[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　ϕ

0.1 (1) 関数 $f(t) = \cos(\omega t)$ の（片側）ラプラス変換

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

を求めなさい．ただし，e は自然対数の底で，s はその実数部が正の複素数である．

(2) $s = c + i\phi$ とおく．ここで，i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ で，c, ϕ は実数とする．このとき，$G(\phi) = \lim_{c \to +0} cF(c + i\phi)$ を求めなさい．

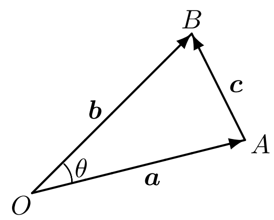
(北海道大 2009)　(m20090103)

0.2 3つのベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ の大きさを，それぞれ $|\boldsymbol{u}|, |\boldsymbol{v}|, |\boldsymbol{w}|$ で表す．ベクトルの内積を

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos \phi \qquad (a)$$

で定義する．ただし，ϕ はベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角である．この定義より，次の内積の基本性質が得られる．

$$|\boldsymbol{u}|^2 = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \qquad (b)$$
$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} \qquad (c)$$
$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} \qquad (d)$$
$$(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u} \qquad (e)$$



さらに，右の図のような三角形 OAB を考え，3つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \boldsymbol{c} = \overrightarrow{AB}$$

で定義する．ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とする．次の式を証明せよ．

$$|\boldsymbol{c}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos \theta$$

なお，内積の定義 (a) および基本的性質 (b)〜(e) を利用した場所を明示せよ．

(岩手大 1996)　(m19960303)

0.3 次の問いに答えよ.

(1) $f(\theta) = \sin \theta$ を, 以下のマクローリンの定理を用いて無限級数へ展開せよ.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

（ただし $0 < \theta < 1$）

(2) $f(i\theta) = e^{i\theta}$ を無限級数へ展開せよ. ただし, i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ とする．

(3) $f(\theta) = \cos \theta$ を無限級数へ展開し，$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を証明せよ．

(4) $f(t) = 5 + 0.4 \sin \omega t + 0.4 \sin 2\omega t + 0.3 \cos 2\omega t + 0.3 \sin 3\omega t$ を, 以下の形式に書き直した場合の係数 C_2 と C_{-2} を求めよ.

$$f(t) = \sum_{n=-3}^{3} C_n e^{in\omega t}$$

(5) $f(t) = 0.4 \sin 2\omega t + 0.3 \cos 2\omega t$ を, 以下の形式に書き直した場合の係数 A を求めよ.

$$f(t) = A \sin(2\omega t + \phi)$$

（岩手大 2004）　(m20040303)

0.4 $\mathbb{R}^3$ において x , y の標準内積を (x, y) で表す. 3 次実対称行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

で定める. このとき, 次の問に答えよ.

(1) A は相異なる正の固有値 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ を持つ. λ_1 , λ_2 , λ_3 , および それらに対する長さ 1 の固有ベクトル ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 をそれぞれ求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の一次変換 $f_j \quad (j = 1, 2, 3)$ を

$$f_j \ : \ x \mapsto (x \, , \ \phi_j)\phi_j \, , \quad j = 1, 2, 3$$

で定める. $\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する f_j の表現行列を P_j とするとき,

$$P_j^2 = P_j \, , \quad j = 1, 2, 3$$

$$P_j P_k = O \, , \quad j \neq k \text{ のとき}$$

を示せ. ただし, O は零行列である.

(3) $m = 1, 2, \cdots$ に対して, 行列 B を

$$B = \lambda_1^{\frac{1}{m}} P_1 + \lambda_2^{\frac{1}{m}} P_2 + \lambda_3^{\frac{1}{m}} P_3$$

と定めるとき, $B^m = A$ が成り立つことを証明せよ.

(東北大 2005) (m20050506)

0.5 3 次以下の実数係数多項式全体のなす集合

$$V = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ \middle| \ a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

を考え, V の元を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数と考える. V の二つの元 f, g と実数 s に対して, 和 $f + g \in V$ とスカラー倍 $sf \in V$ を

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (sf)(x) = s(f(x))$$

で定めると, V は $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間となる. V から 4 次元実列ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ への線形写像 $\phi \ : \ V \to \mathbb{R}^4$ を

$$\phi(f) = \begin{pmatrix} f(-1) \\ f'(-1) \\ f(1) \\ f'(1) \end{pmatrix}$$

で定める. ただし f' は f の導関数である. 以下の問いに答えよ.

(1) V と $\mathbb{R}^4$ の基底に関する ϕ の表現行列を求めよ. ただし V の基底は $\{1, \ x, \ x^2, \ x^3\}$, $\mathbb{R}^4$ の基底は $\{e_1, \ e_2, \ e_3, \ e_4\}$ とし,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする.

(2) 3 次以下の実数係数多項式 f で,

$$f(-1)=3, \qquad f'(-1)=2, \qquad f(1)=-1, \qquad f'(1)=2$$

を満たすものが存在するかどうか答えよ．存在する場合はそのような多項式をすべて求め，存在しない場合はそれを証明せよ．

(東北大 2022)　　(m20220509)

0.6 次の方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(\boldsymbol{r})=a\delta(\boldsymbol{r}), \tag{a}$$

に関する以下の問いに答えなさい．ここで右辺の a は正の実数，$\delta(\boldsymbol{r})$ は 3 次元のデルタ関数

$$\delta(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}d\boldsymbol{k}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{b}$$

である．

(1) 関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ のフーリエ変換を

$$\phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}d\boldsymbol{k}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k}) \tag{c}$$

とした時，これが方程式 (a) を満たすということから関数 $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$ を求めなさい．

(2) 積分要素 $d\boldsymbol{k}$ の直交座標系 (k_x,k_y,k_z) から極座標系 (k,θ,ϕ) への変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\boldsymbol{k}=\int_0^{\infty}dk\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}d\phi|J| \tag{d}$$

で与えられる．このときのヤコビアン J を書きなさい．ここで $k=|\boldsymbol{k}|$ である．また (d) の右辺が

$$\int_0^{\infty}k^2dk\int_{-1}^{1}d\cos\theta\int_0^{2\pi}d\phi \tag{e}$$

と書けることを示しなさい．

(3) 問 (1) で求めた $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$ を使って，(c) から $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めなさい．必要があれば，公式

$$\int_0^{\infty}dx\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2} \tag{f}$$

を用いてもよい．

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130606)

0.7 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ を S とする．S に $(\pm\ 1,\pm\ 1,\pm\ 1)$ で内接する立方体を U とする．ただし，符号はすべての組み合わせをとる．曲面 S で囲まれた領域から立方体 U を除いた領域を V とする．領域 V に対する積分

$$I=\int_V(x^2+2y^2+3z^2)dx\,dy\,dz$$

を求めたい．以下の問いに答えよ．

(1) 立方体 U に対する積分

$$J=\int_U(x^2+2y^2+3z^2)dx\,dy\,dz$$

を求めよ．

(2) 球 $W: x^2+y^2+z^2\le 1$ に対する積分

$$K=\int_W(x^2+y^2+z^2)dx\,dy\,dz$$

を極座標 $(x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta)$ を用いて求めよ．体積素片に対して，$dxdydz=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$ が成立することを利用してよい．

(3) 上の (1) と (2) を利用して，積分 I を求めよ．

(東京大 2000)　　(m20000702)

0.8 ３つの部品 A, B, C からなる機械 M がある．C は絶対に壊れないが一定の確率で誤動作する．A, B は，C の誤動作のみを原因として一定の確率で C の誤動作と同時に壊れる．C が誤動作したことにより A, B が壊れる確率はそれぞれ $6\ \%, 5\ \%$ である．B が壊れたときに，同時に A も壊れる確率は $20\ \%$ である．A, B のいずれか，もしくは両方が壊れた場合に限り M は必ず故障し修理工員が修理する．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，解の導出過程を必ず書くこと．

(1) (a) C が誤動作したときに M が故障する確率 P_r を求めよ．
(b) C が誤動作する確率が $10\ \%$ のとき M が故障する確率を求めよ．

(2) C の 3 回の誤動作に対して，M の故障が 2 回以上となる確率を求めよ．

(3) C の誤動作が n 回発生したとき M を修理した回数 X の平均を μ，標準偏差を σ とする．n が十分大きい場合について X が $\mu \pm 2\sigma$ の範囲に入る確率を，標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数 Z の累積分布関数 $\varphi(z) = P(Z \leqq z)$ を用いて示せ．ただし，二項分布に従う確率変数 Y は，試行回数が十分大きい場合，近似的に正規分布 $N(Y$ の平均，Y の分散 $)$ に従うことを利用せよ．

(4) M が故障するたびに，2 人の修理工員 F_1 と F_2 が交互に修理する．実際に修理を行った後，修理担当を交代する．最初の修理担当を F_1 としたとき，C が n 回誤動作した時点で修理担当が F_1 である確率を求めよ．ただし，$n \geqq 1$ とする．

(5) M が故障しているか否かを判断するセンサー S_1 と S_2 を取り付けた．センサー S_1，S_2 が M の故障の有無を正しく判断する確率は独立であり，それぞれ $90\ \%, 80\ \%$ である．今，C が誤動作し，M について S_1 が故障していると判断し，S_2 が故障していないと判断した．このとき，M が故障している確率を求めよ．

(東京大 2011)　　(m20110702)

0.9 (1) 閉曲面 S で囲まれた領域の体積 V は

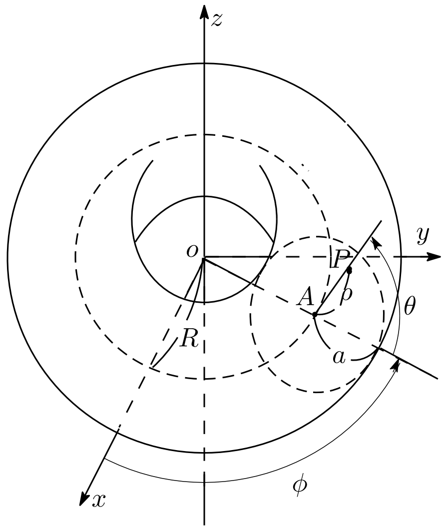
$$V = \frac{1}{3} \iint_S \boldsymbol{r} \cdot dS \qquad (*)$$

と与えられることをガウスの定理を用いて証明せよ． ただし，$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル，dS はベクトル面積素である．

(2) 下図のように，あるトーラスの回転対称軸を z 軸にとり， z 軸に垂直でトーラスを 2 等分するような平面内に x 軸と y 軸をとる． このトーラスは z 軸を含んだ平面で切断すると，その断面は半径 a の円となり， この円の中心は z 軸から距離 R の円周上（トーラス中心軸と呼ぶことにする）にある $(R > a)$． トーラス表面および内部の任意の点を P とする．点 P と z 軸とを含んだ平面と， トーラス中心軸との交点を A とする．線分 AP の長さを ρ，x 軸と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のなす角を ϕ，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のなす角を θ とする． 点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の成分を R, ρ, ϕ, θ を用いて書き表せ．

(3) 同図のトーラスの表面 $(\rho = a)$ においてベクトル面積素 dS を，前問 (2) の結果を用いて，ϕ と θ を媒介変数にして表示せよ． この結果を用い，変数の範囲に注意して，このトーラスの表面積を求めよ． なお円周率を π とする．

(4) 式 $(*)$ と前問の結果からこのトーラスの体積を求めよ．



(東京大 2012)　　(m20120703)

0.10 カージオイドと呼ばれる極座標形式で表された曲線 $r = 1 + \cos\theta$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 曲線の概形を図示せよ．ただし，作図の根拠も示せ．

