[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　∂

0.1 ベクトルの面積分を次の手順に従って求めよ. ただし, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルである. また, “·” はベクトルの内積（スカラー積）, “ × ” は外積（ベクトル積）を表す .

$$\int_S \left(x\boldsymbol{i}+3y^2\boldsymbol{j}\right)\cdot d\boldsymbol{S} \qquad \text{曲面 } \boldsymbol{S} \ : \ 2x+y+2z=6\,,\ x\geq 0\,,\ y\geq 0\,,\ z\geq 0$$

(1) 曲面 $\boldsymbol{S}$ 上の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$ とするとき, a, b, c を求めよ.

(2) 曲面 $\boldsymbol{S}$ の接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}$ をそれぞれ求めよ.

(3) 面積素 $d\boldsymbol{S}$ は $d\boldsymbol{S}=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}dxdy$ で与えられる. $d\boldsymbol{S}$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_S \left(x\boldsymbol{i}+3y^2\boldsymbol{j}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$ を求めよ.

(北海道大 2005)　　(m20050104)

0.2 関数 f が (x,y,z) のスカラー関数であるとき，$\mathrm{grad}(f)$ という演算を以下のように定義します.

$$\mathrm{grad}(f)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}$$

ここで，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x,y,z 方向の単位ベクトルです．以下の問に答えなさい．

(1) f,h が (x,y,z) のスカラー関数であるとき，h が 0 ではない領域で，
$\mathrm{grad}\left(\dfrac{f}{h}\right)=\dfrac{h\cdot\mathrm{grad}(f)-f\cdot\mathrm{grad}(h)}{h^2}$ であることを証明しなさい.

(2) (1) の結果を用いて，点 $(1,1,1)$ における $\mathrm{grad}\left(\dfrac{-x^2+y^2+z-2}{x+y^2-z+1}\right)$ の値を計算しなさい.

(北海道大 2006)　　(m20060104)

0.3 $u=(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ で表される関数がある．次の設問に答えよ．

(1) $\mathrm{grad}\,u$ を求めよ．また，求めたベクトルが $u(x,y,z)=c\quad(c:\text{定数})$ で定義される曲面に対し，幾何学的にどのようなベクトルかを述べよ．ここで $\mathrm{grad}\,u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$ を表し，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x,y,z 軸方向の単位ベクトルである．

(2) $\mathrm{grad}\,u\cdot\boldsymbol{v}=0$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\mathrm{grad}\,u$ とどのような関係にあるかを文章で説明せよ．ただし，“ · ” は内積を表している．

(3) 次のベクトル $\boldsymbol{\ell}$ と $u(x,y,z)=c\quad(c:\text{定数})$ で定義される曲面との幾何学的関係を図示して述べよ．ただし，$\boldsymbol{v}$ は (2) で定義されるベクトルである．

$$\boldsymbol{\ell}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}+\boldsymbol{v}$$

(北海道大 2007)　　(m20070102)

0.4 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ をそれぞれ x,y,z 方面の単位ベクトルとして, 以下の設問に答えよ．途中の計算手順を詳しく記述すること.

(1) 積分経路 $C:\boldsymbol{r}(t)=\cos t\ \boldsymbol{i}+\sin t\ \boldsymbol{j}+2t\ \boldsymbol{k}$（$t=0$ から $t=2\pi$）に沿った，ベクトル関数 $\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ の線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ.

(2) $f(\boldsymbol{r})=\dfrac{1}{\sqrt{r^2+1}}$ （ $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $r=||\boldsymbol{r}||=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ）とし, 原点を中心とする半径が 2 の球の表面を S と表す．このとき, S 上の点 $\boldsymbol{p}=x_p\boldsymbol{i}+y_p\boldsymbol{j}+z_p\boldsymbol{k}$ における $\nabla f\cdot\boldsymbol{n}$ を求めよ．ただし, $\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{p}$ における S の外向き単位法線ベクトルであり, $\nabla f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$ とする.

(北海道大 2012)　　(m20120102)

0.5　デカルト座標系 (x, y) と極座標 (r, θ) の関係が次のように与えられている．このとき，以下の設問に答えよ．

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ r \geq 0,\ ,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

(1)　次の行列 J のすべての成分を r, θ の式で表せ．

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

(2)　次の積分 A を求めよ．ただし $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ とする．

$$A = \int_D x^2\, dxdy$$

(3)　次の行列 G のすべての成分を r, θ の式で表せ．ただし $r > 0$ とする．

$$G = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

(北海道大 2015)　　(m20150101)

0.6　次の関数 z の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(1)　$z = xy^2 + y^3$　　　　(2)　$z = \sin(x^2 y)$

(北見工業大 2007)　　(m20070202)

0.7　平面の直交座標 (x, y) と極座標 (r, θ) の間には $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ の関係がある．ただし，$r > 0$ とする．$z = f(x, y)$ を平面上で定義された 1 回連続微分可能関数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$\dfrac{\partial z}{\partial r}$ および $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 等を用いて表せ．

(2)　$\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$ を示せ．

(北見工業大 2009)　　(m20090203)

0.8　関数 $z = x\sin(x + 2y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(北見工業大 2011)　　(m20110202)

0.9　2 変数関数 $z = \arctan\dfrac{y}{x}$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．（注：$\big(\arctan X\big)' = \dfrac{1}{1 + X^2}$ である）

(北見工業大 2012)　　(m20120202)

0.10　関数 $z = (x + 2y)^5$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(北見工業大 2017)　　(m20170202)

0.11　関数 $z = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$　($(x, y) \neq (0, 0)$ とする) の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(北見工業大 2018)　　(m20180202)

0.12　関数 $f(x, y) = y\log\dfrac{x}{y}$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．$(x, y > 0$ とする.)

(北見工業大 2019)　　(m20190202)

0.13 関数 $z = x^2y + y^4$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.

(北見工業大 2019) (m20190209)

0.14 関数 $z = y\sin(x^2 + xy)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.

(北見工業大 2022) (m20220203)

0.15 関数 $z = \log\left(x^2 + 2y^2\right)$ について，次の問いに答えなさい．ただし，対数は自然対数である.

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めなさい.

(2) 変数 x, y が変数 r, θ の関数

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta$$

で与えられるとき，$\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めなさい.

(3) (1) および (2) の結果を用いて，次の式が成り立つことを示しなさい.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(岩手大 2009) (m20090304)

0.16 (1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ のとき, 行列 $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$ と, その行列式 (determinant) を計算せよ.

(2) 積分 $I = \displaystyle\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$ を計算せよ. ただし,R は正の定数で,D は領域 $x^2 + y^2 \leqq R^2$ を表す. 必要ならば問題 (1) の変数変換を用いよ.

(3) 半径 R の球の体積 V を, 上の問題 (2) の積分 I を用いて表せ. 理由も簡潔に述べること.

(秋田大 2005) (m20050406)

0.17 関数 $z = f(x, y)$ について，$\dfrac{\partial z}{\partial x} = x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = y$ が成り立っているとする．r を定数とし，$x = r\cos t$, $y = r\sin t$ とおく．このとき，$\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ.

(秋田大 2008) (m20080406)

0.18 (1) $x = u - w$, $y = u + w$ とおく．行列 $J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \end{pmatrix}$ と，その行列式を求めよ.

(2) D は平面内の領域で，次の 4 直線で囲まれているとする.

$$y = x\,, \quad y = -x\,. \quad y = x + 2\,, \quad y = -x + 4$$

このとき，積分 $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ の値を求めよ.

(秋田大 2008) (m20080407)

0.19 2 変数 x と y を持つ関数 $f(x, y) = e^x\cos y$ について，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ.

(秋田大 2015) (m20150404)

0.20 $f(x, y) = x^3 - 3x + y^2$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ求めなさい.

(2) 点 $P(1, 1)$ における $f(x, y)$ の $\boldsymbol{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ 方向の微分（$\boldsymbol{u}$ 方向の方向微分係数ともいう）を求めなさい.

(秋田大 2016)　　(m20160403)

0.21 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{x} \neq 0$ において関数 f を

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|}, \quad |\boldsymbol{x}| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$$

で定義する. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right)$, および $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_3}^2}$ を求めよ.

(2) $\varepsilon > 0$ に対して, $S_\varepsilon = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,;\, |\boldsymbol{x}| = \varepsilon\}$ とする. S_ε に沿う表面積分

$$\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S_ε 上の単位外向き法線ベクトルであり, $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} = \nabla f \cdot \boldsymbol{n}$ は f の $\boldsymbol{n}$ 方向への微分を表す.

(3) S を原点 O を内部に含む $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな閉曲面とするとき, S に沿う表面積分

$$\int_{S} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S 上の単位外向き法線ベクトルである.

(東北大 2005)　　(m20050505)

0.22 円柱面 $x^2 + y^2 = ax$ と球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ で囲まれ, 不等式 $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ を満たす領域を R として, 次の問に答えよ.

(1) 領域 R の概形を描け.

(2) 変数変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のヤコビアン $J = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

(3) 領域 R の体積 V を求めよ.

(東北大 2006)　　(m20060501)

0.23 x, y を実数とし, $0 < x < 2\pi$, $0 < y < 2\pi$ の表す領域において, 関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$$

と定義する. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を求めよ.

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ を満足するすべての点 (x, y) を求めよ.

(3) $f(x, y)$ の極大値, 極小値を求めよ.

(4) 曲面 $z = f(x, y)$ 上の $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = \dfrac{\pi}{2}$ に対応する点における接平面の方程式を求めよ.

(東北大 2007)　　(m20070505)

0.24 実変数 x, y の関数 $f(x, y) = x^3 - y^2$ について以下の問に答えよ.

(1) (x, y) が実平面全体をうごくとき, $f(x, y)$ の臨界点 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ となる点}\right)$ をすべて求めよ.

(2) 各臨界点について, それが f の極値を与えるか調べよ.

(3) 点 (x, y) が円 $x^2+y^2=1$ の上をうごくとき，関数 $f(x, y)$ の最大，最小とそのときの x, y の値を求めよ．

(東北大 2012)　　(m20120507)

0.25 次の関数 $f(x, y)$ について，以下の問に答えよ．x, y の範囲はそれぞれ $0<x<\pi/2$, $0<y<\pi/2$ とする．

$$f(x, y)=\sin(x+y)+\cos(x-y)$$

(1) 次の偏導関数を求めよ．

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

(2) 次式を満足する (x, y) の値をすべて求めよ．

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

(3) $f(x, y)$ の極値をすべて求めよ．

(東北大 2021)　　(m20210506)

0.26 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 f を

$$f(x, y)=x^4-4x^3y-4xy^3+y^4 \qquad \bigl(\,(x, y) \in \mathbb{R}^2\,\bigr)$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 f の x, y に関する偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,\ b)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,\ b)=0$ となる $\mathbb{R}^2$ の点 (a, b) をすべて求めよ．

(3) 設問 (2) で求めたすべての点について，その点で f が極小値をとるか，極大値をとるか，または極値をとらないか判定せよ．

(東北大 2022)　　(m20220510)

0.27 (1) ２変数関数 $g(x, y)$ が２回連続微分可能であるとき，それと $x=f_1(r, \theta)=r\cos\theta$, $y=f_2(r, \theta)=r\sin\theta$ の合成関数 $h(r, \theta)=g(r\cos\theta, r\sin\theta)$ について次の等式が成立することを示せ．ただし，$r \neq 0, (x, y) \neq (0, 0)$ とする．

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

(2) ２変数関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) の近傍 $V=\{(x, y)|\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<r\}$ で２回連続微分可能であるとする．次の条件

$$\frac{\partial}{\partial x}f(a, b)=\frac{\partial}{\partial y}f(a, b)=0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a, b)>0\,,\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a, b)\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(a, b)-\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(a, b)\right)^2>0$$

を満たすとき，$f(x, y)$ は (a, b) で極小であることを示せ．すなわち，

$U=\{(x, y)|\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<r'\}$ $(r' \leq r)$ があって，$(x, y) \in U-\{(a, b)\}$ ならば

$f(x, y)>f(a, b)$ が成り立つことを示せ．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030607)

0.28 ２次元のベクトル場 $\boldsymbol{A}(x, y)=(A_x(x, y), A_y(x, y))$, に対して，$\operatorname{div}\boldsymbol{A}$ は

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}$$

で与えられる．div $\boldsymbol{A}$ を極座標 $(x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$ であらわすと

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}$$

となることを示せ．ここで，A_r は $\boldsymbol{A}$ の r 方向（動径方向）成分，A_θ はそれに垂直な方向の成分である．

(お茶の水女子大 2009)　(m20090610)

0.29　3 次元の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \qquad ④$$

に対して, 以下の問いに答えよ. ここで $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルである。また $r = |\boldsymbol{r}|$ である.

(1) $\dfrac{\partial r}{\partial x}$, $\dfrac{\partial r}{\partial y}$, $\dfrac{\partial r}{\partial z}$ を求めよ.

(2) $\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ の発散, $\nabla \cdot \left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$ を求めよ $(r \neq 0)$. ただし, $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$ である.

(お茶の水女子大 2010)　(m20100608)

0.30　$\mathbb{R}^2$ 上の関数が点 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ で（全）微分可能であることの定義を述べよ．また，$f(x, y) = |x||y|$ の微分可能性を $\mathbb{R}^2$ の各点について調べ，微分可能ならばその点での偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(お茶の水女子大 2011)　(m20110609)

0.31　次の方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(\boldsymbol{r}) = a\delta(\boldsymbol{r}), \qquad \text{(a)}$$

に関する以下の問いに答えなさい．ここで右辺の a は正の実数，$\delta(\boldsymbol{r})$ は 3 次元のデルタ関数

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \qquad \text{(b)}$$

である.

(1) 関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ のフーリエ変換を

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k}) \qquad \text{(c)}$$

とした時，これが方程式 (a) を満たすということから関数 $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$ を求めなさい.

(2) 積分要素 $d\boldsymbol{k}$ の直交座標系 (k_x, k_y, k_z) から極座標系 (k, θ, ϕ) への変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k} = \int_0^{\infty} dk \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi |J| \qquad \text{(d)}$$

で与えられる．このときのヤコビアン J を書きなさい．ここで $k = |\boldsymbol{k}|$ である．また (d) の右辺が

$$\int_0^{\infty} k^2 dk \int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \qquad \text{(e)}$$

と書けることを示しなさい.

(3) 問 (1) で求めた $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$ を使って，(c) から $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めなさい．必要があれば，公式

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{(f)}$$

を用いてもよい.

(お茶の水女子大 2013)　(m20130606)

0.32 3 次元微分演算子 $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ に対して ∇r を求めなさい.

ただし $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である.

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160607)

0.33 極座標 (r, θ) で表せる 2 次元領域 $r > 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$ で

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \qquad \text{(i)}$$

を満たし，境界条件

$$u(1, \theta) = \cos 3\theta \qquad 0 \leq \theta < 2\pi \qquad \text{(ii)}$$

$$\lim_{r \to \infty} u(r, \theta) = 0 \qquad 0 \leq \theta < 2\pi \qquad \text{(iii)}$$

を満たす解 $u(r, \theta)$ を以下の手順で求めよ.

(1) (i) の解として $u(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ と表せるものを考える．これを (i) に代入し，左辺が r のみの関数，右辺が θ のみの関数であるような式を導け.

(2) この式が上記の 2 次元領域に対応する任意の (r, θ) に対して成立するためにはその両辺は r , θ によらない定数でなくてはならない．そこで，この定数を c として f の r に関する微分方程式と g の θ に関する微分方程式を導け.

(3) m を整数として $f(r) = r^m$ とおき，定数 c を m で表せ．次に，これを g の θ に関する微分方程式に代入し，(i) の解で，$u_m(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ の形のものを求めよ.

(4) d_m を定数として，(i) の解で $u(r, \theta) = \displaystyle\sum_m d_m u_m(r, \theta)$ の形の解を考え，それが境界条件 (ii),(iii) をみたすようにして求める解 $u(r, \theta)$ 定めよ.

(東京大 2000)　　(m20000705)

0.34 (1) 微分方程式

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (1)$$

について，左辺がある関数 $u(x, y)$ の全微分 $du(x, y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy$ に等しいならば，微分方程式 (1) の一般解は $u(x, y) = C$ (C は任意定数) で与えられる．このような方程式 (1) は完全微分形であるという．以下の設問に答えよ.

(a) 微分方程式

$$-ydx + xdy = 0$$

は，完全微分形ではないが，両辺に $\dfrac{1}{xy^{\alpha}}$ をかけることによって完全微分形の方程式を得ることができる (αは定数)．α の値を求め，完全微分形の微分方程式を導出せよ.

(b) (a) で得られた完全微分形の微分方程式を，$x = 1$ のとき $y = e$ の条件の下で解け．ただし，e は自然対数の底である.

(2) (a) 微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad (2)$$

について，$x = e^t$ と変数変換することにより定係数の微分方程式を導出せよ（その過程も示せ）．ただし，e は自然対数の底である.

(b) (a) で導出した微分方程式を解くことにより微分方程式 (2) の一般解を求めよ.

(c) 微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = x\log_e x$$

について，$x = 1$ において　$y = 1$，$\dfrac{dy}{dx} = 0$ となる解を求めよ．

(東京大 2009)　　(m20090705)

0.35　実数をとる変数 $x_{ij}(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3)$ を用いて，行列 X を

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

で定義する．X の行列式を $|X|$ で表し，X の逆行列を X^{-1} で表す．また，正の実数 s の自然対数を $\log s$ で表す．以下の問いに答えよ．

(1)　$|X|$ の x_{11} に関する偏導関数 $\dfrac{\partial |X|}{\partial x_{11}}$ を，$x_{ij}(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3)$ のうちの必要なものを用いて表せ．

(2)　X が $|X| > 0$ を満たすとき，$y_{ij}(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3)$ を

$$y_{ij} = \frac{\partial(\log |X^{-1}|)}{\partial x_{ij}}$$

で定義する．このとき，y_{11} を，$|X|$ と $x_{ij}(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3)$ のうちの必要なものを用いて表せ．

(3)　(2) で定義した $y_{ij}(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3)$ を用いて，行列 Y を

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix}$$

で定義する．このとき，X^{-1} を用いて Y を表せ．

(東京大 2014)　　(m20140705)

0.36　3 つのベクトル場 $\overrightarrow{A}$，$\overrightarrow{B}$，$\overrightarrow{C}$ を考える．各ベクトル場は次のように定義する．

$$\overrightarrow{A} = rf(r, z)\overrightarrow{e}_\theta$$

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}$$

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{\nabla}\{zf(r, z)\}$$

ただし，$f(r, z)$ は

$$f(r, z) = (r^2 + z^2)^{-3/2}$$

とする．円柱座標系 (r, θ, z) における基底ベクトルを $(\overrightarrow{e}_r,\ \overrightarrow{e}_\theta,\ \overrightarrow{e}_z)$ とし，以下の問いに答えよ．必要であればスカラー場 ϕ およびベクトル場 $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r V_r + \overrightarrow{e}_\theta V_\theta + \overrightarrow{e}_z V_z$ に対する以下の勾配，発散，回転の式を用いてよい．

$$\overrightarrow{\nabla}\phi = \overrightarrow{e}_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \overrightarrow{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \overrightarrow{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right) + \overrightarrow{e}_\theta \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \overrightarrow{e}_z \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)$$

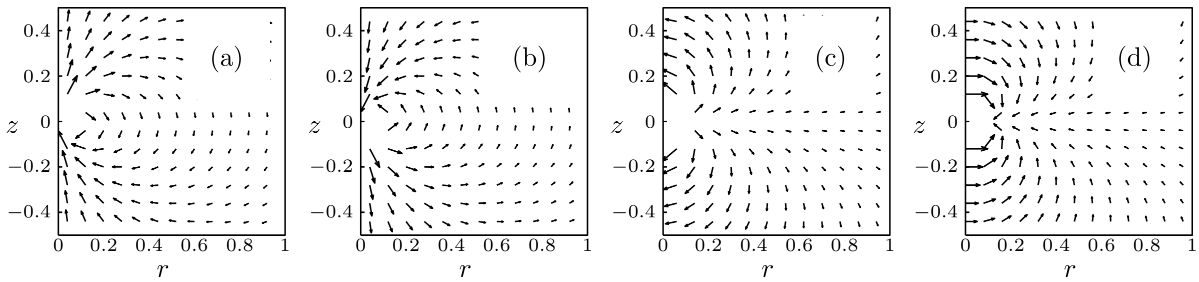
(1)　$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B}$ を求めよ．

