実数$)$ の形で表し，複素数平面上に図示せよ．

(2) 複素数 z についての方程式 $z^3 = -i$ のすべての解を，$x + yi$ (x, y は実数) の形で求めよ．

(宮崎大 2017)　　(m20175301)

0.343 座標空間において，原点を中心とした半径 a の球 B の体積 V を，以下の手順で求める．

球 B を xy 平面で切ったときの断面のうち，$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ を満たす部分を D と表す．

また，球 B の表面（球面）のうち $z \geqq 0$ を満たす部分を表す方程式を $z = f(x,\ y)$ とする．

さらに，D を xy 平面内の領域とみなし，重積分 $I = \iint_D f(x,\ y)dxdy$ を考える．

このとき，次の各問に答えよ．

(1) 方程式 $z = f(x,\ y)$ を具体的に書き下せ．

(2) 領域 D を xy 平面に図示せよ．

(3) 領域 D を極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて表すと，I は

$$I = \int_{\boxed{\text{ア}}}^{\boxed{\text{イ}}} \left(\int_{\boxed{\text{ウ}}}^{\boxed{\text{エ}}} \boxed{\quad\text{オ}\quad}\, d\theta \right) dr$$

と書き直せる．空欄 $\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{オ}}$ に当てはまる数または式を答えよ．

(4) I を計算することによって，$V = \dfrac{4}{3}\pi a^3$ であることを示せ．

(宮崎大 2018)　　(m20185305)

0.344 次の関数のグラフを図示せよ．特徴的な点は値とともに図示せよ．範囲は $\{-\pi \leqq \theta \leqq \pi\}$ とする．グラフは可能な範囲で丁寧に描くこと．

$y = 3\sin 2(\theta + \pi/3)$

(鹿児島大 2007)　　(m20075412)

0.345 行列 $A = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，行列 $B = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ がある．このとき，以下の各問に答えよ．

(1) AB ならびに BA を求めよ．

(2) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$D = 2BA - C$ とするとき，D を求めよ．

(3) n を正の整数，$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$ とするとき，$D^n\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \cos(-n\pi/2 + 2n\theta + \phi) \\ \sin(-n\pi/2 + 2n\theta + \phi) \end{pmatrix}$ であることを証明せよ．

(4) $R = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ とするとき $D^n = R$ の形に書けることを示し，β を求めよ．また，このことを利用して逆行列 $(D^n)^{-1}$ を求めよ．

(鹿児島大 2012)　　(m20125404)

0.346 ベクトルに関する以下の各問に答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ について，$2\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = 0$，$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = \dfrac{|\boldsymbol{c}|}{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})} \neq 0$ が成り立つ．ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めよ．ただし，求める θ の範囲は $-\pi \leq \theta \leq \pi$ とする．

(2) $\overrightarrow{OA} = (1, 2, 3)$，$\overrightarrow{OB} = (1, 1, -1)$，$\overrightarrow{OC} = (1, 0, 1)$ であり，原点 O から $\triangle ABC$ に垂線を下ろしたときの交点を D とする．$\overrightarrow{OD}$ ならびに $\triangle ABC$ の面積 S，四面体 $OABC$ の体積 V を求めよ．

(鹿児島大 2012)　　(m20125405)

0.347 以下の微分を計算せよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left\{\log\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)\right\}$　　(ただし，$0 < x < \pi$)

(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right)$　　(ただし，$-1 < x < 1$)

(鹿児島大 2013)　　(m20135401)

0.348 以下の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2\sin x\,dx$

(鹿児島大 2013)　　(m20135402)

0.349 次の関数の，付記の区間での，最大値，最小値を求めなさい.

$f(x) = 2\cos x + \cos 2x$　　$\left(0 \leqq\ x \leqq\ 2\pi\right)$

(鹿児島大 2013)　　(m20135413)

0.350 次の関数の，付記の区間での，最大値，最小値を求めなさい.