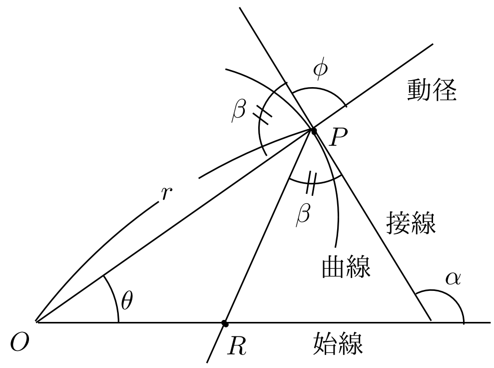
(2) この曲線の全周囲長を求めよ．ただし，$1 + \cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ という関係を用いても良い．

(3) 下図に示すように，曲線上の点 $P(r, \theta)$ $(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2})$ における接線と原点 O から点 P を結んだ直線（動径）のなす角度を ϕ とする．また，接線と始線のなす角度を α とする．このとき，$\tan\phi = \tan(\alpha - \theta)$ であることを用い，

$$\tan\phi = \frac{r}{r'}$$

となることを示せ．ただし，$r' = dr/d\theta$ である．また，これを用いて ϕ を θ で表せ．

(4) 下図に示すように，動径と接線のなす角度を β とする．曲線上の点 $P(r, \theta)$ $(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2})$ で接線と角度 β をなすもう一つの直線が始線と交わる点を R とする．このとき，三角形 OPR は二等辺三角形となることを示せ．



(東京大 2014)　　(m20140703)

0.11 xy 平面上において．媒介変数 θ を用いて次式で表されるサイクロイド曲線 C を考える．

$$\begin{cases} x(\theta) - \theta - \sin\theta & (1) \\ y(\theta) = 1 - \cos\theta & (2) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．ただし，必要に応じて次の関係式を用いてよい．

$$\begin{cases} \sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} & (3) \\ 1 - \cos\theta = 2\sin^2\dfrac{\theta}{2} & (4) \end{cases}$$

(1) $0 \leq \theta \leq 2\pi$ における曲線 C の概形を，根拠とともに示せ.

(2) 曲線 C 上の任意の点に対して，x 方向に 2π だけ平行移動させた点を考える．その点もまた曲線 C 上にあることを示せ.

(3) 原点 $O(0,0)$ から，曲線 C 上の点 $P(x(\varphi), y(\varphi))$ (ただし $0 \leq \varphi \leq \pi$) までの曲線の長さを $\ell(\varphi)$ とする.

(a) $\ell(\varphi)$ を求めよ.

(b) 図 3.1 に示すように，点 P における曲線 C の接線上の点 Q を考える．
ただし，$\overline{PQ} = \ell(\pi) - \ell(\varphi)$ であり，また，$\overline{OQ} > \overline{OP}$ とする． 点 P を $0 < \varphi < \pi$ の間で動かしたときの点 Q の軌跡を求め，その概形を示せ.

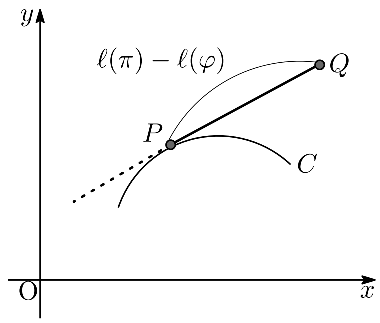


図 3.1

(東京大 2015) (m20150703)

0.12 複素積分を利用して実数積分を求めることを考える．以下の問いに答えよ.

(1) まず，ガウス積分と呼ばれる実数積分 $I(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ を考える．α は正の定数であり; x は実数である．y を実数とするとき，$\{I(\alpha)\}^2$ は以下の式で表される.

$$\begin{aligned}\{I(\alpha)\}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx dy\end{aligned}$$

この式を極座標 (r, θ) 表示に変換せよ.

(2) $I(\alpha) = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$ となることを導出過程とともに示せ.

(3) 図 4.1 に示すように x 軸を実軸，y 軸を虚軸とする複素平面上において半径 R の扇形で C_1, C_2, C_3 からなる経路 C を反時計回りに一周することを考える．i を虚数単位とし，z を複素数とするとき，以下の積分を求めよ.

$$\oint_C e^{iz^2} dz$$

(4) $\displaystyle\lim_{R \to \infty} \int_{C_2} e^{iz^2} dz = 0$ となることを示せ．ただし，$0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$ において，$\sin\varphi \geq \dfrac{2\varphi}{\pi}$ を用いてよい.

(5) 上記のガウス積分と複素積分を用いて，実数積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$ の値を求めよ.

(6) 実数積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ の値を求めよ.

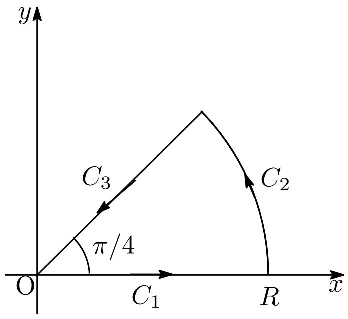


図 4.1

(東京大 2015)　　(m20150704)

0.13　3 次の正方行列 A の固有値が $-1,\ 1,\ 2$ であるとする．また，I を 3 次の単位行列とする．

(1)　A の特性多項式 $\phi(x)$ を求めよ．

(2)　A^3 および A^4 を，A^2 と A と I の線形和で表せ．

(3)　$A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n I$ と表せる．$a_{n+1},\ b_{n+1},\ C_{n+1}$ を $a_n,\ b_n,\ c_n$ を用いて表せ．ただし，n は 1 以上の整数である．

(4)　$a_n,\ b_n,\ c_n$ を求めよ．逆行列を求める以下の公式を用いてもよい．

公式：

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \text{ について，} \det P \neq 0 \text{ のとき}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} p_{22}p_{33} - p_{23}p_{32} & p_{13}p_{32} - p_{12}p_{33} & p_{12}p_{23} - p_{13}p_{22} \\ p_{23}p_{31} - p_{21}p_{33} & p_{11}p_{33} - p_{13}p_{31} & p_{13}p_{21} - p_{11}p_{23} \\ p_{21}p_{32} - p_{22}p_{31} & p_{12}p_{31} - p_{11}p_{32} & p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21} \end{pmatrix}$$

(東京大 2016)　　(m20160705)

0.14　確率変数 X の累積分布関数 $F(x)$ が以下の微分方程式で表されるとする．

$$\frac{dF}{dx} = \frac{F(1-F)}{s}$$

今，$F(m) = 1/2$ である．ただし，$m,\ s$ は実数である．このとき，設問 (1)〜(5) について答えよ．

(1)　累積分布関数 F，および F の密度関数 f をそれぞれ求めよ．

(2)　f が偶関数となる m を求めよ．ただし，その導出過程，または理由を示すこと．

(3)　期待値 $E = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f dx$ を求めよ．ただし，その導出過程を示すこと．

次に，入力信号の値 x に応じた確率で信号を出力したりしなかったりするシステムを考える．今，n 種類の入力信号の値 $x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ に対して，信号が出力された頻度を調べたところ $r_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ を得た．以下の問いに答えよ．

(4)　関数 $\varphi(F(x)) = \log\left(\dfrac{F(x)}{1 - F(x)}\right)$ を，x の一次式で表せ．

(5) $y_i = \varphi(r_i)$ としたとき,

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \{y_i - \varphi(F(x_i))\}^2$$

を最小にする m と s を求め，それぞれ下記の統計量を用いて表せ.

平均 : $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j$, $\overline{y} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j$

分散 : $\mathrm{var}(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2$, $\mathrm{var}(y) = \overline{y^2} - \overline{y}^2$

共分散 : $\mathrm{cov}(x, y) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j y_j - \overline{x} \cdot \overline{y}$

(東京大 2017) (m20170702)

0.15 3 つのベクトル場 $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ を考える．各ベクトル場は次のように定義する.

$$\overrightarrow{A} = rf(r, z)\overrightarrow{e}_\theta$$

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}$$

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{\nabla}\{zf(r, z)\}$$

ただし，$f(r, z)$ は

$$f(r, z) = (r^2 + z^2)^{-3/2}$$

とする．円柱座標系 (r, θ, z) における基底ベクトルを $(\overrightarrow{e}_r,\ \overrightarrow{e}_\theta,\ \overrightarrow{e}_z)$ とし，以下の問いに答えよ．必要であればスカラー場 ϕ およびベクトル場 $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r V_r + \overrightarrow{e}_\theta V_\theta + \overrightarrow{e}_z V_z$ に対する以下の勾配，発散，回転の式を用いてよい.

$$\overrightarrow{\nabla}\phi = \overrightarrow{e}_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \overrightarrow{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \overrightarrow{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right) + \overrightarrow{e}_\theta\left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \overrightarrow{e}_z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)$$

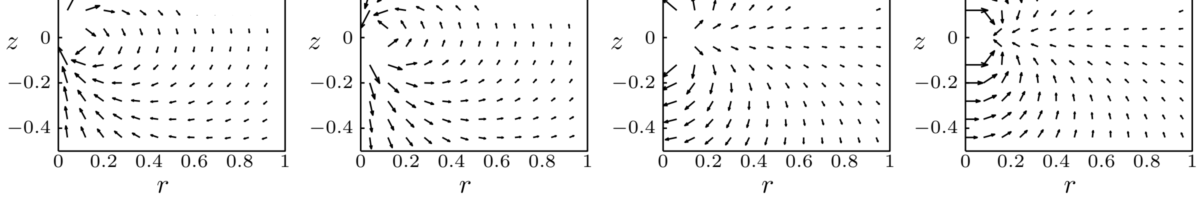
(1) $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B}$ を求めよ.

(2) $r \leq r_0$ および $z = z_0$ により定義される円板面 S_0 を考える $(z_0 > 0)$．面の法線方向を $\overrightarrow{e}_z$ とするとき，この円板面における次の面積分 Φ を，必要があれば r_0, z_0 用いて，表わせ.

$$\Phi = \int_{S_0} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S}$$

(3) $\overrightarrow{B}$ および $\overrightarrow{C}$ を求めよ.

(4) ベクトル場 $\overrightarrow{B}$ および $\overrightarrow{C}$ の分布の概略として正しい図を下の (a)-(d) からそれぞれ選べ.



(5) $r \le r_0$ および $z_1 \le z \le z_2$ により定義される円柱 $(z_1 > 0)$ に対し，側面と両底面からなる閉曲面 S_1 を考える．面の法線方向を円柱外向きとする．この閉曲面における次の面積分 Q を，必要であれば r_0，z_1，z_2 を用いて，表わせ．

$$Q = \int_{S_1} \overrightarrow{C} \cdot d\overrightarrow{S}$$

(東京大 2018)　　(m20180703)

0.16 $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) 行列Aの固有値および固有ベクトルを求めよ．

(2) $M_3(\mathbf{R})$ を 3 次正方実行列全体のなすベクトル空間とする．
$M_3(\mathbf{R})$ から $M_3(\mathbf{R})$ への線形写像 φ_A を

$$\varphi_A(X) = AX$$

と定義する．φ_A の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(東京工業大 1996)　　(m19960804)

0.17 (1) 次の積分を求めよ．　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + 2e^{-x} + 3} dx$

(2) $\varphi(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \log(1 - 2a\cos x + a^2) dx$ なる積分において，

(a) $2\varphi(a) = \varphi(a^2)$ が成り立つことを示せ．

(b) $\varphi(a)$ を求めよ．ただし，$|a| \neq 1$ とする．

(東京工業大 2002)　　(m20020801)

0.18 2 変数関数 $f(x, y) = xy^2 - x^2y + 2$ について，$f(x, y) = 0$ で定まる陰関数 $y = \varphi(x)$ の極値を求めなさい．ただし，極小値か極大値か，そのときの x の値も書きなさい．

(東京農工大 2009)　　(m20090903)

0.19 確率変数 X, Y, U が互いに独立で，各々正規分布 $N(\mu_1, {\sigma_1}^2), N(\mu_2, {\sigma_2}^2), N(\mu_3, {\sigma_3}^2)$ に従うとする．

(1) 任意の定数 a, b, c に対して，$W = aX + bY + cU$ の分布を求めよ．

(2) $V = \left(\dfrac{X - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 \Big/ \left(\dfrac{Y - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2$ の分布を求めよ．

(3) $P\left(-3 \le \dfrac{X - \mu_1}{\sigma_1} \le 3\right)$ を求めよ．

ただし，標準正規分布 $N(0, 1)$ の分布関数を

$$\Phi(z) = P(Z \le z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

とおくと，次表の値をとる．

z	0.0	1.0	2.0	3.0
$\Phi(z)$	0.5000	0.8413	0.9772	0.9987

(電気通信大 2001)　　(m20011011)

0.20 つぎで定義される関数 $f(x, y)$ について，以下の問いに答えよ．

$$f(x, y) = x^3 + 3axy + y^3 \qquad (a \text{ は定数})$$

(1) $a \neq 0$ のとき，$f(x,y)$ の極値を求めよ.