(2) $r \leq r_0$ および $z = z_0$ により定義される円板面 S_0 を考える $(z_0 > 0)$．面の法線方向を $\vec{e}_z$ とするとき，この円板面における次の面積分 Φ を，必要があれば r_0, z_0 用いて，表わせ．

$$\Phi = \int_{S_0} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

(3) $\vec{B}$ および $\vec{C}$ を求めよ．

(4) ベクトル場 $\vec{B}$ および $\vec{C}$ の分布の概略として正しい図を下の (a)-(d) からそれぞれ選べ．



(5) $r \leq r_0$ および $z_1 \leq z \leq z_2$ により定義される円柱 $(z_1 > 0)$ に対し，側面と両底面からなる閉曲面 S_1 を考える．面の法線方向を円柱外向きとする．この閉曲面における次の面積分 Q を，必要であれば r_0, z_1, z_2 を用いて，表わせ．

$$Q = \int_{S_1} \vec{C} \cdot d\vec{S}$$

(東京大 2018)　　(m20180703)

0.37 $G(x, y, t)$ は次のように定義される関数である．

$$G(x, y, t) = \frac{1}{t}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right) \quad (t > 0)$$

(1) 偏微分 $\dfrac{\partial G}{\partial x}$, $\dfrac{\partial G}{\partial t}$ をそれぞれ求めよ．

(2) 各 $t > 0$ に対して，次の積分 $I(t)$ を計算せよ．

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t)\, dx\, dy$$

(東京工業大 2001)　　(m20010803)

0.38 極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を考える．$(x, y) = (0, 0)$ 以外で定義された C^2 級関数 $f(x, y)$ について　$\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$　を r, θ に関する偏微分を用いて表わせ．

(東京工業大 2002)　　(m20020803)

0.39 $f(x, y)$ を $\boldsymbol{R}^2 - \{0\}$ 上の C^2- 級関数，　$x = r\cos\theta$,　$y = r\sin\theta$　を $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 - \{0\}$ の極座標とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) 次の等式を示せ．　$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$

(2) $f(x, y)$ は $r = \sqrt{x^2+y^2}$ のみの関数で，θ にはよらないとする．さらに f は条件

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \text{および} \quad r = 1 \text{ のとき } f = 0,\ r = 2 \text{ のとき } f = 1$$

を満たすとする．このような f を求めよ．

(東京工業大 2006)　　(m20060801)

0.40 $u(x,y)=xy^2,\ v(x,y)=x+y$ とおく．次の積分 I の値を求めよ．

$$I=\iint_K\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy\ ,\quad \left(K\ :\ \frac{x^2}{4}+y^2\leq a^2\right)$$

ただし，a は正の定数である．

(東京工業大 2008)　　(m20080802)

0.41 全微分可能な関数 $f(x,y,z)$ に対し，$w=f(r-s,\ s-t,\ t-r)$ とするとき，

$$\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial t}$$

を求めよ．

(東京工業大 2016)　　(m20160803)

0.42 2 変数関数 $f(x,y)=2x^3+3xy+3y^2$ について，次の問いに答えなさい．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めなさい．

(2) $z=f(x,y)$ の極値を求めなさい．

(東京農工大 2015)　　(m20150901)

0.43 2 変数関数 $f(x,y)=x^2y+xy^2+x^2-6xy-y^2-7x+5y$ について次の問いに答えなさい．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めなさい．

(2) $z=f(x,y)$ が極値をとる点 (a,b) で，$a>0,\ b>0$ となるものを求め，$f(a,b)$ の値を求めなさい．さらに $f(a,b)$ が極大値であるか極小値であるか判定しなさい．

(東京農工大 2017)　　(m20170901)

0.44 2 変数関数 $f(x,y)=x^2-2xy+2y^2+3x-4y$ について，次の問いに答えなさい．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) を求めなさい．

(2) $z=f(x,y)$ の極値を求めなさい．

(東京農工大 2018)　　(m20180901)

0.45 2 変数関数 $f(x,y)=-x^3+6xy-8y^3$ について次の問いに答えなさい．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めなさい．

(2) $z=f(x,y)$ の極値を求めなさい．

(東京農工大 2020)　　(m20200901)

0.46 2 変数関数 $f(x,y)=2x^3+xy^2+9x^2+y^2-2$ について以下の問いに答えなさい．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めなさい．

(2) $z=f(x,y)$ の極値を求めなさい．

(東京農工大 2022)　　(m20220901)

0.47 整関数 $f(z)$ $(z=x+iy)$ は，$f(0)=0$ を満たし，その実部が $u(x,y)=e^{-x}(x\cos y+ay\sin y)$ (a は実定数) という形をしているとする．このとき次の問いに答えよ．

(1) $u(x,y)$ が調和関数である（すなわち $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ を満たす）ことから a の値を定めよ．

(2) コーシー・リーマンの関係式に注意して $f(z)$ の虚部 $v(x,y)$ を求めよ．

(3) $f(z)$ を z の関数として表せ．

(電気通信大 1999)　　(m19991005)

0.48 a を正の実数とするとき，実数 x,y の関数 $u=e^{-ax}\sin(2y)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 u が，すべての x,y について $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ を満たすように，正数 a の値を定めよ．

(2) a を (1) で定めた定数とし，u を実部にもつ $z=x+iy$ の正則関数 $f(z)$ を求めよ．(ひとつ求まればよいものとする．答えは z の式で表すこと．)

(電気通信大 2000)　　(m20001007)

0.49 C^2 級の関数 $f(x,y,z)$ が $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ だけの関数 $g(r)$ を用いて $f(x,y,z)=g(r)$ と表されるとする．$\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) Δf を $g'(r),\ g''(r)$ を用いて表せ．

(2) $\Delta f=0,\ g(1)=1,\ g'(1)=2$ のとき，$g(r)$ を求めよ．

(電気通信大 2008)　　(m20081004)

0.50 関数 $f(r)$ から決まる 2 変数関数

$$u(x,y)=f(r)\ ,\qquad r=\sqrt{x^2+y^2}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ を $f'(r)$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)+\dfrac{1}{r}f'(r)$ が成り立つことを示せ．

(電気通信大 2010)　　(m20101003)

0.51 次の重積分について，以下の問いに答えよ．

$$I=\iint_D \frac{dxdy}{1+(x+y)^4}\qquad (D: x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1)$$

(1) $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$ とおくとき，x,y の u,v に関するヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ．

(2) I の値を求めよ．

(電気通信大 2011)　　(m20111004)

0.52 全微分可能な関数 $z=f(x,y)$ に対して，極座標による変数変換

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta\quad (r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$$

を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\left[\dfrac{\partial z}{\partial r}\ ,\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right]=\left[\dfrac{\partial z}{\partial x}\ ,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}\right]A$ を満たす行列 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ を求めよ．

(2) x,y の r,θ に関するヤコビアン（ヤコビの行列式）$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を計算せよ．

(3) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ を r, $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を使って表せ.

(電気通信大 2012)　　(m20121003)

0.53 関数 $u(x,y,t)=\dfrac{1}{4\pi t}e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}$ $(t>0)$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ および $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ を計算せよ.

以下では，$t>0$ を定数とする.

(2) $u(x,y,t)$ の $x.y$ に関するマクローリン展開

$$u(x,y,t)=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+\cdots$$

の係数 a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{20}, a_{11}, a_{02} を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\iint_{x^2+y^2\leq R^2}u(x,y,t)\,dxdy$ を計算せよ.

(電気通信大 2013)　　(m20131003)

0.54 C^1 級関数 $f(r)$ に対して，次の合成関数

$$u(x,y)=f(\sqrt{x^2+y^2}) \qquad (r=\sqrt{x^2+y^2})$$

を考える．以下の問いに答えよ.

(1) xyz 空間内の曲面 $S: z=u(x,y)$ を考える．このとき，S 上の点 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ f(1))$ における S の接平面と z 軸との交点の z 座標 z_0 を $f(1)$, $f'(1)$ を用いて表せ．ただし，α は定数とする.

(2) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ が r の関数として表されることを示せ.

(3) $f(r)=r^2e^{-r^2}$ のとき，次の重積分 I の値を求めよ.

$$I=\iint_D u(x,y)\,dxdy\,, \qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq 1\right\}$$

(電気通信大 2019)　　(m20191003)

0.55 $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$ のとき，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ となることを証明しなさい．ただし，$(x,y)\neq(0,0)$ とする.

(千葉大 2003)　　(m20031202)

0.56 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $D=\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\leq a^2\}$ として, 次の 2 重積分の値を求めなさい.

$$I=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

(千葉大 2005)　　(m20051203)

0.57 次の重積分に関して以下の問に答えなさい.

$$I=\iint_D\frac{x+y}{y^2}\sin(x+y)\,dxdy$$
$$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1\leq y\leq 2\,,\ 0\leq x\leq y\right\}$$

(1) 積分領域 D を $u=x+y$, $v=\dfrac{x}{y}$ の関係で (u,v) へ変数変換した場合の D に対応する積分領域を D' とする．$O-xy$ 平面での D, および, $O-uv$ 平面での D' を図示しなさい.

(2) 関数行列式（ヤコビアン）$J(x,y) = \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$ を求めなさい．

(3) 重積分 I の値を求めなさい．

(千葉大 2016)　　(m20161203)

0.58 $f(x,y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ で $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(筑波大 1998）　　(m19981302)

0.59 $f(x,y) = r^n$ とするとき， $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を次の手順に従って求めよ．

ただし， $r = \sqrt{x^2+y^2}$， n は整数とする．

変数の組 (x,y) を $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ により， (r,θ) の組に変数変換することを考える．

(1) $\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -\dfrac{\sin\theta}{r}$ および $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$ であることを示せ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial\theta} = 0$ であることに注意し，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\sin^2\theta}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r}$$

であることを示せ．

同様に， $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ についても求め，整理することにより，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

となる．

(3) $f(x,y) = r^n$ のとき， $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を具体的に計算せよ．

(筑波大 2000）　　(m20001303)

0.60 $g(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ なる関数を考える．ただし，$\ln x$ は x の自然対数を表す．

(1) $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ 及び $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ を求めよ．また，点 $(2,1)$ における $g(x,y)$ の勾配の大きさを求めよ．

(2) $\displaystyle\iint_D g(x,y)dxdy$ を求めよ．ただし，$D : x^2+y^2 \leq 1$ とする．

(筑波大 2004)　　(m20041315)

0.61 2 変数関数 $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ の 2 階偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を求めよ．

(筑波大 2005)　　(m20051310)

0.62 クーロンポテンシャル $\phi = \dfrac{1}{r}$ は原点以外の領域においてラプラスの方程式　$\Delta\phi = 0$

を満たすことを示しなさい．ただし，$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ である．

(筑波大 2006)　　(m20061303)

0.63 $z = f(x,y)$ が全微分可能で，$x = r\cdot\cos\theta$，$y = r\cdot\sin\theta$ であるとする．このとき，次式が成立することを証明せよ．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2$$

(筑波大 2006)　　(m20061309)

0.64 関数 $f(x,y)=x^3+y^3+3xy+1$ について以下の問に答えよ.

(1) $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2-\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ. (2) $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(筑波大 2007) (m20071318)

0.65 変数 x,y の関数 $z=f(x,y)$ を変数変換 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ により新しい変数 $r,\ \theta$ で表す．このとき，関数 $z=f\left(x(r,\theta),\ y(r,\theta)\right)$ について以下の設問に答えよ.

(1) 1 階偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を $r,\ \theta,\ \dfrac{\partial z}{\partial r},\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を用いて表せ.

(2) 2 階偏導関数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ は

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\theta}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}$$

であることを示せ.

(筑波大 2009) (m20091308)

0.66 複素数 $z=x+iy$（i は虚数単位）に対して定義される複素関数 $f(z)$ は正則であり，その実部 $u=u(x,y)$，虚部 $v=v(x,y)$ は $u(x,y)=x^3-3xy^2+x,\ v(0,0)=0$ を満たすという. 以下の問いに答えよ.

(1) $v(x,y)$ を求めよ. 必要があれば，$f(z)$ が Cauchy − Riemann の関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

を満たすことを用いてよい.

(2) $f(z)$ を求めよ.

(3) C を複素平面上の単位円周，C の向きを反時計回りとするとき，複素積分

$$\int_C \frac{f(z)}{z^2}\,dz$$

の値を計算せよ.

(筑波大 2011) (m20111303)

0.67 領域 D を

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,0<x+y+z<1,\ x,y,z>0\right\}$$

と定める．このとき広義重積分

$$I=\iiint_D \frac{\log(x+y+z)}{\sqrt{xyz}}\,dxdydz$$

を以下の手順で求めよ.

(1) 変数変換

$$\begin{aligned} u&=x+y+z \\ uv&=y+z \\ uvw&=z \end{aligned}$$

により，D が領域 $E=\left\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3\,|\,0<u,v,w<1\right\}$ に写されることを示せ.

(2) 上の変数変換のヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ を求めよ.

(3) I の値を求めよ.

(筑波大 2012) (m20121327)

0.68 偏微分可能な $f(x,y)$ が $f(cx,cy)=c^n f(x,y)$ を満たしているとする. この時, $x\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}+y\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ を $f(x,y)$ の偏導関数を用いずに示せ.

(筑波大 2014) (m20141303)

0.69 2 変数関数 $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ について以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を計算せよ.

(2) $f(x,y)$ の全微分を計算せよ.

(3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$ を計算せよ.

(4) $(x,y)=(0,0)$ を中心とする $f(x,y)$ のテイラー展開を 2 次まで求めよ.

(5) $(x,y)=(1,1)$ を中心とする $f(x,y)$ のテイラー展開を 2 次まで求めよ.

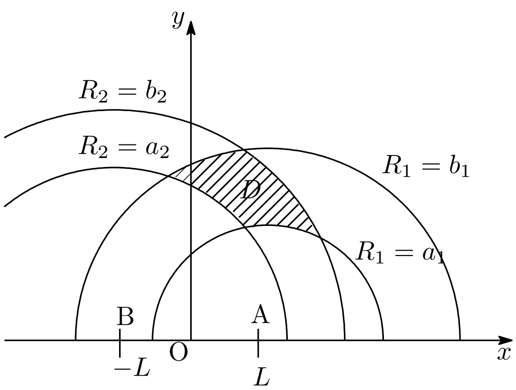
(6) xyz 空間で方程式 $z=f(x,y)$ が表す曲面 S について, S 上の点 $P(1,1,f(1,1))$ における接平面の方程式を求めよ.

(筑波大 2015) (m20151306)

0.70 xy 平面の $y>0$ なる領域（上半面）の点 $P(x,y)$ に対して, 点 $A(L,0)$ および点 $B(-L,0)$ からの距離の二乗

$$R_1=(x-L)^2+y^2\ , \quad R_2=(x+L)^2+y^2$$

を考える. ここで $L>0$ とする. また, $f(x,y)=\dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)$ とする.



(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

(2) c をゼロでない定数とし, xy 平面の上半面において $f(x,y)=c$ で表される曲線を考える. この曲線上の任意の点 (x_0,y_0) における法線の方程式を求めよ. そして, その法線と x 軸との交点が c と L だけで決まることを示せ.

(3) a_1,a_2,b_1,b_2 を正の定数とし, $R_1=a_1$ と $R_1=b_1$ で指定される円がそれぞれ $R_2=a_2$ と $R_2=b_2$ で指定される円と交わる場合を考える（図を参照）. ここで $a_1<b_1$, $a_2<b_2$ とし, xy 平面の上半面において $a_1\le R_1\le b_1$, $a_2\le R_2\le b_2$ で指定される領域を D とするとき, D を x 軸の周りに回転して出来る回転体の体積は

$$V=2\pi\int_D y\,dxdy$$

で与えられる. x,y に関する積分を R_1, R_2 に関する積分に変換することにより V を求めよ.

(4) xy 平面を複素平面と考え，点 $P(x,y)$ を複素数 $z=x+iy$ に対応させ，
複素関数 $g(z)=\log\left(\dfrac{z-L}{z+L}\right)$ を考える．$z-L=r_1e^{i\theta_1}$, $z+L=r_2e^{i\theta_2}$ とおくことにより，$g(z)$ の実部は $f(x,y)$ に一致することを示せ．ただし，$0<r_1$, $0<r_2$, $0<\theta_1<\pi$, および $0<\theta_2<\pi$ とする．さらに $g(z)$ の虚部は三角形 PAB のどの内角に対応するか答えよ．

(筑波大 2016)　　(m20161315)

0.71 図のような円柱座標系での微積分に関する以下の問いに答えよ．

(1) 直交座標 (x,y,z) を円柱座標 (r,θ,z) に変換する，x, y, $\dfrac{\partial x}{\partial r}$, $\dfrac{\partial x}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial x}{\partial z}$ を r, θ, z の関数として示せ．

(2) $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} & \dfrac{\partial r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} & \dfrac{\partial \theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix}=E$ が成り立つことに留意し，$\dfrac{\partial r}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を r, θ, z を用いて示せ．なお，E は単位行列である．

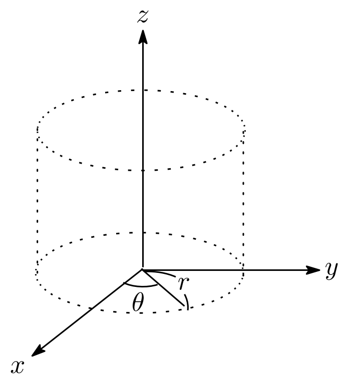
(3) (2) の結果を用いると円柱座標系のラプラシアンは
$\triangle=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ で表される．　関数 $f(r,\ \theta,\ z)=rz\cos\theta$ に対して $\triangle f$ を計算せよ．

(4) 円柱座標系で r だけを変数 $(r>0)$ とする関数 $g(r)$ が $\triangle g(r)=0$, $g(1)=0$, $g(e)=2$ の条件を満たす．この $g(r)$ を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

(5) x, y, z の r, θ, z に対するヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算せよ．

(6) K を積分領域とする以下の三重積分を，円柱座標系への変数変換を用いて計算せよ．ただし，a は正の定数である．

$$\iiint_k y^2\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,\qquad K=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le a\right\}$$



(筑波大 2018)　　(m20181301)

0.72 関数 $f(x,y)$ は，x および y について偏微分可能で $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ なる関係を満足する．

関数 $f(x,y)$ を $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ $(r>0,\ 0\le\theta<2\pi)$ で変数変換したときの $f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ は，変数 r を含まない関数となることを証明しなさい．

(筑波大 2018)　　(m20181315)

0.73 次の式で与えられる陰関数 $z = f(x, y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めなさい.

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 1$$

(筑波大 2020)　　(m20201309)

0.74 (1) $z = f(x, y)$ は xy 平面上で定義された C^2 級関数とする．変数 u, v に対して，$x = u + v$, $y = uv$ のとき，以下の等式を示せ.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = (x^2 - 4y)\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\,\frac{\partial z}{\partial y}$$

(2) 関数 $g(x,\ y) = x^4 + y^4 - 2xy^2$ の xy 平面における極値をすべて求めよ.

(筑波大 2021)　　(m20211303)

0.75 $x + 2y + z + e^{2z} - 1 = 0$ から定まる陰関数 $z = f(x, y)$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を求めなさい.

(2) $z = f(x, y)$ が表す曲面上の点 $(x, y, z) = (-2, 1, 0)$ における接平面の方程式を求めなさい.

(3) $f(x, y)$ の原点 $(x, y) = (0, 0)$ における 2 変数のテイラー展開を 2 次の項まで求めなさい.

(筑波大 2021)　　(m20211307)

0.76 D を xy 平面上の領域とするとき，曲面 $z = f(x, y)$ $\big((x, y) \in D\big)$ の面積は

$$\iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\ dxdy$$

で表される．このことを用いて半径 R の球の表面積の公式を導け.

(埼玉大 1998)　　(m19981401)

0.77 $f(x, y)$ は何回でも偏微分できる関数で，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ とする．$f(x, y) = 0$ により定まる陰関数を $y = \varphi(x)$ とするとき，$\dfrac{d\varphi}{dx}$, $\dfrac{d^2\varphi}{dx^2}$ を f の偏導関数を用いて表せ.

(埼玉大 2004)　　(m20041404)

0.78 $x > 0$ に対して

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x)$ を求めよ.

(2) $F'(x)$ を求めよ. ただし, 等式

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{e^{-xt}\sin t}{t}\right\}dt$$

が成り立つことを用いてよい.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0} F(x)$ を求めよ.

