[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　λ

0.1　次の微分方程式の解を求めたい．これに関して次の設問に答えよ．

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 4y$$
$$\frac{dy}{dt} = x - 2y$$

(1)　この微分方程式の解の一つが，行列 $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ を用いて $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp(\lambda t) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

で表されるものとする．ただし，$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ はゼロ行列ではなく $u_1 + u_2 = 1$ を満たすものとする．

λ と $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ を求め（複数求まる場合は全て答えよ），一般解を示せ．

(2)　$t = 0$ における $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ の初期値が $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ であるときの解を求めよ．

(北海道大 2007)　　(m20070101)

0.2　次の対称行列について，以下の設問に答えよ．

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1)　$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ は $\mathbf{A}$ の固有ベクトルの一つであることを示し，対応する固有値を求めよ．

(2)　$\mathbf{A}$ の固有ベクトルのうち，(1) で与えられた $\boldsymbol{x}_1$ を除くもの 2 つ $(= \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)$ を挙げよ．　ただし，それらの大きさを $|\boldsymbol{x}_2| = |\boldsymbol{x}_3| = 1$ とし，3 つの固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ が互いに直交するものを選ぶこと．

(3)　$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{\Lambda}$　($\mathbf{\Lambda}$: 対角行列) となるような直交行列 $\mathbf{P}$ を求め，これを用いて $\mathbf{A}^n$ を計算せよ．

(北海道大 2013)　　(m20130101)

0.3　次式の $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ の行列について，次の設問に答えなさい．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

設問 1. $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

設問 2. $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \mathbf{\Lambda}$（$\mathbf{\Lambda}$ は対角行列）となる行列 $\boldsymbol{P}$ と $\mathbf{\Lambda}$ を求めなさい．

設問 3. $\boldsymbol{B}$ が直交行列であることを示しなさい．

設問 4. ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ を $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Bx}$ による一次変換としたとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の大きさが等しいことを示しなさい．ただし，ベクトルの大きさの二乗は，$\boldsymbol{x}^T\,\boldsymbol{x}$ で求めることができる．ここで，T は転換を表す．

(北海道大 2018)　　(m20180103)

0.4　次の微分方程式の一般解を, $y = e^{\lambda x}$ と置くことで求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - y = 0$$

(岩手大 2004)　　(m20040306)

0.5 行列 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 等式 $\boldsymbol{Bx} = \lambda \boldsymbol{x}$ を満たすとき，固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ と固有値 λ を求めよ．

(2) (1) が成立するとき，未知ベクトル $\boldsymbol{y}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{x}$ は，微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{By}$$

の解であることを示せ．

(3) t $(0 \leq t \leq +\infty)$ を時間とすると，未知ベクトル $\boldsymbol{y}(t)$ の終端はどのような軌跡となるか，答えよ．

(秋田大 2021)　　(m20210404)

0.6 関数 $f(x)$ は，微分方程式

$$x^2\frac{d^2f(x)}{dx^2} - 2x\frac{df(x)}{dx} + 2f(x) = 0 \quad (x \geqq 1) \tag{a}$$

および，初期条件

$$x = 1 \text{ のとき } \quad f = 1\,,\ \frac{df}{dx} = 0 \tag{b}$$

を満たす．このとき，以下の問 (1)〜(5) に答えよ．

(1) 方程式 (a) は，変数変換 $t = \log x$ によって，以下の微分方程式に帰着することを示せ．

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0 \tag{c}$$

また，初期条件 (b) は，

$$t = 0 \text{ のとき } \quad y = 1\,,\ \frac{dy}{dt} = 0 \tag{d}$$

となることを示せ．

(2) 方程式 (c) の一般解は

$$y(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} \tag{e}$$

で与えられる．方程式 (c) および初期条件 (d) を満たす実数 $\lambda_1, \lambda_2, C_1, C_2$ を求めよ．

(3) 初期条件 (b) のもとで方程式 (a) の解を求めよ．

(4) $z(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$ と定義する．いま，適切な 2 × 2 行列 A を定義すれば，方程式 (c) は

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dy(t)}{dt} \\ \dfrac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

と表される．行列 A を求めよ．

(5) 行列 A の固有値を求め，問 (2) で求めた λ_1, λ_2 と比較せよ．

(東北大 2003)　　(m20030502)

0.7 2 次曲線 C : $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 18 = 0$ は, 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$，ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いて, ${}^t\boldsymbol{pAp} - 18 = 0$ と表すことができる. ただし，${}^t\boldsymbol{p} = (x \quad y)$ である.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1 , λ_2 を求め, それぞれに対応する大きさ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とし, ある行列 $\boldsymbol{U}$ を用いて, 線形変換 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{Up}'$ を行えば, 2 次曲線 C は標準形になる. 行列 $\boldsymbol{U}$ を求め, 2 次曲線 C の標準形を x' , y' を用いて表せ.

(3) x 軸と x' 軸のなす角度を求め, x 軸 , y 軸と x' 軸 , y' 軸の関係を図示し，2 次曲線 C の概形を描け.

(東北大 2005)　　(m20050501)

0.8 $\mathbb{R}^3$ において x, y の標準内積を (x,y) で表す. 3 次実対称行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

で定める. このとき, 次の問に答えよ.

(1) A は相異なる正の固有値 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ を持つ. λ_1, λ_2, λ_3, および それらに対する長さ 1 の固有ベクトル ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 をそれぞれ求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の一次変換 $f_j \quad (j = 1, 2, 3)$ を

$$f_j \ : \ x \mapsto (x\,,\ \phi_j)\phi_j\,, \quad j = 1, 2, 3$$

で定める. $\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する f_j の表現行列を P_j とするとき,

$$P_j^2 = P_j\,, \quad j = 1, 2, 3$$

$$P_j P_k = O\,, \quad j \neq k \text{ のとき}$$

を示せ. ただし, O は零行列である.

(3) $m = 1, 2, \cdots$ に対して, 行列 B を

$$B = \lambda_1^{\frac{1}{m}} P_1 + \lambda_2^{\frac{1}{m}} P_2 + \lambda_3^{\frac{1}{m}} P_3$$

と定めるとき, $B^m = A$ が成り立つことを証明せよ.

(東北大 2005) (m20050506)

0.9 x を実数とする. $n \times\ n$ 正方行列である $\boldsymbol{A}_n(x)$ と $\boldsymbol{B}_n$ を以下のように与える.

$$\boldsymbol{A}_n(x) = \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -x & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -x \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}_n = \boldsymbol{A}_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

すなわち, $\boldsymbol{A}_n(x)$ は対角要素がすべて $-x$, その両側の斜めの要素が 1, それ以外の要素がすべて 0 の 3 重対角行列である. $\boldsymbol{B}_n$ は $\boldsymbol{A}_n(x)$ において $x = 0$ としたときの行列である.

(1) $\boldsymbol{B}_2$ の固有値をすべて求めよ.

(2) $\boldsymbol{B}_3$ の固有値をすべて求めよ.

(3) $\boldsymbol{B}_n$ の固有値のひとつを λ とする. この λ は $|\boldsymbol{A}_n(\lambda)| = 0$ を満たすことを示せ.

(4) λ が $\boldsymbol{B}_n$ の固有値であるとき, $|\boldsymbol{A}_n(\lambda)|$ は漸化式 $|\boldsymbol{A}_n(\lambda)| = -\lambda|\boldsymbol{A}_{n-1}(\lambda)| - |\boldsymbol{A}_{n-2}(\lambda)|$ を満たすことを示せ. ただし, $|\boldsymbol{A}_0(\lambda)| = 1$, $|\boldsymbol{A}_1(\lambda)| = -\lambda$ とする.

(5) $\lambda = -2\cos\theta$, $|\boldsymbol{A}_n(\lambda)| = \dfrac{\sin[\,(n+1)\theta\,]}{\sin\theta}$ とおくとき, これらが (4) の漸化式を満たすことを示せ. ただし, $\sin\theta \neq 0$ である.

(6) $\dfrac{\sin[\,(n+1)\theta\,]}{\sin\theta} = 0$ を満たす θ を求めよ. これを使って, $\boldsymbol{B}_n$ の固有値 $\lambda = -2\cos\theta$ を求めよ. また, 求めた固有値は, $n = 2$, $n = 3$ の場合, それぞれ (1) および (2) で求めた固有値と一致することを示せ.

(東北大 2015)　　(m20150505)

0.10 (1) 微分方程式

$$\frac{dy(t)}{dt} + \lambda y(t) = 0 \qquad \text{(i)}$$

を解け．ただし，λ は定数で，$y(0) = a$ とする．

(2) 微分方程式

$$\frac{dy(t)}{dt} + \lambda y(t) = f(t) \qquad \text{(ii)}$$

を以下の手順によって解け．ただし，$f(t)$ は既知の関数で，$y(0) = a$ とする．まず，

$$y(t) = e^{-\lambda t} x(t) \qquad \text{(iii)}$$

とおいて，(ii) を $x(t)$ の方程式に変換し，$x(t)$ を解き，$y(t)$ を求めよ．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970606)

0.11 行列 A の固有値 λ と固有ベクトル ψ は，

$$A\psi = \lambda\psi$$

という関係式を満足する．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{ab} \\ \sqrt{ab} & a-b \end{pmatrix}$$

ただし，a, b は正の実数とせよ．

(2) エルミート行列の固有値は，実数であることを証明せよ．ただし，エルミート行列 H とは，複素数の成分をもつ行列であり，転置して複素共役を取った（これをエルミート共役を取るという）行列が，もとの H と一致する行列である．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030614)

0.12 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，次のような複素 n 次正方行列 $N,\ J_\lambda(n)$ を考える．

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad J_\lambda(n) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

(1) 自然数 k に対して N の k 乗 N^k を求めよ．

(2) 自然数 k に対して $J_\lambda(n)^k$ を求めよ．

(3) 複素正方行列 A が対角化可能であることの定義を述べよ．

(4) 複素正方行列 A がある自然数 k に対して $A^k = E$ を満たすならば A は対角化可能であることを示せ．ただし E は単位行列である．必要ならば次の定理を用いてもよい．

定理 任意の複素 l 次正方行列 A に対して l 次正則行列 P，m 個の複素数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ および m 個の自然数 $n_1, \ldots, n_m$ で $\sum_{i=1}^{m} n_i = l$ を満たすものが存在して

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1}(n_1) & & & \\ & J_{\lambda_2}(n_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_m}(n_m) \end{pmatrix} \text{ と書ける．}$$

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030615)

0.13 任意の実 2× 2 行列を無限回作用させることにより，平面上の点はどこに行き着くかについて考察せよ．以下の (1) から (5) の手順に従ってもよいし，または別の手順で解答してもよい．

(1) 上三角行列

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

の固有値を求める．

(2) 行列 T の n 乗を計算する．

(3) 行列 T のすべての固有値の絶対値が 1 より小さい場合，実平面上の点

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

は行列 T を無限回作用するとどのような点に近づくか考える．ただし，$\alpha, \beta, \gamma, x_1, x_2$ はすべて実数であるとする．

(4) 2× 2 行列 M に対し

$$Me = \lambda e$$

を満たす単位固有ベクトルを

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

とし．この成分 a, b を用いて正則行列

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

を定義する．行列 $P^{-1}MP$ の (2,1) 成分（左下の要素）がゼロになることを確かめ，任意の 2× 2 行列が上三角行列に変換されることを示す．　さらに．$T_0 = P^{-1}MP$ とするとき n を自然数として

$$M^n = P(T_0)^n P^{-1}$$

が成立することを示す．

(5) 行列 B の要素がすべて実数で，固有値の絶対値が 1 より小さいとする．　このとき行列 B を無限回作用すると，実平面上の点はどのような点に近づくか考えてみる．

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110604)

0.14 行列に関する次の問に答えよ．

(1) 次の 2 行 2 列の実対称行列 A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

の固有値 λ_1 λ_2 と規格化された固有ベクトル v_1, v_2 を求めなさい．

(2) 前問で求めた固有ベクトルを並べて作った行列と，その転置行列を用いて A を対角化しなさい．

一般に，n 行 n 列の実対称行列 B は，ある直交行列 O およびその転置行列 O^T を用いて O^TBO とすれば対角化されることが知られている．

(3) 直交行列 O の定義を書きなさい．

(4) 一般の 2 行 2 列の実対称行列 C の行列式がその 2 つの固有値 c_1, c_2 の積に等しいこと

$$\det C = c_1 c_2$$

を証明し，C が $(*)$ で与えられるとき（すなわち $C = A$）にそれが成り立っていることを示しなさい．

(5) 一般の 2 行 2 列の実対称行列 C の対角和がその 2 つの固有値 c_1, c_2 の和に等しいこと

$$\mathrm{T_r}\, C = c_1 + c_2$$

を証明し，C が $(*)$ で与えられるとき（すなわち $C = A$）にそれが成り立っていることを示しなさい．

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130605)

0.15 常微分方程式 $\dfrac{dN}{dt} = -\lambda N$（$\lambda$ は正の実数）を解きなさい．ただし初期条件を $t = 0$ で $N = N_0$ とすること．

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160605)

0.16 A を 2 次の正方行列とする．A の行列式を $|A|$ で表し，また，その対角成分の和を $\mathrm{tr}(A)$ で表す．さらに A の固有値を λ_1, λ_2 とする．以下の問いに答えよ．

(1) 特性多項式は $\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + |A|$ であることを示せ．

(2) $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$, $|A| = \lambda_1 \lambda_2$ であることを示せ．

(3) $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + |A|E = O$ を示せ．ただし，E は単位行列で，O は零行列である．

(4) (3) の結果を用いて，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき，$n \geq 2$ に対して，次の関係が成り立つことを証明せよ．

$$A^n = \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1} A + \frac{\lambda_1^n \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_1} E$$

(東京大 2000)　　(m20000704)

0.17 $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) $A\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u}$ 　を満たす実数 λ と非零ベクトル $\boldsymbol{u}$ の組をすべて求めよ.

(2) 2 点 P, Q と原点 O を頂点とする三角形 OPQ の各頂点の位置ベクトルが A によって一次変換されるとき, その三角形の面積が何倍になるか答えよ.

(東京大 2001)　　(m20010701)

0.18 p, q を任意の実数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 　$A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$ 　について，$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ を満たす実数 λ と非零ベクトル $\boldsymbol{x}$ の組をすべて求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を，次の漸化式で与える．　$\begin{cases} a_{n+1} = (1-p)a_n + qb_n \\ b_{n+1} = pa_n + (1-q)b_n \end{cases}$

ただし，$0 < p < 1$，$0 < q < 1$ とし，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の初項を，それぞれ , a_0, b_0 とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を p, q, a_0, b_0 を用いて示せ．

(東京大 2006)　　(m20060702)

0.19 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1 , λ_2 とそれらに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ をそれぞれ求めよ．ただし，絶対値が大きい方の固有値を λ_1 とする．

(2) xy 平面上の 3 点 $P(p_1,\, p_2)$, $Q(q_1,\, q_2)$, $R(r_1,\, r_2)$ を頂点とする三角形 PQR の面積 S の導出過程を示し，各頂点の座標 p_1 , p_2 , q_1 , q_2 , r_1 , r_2 により表せ．また，各頂点の位置ベクトルが $\boldsymbol{A}$ により一次変換された際，その三角形の面積は何倍になるかを求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ をとり，$\boldsymbol{a}$ に $\boldsymbol{A}$ を n 回かけたベクトルを $\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ とする．その成分 α_n , β_n および $\boldsymbol{A}^n$ を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(4) 極限値 $L = \lim_{n \to \infty} \dfrac{\alpha_n}{\beta_n}$ が一定の値に収束することを示し，その値を求めよ．

(東京大 2009)　　(m20090704)

0.20 以下の問いに答えよ．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

(1) 微分方程式

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2 \qquad (*)$$

は，特殊解 $y_1(x)$ 持つことがわかっているとする．

(a) 式 $(*)$ の一般解を $y = y_1(x) + 1/u(x)$ とおき，$u(x)$ に関する微分方程式を $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $y_1(x)$ を用いて表せ．

(b) $y' = (x^2 + x + 1) - (2x + 1)y + y^2$ は，特殊解 $y_1(x) = x$ を持つことがわかっている．一般解を求めよ．(a) で求めた結果を用いてもよい．

(2) 微分方程式

$$\alpha y'' + y' + y = 0 \qquad y(x = 0) = 1,\ \ y'(x = 0) = 2 \qquad (**)$$

を考える．

(a) $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ を一般解とする．λ_1, λ_2, C_1, C_2 をそれぞれ α で表せ．ただし，e は自然対数の底とする．

(b) $x \geqq 0$ において，式 $(**)$ の解を

$$y' + y = 0 \qquad y(x = 0) = \beta$$

の解で近似することを考える．α が十分小さい場合，β をどのように選べば近似できるか，(a) で求めた λ_1, λ_2, C_1, C_2 を用いて説明せよ．

(東京大 2011)　　(m20110701)

0.21 3 次の正方行列 A の固有値を λ とし，λ は固有方程式 $\lambda^3 - (\alpha + \beta)\lambda^2 + \alpha\beta\lambda = 0$ を満たすとする．このとき，$A^3 - (\alpha + \beta)A^2 + \alpha\beta A = 0$ が成り立つ．ここで，α, β は互いに異なる 0 でない実数とし，行列 A は対角化可能であるとする，また，O を零行列，E を単位行列とする．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A^n $(n \geqq 3)$ は次のような行列 A の 2 次式で表せることを示せ．

$$A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n E$$

ここで，a_n, b_n, c_n は実数である．

(2) 行列 A が対角行列 D に対角化されるとき，(1) の a_n, b_n, c_n を含む次の式

$$D^n = a_n D^2 + b_n D + c_n E \quad (n \geqq 3)$$

が成り立つことを示せ．

(3) (1) の a_n, b_n, c_n を求めよ．

(4) α, β の絶対値が 1 より小さければ，無限級数

$$\sum_{i=0}^{\infty} A^i = E + A + A^2 + \cdots$$

は $a'A^2 + b'A + c'E$ と表されることを示し，実数 a', b', c' を求めよ．

(5) (4) の a', b', c' に対し，$(E - A)(a'A^2 + b'A + c'E)$ を求めよ．

(東京大 2013)　　(m20130705)

0.22 ある行列に並んでいる人の待ち時間 t は確率密度関数

$$\begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

に従うものとする．ただし，λ は正の実数である．以下の問いに答えよ．

(1) 待ち時間が t 以下である確率 $F(t)$ を求めよ．

(2) 待ち時間の平均 μ と分散 σ^2 を求めよ．

(3) 十分な数の観測の結果，待ち時間の平均が T であったとする．待ち始めてから時間 τ だけ経過したとき，残りの平均待ち時間を求めよ．

(東京大 2014)　　(m20140702)

0.23 A, B を 2 次正方行列とする．次の命題が正しければ証明し，正しくなければ反例をあげよ．

(1) λ が A の固有値で，μ が B の固有値のとき，$\lambda\mu$ は AB の固有値である．

(2) A は正則行列とし，λ が A の固有値とすると，$\lambda \neq 0$ であり λ^{-1} は A^{-1} の固有値である．

(東京工業大 2002)　　(m20020806)

0.24 λ を実数とし $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ \lambda \\ -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix}$ は 3 次の数ベクトルとする. 次の各問いに答えなさい.