(2) $a = -1$ のとき，方程式 $f(x,y) = 0$ で与えられる陰関数 $y = \varphi(x)$ の極値を求めよ.

(電気通信大 2011)　　(m20111003)

0.21 関数 $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^3 + 1$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(2) xyz 空間内の曲面 $z = f(x,y)$ の点 $(2,-1,0)$ における接平面の方程式を求めよ.

(3) xy 平面上の曲線 $f(x,y) = 0$ が点 $(2,-1)$ の近くで定める陰関数を $y = \varphi(x)$ とする．$\varphi(x)$ を $x = 2$ の近くで

$$\varphi(x) = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 + \cdots$$

とテイラー展開したときの係数 a_0, a_1, a_2 をそれぞれ求めよ.

(電気通信大 2017)　　(m20171003)

0.22 方程式 $\dfrac{dx}{dt} = x + x^2$ の解で，$t = 0$ で $x = \xi$ となるものを $x = \varphi(t,\xi)$ とする.

(1) $x = \varphi(t,\xi)$ の表式を求めよ.

(2) t を固定したとき，$x = \varphi(t,\xi)$ が ξ について連続となるような ξ の範囲を求めよ.

(3) ξ を固定したとき，$x = \varphi(t,\xi)$ が t について連続となるような t の範囲を求めよ.

(4) 特に，$x = \varphi(t,\xi)$ が $-\infty < t < \infty$ において t の連続関数になるためには，ξ はどんな範囲にあればよいか.

(横浜国立大 1996)　　(m19961101)

0.23 三次元空間の中にデカルト直交座標系 $O - XYZ$ 座標系が定義されている.

$y = 0$ 平面（$z - x$ 平面）上の点 $A = (x_0, 0, z_0)$ を始点とし，一定方向で $y = 0$ 平面から遠ざかる点 B がある．線分 AB の長さは λ で，線分 AB の方向ベクトルは，球座標系にならって，水平角（緯度）θ，方位角（経度）φ とする．ただし，$-90^\circ < \theta < 90^\circ$，$0^\circ < \varphi < 180^\circ$．点 B の座標は，$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ から，

$$B = (\lambda\cos\theta\cos\varphi + x_0\ ,\ \lambda\cos\theta\sin\varphi\ ,\ \lambda\sin\theta + z_0)$$

で与えられる．定点 E を $E = (0, -a, h)$, $a > 0$ として，点 E と点 B を結ぶ直線が $y = 0$ 平面（$z - x$ 平面）と交わる点を P とする．$\lambda \to \infty$ の時の P の座標を求めなさい.

（ヒント：$\lambda \to \infty$ の時の点 P を透視画法では消点 (Vanishing Point) と呼んでいる）

(千葉大 2015)　　(m20151205)

0.24 xy 平面上において原点を中心とする半径 b の円周上を等速度で運動する点の時刻 t における位置は $x = b\cos(\omega t + \phi)$, $y = b\sin(\omega t + \phi)$ で表すことができる．ここに，ω, ϕ は定数で，それぞれ，角速度，位相と呼ばれる.

(1) 位置を時間に対して微分すると速度ベクトル $\overrightarrow{v}$ が得られる．$\overrightarrow{v}$ を求め成分表示しなさい.

(2) 速度ベクトルをさらに時間に対して微分すると加速度ベクトル $\overrightarrow{\alpha}$ が得られる．$\overrightarrow{\alpha}$ を求め成分表示しなさい．また，$\overrightarrow{\alpha}$ と $\overrightarrow{v}$ は互いに直交することを示しなさい.

(3) ベクトル $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{v}$ の絶対値 $|\overrightarrow{\alpha}|$, $|\overrightarrow{v}|$ を計算しなさい.

(筑波大 2003)　　(m20031312)

0.25 クーロンポテンシャル $\phi = \dfrac{1}{r}$ は原点以外の領域においてラプラスの方程式 $\Delta\phi = 0$ を満たすことを示しなさい．ただし，$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ である．

(筑波大 2006)　　(m20061303)

0.26 x の関数 $f(x) = e^{-x^2}$ に関して以下の問題に答えなさい．

(1) f を 1 回微分した導関数 $f'(x)$ を求めなさい．

(2) f を n 回微分した導関数を $f^{(n)}(x)$ と表すとき，ある n 次の多項式 $\phi_n(x)$ によって，$f^{(n)}(x) = \phi_n(x)e^{-x^2}$ と表せることを証明しなさい．

(3) n を任意に固定する．このとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f^{(n)}(x)$ は収束するか．それとも発散するか．理由を付して答えなさい．

(筑波大 2011)　　(m20111306)

0.27 2 次実正方行列の全体を $M(2;R)$ とする．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2;R)$ と $M(2;R)$ の 2 つの部分集合 $T = \{X \in M(2;R) \mid Tr\,X = 0\}$，$S = \{Y \in M(2;R) \mid {}^tY = Y\}$ について以下を示せ．
ただし; $Tr\,X$ は X のトレース，${}^tY$ は Y の転置行列とする．

(1) $ad - bc \neq 0$ のとき $X \in T$ ならば $AXA^{-1} \in T$ が成り立つ．

(2) $Y \in S$ ならば $AY\,{}^t\!A \in S$ が成り立つ．

(3) 写像 $\Phi : T \to S$ を $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \in T$ に対して $\Phi(X) = \begin{pmatrix} y & -x \\ -x & -z \end{pmatrix}$ で定める．
$ad - bc = 1$ のとき任意の $X \in T$ に対して

$$\Phi(AXA^{-1}) = A\,\Phi(X)\,{}^t\!A$$

が成り立つ．

(筑波大 2011)　　(m20111319)

0.28 V を複素ベクトル空間，ϕ を V の線形変換とし，$a \in \mathbb{C}$ に対して，

$$V_a = \left\{v \in V \,\middle|\, \phi(v) = av\right\}$$

と定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) V_a が部分空間であることを示せ．

(2) a, b, c がすべて互いに異なるなら，

$$(V_a + V_b) \cap V_c = \{0\}$$

となることを示せ．ここで，$V_a + V_b$ は $\left\{v + u \,\middle|\, v \in V_a\,,\ u \in V_b\right\}$ を表す．

(筑波大 2013)　　(m20131302)

0.29 半径 a の球体の領域 $D = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq a^2\right\}$ を積分領域とする定積分 $\displaystyle\iiint_D z^2\sqrt{x^+y^2}\,dxdydz$ の値を以下の問いに従って求めよ．

(1) x, y, z を極座標 r, θ, φ の関数として表せ．r, θ, φ の定義を図示すること．

(2) x, y, z の r, θ, φ の関するヤコビアンを計算せよ．

(3) 極座標を用いて定積分の値を求めよ.

(筑波大 2014)　　(m20141310)

0.30 $\phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $(-\infty < x < \infty)$ とおく.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 1$ を示せ.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu x}\phi(x)dx$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \int_{-\infty}^{y} \phi(x)dx\right) e^{\mu y - \frac{\mu^2}{2}} dy$ を求めよ．ただし，$\mu > 0$ とする.

(筑波大 2015)　　(m20151304)

0.31 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq 2x + y \leq 1,\ -1 \leq x - 2y \leq 0\}$ 上の二重積分 $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ について以下の問いに答えなさい.

(1) $u = 2x + y,\ v = x - 2y$ と変数変換をしたとき，変数 (u, v) の D に対応する積分領域を示しなさい.

(2) 上記の変数変換の逆変換 $x = \varphi(u, v),\ \psi(u, v)$ を示しなさい.

(3) $x = \varphi(u, v),\ \psi(u, v)$ のヤコビアンを求めなさい.

(4) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ を求めなさい.

(筑波大 2015)　　(m20151315)

0.32 高々2次の実係数多項式全体が成す線形空間を $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in R\}$ とする．ただし，R は実数全体の集合であり，x は実数値をとる変数とする．また，多項式 $f(x),\ g(x)$ の和とスカラー倍は，$(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ と定義する．以下の設問に答えよ.

(1) $\{1, 1 + x, x + x^2\}$ は線形空間 V の基底となることを示せ.

(2) 任意の $f,\ g \in V$ に対して $(f, g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$ なる演算を定義する．この演算 (f, g) は以下の内積の性質それぞれを満たすことを示せ.

① 任意の $f, g \in V$ に対して $(f, g) = (g, f)$

② 任意の $f, g, h \in V$ に対して $(f, g + h) = (f, g) + (f, h)$

③ 任意の $f, g \in V$ と任意の実数 λ に対して $(\lambda f, g) = \lambda(f, g)$

④ 任意の $f \in V$ に対して $(f, f) \geq 0$ で，等号成立は $f(x) = 0$ のときに限る.

(3) (2) で定義した内積 (f, g) のもとで $1, x, 3x^2 - 2$ は直交することを示せ．さらに，$1, x, 3x^2 - 2$ を正規化して V の正規直交基底を1組定めよ.

(4) (3) で求めた V の正規直交基底を $\{L_1, L_2, L_3\}$ とする．線形空間 V から3次元の数ベクトル空間 R^3 への線形写像 φ を

$$\varphi(1) = c_1,\ \varphi(1 + x) = c_2,\ \varphi(x + x^2) = c_3$$

で定めるとき，$\{L_1, L_2, L_3\}$ と $\{c_1, c_2, c_3\}$ に関する φ の表現行列 A_φ を求めよ．ただし，c_1, c_2, c_3 は R^3 の線形独立な数ベクトルとする.

(5) A_φ の行列式，逆行列を求めよ.