(埼玉大 2010)　　(m20101403)

0.79 xy 平面上で定義された関数 $f = f(x, y)$ は，正値で 2 階微分可能であり，

$$f\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

を満たすものとする．また，$g(x, y) = \log f(x, y)$ とおく．

(1) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ が満たす式を，f を用いずに表せ．

(2) $\phi(x)\psi(y)$ の形の関数を変数分離型関数とよぶ，ϕ と ψ が正値で 2 階微分可能な関数であるならば，$f(x, y) = \phi(x)\psi(y)$ は，上の条件 $(*)$ を満たすことを示せ．

(3) 上の条件 $(*)$ を満たす関数 f は，変数分離型の関数であることを示せ．

(埼玉大 2011)　　(m20111409)

0.80 次の関数の偏導関数 $\partial f \,/\, \partial x$, $\partial f \,/\, \partial y$ を求めよ．

$f(x, y) = x^2 \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$

(埼玉大 2013)　　(m20131402)

0.81 次の関数の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

$f(x, y) = \cos(xy) \sin y$

(埼玉大 2015)　　(m20151402)

0.82 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，$f(r) = \log r$ とする．次の各問に答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \dfrac{1}{r^2}$ を示せ．

(茨城大 2000)　　(m20001701)

0.83 (1) $P(x, y) = 2x^m(y + x^2)$，$Q(x, y) = -x^{m+1}(1 + x^2) + y$ とするとき，$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ となるように m を定めよ．

(2) (1) で求めた m を考えるとき，微分方程式 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ の一般解を求めよ．

(茨城大 2002)　　(m20021704)

0.84 (x, y) を平面上の直交座標，(r, θ) を極座標とする．以下の各問に答えよ．

関数 $f(x, y)$ の定義域内の点 $\boldsymbol{p}$ およびベクトル $\boldsymbol{u} = (a, b)$ に対し，極限 $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{p})}{t}$ を点 $\boldsymbol{p}$ での $\boldsymbol{u}$ 方向の微分係数と呼び，$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{p})$ で表す．

(1) 関数 $f(x, y) = r \sin 3\theta$ の原点 $\boldsymbol{o}$ での $\boldsymbol{u} = (\cos\phi\,,\ \sin\phi)$ 方向の微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{o})$ を求めよ．また，偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{o})$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{o})$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x, y)$ が点 $\boldsymbol{p}$ の近傍で偏微分可能，かつ，偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ が点 $\boldsymbol{p}$ で連続ならば等式

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{p}) = a\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p}) + b\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p})$$

が成立することを示せ．次に (1) の関数 f は原点 $\boldsymbol{o}$ でこの等式を満たさない理由を説明せよ．

(茨城大 2007)　　(m20071706)

0.85 $x>0,\ y>0$ とする．$a>0,\ 0<b<1$ のとき，以下の各問に答えよ．

(1) 変数変換 $u=xy,\ v=\log\dfrac{y}{x}$ のヤコビ行列式 $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ．log は自然対数である．

(2) 直線 $y=ax,\ y=(a^2+1)x$，および曲線 $xy=b,\ xy=b^2$ で囲まれた領域 $D_{a,b}$ を xy–座標平面に図示せよ．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_{D_{a,b}} dxdy$ に (1) の変数変換を用いて，領域 $D_{a,b}$ の面積 $S(a,b)$ を求めよ．

(4) $\dfrac{\partial S}{\partial a}=\dfrac{\partial S}{\partial b}=0$ となる点 (a,b) を求めよ．その点で $S(a,b)$ が極値をとるかどうか判定せよ．

(茨城大 2008)　　(m20081702)

0.86 次の連立不等式の表す領域を D とする．

$$y \geqq x,\ y \geqq -x,\ 4 \leqq x^2+y^2 \leqq 9$$

以下の各問に答えよ．

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) 極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ に対して，$J=\dfrac{\partial x}{\partial r}\dfrac{\partial y}{\partial \theta}-\dfrac{\partial x}{\partial \theta}\dfrac{\partial y}{\partial r}$ とおく．J を計算せよ．

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$ を計算せよ．

(茨城大 2012)　　(m20121704)

0.87 実数 x,y に対して，$z=x+iy$ とする．複素関数 $f(z)$ を実部と虚部に分けて，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ とおく．$u(x,y)=e^{-2x}\cos 2y$ のとき，以下の各問に答えよ．

(1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を計算せよ．

(2) $v(x,y)$ は，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ かつ $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ を満たすとする．このとき，$v(0,0)=3$ となるような $v(x,y)$ を求めよ．

(3) $f(z)$ を z の関数として表せ．

(茨城大 2012)　　(m20121707)

0.88 関数 $f(x)$ は R 上で微分可能で導関数 $f'(x)$ が連続であるとする．a を 0 でない定数として

$$z=f(x+ay)$$

と定める．以下の各問に答えよ．

(1) 次の等式を示せ．

$$\frac{\partial z}{\partial y}-a\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

(2) $z=f(x+ay)$ が表す曲面上の点 $\big(0.0.f(0)\big)$ におけるこの曲面の接平面の方程式を求めよ．

(茨城大 2015)　　(m20151707)

0.89 $\boldsymbol{R}^2$ 上に定義域 D をもつ実数値関数 $f(x,y)$ を考える．

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{y^2-1}}$$

このとき，次の小問 (1) と (2) に答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の定義域 D を調べ，xy 平面上に図示せよ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ となる点 (x,y) が，(1) で求めた定義域 D 上に何個存在するか調べよ．

(茨城大 2018)　　(m20181702)

0.90 関数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ で 2 回連続微分可能（すなわち，2 次までの偏導関数がすべて存在し，かつ連続）で，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ かつ $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ を満たしているとする．このとき，次の小問 (1) および (2) に答えよ．

(1)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$
が成り立つことを示せ．

(2) $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対し，$w(x,y)=xu(x,y)-yv(x,y)$ とおく．
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$$
が成り立つことを示せ．

(茨城大 2021)　　(m20211702)

0.91 $f(x,y)=x^2y$ として，次の問に答えよ．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) 領域 $D=\{(x,y)\mid y\geqq x,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\}$ を xy–平面上に図示せよ．

(3) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dy\,dx$ を求めよ．

(4) D での $f(x,y)$ の最大値を求めよ．

(山梨大 2002)　　(m20021803)

0.92 $f(x,y)=x\arcsin y+y\arccos x$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ を求めよ．ただし，$\arcsin y$, $\arccos x$ は，逆三角関数である．

(山梨大 2004)　　(m20041803)

0.93 (1) $f(x,y)=x^2\sin y+y^3\cos x$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \sin^3 x dx$ を求めよ．

(山梨大 2005)　　(m20051804)

0.94 2 変数関数 $g(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2+1}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int g(x,1)dx$ を求めなさい．

(2) 領域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\}$ とするとき，二重積分
$$\iint_D g(x,y)dxdy$$
の値を求めなさい．

(3) $\dfrac{\partial g}{\partial x}=\dfrac{\partial g}{\partial y}=0$ を満たす点 (x,y) を求めなさい．

(4) 上記の領域 D での $g(x,y)$ の最大値を求めなさい．

(山梨大 2011)　　(m20111802)

0.95　偏微分 $\dfrac{\partial^2 \sin^2(x^2 y)}{\partial y\,\partial x}$ を求めなさい.

(山梨大 2012)　　(m20121802)

0.96　位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3) \equiv (x_i)$ と時間 t の関数として，ベクトル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ が与えられているとき，次の設問に答えよ.

(1)　ベクトル $\mathbf{A}$ の成分 A_i (但し，$i = 1, 2, 3$) を用いて，

(a)　$\bigtriangledown \cdot \boldsymbol{A}$　　(b)　$\bigtriangledown \times\ \boldsymbol{A}$　　(c)　$\bigtriangledown \cdot \bigtriangledown \boldsymbol{A} \equiv \bigtriangledown^2 \boldsymbol{A}$ を表せ.

(2)　$\bigtriangledown \times\ \bigtriangledown \times\ \boldsymbol{A} = \bigtriangledown(\bigtriangledown \cdot \boldsymbol{A}) - \bigtriangledown^2 \boldsymbol{A}$ という関係が成り立つことを，i 成分について示せ.

(3)　$\bigtriangledown \times\ \boldsymbol{B} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ および $\bigtriangledown \times\ \boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ から，$\boldsymbol{E}$ を消去して $\boldsymbol{B}$ の満たす方程式を求めよ.
但し，c はゼロでない定数とする.

(4)　$\boldsymbol{B} = \bigtriangledown \times\ \boldsymbol{A}$ かつ $\bigtriangledown \cdot \boldsymbol{A} = 0$ が成り立つとき，(2) と (3) の結果を用いて，$\boldsymbol{A}$ の満たす方程式を求めよ.

(山梨大 2016)　　(m20161807)

0.97　$xy-$ 平面上の連続関数 $f(x, y)$ を考える. f の 1 階偏導関数 $f_x(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ および $f_y(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ はともに $xy-$ 平面上で連続であるとする．このとき，ある $\theta_0 \in (0, 2\pi)$ が存在し，
$-f_x(\cos\theta_0, \sin\theta_0)\sin\theta_0 + f_y(\cos\theta_0, \sin\theta_0)\cos\theta_0 = 0$　　となることを示せ.

(信州大 2008)　　(m20081903)

0.98　(1)　次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$$

(2)　次の極限が存在しないことを示せ.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

(3)　2 変数関数 $z = f(x, y)$ と $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ の合成関数 $f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ に対し，関係式

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

が成り立つことを示せ.

(信州大 2020)　　(m20201905)

0.99　実変数の実数値関数 $f(x)$ を　　$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & ,\quad x \neq 0 \text{ の場合} \\ 0 & ,\quad x = 0 \text{ の場合} \end{cases}$
によって定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ となることを示せ.　　(2)　$x \neq 0$ に対して，$f'(x)$ を求めよ.

(2)　$f'(0) = \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ を求めよ.　　(4)　$f'(x)$ は $x = 0$ で連続でないことを示せ.

(3)　$F(x, y) = f(xy)$ とおくとき，$xy \neq 0$ に対して，x に関する偏導関数 $\dfrac{\partial F}{\partial x}$，および，$y$ に関する偏導関数 $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ を求めよ.

(新潟大 2001)　　(m20012004)

0.100 次の公式を示せ．

$$\overrightarrow{\nabla}\times\ (\overrightarrow{\nabla}r) = 0$$

ここで，$r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$ であり，$\overrightarrow{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ である．

(新潟大 2001)　　(m20012009)

0.101 関数 $f(x, y) = 4x^3y + 3x^2y^2 + xy^3 + y^4$ の 1 階偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$，2 階偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ と $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ.

(新潟大 2009)　　(m20092002)

0.102 関数 $u(x, y, z) = \dfrac{yz}{x^2+y^2}$ について, 次式を計算せよ.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

(新潟大 2010)　　(m20102013)

0.103 次の 2 変数関数 $f(x, y)$ について，偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ求めよ.

$$f(x, y) = \sin^2(x+y)\cos(x+y)$$

(新潟大 2014)　　(m20142001)

0.104 関数 $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}} + 2xy$ の 2 次偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ を求めよ.

(新潟大 2016)　　(m20162008)

0.105 $z = \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \end{vmatrix}$ とするとき，$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ となる x，y を求めよ.

(長岡技科大 1991)　　(m19912107)

0.106 $z = \sin\dfrac{y}{x}$ とするとき，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.

(長岡技科大 1992)　　(m19922103)

0.107 以下の問いに答えよ.

(1) 平面上のベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ について，$|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}| = 1, \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ が成り立つとき，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角，$\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{c}$ のなす角，$\overrightarrow{c}$ と $\overrightarrow{a}$ のなす角を求めよ.

(2) 一直線上にない 3 つの定点 $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)$ がある．A, B, C と異なる点 $P(x, y)$ に対して $z = |\overrightarrow{AP}| + |\overrightarrow{BP}| + |\overrightarrow{CP}|$ とおくとき，次の式を証明せよ.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AP}|} + \frac{\overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{BP}|} + \frac{\overrightarrow{CP}}{|\overrightarrow{CP}|}$$

(3) ある点 P で z が極小となったとする．このとき前問 (1)(2) を利用して $\angle APB, \angle BPC, \angle CPA$ を求めよ.

(長岡技科大 1994)　　(m19942105)

0.108 $u(x,y)=3x^2y-y^3$ とするとき，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\ ,\ v(1,1)=1$$

を満たす $v(x,y)$ を求めよ．

(長岡技科大 1995） (m19952102)

0.109 $z=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \end{vmatrix}$ とするとき，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ となる x,y を求めよ．

(長岡技科大 1996) (m19962105)

0.110 $f(x)$ を 2 回微分可能な関数とする．関数 $u(x,y)=f(x)e^{-2y}$ が偏微分方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ を満たしているとき，$f(x)$ を求めよ．

(長岡技科大 2000) (m20002103)

0.111 (1) 微分方程式 : $\dfrac{dy}{dx}+ay=0$ の初期条件 $y(0)=b$ を満たす解を求めよ. ここで a,b は定数である.

(2) 微分できる関数 $f(t)$ に対して, $z=f(x+2y)$ とおく. この z が $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0$ を満たし, かつ $f(0)=2$ となる $f(t)$ を求めよ.

(長岡技科大 2005) (m20052105)

0.112 $z=x^2+y^2$ とする，以下の問いに答えなさい.

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めなさい.

(2) 空間の曲面 $z=x^2+y^2$ 上の点 (a,b,c) における接平面の方程式を求めなさい.

(3) 前問の接平面が点 $(0,0,-\sqrt{2})$ を通るような c の値を求めなさい.

(長岡技科大 2008) (m20082102)

0.113 以下の問に答えなさい.

(1) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2}+c^2y=0$ の一般解を求めなさい．ただし，c は正の定数である.

(2) $f(t)$ を 2 回微分可能な関数とする．2 変数関数 $z(x,y)=f(3x-4y)$ が
偏微分方程式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+z=0$ の解となるような $f(t)$ を求めなさい.

(長岡技科大 2011) (m20112104)

0.114 以下の問いに答えなさい.

(1) $u(t)$ に関する常微分方程式 $t\dfrac{du}{dt}-u=0$ の一般解を求めなさい.

(2) $f(t)$ を微分可能な関数とする．2 変数関数 $z(x,y)=f(x^2y^3)$ が偏微分方程式

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-5z=0$$

の解になるような，$f(t)$ および $z(x,y)$ を求めなさい.

(長岡技科大 2012) (m20122104)

0.115 以下の問いに答えなさい.

(1) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=e^{-2x}$ を解きなさい.

(2) 2 変数関数 $z(x,y)=f(x)e^{-2y}$ が偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{-2(x+y)}$$

の解になるような，2 回微分可能な関数 $f(x)$ を求めなさい．

(長岡技科大 2013)　　(m20132104)

0.116 xy 平面において，D を不等式

$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1$

で表される領域とする．下の問いに答えなさい．

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{x+y}dxdy$ を求めなさい．

(2) $s=x+y,\ t=x-y$ とおくとき，行列式 $J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}$ を求めなさい．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{(x+y)^2}dxdy$ を求めなさい．

(長岡技科大 2021)　　(m20212103)

0.117 (1) 極座標変換 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ に対して，ヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ．

(2) 重積分

$$\iint_{x^2+y^2\leqq 1}\sqrt{x^2+y^2}\,\exp\Big(-\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^3\Big)dxdy$$

を求めよ．ただし，$\exp(t)=e^t$ である．

(金沢大 1999)　　(m19992204)

0.118 変数変換 $\begin{cases} x=ar\cos\theta \\ y=br\sin\theta \end{cases}$ $(a,b$ は正定数$)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $0\leqq r\leqq 1$, $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，(x,y) の動く領域 D を図示せよ．

(2) ヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$ を求めよ．

(金沢大 2000)　　(m20002202)

0.119 関数 $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(2) 閉領域 $D(a)=\big\{(x,y)|1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ a\big\}$ $(a>1)$ に対して $\displaystyle\iint_{D(a)}f(x,y)dxdy=\frac{\pi}{2}$ であるとき，a の値を求めよ．

(金沢大 2003)　　(m20032202)

0.120 a,b は正の実数とする．

(1) $\dfrac{x}{a}=r\cos\theta\,,\ \dfrac{y}{b}=r\sin\theta \quad (0<r\,,\ 0<\theta<2\pi)$ とおくとき, ヤコビアン

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad \text{を求めよ.}$$

(2) 積分 $\displaystyle\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy$ を計算せよ. ただし, $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ y\geqq\ 0,\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq\ 1\right\}$ とする.

(金沢大 2005) (m20052207)

0.121 関数 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad ((x,y)\neq(0,0))$ について, 次の問に答えよ.

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を計算せよ.

(2) $0<\varepsilon<1$ とする. 積分 $\displaystyle I(\varepsilon)=\iint_{\varepsilon\leqq\ \sqrt{x^2+y^2}\leqq\ 1}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dxdy$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}(\sin\varepsilon)I(\varepsilon)$ を求めよ.

(金沢大 2006) (m20062203)

0.122 何回でも偏微分可能な関数 $u(x,y,z)$ が $\Delta u=0 \quad \left(\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$
をみたしているとする. このとき, $v=x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}$ に対して, Δv を計算せよ.

(金沢大 2007) (m20072211)

0.123 (1) 変数変換 $x=u,\ y=uv$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy,\ D=\{(x,y)\mid 1\leqq\ x\leqq\ 2,\ 0\leqq\ y\leqq\ x\}$ を求めよ.

(3) $R>1$ とし, $D_R=\{(x,y)\mid 1\leqq\ x\leqq\ R,\ 0\leqq\ y\leqq\ x\}$ とおく. 実数 α について, 極限値
$\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\iint_{D_R}\frac{x^\alpha}{x^2+y^2}dxdy$ が存在するかどうか調べよ. 存在する場合はその値を求めよ.

(金沢大 2008) (m20082203)

0.124 次の問に答えよ.

(1) 変数変換 $x=ar\cos\theta\,,\ y=br\sin\theta$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ. ただし, $a,\ b$ は正の定数とする.

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(1+2x^2+y^2)^2}\,dxdy\,, \quad D=\{(x,y)\ :\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0\}$ を求めよ.

(金沢大 2009) (m20092203)

0.125 (1) $x=u\cosh v\,,\ y=u\sinh v$ とおく.

$$1\leqq\ u\leqq\ 2,\ -\infty<v<\infty \text{ のとき } x\geqq\ 1,\ 1\leqq\ x^2-y^2\leqq\ 4$$

となることを示せ. ただし, $\cosh v=\dfrac{e^v+e^{-v}}{2}\,,\ \sinh v=\dfrac{e^v-e^{-v}}{2}$ である.

(2) 変数変換 $x=u\cosh v\,,\ y=u\sinh v$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

(3) 重積分

$$\iint_D \frac{\log(x^2-y^2)}{x}\,dxdy$$

を計算せよ. ただし $D=\left\{(x,y)\,|\,x \geqq\ 1,\ 1 \leqq\ x^2-y^2 \leqq\ 4\right\}$ とする.

(金沢大 2010) (m20102203)

0.126 関数 $f(x,y,z)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}$ に対して, $\left(\partial f/\partial x\right)^2+\left(\partial f/\partial y\right)^2+\left(\partial f/\partial z\right)^2$ を求めなさい. ただし, $x^2+y^2+z^2\neq 0$ とする.

(金沢大 2010) (m20102211)

0.127 関数 $f(x,y)=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ.

(2) $D_a=\{(x,y)\mid x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0,\ 2\leqq\ x^2+y^2\leqq\ a^2\}$ とする.

$$\lim_{a\to\infty}\iint_{D_a}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy$$

を求めよ.

(金沢大 2011) (m20112203)

0.128 (1) 変換 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ $(r\geqq\ 0)$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ.

(2) 重積分

$$\iint_{x^2+y^2\leqq\ 2}\log(1+x^2+y^2)\,dxdy$$

を計算せよ.

(金沢大 2012) (m20122203)

0.129 (1) $(\sin^{-1}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1<x<1)$ を示せ. ここで, $\sin^{-1}x$ は逆正弦関数を表す.

(2) 座標変換

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \qquad (r>0,\ 0<\theta<2\pi)$$

に対するやコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ.

(3) 重積分

$$\iint_D \frac{y}{(x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy$$

を求めよ. ただし, $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \dfrac{1}{4}\leqq\ x^2+y^2\leqq\dfrac{3}{4},\ 0\leqq\ y\leqq\ x\right\}$ とする.