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ をそれぞれ第 1 列, 第 2 列, 第 3 列とする行列を A とするとき, 行列式 $|A| = 0$ を満たす λ の値を求めなさい.

(2) λ は (1) で求めた値とする. このとき $\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の一次結合で表しなさい.

(東京農工大 2010)　　(m20100901)

0.25 r は実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & r & 1 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えなさい．

(1) $A \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が成り立つとき，r の値を求めなさい．

(2) r は (1) で求めた値とする．そのときの A の固有値を λ_1, λ_2, λ_3 とする．ただし $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ とする．A の固有値 λ_1 に属する固有ベクトルで $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ の形のものを求めなさい．

(東京農工大 2017)　　(m20170903)

0.26 4次の単位行列を E とし，4次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考える．さらに λ を実数とし，$W(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = \lambda x\}$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\det(\lambda E - A)$ を求めよ．

(2) $W(\lambda) \neq \{0\}$ となるような λ をすべて求めよ．

(3) (2) で求めた各 λ に対し，$W(\lambda)$ の基底を求めよ．

(電気通信大 2006)　　(m20061003)

0.27 次の3次正方行列 A, E に対して下記の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $\det(xE - A) = (x - \lambda_1)^2(x - \lambda_2)$ と因数分解される．$\lambda_1,\ \lambda_2$ を求めよ．

(2) $V_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ :\ (A - \lambda_1 E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$, $V_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ :\ (A - \lambda_2 E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ とおく．V_1 の基底 $\boldsymbol{v}_1$ と V_2 の基底 $\boldsymbol{v}_2$ とを求めよ．

(3) $(A - \lambda_1 E)\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1$ となる $\boldsymbol{v}_3$をひとつ求めよ．

(4) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底となる．線形写像 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定めるとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ に関する T の表現行列を求めよ．

(電気通信大 2007)　　(m20071002)

0.28 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ とし，I を3次の単位行列とする．以下の問いに答えよ．

(1) A の逆行列があれば求めよ．

(2) 行列式 $\det(\lambda I - A)$ を λ に関する多項式の形に整理せよ．

(3) $A\boldsymbol{x} = \lambda_0 \boldsymbol{x}$ となる $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ をもつような，実数 λ_0 を求めよ．また，そのときの $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ をひとつ答えよ．

(4) A^{2010} を求めよ．

(電気通信大 2011)　　(m20111001)

0.29 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ に対して，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(x) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ で定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 連立1次方程式 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ が零ベクトルでない解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ をもつとする．このような実数 λ の値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めたそれぞれの λ に対して，$\mathbb{R}^3$ の部分空間 $V_\lambda = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\right\}$ の基底を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3)$ をうまくとると，f の基底 $\boldsymbol{B}$ に関する表現行列 M は対角行列となる．このような $\boldsymbol{B}$ および M を1組求めよ．

(電気通信大 2018)　　(m20181002)

0.30　行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ に関する以下の問いに答えよ．

(1)　I を 3 次単位行列とするとき，行列 $(A-2I)(A-3I)$ を求めよ．

(2)　A の固有値をすべて求めよ．

(3)　A の m 乗 A^m（m は非負整数）を

$$A^m = \lambda_1^m\, P_1 + \lambda_2^m\, P_2$$

という形に表せ．ここで，P_1, P_2 は 3 次正方行列であり，P_1, P_2 の各成分，および λ_1, λ_2 は，m に依存しない定数である．

(電気通信大 2021)　　(m20211002)

0.31　微分方程式　$\dfrac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = f(x)$　　$(*)$
($\lambda \neq 0$, $0 \leq x \leq l$) を境界条件 $y(0) = y(l) = 0$ の下で解け．ただし，$y = y(x)$ である．

(1)　$(*)$ に付随する同次方程式が，同じ境界条件の下で，恒等的に 0 でない解を持つための λ（固有値）の表式を求めよ．

(2)　λ が (1) で求めた固有値と異なる場合，非同次方程式 (*) の一般解を求めよ．

(横浜国立大 1995)　　(m19951101)

0.32　次の微分方程式について答えよ．

$$\frac{dx}{dt} + \lambda x = f(t)$$

但し，$t = 0$ のとき $x = a$ であり，また λ は実の定数とする．

(1)　この方程式の一般解を求めよ．

(2)　関数 $f(t)$ が $\sin t$ である時の解を求めよ．

(3)　この解が周期関数となるための条件を求めよ．

(横浜国立大 1998)　　(m19981101)

0.33　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1, λ_2 を求め，λ_1, λ_2 に対して，長さが 1 となるように正規化した固有ベクトル ν_1, ν_2 を求めよ．さらに，ν_1, ν_2 を相隣る 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ．

(千葉大 1997)　　(m19971203)

0.34　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えなさい．

(1)　行列 A の固有値 λ_1, λ_2 とそれぞれに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ を求めなさい．

(2)　固有ベクトルを縦ベクトルとして，横に並べた行列 $P = [\, \boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2 \,]$ の逆行列 P^{-1} を求めなさい．

(3)　$P^{-1}AP$ を求めなさい．

(4)　$(P^{-1})^T = [\, \boldsymbol{q}_1,\ \boldsymbol{q}_2 \,]$ で定義されるベクトル $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ が A^T の固有ベクトルであることを示しなさい．ここで A^T は A の転置行列を表す．

(千葉大 2014)　　(m20141202)

0.35 三次元空間の中にデカルト直交座標系 $O-XYZ$ 座標系が定義されている.

$y=0$ 平面（$z-x$ 平面）上の点 $A=(x_0,0,z_0)$ を始点とし，一定方向で $y=0$ 平面から遠ざかる点 B がある． 線分 AB の長さは λ で，線分 AB の方向ベクトルは，球座標系にならって，水平角（緯度）θ，方位角（経度）φ とする．ただし，$-90^\circ<\theta<90^\circ$，$0^\circ<\varphi<180^\circ$． 点 B の座標は，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ から，

$$B=(\lambda\cos\theta\cos\varphi+x_0\ ,\ \lambda\cos\theta\sin\varphi\ ,\ \lambda\sin\theta+z_0)$$

で与えられる．定点 E を $E=(0,-a,h)$，$a>0$ として，点 E と点 B を結ぶ直線が $y=0$ 平面（$z-x$ 平面）と交わる点を P とする．$\lambda\to\infty$ の時の P の座標を求めなさい.

（ヒント ： $\lambda\to\infty$ の時の点 P を透視画法では消点 (Vanishing Point) と呼んでいる）

(千葉大 2015)　　(m20151205)

0.36 実対称行列 $A=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{bmatrix}$ について，以下の問に答えなさい.

(1) 行列 A は，異なる二つの実数の固有値 λ_1，λ_2 を持つ（ただし，$\lambda_1<\lambda_2$）． λ_1，λ_2 を求めなさい.

(2) 行列 A は，ある直交行列 Q によって $Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_2\end{bmatrix}$ と対角化できる．この直交行列 Q を求めなさい. （なお，実正方行列 Q が ${}^tQQ=I$（I は単位行列）を満たすとき，Q を直交行列という）

(千葉大 2017)　　(m20171202)

0.37 ２次曲線 $-{x_1}^2+4x_1x_2+2{x_2}^2=1$ を行列で表すと

$$\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=1\cdots(*)$$

となる．以下の問いに答えよ.

(1) 行列 $A=\begin{bmatrix}-1&2\\2&2\end{bmatrix}$ の固有値 $\lambda_1,\lambda_2\ (\lambda_1<\lambda_2)$ を求めよ.

(2) 固有値 λ_1,λ_2 について，それぞれの正規化された固有ベクトル $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2$ を求めよ.

(3) 行列 $P=[\,\mathbf{p}_1\ \ \mathbf{p}_2\,]$ を用いた変換

$$\mathbf{x}=P\mathbf{y}\ ,\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\ ,\quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$$

によって，式 $(*)$ を $y_1,y_2,\lambda_1,\lambda_2$ のみで表せ.

ヒント: P が直交行列（${}^tP=P^{-1}$，上付き添字の t は行列の転置 ）であることを利用する.

(4) 式 (1) で表される図形の種類は何か.

(筑波大 2000)　　(m20001309)

0.38 任意の実ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の組に実数（スカラー）値を対応させる演算 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が以下を満たすものとする.

(1) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$

(2) 任意の実数 λ に対して $(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$

(3) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})$

(4) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geqq 0$ であり, 等号は $\boldsymbol{x}=0$ の場合に限る.

さらに $|\boldsymbol{x}|=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$ と定義するとき, 以下の問に答えよ.

(1) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=|\boldsymbol{x}|^2-|\boldsymbol{y}|^2$ を示せ.

(2) この演算について $|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\leqq|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|$ が成り立つ.　このことを証明済みとして, $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\leqq|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|$ を示せ.

（筑波大 2004）　(m20041318)

0.39 $A(\lambda)$ は実数のパラメータ λ を含む次の正方行列である.

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & -1 & 0\\ -1 & \lambda & \sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2} & \lambda\end{pmatrix}$$

また,

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{0}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

とする. x,y,z もすべて実数である.

(1) x,y,z を未知変数とする連立一次方程式

$$A(\lambda)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

が自明でない解を持つための, パラメータ λ が満たすべき条件を求めよ. また, そのときの解を求めよ.

(2) 連立一次方程式

$$A(\lambda)\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

を考える. パラメータ λ に応じた場合分けをして, 解が存在するか否かを調べよ. 存在する場合には, 一意性に注意して, その解を求めよ.

(筑波大 2004)　(m20041319)

0.40 行列 $A=\begin{bmatrix}0 & -4 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ とする.

(1) A の固有値と対応する固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) ある正則行列 P を用いて, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}$ と対角化することは可能か. 可能であれば, P の成分と $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ の値を求めよ. 対角化不可能であれば, その理由を説明せよ.

(筑波大 2004)　(m20041322)

0.41 行列 A について以下の設問に答えよ.

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

(1) A の固有値 λ_1 , λ_2 , λ_3 を求めよ. ただし, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする.

(2) 前問で得た固有値 λ_1 , λ_2 , λ_3 に対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, $\boldsymbol{l}_3$ とする. $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, $\boldsymbol{l}_3$ を求めよ. ただし, 固有ベクトルの長さが 1 となるように選ぶものとする.

(3) A を対角化する行列 L とその逆行列 L^{-1} を求めよ.

(筑波大 2010)　　(m20101309)

0.42 A を正方行列, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ $(n \geq 2)$ を A の固有値, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots \boldsymbol{x}_n$ を各固有値に対する固有ベクトルとするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 一般に, k 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_k$ が線形独立で, $k+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_k$, $\boldsymbol{a}_{k+1}$ が線形従属ならば, $\boldsymbol{a}_{k+1}$ は $\boldsymbol{a}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_k$ の線形結合であることを示せ.

(2) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は線形独立であることを示せ.

(3) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ がすべて異なるとき, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots \boldsymbol{x}_n$ は線形独立であることを, 数学的帰納法によって証明せよ.

(筑波大 2013)　　(m20131307)

0.43 $\boldsymbol{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \, x, y, z \in \boldsymbol{R} \right\}$ とし, 線形変換 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ は, $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$,

$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ を満たすとする.

(1) この線形変換 f の標準的な基底に関する行列表現を示せ.

(2) ある実数 $\lambda (\neq 0)$ が存在して, $f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ のうち, $||\boldsymbol{x}|| = 1$ を満たすベクトルをすべて求めよ.

(3) 整数 $n (> 0)$ に対し, 線形変換 f^n を, $f^1(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$, $f^n(\boldsymbol{x}) = f\big(f^{n-1}(\boldsymbol{x})\big)$ で帰納的に定義する. f^n の標準的な基底に関する行列表現を, 直交行列と対角行列を用いて表せ.

(筑波大 2014)　　(m20141302)

0.44 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ を求めよ. ただし, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする.

(2) A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ に属する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3$ とするとき, $\{\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3\}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底となるように選ぶことができる. そのように選んだ $\{\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3\}$ を 1 組求めよ.

(3) (2) で求めた $\{\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3\}$ を使って行列 P を $P = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3)$ とおくとき, その逆行列 P^{-1} は P の転置行列 ${}^tP$ で与えられる. これは P がどのような行列であることによる性質か. また, P^{-1} および $P^{-1}AP$ はどうなるかを書け.

(4) 連立線形微分方程式 $\dfrac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}(t) = -A\boldsymbol{r}(t)$ を考える. ここで, $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ である.

$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ とおくとき, $q_1(t),\ q_2(t),\ q_3(t)$ が満たす微分方程式をそれぞれ求めよ. さらに, その一般解を求めよ.

(5) 初期条件が $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \\ \dot{z}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と与えられたとき，$x(t), y(t), z(t)$ を求めよ．ここで，$\dot{x}(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$，$\dot{y}(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$，$\dot{z}(t) = \dfrac{dz(t)}{dt}$ である．

(筑波大 2014)　　(m20141311)

0.45 実ベクトル空間 V と線形写像 $F : V \to V$ を考える．

(1) $B = \{v_1,\ v_2\}$ が V の基底ならば $B' = \{v_1 - v_2,\ v_1 + v_2\}$ も基底であることを証明せよ．

(2) F の基底 B に関する表現行列 A と B' に関する表現行列 A' はどのような関係にあるか詳しく述べよ．

(3) $\dim V = 2$ とし，$v_1,\ v_2$ を F の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2\ (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ に対応する固有ベクトルとする．

(a) $v_1,\ v_2$ は一次独立であることを示せ．

(b) n を自然数とし，F^n を F を n 回合成した写像とする．F^n の $B' = \{v_1 - v_2,\ v_1 + v_2\}$ に関する表現行列を求めよ．

(筑波大 2015)　　(m20151302)

0.46 n 次元実数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ において，内積を標準内積（自然な内積）で定義する．A を n 次直交行列，F を $F(x) = A\boldsymbol{x}$ で定められる $\boldsymbol{R}^n$ の線形変換とするとき，以下の問いに答えよ．なお，$\boldsymbol{R}^n$ のベクトルはすべて列ベクトルとする;

(1) $\boldsymbol{R}^n$ のある正規直交基底を $c_1, \cdots, c_n$ とする．$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ で表すとき，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ の基底 $\{c_i\}$ に関する座標ベクトルは
$\begin{bmatrix} (\boldsymbol{x},\ c_1) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{x},\ c_n) \end{bmatrix}$ で与えられることを示せ．

(2) 直交変換の定義を正確に述べよ（同値な定義のどれでもよい）．また，F が直交変換である（直交変換の定義を満たす）ことを示せ．

(3) A の固有値 λ（実数に限らない）の絶対値は 1 であること $(|\lambda| = 1)$ を示せ．

(筑波大 2015)　　(m20151311)

0.47 正方行列 A に対して $\boldsymbol{x}$ をその固有ベクトル，λ を対応する固有値とする．次の命題を証明しなさい．

(1) 各 $k = 1, 2, \cdots$ について，$A^k\mathbf{x} \neq 0$ のとき $A^k\boldsymbol{x}$ は A の固有ベクトルである．

(2) 行列 A が正則なら $\dfrac{1}{\lambda}$ は A の逆行列の固有値である．

(筑波大 2015)　　(m20151313)

0.48 確率 p で成功し，確率 $1 - p$ で失敗する独立な実験を n 回繰り返す．X_i は i 回目の実験が成功したときに $X_i = 1$，失敗したときに $X_i = 0$ となる確率変数とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 「確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立である」ことの定義を述べよ．

(2) 確率変数 Y が確率 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ で値 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ をとるとき，その期待値を μ，分散を σ^2 とする．このとき任意の実数 λ に対して，「$|Y - \mu| > \lambda\sigma$ となる」確率 $P(|Y - \mu| > \lambda\sigma)$ は以下の不等式を満たすことを，分散 σ^2 の定義を変形することにより示せ．

$$P(|Y - \mu| > \lambda\sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

(3) (2) で得られた不等式を用いて，成功確率が 0.5 の独立な試行を n 回行った時，「成功割合が 40% 以上で，かつ 60% 以下となる」確率が 0.99 以上となるような n の下限（すなわち最低限必要な実験回数）を示せ．

(筑波大 2016)　　(m20161313)

0.49 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする．

(2) A の正規化した固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を求めよ．ただし，$A\boldsymbol{u}_j = \lambda_j \boldsymbol{u}_j \ (j = 1, 2, 3)$ とする．

(3) A を $P^{-1}AP = D$（ただし，P は直交行列，D は対角行列）として対角化したとき，P, P^{-1} および D を求めよ．

(4) (3) で求めた P に対して，$P^{-1}(A + aE)^n P$ を求めよ．ただし，E は 3 次の単位行列，a は実定数，n は正の整数とする．

以下では $AB = BA$ となる 3 次の正方行列 B について考える．

(5) (2) で求めた $\boldsymbol{u}_j \ (j = 1, 2, 3)$ は B の固有ベクトルになることを示せ．

(6) (3) で求めた P に対して，$P^{-1}BP$ が対角行列になることを示せ．

(筑波大 2016)　　(m20161316)

0.50 高々2 次の実係数多項式全体が成す線形空間を $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in R\}$ とする．ただし，R は実数全体の集合であり，x は実数値をとる変数とする．また，多項式 $f(x)$, $g(x)$ の和とスカラー倍は，$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ と定義する．以下の設問に答えよ．

(1) $\{1, 1 + x, x + x^2\}$ は線形空間 V の基底となることを示せ．

(2) 任意の f, $g \in V$ に対して $(f, g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$ なる演算を定義する．この演算 (f, g) は以下の内積の性質それぞれを満たすことを示せ．