$f(x) = \cos x + \sin^2 x$　$(0 \leqq\ x \leqq\ 2\pi)$

(鹿児島大 2014)　　(m20145416)

0.351 次の定積分を求めなさい．ただし，$m.n$ は自然数とする.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)dx$$

(鹿児島大 2015)　　(m20155418)

0.352 以下の微分を計算せよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\log(x^2+4x+4)$　(ただし，$x > 0$)　　(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right)$　(ただし，$0 < x < \pi$)

(鹿児島大 2016)　　(m20165401)

0.353 以下の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{x}{\cos^2 x}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x\sin x dx$

(鹿児島大 2016)　　(m20165402)

0.354 次の微分を求めなさい.

$\dfrac{d}{dx}(\cos^2 x + \cos^2 y)$　　(ただし，$x + y = \pi/2$ とする．)

(鹿児島大 2016)　　(m20165406)

0.355 2 つのベクトル $\boldsymbol{A} = (\sqrt{3}, 1)$，$\boldsymbol{B} = (\sqrt{3}, -1)$ のなす角 θ $(0 \le \theta \le \pi)$ を求めなさい. (鹿児島大 2018)
(m20185417)

0.356 曲線 C : $x = \cos(t)$，$y = \sin(t)$，$z = \sqrt{3}\cdot t$　$(0 \le t \le 2\pi)$ のとき，次式を求めなさい.
ただし，s は曲線の長さを表す.

$$\int_C (xy+z)ds$$

(鹿児島大 2021)　　(m20215420)

0.357 区間 2π で定義された関数　$f(t) = \pi - |t|$; $-\pi \le t \le \pi$　を $f(t+2\pi) = f(t)$ の関係によって周期関数に拡張した関数を考える.

(1) この関数の概形を $-2\pi \leq t \leq 2\pi$ の範囲で図に示せ．縦軸，横軸に適切な数値を入れること．

(2) この周期関数をフーリエ級数で表せ．

(室蘭工業大 2006)　　(m20065509)

0.358 $y = \cos x \quad \left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

(室蘭工業大 2015)　　(m20155503)

0.359 $\displaystyle\int_0^T e^{i\frac{2\pi mt}{T}} e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}\, dt$ を計算しなさい．
ただし，i は虚数単位，m と n は正の整数，T は正の実数とする．

(室蘭工業大 2017)　　(m20175504)

0.360 下記の関数 $f(x, y)$ について，次の問いに答えよ．ただし，α と β はそれぞれ正の定数であるとする．

$$f(x, y) = \cos \alpha x\; e^{-\beta y}$$

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ と $\dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y)$ をそれぞれ導出せよ．

(2) 求めた偏導関数に関して，$x = \dfrac{\pi}{2\alpha}$，$y = \dfrac{1}{\beta}$ における偏微分係数をそれぞれ求めよ．

(香川大 2014)　　(m20145701)

0.361 関数 $\quad f(x) = \dfrac{1 + 2\sin x}{2 - \sin x} \quad$ の最小値と最大値を求めよ．また，$f(x)$ は $0 \leq x \leq 2\pi$ において 2 つの変曲点をもつことを示せ．

(島根大 2007)　　(m20075804)

0.362 $u = u(x, t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4t}}$ であるとき，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いて次式 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty u(x, t) dx = 1$
が成り立つことを示せ．ただし，t はパラメータ (> 0) とする．

(島根大 2007)　　(m20075811)

0.363 一般に，関数 $f(x)$ が周期 2π の周期関数で，区間 $[-\pi, \pi]$ でいくつか（有限個）の点を除いて連続であるとき，次のように三角関数の級数に展開できる．これを $f(x)$ のフーリエ級数という．

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

周期 2π の周期関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} -2x & (-\pi \leqq x \leqq 0) \\ 2x & (0 < x \leqq \pi) \end{cases}$$ のとき，$f(x)$ のフーリエ級数を求めよ

(島根大 2007)　　(m20075814)

0.364 関数 $f(x) = \arcsin x \;\; (-1, x < 1,\; -\pi/2 < y < \pi/2)$ に関する次の問いに答えよ．

(1) 逆関数の微分法を用いて $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ を証明せよ．

(2) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(3) $f^{(n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次導関数とする．ただし $f^{(0)}(x) = f(x)$ である．このとき，0 以上の整数 n に対し，

$$(1 - x^2) f^{(n+2)}(x) - (1 + 2n) x f^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0$$

が成り立つことを証明せよ．

(4) $f(x) = \arcsin x$ のマクローリン展開を 5 次の項まで求めよ.