(金沢大 2015) (m20152203)

0.130 (1) R 上の滑らかな関数 $f(x)$ がつねに $f''(x)\geqq\ 0$ を満たすならば, 任意の $a,b\in R$ と任意の $t\in[0,\ 1]$ に対して

$$f((1-t)a+tb)\leqq\ (1-t)f(a)+tf(b)$$

が成り立つことを示せ.

(2) R^2 上の滑らかな関数 $g(x_1,x_2)$ が任意の点 $P=(p_1,p_2)$ と任意のベクトル $\boldsymbol{v}=(v_1.v_2)$ に対して

$$\frac{\partial^2 g}{\partial {x_1}^2}(P)v_1^2+2\frac{\partial^2 g}{\partial x_1\,\partial x_2}(P)v_1v_2+\frac{\partial^2 g}{\partial {x_2}^2} \geqq 0$$

を満たすならば，任意の 2 点 $P=(p_1,p_2)$, $Q=(q_1,q_2)$，および任意の $t\in[0,\ 1]$ に対して

$$g((1-t)P+tQ) \leqq (1-t)g(P)+tg(Q)$$

が成り立つことを示せ.

(金沢大 2015)　　(m20152207)

0.131 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1\leqq x+y\leqq 5,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$ とおく．次の問いに答えよ.

(1) 変数変換 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}u+\dfrac{1}{2}v \\ y=\dfrac{1}{2}u-\dfrac{1}{2}v \end{cases}$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

(2) (1) の変数変換で，領域 D に対応する uv 平面の領域を E とする．領域 E を図示せよ.

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3}dxdy$ の値を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162208)

0.132 何回でも偏微分可能な関数 $u(x,y,z)$ が

$$\Delta u=0 \qquad \left(\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

を満たしているとする．このとき,

$$v=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}$$

に対して，Δv を計算せよ.

(金沢大 2016)　　(m20162215)

0.133 a,b,c は正の定数とし，x,y は次で定義される R^2 の領域 D の点とする.

$$D=\left\{(x,y)\in R^2\ \middle|\ 0\leq\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq c^2\right\}$$

(1) 変数 r,θ を用いて $x=ar\cos\theta$, $y=br\sin\theta$ と変数変換を行う．この時,
関数行列式（ヤコビアン）$\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|$ を求めよ.

(2) (1) の変数変換を用いて重積分 $\displaystyle\iint_D\sqrt{c^2-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$ を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162223)

0.134 流体の密度を $\rho(x,y,z,t)$，速度を $\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$ とする． 湧き出しも吸い込みもないとき， 連続の方程式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0$$

が成り立つことを示しなさい.

(金沢大 2017)　　(m20172210)

0.135 (1) $A(0,\sqrt{3})$, $B(-1,0)$, $C(1,0)$ を座標平面上の 3 点とする．線分 AB, BC, CA 上にそれぞれ点 P, Q, R を，三角形 PQR における $\angle Q$ が直角になるようにとる．ただし，P, Q, R は A, B, C のいずれとも異なるとする．$Q(t,0)$, $\angle CQR=\theta$ とおくとき，直角三角形 PQR の面積 S を t と θ を用いて表せ.

(2) (1) で求めた S を，集合

$$D=\left\{(t,\ \theta)\in \boldsymbol{R}^2\ \middle|\ -1<t<1,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right\}$$

を定義域とする関数と考える．このとき，$\dfrac{\partial S}{\partial t}=\dfrac{\partial S}{\partial \theta}=0$ を満たす $(t,\ \theta)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた $(t,\ \theta)$ において，関数 S が極値をとるかどうか調べよ.

(金沢大 2019) (m20192207)

0.136 C^1 級関数 $z=f(x,y)$ に対して，$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とするとき

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \qquad (r\neq 0)$$

が成り立つことを示せ.

(金沢大 2022) (m20222208)

0.137 空間の 3 次元座標を $\vec{r}=(x,y,z)$ とし, $|\vec{r}|=r\neq 0$ とする. 微分演算子 $\vec{\nabla}=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ を用いた次の計算の結果を $\vec{r}$ と r または数値で表せ.

(a) $\vec{\nabla}r$ (b)$\vec{\nabla}\cdot\left(\dfrac{\vec{r}}{r^3}\right)$

(富山大 2004) (m20042313)

0.138 次の計算をせよ. $\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}\log(x^2+y^2)$

(富山大 2006) (m20062302)

0.139 変数変換 $t=x-y$, $s=x+y-2$ により，重積分

$$\iint_D (x+y)dxdy \quad D=\{(x,y)\mid 0\leq y,\ y\leq x\leq 2-y\}$$

の値を求める．以下の問いに答えよ.

(1) x と y をそれぞれ，t と s で表し，$\dfrac{\partial x}{\partial t}$, $\dfrac{\partial x}{\partial s}$, $\dfrac{\partial y}{\partial t}$, $\dfrac{\partial y}{\partial s}$ を求めよ.

(2) $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial x}{\partial s} \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(3) (2) の結果を用いて，$\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy$ を t と s で変数変換し，その値を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_0^1\int_y^{2-y}(x+y)dxdy$ の値を求め，(3) の結果と一致することを確かめよ.

(富山大 2008) (m20082304)

0.140 半径 a の球の体積 V を求める．以下の問いに答えよ.

(1) 直交座標 (x,y,z) を用いて，V を積分表示せよ.

(2) (x,y,z) の極座標 (r,θ,φ) への変換

$$x=r\sin\theta\cos\varphi\,,\ y=r\sin\theta\sin\varphi\,,\ z=r\cos\theta$$

を用いて，$\dfrac{\partial x}{\partial r}$，$\dfrac{\partial x}{\partial \theta}$，$\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}$，$\dfrac{\partial y}{\partial r}$，$\dfrac{\partial y}{\partial \theta}$，$\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}$，$\dfrac{\partial z}{\partial r}$，$\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$，$\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}$ を求めよ．

(3) $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$ を求めよ．

(4) (1) および (3) の結果を用いて，V を (r,θ,φ) で積分表示せよ．

(5) (4) の積分を実行し，V を求めよ．

(富山大 2009)　　(m20092304)

0.141　$u=f(r),\ r^2=x^2+y^2+z^2$ とするとき次の等式を示せ．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''(r)+\frac{2}{r}\,f'(r)$$

ただし，$f'(r),\ f''(r)$ はそれぞれ r に関する f の 1 次導関数，2 次導関数とする．(富山大 2009) (m20092306)

0.142　$\boldsymbol{R}^2$ 上の C^2 級関数 $f(x,y)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\,,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\quad (\forall(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,)$ ならば，$f(x,y)$ は定数関数であることを示せ．

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=0\,,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\quad (\forall(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,)$ のとき，$f(x,y)$ を求めよ．

(富山大 2013)　　(m20132310)

0.143　次の各問いに答えよ．ただし，$\overrightarrow{i}$，$\overrightarrow{j}$，$\overrightarrow{k}$ はそれぞれ x，y，z の各軸方向の単位ベクトルとする．

(1) ベクトル場 $\overrightarrow{A}(x,y,z)=(xyz)\overrightarrow{i}+(-y^2z^3)\overrightarrow{j}+(2x^2y)\overrightarrow{k}$ に対して $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\overrightarrow{A})$ を求めよ．

(2) スカラー場 $\phi(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$　(ただし，$x^2+y^2+z^2\neq 0$) に対して，

(a) $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$ を計算せよ．

(b) $\mathrm{grad}\ \phi$ を求めよ．

(c) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\ \phi)=0$ を示せ．

(富山大 2019)　　(m20192303)

0.144　以下の各問いに答えよ．ただし，a，k，L は定数とする．

(1) $g'(t)=-ak^2g(t)$ の一般解を求めよ．

(2) $f''(x)=-k^2f(x)$ の一般解を求めよ．

(3) (1)，(2) の解を合成した $y(x,t)=f(x)g(t)$ が $(*)$ を満たすことを示せ．

$$\frac{\partial y}{\partial t}=a\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\qquad\cdots(*)$$

(4) $(*)$ 式において，$y(0,t)=y(L,t)=0\quad(t>0)$ を満たす，y の一般解を求めよ．

(富山大 2022)　　(m20222305)

0.145 二次元直交座標 (x, y) を，以下の式に従い極座標 (r, θ) に変換するものとする．

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

ただし，$r \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi$ として，以下の設問に答えよ．

(1) r および θ を，x および y を用いて表せ（答のみでよい）．

(2) $\dfrac{\partial r}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$ を計算せよ（途中経過も書くこと）．

(3) (2) の結果を用いて，$\dfrac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}$ を計算せよ（途中経過も書くこと）．

(福井大 2007) (m20072403)

0.146 z が変数 x, y の関数であり, x と y がともに t の関数ならば,

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2 y}{dt^2}$$

となることを示せ.

(福井大 2010) (m20102406)

0.147 $z = \arctan\left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$ のとき，$x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ となることを示せ.

(福井大 2011) (m20112405)

0.148 以下の関数 $f(x, y)$ に関して，$\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ 及び $\dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$ を求めよ.

(1) $f(x, y) = x^2 y^5$ (2) $f(x, y) = e^{-2y}\sin 3x$

(福井大 2014) (m20142424)

0.149 以下の複素関数 $f(z)$ に関する問いに答えなさい．ただし，$z \neq 0$ とし，i は虚数単位である．また，x, y は実数とする．

$$f(z) = z - \frac{1}{z}$$

(1) $z = x + yi$ のとき，複素関数 $f(z) = u + iv$ の実部 $u(x, y) = \mathrm{Re}\, f(z)$ および虚部 $v(x, y) = \mathrm{Im}\, f(z)$ を x, y の関数として表しなさい.

(2) (1) の実関数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ がコーシー・リーマンの微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

を満たすことを示しなさい.

(3) $f(z)$ の導関数 $f'(z)$ が,

$$f'(z) = 1 + \frac{1}{z^2}$$

となることを，実関数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ の偏導関数を計算することによって示しなさい.

(福井大 2015) (m20152424)

0.150 2 変数関数 $f(x, y)$ を $f(x, y) = x^2 y^3 e^{2xy}$ とおく．このとき，$\dfrac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ および $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ を求めよ.

(福井大 2015) (m20152427)

0.151 2 変数関数 $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x,y)$ の 1 階の偏導関数

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=f_x(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=f_y(x,y)$$

ならびに 2 階の偏導関数

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)=f_{xx}(x,y),\qquad \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x,y)=f_{xy}(x,y),\qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)=f_{yy}(x,y)$$

を，すべて求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ について，$z=f(x,y)$ は，xyz 空間において曲面を表す．
この曲面上の点 $\big(x_0,\ y_0,\ f(x_0,y_0)\big)$ における接平面の方程式は

$$z-f(x_0,y_0)=\big(f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0)\big)\bullet(x-x_0,\ y-y_0)$$

によって与えられる．ただし，上式の $\bullet$ は 2 次元ベクトルの内積を表している．このとき，点 $\big(1,\ 2,\ f(1,2)\big)$ における接平面の方程式を $ax+by+cz=d$ の形式で求めよ．すなわち，上式が点 $\big(1,\ 2,\ f(1,2)\big)$ での曲面 $z=f(x,y)$ の接平面の方程式となるような a,b,c,d を求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ について，

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$$

を満たす (x,y) の組を，$f(x,y)$ の極値の候補と呼ぶ．関数 $f(x,y)$ の極値の候補をすべて求めよ．

(4) 2 次の偏導関数を用いて，関数 $\phi(x,y)$ を

$$\phi(x,y)=\big\{f_{xy}(x,y)\big\}^2-f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)$$

と定義すると，極値の候補である (x_1,y_1) に対して，

- $\phi(x_1,y_1)<0$ かつ　$f_{xx}(x_1,y_1)>0$ ならば (x_1,y_1) は極小
- $\phi(x_1,y_1)<0$ かつ　$f_{xx}(x_1,y_1)<0$ ならば (x_1,y_1) は極大
- $\phi(x_1,y_1)>0$ ならば (x_1,y_1) は極値ではない

といえる．上の (3) で求めた極値の候補について，それぞれ極小であるか，極大であるか，あるいは極値ではないか，調べよ．

(福井大 2016)　　(m20162418)

0.152 (1) $F(x,y)=0$ のとき，$F_y\neq 0$ ならば $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$ となることを示せ．

(2) $f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$ のとき，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ となることを示せ．

(福井大 2018)　　(m20182401)

0.153 $\dfrac{\partial}{\partial t}\cos(kx-\omega t+\theta)$ を計算せよ．

(福井大 2018)　　(m20182416)

0.154 縦，横，高さがそれぞれ x, y, z である直方体を考える．この直方体の全ての辺（12 辺）の長さの和を L，表面積を S とする．L の値を一定に保ちながら x, y, z の値を変化させると，x, y, z がある値のとき S は最大値をとる．このことがわかっているものとして，以下の (1)〜(3) に答えよ．

(1) 表面積 S を x, y, L のみを用いて表せ．

(2) $\dfrac{\partial S}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial S}{\partial y}$ を求めよ．

(3) 上の (2) の結果を利用して，S が最大となるときの x, y, z の値，および S の最大値を，L を用いて表せ．

(福井大 2018)　　(m20182420)

0.155 関数 $u = f(x, y)$ が以下の式で表せるとき，導関数 $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ を求めよ．

$$u = x\cos y - y\cos x, \quad x = \cos 2t, \quad y = \sin 2t$$

(福井大 2020)　　(m20202404)

0.156 体積が一定で，各辺の長さが変化する直方体について，以下の問いに答えよ．

(1) 直方体の 3 つの辺の長さをそれぞれ x, y, z とし，直方体の体積を定数 $C > 0$ とおく．
このとき，z を x, y, C を用いて表せ．ただし，$x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ とする．

(2) 直方体の表面積を $f(x, y)$ とする．$f(x, y)$ を x, y, C を用いて表せ．

(3) $f_x(x, y)$ と $f_y(x, y)$ を求めよ．ただし，

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \quad f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

である．

(4) $f_x(x, y)$ と $f_y(x, y)$ が同時に 0 となるような x と y の値を，C を用いて表せ．

(5) 一般に，以下の定理が知られている

> 定理
> 二階偏微分可能な二変数関数 $g(x, y)$ について，
>
> $$g_x(a, b) = 0, \quad g_y(a, b) = 0$$
>
> のとき，
>
> $$D = \{g_{xy}(a, b)\}^2 - g_{xx}(a, b)g_{yy}(a, b)$$
>
> とおくと，$g(x, y)$ は $x = a$, $y = b$ において，$D < 0$ かつ $g_{xx}(a, b) > 0$ のとき極小となる．

上記の定理を用いて，$f(x, y)$ は (4) で求めた x, y において極小となることを示せ．なお，定理の証明は不要である．

(福井大 2020)　　(m20202417)

0.157 $z = f(u) + g(v)$, $u = x + ct$, $v = x - ct$ のとき

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

が成り立つことを示せ．ただし，c は正の実定数である．

(福井大 2022)　　(m20222415)

0.158 半径 a の球面の xyz 座標を媒介変数 $(\theta,\ \phi)$ で

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (a\sin\theta\cos\phi,\ a\sin\theta\sin\phi,\ a\cos\theta)$$

と表す．ただし，$0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ である．以下の問いに答えよ．

(1) 以下のベクトル積

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}$$

を求めよ．また，これは何を表すか答えよ．

(2) 次の積分を求め，何を表すか答えよ．

$$\iint_D \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} \right\| d\theta d\phi$$

ただし，$||\cdot||$ はベクトルの長さを表し，領域 D は θ, ϕ の動く範囲，すなわち $D = \{(\theta,\ \phi \mid 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi)\}$ である．

(3) 球面の x 座標 $x = a\sin\theta\cos\phi$ に対して，次の積分を求めよ．

$$\iint_D x \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} \right\| d\theta d\phi$$

(福井大 2022)　　(m20222427)

0.159 2 変数関数 $f(x,y) = \sin^{-1}\dfrac{y}{x}$ の第 2 次偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$ を求めよ．ここで $\sin^{-1}$ は逆正弦関数であり，$x > 0$ とする．

(静岡大 2004)　　(m20042503)

0.160 (1) 関数 $f(x) = x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$ を微分せよ．

(2) 2 変数関数 $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ に対して，$\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$ を計算せよ．

(3) 2 変数関数 $f(x,y) = e^x(x^2+y^2)$ の極値を求めよ．

(静岡大 2005)　　(m20052501)

0.161 2 変数の関数 $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ に対して　$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$　を求めよ．

(岐阜大 2003)　　(m20032602)

0.162 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ によって極座標 (r,θ) を導入するとき，x, y の関数 $f(x,y)$ の x についての偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ を r および θ についての偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial r}, \dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ を用いて表せ．

(岐阜大 2003)　　(m20032603)

0.163 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，$r = |\boldsymbol{r}|$ とするとき, 次の式を証明せよ．

$$\nabla r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

ここで, $\nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$，　$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は直交座標系の基本ベクトルである．

(岐阜大 2005)　　(m20052607)

0.164 2 変数の関数 $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{2y}$ に対して　$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$　を求めよ．

(岐阜大 2006)　　(m20062605)

0.165 実変数 x, y の関数 $f(x,y)$ が，その定義域 D において（連続な 2 階偏導関数をもち,）

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$　を満たすとき，$f(x,y)$ を（D における）調和関数という．以下の問いに答えよ．ただし，以下では定義域 $D = R^2$ とする．

(1) $f(x,y) = x^3 - axy^2$ が調和関数であるように，定数 a を求めよ．

(2) ある関数 $f(x,y)$ が調和関数であるとき， $g(x,y) = -y\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ で定義される $g(x,y)$ も調和関数であることを示せ．ただし，関数 $f(x,y)$ は何回でも微分可能であるとする．

(岐阜大 2006)　　(m20062614)

0.166 $f(x,y) = \log(e^{x-y} + e^{xy})$ とおく．ただし，対数は自然対数である． f の 2 階偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ を求めよ.

(岐阜大 2007)　　(m20072601)

0.167 2 変数関数 $f(x,y)$ がラプラス方程式 $\Delta f = 0$ を満たすとき，$f(x,y)$ を調和関数という． 次の関数 $f(x,y)$ は調和関数か否か調べよ． ここで，2 変数 (x,y) の偏微分作用素（ラプラシアン）Δ は，$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ で定義する.

(1) $f = \dfrac{1}{x^2+y^2}$　　(2) $f = e^x \sin y$

(岐阜大 2008)　　(m20082602)

0.168 以下の式でガンマ関数 $\Gamma(t)$ を定義する.

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x}x^{t-1}dx\,,\ t>0.$$

次の問に答えよ．ただし， $t>0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^t = 0$ となることは証明しなくても使ってよい.

(1) $t>0$ に対して $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ となることを示せ.

(2) 自然数 n に対して $\Gamma(n+1) = n!$ となることを示せ.

(3) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ ，すなわち

$$\left(\int_o^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx\right)\left(\int_o^\infty e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}dy\right)$$

を x,y の 2 変数関数の重積分で表せ.

(4) 変数 (x,y) から (r,θ) への変数変換

$$\begin{cases} \sqrt{x} = r\cos\theta, \\ \sqrt{y} = r\sin\theta \end{cases}$$

に対してヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ.

(5) 前問 (4) の変数変換を用いて (3) の重積分を計算し $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ.

(岐阜大 2014)　　(m20142601)

0.169 関数 $z = (1+x^2y)^y$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.