① 任意の $f, g \in V$ に対して $(f, g) = (g, f)$

② 任意の $f, g, h \in V$ に対して $(f, g + h) = (f, g) + (f, h)$

③ 任意の $f, g \in V$ と任意の実数 λ に対して $(\lambda f, g) = \lambda(f, g)$

④ 任意の $f \in V$ に対して $(f, f) \geq 0$ で，等号成立は $f(x) = 0$ のときに限る．

(3) (2) で定義した内積 (f, g) のもとで $1, x, 3x^2 - 2$ は直交することを示せ．さらに，$1, x, 3x^2 - 2$ を正規化して V の正規直交基底を 1 組定めよ．

(4) (3) で求めた V の正規直交基底を $\{L_1, L_2, L_3\}$ とする．線形空間 V から 3 次元の数ベクトル空間 R^3 への線形写像 φ を

$$\varphi(1) = c_1, \ \varphi(1 + x) = c_2, \ \varphi(x + x^2) = c_3$$

で定めるとき，$\{L_1, L_2, L_3\}$ と $\{c_1, c_2, c_3\}$ に関する φ の表現行列 A_φ を求めよ．ただし，c_1, c_2, c_3 は R^3 の線形独立な数ベクトルとする．

(5) A_φ の行列式，逆行列を求めよ．

(筑波大 2016)　　(m20161319)

0.51 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする．

(2) A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ に属する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ とするとき，$\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底となるように選ぶことができる．そのように選んだ $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$ を 1 組求めよ．

(3) A を $R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ の形に対角化する直交行列 R，および，その逆行列 R^{-1} を答えよ．

(4) $x,\ y,\ z$ をそれぞれ任意の実数とし，ベクトル $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ で定義する．

また，$\boldsymbol{u}^T = (x \quad y \quad z)$ とする．このとき，$x,\ y,\ z$ を変数とする関数 $f(x,y,z) = \boldsymbol{u}^T A \boldsymbol{u}$ について考える．

(a) (3) で求めた R を用いて新たな変数 $X,\ Y,\ Z$ を $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R^{-1}\boldsymbol{u}$ で定義し，

$f(x,y,z)$ を $X,\ Y,\ Z$ の関数 $f(x,y,z) = F(X,Y,Z)$ と表す．このとき，関数 $F(X,Y,Z)$ を $X,\ Y,\ Z$ の式で表せ．

(b) 任意の $x,\ y,\ z$ に対して，$f(x,y,z) \geq 0$ であることを示せ．また，$f(x,y,z) = 0$ を満たす $x,\ y,\ z$ を求めよ．

(筑波大 2017)　　(m20171303)

0.52　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の多項式 $f(A) = A^5 - A^4 + A^3 - A^2 + A - E$ について，以下の問いに答えなさい．ただし，E は単位行列である．

(1) A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ および固有ベクトルを求めよ．ただし，$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ となるようにとること．

(2) A を $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1}$ と対角化する行列 P，およびその逆行列 P^{-1} を求めよ．

(3) $f(A)$ を求めよ．

(4) $|f(A)|$ を求めよ．

(筑波大 2018)　　(m20181303)

0.53　ラグランジュの未定乗数法を用いて，楕円体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > 0,\ b > 0,\ c > 0$$

に内接する直方体の体積の最大値とそのときの頂点の座標を求めたい．ただし，直方体の各辺は，いずれも x 軸，y 軸，z 軸のどれかに平行であるものとする．

(1) 楕円体に内接する直方体の 8 つの頂点の 1 つを (x,y,z)（ただし，$x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ ）としたとき，3 方向の辺の長さ $l_x,\ l_y,\ l_z$ と，楕円体に内接する直方体の体積 $V(x,y,z)$ を変数 x,y,z を用いてそれぞれの数式として表せ．

(2) 直方体が楕円体に内接するという条件を満たす特異点がないことを示せ．

(3) 体積 $V(x,y,z)$ を最大化する頂点の座標 (x,y,z) とその体積を求めるための，具体的なラグランジュ関数 $F(x,y,z)$ を示せ．ただし，未定乗数を λ とせよ．

(4) (3) で定数化した数式を用いて，楕円体に内接する直方体の体積を最大化する頂点の座標 (x,y,z) とその体積を求めよ．ただし，$x>0,\ y>0,\ z>0$ とする．

(筑波大 2019)　　(m20191310)

0.54 行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ を求めよ．ただし，$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ とする．

(2) 行列 A の正規化した固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ を求めよ．　ただし，$A\boldsymbol{u}_j=\lambda_j\boldsymbol{u}_j\ \ (j=1,\ 2,\ 3)$ とする．

(3) 行列 A を $P^{-1}AP=D$ として，　対角成分が $D_{11}\geq D_{22}\geq D_{33}$ となるように対角化したとき，$P,\ P^{-1}$ および D を求めよ．　ただし，P は直交行列，D は対角行列，　D_{ij} は D の第 i 行 j 列の成分とする．

(4) ベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ が，　$\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)=A\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たすとき，$\boldsymbol{x}(t)$ を求めよ．

(5) ベクトル $\boldsymbol{y}(t)$ が，$\dfrac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{y}(t)=-e^{A}\boldsymbol{y}(t),\ \boldsymbol{y}(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \dot{\boldsymbol{y}}(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たすとき，$\boldsymbol{y}(t)$ を求めよ．ただし，$\dot{y}(t)=\dfrac{d}{dt}y(t)$ とする．

(筑波大 2020)　　(m20201302)

0.55 xy 平面上における 2 次曲線 C

$$4x^2-2\sqrt{3}xy+6y^2=21\ ,$$

について考える．以下の問いに答えよ．

(1) $4x^2-2\sqrt{3}xy+6y^2=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす対称行列 A を求めよ．

(2) A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leqq \lambda_2$ とする．

(3) (2) で求めた各固有値について，正規化された固有ベクトルを求めよ．

(4) A を $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ の形に対角化する直交行列 P，およびその逆行列 P^{-1} を求めよ．

(5) 座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 行うとき，2 次曲線 C を，$x',\ y'$ を用いて表せ．

(6) x' 軸および y' 軸を，それぞれ $x,\ y$ を用いた直線の式で表せ．

(7) 2 次曲線 C の概形を xy 平面上に描け．ただし，図中には x' 軸と y' 軸を明記すること．

(筑波大 2022)　　(m20221304)

0.56 ある店の単位時間あたりの来客数 X は，平均 λ のポアソン分布に従う．すなわち，t 時間あたりの来客数 X_t は，

$$P(X_t=k)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\quad (k=0,1,2,\cdots)$$

に従う．このとき，以下の各問に答えよ．

(1) 来客の発生間隔 T の確率密度関数 $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ $(t>0)$ を導出せよ.

(2) 1 時間平均 1.5 人の来客があるとき，2 時間以上来客が無い確率を求めよ.

(3) 開店時間 t_0 から s 時間来客が無いとき，時刻 t_0+s から初めて客が来るまでの時間 H の確率密度関数を導出せよ.

(筑波大 2022)　　(m20221310)

付表 2

$e^1=2.718$	$e^2=7.389$	$e^3=20.09$	$e^4=54.60$	$e^5=148.4$

0.57 複素数列 $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots)$ を (a_n) と表す．$V=\left\{(a_n)\ \middle|\ a_n\in\mathbb{C}\ \ (n=0,1,2,\cdots)\right\}$ とする．数列の和とスカラー倍を

$$(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n)$$
$$\lambda(a_n)=(\lambda a_n)\qquad(\lambda\in\mathbb{C})$$

で定めることにより V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなす．$\beta\in\mathbb{C}$ とし，

$$W=\left\{(a_n)\in V\ \middle|\ a_{n+3}=a_n+\beta a_{n+1}-\beta a_{n+2}\quad(n=0,1,2,\cdots)\right\}$$

とする．また W の元 $(x_n),\ (y_n),\ (z_n)$ をそれぞれ

$$x_0=1,\quad x_1=0,\quad x_2=0$$
$$y_0=0,\quad y_1=1,\quad y_2=0$$
$$z_0=0,\quad z_1=0,\quad z_2=1$$

を満たすように選ぶ．以下の問いに答えよ.

(1) W が V の部分空間になることを示せ.

(2) $(x_n),\ (y_n),\ (z_n)$ が W の基底になることを示せ.

(3) $F\ :\ W\to W$ を

$$F((a_n))=(b_n),\qquad b_n=a_{n+1}\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

で定める．F が線形写像であることを示せ.

(4) W の基底 $(x_n),\ (y_n),\ (z_n)$ に関する F の表現行列 A を求めよ.

(5) A が対角化可能でないような $\beta\in\mathbb{C}$ をすべて求めよ.

(6) $\beta=-1$ のとき $P^{-1}AP=B$ となる正則行列 P と対角行列 B を 1 組求めよ.

(筑波大 2022)　　(m20221315)

0.58 行列 $A=\begin{pmatrix}3&-2\\1&0\end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値 λ_1 , λ_2 を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(3) $P=\begin{pmatrix}a&b\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$ としたとき，$AP=PB$ となる a,b を定めよ.

(4) (3) の関係を用いて A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする.

(埼玉大 2004)　　(m20041408)

0.59 行列 $A=\begin{bmatrix}1&1\\4&1\end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) 固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ と，それに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2$ を一組求めよ.

(2) 固有ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ を並べて作った行列を $P = [\,\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2\,]$ としたとき，$P^{-1}AP$ を求めよ．

(3) A^n を求めよ．

(埼玉大 2012)　　(m20121404)

0.60　3 次正方行列　$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$　について，以下の各問に答えよ．

(1) A の固有値 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ および対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ を一組求めよ．

(2) ベクトル列 $\boldsymbol{u}_n$ を　$\boldsymbol{u}_n = A^n \begin{bmatrix} \varepsilon \\ -1+2\varepsilon \\ 2+\varepsilon \end{bmatrix}$,　$(n = 0, 1, 2, \cdots)$　で定める．ただし，$\varepsilon = 2^{-100}$ とし，A^0 は単位行列を表す．このとき，$\boldsymbol{u}_n$ を (1) で求めた $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ の一次結合で表せ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，ユークリッドノルムを $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$ とする．(2) で与えた $\boldsymbol{u}_n$ について，以下を調べよ．

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ||\boldsymbol{u}_n||$　　(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{||\boldsymbol{u}_{n+1}||}{||\boldsymbol{u}_n||}$　　(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{u}_n}{||\boldsymbol{u}_n||}$

(d) $\left\| \boldsymbol{u}_n - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| \leq 2^{-10}$ なる n の存在の有無.

(茨城大 2007)　　(m20071707)

0.61　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) 各固有値に対し，固有空間の 1 組の基底を求めよ．

ここで，固有値 λ の固有空間とは，λ の固有ベクトル全体と零ベクトルからなるベクトル空間のことである．

(茨城大 2008)　　(m20081705)

0.62　$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とする．以下の各問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値 λ をすべて求めよ．

(2) A を直交行列によって対角化せよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{x}$ の長さを 1 とする．${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ の値が最大となる $\boldsymbol{x}$ を求めよ．${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す．

(4) n を自然数とするとき，A^n を求めよ．

(茨城大 2012)　　(m20121701)

0.63　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ について，以下の各問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) 行列 A の各固有値の固有空間を求めよ．ここで，固有値 λ の固有空間とは，λ の固有ベクトル全体と零ベクトルからなるベクトル空間のことである．

(茨城大 2020)　　(m20201705)

0.64 λ を 0 でない実数とする．4 次実正方行列 A の固有値はすべて重複し λ であるとする．また，

$$W_1 = \left\{(A - \lambda E)u \;\middle|\; u \in \mathbb{R}^4\right\}$$
$$W_2 = \left\{u \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; (A - \lambda E)u = 0\right\}$$

とおく．ただし，E は 4 次の単位行列，0 は零ベクトルを表す．以下の各問に答えよ．

(1) W_1 および W_2 は $\mathbb{R}^4$ の線形部分空間であることを示せ.

(2) $\dim W_2 = 3$ のとき，$W_1 \subset W_2$ であることを示せ.

(茨城大 2020)　　(m20201709)

0.65 定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta \sin(\lambda x + \mu)dx$ を求め，定数 α，β，λ，μ の式で表しなさい．ただし，$\lambda \neq 0$ とする．

(山梨大 2007)　　(m20071805)

0.66 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 3 \\ 6 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

とおくとき，以下の問に答えよ．

(1) A と B が可換であることを示せ.

(2) A の固有値 λ に属する固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し，$B\boldsymbol{v}$ も A の固有値 λ に属する固有ベクトルであることを示せ.

(3) A, B, C それぞれの固有値と固有ベクトルを求めよ.

(信州大 2012)　　(m20121902)

0.67 V を $\mathbb{C}$ 上の n 次元線形空間とし，$F : V \to V$ を線形写像とする．

(1) $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し，$V(\lambda) = \{x \in V \mid F(x) = \lambda x\}$ は V の部分空間であることを示せ.

(2) λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_k は相異なる複素数とし，各 i に対し，$V(\lambda_i)$ が 0 でない元 x_i を含むとする．このとき，x_1，x_2，$\cdots$，x_k は 1 次独立であることを示せ.

(3) $F^2 = F$ であるとき，F は適当な基底を選べば対角行列で表現できることを示せ．また，F の固有値をすべて求めよ.

(信州大 2020)　　(m20201909)

0.68 自然対数の底を e とする．

(1) 任意の正整数 k に対して，$\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda}\lambda^k = 0$ を証明せよ．

(2) 任意の正整数 n に対して，$g_n(\lambda) = \displaystyle\int_0^\lambda x^n e^{-x} dx$ と置くとき，$g_n(\lambda)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty} g_n(\lambda)$ を求めよ．

(新潟大 1998)　　(m19982003)

0.69 $f(x)=e^{\lambda x}$ として λ を求めることにより，次の微分方程式を解け．但し，a は正の定数である．

$$\frac{d^4}{dx^4}f(x)-a^4 f(x)=0$$

(新潟大 2001)　　(m20012006)

0.70 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値を λ_1 , λ_2 ($|\lambda_1|>|\lambda_2|$) とし，対応する固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ とする．

(1) λ_1 , λ_2 , $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ を求めよ．

(2) 正の実数 a,b をとり，

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

と定める．このとき a,b の選び方によらずに極限値 $L=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ が定まることを示し，その値 L を求めよ．

(新潟大 2002)　　(m20022005)

0.71 2 次元デカルト座標系において，1 次変換 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ を考える．この変換をベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2)^T$ に作用させ，変換後に得られるベクトル $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ の方向が変換前のベクトル $\boldsymbol{x}$ の方向と一致し $\boldsymbol{y}=\lambda\boldsymbol{x}$ のように表せるとき，このベクトル $\boldsymbol{x}$ の成分を求めよ．ただし，ベクトルの長さは $||\boldsymbol{x}||=1$ であるものとする．

(新潟大 2017)　　(m20172007)

0.72 行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{A}$ を対角化する行列 $\boldsymbol{P}$ のうち，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となるものを求めよ．
ただし，$0\leq\theta\leq\pi/2$ とする．また，θ を求めよ．さらに，$\boldsymbol{P}$ を用いて $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ．

(3) 前問 (2) の条件において，$\mathbf{P}^6$ を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222009)

0.73 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ ，$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，次の問に答えよ．

(1) 行列式 $|\lambda I-A|$ が 0 となる λ の値を求めよ．

(2) (1) における λ の値に対して， $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ を満たすベクトル $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ をすべて求めよ．

(金沢大 1999)　　(m19992208)

0.74 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値を $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3(\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\lambda_3)$ とする．$i=1,2,3$ に対して，λ_i に対応する固有ベクトルで，その第 1 成分を 1 としたものを $\boldsymbol{u}_i$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $i=1,2,3$ に対して，λ_i および $\boldsymbol{u}_i$ を求めよ．

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 + c\boldsymbol{u}_3$ を満たす定数 a, b, c を求めよ.

(3) 自然数 n に対して，$A^n\boldsymbol{u}_1$ および $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(金沢大 2008)　　(m20082201)

0.75 任意の x, y, z について, $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y \\ x+z \end{pmatrix}$ となる $3\times\ 3$ 行列 A を考える. 次の問いに答えよ.

(1) A を求めよ.

(2) A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ $(\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ と, それぞれに対応する長さ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ を求めよ.

(3) ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ となる直交行列 P を求めよ. ただし, ${}^tP$ は P の転置行列である.

(金沢大 2010)　　(m20102201)

0.76 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値を $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ $(\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3)$ とする．$i = 1, 2, 3$ に対して，λ_i に対応する固有ベクトルでその第 1 成分が 1 のものを $\boldsymbol{u}_i$ とする．このとき，次の問に答えよ.

(1) $i = 1, 2, 3$ に対して，λ_i および $\boldsymbol{u}_i$ を求めよ.

(2) ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 9 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ をみたす直交行列 P を 1 つ求めよ．ただし，${}^tP$ は P の転置行列である.

(3) ${}^tP\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ．また自然数 n に対して，$A^n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(金沢大 2011)　　(m20112201)

0.77 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して,

$$A\vec{p_i} = \lambda_i\vec{p_i}\ ,\ |\vec{p_i}| = 1\ (i = 1, 2, 3)\ ,\quad \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$$

とする．ここで，$|\vec{p}|$ はベクトル $\vec{p}$ の長さとする．次の問いに答えよ.

(1) $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ を求めよ.

(2) $\vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\ \vec{p}_3$ を求めよ.

(3) $\vec{x} = x_1\vec{p}_1 + x_2\vec{p}_2 + x_3\vec{p}_3$ とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|A^n\vec{x}| = \infty$ となるための $x_1,\ x_2,\ x_3$ の条件を述べよ.