(筑波大 2016)　　(m20161319)

0.33 Newton 法は方程式 $f(x)=0$ を満たす解 x の近似解を数値的に求める手法の 1 つである．具体的な手順は，以下の通りである．まず，漸化式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,,\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

を構成する．ここで，$f'(x_n)=\dfrac{d}{dx}f(x_n)\neq 0$ とする． 次に，この漸化式を適当な初期値 x_0 の下で解き，数列 $x_1,\ x_2,\ \cdots$ を計算する． 解が存在する場合には，その収束値 x_∞ は $f(x_\infty)=0$ を満たす．上述の Newton 法に関して，以下の設問に答えよ．

(1) Newton 法で x_0 から x_1 を求めることは，点 $(x_0,\ f(x_0))$ における $y=f(x)$ の接線と x 軸の交点を求めることになっている．これを示せ．

(2) Newton 法の漸化式から得られる数列 $\{x_n\}$，$n=0,\ 1,\ \cdots$ は，初期値 x_0 が $f(x)=0$ の解の近傍にあるときに収束し，その収束値は $f(x)=0$ の解を与える．これを以下の＜定理＞を用いて示せ．ただし，$f'(x)\neq 0$ かつ $f''(x)=\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ は連続であるとする．

＜定理＞

関数 $\varphi(x)$ が閉区間 I で微分可能で，$\varphi(x)$ の値域は I に含まれ，I では

$$\left|\frac{d}{dx}\varphi(x)\right|\leq k<1$$

であるとする．このとき，反復法 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ によって方程式 $x=\varphi(x)$ のただ 1 つの根 x_∞ が得られる．

(筑波大 2018)　　(m20181306)

0.34 m 次実数空間 $\mathbb{R}^m$ 内の互いに直交する線形独立な n 個の列ベクトルを $\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n\ (\neq\mathbf{0})$ とする．また，これらのベクトルを並べた，$m\times n$ 行列を A と表す．このとき，以下の各問に答えよ．

なお，$\mathbf{0}$ はゼロベクトル，${}^tA$ は行列 A の転置，E は単位行列を表す．

(1) n 次正方行列 ${}^tAA$ が正則であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}^m$ 内のベクトル $\mathbf{b}$ の $\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n$ で張られる空間への正射影を考える． ベクトル $\mathbf{b}$ を射影した点の座標（つまり，$\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n$ で張られる空間内でベクトル $\mathbf{b}$ に最も近い点の座標 ）を $\hat{\mathbf{x}}=(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\cdots,\hat{x}_n)$ とする．$\hat{\mathbf{x}}$ を A と $\mathbf{b}$ により表現せよ．

(3) $A\hat{\mathbf{x}}=\Phi\mathbf{b}$ を満たす射影行列 Φ を A により表現せよ．

(4) $(E-\Phi)$ も射影行列を表している．$(E-\Phi)\mathbf{b}$ は ベクトル $\mathbf{b}$ のどの空間への正射影となるかを説明せよ．

(筑波大 2022)　　(m20221306)

0.35 次は，あるクラスのテストの点数である．

77 74 75 85 90 67 62 60 58

このデータの標本平均は 72.0，標本不偏分散は 124.5 である． テストの点数は，正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従う母集団から無作為に抽出した標本とみなせるものとする．このとき，以下の各問に答えよ．なお，計算の過程で適宜，有効数字 3 桁に丸めてよい．

(1) 母分散 σ^2 の 95 % 信頼区間を求めよ．

(2) 母平均 μ の 95 % 信頼区間を求めよ．

(3) $\sigma^2=121$ と判明したとき，μ の 95 % 信頼区間を求めよ．

(筑波大 2022)　　(m20221309)

付表１

$\sqrt{2}=1.414$	$\sqrt{3}=1.732$	$\sqrt{5}=2.236$	$\sqrt{7}=2.646$	$\sqrt{11}=3.317$

付表２

$e^1=2.718$	$e^2=7.389$	$e^3=20.09$	$e^4=54.60$	$e^5=148.4$

付表３　標準正規分布表：$Q(z)=\displaystyle\int_0^z \phi(t)dt$,　ただし，$\phi(\cdot)$ は標準正規分布の確率密度関数　（省略）

付表４　χ^2 分布表：自由度 m の χ^2 分布の上側 $100\alpha\%$ 点 $\chi^2_\alpha(m)$

α \ m	6	7	8	9	10
0.975	1.237	1.690	2.180	2.700	3.247
0.950	1.635	2.167	2.733	3.325	3.940
0.050	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31
0.025	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48

付表５　t 分布表：自由度 m の両側 $100\alpha\%$ 点 $t_\alpha(m)$

α \ m	6	7	8	9	10
0.10	1.943	1.895	1.860	1.833	1.812
0.05	2.447	2.365	2.306	2.262	2.228

0.36　$F(x,y)=xy\tan y+\pi\tan y-x$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$\tan x=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+o(x^3)\quad(x\to 0)$ を満たす実数 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$ を求めよ．ただし，$o(\cdot)$ はランダウの記号（スモール・オー）を表す．

(2)　1 以上の整数 n に対し，開区間 $\left(\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\pi,\ \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi\right)$ を I_n とおく．各 I_n における方程式

$$\tan x=\frac{1}{x}\qquad(x\in I_n)$$

の解を x_n とする．$d_n=x_n-n\pi$ とおくとき $F\left(\dfrac{1}{n},\ d_n\right)=0$ を示せ．

(3)　$x=0$ を含む開区間 I と，I において定義された微分可能な関数 $\varphi(x)$ であって

$$F(x,\ \varphi(x))=0\qquad(x\in I),\qquad \varphi(0)=0$$

を満たすものが存在することを示せ．

(4)　(2) の x_n を

$$x_n=n\pi+b_1\frac{1}{n}+b_2\frac{1}{n^2}+b_3\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\qquad(n\to\infty)$$

と表示したときの実数 $b_1,\ b_2,\ b_3$ を求めよ．

(筑波大 2022)　　(m20221316)

0.37　$f(x,y)$ は何回でも偏微分できる関数で，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\neq 0$ とする．$f(x,y)=0$ により定まる陰関数を $y=\varphi(x)$ とするとき，$\dfrac{d\varphi}{dx},\ \dfrac{d^2\varphi}{dx^2}$ を f の偏導関数を用いて表せ．

（埼玉大 2004）　　(m20041404)

0.38　xy 平面上で定義された関数 $f=f(x,y)$ は，正値で 2 階微分可能であり，

$$f\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\qquad\cdots\cdots\quad(*)$$

を満たすものとする．また，$g(x,y)=\log f(x,y)$ とおく．

(1) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ が満たす式を，f を用いずに表せ.

(2) $\phi(x)\psi(y)$ の形の関数を変数分離型関数とよぶ，ϕ と ψ が正値で 2 階微分可能な関数であるならば，$f(x,y) = \phi(x)\psi(y)$ は，上の条件 $(*)$ を満たすことを示せ.

(3) 上の条件 $(*)$ を満たす関数 f は，変数分離型の関数であることを示せ.

(埼玉大 2011)　　(m20111409)

0.39 xyz 空間上のスカラー場 $\varphi = x - \dfrac{2}{3}yz$ の曲線 C に沿う線積分 $\displaystyle\int_C \varphi ds$ を求めよ．C は原点 O から $(3,3,3)$ に至る線分とする.

(埼玉大 2016)　　(m20161406)

0.40 (x,y) を平面上の直交座標，(r,θ) を極座標とする．以下の各問に答えよ.

関数 $f(x,y)$ の定義域内の点 $\boldsymbol{p}$ およびベクトル $\boldsymbol{u} = (a,b)$ に対し，極限 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{p})}{t}$ を点 $\boldsymbol{p}$ での $\boldsymbol{u}$ 方向の微分係数と呼び，$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{p})$ で表す.

(1) 関数 $f(x,y) = r\sin 3\theta$ の原点 $\boldsymbol{o}$ での $\boldsymbol{u} = (\cos\phi,\ \sin\phi)$ 方向の微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{o})$ を求めよ．また，偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{o})$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{o})$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x,y)$ が点 $\boldsymbol{p}$ の近傍で偏微分可能，かつ，偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ が点 $\boldsymbol{p}$ で連続ならば等式

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{p}) = a\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p}) + b\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p})$$

が成立することを示せ．次に (1) の関数 f は原点 $\boldsymbol{o}$ でこの等式を満たさない理由を説明せよ.

(茨城大 2007)　　(m20071706)

0.41 空でない集合 X について考える. X の部分集合全体からなる集合を P とし, X から $\{0,1\}$ への写像全体の集合を F とする. ここで, $\{0,1\}$ は整数 0 と 1 からなる集合を表す. F の要素 f,g に対し, X の上で定義された関数 $f*g$，$f\Box g$ を

$$(f*g)(x) = f(x)g(x)\ ,\quad (f\Box g)(x) = f(x) + g(x) - f(x)g(x)\ ,\quad x \in X$$

で定める. また, $A \in P$ に対して, $I_A \in F$ を

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \text{ のとき,} \\ 0 & x \notin A \text{ のとき} \end{cases}$$

で定め, 写像 $\Phi : P \to F$ を $\Phi(A) = I_A$ と定義する. 以下の各問に答えよ.

(1) $f,g,h \in F$ に対し, 次の等式を示せ.

$$f*(g\Box h) = (f*g)\Box(f*h)\ ,\quad (f\Box g)\Box h = f\Box(g\Box h)$$

(2) $A,\ B \in P$ に対し、次の等式を示せ.

$$\Phi(A\cap B) = \Phi(A)*\Phi(B)\ ,\quad \Phi(A\cup B) = \Phi(A)\Box\Phi(B)$$

(3) Φ は全単射であることを示せ.

(茨城大 2010)　　(m20101707)

0.42 3 次元デカルト座標系で (x, y, z) と表される点を任意の軸のまわりに回転させる演算子に関して，次の設問に答えよ．

(1) 点 (x, y, z) を z 軸のまわりに，その軸の正方向からみて反時計回りに角度 ϕ 回転させる演算子を，3 行 3 列の行列 $R_z(\phi)$ で表す．このとき，$R_z(\phi)$ を求めよ．

(2) 設問 (1) の $R_z(\phi)$ において，角度 ϕ が微小量 ϵ であるとき，ϵ の 2 次のオーダーまで考慮して $R_z(\epsilon)$ を求めよ．

(3) 設問 (1)，(2) と同様にして，x 軸，y 軸のまわりの回転を表す行列 $R_x(\epsilon)$，$R_y(\epsilon)$ を，それぞれ ϵ の 2 次のオーダーまでの範囲で求めよ．

(4) $R_x(\epsilon)$ と $R_y(\epsilon)$ の交換関係を $[R_x(\epsilon),\ R_y(\epsilon)]$ と書き，$[R_x(\epsilon),\ R_y(\epsilon)] = R_x(\epsilon)R_y(\epsilon) - R_y(\epsilon)R_x(\epsilon)$ とする．このとき $[R_x(\epsilon),\ R_y(\epsilon)]$ を ϵ の 2 次のオーダーまでの範囲で，単位行列 I と $R_z(\epsilon^2)$ を用いて表せ．

(山梨大 2017)　　(m20171803)

0.43 θ と ϕ を実数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix}$ を考える．以下の小問に答えよ．

(1) 行列の積 AB を計算し，その結果を行列 A，B と同じ形に変形せよ．

(2) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．なお，固有ベクトルは規格化しなくてもよい．

(3) 行列 A により xy 平面上の 4 点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が変換される点を求め，θ を正として図示せよ．また変換後の点が囲む面積を求めよ．

(山梨大 2018)　　(m20181802)

0.44 以下のように行列 A，B，C を定義する．

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{i\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

また，I を 3×3 の単位行列とする．ここで，i は虚数単位で $i = \sqrt{-1}$ である．

(1) $A^2 + B^2 + C^2 = kI$ となることを示し，定数 k を求めよ．

(2) A の固有値を求めよ．

(3) 一般に，正方行列 M の指数関数 e^M は，無限級数 $e^M \equiv \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M^n$ で定義される．α を実定数としたとき，

$$e^{i\alpha C} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$$

（問題ではこうなっていましたが，$(2, 2)$ 成分は 1 になるものと思われます）

となることを示せ．

(4) ベクトル $\overrightarrow{v}(\phi)$ を $\overrightarrow{v}(\phi) = \dfrac{\sin\phi}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{i\cos\phi}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と定義する．

このとき，$e^{i\alpha C}\overrightarrow{v}(\phi) = \overrightarrow{v}(\phi')$ と書けることを示し，ϕ' を求めよ．ただし，ϕ と ϕ' は実定数である．

(新潟大 2017)　　(m20172017)

0.45 2 つの行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ.

(1) A の行列式 $\det A$ と逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2) 2 つの行列の積 AB を求めよ.

(3) 4 つの行列 $A,\ B,\ A^{-1}$ および AB は，いずれも二次元 XY 座標平面上における任意の点 $P(x, y)$ をそれぞれ異なる $P'(x', y')$ に移動させる．$A,\ B,\ A^{-1}$ および AB が，それぞれどのように点 P を点 P' に移動させるか，幾何学的意味を述べよ.