(岐阜大 2022)　　(m20222605)

0.170 xy 直交座標系の点列 (x_i, y_i) , $i = 1, \cdots, N$ に対し，各点からの垂直距離の 2 乗和が最小となるような直線を求めたい．次の各問いに答えよ．

(1) 次の文章中の空欄 $\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{コ}}$ に適当な数式を入れよ．

各点に単位質量を置いたときの重心を G とすると，その座標は

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} \\ \boxed{\text{イ}} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

となる．xy 座標系に対し，この重心 G を原点として，角度 θ で回転させた uv 座標系を考える．このとき

$$\begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \tag{2}$$

とおけば，(x_i, y_i) と (u_i, v_i) との関係は θ を用いて

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}} \\ -\boxed{\text{エ}} & \boxed{\text{ウ}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \end{pmatrix} \tag{3}$$

で与えられる．もし求めたい直線を u 軸にとれば，問題は

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^{N} v_i^2 \tag{4}$$

で定義される $J(\theta)$ を最小にする角度 θ を求めることに等しい．

式 (3) の v_i を θ で微分し，u_i を用いて表すと

$$\frac{\partial v_i}{\partial \theta} = \boxed{\text{オ}} \tag{5}$$

となるから，式 (4) を θ で微分して 0 とおけば

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = -2\sum_{i=1}^{N} u_i v_i = 0 \tag{6}$$

を得る．この式 (6) に，式 (3) を代入することにより，

$$\boxed{\text{カ}} \sum_{i=1}^{N} x_i' y_i' = \boxed{\text{キ}} \sum_{i=1}^{N} ({x_i'}^2 - {y_i'}^2) \tag{7}$$

となり，次式を得る．

$$\frac{2\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}} = \frac{2\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i'}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} ({x_i'}^2 - {y_i'}^2)} \tag{8}$$

式 (8) の左辺は，倍角の公式により

$$\frac{2\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}} = \boxed{\text{ク}} \tag{9}$$

と書けるから，式 (8) は

$$\boxed{\text{ク}} = \frac{2\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i'}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} ({x_i'}^2 - {y_i'}^2)} \tag{10}$$

となる．よって，式 (10) の右辺を計算して，式 (4) を最小化する θ を求めればよい．

式 (4) を最小化する θ を $\hat{\theta}$ とし，求めたい直線が重心 G を通ることを用いれば，直線の式は

$$y = \tan\hat{\theta}\left(x - \boxed{\text{ケ}}\right) + \boxed{\text{コ}} \tag{11}$$

として与えられる．

(2) 4 点 $(-1, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$ があるとする．

(a) これらの 4 点に単位質量を置いたときの重心 G の座標を求めよ．

(b) これらの 4 点に関し，$\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i'$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} {x_i'}^2$ および $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} {y_i'}^2$ を求めよ．

(c) これらの 4 点からの垂直距離の 2 乗和が最小となる直線の傾き θ を求めよ．ただし，分数は既約分数とし，三角関数およびその逆関数はそのままでよい（例：$\cos\frac{7}{4}\pi$ や　$\sin^{-1}\frac{1}{3}$ など）．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062710)

0.171 関数 $f(x,y)=x^2-2xy+3y^2$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $(1,2,9)$ における接平面の方程式を求めよ．

(3) $x(t),\ y(t)$ はともに t について微分可能な関数で $\left(\dfrac{df}{dt}\right)_{t=0}=0$ をみたしており，

さらに $x(0)=1,\ y(0)=0,\ \left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{t=0}>0$ とする．$t=0$ のとき，

単位ベクトル $\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}}\begin{pmatrix}\dfrac{dx}{dt}\\ \dfrac{dy}{dt}\end{pmatrix}$ を求めよ．

(豊橋技科大 2019)　　(m20192701)

0.172 次の偏微分を計算せよ．

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log(xy)\qquad \Big(x>0,\ y>0\Big)$$

(豊橋技科大 2021)　　(m20212702)

0.173 2 次元ラプラス方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ が 2 次元ラプラス方程式を満たすことを示せ．

(2) 関数 $u(x,y)=a\ln(x^2+y^2)+b$ が 2 次元ラプラス方程式を満たすことを示せ．また，境界条件を円 $x^2+y^2=4$ 上で $u=0$，円 $x^2+y^2=9$ 上で $u=5$ としたとき，境界条件を満たすように a と b の値を求めよ．

(名古屋大 2014)　　(m20142801)

0.174 次の関数の 2 階の偏導関数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を，それぞれ求めよ．

$$z=\sin\left(x^2y\right)$$

(名古屋大 2017)　　(m20172803)

0.175 原点と正規直交する基底ベクトル $\vec{e}_x,\ \vec{e}_y,\ \vec{e}_z$ をもち， それぞれの基底ベクトルに対応する座標を $x,\ y,\ z$ とするユークリット空間を考える．また，演算子 ∇ を $\nabla=\dfrac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x+\dfrac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y+\dfrac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$ と定義する．

(1) $V=xy(x^2+y^2+z^2)$ とする．∇V を基底ベクトルと $x,\ y,\ z$ を用いて表せ．

(2) 以下に示す $\vec{f}$ に対して，$\nabla W=\vec{f}$ となるスカラー関数 $W(x,\ y,\ z)$ が存在するかを考える．ここで，W の 2 階偏導関数は連続であり，$W(0,0,0)=0$ とする．W が存在するならばそれをひとつ示し，W が存在しないならばそれを証明せよ．

(i) $\vec{f}=(2x+yz)\vec{e}_x+(2y+zx)\vec{e}_y+(xy+1)\vec{e}_z$

(ii) $\vec{f}=(2x+yz)\vec{e}_x+(2y+z)\vec{e}_y+(xy+1)\vec{e}_z$

(名古屋大 2018)　　(m20182801)

0.176 (1) 2 変数の関数 $f(x,y)=x^4-4x^3y+ax^2y^2+bxy^3+cy^4$ が次の 2 階偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

をみたすとき，実定数 a,b,c の値を求めよ．

(2)　上の関数 $f(x,y)$ に対して次の関係式

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}\ , \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

をみたす 2 変数の関数 $g(x,y)$ を求めよ．

(3)　$w = f(x,y) + ig(x,y)$ を $z = x + iy$ を用いて表せ．ただし，i $(i^2 = -1)$ は虚数単位である．

（名古屋工業大 2000）　(m20002907)

0.177　$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ とし，次の計算結果を最も簡明な形で示せ．　$\Delta\left(\tan^{-1}\dfrac{y}{x}\right)$

(名古屋工業大 2008)　(m20082903)

0.178　微分方程式 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ は，条件 $\dfrac{\partial}{\partial y}P(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}Q(x,y)$ を満たすとき，完全形という．関数 $f(x)$ は $(0,\infty)$ で微分可能　かつ　$f(\pi) = 1$ である．微分方程式

$$\Big(\sin x - f(x)\Big)\frac{y}{x}\,dx + f(x)\,dy = 0\ , \quad x > 0$$

は完全形とするとき，次の問に答えよ．

(1)　関数 $f(x)$ を求めよ．

(2)　微分方程式の一般解を求めよ．

(名古屋工業大 2012)　(m20122908)

0.179　関数 $f(x,y) = 4x^3 - 9xy^2 + 6y^3 - 12x$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　関数 $f(x,y)$ の停留点 $\left(\text{すなわち}\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0\ \text{をみたす点}\right)$ をすべて求めよ．

(2)　(1) で求めた停留点のそれぞれについて，極値の判定をせよ．

(名古屋工業大 2013)　(m20132903)

0.180　a, b を定数とし，$f(x,y) = x^3 + axy^2 + x^2 + by^2$ とする．

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

がつねに成り立っているとき，以下の問いに答えよ．

(1)　a, b の値を定めよ．

(2)　$f(x,y)$ の極値を調べよ．

(名古屋工業大 2014)　(m20142903)

0.181　2 回偏微分可能な関数 $f(x,y)$ に対して，$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ と定義する．

(1)　$\dfrac{\partial g}{\partial r}$ 及び $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ を求めよ．

(2)　$\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ 及び $\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ を求めよ．

(3)　$\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ が成り立つことを示せ．

尚，導出の過程で次の公式を用いて良い．

【公式】$z = f(x,y)$ として，関数 $x = x(u,v), y = y(u,v)$ がいずれも偏微分可能ならば，

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

が成り立つ．

（愛知県立大 2000）　(m20003001)

0.182 (1) 次の微分方程式が完全 微分方程式であることを示しなさい.

$$(3x^2y - y^3)\,dx = (3y^2x - x^3)\,dy$$

(2) 完全微分方程式 $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ の一般解が

$$\int P(x,y)\,dx + \int \left\{ Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx \right\} dy = c \quad \text{ただし } c \text{ は任意定数}$$

で与えられることを利用して,

$$(3x^2y - y^3)\,dx = (3y^2x - x^3)\,dy$$

の一般解を求めなさい.

(三重大 2010) (m20103101)

0.183 次の関数の 1 階偏導関数 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ および 2 階偏導関数数 $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$ を求めなさい.

$$f(x,y) = e^{xy^3}$$

(三重大 2011) (m20113112)

0.184 (1) 関数 $f(x) = \log(1-x)$ を $x < 1$ において定義する. 任意の自然数 n に対して, 下の式が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明しなさい. ここで, $\log x$ は実数 x の自然対数を表すとする.

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

(2) 関数 $g(x,y)$ について, $m \geqq 0$, $n \geqq 0$, $m+n > 0$ の条件を満たす任意の整数 m, n に対して式 ㋐ が成り立つとする. また, 式 ㋑ が成り立つとする.

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} g(x,y) = g(x,y) \cdots\cdots\cdots ㋐$$

$$g(0,0) = e \cdots\cdots\cdots ㋑$$

なお, $m = 0$ のとき式 ㋐ は以下の式を表すものとする.

$$\frac{\partial^{0+n}}{\partial x^0 \partial y^n} g(x,y) = \frac{\partial^n}{\partial y^n} g(x,y) = g(x,y)$$

また, $n = 0$ のとき式 ㋐ は以下の式を表すものとする.

$$\frac{\partial^{m+0}}{\partial x^m \partial y^0} g(x,y) = \frac{\partial^m}{\partial x^m} g(x,y) = g(x,y)$$

(a) $g(x,y) = u(x)w(y)$ とおく. 任意の自然数 m に対して以下の式が成り立つことを示しなさい. ここで, $u(x)$ は変数 x に関する関数, $w(y)$ は変数 y に関する関数とする.

$$\frac{d^m}{dx^m} u(x) = u(x)$$

(b) 関数 $g(x,y)$ を求めなさい.

(三重大 2018) (m20183104)

0.185 3 次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とする. ここで, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は, 直交座標系の x, y, z 軸方向の単位ベクトルである. 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{r}$ の発散, $\nabla \cdot \boldsymbol{r}$ を求めよ. ただし, $\nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ である. $\nabla \cdot \boldsymbol{r}$ は, $\operatorname{div} \boldsymbol{r}$ とも書く.

(2) $\boldsymbol{w} = c\boldsymbol{k}$ とするとき，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r}$ の回転，$\nabla \times \boldsymbol{v}$ を求めよ．ただし，c は定数である．$\nabla \times \boldsymbol{v}$ は，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$ とも書く．

(奈良女子大 2007)　　(m20073209)

0.186 3 次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とする．$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は，直交座標系の x, y, z 軸方向の単位ベクトルである．また，$\boldsymbol{r}$ の大きさを $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) r のこう配，∇r を求めよ．ただし，$\nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ である．∇r は，$\mathrm{grad}\, r$ とも書く．

(2) 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ に対して

$$\nabla \times (\nabla \phi(\boldsymbol{r}))$$

を求めよ．ただし，$\phi(\boldsymbol{r})$ は連続な 2 階偏導関数を持つスカラー関数である．また，$\nabla \times (\nabla \phi(\boldsymbol{r}))$ は $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\phi(\boldsymbol{r}))$ とも書く．

(奈良女子大 2008)　　(m20083208)

0.187 次の微分を求めよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{-ax}\cos(bx)\right)$　（a, b は定数）

(2) $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

(奈良女子大 2009)　　(m20093204)

0.188 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と定数ベクトル $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ からベクトル積（外積）$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}$ を作った．このベクトル $\boldsymbol{A}$ について以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル A の成分 A_x, A_y, A_z を求めよ．

(2) $\mathrm{div}\, A = \nabla A$ を求めよ．

(3) $\mathrm{rot}\, A = \nabla \times A$ を求めよ．

ただし，$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ である．

(奈良女子大 2009)　　(m20093208)

0.189 次のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{A} = \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0\right)$$

(1) $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ を求めよ．

(2) $\nabla \times \boldsymbol{A}$ を求めよ．

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の概形を $x - y$ 平面上に図示せよ．

ここで，∇ は次のように定義された演算子である．

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

(奈良女子大 2012)　　(m20123204)

0.190 A を連続微分可能なベクトル場，$f(x, y, z)$ を連続微分可能な関数とするとき，以下の関係式を証明せよ．ただし，$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = |\boldsymbol{r}|$ である．

(1) $\nabla\cdot(\boldsymbol{r}\times\ \nabla f(x,y,z))=0$

(2) $(A\cdot\nabla)A=\dfrac{1}{2}\nabla(|A|^2)-A\times\ (\nabla\times\ A)$

(3) $\nabla\cdot\left(\dfrac{A\times\ \boldsymbol{r}}{r}\right)=\dfrac{\boldsymbol{r}\cdot(\nabla\times\ A)}{r}$

ここで,

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

である．必要なら，以下の関係式を用いてよい.

(a) $\nabla\cdot(fA)=(\nabla f)\cdot A+f\nabla\cdot A$

(b) $\nabla\times(fA)=(\nabla f)\times A+f\nabla\times A$

(c) $\nabla(A\cdot B)=A\times(\nabla\times B)+B\times(\nabla\times A)+(B\cdot\nabla)A+(A\cdot\nabla)B$

(d) $\nabla\cdot(A\times B)=B\cdot(\nabla\times A)-A\cdot(\nabla\times B)$

(奈良女子大 2013) (m20133207)

0.191 次の微分を求めよ．ただし，a は実定数である.

(1) $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}(ax)$ (2) $\dfrac{d}{dx}\left(x^2e^{-ax}\right)$ $\dfrac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(奈良女子大 2014) (m20143201)

0.192 次のスカラー関数 $U(x,y,z)$ について以下の問いに答えよ．ただし，a は正の実定数とする.

$$U(x,y,z)=\exp\left[-a(x^2+y^2+z^2)\right]$$

(1) ベクトル $F=\nabla U$ を求めよ.

(2) $\nabla\cdot F=0$ となるとき，x,y,z が満たす条件をすべて求めよ.

(3) $\nabla\times\ F$ を求めよ.

ここで，演算子 ∇ は次のように定義する.

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

(奈良女子大 2014) (m20143204)

0.193 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, $r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ の時，以下の量を計算せよ．ただし，$r\neq 0$ とする.

(1) ∇r^n (2) $\nabla\times\ r^n\boldsymbol{r}$ (3) $\nabla\cdot\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)$ (4) $\nabla\left(\dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\right)$ (5) $\nabla f(\boldsymbol{r})$

ここで，∇ は以下で定義する微分演算子であり，

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$f(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{r}$ の任意の関数，$\boldsymbol{p}$ は定ベクトル，n は定数である.

(奈良女子大 2015) (m20153204)

0.194 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, $r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする．以下の量を計算せよ.

(1) r の勾配 ∇r

(2) $\dfrac{1}{r}$ の勾配 $\nabla\dfrac{1}{r}$

(3) $\boldsymbol{r}$ の発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{r}$

(4)　$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$　(ω は正の実定数) とするときの，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ の回転 $\nabla \times \boldsymbol{v}$

ここで，∇ は以下で定義される微分演算子である．

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

(奈良女子大 2017)　　(m20173207)

0.195　関数 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ について，一次偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$，および二次偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ を求めよ．

(奈良女子大 2019)　　(m20193206)

0.196　$z = xf(z) + y$, $u = g(z)$ のとき，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(z) \frac{\partial u}{\partial y}$$

であることを証明せよ．

(京都大 1996)　　(m19963301)

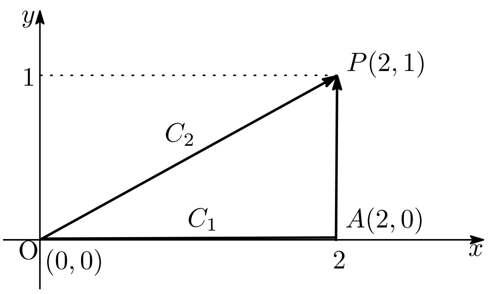
0.197　(x, y) 平面上に 2 つの関数：

$$F(x,y) = 2x + ay , \qquad G(x,y) = 2x + 5y$$

が定義されている．ここに a は定数である．(1)〜(4) に答えよ．

(1)　図に示すように，折れ線 OAP に沿う経路を C_1，また，直線 OP に沿う経路を C_2 とするとき，次の 2 つの線積分の値を求めよ．

$$I_1 = \int_{C_1} (F dx + G dy) , \qquad I_2 = \int_{C_2} (F dx + G dy)$$



(2)　$F = \dfrac{\partial U}{\partial x}$，$G = \dfrac{\partial U}{\partial y}$ なる関数 $U(x,y)$ が存在するように定数 a を定めよ．また，そのときの $U(x,y)$ を求めよ．ただし定数項の差は無視してよい．

(3)　(2) の関数 $U(x,y)$ が存在する場合，点 O と点 P を結ぶいかなる経路 C を選んだとしても線積分：

$$I = \int_C (F dx + G dy)$$

は経路によらず同じ値をもつことを示せ．

(4)　(2) の関数 $U(x,y)$ が存在する場合，単位円周上 $(x^2 + y^2 = 1)$ でのその極値を考える．

(a) 点 (x,y) が単位円周上に沿って動くとき，微分 dx と微分 dy の関係を示せ．

(b) 点 (x,y) が単位円周上に沿って動くとき，$F dx + G dy = 0$ となる点において $U(x,y)$ は単位円周上で極値をとることを示せ．

(c) 関数 $U(x,y)$ が極値をとるときの x, y の値および $U(x,y)$ の値をそれぞれ求めよ．

(京都大 2008)　　(m20083302)

0.198 2変数関数 $z = f(x, y)$ は，2階までのすべての偏導関数が存在して，それらがすべて連続であるとする．x, y が別の2変数 u, v の関数として　$x = u - v\,,\ y = u + v$

と表されるとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial u}\,,\ \dfrac{\partial z}{\partial v}$ を $\dfrac{\partial z}{\partial x}\,,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$ を $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を用いて表せ．

(京都工芸繊維大 2002)　(m20023405)

0.199 2変数関数 $\varphi(x, y) = x - y + e^y \sin x$ と全微分可能な関数 $\psi(x, y)$ に対して，次の各問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\,,\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$ を求めよ．

(2) $x = 0$ の近傍で定義された微分可能な関数 $f(x)$ が $\varphi(x, f(x)) = 0$ を満たすとし，$g(x) = \psi(x, f(x))$ とおく．微分係数 $f'(0)$ を求めよ．また，$a = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}(0, 0)\,,\ b = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}(0, 0)$ とおくとき，$g'(0)$ を a, b を用いて表せ．

(京都工芸繊維大 2003)　(m20033406)

0.200 2変数 x, y の関数 z が

$$z = x^\alpha f\left(\frac{y}{x}\right)$$

で与えられている. ただし, α は定数で, f は微分可能な1変数関数である.

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を f および f の導関数 f' を用いて表せ.

(2) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \alpha z$ が成り立つことを示せ.

（京都工芸繊維大 2004）　(m20043402)

0.201 実数 a_1, a_2, b_1, b_2 (ただし $a_1 \neq a_2$) について，2変数 x, y の関数

$$Q(x, y) = (x + a_1 y - b_1)^2 + (x + a_2 y - b_2)^2$$

を考える．このとき，$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 0$ をみたす x, y の値を a_1, a_2, b_1, b_2 を用いて表せ．

(京都工芸繊維大 2006)　(m20063408)

0.202 xy 平面上で定義された関数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \mathrm{Tan}^{-1} \dfrac{y}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

がある．ここで，$\mathrm{Tan}^{-1} x$ は逆正接関数の主値を表す．

(1) $x \neq 0$ のとき，偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, y)$ を定義に基づいて求めよ．

(3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ および $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2010)　(m20103403)

0.203 xy 平面上の関数 $f(x, y) = x^3 + 2xy - x + 2y$ を考える．実数 a, b は $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ を満たしている．実数 t の関数

$$g(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h\cos t\,,\ b + h\sin t) - f(a, b)}{h^2}$$

を考える．

(1) a, b の値を求めよ.

(2) 次の等式を証明せよ.

$$g(t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cos^2 t + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\sin t\,\cos t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\sin^2 t$$

(3) t が実数全体を動くとき, $g(t)$ の最大値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2013)　　(m20133402)

0.204　関数 $f(x,y) = e^{x+2y} + e^{-x-2y} + \dfrac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x$ を考える.

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$, を求めよ.

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2014)　　(m20143403)

0.205　関数 $z = f(x,y)$ は C^2 級であるとする. x, y が別の 2 変数 s, t の関数であり,

$$x = 2\cos s + 3\sin t\,, \qquad y = 4\sin s + 5\cos t$$

と表されているとする. $(s,t) = \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ のときの x, y の値をそれぞれ p, q とする. ただし, 関数 $f(x,y)$ が C^2 級であるとは, $f(x,y)$ の 2 階までのすべての偏導関数が存在して, それらが連続であることである.