(金沢大 2012)　　(m20122201)

0.78 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の行列式 $\det A$ を求めよ．

(2) $\det A = 0$ とする．

(a) A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \quad (\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ を求めよ．

(b) $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ に対する固有ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{p_1},\ \overrightarrow{p_2},\ \overrightarrow{p_3}$ とする．$\overrightarrow{p_1},\ \overrightarrow{p_2},\ \overrightarrow{p_3}$ を求めよ．

(金沢大 2013)　　(m20132206)

0.79 行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 6 & -6 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値を λ_1，λ_2，λ_3 $(\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ とする．$i = 1, 2, 3$ に対して，λ_i に対応する固有ベクトルでその第 1 成分が 1 のものを $\boldsymbol{u}_i$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $i = 1, 2, 3$ に対して，λ_i および $\boldsymbol{u}_i$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3$ とし，$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \boldsymbol{v}$ とおく．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{z_n}$ を求めよ．

(金沢大 2014)　　(m20142201)

0.80 任意の x, y, z について

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x + y + 4z \\ -4x + 3y + 2z \\ -x + y + z \end{pmatrix}$$

となる $3 \times\ 3$ 行列 A を考える．次の問いに答えよ．

(1) A を求めよ．

(2) A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\ \ (\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ と，それぞれに対応する長さ 1 の固有ベクトル p_1, p_2, p_3 を求めよ．

(3) B を A の逆行列，n を自然数とするとき，B^n の固有値を $\mu_1^{(n)},\ \mu_2^{(n)},\ \mu_3^{(n)}\ \ (\mu_1^{(n)} < \mu_2^{(n)} < \mu_3^{(n)})$ とおく．数列 $a_n = \dfrac{\mu_1^{(n)}\mu_3^{(n)}}{\mu_2^{(n)}}\ \ (n = 1, 2, \cdots)$ に対して，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束発散を調べよ．収束する場合はその値を求めよ．

(金沢大 2015)　　(m20152201)

0.81 A, B を n 次正方行列とする，次のことを示せ．

(1) $\det AB = 0$ のとき，0 はそれぞれ $AB,\ BA$ の固有値である．

(2) $\det AB \neq 0$ のとき，0 は AB の固有値である．

(3) λ が AB の固有値ならば，λ が BA の固有値でもある．

(金沢大 2016)　　(m20162202)

0.82 λ を実数，$t > 0$ とする．このとき，閉領域

$$D_t = \left\{ (x, y) \in R^2 \mid x \geqq\ 0,\ x^2 + y^2 \leqq\ t^2 \right\}$$

上の重積分

$$I(t) = \iint_{D_t} (1 + x^2 + y^2)^{\lambda} dxdy$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) $I(t)$ を具体的に t の式で表せ.

(2) $t \to \infty$ としたとき，$I(t)$ の収束・発散を調べ，収束する場合はその極限値を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162205)

0.83 $7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 1 \cdots (*)$ を次の手順で，(x, y) 平面に図示せよ.

(1) $(*)$ の左辺は $2\times\ 2$ の対称行列 A を用いて，$(x \quad y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すことが出来る．A を求めよ.

(2) A の固有値 $(\lambda_1 < \lambda_2)$，および，長さ 1 の固有ベクトル $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (λ_1に対応)，

$v_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ (λ_2に対応) を求めよ．ただし，$a > 0,\ c > 0$ と選ぶ.

(3) 行列 $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ とおく．$P^{-1}AP$ を計算せよ.

(4) 変数変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ としたとき，(x, y) 平面上の図形は，反時計回りに q ラジアン回転すると (X, Y) 平面上の図形に移る．q を求めよ．また，上記の図形を (X, Y) 平面上で図示せよ.

(5) $(*)$ を (x, y) 平面上で図示せよ.

(金沢大 2016)　　(m20162234)

0.84 行列　$A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 8 \\ 4 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) I を 3 次の単位行列とするとき，A の特性多項式 $\det(\lambda I - A)$ を求めよ.

(2) A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\ (\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ と，それぞれに対応する長さ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3$ を求めよ.

(3) 行列 $A^4 - 10A^2$ を求めよ.

(金沢大 2017)　　(m20172206)

0.85 実数 $t\,(0 < t < 1)$ に対して，集合 R_t を

$$R_t = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ t \leqq x + y \leqq 1\right\}$$

と定める．このとき次の問いに答えよ.

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_{R_t} \frac{dxdy}{x+y}$ の値を求めよ.

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{t\to+0}\iint_{R_t} \frac{dxdy}{(x+y)^\lambda}$ が存在するような，実数 λ の範囲を求めよ.

(金沢大 2018)　　(m20182205)

0.86 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．以下において，I は 3 次の単位行列，O は 3 次の零行列である.

(1) A の特性多項式 $\det(\lambda I - A)$ を求めよ.

(2) A の実数の固有値をすべて求め，各固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ．

(3) $A^3 + aA^2 + bA + cI = O$ を満たす実数 a, b, c を求めよ．

(4) 行列 A^{2018} を計算せよ．

(金沢大 2018)　　(m20182206)

0.87　行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ．

(1) A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ．ただし，$\lambda_1 > \lambda_2$ とする．

(2) λ_1, λ_2 に対する固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ のうちで，長さが 1，第 1 成分が正のものを求めよ．

(3) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ は直交することを証明せよ．

(4) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ とするとき，$\mathbf{x} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2$ をみたす実数 k_1, k_2 を求めよ．

(富山大 2001)　　(m20012306)

0.88　θ を任意の実数，I を単位行列，$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ として，行列 A が $A = (\cos\theta)I + (i\sin\theta)\sigma_1$ で与えられるとき，以下の問いに答えよ．ここで i は虚数単位とする．

(1) ${\sigma_1}^2$ を計算せよ．

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) σ_2 の固有値 λ と固有ベクトル ν を求めよ．

(4) $A\sigma_2A^{-1}$ を計算して σ_2 を対角化するように θ を決定せよ．ただし，θ の範囲を $0 < \theta < \pi/2$ とする．また，このときの θ の値を用いた行列 A により，σ_2 の固有ベクトル ν を変換したベクトル $u = A\nu$ を求めよ．

(富山大 2008)　　(m20082303)

0.89　(1) 正方行列 A, P, D の間に $AP = PD$ の関係があるとき，A^n を P，P^{-1}，D および n を用いて表せ．ただし n は自然数である．また，P は正則行列であるとする．

(2) 次の行列 B は相異なる 3 つの実数の固有値を持つ．これらの固有値および対応する固有ベクトルを求めよ．

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(3) (2) の行列 B において，固有値 λ_1，λ_2，λ_3 の各々に対応する任意の固有ベクトルを

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} q_{1,1} \\ q_{2,1} \\ q_{3,1} \end{pmatrix},\ \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} q_{1,2} \\ q_{2,2} \\ q_{3,2} \end{pmatrix},\ \overrightarrow{x_3} = \begin{pmatrix} q_{1,3} \\ q_{2,3} \\ q_{3,3} \end{pmatrix}$$

とし，行列 Q を

$$Q = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix}$$

としたとき

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

となる．この性質を利用し，(1)，(2) の結果をもとに B^n を求めよ．

(富山大 2019)　　(m20192304)

0.90　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ がある．

(1) 行列 A の固有値を λ とすると，λ は $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ を満たさなければならないことを示しなさい．

(2) 前問の行列 A の固有値を求めなさい．

(3) その行列 A の固有ベクトルを求めなさい．

(福井大 2000)　　(m20002416)

0.91　行列 A の固有値 λ と固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ に関する設問である．

(1) A，λ，$\boldsymbol{x}$ の間に成り立つ関係を示せ．

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ．

(3) (2) の解に対応する固有ベクトルを一つ示せ．

(福井大 2006)　　(m20062422)

0.92　行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を λ，固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする時，以下の問いに答えよ．

(1) $A, \lambda, \boldsymbol{x}$ の間に成立する関係を示せ．

(2) 固有値を求めよ．

(3) 各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(福井大 2008)　　(m20082420)

0.93　次の式を行列の一次変換によって簡単な式に変換したい．以下の問に答えよ．

$$2x^2 + 6xy + 2y^2 = 1 \ \cdots\cdots ①$$

行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 3 \\ s & a_{22} \end{bmatrix}$ を用いると，式 ① を次式のように表現できる．

ここで，a_{11}，a_{22}，S は定数である．

$$1 = 2x^2 + 6xy + 2y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A を求めよ．

(2) 行列 A の固有値 λ_1 と λ_2 及びそれらに対応する単位長さの固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$（いずれも列ベクトル）を求めよ．ただし，$\lambda_1 > \lambda_2$ とする．

(3) 列ベクトル $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ からなる行列 $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{bmatrix}$ とおく．$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ によって式 ① を X と Y の方程式に変換せよ．

(福井大 2015)　　(m20152409)

0.94 次式に与えられる行列 A について，以下の問いに答えよ．(4) 以外については計算の課程も示すこと．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値を λ として，固有方程式を“ $(1-\lambda)$ の多項式 $=0$ ”の形に表せ．

(2) A の固有値を全て求めよ．固有方程式“ $(1-\lambda)$ の多項式 $=0$ ”の左辺をどのように因数分解したのかがわかるように解答すること．

(3) A の固有値を λ_1, λ_2, λ_3, $(\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ とする．固有値 λ_n に対応する正規化（規格化）された固有ベクトル $\boldsymbol{u}_n$ を以下の形で求めよ．

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ \square \\ \square \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ \square \\ \square \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$$

(4) 以下の空欄を生めよ．ただし，(あ) と (い) には数値，(う) と (お) には語句，(え) には行列が入る．なお，$\boldsymbol{u}_n \cdot \boldsymbol{u}_m$ は $\boldsymbol{u}_n$ と $\boldsymbol{u}_m$ の内積，${}^tP$ は P の転置行列を表す．3 つの固有ベクトル $\boldsymbol{u}_n$ の長さは全て $\boxed{\text{(あ)}}$ であり，さらに $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1 = \boxed{\text{(い)}}$ である．従って，行列 $P = (\boldsymbol{u}_1\, \boldsymbol{u}_2\, \boldsymbol{u}_3)$ は $\boxed{\text{(う)}}$ 行列である．よって，${}^tP$ と $\boxed{\text{(え)}}$ の積は単位行列となる．なお，P が $\boxed{\text{(う)}}$ 行列であるのは A が $\boxed{\text{(お)}}$ 行列であることの必然的な結果である．

(5) P^{-1} を求めよ．

(6) $P^{-1}A^2P$ を求めよ．

(福井大 2016)　　(m20162419)

0.95 (1) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

は 3 個の固有値 λ_1, λ_2, λ_3 を持つ．ただし，$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ とする．λ_1, λ_2, λ_3 を求めよ．

(2) (1) で求めた固有値 λ_1, λ_2, λ_3 に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ を求めよ．

(3) (2) で求めた固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ をそれぞれ 1 列目，2 列目，3 列目に持つ行列を P とする．P の逆行列 P^{-1} を求めよ．

(福井大 2018)　　(m20182422)

0.96 次式は，1 質点 1 自由度モデルの自由振動の運動方程式である．なお，m:質量，c:減衰係数，k:剛性であり，$x(t)$: 時間 t の関数である変位である．

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

(1) 両辺を m で除し，$\omega^2 = \dfrac{k}{m}$，$2h = \dfrac{c}{m\omega}$ とおいて，上式を書き換えなさい．

(2) a をゼロでない定数とするとき，$x(t) = ae^{\lambda t}$ が運動方程式の解となるための条件を示せ．

(3) 上の結果を利用して $x(t)$ の一般解を示せ．

(4) $0 < h < 1$ の時，(3) で得られた解を，三角関数を用いて表せ．

(福井大 2020)　　(m20202433)

0.97 正方行列 A がある．ベクトル $\boldsymbol{\varphi}$ が行列 A の固有値 λ に属する固有ベクトルである ($A\boldsymbol{\varphi} = \lambda\boldsymbol{\varphi}$) とき，以下の問いに答えよ．ただし，$I$ は A と同じ次数の単位行列とする．

(1) ベクトル $-\boldsymbol{\varphi}$ も行列 A の固有値 λ に属する固有ベクトルであることを示せ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{\varphi}$ は行列 $A + I$ の固有値 $\lambda + 1$ に属する固有ベクトルであることを示せ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{\varphi}$ は行列 A^2 の固有値 λ^2 に属する固有ベクトルであることを示せ.

(福井大 2021) (m20212413)

0.98 次式は，単振動の運動方程式である．なお，m : 質量，k : バネ定数，x : 変位，t : 時間である．

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

(1) $x = e^{\lambda t}$ が運動方程式の解になるための条件を示せ.

(2) 上の結果を利用して x の一般解を示せ.

(3) (2) で得られた解を，三角関数を用いて表せ.

(福井大 2021) (m20212429)

0.99 方程式 ${x_1}^2 + 2x_1x_2 + 3{x_2}^2 = 1$ によって表される R^2 内の図形を次のやり方にしたがって求めよ.

(1) 方程式 ${x_1}^2 + 2x_1x_2 + 3{x_2}^2 = (x_1, x_2)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ となる対称行列 A を求めよ.

(2) A のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) ２次の直交行列 P を使って，PAP^T が対角行列（Λ とする）となるようにしたい．ただし，^{T} は, 転置行列を表す．直交行列 P とこの対角行列 Λ を求めよ.

(4) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ によって座標変換を行ない，(y_1, y_2) 座標で先の方程式で表される図形の概形を描きなさい.

(5) (4) の図形の中に，(x_1, x_2) 座標の座標軸を書き入れなさい.

(岐阜大 2005) (m20052613)

0.100 次の 2 行 2 列の行列 A $\quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) この行列 A の固有値 λ を求めよ.

(2) 上記 (1) の固有値 λ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{X}$ を求めよ.

(岐阜大 2008) (m20082601)

0.101 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ がある．以下の問いに答えよ.

(1) この行列の 2 つの固有値 λ_1 と λ_2 を求めよ.

(2) A^{100} を求めよ.

(岐阜大 2008) (m20082604)

0.102 式（イ）,（ロ）,（ハ）に関して各問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{（イ）}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{（ロ）}$$

$$z = 3x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 4\sqrt{3}x + 4y \qquad \text{（ハ）}$$

(1) 式（イ）の A の行列式を求めよ.

(2) 式（ロ）の固有値 λ を求めよ.

(3) 式（ロ）の固有ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めよ.

(4) x, y, z で表される 2 次曲面（ハ）を x, y, z に関して座標変換し，標準形で表せ．標準形とは，楕円面, 一葉双曲面, 二葉双曲面, 楕円放物面, 二次すい面を指す.

(豊橋技科大 1999)　　(m19992708)

0.103　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda_1 = -1$ と $\lambda_2 = 5$ である．以下の問に答えよ.

(1) A の固有値が $\lambda_1 = -1$ と $\lambda_2 = 5$ であることを示せ.

(2) 固有値 λ_1 に対する固有空間 W_1 の基底と次元を求めよ.

(豊橋技科大 2006)　　(m20062705)

0.104　行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -18 & -7 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ，ただし，$\lambda_1 > \lambda_2$ とせよ.

(2) 各固有値 λ_1, λ_2 に対する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ とするとき，a と b を求めよ.

(3) (2) で求めた固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を用いて，行列 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ を定義する． このとき，$\boldsymbol{PQ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる行列 $\boldsymbol{Q}$ を求めよ.

(4) 行列 $\boldsymbol{QAP}$ を求めよ.

(5) 自然数 n に対して，$\boldsymbol{QA}^n\boldsymbol{P}$ を求めよ.

(豊橋技科大 2008)　　(m20082702)

0.105　$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満足するベクトル $\boldsymbol{x}$ の大きさ（長さ）$|\boldsymbol{x}|$ を求めよ.

(3) A の固有値 λ_1 と λ_2 を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leqq \lambda_2$ とする.

(4) n を正の整数 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とするとき，A^n を求めよ.

(豊橋技科大 2013)　　(m20132705)

0.106　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 $(\lambda_1 < \lambda_2)$ を求めよ.

(2) 任意の自然数 n に対して，$A^{n+1} = 3A^n - 2A^{n-1}$ が成り立つことを示せ．ただし，$A^0 = E$ とする.

(3) 実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ を

$$A^{n+1} - \lambda_1 A^n = a_n A + b_n E, \quad A^{n+1} - \lambda_2 A^n = c_n A + d_n E \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める．ただし，λ_1, λ_2 を (1) で求めた A の固有値とする．このとき，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．

(4) A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(豊橋技科大 2023) (m20232701)

0.107 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解いて, $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(2) 行列 A の 3 つの固有値 $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ と, 対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ を求めよ. ただし, 固有ベクトルは, 第 3 成分が 1 となるようにして示せ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ. そして, $P^{-1}A^nP$ を求めよ.

(名古屋大 2005) (m20052801)

0.108 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ に関して，以下の設問に答えよ.

(1) A の固有値 λ と固有ベクトルを求めよ.

(2) A^m（m は自然数）を求めよ.

(名古屋大 2015) (m20152801)

0.109 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して，以下の各問に答えよ．ただし，$a \geq 0$ である．

(1) A の二つの固有値 λ_1 , λ_2 を求めよ．

(2) λ_1 , λ_2 にそれぞれ対応する固有ベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ のどちらにも直交するベクトルは 0 ベクトルのみであることを示せ．

(3) 上の問 (2) における固有ベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ が互いに直交するときの a の値を求めよ．

(名古屋工業大 1998) (m19982907)

0.110 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{9}{8} & 1 \end{pmatrix}$$

について以下の問に答えよ．

(1) A の二つの固有値 λ_1 , λ_2 と，それぞれの固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトル $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ を求めよ．

(2) 一つのベクトル $\mathbf{x}$ は，$\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ を用いて

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{p}_1 + \beta\mathbf{p}_2$$

と書ける．このことを用いると，$A^n\mathbf{x}$ は，λ_1 , λ_2 $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ を用いてどのように表すことができるか．α , β は，実数である．

(3) 一つのベクトル $\mathbf{x}$ に対して，

$$A\mathbf{x}\,,\ A^2\mathbf{x}\,,\ \cdots\,,\ A^n\mathbf{x}\,,\ \cdots$$

なるベクトルの列は，二次元平面上の点列を表すが，この点列の挙動は，$\mathbf{x}$ の取り方によって異なるものになる．このことを，(1) と (2) で求めたことを用いて論じよ．

(名古屋工業大 1999)　　(m19992907)

0.111 次の行列 A と P について，問 (1) と (2) に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) (1) で求めた固有値を $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ $(\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3)$ とする．このとき行列 P が直交行列で，かつ次を満たすように a, b, c を求めよ．

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2012)　　(m20122902)

0.112 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

の固有値を $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ $(|\lambda_1| \leqq |\lambda_2| \leqq |\lambda_3|)$ とするとき，次をみたす正則行列 P をひとつ求めよ．

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2014)　　(m20142904)

0.113 (1) 平均 0, 分散 1 の正規分布 $f(x)$ に関する以下の問に答えよ．

(a) $f(x)$ の極大点における x と $f(x)$ の値を求めよ. また, $f(x)$ の変曲点 $(f''(x) = 0)$ における x と $f(x)$ の値を求めよ．

(b) $f(x)$ のグラフを図示せよ．

(2) 確率変数 X と Y に関する以下の問に答えよ．

(a) 任意の実数 λ に対して次の関係が成り立つことを示せ．

$$E[\{\lambda(X - \mu_x) + (Y - \mu_y)\}^2] = \lambda^2\sigma_x^2 + 2\lambda\sigma_{xy} + \sigma_y^2$$

ここで, $E[X]$ は X の期待値を表し,

$$\begin{aligned} \mu_x &= E[X] \\ \mu_y &= E[Y] \\ \sigma_x^2 &= E[(X - \mu_x)^2] \\ \sigma_y^2 &= E[(X - \mu_y)^2] \\ \sigma_{xy} &= E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] \end{aligned}$$

とする．

(b) $E[\{\lambda(X - \mu_x) + (Y - \mu_y)\}^2] \geq 0$ となることを示せ．

(c)　(a) , (b) の関係を利用して相関係数 ρ_{xy} が -1 から 1 の間の値を取ることをとる示せ.
ただし, $\sigma_x^2\sigma_y^2 \neq 0$ とする.