(島根大 2015)　　(m20155806)

0.365 $f(x) = -\log\cos x$ とする．次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{f(x)}$ を求めよ.

(3) $-\pi/2 < x < \pi/2$ のとき，$f(x) \geq x^2/2$ であることを示せ.

(4) 曲線 $y = f(x)$ の，$0 \leq x \leq \pi/3$ の部分の長さを求めよ.

(島根大 2018)　　(m20185806)

0.366 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x - y \leq 1,\ 0 \leq x + y \leq \pi\}$ とするとき，重積分

$$\iint_D (x-y)\cos(x^2-y^2)dxdy$$

の値を求めよ.

(島根大 2018)　　(m20185808)

0.367 $f(x) = \cos x$ について以下の問いに答えよ. ただし, $-\pi \leq x \leq \pi$ とする.

(1) マクローリン展開を用いて $f(x)$ を 2 次式で近似せよ.

(2) $f(x)$ および $f(x)$ を 2 次式で近似した曲線を図示せよ.

(首都大 2010)　　(m20105906)

0.368 次の関数を微分しなさい.

(1) $f(x) = (2x-1)\,e^x$

(2) $f(x) = \log|\sin x|$　　$(x \neq n\pi,\ n$ は整数$)$

(3) $f(x) = x^x$　　$(x > 0)$

(首都大 2014)　　(m20145904)

0.369 $t(0 < t < 2\pi)$ の関数 $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ について，以下の問いに答えよ．ただし，a は 0 でない定数とする.

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.　　(2) (1) の結果を用いて，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ.

(首都大 2016)　　(m20165911)

0.370 ベクトル場 $\overrightarrow{a} = y\,\overrightarrow{i} - x\,\overrightarrow{j}$ と曲線 C： $\overrightarrow{r} = (\cos^2 t)\,\overrightarrow{i} + (\sin^2 t)\,\overrightarrow{j}$　$\left(0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $d\overrightarrow{r}$ を計算せよ.

(2) 内積 $\overrightarrow{a}\cdot d\overrightarrow{r}$ を計算せよ.

(3) (2) の結果を用いて，C に沿う線積分 $I = \displaystyle\int_C \overrightarrow{a}\cdot d\overrightarrow{r}$ の値を求めよ.

(首都大 2016)　　(m20165913)

0.371 $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}x$ について，次を求めよ．ただし，$\mathrm{Sin}^{-1}x$ の値域は $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ とする.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - x}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

(滋賀県立大 2016)　　(m20166001)

0.372 関数 $f(x) = e^{-x}\sin \pi x (x \geqq 0)$ があるとき，以下の問に答えよ．

(1) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け．

(2) $y = f(x)$ のグラフと x 軸とで囲まれる部分の面積を原点に近い方から $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ とするとき，1 番目の面積 S_1 を求めよ．

(3) n 番目の面積 S_n を求めよ．

(4) $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ の面積の総和を求めよ．

(宇都宮大 2004)　　(m20046104)

0.373 実数 $a > 1$ として下の問いに答えよ.

(1) 曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ $(1 \leq x \leq a)$ を x 軸のまわりに 1 回転したときにできる回転体の体積 $V(a)$ を求めよ.

(2) 曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ $(1 \leq x \leq a)$ を x 軸のまわりに 1 回転したときにできる回転体の側面積 $S(a)$ の式を記述し，$2\pi \displaystyle\int_1^a \frac{dx}{x}$ より大きいことを示せ．なお，計算過程も記入せよ.

(3) (1) と (2) で求めた $V(a)$，$S(a)$ に対して a を無限大に近づけたとき，おのおのの極限を求めよ.