(新潟大 2020)　　(m20202007)

0.46 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) 固有多項式 $\Phi_A(t) = \det(tE - A)$ を求めよ. ただし, E は 3 次の単位行列である.

(2) $(A-2E)^2,\ (A-2E)^3$ を求めよ.

(3) 自然数 n に対して A^n を求めよ.

(金沢大 2010)　　(m20102205)

0.47 関数 $\varphi(x) = x \log x\ (x > 0)$ について，次の問いに答えよ.

(1) $\varphi'(x),\ \varphi''(x)$ を求めよ.

(2) テイラーの定理を適用して，$\varphi(x)$ の $x = 1$ における 1 次の近似式 $p(x)$ および剰余項 R_2 を求めよ.

(3) (2) の $p(x)$ に対し，$x > 0$ において $\varphi(x) \geqq p(x)$ が成り立つことを示せ.

(4) 閉関数 $[0, 1]$ で定義された正の値をとる連続関数 $f(x)$ が $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ を満たすとする．このとき

$$\int_0^1 \varphi\left(f(x)\right)\,dx \geqq 0$$

が成り立つことを示せ.

(金沢大 2014)　　(m20142202)

0.48 関数の列 $\{\varphi_n(x)\}\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$ をそれぞれ関係式

$$\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} = 1\,, \qquad \varphi_0(0) = 1\,,$$

$$\frac{\varphi_n'(x)}{\varphi_n(x)} = \varphi_{n-1}'(x)\,, \qquad \varphi_n(0) = e^{\varphi_{n-1}(0)}\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．次の問いに答えよ.

(1) $\varphi_0(x) = e^x,\ \varphi_n(x) = e^{\varphi_{n-1}(x)}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ であることを示せ.

(2) $\ell = e^\ell$ を満たす実数 ℓ は存在しないことを示せ.

(3) 関数列 $\{\varphi_n(x)\}\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$ において，どんな実数 c に対しても数列 $\{\varphi_n(c)\}$ は収束しないことを示せ

(金沢大 2016)　　(m20162207)

0.49 次の計算をしなさい．ただし，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸方向の単位ベクトルである．

(1) スカラー関数 $\phi = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ の勾配

(2) ベクトル関数 $\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ の発散

(3) ベクトル関数 $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$ の回転

(金沢大 2016)　　(m20162209)

0.50 自然数 k に対して V_k を x の k 次以下の実係数多項式全体からなる $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする．
n を 2 以上の自然数とし，線形写像 $\varphi : V_n \to V_{n-1}$ と $\psi : V_{n-1} \to V_n$ を，それぞれ，

$$\varphi(v(x)) = v'(x) \quad (v(x) \in V_n), \qquad \psi(w(x)) = \int_0^x w(y)dy \quad (w(x) \in V_{n-1})$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Ker}(\varphi)$ および $\mathrm{Im}(\varphi)$ の次元を求め，次元が 1 以上の場合はその基底を求めよ．

(2) $\mathrm{Ker}(\psi)$ および $\mathrm{Im}(\psi)$ の次元を求め，次元が 1 以上の場合はその基底を求めよ．

(3) 合成写像 $\psi \circ \varphi : V_n \to V_n$ と $\varphi \circ \psi : V_{n-1} \to V_{n-1}$ は同型写像かどうか答えよ．同型写像の場合には証明を与え，そうでない場合には理由を述べよ．

(金沢大 2020)　　(m20202209)

0.51 半径 a の球の体積 V を求める．以下の問いに答えよ．

(1) 直交座標 (x, y, z) を用いて，V を積分表示せよ．

(2) (x, y, z) の極座標 (r, θ, φ) への変換

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\,,\ y = r\sin\theta\sin\varphi\,,\ z = r\cos\theta$$

を用いて，$\dfrac{\partial x}{\partial r}$, $\dfrac{\partial x}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}$, $\dfrac{\partial y}{\partial r}$, $\dfrac{\partial y}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}$, $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}$ を求めよ．

(3) $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$ を求めよ．

(4) (1) および (3) の結果を用いて，V を (r, θ, φ) で積分表示せよ．

(5) (4) の積分を実行し，V を求めよ．

(富山大 2009)　　(m20092304)

0.52 $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{b} = 3xyz^2\vec{i} + 2xy^3\vec{j} - x^2yz\vec{k}$, $\phi = e^{xyz}$ とする．点 $P(1, -1, 1)$ において，次の値を求めよ．ただし，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{k}$ は直交座標の単位ベクトルである．

(1) $\vec{a} \times \vec{b}$　　(2) $\mathrm{div}\,(y\,\mathrm{grad}\,\phi)$　　(3) $\vec{a}$ と $\mathrm{rot}\,\vec{b}$ のなす角度　　(4) $(\vec{a} \times \nabla)\phi$

(富山大 2012)　　(m20122303)

0.53 $\phi(x, y, z) = e^{2x^2-4y^3+z^2}$, $\overrightarrow{A}(x, y, z) = 2xyz^3\,\overrightarrow{i} + x^2z^3\,\overrightarrow{j} + 3x^2yz^2\,\overrightarrow{k}$ について，次の問いに答えよ．ただし，$\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ は直交座標の単位ベクトルである．

(1) $\mathrm{rot}\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{0}$ を示せ．

(2) 点 $(1, 1, -1)$ において，$\phi\overrightarrow{A}$ の発散の値を求めよ．

(3) 点 $(1,1,-1)$ における ϕ の点 $(-3,5,6)$ に向かう方向の方向微分係数を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_S \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{n}\,dS$ の値を求めよ．ただし，S は円柱面 : $x^2+y^2=1$ の $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 0 \leqq z \leqq 1$ を満たす部分とし，$\overrightarrow{n}$ は S の単位法線ベクトルとする.

(富山大 2014)　　(m20142303)

0.54 空間座標の原点 O からの距離 r で定義される関数 $\varphi(r)=\log_e r\ \ (r>0)$ について次の各問いに答えよ．ただし，$\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}$ を直交座標系 $O-xyz$ の単位ベクトルとし，$\overrightarrow{r}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}$, $r=|\overrightarrow{r}|$ であるとする.

(1) 点 $P(1,1,0)$ を含む等位面（関数の値が等しい点の集合）の点 P における単位法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ の x,y,z 成分を求めよ.

(2) 点 $Q(0,0,1)$ における，ベクトル $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$ の方向への $\varphi(r)$ の方向微分係数を求めよ.

(3) 勾配の発散 $\nabla^2\varphi(r)$ を r の関数として求めよ.

(4) 勾配の回転 $\nabla\times\ \nabla\varphi(r)$ が $\overrightarrow{0}$ であることを示せ.

(富山大 2015)　　(m20152307)

0.55 直角座標系 xyz におけるベクトル場 $\overrightarrow{F}(x,y,z)=-y\overrightarrow{i}+(z-x)\overrightarrow{j}+y\overrightarrow{k}$,
スカラー場 $\phi(x,y,z)=axy+byz+czx$ (a,b,c は定数) について，次の問いに答えよ.
ただし，$\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}$ はそれぞれ $x,\ y,\ z$ の各軸方向の単位ベクトルとする.

(1) 次の計算をせよ.
(a) div $\overrightarrow{F}$　　(b) rot $\overrightarrow{F}$
(c) grad ϕ　　(d) rot(grad ϕ)

(2) $a=1,\ b=-1,\ c=0$ のとき,
ϕ がベクトル場 $\overrightarrow{F}$ のポテンシャル（スカラーポテンシャル）となることを示せ.

(3) $a=1,\ b=-1,\ c=0$ のとき,
点 $P(1,1,1)$ から点 $Q(0,2,2)$ までの線積分 $\displaystyle\int_P^Q \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$ を求めよ.
ここで $\overrightarrow{r}$ は P から Q へ向かう経路上の点の位置ベクトルである.

(富山大 2018)　　(m20182305)

0.56 次の各問いに答えよ．ただし，$\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}$ はそれぞれ $x,\ y,\ z$ の各軸方向の単位ベクトルとする.

(1) ベクトル場 $\overrightarrow{A}(x,y,z)=(xyz)\overrightarrow{i}+(-y^2z^3)\overrightarrow{j}+(2x^2y)\overrightarrow{k}$ に対して div(rot$\overrightarrow{A}$) を求めよ.

(2) スカラー場 $\phi(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$　(ただし，$x^2+y^2+z^2\neq 0$) に対して,

(a) $\dfrac{\partial\phi}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$ を計算せよ.
(b) grad ϕ を求めよ.
(c) div(grad ϕ) $=0$ を示せ.

(富山大 2019)　　(m20192303)

0.57 ベクトル場 $\vec{A}(x,y,z)=xye^z\vec{i}+x\log_e(z)\vec{j}+yz^4\sin(2x)\vec{k}$, スカラー場 $\phi(x,y,z)=xyz$ について，次の問いに答えよ．ただし，$\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ はそれぞれ直角座標系の $x,\ y,\ z$ 軸方向の単位ベクトルとする.

(1) 回転 rot$\vec{A}$ を求めよ.

(2) 勾配 gradϕ を求めよ.

(3) 点 $P(1,1,2)$ における，単位ベクトル $\vec{u}=\frac{2}{3}\vec{i}-\frac{2}{3}\vec{j}+\frac{1}{3}\vec{k}$ の方向への ϕ の方向微分係数 $\frac{d\phi}{du}$ を求めよ．

(富山大 2020)　　(m20202304)

0.58 スカラー場 $\phi(x,y,z)=x^2y+y^2z-xy\,e^{(z^2)}$，ベクトル場 $\overrightarrow{F}(x,y,z)=-y\,\overrightarrow{i}+x\,\overrightarrow{j}+xyz\,\overrightarrow{k}$ について，次の各問いに答えよ．ただし，$\overrightarrow{i}$，$\overrightarrow{j}$，$\overrightarrow{k}$ は直交座標系 x，y，z の各軸方向の単位ベクトルとする．また，点 P の座標を (2, 1, 0) とする．

(1) 点 P における，ϕ の等位面の単位法線ベクトルを求めよ．

(2) 点 P における，$\overrightarrow{F}$ 方向に対する ϕ の方向微分係数を求めよ．

(3) $\mathrm{rot}\,\overrightarrow{F}$ を求めよ．

(4) 原点 O から点 P に至る線分 OP における，$\overrightarrow{F}$ の線積分 $\displaystyle\int_{OP}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$ を求めよ．ここで，$\overrightarrow{r}$ は位置ベクトルである．

(富山大 2022)　　(m20222304)

0.59 (1) 内径が a，外径が b である球殻の体積を，極座標系での 3 重積分を使って表し，その値を求めよ．ただし，極座標 (r,θ,ϕ) は，直角座標 (x,y,z) を使って，

$$x=r\sin\theta\cos\phi\,,\ y=r\sin\theta\sin\phi\,,\ z=r\cos\theta\quad(0\le r\le\infty\,,\ 0\le\theta\le\pi\,,\ 0\le\phi\le 2\pi)$$

で定義される．

(2) 楕円 $x^2-xy+y^2=4$ の面積を求めよ．

(福井大 2009)　　(m20092402)

0.60 $A=\begin{pmatrix}2&4\\1&3\end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ．

(1) 行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めよ．

(2) $\Phi_A(A)=0$ （ケーリー・ハミルトンの定理）が成り立つことを示せ．

(3) 上の結果を利用して，A の逆行列を求めよ．

(福井大 2012)　　(m20122422)

0.61 a を定数とする，次の

$$x^3-3xy+y^3=a$$

により定まる陰関数 $y=\varphi(x)$ にたいして，$\frac{dy}{dx}$ と $\frac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．

(福井大 2013)　　(m20132401)

0.62 2 変数関数 $f(x,y)=x^4-4xy+2y^2$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の 1 階の偏導関数

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=f_x(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=f_y(x,y)$$