(三重大 2004)　　(m20043115)

0.114　(1)　複素行列 $\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1 , λ_2 を求めよ.
ここで, a , b , c , d は実数であり (ただし, $c \neq 0$) , $i^2 = -1$ である.

(2)　λ_1 , λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を求め, エルミート内積 $(\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2) = \sum_{j=1}^{2} x_{1j}{}^* x_{2j}$ を計算せよ. ただし, x_{ij} は $\boldsymbol{x}_i$ の j 成分であり $(i, j = 1, 2)$, α^* は α の複素共役を表す.

(三重大 2005)　　(m20053110)

0.115　次の固有方程式の固有値を求めよ.　$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

(三重大 2006)　　(m20063104)

0.116　確率密度が　$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$　で与えられる分布について，次の問に答えよ.

(1)　この分布の平均を求めよ.　　(2)　この分布の分散を求めよ.

(3)　この分布のモーメント母関数を求めよ.

(三重大 2006)　　(m20063117)

0.117　(1)　複素行列 $\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1 , λ_2 を求めよ．ここで，a, b, c, d は実数であり（ただし，$c \neq 0$），$i^2 = -1$ である.

(2)　λ_1 , λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を求め，エルミート内積 $(\boldsymbol{x}_1\ \ \boldsymbol{x}_2) = \sum_{j=1}^{2} x_{1j}^* x_{2j}$ を計算せよ．ただし，x_{ij} は $\boldsymbol{x}_i$ の j 成分であり $(i, j = 1, 2)$，α^* は α の複素共役を表す.

(三重大 2006)　　(m20063118)

0.118　$\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ x-3y & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4y+6z & 0 \\ z & 2z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ を満たす全ての λ と, それぞれの λ について x, y, z の比 $x : y : z$ を求めよ. ただし, x, y, z は全ては 0 でないとする.

(三重大 2007)　　(m20073102)

0.119　3 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ において, 3 個のベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = {}^t(1,0,1)\,, \quad \boldsymbol{e}_2 = {}^t(2,1,0)\,, \quad \boldsymbol{e}_3 = {}^t(0,0,1)$$

を考える. 以下の問いに答えなさい. ここで, 上付き添え字 ^{t} は転置を表す.

(1)　方程式 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \lambda_3\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0}$ から λ_1, λ_2, λ_3 を未知数とする連立方程式を導出しなさい.

(2)　(1) の連立方程式を解くことにより, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ が互いに一次独立であることを示しなさい.

(3)　$\boldsymbol{R}^3$ の任意のベクトル $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, a_2, a_3)$ を $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ の線形結合で一意に表せることを証明しなさい.

(三重大 2007)　　(m20073112)

0.120　以下の問に答えなさい.

(1) 次の行列 A の固有値 λ_1, λ_2 とそれぞれの固有値に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ をひとつ求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) 問 (1) で求めた固有ベクトルからなる行列 $P = (\boldsymbol{x}_1 \ \ \boldsymbol{x}_2)$ を用いて，$P^{-1}AP$ を求めなさい.

(3) n が正の整数のとき，問 (2) の結果を利用して，A^n を求めなさい.

(三重大 2011)　　(m20113115)

0.121 以下で与えられる 3 次正方実数行列 A と可換な 3 次正方実数行列 X を下記 (1)〜(3) の手順により求めなさい．ここで λ および β は任意の実数とする.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & \beta & 0 \\ 0 & \lambda & \beta \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

(1) 3 次単位行列 E は，任意の 3 次正方行列と可換であることを示しなさい.

(2) 行列 A を，E と以下に示す行列 F の線形結合の形で表しなさい.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) 上記の (1) および (2) の結果を用いて，行列 A と可換な行列 X を求めなさい.

(三重大 2012)　　(m20123107)

0.122 二つの実数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ が，$a_{n+1} = a_n + 2b_n \quad b_{n+1} = -a_n + 4b_n$ を満たす．ただし，$a_0 = 1$, $b_0 = -1$ である．以下の問いに答えなさい.

(1) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ を満たす行列 A を求めなさい.

(2) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 とそれぞれの固有値に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を求めなさい.

(3) 問 (2) で求めた固有ベクトルから行列 $P = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ を用いて，$P^{-1}AP$ を求めなさい.

(4) 問 (3) の結果を利用して，A^n を求めなさい.

(5) 実数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めなさい.

(三重大 2013)　　(m20133109)

0.123 行列に関する以下の問に答えよ.

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ のとき，積 AB および BA を求めよ.

(2) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$ を満たす実数 λ とベクトル $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$ を求めよ．ただし，$x^2 + y^2 = 1$ とする.

(三重大 2013)　　(m20133112)

0.124 3 次の実対称行列

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ.

(1) 行列 P の固有値 λ_i $(i=1,2,3)$ と対応する単位固有ベクトル v_i $(i=1,2,3)$ を求めなさい．
ただし，$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3$ を満たすものとする．

(2) VV^T を求めなさい．ただし，

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

である．

(3) 行列 P は固有値・固有ベクトルに対して，$PV = VA$ が成り立つ．ここで，

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

である．このとき，$P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$ を満たす行列 P_1，P_2，P_3 が存在することが知られている．行列 P_1，P_2，P_3 を求めなさい．

(4) 0 以上の整数 n に対して P^n を求めなさい．

(三重大 2020)　　(m20203111)

0.125　2 次曲線 C：$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$ について，以下の問に答えなさい．

(1) ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とすると，与えられた 2 次曲線 C は 2 次の対称行列 $\boldsymbol{A}$ を用いて ${}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 4$ と表現可能である．行列 $\boldsymbol{A}$ を求めなさい．ただし，${}^t\boldsymbol{x}$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ の転置を表すこととする．

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ は 2 つの固有値を持つ．この固有値 λ_1，λ_2 とそれぞれの固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ を求めなさい．ただし，$\lambda_1 < \lambda_2$，$\boldsymbol{u}_1$ の第 1 成分は正，$\boldsymbol{u}_2$ の第 1 成分は負であるとする．

(3) 行列 $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2]$ およびベクトル $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ であるとき，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{X}$ で与えられる変換を考える．このとき，xy 平面上の 2 次曲線 C は，XY 平面上で 2 次曲線 C' に変換される．2 次曲線 C' の式を X，Y を用いて表しなさい．

(三重大 2022)　　(m20223103)

0.126　式 (a) の微分方程式について以下の問いに答えよ．

$$\frac{dI(t)}{dt} + \lambda I(t) = v_0 \quad \cdots \quad (a)$$

ここで，$t \geq 0$，λ は正の定数，v_0 は正または 0 の定数である．

(1) $v_0 = 0$ の解は任意定数 C を用いて以下のように与えられることを示せ．

$$I(t) = C\exp(-\lambda t)$$

(2) $v_0 \neq 0$ の解は定数 C が時間に依存するものとして式 (a) に代入することによって得られる．初期条件 $I(0) = 0$ を満たすような解を求め，$I(t)$ を t の関数として図示せよ．

(奈良女子大 2001)　　(m20013208)

0.127　$y(\rho)$ に関する 2 階の常微分方程式

$$\frac{d^2y(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dy(\rho)}{d\rho} + \left\{1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right\} y(\rho) = 0$$

を考える. ここで, 変数 ρ の範囲は，$0 \leq \rho < \infty$ であり，l は正の整数である．

(1) いま, $y(\rho)$ を

$$y(\rho)=\frac{u(\rho)}{\rho}$$

とおいて, この方程式に代入すると, $u(\rho)$ についての方程式

$$\frac{d^2u(\rho)}{d\rho^2}+p(\rho)u(\rho)=0 \qquad (a)$$

が得られる. このときの $p(\rho)$ を求めよ.

(2) つぎに, (1) で得られた方程式 (a) の $\rho\to\infty$ および $\rho\to 0$ の極限における $u(\rho)$ の漸近解を求めてみよう.

(a) $\rho\to\infty$ のとき $p(\rho)$ 近似形を求め, $u(\rho)$ の漸近形が満たす方程式をかけ. また, このときの $u(\rho)$ は, λ をパラメータとして

$$u(\rho)=e^{\lambda\rho}$$

の形で与えられる. この方程式から λ を求め, $u(\rho)$ の一般解を求めよ.

(b) $\rho\to 0$ のとき $p(\rho)$ 近似形を求め, $u(\rho)$ の漸近形が満たす方程式をかけ. また, このときの $u(\rho)$ は, λ をパラメータとして

$$u(\rho)=\rho^{\lambda}$$

の形で与えられる. この方程式から λ を求め, $u(\rho)$ の一般解を求めよ.

(奈良女子大 2004) (m20043205)

0.128 3 次元空間の 0 でないベクトル $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ があり, それらの間の内積（スカラー積）が

$$\overrightarrow{a_i}\cdot\overrightarrow{a_j}=\begin{cases}|\overrightarrow{a_i}|^2 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

で与えられている. ただし, i, $j=1,2,3$ で, $|\overrightarrow{a_i}|$ はベクトル $\overrightarrow{a_i}$ の大きさである. 以下の問いに答えよ.

(1) λ_1, λ_2, λ_3 を係数とする方程式

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\lambda_3\overrightarrow{a_3}=0$$

が, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ のときのみ成り立つ場合, $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ は線形独立なベクトルであるという. 実際に, $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ が線形独立であることを示せ.

(2) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ に対して,

$$\overrightarrow{a_1}\cdot(\overrightarrow{a_2}\times\overrightarrow{a_3})=\overrightarrow{a_2}\cdot(\overrightarrow{a_3}\times\overrightarrow{a_1})=\overrightarrow{a_3}\cdot(\overrightarrow{a_1}\times\overrightarrow{a_2})$$

が成り立つことを示せ. ただし, $\overrightarrow{a_i}\times\overrightarrow{a_j}$ は $\overrightarrow{a_i}$ と $\overrightarrow{a_j}$ のベクトル積である.

（奈良女子大 2004） (m20043209)

0.129 次の 2 行 2 列の行列 $F(\theta)$ について以下の問に答えよ.

$$F(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

(1) $F(\theta)$ について次の関係が成立することを示せ.

$$F(\theta_1)F(\theta_2)=F(\theta_1+\theta_2)$$

(2) 行列 A を次の 2 行 2 列の行列であるとする.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき, $F(-\theta)AF(\theta)$ が対角行列 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ の形になる θ の値と, そのときの対角要素 λ_1 , λ_2 を求めよ.

(奈良女子大 2005)　　(m20053204)

0.130 変数 t の関数 $x(t)$ の満たす微分方程式に関する以下の問いに答えよ.

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + {\omega_0}^2 x = 0$ 　ここで, ω_0 は正の定数とする.

(2) 次の微分方程式を考える. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\dfrac{dx}{dt} + {\omega_0}^2 x = 0$ 　ここで, ω_0 および λ は正の定数とする.
$\lambda^2 - {\omega_0}^2 = -\omega^2 < 0$ 　(ω : 正の定数) である場合の一般解を求めよ.

(3) (1) および (2) の微分方程式で記述できると思われる物理現象の例を一つずつあげよ.

(奈良女子大 2008)　　(m20083207)

0.131 微分方程式に関する以下の問いに答えよ.

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{dy}{dx} = (y+1)(x^2+2x)$$

(2) 解の形として $x = ae^{i\omega t}$ を仮定し, 以下に示す手順で微分方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \lambda\frac{dx}{dt}$$

を解く. ここで, a は正の実定数で ω は複素定数とする.

(a) $\dfrac{dx}{dt}$ を計算し, それを x を用いて表せ.

(b) $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ を計算し, それを x を用いて表せ.

(c) ω が満たすべき方程式を導け.

(d) 上で求めた方程式を解くことによって, ω を求めよ.

(奈良女子大 2014)　　(m20143203)

0.132 次の 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ $(\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3)$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の値を求めよ.

(2) 次の等式が成り立つような正則行列 P を求めよ.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2016)　　(m20163201)

0.133 xy 座標で多項式 $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$ で表される曲線を考える．

(1) この式は実数の定数 a, b, c を成分に持つ $2\times\ 2$ 対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

を使って，

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

と書き換えることができる．行列 A を求めよ．

(2) 行列 A は異なる 2 つの実数の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ をもつ ($\lambda_1 < \lambda_2$ とする)．$\lambda_1,\ \lambda_2$ を求めよ．

(3) 前問で得られた固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ の固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ とする．$\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ が直交していることを示せ．

(4) $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ をそれぞれ長さ 1 になるように決めて，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X\boldsymbol{e}_1 + Y\boldsymbol{e}_2$$

によって新しく XY 座標を定義する．問題で与えた多項式を XY 座標で表し，もとの xy 座標で曲線のグラフをかけ．

(奈良女子大 2016)　　(m20163208)

0.134 時間 t ($t \geqq 0$) の関数 $N_1(t)$ および $N_2(t)$ に関する以下の連立微分方程式についての問いに答えよ．ただし，$\lambda_1,\ \lambda_2$ は時間に依存しない正の定数とする．

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_1 N_1(t) \\ \dfrac{dN_2(t)}{dt} = -\lambda_2 N_2(t) + \lambda_1 N_1(t) \end{cases}$$

(1) $N_1(t)$ を求めよ．ただし，$N_1(t)$ の初期値は $N_1(0)$ とする．

(2) 時間 t を横軸にとり，$N_1(t)$ のグラフの概形を描け．

(3) $N_2(t) = e^{-\lambda_2 t}C(t)$ とおいて $C(t)$ についての微分方程式を導出せよ．

(4) $C(t)$ についての微分方程式を解き，$N_2(t)$ を求めよ．ただし，$N_2(t)$ の初期値はゼロとする．

(奈良女子大 2018)　　(m20183206)

0.135 (1) 行列 A，固有値 λ，それに対応する固有ベクトル x の間の関係式を書け.

(2) 行列 A，固有値 λ が満たすべき方程式を固有方程式という．固有方程式を書け.

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，A の固有値を求めよ.

(4) (3) の固有値に対する固有ベクトルの中で，互いに直交な単位ベクトルを求めよ.

(京都大 2000)　　(m20003302)

0.136 n 行 n 列の行列 A が対角化可能とは，ある正則行列 P とその逆行列 P^{-1}，および，ある対角行列 Λ を用いて

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

と表現できることである.

(1) 対角化可能な行列 A があるとき，これを対角化する手順について説明せよ．

(2) 次で与えられる 3 行 3 列の行列 A を実際に対角化し，行列 P と対角行列 Λ を与えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(京都大 2002)　　(m20023303)

0.137 次の行列 A に対して，(1)〜(3) に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ただし，I は 3 次の単位行列，$\mathbf{0}$ は 3 次元の零ベクトルを表す．

(1) 行列 A の固有値とその固有ベクトルの組 $(\lambda, \boldsymbol{p})$ の中で

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{q} \neq \mathbf{0}$$

が成立するベクトル $\boldsymbol{q}$ が存在するような組を 1 つ求めよ．

(2) (1) の結果を用いて，$AP = PB$ が成立するような上三角行列 B と正則行列 P を求めよ．

(3) (2) の結果を用いて，A^n の各成分を n の式で表せ．

(京都大 2008)　　(m20083304)

0.138 $\boldsymbol{R}^n$ において定義された実数値関数 F が凸関数であるとは, 任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ と任意の $\lambda(0 < \lambda < 1)$ とに対し, 次の不等式が成り立つことである．

$$F(\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}) \leq \lambda F(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda)F(\boldsymbol{y})$$

特に, A を実対称行列として, $F(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x} \rangle$ とおく. ただし, $\langle\ ,\ \rangle$ は $\boldsymbol{R}^n$ の標準内積を表す．

(1)〜(2) に答えよ．

(1) 次の 3 条件は同値であることを示せ．

(a) $F(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x} \rangle$ は凸関数である．

(b) 任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して, $\langle \boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{y},\ A\boldsymbol{y} \rangle \geq 2\langle \boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{y} \rangle$ が成り立つ．

(c) 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して, $\langle \boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x} \rangle \geq 0$ が成り立つ．

(2) A をさらに正定値対称行列とし, 閉領域 D を $D = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid F(\boldsymbol{x}) \leq k\}$ で定義する. ただし, $k > 0$ は定数. このとき D は凸集合であることを証明せよ. すなわち, 任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in D$ と任意の $0 \leq \lambda \leq 1$ とに対して, $\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in D$ が成り立つことを示せ．

(京都大 2010)　　(m20103304)

0.139 　患者が薬を服用すると，薬はすべて直ちに血流中に吸収され，それ以降，時間の経過とともに，血流中の薬の量は減少する．「単位時間に減少する薬の量は，その薬の血流中の現在量に比例する」ものとしよう．

薬の服用に関する次の問 (1)〜(3) に答えよ．

(1) 時刻 t における血流中の薬の量を $y(t)$ と表し，患者が時刻 $t = 0$ に，はじめて一度だけ，この薬を y_0 服用したとする．

(a) 薬の量 $y(t)$ が満たすべき微分方程式が，$y'(t) + \lambda y(t) = 0$（λ は比例定数）で表されることを示せ．

(b) $y(0) = y_0$ として，(a) の微分方程式を解け．

(c) 血流中の薬の量が，時刻 $t = 0$ に服用した薬の量の $\dfrac{1}{n}$（n は正定数）になる時刻を求めよ．

(2) この薬を，時刻 $t = 0$ に，はじめて y_0 服用し，その後も，同一量 y_0 を一定の時間間隔 T で繰り返し服用していくものとしよう．

(a) 毎回の服用直後，すなわち，時刻 $t = mT$（m は非負整数）での服用直後の血流中の薬の量を求めよ．

(b) m が大きくなると，服用直後の血流中の薬の量は，ある飽和レベル量 y_s に達する．この y_s を求めよ．

(3) この薬を，時刻 $t = 0$ に，はじめて Y 服用し，その後は，一定の時間間隔 T 毎に y_d を服用していくものとしよう． 2 回目以降の服用直後の血流中の薬の量が Y となるようにするには， 2 回目以降の毎回の服用量 y_d をいくらにすれば良いか．

(京都大 2013)　　(m20133301)

0.140 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の固有方程式の重解を λ_0 とする．固有値 λ_0 に対応する 2 つの固有ベクトルで，正規直交系をなすものを 1 組求めよ．

(京都工芸繊維大 2008)　　(m20083401)

0.141 E を 3 次の単位行列とし，$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の実固有値のうちで最小のものを λ とする．λ に対する固有ベクトル $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を 1 つ求めよ．

(3) $B = A^7 + 5A^4 + E$ とおく．(2) で求めたベクトル $\vec{v}$ が B の固有ベクトルになることを示し，$\vec{v}$ に対する B の固有値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2012)　　(m20123401)

0.142 A を正則行列とする．A の固有値の一つが λ のとき，$\frac{1}{\lambda}$ が A の逆行列 A^{-1} の固有値になることを示せ．

(大阪大 2001)　　(m20013507)

0.143 X, Y は独立で，いずれも平均 0，分散 σ^2 を持つ確率変数であり，s, t, λ は実定数とする．2 つの確率変数

$$S = X\cos\lambda s + Y\sin\lambda s, \quad T = X\cos\lambda(s+t) + Y\sin\lambda(s+t)$$

を考えるとき，次の問に答えよ．

(1) S, T の平均，分散，共分散を求めよ．

(2) S, T の相関係数を求めよ．

(大阪大 2001)　　(m20013509)

0.144 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問に答えよ.