(1) x, y の s, t に関する 1 階偏導関数をすべて求めよ.

(2) z を s, t の関数と見なしたとき, $\dfrac{\partial z}{\partial s}\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ を $f_x(p,q)$ および $f_y(p,q)$ を用いて表せ.

(3) z を s, t の関数と見なしたとき, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t \partial s}\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ を $f_{xx}(p,q)$, $f_{xy}(p,q)$ および $f_{yy}(p,q)$ を用いて表せ.

(京都工芸繊維大 2019)　　(m20193403)

0.206　関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ （$z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$, x と y は実数, $u(x,y)$ と $v(x,y)$ は実関数）は $z = z_0 = x_0 + iy_0$ で正則である. 以下の問に答えよ.

(1) コーシー・リーマンの方程式

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

を示せ.

(2) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ となる正則関数 $f(z)$ を求めよ.

(大阪大 2005)　　(m20053509)

0.207　関数 f を, 実軸上で定義された周期 1 の連続微分可能な実数値関数とする. この f に対して $\hat{f}(k)$ を

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 e^{-2\pi ikt} f(t)\,dt$$

と定義する. このとき, 複素数 z に対して

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} \hat{f}(k) \bar{z}^{|k|}$$

とおく.

(1) 任意の $r \in (0,1)$ に対して, $u(z)$ は $|z| \le r$ で絶対かつ一様収束することを示せ.

(2) $u = u(z)$ は実数値関数で, $z = x + iy$ とするとき,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

となることを示せ.

(3) 任意の $r \in (0,1)$ に対して, $z = re^{2\pi i\theta}$ とするとき,

$$u(z) = \int_0^1 f(t) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(2\pi(\theta - t)) + r^2}\, dt$$

となることを示せ.

(大阪大 2010)　　(m20103509)

0.208 関数 $f(x)$ は区間 $(-\infty,\ \infty)$ で 2 回微分可能であるとする．関数 $g(x)$ を

$$g(x) = f(x)^2 - 2f(x) - f'(x)$$

と定める．ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である．2 変数関数 $u(x,y),\ v(x,y)$ をそれぞれ

$$u(x,y) = f(x-y)\ , \qquad v(x,y) = g(x-y)$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) $f(x) = e^{-2x}$ であるとき，偏導関数

$$\frac{\partial u}{\partial x}\ , \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial y}$$

をそれぞれ求めよ．

(2) 2 変数関数

$$w = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{\partial u}{\partial x}$$

を v の偏導関数を用いて表せ．

(3) a を正の実数とする．$|f(0) - 1| < a$ であり，すべての x について $g(x) = a^2 - 1$ であるとする．このとき

$$\lim_{y \to \infty} u(x,y)$$

を求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193505)

0.209 原点を中心とした半径 r $(r \neq 0)$ の球面 S は媒介変数 $u,\ v$（ラジアン単位）を用いて，

$$\boldsymbol{r}\bigl(= \boldsymbol{r}(u,\ v)\bigr) = r\,\boldsymbol{i}_r = r\cos u\cos v\ \boldsymbol{i}_x + r\sin u\cos v\ \boldsymbol{i}_y + r\sin v\ \boldsymbol{i}_z$$
$$(0 \leqq u \leqq 2\pi,\ -\pi/2 \leqq v \leqq \pi/2)$$

と表すことができる．ここで，$\boldsymbol{i}_x,\ \boldsymbol{i}_y,\ \boldsymbol{i}_z$ は $x,\ y,\ z$ 座標のそれぞれの基本ベクトルであり，$\boldsymbol{i}_r$ は $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトルである．

(1) $\dfrac{\partial r}{\partial u} \times \dfrac{\partial r}{\partial v}$ を $r,\ \boldsymbol{i}_r,\ v$ で表せ．

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{R} = \dfrac{u^2}{r}\boldsymbol{i}_r$ とするとき，$\boldsymbol{R}$ の球面 S に沿う面積分，

$$\iint_S \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の外向きの単位法線ベクトルとする．

(大阪大 2021)　　(m20213502)

0.210　関数 $X(r,\theta) = r\cos\theta$, $Y(r,\theta) = r\sin\theta$ の定義域はいずれも $D = (0,\infty) \times (-\pi,\pi)$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　２つの集合

$$A = \left\{\big(X(r,\theta_0), Y(r,\theta_0)\big) \,|\, r \in (0,\infty)\right\},\ B = \left\{\big(X(r_0,\theta), Y(r_0,\theta)\big) \,|\, \theta \in (-\pi,\pi)\right\}$$

を 1 つの座標平面上に図示せよ．ただし，$\theta_0 \in (-\pi,\pi)$，$r_0 \in (0,\infty)$ は定数である．

(2)　行列 $J(r,\theta) = \begin{pmatrix} X_r(r,\theta) & Y_r(r,\theta) \\ X_\theta(r,\theta) & Y_\theta(r,\theta) \end{pmatrix}$ とその行列式 $|J(r,\theta)|$ を求めよ．ただし，

$$X_r = \frac{\partial X}{\partial r},\ Y_r = \frac{\partial Y}{\partial r},\ X_\theta = \frac{\partial X}{\partial \theta},\ Y_\theta = \frac{\partial X}{\partial \theta}$$

である．

(3)　２つのベクトル $\big(X_r(r,\theta), Y_r(r,\theta)\big)$，$\big(X_\theta(r,\theta), Y_\theta(r,\theta)\big)$ が直交することを示せ．

(大阪府立大 2011)　　(m20113602)

0.211　つぎの各問いに答えよ．

(1)　3 変数の関数 $f(x,y,z) = 2x^2z - y^2z^2 + 3x^2y + 4xy$ を考える．このとき，Δf を求めよ．ただし，Δ はラプラス作要素

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

とする．

(2)　$g(x,y,z) = x^2 - axy^2 + bz^2 + 2xz^2$ とする．$\Delta g = 0$ であるような，a, b の値を求めよ．

(大阪府立大 2013)　　(m20133606)

0.212　a を実数の定数とする．関数 $f(x)$ を

$$f(x) = 1 + a\sqrt{x} - \log x$$

とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　方程式 $f(x) = 0$ の異なる実数解の個数を調べよ．

(2)　$F(x,y) = f(x^y)$ $(x > 0)$ とおくとき，$(\log x)\dfrac{\partial F}{\partial x} - \dfrac{y}{x}\dfrac{\partial F}{\partial y}$ を計算せよ．

(大阪府立大 2016)　　(m20163607)

0.213　$\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$ という関係がある．$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ として，$(x,y) \to (r,\theta)$ に変数変換せよ．ただし，$f(x,y) = g(r,\theta)$

(神戸大 1994)　　(m19943801)

0.214　次の微分計算をせよ．　$\dfrac{\partial}{\partial x}\big(x^2y^3\big)$

(神戸大 1997)　　(m19973805)

0.215　次のような変数変換について以下の問いに答えよ．

$$x = u^2 - v^2 \quad y = 2uv$$

ただし，$D = \{(x,y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$　$E = \{(u,v)|u^2 + v^2 \leq 1\}$ とする．

(1) $u^2+v^2 \leq 1$ が $x^2+y^2 \leq 1$ に移ることを証明せよ．

(2) ヤコビアンを求めよ．

(3) $\displaystyle\int_D dxdy$, $\displaystyle\int_E \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\int_D dxdy = \int_E \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$ は成立しない．何故か．

(神戸大 1999) (m19993804)

0.216 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ とする．$\Delta \log(x^2+y^2)$ を求めよ．

(神戸大 2000) (m20003802)

0.217 次の関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ を求め，それらが原点で連続かどうか調べよ．

$$f(x,y) = xy\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

（神戸大 2001） (m20013804)

0.218 $f(x,y)$ は何回でも微分できる関数とする．$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $g(r,\theta) = f(x,y)$ とするとき，以下の等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

（神戸大 2001） (m20013805)

0.219 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ とするとき，$\Delta(x^2+y^2+z^2)^s$ を求めよ．但し，s は実数とする．

(神戸大 2002) (m20023806)

0.220 (1) 次の関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ を計算せよ．$\sin^{-1}$ は $\sin$ の逆関数．

$$\text{(i) } f(x,y) = e^{3x}\cos 2y\ , \qquad \text{(ii) } f(x,y) = \sin^{-1}\frac{x}{y}$$

(2) 関数 $f(y_1,y_2)$ が 2 階連続微分可能であるとき，$f(ax_{11}+bx_{12}\,,\ ax_{21}+bx_{22})$ (a,b は定数) について $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{22}\partial x_{11}} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{21}\partial x_{12}}$ を計算せよ

(神戸大 2006) (m20063805)

0.221 (1) 関数 $z = \dfrac{1}{\sqrt{y}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4y}\right)$ $(y>0)$ が，関係式 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を満たすことを示せ．

(2) f,g を C^2 級の関数，$c>0$ を定数とするとき，関数 $z = f(x+cy)+g(x-cy)$ が，関係式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = c^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を満たすことを示せ．

(神戸大 2008) (m20083802)

0.222 次の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}}$ $(D = \{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3 | x^2+y^2+z^2 \leq 1\})$

(2) $\displaystyle\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tan^{-1}\frac{y}{x}$

(神戸大 2008) (m20083808)

0.223 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上で定義された関数 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ について，次の計算をせよ．

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

(神戸大 2009) (m20093809)

0.224 $f(u,v)=u^3-3uv^2$, $g(u,v)=3u^2v-v^3$, $u=(e^y+e^{-y})\cos x$, $v=(e^{-y}-e^y)\sin x$ のとき, 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial g}{\partial y}$ を計算せよ.

(神戸大 2012) (m20123802)

0.225 $u=\log(e^x+e^y+e^z)$ のとき次の式が成り立つことを示せ.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=2e^{x+y+z-3u}$$

(神戸大 2014) (m20143808)

0.226 $f(x,y)=\dfrac{\sin x}{\cos x+\cosh x}$ に対して, $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(x,y)+\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x,y)$ を計算せよ.
ただし, $\cosh y=\dfrac{e^y+e^{-1}}{2}$ である.

(神戸大 2016) (m20163803)

0.227 関係式 $y=x\tan\theta$ の定める陰関数 $\theta=\theta(x,y)$ について $\Delta\theta=\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$ を計算せよ.

(神戸大 2017) (m20173803)

0.228 (1) $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $g(x,y)=x^3+y^3-9xy$ の臨界点を全て求め, それぞれの点で関数が極値をとるかどうか判定せよ.

(2) $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ が回転対称であるとき, $x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ を満たすことを示せ. ただし, $f(x,y)$ が回転対称であるとは, 任意の $x,y,\theta\in\mathbb{R}$ に対し

$$f(x,y)=f(x\cos\theta+y\sin\theta,\ -x\sin\theta+y\cos\theta)$$

を満たすことをいう.

(神戸大 2018) (m20183803)

0.229 (1) a を実数の定数とする. x, y の関数

$$f(x,y)=\frac{x^2}{2}+axy+\frac{y^4}{4}$$

の停留点 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}=0 \text{ かつ } \dfrac{\partial f}{\partial y}=0 \text{ となる点}\right)$ を求め, それらが f の極大値を与える, 極小値を与える, 極値を与えないのどれであるか判定せよ.

(2) x, y の関数 u, v を

$$u=xy$$
$$v=e^{x^2+y^2}$$

で定める. x, y の関数

$$g(x,y)=\sin(uv)$$

に対して, $\dfrac{\partial g}{\partial x}$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ を x, y で表せ.

(神戸大 2022) (m20223805)

0.230 x,y の 2 変数関数 $f(x,y)$ に対し,

$$\triangle f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

と定める. $f(x,y)$ が次の関数のときに $\triangle f$ を求めよ. ただし, 以下において, i は虚数単位である.

(1) $f(x,y)$ は $(x^2-iy^2)(1+i)+e^{x+iy}$ の実部.

(2) $f(x,y)$ は $\dfrac{1}{x+iy}$ の虚部.

(3) $f(x,y)=7x^6y-35x^4y^3+21x^2y^5-y^7$

(4) $f(x,y)=\displaystyle\sum_{k=0}^{20}(-1)^k\begin{pmatrix}40\\2k\end{pmatrix}x^{40-2k}y^{2k}$

(神戸大 2023)　　(m20233803)

0.231 関数 $z=\dfrac{u^2(x,y)}{v(x,y)}$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を求めよ.

(鳥取大 1997)　　(m19973904)

0.232 $z=f(x,y)$, $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ f$ は C^1 級なるとき，次式を証明せよ.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(鳥取大 2000)　　(m20003904)

0.233 次を求めよ．ただし，$\nabla=\dfrac{\partial}{\partial x}i+\dfrac{\partial}{\partial y}j+\dfrac{\partial}{\partial z}k$ である.

(1) $\nabla(x^2+y+z^3)$

(2) $\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right)$　（ただし，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）

(3) $\nabla\times\ (x^2i+xy^2j)$

(鳥取大 2009)　　(m20093906)

0.234 $f(x),\ g(x)$ を x についての 2 回微分可能な 1 変数関数とするとき，時刻 t，座標 x における 2 変数関数 $\phi(t,x)$ を $\phi(t,x)=f(x-ct)+g(x+ct)$ と定める．ただし，c は定数とする．このとき，関数 ϕ は次の関係式を満たすことを示せ.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

(鳥取大 2009)　　(m20093911)

0.235 2 次元において直交座標 (x,y) と極座標 (r,θ) には,

$$x=r\cos\theta\ ,\quad y=r\sin\theta$$

の関係式がある $(r>0,\ 0<\theta\le 2\pi)$；これについて，以下の問に答えよ.

(1) r を x,y のみの関数として表せ. また, θ を x,y のみの関数として表せ.

(2) 以下の偏微分をそれぞれ計算せよ.

　(2a) $\dfrac{\partial x}{\partial r}$　　(2b) $\dfrac{\partial r}{\partial x}$　　(2c) $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$

(鳥取大 2010)　　(m20103902)

0.236 偏導関数に関する以下の問いに答えなさい.

(1) 関数 $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y}$ の偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ および全微分 df を求めよ.

(2) 関数 $z=f(v)$ および $v=g(x,y)$ は，連続かつそれぞれの変数に関して 2 階微分可能であるとする．このとき，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を表す式を書きなさい.

(鳥取大 2012)　　(m20123904)

0.237 (1) 関数 $F(x,y)$ は連続かつ $x,\ y$ に関して偏微分可能で, さらに, 各偏導関数 $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ が連続であるとする．関数 $f(t)$, $g(t)$ は t に対して微分可能であるとする．このとき, 関数 $G(t) = F\bigl(f(t)\,,\ g(t)\bigr)$ の導関数 $G'(t)$ を F の各偏導関数と f , g の導関数を用いて表せ. ただし, 公式の証明を行う必要はない.

(2) 2 変数関数 $F(x,y) = x^2 + xy + y^3 - 1$ に対して, $x = 1$ に十分近い x に対して定義された 3 回微分可能な関数 $y = g(x)$ で

$$g(1) = 0\ , \qquad F\bigl(x, g(x)\bigr) \equiv 0$$

をみたすものがあるとする. このとき $g'(1)$, $g''(1)$, $g'''(1)$ を求めよ.

(広島大 2005) (m20054103)

0.238 実 2 変数関数 $\quad f(x,y) = x^2 + \dfrac{5}{2}y^2 + 3xy - y \quad$ について以下の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の停留点 (x_0, y_0) を求めよ．ただし停留点とは，関係式 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ をともに満たす点のことである.

(2) $f(x,y)$ の停留点 (x_0, y_0) のまわりでのテイラー展開を求めよ.

(3) 停留点における値 $f(x_0, y_0)$ が $f(x,y)$ の最小値になっていることを示せ.

(広島大 2008) (m20084104)

0.239 関数 $u(x,y) = e^{-cx-y}$（c は定数）に対して, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を計算せよ.

(広島大 2011) (m20114102)

0.240 $u(r)$ は区間 $(0,\ \infty)$ 上で 2 回微分可能な関数とし，さらに，$u''(r)$ が $(0,\ \infty)$ 上で連続であるとする. 関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = u(r) \quad (\text{ただし},\ r = \sqrt{x^2+y^2})$$

と定める．以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = u''(r) + \dfrac{1}{r}u'(r)$ を示せ.

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$ が成り立つためには,

$$u(r) = a \log r + b \quad (a, b \text{ は定数})$$

と表されることが必要十分であることを示せ.

(広島大 2012) (m20124103)

0.241 $g(t)$ は t について 1 回微分可能な 1 変数関数とし，x, y についての 2 変数関数を $z = x \cdot g\left(\dfrac{y}{x}\right)$ とする．このとき，$\quad x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} - z \quad$ を計算せよ.

(広島市立大 2002) (m20024202)

0.242 関数 $z = e^x(\cos x + \sin y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.

(広島市立大 2010) (m20104201)

0.243 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ とする.

(1) $(x,y) \neq (0,0)$ において，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.

(2) $(x,y)\neq(0,0)$ において，$\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}$ 方向の微分係数（方向微分係数）を求めよ．

(3) $(x,y)=(0,0)$ において，z が全微分可能でないことを示せ．

(広島市立大 2011)　　(m20114202)

0.244 2 変数関数 $f(x,y)=\sin(x+2y)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) f の勾配ベクトル $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ を求めよ．

また，勾配ベクトルの具体的な値を $(0,0)$, $(0,\pi/4)$, $(0,\pi/2)$ において求めよ．

(2) 座標平面上の 4 点 $(0,0)$, $(0,\pi/2)$, $(\pi,0)$, $(\pi,-\pi/2)$ を頂点とする平行四辺形が定める領域を D とする（図 1）．2 重積分 $\displaystyle\iint_D |f(x,y)|\,dxdy$ の値を求めよ．

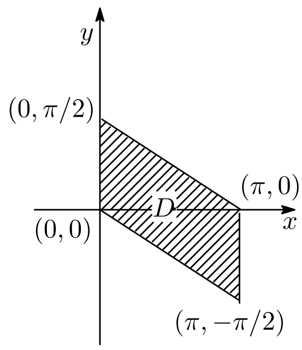


図 1

(広島市立大 2012)　　(m20124204)

0.245 (1) 関数 $z=\cos(xy)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)=xe^{-(x^2+y^2)}$ の極値と，極値をとる点を求めよ．

(広島市立大 2013)　　(m20134201)

0.246 次の問に答えよ．

(1) $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とする．このとき，行列式 $J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}$ を r,θ で表せ．

(2) (1) で求めた J に対して，$I=\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^\infty f(r\cos\theta,r\sin\theta)Jdr$ であることを用いて，$f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ のとき I の値を求めよ．

(徳島大 1999)　　(m19994402)

0.247 $0<a<1,\ D_a=\left\{(x,y)\,;\,a^2\leqq\ x^2+y^2\leqq\dfrac{1}{a^2}\right\}$ とする．

(1) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とする．行列式 $J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}$ を $r,\ \theta$ で表せ．

(2) $I(a)=\displaystyle\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{a\to 0} I(a)$ を求めよ．

(徳島大 2010)　　(m20104404)

0.248　$D=\{(x,y)\,;\,1\leqq\ x+y\leqq\ 2,\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0\}$ とする．　二重積分 $I=\displaystyle\iint_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}\,dxdy$ に対して，次の問いに答えよ．

(1)　$u=x-y,\ v=x+y$ とおく．x,y を $u,\ v$ で表せ．

(2)　行列式 $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ．

(3)　(1) の変換で D に対応する uv 平面の集合を D' とする．D' を図示せよ．

(4)　I を求めよ．

(徳島大 2011)　　(m20114403)

0.249　$D=\{(x,y)\ :\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0,\ x+y\geqq\ 1\}$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　$u=x+y,\ v=\dfrac{y}{x+y}$ とおく．x,y を u,v の式で表せ．また，行列式 $J(u,v)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ．

(2)　$\displaystyle\int_0^1 v\sin(\pi v)dv$ を求めよ．

(3)　$f(x,y)=\dfrac{y}{x+y}e^{-(x+y)}\sin\left(\dfrac{\pi y}{x+y}\right)$ に対して，$I=\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ を求めよ．ここで，(1) の変換により $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^1 dv\int_1^\infty f\big(x(u,v),\ y(u,v)\big)|J(u,v)|du$ となることを用いてよい．

(徳島大 2015)　　(m20154403)