ならびに 2 階の偏導関数

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)=f_{xx}(x,y),\qquad \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x,y)=f_{xy}(x,y),\qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)=f_{yy}(x,y)$$

を，すべて求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ について，$z=f(x,y)$ は，xyz 空間において曲面を表す．
この曲面上の点 $\big(x_0,\ y_0,\ f(x_0,y_0)\big)$ における接平面の方程式は

$$z-f(x_0,y_0)=\big(f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0)\big)\bullet(x-x_0,\ y-y_0)$$

によって与えられる．ただし，上式の $\bullet$ は 2 次元ベクトルの内積を表している．このとき，点 $\big(1,\ 2,\ f(1,2)\big)$ における接平面の方程式を $ax+by+cz=d$ の形式で求めよ．すなわち，上式が点 $\big(1,\ 2,\ f(1,2)\big)$ での曲面 $z=f(x,y)$ の接平面の方程式となるような a,b,c,d を求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y),\ f_y(x,y)$ について，

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$$

を満たす (x,y) の組を，$f(x,y)$ の極値の候補と呼ぶ．関数 $f(x,y)$ の極値の候補をすべて求めよ．

(4) 2 次の偏導関数を用いて，関数 $\phi(x,y)$ を

$$\phi(x,y)=\big\{f_{xy}(x,y)\big\}^2-f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)$$

と定義すると，極値の候補である (x_1,y_1) に対して，

- $\phi(x_1,y_1)<0$ かつ　$f_{xx}(x_1,y_1)>0$ ならば (x_1,y_1) は極小
- $\phi(x_1,y_1)<0$ かつ　$f_{xx}(x_1,y_1)<0$ ならば (x_1,y_1) は極大
- $\phi(x_1,y_1)>0$ ならば (x_1,y_1) は極値ではない

といえる．上の (3) で求めた極値の候補について，それぞれ極小であるか，極大であるか，あるいは極値ではないか，調べよ．

(福井大 2016)　　(m20162418)

0.63　$A=\begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ．

(1) 行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めよ．

(2) $\Phi_A(A)=0$（ケーリー・ハミルトンの定理）が成り立つことを示せ．

(3) 上の結果を利用して，A^n を求めよ．

(福井大 2020)　　(m20202430)

0.64　正方行列 A がある．ベクトル $\boldsymbol{\varphi}$ が行列 A の固有値 λ に属する固有ベクトルである $(A\boldsymbol{\varphi}=\lambda\boldsymbol{\varphi})$ とき，以下の問いに答えよ．ただし，I は A と同じ次数の単位行列とする．

(1) ベクトル $-\boldsymbol{\varphi}$ も行列 A の固有値 λ に属する固有ベクトルであることを示せ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{\varphi}$ は行列 $A+I$ の固有値 $\lambda+1$ に属する固有ベクトルであることを示せ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{\varphi}$ は行列 A^2 の固有値 λ^2 に属する固有ベクトルであることを示せ．

(福井大 2021)　　(m20212413)

0.65　$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ について，以下の問に答えよ．

(1) 行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めよ．

(2) $\Phi_A(A)=0$（ケーリー・ハミルトンの定理）が成り立つことを示せ．

(福井大 2021)　　(m20212426)

0.66 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ について 以下の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めよ.

(2) $\Phi_A(A) = 0$ （ケーリー・ハミルトンの定理）が成り立つことを示せ.

(福井大 2022) (m20222409)

0.67 半径 a の球面の xyz 座標を媒介変数 $(\theta,\ \phi)$ で

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (a\sin\theta\cos\phi,\ a\sin\theta\sin\phi,\ a\cos\theta)$$

と表す．ただし，$0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ である．以下の問いに答えよ.

(1) 以下のベクトル積

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}$$

を求めよ．また，これは何を表すか答えよ.

(2) 次の積分を求め，何を表すか答えよ.

$$\iint_D \left|\left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} \right|\right| d\theta d\phi$$

ただし，$||\cdot||$ はベクトルの長さを表し，領域 D は θ, ϕ の動く範囲，すなわち $D = \{(\theta,\ \phi \mid 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi)\}$ である.

(3) 球面の x 座標 $x = a\sin\theta\cos\phi$ に対して，次の積分を求めよ.

$$\iint_D x \left|\left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} \right|\right| d\theta d\phi$$

(福井大 2022) (m20222427)

0.68 $\phi(x, y, z)$ を微分可能なスカラー関数，$\boldsymbol{A}(x, y, z) = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$ を微分可能なベクトル関数とするとき，次の式が成り立つことを証明せよ．ここで，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は直交する 3 本の直線 x, y, z を座標軸とする座標系（デカルト座標系）における基本ベクトルである.

(1) $\mathrm{rot}\ (\mathrm{grad}\,\phi\,) = \boldsymbol{0}$ （注 ： 太字 $\boldsymbol{0}$ は零ベクトルを表す.）

(2) $\mathrm{div}\ (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}\,) = 0$

(岐阜大 2007) (m20072620)

0.69 (1) 次の行列 A の行列式 $|A|$ を求めよ．また行列 A と次のベクトル $\overrightarrow{v}$ の積 $A\overrightarrow{v}$ を計算し，$A\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$ となることを示せ． ただし θ, ϕ は実数，i は虚数単位とする.

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)e^{-i\phi} \\ \sin(\theta)e^{i\phi} & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

(2) (1) の行列 A について，$\phi = 0$ としたときの 2 つの固有値および固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさは 1 とせよ.

(3) 次の行列 B の 2 つの固有値を求めよ．ただし k は実数とする．また $|k| \leq 1$ として，大きさ 1 とした 2 つの固有ベクトルを求めよ．また 2 つの固有値を k の関数として，$|k| \leq 1$ の範囲でグラフに描け.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$$

(三重大 2018) (m20183112)

0.70 3 次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とする．$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は，直交座標系の x, y, z 軸方向の単位ベクトルである．また，$\boldsymbol{r}$ の大きさを $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) r のこう配，∇r を求めよ．ただし，$\nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ である．∇r は，$\mathrm{grad}\, r$ とも書く．

(2) 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ に対して

$$\nabla \times \ (\nabla \phi(\boldsymbol{r}))$$

を求めよ．ただし，$\phi(\boldsymbol{r})$ は連続な 2 階偏導関数を持つスカラー関数である．また，$\nabla \times \ (\nabla \phi(\boldsymbol{r}))$ は $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, \phi(\boldsymbol{r}))$ とも書く．

(奈良女子大 2008) (m20083208)

0.71 C を複素数平面上の単位円周 $C = \{z \mid |z| = 1\}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 原点を中心とする開円盤 $D_1 = \{z \mid |z| < 2\}$ で正則な関数 $f(z)$ に対し，積分 $I = \displaystyle\int_C \frac{f(z) - f(0)}{z} dz$ の値を求めよ．

(2) 関数 $g(z) = \dfrac{1}{z}$ に対し，積分 $\phi(z) = \displaystyle\int_C \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ で与えられる領域 $D_2 = \{z \mid |z| > 1\}$ 上の正則関数 $\phi(z)$ を求めよ．

(京都大 2006) (m20063306)

0.72 滑らかな曲線 C 上を動く点 P について，次の問 (1)〜(2) に答えよ．なお，図 $4-1$ に示すように，P における曲線の単位接線ベクトルを $\boldsymbol{m}$，単位主法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ と表すものとする．

(1) C 上の点 P とそれに非常に近い点 P_1，P_2 の 3 点を通る円を C_0 とし，C_0 の中心を点 O，半径を ρ，線分 P_1P の中点と線分 PP_2 の中点の間の距離を ds，直線 P_1P と直線 PP_2 のなす角を $d\varphi$，とする（図 $4-1$，$4-2$）．点 P_1，P_2 間の C に変曲点はないものとする．

(a) 直線 P_1P，直線 PP_2 上の単位ベクトル $\boldsymbol{m}_1$，$\boldsymbol{m}_2$ は近接する 2 つの単位接線ベクトルとみることができ $\boldsymbol{m}_2 - \boldsymbol{m}_1 = d\boldsymbol{m}$ である．このとき $\left|\dfrac{d\boldsymbol{m}}{ds}\right| = \dfrac{1}{\rho}$ となることを示せ．

(b) $\dfrac{d\boldsymbol{m}}{ds}$ は $\boldsymbol{m}$ と垂直であり，$\dfrac{d\boldsymbol{m}}{ds} = \dfrac{1}{\rho}\boldsymbol{n}$ となることを示せ．

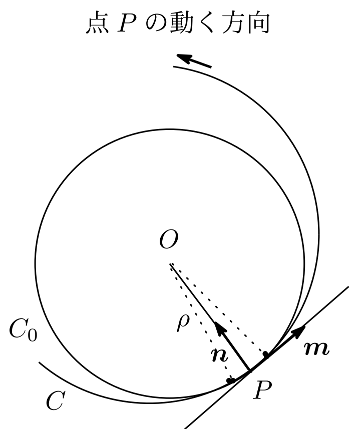


図 $4-1$

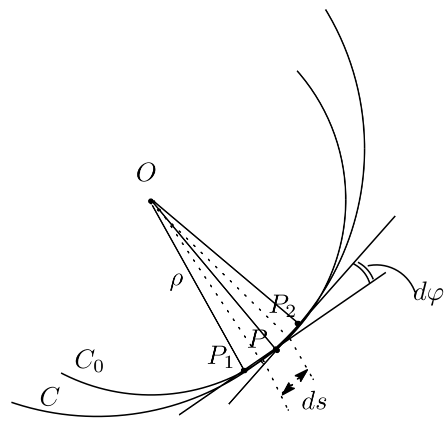


図 $4-2$

(2) 点 P の時刻 t における位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ が，

$\boldsymbol{r}(t) = [b\cos t \quad b\sin t \quad ct]$ （b，c は正の定数）

で表されるとき，P の速度 $\boldsymbol{v}(t)$，および，加速度 $\boldsymbol{a}(t)$ を，P の軌跡における，単位接線ベクトル $\boldsymbol{m}$ と単位主法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ で表せ．

(京都大 2013)　　(m20133304)

0.73 R^2 に直交座標系 $O-xy$ をとり，次式で定義される曲線 C を考える．

$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta + b\cos 2\theta \\ y &= a\sin\theta + b\sin 2\theta \end{aligned} \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

ここに，a, b は正の数であり，$a \neq b$ を満たすものとする．このとき問 (1)～(3) に答えよ．

(1) $\Phi(\theta)$ は，次式を満たす連続関数であるとする．

$$(a\cos\theta + b\cos 2\theta)\tan\Phi(\theta) = a\sin\theta + b\sin 2\theta \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

このとき，$\dfrac{d\Phi}{d\theta}$ を θ の関数として求めよ．

(2) $a=2$, $b=1$ のとき，C の概形を描け．また $\Phi(0)=0$ であるとき，$\Phi(2\pi)$ を求めよ．

(3) $a=2$, $b=1$ のとき，次の積分を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2+b^2+2ab\cos\theta}$$

(京都大 2014)　　(m20143306)

0.74 2 変数関数 $\varphi(x,y) = x - y + e^y \sin x$ と全微分可能な関数 $\psi(x,y)$ に対して，次の各問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ を求めよ．

(2) $x=0$ の近傍で定義された微分可能な関数 $f(x)$ が $\varphi(x, f(x)) = 0$ を満たすとし，$g(x) = \psi(x, f(x))$ とおく．微分係数 $f'(0)$ を求めよ．また，$a = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}(0,0)$, $b = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}(0,0)$ とおくとき，$g'(0)$ を a, b を用いて表せ．

(京都工芸繊維大 2003)　　(m20033406)

0.75 α および β を実数とするとき, 常微分方程式

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) = 0 \qquad (*)$$

を考える. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $(*)$ 式の一般解を求めよ.