(1) λ を実数とするとき, 行列式 $|\lambda A - B|$ を極大ないし極小とする λ の値をすべて求めよ.

(2) 方程式 $\lambda A\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = B\overrightarrow{\boldsymbol{x}}$ が $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \overrightarrow{\boldsymbol{o}}$ 以外のベクトルを解に持つときの λ の値と対応する解 $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}$ をすべて求めよ. ただし, $\overrightarrow{\boldsymbol{o}}$ は零ベクトルである.

(大阪大 2005) (m20053501)

0.145 X と Y は独立な確率変数で共に次の指数分布に従うものとする．すなわち，分布密度関数が
$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$ であるものとする．ただし，$\lambda > 0$.

(1) $X < Y$ となる確率 $P(X < Y)$ を求めなさい．

(2) $\min\{X, Y\}$ の分布密度関数を求めなさい．ただし，$\min\{x, y\}$ は x と y のうち，大きくない方を表す．

(3) $a < b < 0$ のとき，確率 $P(a < X - Y < b)$ を求めなさい．

(大阪大 2006) (m20063511)

0.146 対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．ただし，a, b および c は実数であり，また，$b \neq 0$ である.

(1) 実数の固有値が 2 個存在することを示せ.

(2) 相異なる固有値に属する固有ベクトルが互いに直交することを示せ.

(3) 行列 A は対称行列であるので，適当な直交行列 U によって対角化される．この直交行列 U を使った $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ という一次変換によって，$(x \quad y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が $\lambda_1 v^2 + \lambda_2 w^2$ となることを示せ．ただし，λ_1 および λ_2 は行列 A の相異なる固有値である.

(4) (3) の関係を利用して $2x^2 - 2xy + 2y^2$ を $\lambda_1 v^2 + \lambda_2 w^2$ の形にしたい．このときの λ_1 および λ_2 を求めよ.

(大阪大 2008) (m20083508)

0.147 (1) A および B を n 次実対称行列とする．n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ についての方程式 $\lambda A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}$ が実数 $\lambda = \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3, \cdots,\ \lambda_n$ のときに $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ である解をもつとする．$\lambda_i\ (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$ に対応する解を $\boldsymbol{x}_i$ とする．$\lambda_i \neq \lambda_j$ のとき，${}^t\boldsymbol{x}_i A\boldsymbol{x}_j = 0$ となることを示せ。 ただし，${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す.

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるとき，上の方程式が $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ であるような解をもつ $\lambda_1,\ \lambda_2$ と，それに対応する解 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ を一つずつ求めよ.

(大阪大 2009) (m20093501)

0.148 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} b & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ c & 0 & b \end{pmatrix}$ のすべての固有値と，それぞれに対応する固有ベクトルを求めよ.

ただし，a, b, c は実数である.

(2) 行列 A を対角化する直交行列の中で，対称行列となる P を一つ求めよ．

(3) A^n を求めよ．ただし，n は自然数を表す．

(4) (2) で求めた P を用いて $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と 1 次変換することで，$x^2+2y^2+z^2+xz$ が $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 w^2$ と表せることを示せ．また，定数 λ_1，λ_2，λ_3 の値を求めよ．

(大阪大 2013)　　(m20133503)

0.149 行列 $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) すべての固有値と，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさは 1 とする．

(2) 関数 $f(x,y,z)$ の x,y,z についての偏導関数をそれぞれ $f_x(x,y,z)$，$f_y(x,y,z)$，$f_z(x,y,z)$，関数 $g(x,y,z)$ の x,y,z についての偏導関数をそれぞれ $g_x(x,y,z)$，$g_y(x,y,z)$，$g_z(x,y,z)$ とする．関数 $f(x,y,z)$ が条件 $g(x,y,z)=0$ のもとで点 (a,b,c) において極値をとり，$g_x(a,b,c) \neq 0$ または $g_y(a,b,c) \neq 0$ または $g_z(a,b,c) \neq 0$ ならば，次の式を満たす実数 λ が存在する．

$$f_x(a,b,c) - \lambda g_x(a,b,c) = 0$$

$$f_y(a,b,c) - \lambda g_y(a,b,c) = 0$$

$$f_z(a,b,c) - \lambda g_z(a,b,c) = 0$$

条件 $x^2+y^2+z^2=1$ のもとで，次の関数 $f(x,y,z)$ が最小値をとる (x,y,z) を求めよ．

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(大阪大 2017)　　(m20173503)

0.150 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & c & 3 \end{bmatrix}$ について以下の問いに答えよ．ただし，c は実定数である．

(1) 行列 A の固有多項式 $f(\lambda) = |\,\lambda I - A\,|$ を変数 λ の関数とみなし， その極値を求めよ．ただし，I は単位行列を表すものとする．さらに，$c=0$ のときの f のグラフの概形を図示せよ．

(2) 行列 A のすべての固有値が実数となる，c に関する必要十分条件を示せ．

(3) $c=0$ のときの行列 A のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(大阪大 2018)　　(m20183501)

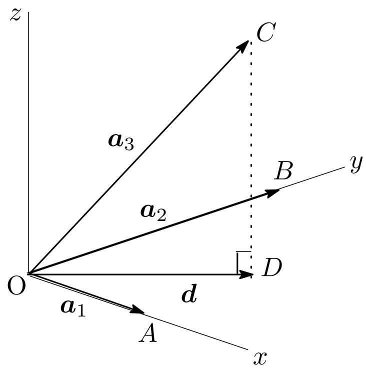
0.151 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ は空間の 3 次元ベクトルとして，以下の設問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ が一次独立であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$ が一次独立であることを証明せよ．

(2) $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ が一次独立で $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3$ とおくと，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ は一次独立であることを証明せよ．ただし，λ_2，λ_3 は実定数である．

(3) $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ が一次独立で $\boldsymbol{a} = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3$ とする．$\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}$ が一次独立であるための必要十分条件は，$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \neq 1$ であることを証明せよ．ただし，λ_1，λ_2，λ_3 は実定数である．

(4) 空間に直交座標系 $O-xyz$ が与えられているものとする．図に示すように，x 軸上の点 A に対し $\boldsymbol{a}_1=\overrightarrow{OA}$，$y$ 軸上の点 B に対し $\boldsymbol{a}_2=\overrightarrow{OB}$，空間内の点 C に対し $\boldsymbol{a}_3=\overrightarrow{OC}$ とする．点 C から xy 平面に垂線 CD を引くとき，ベクトル $\boldsymbol{d}=\overrightarrow{OD}$ を $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の線形結合で表せ．



(大阪大 2018)　　(m20183506)

0.152　3 次の正方行列 $M=(m_{ij})$ に対して，対角成分の和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} m_{ii}$ を $\mathrm{tr}(M)$ で表すとする．

また，行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) (1) で求めた行列 A の 3 つの固有値を，それぞれ λ_1，λ_2，λ_3 とする．このとき，
$\mathrm{tr}(A)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ 　が成り立つことを示せ．

(3) 実数を成分とする 3 次の正方行列 B, C に対して，　$\mathrm{tr}(BC)=\mathrm{tr}(CB)$ 　が成り立つことを示せ．

(4) 実数を成分とする 3 次の正方行列 D は，互いに異なる実数の固有値 μ_1，μ_2，μ_3 を持つとする．このとき，　$\mathrm{tr}(D)=\mu_1+\mu_2+\mu_3$ 　が成り立つことを示せ．

(大阪大 2020)　　(m20203506)

0.153　2× 2 の行列 A をつぎのように定義する：

$$A=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

このとき，つぎの各問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) 問い (1) で求めた固有値に対応する行列 A の長さ 1 の固有ベクトルを求めよ．

(3) 問い (1) で求めた固有値を λ，対応する長さ 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ と置く．次の等式を満たすベクトル $\boldsymbol{y}$ を求めよ．

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$$

ただし E は 2× 2 の単位行列であるとする．

(4) ベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ が次のように成分表示されるとする．

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

このとき 2× 2 の行列 B を次のように定義する：

$$B=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

次の等式を満たす $2\times\ 2$ の行列 C を求めよ：

$$AB = BC$$

(大阪府立大 2013)　　(m20133604)

0.154　以下の行列 A について，固有値 λ と各 λ に対する固有空間 $W(\lambda, A)$ を求めよ．

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$　　(2) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

(神戸大 2008)　　(m20083804)

0.155　次の行列で表される線形変換 T の固有値 λ と固有空間 $W(\lambda; T)$ をすべて求めよ．

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(神戸大 2012)　　(m20123803)

0.156　行列 $A = \begin{pmatrix} u & -4 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}$ は正則でないという．以下の問いに答えよ．

(1)　u の値を求めよ．

(2)　行列 $A+E$ の固有値 λ_1, λ_2, λ_3 と対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ を求めよ．

(3)　$B\boldsymbol{x}_1 = \sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{x}_1$, $B\boldsymbol{x}_2 = \sqrt{\lambda_2}\boldsymbol{x}_2$, $B\boldsymbol{x}_3 = \sqrt{\lambda_3}\boldsymbol{x}_3$ を満たす行列 B を求めよ．

(神戸大 2013)　　(m20133801)

0.157　(1)　行列

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -6 & -20 \\ -12 & 7 & 20 \\ 12 & -6 & -19 \end{bmatrix}$$

の固有値 λ と固有空間 $W(\lambda; A)$ をすべて求めよ．

(2)　ベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

が一次独立であることを示し，これらをシュミットの方法により正規直交系になおせ．

(神戸大 2014)　　(m20143805)

0.158　実係数行列

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ -1 & 0 & -a \\ a & -a & a^2-1 \end{pmatrix}$$

について次の問に答えよ．

(1)　M の固有値 λ と固有空間 $W(\lambda\,;M)$ を求めよ．

(2)　固有空間 $W(\lambda\,;M)$ の正規直交基底を求めよ．

(神戸大 2015)　　(m20153801)

0.159　行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値 λ と固有空間 $W(\lambda; A)$ を全て求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P を 1 つ求めよ．なお，${}^tPP = E$（単位行列）を満たす実正方行列 P を直交行列という．

(3) $n \in \mathbb{N}$ に対して，A^n のトレース $\mathrm{Tr}\,A^n$ を計算せよ．

(神戸大 2016)　　(m20163801)

0.160　行列 $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$　$(a, b, c \in \mathbb{C})$ に対して，次の問に答えよ．

以下，I は 3 次の単位行列を表し，ω は 1 の 3 乗根 $\omega = \dfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$ を表す．

(1) Λ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) A が $A = aI + b\Lambda + c\Lambda^2$ と表されることを用いて，A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) 等式　$\det(A) = (a + b + c)(a + \omega b + \omega^2 c)(a + \omega^2 b + \omega c)$　を示せ．

(神戸大 2017)　　(m20173801)

0.161　$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 5 \\ -5 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ とし，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x})\ ,\ \ ||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

と定める．ただし，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積とする．また，λ_1, λ_2, λ_3 を A の固有値とする（ ただし $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ ）．以下の各問に答えよ．

(1) λ_1, λ_2, λ_3 と，各 $i = 1, 2, 3$ について固有値 λ_i に対する A の固有値ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ で $||\boldsymbol{u}_i|| = 1$ を満たすものを一つずつ求めよ．また，その $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ について $(\boldsymbol{u}_i,\ \boldsymbol{u}_j)$ (ただし $1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq j \leq 3$) を計算せよ．

(2) $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ を (1) で求めたベクトルとし，$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ とする．このとき，$f(c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3)$ を c_1, c_2, c_3 で表せ．

(3) $S = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ ||\boldsymbol{x}|| = 1 \right\}$ とする．S における $f(\boldsymbol{x})$ の最大値と最小値，および，それらを与える $\boldsymbol{x} \in S$ を求めよ．

(神戸大 2019)　　(m20193802)

0.162　正方行列 X の固有値 λ に対する固有空間を $V_X(\lambda)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) X, Y を $XY = YX$ となる正方行列とする．$x \in V_X(\lambda)$ のとき，$Yx \in V_X(\lambda)$ を示せ．

(2) X を対称行列とし，λ, μ を X の異なる固有値とする．$V_X(\lambda)$ の要素と $V_X(\mu)$ の要素は直交することを示せ．

(3) 行列

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

に対し，X, Y の固有値と固有空間をすべて求めよ．

(4) (3) の行列 X, Y に対し，$P^{-1}XP$ と $P^{-1}YP$ がともに対角行列になるような正則行列 P を 1 つ求めよ．

(神戸大 2020)　　(m20203802)

0.163 $A = (a_{ij})$ を 3 次正方行列とする．A は $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ を 1 つずつ成分としてもち，

- 各 $i = 1, 2, 3$ について　$a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} = \lambda$
- 各 $j = 1, 2, 3$ について　$a_{1j} + a_{2j} + a_{3j} = \lambda$
- $a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{13} + a_{22} + a_{31} = \lambda$

を満たす自然数 λ が存在すると仮定する．このとき，A は 3 次の魔方陣と呼ばれる．以下の各問に答えよ．

(1) $\lambda = 15$ を示せ．

(2) $a_{22} = 5$ を示せ．

(3) $1 + x + y = 15$，$1 < x < y \leqq 9$ となる自然数 x, y の組 (x, y) をすべて求めよ．

(4) $\det A$ の絶対値を求めよ．またこの値の一意性を示せ．

(神戸大 2021)　　(m20213808)

0.164 以下に示す行列 A の固有値 λ と対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ．但し，固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ は A を掛けたときに定数 λ を比例係数として元の $\boldsymbol{x}$ に比例するような（すなわち，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ となるような）A に固有のベクトルである．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(鳥取大 2007)　　(m20073909)

0.165 確率変数 N はポアソン分布　$P(N = n) = \dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$，$\lambda > 0$，$n = 0, 1, 2, \cdots$

に従うとする．このとき，N の期待値を求めなさい（ 注意 ： $e^\lambda = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$ が成り立つ　）

(鳥取大 2007)　　(m20073922)

0.166 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{R}^2$ への線形写像（1 次変換）が次のように与えられた．ただし，$\boldsymbol{R}^n$ は実数 $\boldsymbol{R}$ 上の n 次元ベクトル空間を表す．

$$\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}\ .$$

(1) 表現行列 A の行列式 $|A|$ の値を求めなさい．

(2) 1 次変換 f の逆変換 f^{-1} における表現行列 A^{-1} を求めなさい．

(3) 1 次変換 f について，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を満たす $\lambda(\in \boldsymbol{R})$ をすべて求めなさい．

(鳥取大 2008)　　(m20083908)

0.167 (1) 自然数 n に対して，$f_n(x) = nxe^{-nx^2} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ とするとき，関数列 $\{f_n(x)\}$ はある連続関数に収束することを示せ．また，

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \quad \text{および} \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$$

の値を求めよ．

(2) $\lambda > 0$ とする．自然数 n に対して，$g_n(x) = n^{\lambda}xe^{-nx^2} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ とするとき，関数列 $\{g_n(x)\}$ はある連続関数に収束することを示せ．また，

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)dx$$

が成り立つための λ の条件を求めよ．

(岡山大 2017) (m20174002)

0.168 n 次正方行列 A に対して固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とするとき，次を示せ．

$$|A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

(広島大 2001) (m20014110)

0.169 $\mathbb{R}^n$ に属する m 個のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ に対して，次の命題 $(*)$ が真であるとき $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ は 1 次独立であるといい，偽であるとき $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ は 1 次従属であるという。

$(*)$「 $c_1, \cdots, c_m \in \mathbb{R}$ が $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{0}$ を満たせば $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ となる」

(1) 命題 $(*)$ の否定命題を述べよ．

(2) 次で与えられるベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ が 1 次独立であるか，1 次従属であるかを判定せよ．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(3) A は相異なる実数の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ をもつ 3 次の実正方行列で，$\boldsymbol{e}_j \neq \boldsymbol{0}$ $(j = 1, 2, 3)$ は λ_j に対応する固有ベクトルとする．このとき，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ．

(広島大 2006) (m20064102)

0.170 複素ベクトル空間 V のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ と V 上の線形変換 f を考える． ただし，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ はいずれも零ベクトルではないとする．以下のそれぞれの命題について，正しければ証明を与え，誤りであるならば反例をあげよ．

(1) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が一次独立であるならば，$\{f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), \cdots, f(\boldsymbol{a}_n)\}$ も一次独立である．

(2) $\{f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), \cdots, f(\boldsymbol{a}_n)\}$ が一次独立であるならば，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ も一次独立である．

(3) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ が f の相異なる固有値であり，$\boldsymbol{a}_i$ が λ_i に対する固有ベクトルであるならば，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ は一次独立である．

(広島大 2010) (m20104104)

0.171 λ を実定数とし，3 次実正方行列 A, B を次で定める．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ．ただし，3 次実正方行列 X, Y が可換であるとは，$XY = YX$ が成り立つことである．

(1) A と可換な 3 次実正方行列をすべて求めよ.