(宇都宮大 2020)　　(m20206103)

0.374 (1) 曲線 $y = \cos 2\pi x$ に $x = \dfrac{1}{6}$ で接する直線の傾き（勾配）を求めなさい.（図 2 参照）

(2) x, y 軸と曲線 $y = \cos 2\pi x$，直線 $x = \dfrac{1}{6}$ に囲まれる図形の面積を求めよ．

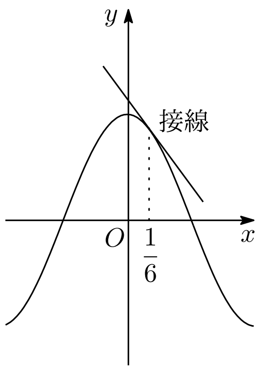


図 2:曲線 $y = \cos 2\pi x$

(工学院大 2003)　　(m20036208)

0.375 (1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} x \left(\frac{e^{1/x} - 1}{e^{1/x} + 1} \right)$ を求めよ.

(2) $0 < x < \pi$ のおいて，$\dfrac{d}{dx} \log \left(\tan \dfrac{x}{2} \right)$ を求めよ.

(3) $\mathrm{Sin}^{-1} \dfrac{3}{5} + \mathrm{Sin}^{-1} \dfrac{4}{5}$ を求めよ.

ただし．$\sin x$ の逆関数 $\mathrm{Sin}^{-1} x$ の値域は，$\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2} \right]$ とする.

(はこだて未来大 2015)　　(m20156302)

0.376 (1) $0 < x < \pi$ において，$\displaystyle\int (\sin x) \log(\sin x) dx$ を求めよ.

(はこだて未来大 2015)　　(m20156303)

0.377 $-1 \leq x \leq 1$ において，$f(x) = x\,\mathrm{Cos}^{-1} x$ とする．ここで，$\mathrm{Cos}^{-1} x$ は逆余弦関数で，$\arccos x$ と書くこともある．以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - \frac{\pi}{2}x}{x^2}$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$ の値を求めよ.

(はこだて未来大 2021)　　(m20216302)

0.378 (1) 曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ と直線 $x = 2,\ x = 5,\ y = 0$ で囲まれる面積を求めなさい.

(2) 曲線 $y = \cos x$ の $-\dfrac{3}{4}\pi \leq x \leq \dfrac{3}{4}\pi$ の範囲と，直線 $y = 0$ で囲まれる面積を求めなさい.

(東京海洋大 2015)　　(m20156403)

0.379 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 + x^2 - 2}$ を計算せよ.

(2) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対し，定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2016)　　(m20166407)

0.380 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3 - 1} dx$ を計算せよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^{e^5} \frac{\sin(\pi \log x)}{x} dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2021)　　(m20216408)

0.381 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 3x + 3}{x^3 + x^2 + 2x + 2} dx$ を計算せよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \cos\bigl(3\sqrt{x}\,\bigr) dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2022)　　(m20226403)

0.382 複素平面上において，$z = \pm 1$ および $z = \pm i$ を内部に含み，正の向きに一周する単一閉曲線を C とする．このとき，次の積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int_C \frac{\sin \pi z}{(z-1)^2} dz$　　　(2) $\displaystyle\int_C \frac{z^2}{z^4 - 1} dz$

(和歌山大 2007)　　(m20076510)

0.383 周期 X の周期関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (\ |x| \leqq\ d/2\ ) \\ 0 & (\ d/2 < |x| \leqq\ X/2) \end{cases}$$

について次の問いに答えなさい. ただし, $0 < d < X$ である.

(1) $f(x)$ をフーリエ級数に展開しなさい.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\alpha}{n}$ の値を求めなさい. ただし, $0 < \alpha < 1$ とする.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi\alpha}{2n-1}$ の値を求めなさい. ただし, $0 < \alpha < 1$ とする.

(和歌山大 2010)　　(m20106504)

0.384 次の各問いに答えなさい.

(1) $\displaystyle\int e^x \cos nx\, dx$ を求めなさい．ただし n は正の整数とする.