(2) $\phi(x)$ をある実数 x_0 に対して $\phi(x_0) = \phi'(x_0) = 0$ を満たす $(*)$ 式の解とする. このとき, $\phi(x) = 0$ であることを示せ.

(3) (2) の結果を用いて, ある実数 x_0, C_1, C_2 に対して $\phi(x_0) = C_1$ および $\phi'(x_0) = C_2$ を満たす $(*)$ 式の解は唯一であることを示せ.

(大阪大 2005)　　(m20053508)

0.76 (1) 空間上の直交座標 (x,y,z) を極座標 (r,θ,φ) ：

$x = r\sin\theta\cos\varphi$,　$y = r\sin\theta\sin\varphi$,　$z = r\cos\theta$　$(r>0,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi < 2\pi)$

に変換するとき，そのヤコビアン（関数行列式）を計算しなさい．

(2) 広義積分　$I(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} dx\,dy\,dz$

について，$\alpha = \dfrac{1}{2}$ のときの値 $I\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めなさい．

(3) $I(\alpha)$ が収束する α の範囲を求めなさい．

(4) 広義積分　$J(\alpha,\ \beta)=\displaystyle\iiint_B \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha \mid \log(x^2+y^2+z^2) \mid^\beta} dx\,dy\,dz$
が収束するような $\alpha,\ \beta$ の満たすべき条件を求めなさい．
ただし，$B=\left\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2<\dfrac{1}{4}\right\}$.

(大阪大 2007)　　(m20073506)

0.77 X,Y を標準正規分布 $N(0,1)$ に従う独立な確率変数とし，その和を W，W の絶対値を Z とおく．すなわち，　$W=X+Y$，$Z=|W|$　である．$N(0,1)$ の確率密度関数 $f(x)$ を使って，関数 $\Phi(t)$ を $\Phi(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^t f(x)dx$　で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 確率変数 W の分布を求めよ．

(2) 非負定数 z に対して，確率 $P(Z<z)$ を関数 Φ を用いて表せ．

(3) 確率変数 Z の平均を求めよ．

(大阪大 2007)　　(m20073512)

0.78 X,Y を確率変数，a,b を実数とし，各 a に対して期待値 $E[\{Y-(aX+b)\}^2]$ を最小にする b の値を $B(a)$，そのときの最小値を $\varphi(a)$ とする．ただし，X の分散 $V(X)$ は正であるとする．

(1) $B(a)$ を a，$E[X]$，$E[Y]$ を用いて表せ．

(2) $\varphi(a)$ を最小にする a の値 $\widehat{a}$，その時の最小値 $\varphi(\widehat{a})$，および $B(\widehat{a})$ を求めよ．

(3) $\widehat{Y}=\widehat{a}X+B(\widehat{a})$ とおくとき，Y の分散は $V(Y)=V(\widehat{Y})+E[(Y-\widehat{Y})^2]$ となることを示せ．

(大阪大 2008)　　(m20083507)

0.79 曲線 C が媒介変数表示 $x=f(s)$，$y=g(s)$，$s\geq 0$ で表される．ただし，$\cosh s=(e^s+e^{-s})/2$，$\sinh s=(e^s-e^{-s})/2$ を用いて

$$f(s)=s-\frac{\sinh s}{\cosh s}$$
$$g(s)=\frac{1}{\cosh s}$$

と定義する．以下の設問に答えよ．

(1) 定数 $b>0$ に対して曲線 $C(b)$ が $x=f(s)$，$y=g(s)$，$0\leq s\leq b$ で表される．$C(b)$ の長さ $\ell(b)$ を求めよ．

(2) 点 P は時刻 0 で $x=f(0)$，$y=g(0)$ を出発して s が増える方向へ一定の速さで C 上を移動する．時刻 $t>0$ までに移動した経路の長さを t とする．時刻 t における P の位置を $x=f(\varphi(t))$，$y=g(\varphi(t))$ と表すための関数 $\varphi(t)$ を求めよ

(大阪大 2014)　　(m20143501)

0.80 $0\leqq\theta<2\pi$，$0\leqq\phi<2\pi$ とする．3 次の正方行列 A，B を次式で定義し，$C=AB$ とする．

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}\cos\phi & 0 & \sin\phi\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi\end{pmatrix}$$

なお，虚数単位は $i\ (=\sqrt{-1})$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 行列 C の行列式の値を求めよ．

(2) 行列 C のすべての固有値およびそれらの絶対値を求めよ．

(大阪大 2022)　　(m20223506)

0.81 3 次元空間内の単位球を B とおく．すなわち，

$$B = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 \leqq 1\right\}$$

とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ とおく．この変数変換のヤコビ行列式を計算せよ．

(2) 定積分

$$\iiint_B (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}dxdydz$$

の値を求めよ．

(大阪府立大 2019)　　(m20193607)

0.82 $\mathbf{R^3}$ の基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$，行列 B を次のように定める．

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

φ を基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ に関して B で表現される $\mathbf{R^3}$ 上の線形変換とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 基底 $\{e_1+e_2, e_2, e_3\}$ に関する φ の表現行列を求めよ．

(2) どの基底に関しても φ が B で表現されているときの a, b, c の値を求めよ．

(神戸大 2003)　　(m20033811)

0.83 (1) $Z = f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$, $x = e^t$, $y = \log_e(t)$ のとき，dZ/dt を t の関数として求めよ．

(2) xy 平面上の点 (x,y) が　$\phi(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$　で表される曲線上を動くとき，関数 $Z = f(x,y) = x+2y+5$　が極値をとる点 (x,y) とその極値を求めよ（偏微分の手法を用いて解答すること）．

(鳥取大 2006)　　(m20063902)

0.84 $f(x)$, $g(x)$ を x についての 2 回微分可能な 1 変数関数とするとき，時刻 t，座標 x における 2 変数関数 $\phi(t,x)$ を $\phi(t,x) = f(x-ct)+g(x+ct)$ と定める．ただし，c は定数とする．このとき，関数 ϕ は次の関係式を満たすことを示せ．

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

(鳥取大 2009)　　(m20093911)

0.85 微分可能なスカラー関数 $\varphi(x,y,z)$ と微分可能なベクトル関数 $\overrightarrow{A}(x,y,z)$ について，次式が成り立つことを証明せよ．

(1) $\nabla\times\,\{\nabla\varphi(x,y,z)\} = 0$

(2) $\nabla\cdot\left\{\nabla\times\overrightarrow{A}(x,y,z)\right\} = 0$

(広島大 2008)　　(m20084106)

0.86 V を 3 次元実線形空間，W をその 2 次元部分空間とする．f は V の線形変換で，$f(W)\subset W$ を満たすとする．また，$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ は W の基底，$\boldsymbol{v}_3\in V$ は W に属さないベクトルとする．以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ は V の基底であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ に関する f の表現行列を A とし，A の $(3,3)$ 成分を a とする．このとき，V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，$f(\boldsymbol{v}) - a\boldsymbol{v} \in W$ であることを示せ．

(3) a は A の固有値であることを示せ．

(4) $\boldsymbol{v} \notin W$ ならば，$f(\boldsymbol{v}) \neq a\boldsymbol{v}$ であるとする．このとき，A の固有多項式を $\Phi(t)$ とすれば，$\Phi(a) = \Phi'(a) = 0$ であることを示せ．ただし，$\Phi'(t)$ は $\Phi(t)$ の導関数である．

(広島大 2012)　　(m20124104)

0.87 実数 ℓ に対して $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ を次で定める．

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^\ell}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．

(1) f が原点 $(0,0)$ において連続であるための ℓ の条件を求めよ．

(2) f が原点 $(0,0)$ で x について偏微分可能であるための ℓ の条件を求めよ．

(3) $\ell = 1$ のとき，極限

$$J = \lim_{R\to\infty} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} f(x,y)\,dxdy$$

を考える．変数変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ により，J は

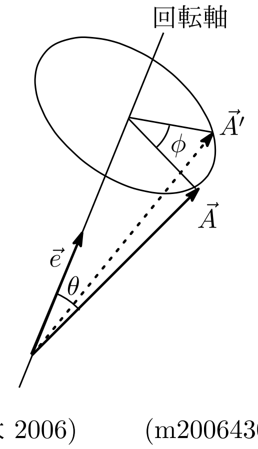
$$J = \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \frac{\sin\left(r^4\varphi(\theta)\right)}{r} dr \right) d\theta$$

となることを示せ．ここで，$\varphi(\theta) = \cos^4\theta + \sin^4\theta$ である．

(4) $\ell = 1$ のとき (3) の極限 J が存在することを示し，その値を求めよ．
その際，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ は収束し，その値が $\dfrac{\pi}{2}$ であることを用いても良い．

(広島大 2014)　　(m20144110)

0.88 右図のように，ベクトル $\vec{A}$ をその始点を通る回転軸のまわりに回転させたら $\vec{A}'$ になった．回転軸の方向を表す単位ベクトルを $\vec{e}$ とする．回転角 ϕ（単位はラジアン）が 1 に比べて十分小さい場合について，ベクトルの変化 $\Delta\vec{A} = \vec{A}' - \vec{A}$ とベクトル積 $\vec{e}\times\vec{A}$ の関係を説明しなさい．
（結果だけでなく，ベクトル積の定義に基づいてわかりやすく説明しなさい．）



(山口大 2006)　　(m20064307)

0.89 実数 x の関数 $\varphi(x)$ および $\varphi_N(x)$ を

$$\varphi(x) = e^{-x^2}, \quad \varphi_N(x) = N\varphi(Nx) \quad (N = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定義する．実係数の多項式 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ が与えられたものとして，次の各問いに答えなさい．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_N(x)p(x)dx$ の値を求めなさい．

(2) 実数 c に対して，極限 $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_N(x-c)p(x)dx$ の値を求めなさい．

なお，解答に必要なら $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\sqrt{\pi}$ を用いてもよい．

（高知大 2001） (m20014501)

0.90 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を次で定義する.

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\leq 2x\,,\ x\leq 2y\,,\ x+y\leq 3\}$$

D における重積分

$$\iint_D x\,dxdy \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ①$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) 累次積分を用いて①の値を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への変換 Φ を

$$u=\varphi(x,y)=\frac{2x-y}{3}\,,\qquad v=\psi(x,y)=\frac{-x+2y}{3}$$

としたときに $\Phi(x,y)=(\varphi(x,y),\ \psi(x,y))$ で定義する. xy 平面上の集合 D を変換 Φ によりうつした uv 平面上の像 D' を図示せよ.

(3) (2) の変換 Φ を用いて①を

$$\iint_{D'} f(u,v)\,dudv$$

と表したときの f を求めよ.

(4) (3) の重積分の値を求めよ.

(高知大 2010) (m20104502)

0.91 x を変数とする高々二次の多項式全体から集合を

$$P=\{a_2x^2+a_1x+a_0 \mid a_0,\ a_1,\ a_2\in\mathbb{R}\}$$

とする. P の元 $f(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$ と $g(x)=c_2x^2+c_1x+c_0$ に対して加法 $f+g$ と定数倍 λf を次のように定義する.

① $(f+g)(x)=(b_2+c_2)x^2+(b_1+c_1)x+(b_0+c_0)$

② $(\lambda f)(x)=\lambda b_2x^2+\lambda b_1x+\lambda b_0$

これにより P は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) P の元 x と x^2 は P において一次独立であることを示せ.

(2) P の元 $1,\ x,\ x^2$ は P の基底となることを示せ.

(3) P の任意の元 f に対して, 写像 $\varphi:P\to P$ を次で定義する.

$$\varphi(f)(x)=xf'(x)$$

ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す. このとき φ は線形写像となることを示せ.

(4) φ の核 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ と φ の像 $\mathrm{Im}(\varphi)$ を求めよ.