(2) B と可換な 3 次実正方行列をすべて求めよ.

(3) B と可換な 3 次実正方行列どうしは可換であることを示せ.

(広島大 2012)　　(m20124101)

0.172 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots$ を零ベクトルでない k 次元実列ベクトルとし, k 次実対称行列 M_n $(n = 1, 2, \cdots)$ を

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i {}^t\boldsymbol{a}_i$$

で定義する. ここで, ^{t} は転置を表す記号である. 以下の問いに答えよ. ただし, 任意の実対称行列は直交行列により対角化可能であることは用いてよい.

(1) α_n を行列 M_n の $(1,1)$ 成分とする. 数列 $\{\alpha_n\}$ が広義の単調増加列, すなわち, $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n \leq \cdots$ となることを示せ.

(2) M_n の固有値はすべて非負の実数であることを示せ.

(3) λ_n を M_n の最小固有値とする. $S = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k \mid {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} = 1\right\}$ に対し,

$$\min_{x \in S} {}^t\boldsymbol{x} M_n \boldsymbol{x} = \lambda_n$$

を示せ.

(4) (3) で定義した λ_n に対して, 数列 $\{\lambda_n\}$ が広義の単調増加列となることを示せ.

(5) (1) で定義した α_n と (3) で定義した λ_n に対して, $\{\alpha_n\}$ が上に有界であれば, $\{\lambda_n\}$ は収束することを示せ.

(広島大 2017)　　(m20174105)

0.173 複素数を成分とする 2 次正方行列全体のなす集合を $M(2, \mathbb{C})$ で表す. E_2 を 2 次の単位行列とする. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C})$ に対し, A の随伴行列 A^* を

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}$$

により定める. ただし, 複素数 z に対し $\overline{z}$ は z の複素共役を表す. また

$$H(2) = \{A \in M(2, \mathbb{C}) \mid A^* = A\}$$
$$U(2) = \left\{A \in M(2, \mathbb{C}) \;\middle|\; P \text{ は正則で} \quad P^{-1} = P^*\right\}$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) $A \in H(2)$ とする. A の固有値は実数であることを示せ.

(2) $A \in H(2)$ とする. A がただ一つの固有値をもつならば, ある実数 λ が存在して $A = \lambda E_2$ となることを示せ.

(3) $A \in H(2)$ は異なる二つの固有値をもつとする. $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ をそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルとするとき,

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$$

が成り立つことを示せ. ただし, $(\ ,\ )$ は $\mathbb{C}^2$ の標準エルミート内積である.

(4) $A \in H(2)$ に対し, ある $P \in U(2)$ が存在して P^*AP が対角行列となることを示せ.

(広島大 2021)　　(m20214104)

0.174 $A^k = O$ となる自然数 k が存在するような正方行列 A を「べき零行列」という.

(1) A を正方行列とし, λ を A の固有値とするとき, λ^k は A^k の固有値となることを示せ.

(2) (1) の関係を用いて, べき零行列の固有値は, 0 に限られることを示せ.

(3) 逆に正方行列 A の固有値が 0 に限られるとき, A はべき零行列であることを示せ.

(広島市立大 2005) (m20054204)

0.175 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ とする.

(1) $(x, y) \neq (0, 0)$ において, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.

(2) $(x, y) \neq (0, 0)$ において, $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ 方向の微分係数（方向微分係数）を求めよ.

(3) $(x, y) = (0, 0)$ において, z が全微分可能でないことを示せ.

(広島市立大 2011) (m20114202)

0.176 座標平面上に楕円 C : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を考える. また, $\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ を平面ベクトル全体のなす空間の正規直交基底とする. 原点 O を通り方向ベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ の直線が楕円 C と交わる点を P, 原点 O を通り方向ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ の直線が楕円 C と交わる点を Q とすると,

$$\frac{1}{||\overrightarrow{OP}||^2} + \frac{1}{||\overrightarrow{OQ}||^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

が成り立つことを証明せよ.

(広島市立大 2011) (m20114205)

0.177 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ に対する固有値 λ および固有ベクトル $\vec{v}$ を求めよ. ただし, 固有ベクトル $\vec{v}$ は 1 つ示せばよい.

(山口大 2003) (m20034311)

0.178 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ と行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ.

(1) 行列式 $|A - \lambda E|$ の値を求めよ. ただし, λ は定数とする.

(2) $|A - \lambda E| = 0$ を満たす λ の値をすべて求めよ.

(3) (2) で求めたそれぞれの λ に対して, $Ax = \lambda x$ を満たす 3 次元列ベクトル x のうち長さ 1 であるものを求めよ.

(徳島大 2000) (m20004404)

0.179 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問に答えよ.

(1) A の固有値 λ と, それに対応する長さが 1 の固有ベクトル $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(2) 上で求めた λ と x に対して, $Ay = \lambda y + x$ となるベクトル $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ で x と直交するものを求めよ.

(3) このとき $P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ とおいて, $\Lambda = P^{-1}AP$ を求めよ.

(徳島大 2004) (m20044404)

0.180 $\det(A)$, $\mathrm{rank}(A)$ はそれぞれ行列 A の行列式, 階数を表す. 次の問いに答えよ.

(1) 3 次正方行列 A と 3 次単位行列 I を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき, $\det(\lambda I - A) = 0$ を満たす λ をすべて求めよ.

(2) (1) で求めたそれぞれの λ について, $\mathrm{rank}(\lambda I - A)$ を求めよ.

(3) A を n 次正方行列, I を n 次単位行列とし, $f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ とおく. λ_0 が方程式 $f(\lambda) = 0$ の単根であるとき, $\mathrm{rank}(\lambda_0 I - A) = n - 1$ であることを示せ.

(高知大 2008) (m20084503)

0.181 x を変数とする高々二次の多項式全体から集合を

$$P = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_0,\ a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}\}$$

とする. P の元 $f(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ と $g(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$ に対して加法 $f + g$ と定数倍 λf を次のように定義する.

① $(f + g)(x) = (b_2 + c_2)x^2 + (b_1 + c_1)x + (b_0 + c_0)$

② $(\lambda f)(x) = \lambda b_2x^2 + \lambda b_1x + \lambda b_0$

これにより P は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) P の元 x と x^2 は P において一次独立であることを示せ.

(2) P の元 $1,\ x,\ x^2$ は P の基底となることを示せ.

(3) P の任意の元 f に対して, 写像 $\varphi : P \to P$ を次で定義する.

$$\varphi(f)(x) = xf'(x)$$

ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す. このとき φ は線形写像となることを示せ.

(4) φ の核 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ と φ の像 $\mathrm{Im}(\varphi)$ を求めよ.

(高知大 2010) (m20104503) ,

0.182 零ベクトルを $\vec{0}$ と記す.

(1) A を n 次正方行列とする. 実数 λ に対して, n 次元数ベクトル $\vec{u},\ \vec{v}$ が条件

$$\vec{u} \neq \vec{0},\ A\vec{u} = \lambda\vec{u},\ A\vec{v} = \vec{u} + \lambda\vec{v} \qquad (*)$$

を満足していると仮定する. このとき, $\vec{u},\ \vec{v}$ は 1 次独立であることを示せ.

(2) $a,\ b,\ c,\ d$ を実数とする. 2 次方程式 $x^2 - (a + d)x + ad - bc = 0$ が, a とは異なる実数 λ を 2 重解としてもつと仮定する. 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について, (1) の条件 (*) を満足する 2 次元数ベクトル $\vec{u},\ \vec{v}$ が存在することを示せ.

(3) (2) における $\vec{u},\ \vec{v}$ を $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ とおく. 行列 $P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ は正則であることを示し, $P^{-1}AP$ を求めよ.

(愛媛大 2004) (m20044610)

0.183 (1) $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$ となる実数 λ をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた λ の中で最大のものを λ_0 とするとき，連立方程式

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda_0-1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda_0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ をすべて求めよ．

(愛媛大 2007) (m20074605)

0.184 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，正則行列 $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ で，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

を満たすものが存在すると仮定する．次の各設問に答えよ．

(1) $\lambda,\ \mu$ は A の固有値でなければならないことを示せ．

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して上の条件を満たす P を直交行列で求めよ．

(九州大 2003) (m20034707)

0.185 ベクトル y がベクトル x と行列 A によって次のように関係づけられる．

$$y = Ax \quad ここで，\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(1) 次の 3 つのベクトルが行列 A の固有ベクトルであることを示せ．

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ z_0 \\ {z_0}^2 \end{pmatrix},\ p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ {z_0}^2 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

ここで，$z_0 = e^{i2\pi/3}$ である．
（ i : 虚数単位 ）
（ ヒント： ${z_0}^3 = 1$ ）

(2) 行列 A の固有値 λ_k $(k = 1, 2, 3)$ を求めよ．

(3) a, b, c を行列 A の固有値 λ_k と z_0 を用いて表せ．（ヒント ： $1 + z_0 + {z_0}^2 = 0$）

(4) $a = c = 0$, $b = 1$ となる場合の, 行列 A の（イ）固有値,（ロ）固有ベクトル を求めよ．

(5) （イ）ベクトル $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を固有ベクトル $p_1,\ p_2,\ p_3$ の線形和で表せ．

（ロ）上記のベクトル p を x とするとき, ベクトル y を求めよ．

(九州大 2005) (m20054701)

0.186 次の連立定数係数線形同次微分方程式

$$\frac{dy_1(x)}{dx} + 2y_1(x) - y_2(x) = 0$$

$$\frac{dy_2(x)}{dx} - y_1(x) + 2y_2(x) = 0$$

を, 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ を用いて,

$$\frac{dy(x)}{dx} + Ay(x) = 0 \quad \text{ただし,} \ \ y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

のように表現する. 解 $y(x)$ を行列 A の対角化を利用して以下の設問に沿って求めよ.

(1) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 と固有ベクトル c_1, c_2 を求めよ.

(2) c_1, c_2 を列ベクトルとする行列を $P = (c_1,\ c_2)$ とする. $P^{-1}AP$ を求めよ.

(3) $z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} = P^{-1}y(x)$ とするとき, $z(x)$ に関する微分方程式を導き, $z(x)$ の一般解を求めよ.

(4) $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき, $y(x)$ を求めよ.

(九州大 2005)　　(m20054702)

0.187 ある銀行には, 1 分間あたり平均で 0.2 人の来客がある. 来客の到着がランダムであると考えると, 単位時間あたりの来客数は, ポアソン分布に従うことが知られている. この銀行の場合, 1 分間あたりの来客数は $\lambda = 0.2$ のポアソン分布に従う. ポアソン分布の式は, 次式で与えられる.

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

(1) 1 分間の来客数が 4 である確率はいくらか.

(2) 1 分間に来客が 1 人も来ない確率はいくらか.

(3) 5 分間に来客が 1 人も来ない確率はいくらか.

(4) 3 分間に来客が 1 人だけ来る確率はいくらか.

(九州大 2005)　　(m20054704)

0.188 xy 平面上の任意の点の 1 秒ごとの移動の様子が, 次の行列 A で表される一次変換によって与えられるとする.

$$A = \begin{pmatrix} 5/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

xy 平面上の点 (x_0, y_0) が n 秒後に到達する点 (x_n, y_n) は, 次の漸化式によって与えられる. ただし, n は $n \geq 1$ の整数.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

(1) 原点から見たいくつかの方向では, 時間と共に向きが変化しない. すなわち, ゼロベクトルでない $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し, 次の関係式が成り立つ.

$$A\boldsymbol{X} = \lambda\boldsymbol{X}$$

上式を満たす固有値 λ の値 a, b と, それぞれに対する固有ベクトル $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ を求めよ. ただし, $a < b$ とし, (p, q), (r, s) はそれぞれ整数の組で, $p > 0$, $r > 0$ とする.

(2) 前問の結果を用いて，$P = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ．

(3) 座標 (x_n, y_n) を (x_0, y_0) と n を用いて表せ．
（ヒント）$(P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) = p^{-1}A^nP$

(4) 前問の (x_0, y_0) が，媒介変数 s を用いて $(x_0, y_0) = (s, s)$ で表される直線上の任意の点であるとする．s が実数全体を動くとき，(x_n, y_n) の描く図形の方程式を求めよ．また，$n \to \infty$ のとき，この図形はどのような図形に近づくか答えよ．

(九州大 2008)　　(m20084701)

0.189 次の時間 t と位置 x に関する波動方程式 ① と環境条件 ② を満足する関数 $y(x,t)$ を以下の手順に従って求めよ．

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (c > 0) \qquad ① \qquad \text{ただし環境条件は}\quad y(0,t) = y(L,t) = 0 \qquad ②$$

(1) 関数 $y(x,t)$ を位置の関数 $A(x)$ と時間の関数 $B(t)$ の積として $y(x,t) = A(x) \cdot B(t)$ と表すと，次式が成立することを証明せよ．

$$\frac{1}{A(x)} \frac{d^2 A(x)}{dx^2} = \frac{1}{c^2 B(t)} \frac{d^2 B(t)}{dt^2} \qquad ③$$

(2) 式 ③ の左辺は位置 x，右辺は時間 t だけの関数であるので式 ③ の両辺はある定数に等しい．これを $-\lambda$ とおくと $A(x)$ と $B(t)$ に関する次の 2 階の常微分方程式が成立する．

$$\frac{d^2 A(x)}{dx^2} + \lambda A(x) = 0 \qquad ④ \qquad\qquad \frac{d^2 B(t)}{dt^2} + \lambda c^2 B(t) = 0 \qquad ⑤$$

$\lambda > 0$ の場合の $A(x)$ と $B(t)$ の一般解を求めよ．

(3) $\lambda > 0$ の場合，式 ② の環境条件より

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 1, 2, 3, \cdots \qquad ⑥$$

が成立することを証明せよ．

(九州大 2008)　　(m20084702)

0.190 3 次正方行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -2 \\ -5 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の固有値のうちで最小なものを λ_0 とおく．（固有値がただ一つの場合には，それを λ_0 とおく.）λ_0 に対応する固有ベクトルで，「ベクトルの長さ（大きさ）は 1」かつ「第 1 成分は負ではない」という条件を満たすものを求めよ．

(九州大 2016)　　(m20164706)

0.191 4 次正方行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の固有値のうちで最大のものを λ_0 とおく. λ_0 に対応する固有ベクトルで, 第 1 成分が 1 であるものを求めよ.

(九州大 2018) (m20184705)

0.192 3 次正方行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき, 以下の各問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の固有値のうちで最小なものを λ_0 とおく.（固有値がただ一つの場合には, それを λ_0 とおく. ）λ_0 に対応する固有ベクトルで, 「ベクトルの長さ（大きさ）は 1」かつ「第 1 成分は負ではない」という条件をみたすものを求めよ.

(九州大 2019) (m20194709)

0.193 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

について考える. このとき次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A の固有値のうちで最大なものを λ_0 とおく（固有値がただ一つの場合には, それを λ_0 とおく）. このとき λ_0 に対応する固有ベクトルで, 「 ベクトルの長さ（大きさ）は 1 」かつ「 第 1 成分は負でない 」という条件を満たすものを求めよ.

(九州大 2020) (m20204701)

0.194 確率 $p(0 < p < 1)$ で表, 確率 $1 - p$ で裏がでるコインを n 回独立に投げる. 以下の問いに答えよ.

(1) n 回のうち表が出た回数を表す確率変数を X とする. X の値が k $(k \in \{0, 1, \cdots, n\})$ となる確率 $P(X = k)$ を求めよ.

(2) X の期待値 $E[X]$ について, $E[X] = np$ が成り立つことを示せ.

(3) λ を正の定数として $p = \dfrac{\lambda}{n}$ とすると, 以下が成り立つことを示せ.

$$\lim_{n\to\infty} P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

ただし, 任意の実数 a について, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$ を用いてよい.

(九州大 2020) (m20204708)

0.195 3 次正方行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の固有値のうちで最小のものを λ_0 とおく. λ_0 に対応する固有ベクトルで, 「ベクトルの長さ（大きさ）は 1)」かつ「第 1 成分は負ではない」という条件を満たすものを求めよ.

(九州大 2021) (m20214705)

0.196 互いに異なる正の定数 a, b, c を考える. 空間内の点 $O(0,0,0)$, $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ $C(0,0,c)$ を頂点とする 4 面体を V とする. また V 内部にある点を $P(x,y,z)$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 点 A, B, C, P を頂点とする 4 面体を V_1, 点 O, B, C, P を頂点とする 4 面体を V_2, 点 O, C, A, P を頂点とする 4 面体を V_3, 点 O, A, B, P を頂点とする 4 面体を V_4 とする. 4 面体 V_1, V_2, V_3, V_4 の体積比 $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$ を a, b, c, x, y, z を用いて表せ. ただし, λ_j $(j=1,2,3,4)$ は $0 \leq \lambda_j \leq 1$ および $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1$ を満たす実数とする.

(2) 関数 $\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\phi}(x,y,z)$, $\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}(x,y,z)$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{\phi}=\lambda_1\nabla\lambda_2-\lambda_2\nabla\lambda_1 \qquad \boldsymbol{\psi}=\lambda_2\nabla\lambda_3-\lambda_3\nabla\lambda_2$$

で定める. 関数 $\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\phi}(x,y,z)$, $\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}(x,y,z)$ を, a, b, c, x, y, z を用いて表せ.

(3) 関数 $f=f(x,y,z)$ を $f(x,y,z)=e^{x+y+z}\sin(x-z)\boldsymbol{\phi}(x,y,z)+x^2\sin(-x+y)\psi(x,y,z)$ で定める. このとき, 積分

$$\int_{\ell_{AB}} f\cdot d\boldsymbol{r}$$

を求めよ. ただし, ℓ_{AB} は点 A から B に進む方向を正とする線分, $\boldsymbol{r}$ は線分 ℓ_{AB} 上にある点の位置ベクトルである.