0.250　平面内のある領域で定義された C^1 級の 2 変数関数 $f(x,y),\ g(x,y)$ が

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

を満たすとき，(f,g) はコーシー・リーマンの関係式を満たすという．次の問いに答えよ．

(1)　$f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$g(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$　$\big((x,y)\neq(0,0)\big)$ のとき，(f,g) はコーシー・リーマンの関係式を満たすことを示せ．

(2)　$f(x,y)=x^2-y^2$ のとき，(f,g) がコーシー・リーマンの関係式を満たすような x,y の多項式 $g(x,y)$ の例をひとつあげよ．

(3)　一般に (f,g) および (h,k) がコーシー・リーマンの関係式を満たすとき

$$p(x,y)=h\big(f(x,y),\ g(x,y)\big)$$

$$q(x,y)=k\big(f(x,y),\ g(x,y)\big)$$

とおくと，(p,q) も（これらの合成関数が意味ある範囲で）コーシー・リーマンの関係式を満たすことを示せ．

(高知大 2015)　　(m20154502)

0.251 $\mathbb{R}^2$ の領域 D_1，D_2 を

$$D_1 = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 < x < 1 \text{ かつ } x^2 + y^2 < 1\right\}$$
$$D_2 = \{(x, y) \mid 0 < x < 1 \text{ かつ } |y| < 1\}$$

により定義する．次の問いに答えよ．

(1) D_1 上の C^1 級関数 $f(x, y)$ が $x^2 + y^2$ のみに依存するとき，すなわち，

$$f(x, y) = h(x^2 + y^2)$$

が任意の $(x, y) \in D_1$ に対して成り立つような一変数関数 h が存在するとき，D_1 上で

$$(*) \qquad y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

が成り立つことを示せ．

(2) 逆に，D_1 上の C^1 級関数 $f(x, y)$ が D_1 上で $(*)$ を満たすとき，f は $x^2 + y^2$ のみに依存する関数であることを示せ．

(3) D_2 上の関数 $g(x, y)$ を

$$g(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)^2 & (x^2 + y^2 > 1 \text{ かつ } y > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

で定義する．g は $(*)$ の f を g で置き換えた方程式を D_2 上で満たすことを示せ．

(4) 小問 (1)，(2) の D_1 を D_2 に置き換えると，それぞれ正しいと言えるだろうか．理由を挙げて述べよ．

(高知大 2017)　　(m20174503)

0.252 $\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級関数 $f(x, y)$ が与えられているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) f が $x - y$ のみの関数のとき，すなわち，$f(x, y) = h(x - y)$ が任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して成り立つような一変数関数 h が存在するとき，$\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ であることを示せ．

(2) f が $x + y$ のみの関数のとき，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ がみたす関数式を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^2$ 上で C^2 級関数 $f_1(x, y), f_2(x, y)$ が与えられていて，f_1 が $x - y$ のみの関数，f_2 が $x + y$ のみの関数とする．f が $f = f_1 + f_2$ をみたすならば，f は

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

をみたすことを示せ．

(高知大 2018)　　(m20184502)

0.253 $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数 $f(x, y)$ が与えられているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 1 変数関数 $a(t)$ を用いて $f(x, y) = a(y - \sin x)$ と表されるとする．このとき，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ求め，

$$\frac{\partial f}{\partial x} + (\cos x)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

が成り立つことを確かめよ．

(2) $u = y - \sin x$，$v = x$ とおく．この変換のもとで，u，v の関数 $g(u, v)$ を $g(u, v) = f(x, y)$ で定義する．このとき，$\dfrac{\partial g}{\partial u}$ および $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ を $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を用いて表せ．

(3) $f(x,y)$ が $\mathbb{R}^2$ 上 $(*)$ をみたすとする．このとき，$f(x,y)$ は $y-\sin x$ のみの関数であること，つまりある 1 変数関数 $a(t)$ を用いて $f(x,y)=a(y-\sin x)$ と表されることを示せ．

(4) $f(x,y)$ が $\mathbb{R}^2$ 上 $(*)$ をみたし，かつ $f(0,y)=y^2$ がすべての実数 y について成り立つとき，$f(x,y)$ を求めよ．

(高知大 2019)　　(m20194502)

0.254　$z=\log(x^2+y^2), x=u+v, y=u-v$ とする．$\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ．

(愛媛大 2000)　　(m20004603)

0.255　$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ が定数で，$f(x)$ が微分可能のとき，$g(s,t)=\gamma+(t-\alpha)f\left(\dfrac{s-\beta}{t-\alpha}\right)$ によって定義される関数 $g(s,t)$ は次の関係式を満たすことを示せ．

$$g(s,t)=\gamma+(t-\alpha)\frac{\partial g}{\partial t}(s,t)+(s-\beta)\frac{\partial g}{\partial s}(s,t)$$

(愛媛大 2004)　　(m20044605)

0.256　C^2 級の 2 変数関数 $z=f(x,y)$ と 2 次元の極座標変換 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ の合成は，r と θ の関数 $z=f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ になる．

(1) 次の等式を示せ．　$\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を z の r と θ についての偏導関数および r と θ のみを用いて表せ．

(愛媛大 2006)　　(m20064615)

0.257　$f(x,y)=\displaystyle\int_0^{\frac{y^2}{x}} e^{-t}dt$ とおく．$\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ を求めよ．

(愛媛大 2007)　　(m20074603)

0.258　$(x,y)\neq(0,0)$ で定義された関数 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を考える．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．　　(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を計算せよ．

(愛媛大 2007)　　(m20074611)

0.259　(1) $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ が偏微分可能であるとき，$J(u,v)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\psi}{\partial v}-\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial\psi}{\partial u}$ とおく．次の $\varphi,\ \psi$ に対して $J(u,v)$ を求めよ．

(a) $\varphi(u,v)=e^u\cos v$,　$\psi(u,v)=e^u\sin v$

(b) $\varphi(u,v)=\sqrt{u^2+v^2}$,　$\psi(u,v)=\tan^{-1}\dfrac{v}{u}$

(2) $D=\{(x,y)\,;\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0,\ x^2+y^2\leqq\ 1\}$ とするとき，次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D x\sqrt{y}\,dxdy$$

(愛媛大 2008)　　(m20084610)

0.260　関数 $z=f(x,y)$ は偏微分可能であるとする. $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ と極座標変換するとき, 次の 2 つの式が成立することを示せ.

(a) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=r\cos 2\theta\dfrac{\partial z}{\partial r}-\sin 2\theta\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$　　(b) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$

(愛媛大 2010)　　(m20104603)

0.261 二変数関数 $f(x,y)$ は 2 回偏微分可能であり，$(x,y)=(a,b)$ において $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ を満たしている．また，一変数関数 $g(z)$ は 2 回微分可能であるとする．$F(x,y)=g\left(f(x,y)\right)$ とおくとき，次の (1), (2), (3) に答えよ．

(1) $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ を $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ と $g'\left(f(x,y)\right)$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{\partial F}{\partial x}(a,b)=\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)=0$ を示せ．

(3) さらに，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)=0$ を仮定するとき，$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a,b)+\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a,b)=0$ を示せ．

(愛媛大 2011)　　(m20114609)

0.262 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ とする．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) 空間内の点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ における曲面 $z=f(x,y)$ の接平面の方程式を求めよ．

(3) 空間における領域

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2 \leqq\ a^2\ \ 0 \leqq\ z \leqq\ f(x,y)\right\}$$

の体積を求めよ．ただし，$0<a<1$ とする．

(愛媛大 2013)　　(m20134603)

0.263 $f(x,y)=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ とする．$y\dfrac{\partial f}{\partial x}-x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ と $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(愛媛大 2015)　　(m20154603)

0.264 (1) 次で定義される関数 $f(x,y)$ の原点 $(0,0)$ での連続性を調べよ．

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(2) C^1 級の関数 $f(x,y)$ は

$$x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

を満たすとする．このとき，$z=f(x,y)$ と $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ の合成関数 $z=f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ は r だけの関数であることを示せ．

(3) 連続関数 $f(x)$ について，次の等式を示せ．

$$\int_0^x dy\int_0^y dz\int_0^z f(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt$$

(愛媛大 2016)　　(m20164603)

0.265 $a\neq 0$ を定数として，$f(x,y)=\log(x^a+y^a)$ とする．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$,　$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$,　$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$ がすべての $x>0,\ y>0$ に対して成り立つように，a の値を定めよ．

(愛媛大 2017)　　(m20174603)

0.266 $f(x,y,z) = \dfrac{e^{kr}}{r}$,　$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
の時，次の問に答えよ（ここで k は定数である）.

(1) $\dfrac{\partial r}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}$ を求めよ.

(2) ラプラシアン $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ を求めよ.

(九州大 1996）　(m19964701)

0.267 有名な公式 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ $(a>0)$
の両辺を a に関して微分して,「形式的に微分と積分の順序を交換」すれば

$$-\frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}} = \frac{d}{da}\left(\int_0^\infty e^{-ax^2}dx\right) = \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial a}e^{-ax^2}\right)dx = -\int_0^\infty x^2e^{-ax^2}dx\ ,$$

すなわち

$$\int_0^\infty x^2e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}} \qquad (*)$$

となる．この問題の目的は，$(*)$ が実際に成立することを上の手順で示すことである.

(1) 任意の $h>0$ に対して，不等式 $0 \leqq \dfrac{e^{-hx^2}-1}{h} + x^2 \leqq \dfrac{hx^4}{2}$,　$x \in \mathbb{R}$ 　を示しなさい.

(2) $\displaystyle\int_0^\infty x^4e^{-ax^2}dx < \infty$ を示しなさい.

(3) (1), (2) を用いて $(*)$ を示しなさい.

(九州大 2006)　(m20064705)

0.268 2 変数関数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & ,\ (x,y) \neq (0,0) \text{ のとき} \\ 0 & ,\ (x,y) = (0,0) \text{ のとき} \end{cases}$ に関する以下の問に答えなさい.

(1) $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続であることを示しなさい.

(2) $f(x,y)$ は $(0,0)$ で x に関して，また y に関して偏微分可能であることを示しなさい.

(3) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ は $(0,0)$ で連続であるかどうか調べなさい.

(九州大 2006)　(m20064706)

0.269 $\phi = x^2+y^2+z$ とするとき，$\phi=0$ は曲面を表す． また，この曲面はパラメータ u,v を用いて $\boldsymbol{r}(x,y,z) = (u,v,-u^2-v^2)$ と表すことができる．ここで，$\boldsymbol{r}$ は 3 次元空間での点ベクトルである．このとき，以下の設問に答えよ.

(1) 曲面上の点 $P=(1,1,-2)$ における u 方向の接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ と v 方向の接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ を求めよ.

(2) この 2 つの接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ によって作られる平面は曲面上の点 P における接平面となる.
このときの接平面を表す式を x,y,z を用いて表せ.

(九州大 2007)　(m20074703)

0.270 3 次元空間内で

$$S\ :\ (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))\,,\quad (u,v) \in D$$

の形で表される曲面を考える．ただし，D はパラメータ (u,v) の動く 2 次元平面の領域である．このとき，S の面積 $\mu(S)$ は

$$\mu(S)=\int_D\sqrt{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u}\\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}^2}\ dudv$$

で与えられる．ただし，$\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}$ は行列式を表す．これを用いて以下の問いに答えよ．

(1) 曲面 S が $z=f(x,y)$， $(x,y)\in D$ で与えられるときは

$$\mu(S)=\int_D\sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}\ \ dxdy$$

であることを示せ．

(2) 半径 1 の球面 $x^2+y^2+z^2=1$ の面積は 4π であることを (1) の公式を用いて確かめよ．

(九州大 2007)　　(m20074707)

0.271 次の時間 t と位置 x に関する波動方程式 ① と環境条件 ② を満足する関数 $y(x,t)$ を以下の手順に従って求めよ．

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\quad (c>0)\qquad ①\qquad \text{ただし環境条件は}\quad y(0,t)=y(L,t)=0\qquad ②$$

(1) 関数 $y(x,t)$ を位置の関数 $A(x)$ と時間の関数 $B(t)$ の積として $y(x,t)=A(x)\cdot B(t)$ と表すと，次式が成立することを証明せよ．

$$\frac{1}{A(x)}\frac{d^2A(x)}{dx^2}=\frac{1}{c^2B(t)}\frac{d^2B(t)}{dt^2}\qquad ③$$

(2) 式 ③ の左辺は位置 x，右辺は時間 t だけの関数であるので式 ③ の両辺はある定数に等しい．これを $-\lambda$ とおくと $A(x)$ と $B(t)$ に関する次の 2 階の常微分方程式が成立する．

$$\frac{d^2A(x)}{dx^2}+\lambda A(x)=0\qquad ④\qquad\qquad \frac{d^2B(t)}{dt^2}+\lambda c^2B(t)=0\qquad ⑤$$

$\lambda>0$ の場合の $A(x)$ と $B(t)$ の一般解を求めよ．

(3) $\lambda>0$ の場合，式 ② の環境条件より

$$\lambda=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\quad n=1,2,3,\cdots\qquad ⑥$$

が成立することを証明せよ．

(九州大 2008)　　(m20084702)

0.272 $G(x,t)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4t}\right)$ とおく．ただし，$\exp z=e^z$ である．

(1) $t>0$ のとき

$$\frac{\partial G}{\partial t}-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=0$$

であることを示せ．

(2) $t>0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty}G(x,t)\,dx=1$$

であることを示せ．ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}=\sqrt{\pi}$ を用いてよい．

(3) f を $\boldsymbol{R} = (-\infty,\ \infty)$ 上の有界な連続関数とするとき，すべての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$\lim_{t \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t) f(y)\, dy = f(x)$$

であることを証明せよ．

(九州大 2008) (m20084712)

0.273 $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -x-1 \leq y \leq -x+1,\ x-1 \leq y \leq x+1 \right\}$ とおく．

(1) 1 次変換 $u = x+y$, $v = x-y$ によって D が移される uv平面上の集合を図示せよ ．

(2) (1) の変数変換において，ヤコビ行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

を求めよ．

(3) 重積分

$$\iint_D (x+y)^2 e^{x-y} dxdy$$

を求めよ．

(九州大 2012) (m20124710)

0.274 2 変数関数 $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(3) $f(x,y)$ の極値点と極値を求めよ．

(九州大 2012) (m20124711)

0.275 (1) $u = f(x,y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r > 0)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(a) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ を r, θ および，u の r, θ に関する偏導関数を用いて表せ．

(b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を r, θ および，u の r, θ に関する偏導関数を用いて表せ．

(2) 領域 $D = \left\{ (x,y) \mid x^2+y^2 \leqq\ 1 \right\}$ において，関数 $f(x,y) = x^2+xy+y^2$ を考える．以下の問いに答えよ．

(a) 領域 $\left\{ (x,y) \mid x^2+y^2 < 1 \right\}$ における $f(x,y)$ の極値とそれを与える (x,y) を求めよ．極大か極小かも述べよ．

(b) 単位円 $x^2+y^2 = 1$ 上での $f(x,y)$ の最大値，最小値とそれらを与える (x,y) を求めよ．

(c) 領域 D における $f(x,y)$ の最大値，最小値とそれらを与える (x,y) を求めよ．

(九州大 2014) (m20144704)

0.276 $x > 0,\ y > 0$ において，2 変数関数 $f(x,y)$ および $g(x,y)$ を次の式で定義する．

$$f(x,y) = \log\left(x^2+y^2\right)\ , \qquad g(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{1/3}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の x に関する 2 次偏導関数 $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)$ を求めよ.

(2) 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\lim_{t\to+0} t\log t = 0$$

(3) 領域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0<x^2+y^2<1,\ 0<y<x\right\}$ における次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D \frac{f(x,y)}{g(x,y)}dxdy$$

(九州大 2019)　　(m20194712)

0.277 $z=x^2y^2$ において $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ を求めなさい.

（佐賀大 1999）　　(m19994904)

0.278 x と y の関数 $z=e^{(x^2+y^2)}$ について偏微分 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を求めなさい.

（佐賀大 2001）　　(m20014904)

0.279 以下に示す x と y の関数である z の偏微分を求めなさい.

(1) $z=y/x+x/y$ であるとき，$\partial z/\partial x$

(2) $z=y\sin(2x+3y)$ であるとき，$\partial z/\partial y$

(佐賀大 2003)　　(m20034917)

0.280 $z=f(x,y)$ は全微分可能とし, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とするとき, $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ ならば, $f(x,y)$ は θ だけの関数であることを示せ.

（佐賀大 2004）　　(m20044916)

0.281 $f(x,y)=x\exp(8xy)$ について, 次の 1 次偏微分及び 2 次偏微分を求めなさい.　ただし, $\exp(z)$ は $\exp(z)=e^z$ を意味する.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$$

（佐賀大 2004）　　(m20044917)

0.282 x と y の関数 $z=\log x-3x^2y+6$ について, 1 次偏微分 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ および 2 次偏微分 $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$ と $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ を求めよ.

(佐賀大 2005)　　(m20054921)

0.283 ある気体の温度 T，圧力 P，体積 V が次の関係式で表せるとき，以下の (1),(2) の偏導関数を求めなさい．ただし，a,b,R は定数である．　$(P+a/V^2)(V-b)=RT$

(1) $(\partial P/\partial T)_V$　　　(2) $(\partial^2 P/\partial V^2)_T$

(佐賀大 2006)　　(m20064925)

0.284 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{4x^2+3x-7}{2x^2-5x+3}$ を求めよ.

(2) $y=\log\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$ を微分せよ.

(3) 不定積分 $\displaystyle\int x^2e^{2x}\,dx$ を計算せよ.

(4) 二変数関数 $f(x,y)=x^2-5xy^2+3y^2$ に関して，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．また，点 $(3,2)$ における x 方向，y 方向の偏微分係数を求めよ．

(佐賀大 2007)　　(m20074926)

0.285 全微分可能な 2 変数関数 $z=f(x,y)$ が，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を満たすとする．$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ のとき，$\dfrac{\partial z}{\partial r}$，$\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めよ．

(佐賀大 2009)　　(m20094906)

0.286 2 変数関数 $f(x,y)=\cos(x^2y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ を，それぞれ求めよ．

(佐賀大 2011)　　(m20114912)

0.287 $f(x,y)=\sin(3xy)$ について，偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ を計算せよ．

(佐賀大 2012)　　(m20124913)

0.288 二変数関数 $f(x,y)=3x^2-7xy^2+y^2$ に関して，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．また，点 $(1,2)$ における $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(佐賀大 2013)　　(m20134919)

0.289 全微分可能な 2 変数関数 $z=f(x,y)$ が $\dfrac{\partial z}{\partial x}=x\sqrt{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=y\sqrt{x^2+y^2}$ を満たすとする．$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ のとき，$\dfrac{\partial z}{\partial r}$，$\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めよ．

(佐賀大 2014)　　(m20144913)

0.290 次の関数 z の偏導関数 $\partial z/\partial x$ を求めなさい．

(1) $z=\sin xy$　　(2) $z=x^y+y^x$

(佐賀大 2015)　　(m20154905)

0.291 関数 $f(x,y)=x^3-6xy+y^3$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ および $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ を満たす (x,y) を求めよ．

(3) (2) で求めた (x,y) について，$f(x,y)$ が極大値か，極小値か，あるいは極値ではないか示せ．また，極値である場合はその値を求めよ．

(佐賀大 2015)　　(m20154915)

0.292 次の関数 z の偏導関数 $\partial z/\partial x$，$\partial z/\partial y$ を求めなさい．

(1) $z=\dfrac{x-y}{x+y}$　　(2) $z=\sin x\,\cos y$

(佐賀大 2016)　　(m20164931)

0.293 次の関数 z の偏導関数 $\partial z/\partial x$，$\partial z/\partial y$ を求めなさい．

(1) $z=3x^2-5xy+3y^2-2x+4y+10$　　(2) $z=e^{2x}\cos 2y$

(佐賀大 2017)　　(m20174912)

0.294 xy 平面上の集合 $\left\{(x,y)\mid x^2+y^2<R^2\right\}$ で定義された関数 $f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ について，下記の問いに答えなさい．ただし，定数 R は $R>2$ を満たすとする．

(1) $\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$ を求めなさい.

(2) 集合 D を $D=\left\{(x,y)\mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\right\}$ とし，極座標を利用して，

重積分 $I=\displaystyle\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$ を求めなさい.

(佐賀大 2018)　　(m20184903)

0.295 次の関数 z の偏導関数 $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ を求めなさい.