(2) $\displaystyle\int e^x \sin nx\,dx$ を求めなさい．ただし n は正の整数とする．

(3) 関数 $f(x) = e^x \quad (-\pi \le x \le \pi)$ をフーリエ級数展開 $f(x) \approx \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n \cos nx + b_n \sin nx\Big]$ したとき，係数 $a_n (n \ge 0)$, $b_n (n \ge 1)$ を求めなさい．

(和歌山大 2012)　　(m20126507)

0.385 次の関数の $x = \dfrac{\pi}{2}$ のまわりのテイラー展開を 3 次の項まで求めなさい．

$$f(x) = x\cos x$$

(和歌山大 2015)　　(m20156502)

0.386 次の値を求めなさい． $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\exp(\cos x)}{\cos x}$

(和歌山大 2015)　　(m20156503)

0.387 次の 2 重積分を求めなさい．

$$\iint_D x\cos y\,dxdy\,, \quad D = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le \pi,\ x \le y \le 2x\}$$

(和歌山大 2015)　　(m20156504)

0.388 (1) 複素数関数 $w = \dfrac{z}{1-z}$ について次の問いに答えなさい．

(a) $w = u + iv$, $z = x + iy$ とおくとき，u, v を x, y を用いて表しなさい．ただし，u, v, x, y は実数とする．

(b) コーシー・リーマンの方程式が成り立つことを示しなさい．

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{\sin z}{z^2 - \frac{\pi^2}{4}}\,dz$ を求めなさい．ただし，積分路 C は $|z| = 2$ とし，向きは反時計回りとする．

(和歌山大 2015)　　(m20156506)

0.389 (1) 正数 L に対し $\omega = \dfrac{2\pi}{L}$ と置く．整数 k に対し，次式が成り立つことを示しなさい．

$$\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{ik\omega t}dt = \begin{cases} 1 & (k = 0) \\ 0 & (k \ne 0) \end{cases}$$

(2) (1) の条件のもと，自然数 n に対し，$D_n(t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega t}$ とおく．このとき，以下の式が成立することを示しなさい．

(a) $\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} D_n(t)dt = 1$

(b) $\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-\frac{l}{2}}^{0} D_n(t)dt = \dfrac{1}{L}\int_0^{\frac{l}{2}} D_n(t)dt = \dfrac{1}{2}$

(c) $D_n(t + L) = D_n(t)$

(d) $D_n(t) = \dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})\omega t)}{\sin(\frac{\omega}{2}t)}$

(和歌山大 2015)　　(m20156507)

0.390 (1) $f(x) = |\sin x|\ (-\pi \le x \le \pi)$ で定められる周期関数をフーリエ級数に展開しなさい．

(2) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2(2m+1)^2}$ の値を求めなさい.

(和歌山大 2016)　　(m20166507)

0.391　関数 $f(x)$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ x & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

のフーリエ級数展開を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

とするとき，次の (1)〜(3) に答えなさい.

(1) a_0 を求めなさい.

(2) a_n，$n = 1, 2, 3, \cdots$ を求めなさい.

(3) b_n，$n = 1, 2, 3, \cdots$ を求めなさい.

(和歌山大 2018)　　(m20186506)

0.392　関数 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ のマクローリン展開を $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とするとき，係数 a_n を求めよ.

(和歌山大 2022)　　(m20226502)

0.393　関数 $f_n(x, y) = \sin\sqrt{x^n + y^n}$（$n$：自然数）について，次の問いに答えよ，

(1) 1 階偏導関数 $\dfrac{\partial f_n}{\partial x}$ を求めよ.

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{f_1(x, 0)}{\sqrt{x}}\, dx$ を求めよ.

(3) 自然数 m に対して $I_m = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{(f_1(x, 0))^m}{\sqrt{x}}\, dx$ とするとき，I_m と I_{m-2} の関係式を求めよ. また m は奇数として I_m を求めよ.

(4) $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{4}\right\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D f_2(x, y)\, dxdy$ を求めよ.

(京都府立大 2008)　　(m20086702)