(高知大 2010) (m20104503) ,

0.92 (1) $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ が偏微分可能であるとき，$J(u,v) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\psi}{\partial v} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial\psi}{\partial u}$ とおく．次の φ, ψ に対して $J(u,v)$ を求めよ．

(a) $\varphi(u,v) = e^u \cos v$, $\quad \psi(u,v) = e^u \sin v$

(b) $\varphi(u,v) = \sqrt{u^2+v^2}$, $\quad \psi(u,v) = \tan^{-1}\dfrac{v}{u}$

(2) $D = \{(x,y)\ ;\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1\}$ とするとき，次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D x\sqrt{y}\,dxdy$$

(愛媛大 2008) (m20084610)

0.93 次の各問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ は 2 回偏微分可能な関数とし，$f_y \neq 0$ となる点の近くで $f(x,y) = 0$ により定義される関数を $y = \varphi(x)$ とする．そのとき，

(a) $\varphi'(x)$ を f_x, f_y を用いて表せ．

(b) $\varphi'(x) = 0$ となる点での $\varphi''(x)$ を f の 2 階までの偏微分を用いて表せ．

(2) 曲線 $C : f(x,y) = xy + y^2 - x^3 = 0$ 上の $f_y \neq 0$ なる部分における関数 y の極値を求め，極大か極小かを判定せよ．

(九州大 1998) (m19984703)

0.94 $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad (0 \leq \theta \leq \pi\ ,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\ ,\ r \geq 0)$ とする．

(1) ヤコビヤンが $r^2\sin\theta$ になることを示せ．

(2) $D\ :\ \{x^2+y^2+z^2 \leqq R^2 \quad x \geqq 0\ ,\ y \geqq 0\ ,\ z \geqq 0\ \}$
D は半径 R の球の $\dfrac{1}{8}$ である．このときの

$$\iiint_D xy\ dx\,dy\,dz$$

を求めよ． (九州大 1999) (m19994703)

0.95 $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 3x_2 + x_3 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

について次の問に答えなさい．

(1) $\varphi(x) = Ax$ となる 3 次平方行列 A を求めなさい．

(2) A の行列式 $\det A$ を求めなさい．

(3) $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．$\varphi(e)$ を求めなさい．

(4) $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる $x \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めなさい．

(5) $V = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$ とする． $\varphi(V) = \{\varphi(x) \mid x \in V\}$ は部分空間であることを示し，さらにその次元を求めなさい．

（九州大 2001） (m20014706)

0.96 $f = x^2 + y^2 + \frac{1}{4}z^2 - 1$ とする. 座標系の原点を O, x, y, z 軸上で正の向きをもつ単位ベクトルをそれぞれ i, j, k とし, 以下の問に答えよ.

(1) スカラー場 f の勾配を計算せよ.

(2) 曲面 $f = 0$ 上の点 $P(x_0, y_0, z_0)$ における勾配ベクトル a とベクトル $\overrightarrow{OP}$ とのなす角を，z_0 を用いて表せ.

(3) $x = \sin\theta\cos\varphi$, $y = \sin\theta\sin\varphi$, $z = 2\cos\theta$ とおく．ただし，$0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ である. 曲面 $f = 0$ 上の点 $Q(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ 2\cos\theta)$ における接平面を張る二つのベクトルの組を示し, 法線ベクトルを計算せよ.

(4) (3) と同じ表記の下で, $0 \leq \theta \leq \theta_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ により囲まれる曲面の面積を $S(\theta_0)$ とする. $\dfrac{dS}{d\theta_0}$ を求めよ．ただし, $0 \leq \theta_0 \leq \pi$ である.

（九州大 2004） (m20044707)

0.97 $\phi = x^2 + y^2 + z$ とするとき，$\phi = 0$ は曲面を表す． また，この曲面はパラメータ u, v を用いて $\boldsymbol{r}(x, y, z) = (u, v, -u^2 - v^2)$ と表すことができる．ここで，$\boldsymbol{r}$ は 3 次元空間での点ベクトルである．このとき，以下の設問に答えよ.

(1) 曲面上の点 $P = (1, 1, -2)$ における u 方向の接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ と v 方向の接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ を求めよ.

(2) この 2 つの接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ によって作られる平面は曲面上の点 P における接平面となる. このときの接平面を表す式を x, y, z を用いて表せ.

(九州大 2007) (m20074703)

0.98 直交座標系の x, y, z 軸の基本ベクトルを $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とし，位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とする. 閉曲線 $C : \boldsymbol{r} = 2\cos\theta\boldsymbol{i} + 2\sin\theta\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 閉曲線 C 上の点における大きさ 1 の接ベクトルを求めよ.

(2) スカラー場 $\varphi = \frac{1}{4}x^2 y$ の 閉曲線 C に沿う線積分を求めよ.

(3) 閉曲線 C で囲まれた円板を S とし，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{A} = -\frac{1+z}{x^2}\boldsymbol{i} + \frac{z^2}{xy}\boldsymbol{j} + (x^2 z - y)\boldsymbol{k}$$

とする．$(\triangledown\varphi) \times \boldsymbol{A} + \varphi(\triangledown \times \boldsymbol{A})$ の S 上の面積分を求めよ.

(九州大 2016) (m20164704)

0.99 直交座標系において，x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とする. ベクトル場 $\boldsymbol{a} = (1 - 2x^2)e^{-x^2-y^2}\,\boldsymbol{i} - 2xye^{-x^2-y^2}\,\boldsymbol{j} + 2z\,\boldsymbol{k}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $\nabla \times \boldsymbol{a}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a} = \nabla\phi$ となるようなスカラー関数 ϕ が存在するか否かを答えよ．存在する場合は，ϕ を求めよ．ただし，原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ において $\phi = 0$ とする.

(3) 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = 2\cos t\,\boldsymbol{i} + 2\sin t\,\boldsymbol{j} + t\,\boldsymbol{k}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ で与えられる曲線 C 上で，線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r}$ の値を求めよ.

(九州大 2021)　　(m20214703)

0.100 互いに異なる正の定数 a, b, c を考える．空間内の点 $O(0,0,0)$, $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ $C(0,0,c)$ を頂点とする 4 面体を V とする．また V 内部にある点を $P(x,y,z)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 A, B, C, P を頂点とする 4 面体を V_1, 点 O, B, C, P を頂点とする 4 面体を V_2, 点 O, C, A, P を頂点とする 4 面体を V_3, 点 O, A, B, P を頂点とする 4 面体を V_4 とする．4 面体 V_1, V_2, V_3, V_4 の体積比 $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$ を a, b, c, x, y, z を用いて表せ．ただし，λ_j $(j=1,2,3,4)$ は $0 \leq \lambda_j \leq 1$ および $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1$ を満たす実数とする．

(2) 関数 $\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\phi}(x,y,z)$, $\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}(x,y,z)$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{\phi}=\lambda_1\nabla\lambda_2-\lambda_2\nabla\lambda_1 \qquad \boldsymbol{\psi}=\lambda_2\nabla\lambda_3-\lambda_3\nabla\lambda_2$$

で定める．関数 $\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\phi}(x,y,z)$, $\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}(x,y,z)$ を，a, b, c, x, y, z を用いて表せ．

(3) 関数 $f=f(x,y,z)$ を $f(x,y,z)=e^{x+y+z}\sin(x-z)\boldsymbol{\phi}(x,y,z)+x^2\sin(-x+y)\psi(x,y,z)$ で定める．このとき，積分

$$\int_{\ell_{AB}} f\cdot d\boldsymbol{r}$$

を求めよ．ただし，ℓ_{AB} は点 A から B に進む方向を正とする線分，$\boldsymbol{r}$ は線分 ℓ_{AB} 上にある点の位置ベクトルである．

(4) 関数 f を前問で定めた関数とする．このとき，積分

$$\int_S (\nabla\times f)\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

を求めよ．ただし，S は点 O,B,A を頂点とする 3 角形，$\boldsymbol{n}$ は z 成分が負となる S の単位法線である．

(九州大 2022)　　(m20224702)

0.101 極座標 (r,θ,ϕ) における「面積素」および「体積素」を求め，これらの結果を用いて，半径 a の球の面積 S，および体積 V を計算しなさい**.**

(佐賀大 2003)　　(m20034933)

0.102 2 次元 xy 平面を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 点 $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を原点の回りに角 ϕ だけ回転して $(x',y')=\big(r\cos(\theta+\phi),\ r\sin(\theta+\phi)\big)$ に移すときの回転行列 $R(\phi)$ を求めよ．

(2) $\Delta\phi$ が十分小さいとき，$R(\phi)$ が次のように表されることを示せ．

$$R(\phi)=\begin{pmatrix} 1 & -\Delta\phi \\ \Delta\phi & 1 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2015)　　(m20154913)

0.103 行列 $A=\begin{pmatrix}\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$，行列 $B=\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$ がある．このとき，以下の各問に答えよ．

(1) AB ならびに BA を求めよ．

(2) $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$D=2BA-C$ とするとき，D を求めよ．

(3) n を正の整数，$\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}\cos\phi \\ \sin\phi\end{pmatrix}$ とするとき，$D^n\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}\cos(-n\pi/2+2n\theta+\phi) \\ \sin(-n\pi/2+2n\theta+\phi)\end{pmatrix}$ であることを証明せよ．

(4) $R = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ とするとき $D^n = R$ の形に書けることを示し，β を求めよ．また，このことを利用して逆行列 $(D^n)^{-1}$ を求めよ．

(鹿児島大 2012)　　(m20125404)

0.104 オイラーの公式：$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ に関する以下の問に答えよ.

(1) オイラーの公式を用いて，つぎの公式を証明せよ.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

(2) $e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}e^{i\varphi}$ という式に，オイラーの公式を適用し，両辺の実部と虚部を比較して，余弦関数および正弦関数の加法公式

$$\cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$
$$\sin(\theta+\varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$$

を導出せよ.

(室蘭工業大 2006)　　(m20065508)

0.105 以下の設問に答えよ. なお, 解答には導出過程を含むこと.

領域 $D : |x-2y| \leq 1$, $|x+3y| \leq 1$ のとき, 次の手順にしたがって, $\iint_D (x+y)^2 dxdy$ を求めよ.

(1) $x - 2y = u$, $x + 3y = v$ とし, x, y を, u と v を用いて表せ.

(2) $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(3) $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(\varphi(u,v), \psi(u,v))|J|dudv$ の関係を用いて, $\iint_D (x+y)^2 dxdy$ を求めよ.

(香川大 2005)　　(m20055701)

0.106 (1) $\phi(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2} + xy - z$ について $\nabla\phi = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)\phi$ を求めよ.

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = (\boldsymbol{A}_x, \boldsymbol{A}_y, \boldsymbol{A}_z) = (-y^3, x^3, 0)$ について,

$$\nabla\times\ \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \boldsymbol{A}_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \boldsymbol{A}_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \boldsymbol{A}_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルを表す.

(島根大 2006)　　(m20065815)

0.107 以下の設問に答えよ．ただし，T $(T > 0)$ および ϕ は定数である.

(1) 次の定積分を計算せよ.　$\displaystyle \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt$

(2) 次の定積分を計算せよ.　$\displaystyle \frac{1}{T}\int_0^{T} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right)\right]^2 dt$

(3) 次式が成り立つことを示せ.　$\displaystyle \int_0^{T} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right) dt = 0$

(4) 次の定積分を計算せよ.　$\displaystyle \frac{1}{T}\int_0^{T} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{3}\right)\right]^2 dt$

(島根大 2017)　　(m20175801)

0.108 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ が与えられているとき，次の問に答えよ．

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を全て求めよ．

(2) その全ての固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(3) 二次形式 $\Phi = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ の標準形が $\Phi = a{\xi_1}^2 + b{\xi_2}^2$ で与えられるとき，係数比 $\dfrac{b}{a}$ を求めよ．
ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^T$ は直交行列 $\boldsymbol{U}$ を用いて $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\xi}$ で表されるベクトルとする．

(首都大 2005)　　(m20055903)