(1) $z=x\log\dfrac{y}{x}$　　(2) $z=e^{3x}\sin 2y$

(佐賀大 2018)　　(m20184923)

0.296 次の関数 z の偏導関数 $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ を求めなさい.

$z=2x^2-4xy+y^2-x$

(佐賀大 2021)　　(m20214907)

0.297 次の関数 f の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めなさい.

(1) $f=3xy+2z$　　(2) $f=\log x^y$

(佐賀大 2022)　　(m20224920)

0.298 次の式 Ψ についてその偏導関数 $\partial\Psi/\partial r$ および $\partial\Psi/\partial\theta$ を計算しなさい.

$\Psi=\cos\theta\exp(-r)$

(長崎大 2005)　　(m20055018)

0.299 次の式について偏微分 $\partial S/\partial a$ と $\partial S/\partial b$ を求めよ.

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-a-bx_i\right)^2$$

(長崎大 2005)　　(m20055019)

0.300 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r$, $f(x,y,z)=\dfrac{1}{r}=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ とするとき.

(1) $f_x(x,y,z)$, $f_y(x,y,z)$, $f_z(x,y,z)$ を求めよ.

(2) $f_{xx}(x,y,z)+f_{yy}(x,y,z)+f_{zz}(x,y,z)$ を求めよ.

ここで，$f_x(x,y,z)=\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x},\cdots,f_{xx}(x,y,z)=\dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2},\cdots$ とする.

(長崎大 2007)　　(m20075003)

0.301 次の式について偏微分 $\partial^2 z/\partial x^2$ と $\partial^2 z/\partial x\partial y$ を求めよ.

$z=x^3-5xy^2+2$

(長崎大 2007)　　(m20075007)

0.302 以下の問いに答えよ．ただし，a は正の定数とする.

(1) a^x の微分を求めよ.

(2) $\tan^{-1}x$ の微分を求めよ.

(3) $f(x,y)=\dfrac{\tan^{-1}x}{a^y}$ の x 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と y 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ求めよ.

(4) $\cos x$ をマクローリン展開せよ.

(長崎大 2009)　　(m20095007)

0.303　関数 $u(x,y)=e^x\cos y$ がある. 以下の設問に答えよ.

(1) 次の偏微分を求めよ.
$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}$$

(2) 次の式を計算せよ.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

(長崎大 2010)　　(m20105009)

0.304　$x=r\cos\theta$, $y=2r\sin\theta$ のとき，行列式 $J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}$ を求めよ.

(熊本大 2006)　　(m20065201)

0.305　次の積分について，以下の問に答えなさい.

$$I=\iiint_D\frac{xz}{(y+z)(x+y+z)^4}\,dxdydz$$
$$D\ :\ a\leq x+y+z\leq b,\ 0\leq x,y,z\quad(0<a<b)$$

(1) $t=x+y+z,\ u=y+z,\ z=z$ と変換した場合のヤコビアン
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,u,z)}\qquad\left(=\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,u)}\right)$$
を求めなさい.

(2) D の範囲の概略を $x,\ y,\ z$ からなる直交座標に $a,\ b$ を用いて図示しなさい.

(3) I を $a,\ b$ を用いて求めなさい.

(熊本大 2021)　　(m20215202)

0.306　$f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$　$((x,y,z)\neq(0,0,0))$ において，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ を計算せよ.

(宮崎大 2001)　　(m20015301)

0.307　2 変数関数 $z=f(x,y)=e^{-x}\sin y$ について, 次の各問に答えよ.

(1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を求めよ.

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ の上の点 $P\left(0,\dfrac{\pi}{2},1\right)$ における接平面の方程式を求めよ.

（宮崎大 2004）　　(m20045301)

0.308　重積分 $\displaystyle\iint_D\frac{dxdy}{x^2+y^2}$　,　$D\ :\ 1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 2$　の値を，次の指示に従って求めよ.

(1) 積分領域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) (x,y) を極座標 (r,θ) で表し，積分領域 D に対する (r,θ) の範囲を求めよ.

(3) ヤコビアン $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|$ を求めよ.

(4) (3) で求めたヤコビアンを用いて，重積分の値を求めよ.

(宮崎大 2004)　　(m20045303)

0.309 2 変数関数 $f(x,y)=x^2+2\alpha xy+y^2$ について, 次の各問に答えよ. ただし, α は $\alpha^2\neq 1$ を満たす定数とする.

(1) $f(x,y)$ の 2 階までの偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ を全て求めよ.

(2) $f(x,y)$ に極値があれば, 全て求めよ.

(宮崎大 2005)　　(m20055302)

0.310 変数 x, y, z から, 変数 u, v, w への変数変換を

$$u=x\cos z-y\sin z\,,\qquad v=x\sin z+y\cos z\,,\qquad w=z$$

と定めたとき, 以下の各問に答えよ.

(1) 次の恒等式が成立することを示せ.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)=1$$

(2) 関数 $f=e^{-\sqrt{u^2+v^2}}\cos w$ に対して, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ を x, y, z の関数として求めよ.

(宮崎大 2005)　　(m20055303)

0.311 $x>0,\ y>0$ に対して $u(x,y)=x^y$, $v(x,y)=x^2+y^2$ とおく.

このとき，ヤコビ行列　$J=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$　とその行列式 $|J|$ の値を求めよ.

(宮崎大 2006)　　(m20065302)

0.312 2 変数関数 $f(x,y)=\log(1+x^2+2y^2)$ について，次の各問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

(2) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\ (r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくとき，関数 f の $r,\ \theta$ に関する偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial r}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ を $x,\ y$ のみを用いて表せ.

(宮崎大 2007)　　(m20075302)

0.313 (1) 平面内の領域　$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$
を xy 平面上に図示せよ．ただし，a,b は正の定数とする.

(2) $x=ar\cos\theta,\ y=br\sin\theta\ \ (r\geqq 0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ と変換したとき，領域 D に対応する $r\theta$ 平面上の領域 E を不等式で表し，またそれを図示せよ.

(3) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ.

(4) (3) で求めたヤコビアンを用いて，重積分 $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ の値を求めよ.

(宮崎大 2008)　　(m20085303)

0.314 x と y の 2 変数関数

$$f(x,y)=x^3-3x^2-y^2$$

について，次の各問に答えよ.

(1) 関数 $f(x,y)$ の 2 階までの偏導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

をすべて求めよ.

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値があれば，すべて求めよ.

(宮崎大 2009)　　(m20095303)

0.315 x と y の 2 変数関数

$$f(x,y) = \alpha x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + 4y$$

について, 次の問に答えよ. ただし, α は定数で $\alpha \neq \frac{1}{2}$ とする.

(1) 関数 $f(x,y)$ の 2 階までの偏導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

をすべて求めよ.

(2) 関数 $f(x,y)$ が極値を持つための α の条件を示し, その場合の極値と, その極値が極大値あるいは極小値のどちらであるか答えよ.

(宮崎大 2010)　　(m20105303)

0.316 実数 $x,\ y$ の 2 変数関数 $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$ について，次の各問いに答えよ.

(1) $\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ を求めよ.

(2) $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ および $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ となる $(x,\ y)$ をすべて求めよ.

(3) $f(x,y)$ の極値があれば，それらをすべて求めよ.

(宮崎大 2011)　　(m20115303)

0.317 重積分

$$I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\, dxdy\ , \quad D = \{(x,y)\,|\, x^2+y^2 \leqq 1\}$$

について，次の各問いに答えよ.

(1) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおいたときのヤコビアン $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(2) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2011)　　(m20115304)

0.318 u, v に関する 2 変数関数 $z = \frac{e^{-u}}{v}$ と，x, y に関する 2 変数関数 $u = \frac{y}{x}$，$v = x^2 + y^2$ について，次の各問に答えよ.

(1) $\frac{\partial z}{\partial u}$ を u と v で表せ.

(2) $\frac{\partial u}{\partial x}$ を x と y で表せ.

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}$ を x と y で表せ.

(宮崎大 2012)　　(m20125304)

0.319 x と y の 2 変数関数

$$f(x,y)=e^{-ax^2-by^2}$$

について，次の問に答えよ．ただし，a, b は定数で，$a>0$, $b>0$ とする．

(1) 関数 $f(x,y)$ の 2 階までの偏導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

をすべて求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(宮崎大 2013) (m20135305)

0.320 x と y について何回でも偏微分可能な 2 変数関数 $f(x,y)$ に対し，

$$x=x(u,v)=u\cos\alpha-y\sin\alpha\ ,\quad y=y(u,v)=u\sin\alpha+v\cos\alpha$$

を代入して，合成関数 $g(u,v)=f\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ を作る．ここで，α は実数の定数とする．これについて，次の各問に答えよ．ただし，以下では関数の引数を省略しており，例えば $\dfrac{\partial g}{\partial u}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ は，それぞれ $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ の意味である．

(1) 等式 $\dfrac{\partial g}{\partial u}=a_1\dfrac{\partial f}{\partial x}+a_2\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を満たす定数 a_1, a_2 を求めよ．

(2) 等式 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}=b_1\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+b_2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+b_3\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を満たす定数 b_1, b_2, b_3 を求めよ．

(3) 等式 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}=c_1\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+c_2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+c_3\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を満たす定数 c_1, c_2, c_3 を求めよ．

(宮崎大 2014) (m20145305)

0.321 (1) $f(x,y)=x^2+xy+y^3$, $x(t)=\cos t$, $y(t)=\sin t$ のとき，$\dfrac{d}{dt}f\,(x(t),\ y(t))$ を計算しなさい．

(2) $g(x)=e^x$, $x=r\cos t$ のとき，$\dfrac{\partial}{\partial t}g(r\cos t)$, $\dfrac{\partial}{\partial r}g(r\cos t)$ を計算しなさい．

(鹿児島大 2018) (m20185414)

0.322 次の式が与えられている． $f(x,y)=x^2y+y^2\cos x+y^3$
偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ を求めなさい．

(室蘭工業大 2006) (m20065507)

0.323 2 つの関数

$$f(x)=\frac{1}{1+x} \tag{2}$$

$$g(x)=e^{-\alpha x}\quad(\alpha>0) \tag{3}$$

とする．

(1) 合成関数 $h(x)=f(g(x))$ を求めよ．

(2) 関数 $h(x)$ の 1 階の導関数 $h'(x)$ と，2 階の導関数 $h''(x)$ を求めよ．

(3) $\alpha=1$ の場合の $h(x)$ のグラフを図示せよ．

(4) $h'(x)$ を α の関数とみなした場合の，α に関する偏導関数 $\dfrac{\partial h'}{\partial\alpha}$ を求めよ．

(5) $h'(0)$ を α の関数として，そのグラフを図示せよ．

(室蘭工業大 2009)　　(m20095504)

0.324 直交座標の点 $P(x, y, z)$ の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$$

とする. また, スカラー関数 $f(x, y, z)$ を

$$f(x, y, z) = 2x + y + 3z$$

とする. このとき以下の問の答えよ. ただし, ∇ は次のベクトル演算子を表す.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{n}$ を $\boldsymbol{n} = \nabla f$ で定義するとき, $\boldsymbol{n} = (n_x,\ x_y,\ n_z)$ の形で表せ.

(2) 関数 $f(x, y, z)$ をベクトル $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{r}$ を用いて表せ.

(3) $f(x, y, z) = 2x + y + 3z = 5$ は平面を表す方程式である. この平面上にある 2 点 $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $P_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ における位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_1 = (x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\boldsymbol{r}_2 = (x_2,\ y_2,\ z_2)$ とするとき, ベクトル $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ の内積が $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}_2$ となることを示せ.

(4) ベクトル $\boldsymbol{n}$ が平面 $f(x, y, z) = 2x + y + 3z = 5$ と垂直になることを示せ.

(室蘭工業大 2010)　　(m20105503)

0.325 2 変数関数 $z = z(x, y)$, $x(r, \theta) = r\cos\theta$, $y(r, \theta) = r\sin\theta$ の偏微分に関する以下の問いに答えよ. ただし, 以下では, $r = 0$ の場合は除いて考える.

(1) 偏微分 $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を用いて表せ.

(2) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$ となることを示せ.

(室蘭工業大 2015)　　(m20155512)

0.326 ベクトル解析に関する以下の問いに答えよ.

(1) $f(\boldsymbol{r}) = f(x, y, z)$ を任意のスカラー場として, $\nabla \times (\nabla f(\boldsymbol{r})) = 0$ が成り立つことを示せ. ここに, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ をそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルとして, $\nabla \equiv \dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$ である.

(2) $f(\boldsymbol{r}) = |\boldsymbol{r}|$ のとき, $\nabla f(\boldsymbol{r})$ を計算せよ. ただし, $|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする.

(室蘭工業大 2018)　　(m20185511)

0.327 直交座標系において, ベクトル関数 $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z) = (2y, -2x, z)$ が与えられているとき, 以下の問いに答えよ. ただし, $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ である.

(1) $\nabla(A \cdot A)$　$(= \mathrm{grad}(A \cdot A))$ を求めよ.

(2) $\nabla \cdot (xyzA)$　$(= \mathrm{div}(xyzA))$ を求めよ.

(3) $\nabla \times A$　$(= \mathrm{rot}A)$ を求めよ.

(4) 4 点 $P(1, 1, 0)$, $Q(-1, 1, 0)$, $R(-1, -1, 0)$, $S(1, -1, 0)$ を頂点とする四角形の辺に沿って $P \to Q \to R \to S \to P$ の順に一周する線積分 $\displaystyle\oint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ. ただし, $d\boldsymbol{r}$ は線積分における線素ベクトルを表す.

(室蘭工業大 2021)　　(m20215504)

0.328 直角座標系 (x, y, z) において，スカラー関数 $f = x^2 + y^2 + 2z$ が与えられているとき，

以下の問いに答えよ．ただし，$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ である．

(1) $\nabla f \ \big(= \mathrm{grad}(f)\big)$ を求めよ．

(2) $\nabla \cdot (\nabla f) \ \big(= \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f))\big)$ を求めよ．

(3) $\nabla \times (\nabla f) \ \big(= \mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f))\big)$ を求めよ．

(4) 点 $A(1, 0, 0)$ から点 $B(0, 1, 0)$ に向かう経路 C 上の線積分 $\displaystyle\int_C (\nabla f) \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．

ただし，$d\boldsymbol{r}$ は線積分における線素ベクトルを表す．また，経路 C は任意に設定してよい．

(室蘭工業大 2022)　　(m20225512)

0.329 以下の設問に答えよ. なお, 解答には導出過程を含むこと.

領域 $D : |x - 2y| \leq 1$, $|x + 3y| \leq 1$ のとき, 次の手順にしたがって, $\displaystyle\iint_D (x + y)^2 dxdy$ を求めよ.

(1) $x - 2y = u$, $x + 3y = v$ とし, x, y を, u と v を用いて表せ.

(2) $J = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\iint_D f(x, y) dxdy = \iint_E f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J| dudv$ の関係を用いて, $\displaystyle\iint_D (x+y)^2 dxdy$ を求めよ.

(香川大 2005)　　(m20055701)

0.330 下記の関数 $f(x, y)$ について，次の問いに答えよ．ただし，α と β はそれぞれ正の定数であるとする．

$$f(x, y) = \cos \alpha x \ e^{-\beta y}$$

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ と $\dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y)$ をそれぞれ導出せよ．

(2) 求めた偏導関数に関して，$x = \dfrac{\pi}{2\alpha}$, $y = \dfrac{1}{\beta}$ における偏微分係数をそれぞれ求めよ．

(香川大 2014)　　(m20145701)

0.331 以下に示す関数の 2 階偏導関数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ を求めよ．

$$z = \frac{x^3 + y^2}{x - y}$$

(香川大 2017)　　(m20175702)

0.332 $z = \dfrac{\log(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ のとき偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ を求めよ．

(香川大 2020)　　(m20205702)

0.333 $z = \log_{10}(x^2 + y^2 + 1)$ の $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ を求めよ．

(香川大 2022)　　(m20225703)

0.334 逆正弦関数 $\sin^{-1} x$ について, 次の問いに答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^{-1}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ を求めよ.

(2) $z=\sin^{-1}(xy)$, $x=\sin(u+v)$, $y=\sin(u-v)$ とするとき, 合成関数の偏微分 $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を変数 u と v を用いて表せ.

(島根大 2005) (m20055807)

0.335 $z=\sin xy$ について，次の問に答えよ.

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を求めよ. (2) $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ. (3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を求めよ. (4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ を求めよ.

(島根大 2006) (m20065801)

0.336 $u=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ について，次の問に答えよ.

(1) 行列式の値 u を求めよ. (2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ を求めよ. (3) $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ を求めよ.

(4) $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ を求めよ. (5) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ を求めよ.

(島根大 2006) (m20065802)

0.337 $f(x,y)$ を C^2 級の関数とし，θ を定数として $x=u\cos\theta-v\sin\theta$, $y=u\sin\theta+v\cos\theta$ とする.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ を求めよ. (2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ を $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ と $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を用いて表せ.

(島根大 2006) (m20065810)

0.338 (1) $\phi(x,y,z)=\dfrac{x^2}{2}+xy-z$ について $\nabla\phi=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\ \dfrac{\partial}{\partial y},\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right)\phi$ を求めよ.

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(\boldsymbol{A}_x,\ \boldsymbol{A}_y,\ \boldsymbol{A}_z)=(-y^3,\ x^3,\ 0)$ について，

$$\nabla\times\ \boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}_z}{\partial y}-\frac{\partial\boldsymbol{A}_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}_x}{\partial z}-\frac{\partial\boldsymbol{A}_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}_y}{\partial x}-\frac{\partial\boldsymbol{A}_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x,y,z 方向の単位ベクトルを表す.

(島根大 2006) (m20065815)

0.339 $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $x=e^{u+v}$, $y=e^{u-v}$ のとき，$\dfrac{\partial z}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ.

(島根大 2007) (m20075806)

0.340 次の関数 u は方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ を満たすことを示せ.

(1) $u=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ (2) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(島根大 2007) (m20075810)

0.341 次の関数 $u=u(x,y,z)$ について $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ の値を求めよ.

(1) $u=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{vmatrix}$ (2) $\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(島根大 2008)　　(m20085807)

0.342 (1) $R>0$ とする．$\Omega(R)=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq R^2,\ 0\leq y\leq x\right\}$ とするとき，
重積分 $\displaystyle\iint_{\Omega(R)}\frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}dxdy$ を計算せよ．

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^R\left(\int_0^x\frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}dy\right)dx$ を求めよ．

(3) α を定数とし，$(x,y)\neq(0,0)$ に対して $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\alpha/2}$ と定める．$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(島根大 2016)　　(m20165804)

0.343 $z=f(x,y),\ x=\dfrac{1}{2}(u-v),\ y=\dfrac{1}{2}(u+v)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ ならば，1 変数関数 g が存在して $z=g(x+y)$ と表せることを示せ．

(島根大 2018)　　(m20185807)

0.344 (1) 関数 $z=e^x\sin xy$ について，偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(2) 関数 $z=f(ax+by)$ について，$b\dfrac{\partial z}{\partial x}=a\dfrac{\partial z}{\partial y}$ であることを証明せよ．　(a，b は定数)

(3) 関数 $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ について，

$$(\triangle u=)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

であることを示せ．ここで，$\triangle$ はラプラシアンである．

(東京都立大 2021)　　(m20215903)

0.345 関数 $z=f(x,y)$ の x と y が r と θ の関数で $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ の関係にあるとき，$\dfrac{\partial z}{\partial r}$，$\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めよ．

(宇都宮大 2014)　　(m20146107)

0.346 関数 $z=\sin(2x-3y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ を求めなさい．

(和歌山大 20221)　　(m20216503)

0.347 関数 $f_n(x,y)=\sin\sqrt{x^n+y^n}$（$n$：自然数）について，次の問いに答えよ，

(1) 1 階偏導関数 $\dfrac{\partial f_n}{\partial x}$ を求めよ．

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}\frac{f_1(x,0)}{\sqrt{x}}\,dx$ を求めよ．

(3) 自然数 m に対して $I_m=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}\frac{(f_1(x,0))^m}{\sqrt{x}}\,dx$ とするとき，I_m と I_{m-2} の関係式を求めよ．また m は奇数として I_m を求めよ．

(4) $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leq x^2+y^2\leq\dfrac{\pi^2}{4}\right\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D f_2(x,y)\,dxdy$ を求めよ．

(京都府立大 2008)　　(m20086702)

0.348 関数 $f(x,y)=x^3-xy^2$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ を求めよ．

(東京工科大 2010)　　(m20106903)