(4) 関数 f を前問で定めた関数とする. このとき, 積分

$$\int_S (\nabla\times f)\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

を求めよ. ただし, S は点 O,B,A を頂点とする 3 角形, $\boldsymbol{n}$ は z 成分が負となる S の単位法線である.

(九州大 2022) (m20224702)

0.197 3 次正方行列 A を次のように定義する.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -9 \\ -20 & -3 & 10 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき, 以下の各問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の固有値のうちで最小のものを λ_0 とおく. λ_0 に対応する固有ベクトルで, 「ベクトルの長さ（大きさ）は 1 」かつ「第 1 成分は負ではない」と言う条件を満たすものを求めよ.

(九州大 2022) (m20224704)

0.198 ベクトル $\boldsymbol{a}\neq 0$, $\boldsymbol{b}\neq 0$ に対して $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$ とおくとき, λ, $\boldsymbol{c}$ を求めよ.

(九州芸術工科大 2003) (m20034804)

0.199 次の問いに答えよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ のすべての固有値と，各固有値に対する固有空間の基底を求めよ．

(2) 複素数 λ が実正方行列（すなわち実数を成分とする正方行列）A の固有値ならば，λ の共役複素数 $\overline{\lambda}$ も A の固有値になることを証明せよ．

(3) 実対称行列のすべての固有値は実数になることを証明せよ．

(4) n を偶数とするとき，すべての固有値が 0 でない純虚数になるような n 次実正方行列の例を与えよ．また n が奇数ならばそのような例が存在しないことを証明せよ．

(佐賀大 2003)　　(m20034931)

0.200 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ について以下の問に答えよ.

(1) A の行列式を求めよ.

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) A の固有多項式 $g_A(t)$ を求めよ.

(4) A の固有値 λ を求めよ.

(5) A の各固有値の固有ベクトル $\boldsymbol{p}$ を求めよ.

(佐賀大 2005)　　(m20054928)

0.201 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ について,

(1) 行列 A の固有値 λ_1 , λ_2 を求めよ．

(2) 固有値 λ_1 , λ_2 に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めよ．

(3) 行列 A を対角化する行列を示し，対角化せよ．

(佐賀大 2006)　　(m20064934)

0.202 行列 $A = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有方程式を求めよ.

(2) A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ.

(3) A の固有値 λ_1, λ_2 に対する各々の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を求めよ.

(4) A を対角化したときの対角行列 $B(= P^{-1}AP)$ および正則行列 P を求めよ.

(5) A^n（n：自然数）を求めよ.

(佐賀大 2010)　　(m20104921)

0.203 時刻 t における，ある放射性元素の量を y とすれば次式が成り立つ.

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y \quad （\lambda は正の定数）$$

$t = 0$ のとき $y = y_0$ として，この放射性元素の半減期（ $y = y_0/2$ になるまでの時間 ）を求めなさい.

(佐賀大 2011)　　(m20114904)

0.204 $f(t) = Ae^{-\lambda t}\sin(\omega t + \theta)$ が解となるような，t を独立変数とする f の 2 階微分方程式を一つ書け．ここで A, λ, ω, θ は定数とする.

(佐賀大 2014)　　(m20144902)

0.205 $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ について，以下の積分を計算せよ．ただし，$\lambda>0,\ x>0$ である．

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} xf(x)dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2f(x)dx$

(佐賀大 2015)　(m20154902)

0.206 行列 $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ \alpha & 2 \end{bmatrix}$ について，固有値の 1 つが $\lambda=1$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1) α の値を求めよ．

(2) 残りの固有値を求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるように，行列 P とその逆行列 P^{-1} をそれぞれ求めよ．

(佐賀大 2016)　(m20164913)

0.207 次の積分をせよ．ただし，$\lambda>0$ である．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}dx$　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}dx$　(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}dx$

(佐賀大 2016)　(m20164922)

0.208 (1) 次の行列 A と列ベクトル $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{b}$ について，問いに答えよ．

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(a) 行列 A の行列式 $\det(A)$ を求めよ．

(b) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(c) 方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(d) 行列 A は固有値 1 をもつ．1 以外の A の固有値をすべて求めよ．また，A の固有値を 1 つ選び，その固有値に対応する固有ベクトルを 1 つ求めよ．

(e) 行列 A が対角化可能か否かを示し，もし対角化可能であれば $P\Lambda=AP$ となる正則行列 P と対角行列 Λ の組を 1 つ求めよ．

(2) A を $n\times n$ 実対称行列，$\boldsymbol{x}$ を n 次実ベクトルとする．$\boldsymbol{x}^t$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表すとする．A が相異なる n 個の固有値を持ち，全ての固有値が非負であるとき，$\boldsymbol{x}^tA\boldsymbol{x}\geq 0$ を示せ．

(佐賀大 2022)　(m20224918)

0.209 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルが $\lambda_1=-1,\ \boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}$，$\lambda_2=2,\ \boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix} d \\ 1 \end{pmatrix}$ となるように，a,b,c,d を求めよ．

(長崎大 2010)　(m20105018)

0.210 $\mu\neq\lambda>0$ として，3 つの行列

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$$

が，$AP=PB$ を満たすような λ,μ,x,y を求めよ．

(熊本大 2006)　(m20065204)

0.211 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$．$B=\lambda I_2-A$ とする．ただし，λ は定数で，I_2 は 2 次の単位行列である．次の問いに答えなさい．

(1) B を求めなさい.

(2) $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に自明でない解（$x = y = 0$ ではない解）が存在するような λ を全て求め，それぞれの λ に対して，$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の自明でない解を求めなさい.

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(4) A の対角化により,A^n を求めなさい．ただし，n は自然数とする.

(熊本大 2008)　　(m20085201)

0.212 xy 平面上の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を同じ平面上の点 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ に移す写像

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad ①$$

について，以下の問いに答えなさい.

(1) この写像を表す行列の固有値と固有ベクトルの組は，次に示す ② と ③ の二つであることを示しなさい．なお，固有ベクトルの大きさは，$\sqrt{2}$ に選んである.

$$\text{固有値 } \lambda_1 = \frac{3}{2} \ , \ \ \text{固有ベクトル } \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad ②$$

$$\text{固有値 } \lambda_2 = \frac{1}{2} \ , \ \ \text{固有ベクトル } \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad ③$$

(2) 二つの固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立なので，xy 平面上の点を表すベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の 1 次結合によって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \boldsymbol{x}_1 + \beta \boldsymbol{x}_2$$

のように表現できる．α および β を，x および y を用いて表しなさい.

(3) この写像によって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が移る点 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ を，α, β, $\boldsymbol{x}_1$ および $\boldsymbol{x}_2$ を用いて表しなさい.

(熊本大 2013)　　(m20135202)

0.213 xy 平面上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を同じ平面上の点 $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ に移す写像

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ.

(1) この写像の表す固有値 λ_1, λ_2 と固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ の組を求めなさい．なお，固有ベクトルの大きさは $\sqrt{2}$ とすること.

(2) xy 平面上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ により以下のように表せる.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha \boldsymbol{x}_1 + \beta \boldsymbol{x}_2$$

α, β を x, y を用いて表しなさい.

(3) $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ を $\alpha,\ \beta,\ \boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ を用いて表しなさい.

(熊本大 2019)　　(m20195203)

0.214 行列　$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　について次の問いに答えよ.

(1) A の固有値 λ_1 と λ_2 を求めよ.

(2) λ_1 と λ_2 に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ をそれぞれ求めよ.

(宮崎大 2006)　　(m20065301)

0.215 以下の問いに答えよ.

(1) 空間内の一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ を通り, 方向を示す単位ベクトル（方向余弦）が (λ, μ, ν) である直線の方程式は, 次式 $(*)$ で与えられることを示し, パラメーター　s　は点 P_0 から点 (x, y, z) までの有向距離を表すことを示せ.

$$\frac{x - x_0}{\lambda} = \frac{y - y_0}{\mu} = \frac{z - z_0}{\nu} = s \qquad (*)$$

(2) 空間内の異なる二点 $(x_0, y_0, z_0),\ (x_1, y_1, z_1)$ を通る直線の方程式は, 次式で与えられることを示せ.

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

(3) 空間内の一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ から直線 $(*)$ への垂直距離 h は, 次式で与えられることを示せ.

$$h^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 - \{\lambda(x_1 - x_0) + \mu(y_1 - y_0) + \nu(z_1 - z_0)\}^2$$

(鹿児島大 2005)　　(m20055403)

0.216 行列 $K = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ について.

固有値方程式 : $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ を解いて.

行列 K の固有値 λ_1, λ_2 と対応する規格化された固有ベクトル $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ を求めなさい.

$*$　規格化とは, ベクトルの大きさを 1 にとることである.

(鹿児島大 2005)　　(m20055415)

0.217 未知の二次元ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ に関する方程式, $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ の解を次の手順に従って求めよ. ただし, λ は未知のスカラーであり, また A は $2\times\ 2$ 行列で, $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ とする.

(1) $\boldsymbol{x}$ が自明な解, $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ 以外の解を持つように λ の値を決定せよ. （注 : λ の値は二つある.）

(2) 各 λ の値に対し, $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ の解, (x_1, x_2) を決定せよ.

(鹿児島大 2009)　　(m20095404)

0.218 未知の二次元ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ に関する方程式, $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ の解を次の手順に従って求めよ. ただし, λ は未知のスカラーであり, また A は $2\times\ 2$ 行列で, $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ とする.

(1) $\boldsymbol{x}$ が自明な解，$x_1 = 0,\ x_2 = 0$ 以外の解を持つように λ の値を決定せよ．（注：λ の値は二つある.）

(2) 各 λ の値に対し，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ の解，(x_1, x_2) を決定せよ．

(鹿児島大 2009)　　(m20095416)

0.219 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が,

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\lambda：\text{定数}) \quad \cdots\cdots (a)$$

を満たす時，以下の問いに答えなさい．

(1) (a) 式を満たす 2 つの定数 λ（固有値）と 2 つのベクトル (x, y)（固有ベクトル）を求めなさい．

(2) (1) で求めた固有ベクトルを用いて，行列 A を対角化しなさい．

(鹿児島大 2009)　　(m20095418)

0.220 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

(1) A の行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) A の二つの固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ を求めよ．

(鹿児島大 2014)　　(m20145410)

0.221 下記の行列 A について以下の問いに答えよ．ただし，虚数単位は i とする．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) A の行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) A の 2 つの固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ を求めよ．

(鹿児島大 2017)　　(m20175405)

0.222 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) 行列 A の固有値を λ とするとき，固有方程式ならびに固有値を求めよ．

(鹿児島大 2018)　　(m20185405)

0.223 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の転置行列を ${}^t\boldsymbol{A}$ とするとき，${}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ を計算せよ．

(2) 行列 $\boldsymbol{B}$ の逆行列 $\boldsymbol{B}^{-1}$ を求めよ．

(3) 行列 $\boldsymbol{B}$ の固有値 λ を求めよ.

(鹿児島大 2021) (m20215405)

0.224 行列 $B = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有ベクトル $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対応する固有値 λ_1 を求めなさい. また, 行列 B の固有値 $\lambda_2 = 2$ に対応する大きさが 1 の固有ベクトル $\overrightarrow{v_2}$ をすべて求めなさい.

(鹿児島大 2021) (m20215410)

0.225 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1, λ_2 と固有ベクトル u_1, u_2 を求めなさい.

(室蘭工業大 2007) (m20075505)

0.226 行列 $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ と与えられているものとする. このとき, 以下の問題に答えなさい.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の 2 つの固有値とそれらに対応する固有ベクトルを求めなさい.

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化しなさい. すなわち, 下の関係を満たす正則行列 P と対角行列 $\boldsymbol{\Lambda}$ を求めなさい. もし, 対角化が不可能な場合はその理由を述べなさい.

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$$

(3) $\boldsymbol{A}^{10}$（すなわち $\boldsymbol{A}$ の 10 乗）を求めなさい.

(室蘭工業大 2008) (m20085506)

0.227 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) 行列式 $|A|$ を第 1 列について余因数展開して, 2 行 2 列の行列式にして計算せよ.

(2) 行列 A の逆行列を求めよ.

(3) 行列 A の固有値 λ_i とその固有ベクトル x_i $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ.

(4) 適当な行列 P と相似変換 $(P^{-1}AP)$ を利用して, A を対角化せよ.

(島根大 2005) (m20055801)

0.228 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ について, 以下の設問に答えよ.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ.

(2) 固有値 λ_1, λ_2 それぞれに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ を, 長さ 1 となるように求めよ.

(3) 設問 (2) で求めた $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ を列ベクトルとみなして構成された行列 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1 \ \ \boldsymbol{p}_2)$ と, その逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ を求めよ.

(4) $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}^{-1}$ を用いて $\boldsymbol{A}$ を対角行列に変換せよ.

(島根大 2005) (m20055815)

0.229 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 行列式 $|A|$ を第 1 列について余因数展開して, 2 行 2 列の行列式にして計算せよ.

(2) 行列 A の逆行列を求めよ.

(3) 行列 A の固有値 λ_i とその固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ.

(4) 行列 A の階数を求めよ.

(島根大 2007)　　(m20075812)

0.230 次の微分方程式について，以下の設問に答えよ.

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ただし，$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$，　$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，　$x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ である.

(1) 行列 A の固有値 λ_1，λ_2 を求めよ.

(2) 行列 A の固有ベクトル ν_1，ν_2 を求めよ.

(3) 行列 $T = [\nu_1, \nu_2]$ とする $x(t) = Ty(t)$ の変換によって，① を $y(t)$ に関する微分方程式に変形せよ. ただし，$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$ である.

(4) 設問 (3) で求めた $y(t)$ に関する微分方程式を解け.

(5) 設問 (4) で求めた解 $y(t)$ を用いて，① の解 $x(t)$ を求めよ.

(島根大 2007)　　(m20075815)

0.231 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) 行列 A の階数を求めよ.

(3) 行列 A の逆行列を求めよ.

(4) 行列 A の固有値 λ_i とその固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ.

(島根大 2008)　　(m20085806)

0.232 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) 行列 A の行列式を 1 列について余因子展開して求めよ.

(2) 行列 A の 3 つの列ベクトルは線形独立といえるか. その根拠と共に示せ.

(3) 行列 A の逆行列を求めよ.

(4) 行列 A の固有値 λ_i とその固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ.

(島根大 2010)　　(m20105809)

0.233 次の微分方程式について，以下の設問に答えよ.

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A\boldsymbol{x}(t)$$

ただし，$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$，　$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$，　$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ である.

(1) 行列 A の固有値 λ_1，λ_2 と固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ を求めよ. ただし，固有ベクトルは単位ベクトルとして求めること.

(2) 設問 (1) で求めた固有ベクトルが互いに直交していることを示せ.

(3) 固有ベクトルからなる行列 $T = [\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2]$ の逆行列 T^{-1} を求めよ.

(4) $\boldsymbol{x}(t) = T\boldsymbol{y}(t)$ の変数変換を行い，$\boldsymbol{y}(t)$ に関する微分方程式を導け.

(5) 設問 (4) で求めた $\boldsymbol{y}(t)$ に関する微分方程式を解け.

(6) 設問 (5) で求めた解 $\boldsymbol{y}(t)$ を用い，微分方程式の解 $\boldsymbol{x}(t)$ を求めよ.

(島根大 2017)　　(m20175802)

0.234 $n\times\ n$ 正方行列 A の特性多項式は

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

である.（ただし，係数 $a_{n-1}, \cdots, a_0$ は定数であり，I は単位行列である.）

ここでこの多項式の λ に行列 A を代入した行列多項式は

$$f_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0$$

となる.（これをケイリーハミルトンの定理という）

<u>この定理を用いて</u>

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ のときに, 次の行列をそれぞれ求めよ.

(1) A^3

(2) A^{-1}

<u>注意：この定理を用いたことがわかるように解答すること</u>

(首都大 2004)　　(m20045903)

0.235 (1) 連立方程式 $\begin{cases} (\lambda-4)x + 2y - 15z = 0 \\ 2x + (\lambda-1)y - 30z = 0 \\ 4x - 2y - 5(\lambda-5)z = 0 \end{cases}$ が自明でない解をもつように，λ の値を定めよ.

(2) 前問で定めた λ の値の全てについて，それぞれに対応する自明でない解を求めよ.

(首都大 2008)　　(m20085901)

0.236 2 行 2 列の行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ が与えられているとする.

このとき，以下の問いに答えよ．ただし，^{T} は，行列の転置を表す.

(1) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ.

(2) P^TAP が対角行列となる直交行列 P を求めよ.

(3) 行列 A の固有値を $\lambda_1,\ \lambda_2$ とするとき，以下のすべての条件を満たす 2 行 2 列の行列 $B,\ C$ を求め，以下の条件を満足していることを示せ.

(a) $A = \lambda_1 B + \lambda_2 C$

(b) $B = B^T,\ C = C^T$

(c) $BC = CB = \boldsymbol{O}_{2\times 2}$，なお，$\boldsymbol{O}_{2\times 2}$ は，すべてのの要素が 0 の 2 行 2 列の行列を表す.

(d) $B^2 = B,\ C^2 = C$

(東京都立大 2020)　　(m20205908)

0.237 次の行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ に関して，以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトル λ_i，$\boldsymbol{u}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ．ただし，各固有ベクトルの最大の成分が 1 となるようにせよ．

(2) A の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ が，数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ の基底となることを示せ．

(宇都宮大 2007) (m20076105)

0.238 $\displaystyle\int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$ を解け．

(工学院大 2004) (m20046203)

0.239 2 次実対称行列について，以下の問いに答えよ．

(1) 2 次実対称行列 $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) 2 次実対称行列 S が正定値であるとは，すべての $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$ に対して ${}^t\boldsymbol{x}S\boldsymbol{x} > 0$ が成立することをいう．ここで ${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置である．(1) の行列 B が正定値であることを示せ．

(3) 2 次実対称行列 $C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ の固有値をそれぞれ λ_1, λ_2 とする．行列 C が正定値となるための λ_1, λ_2 の条件を求めよ．

(はこだて未来大 2012) (m20126302)

0.240 (1) $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ のとき，A の行列式と，トレースを求めなさい．

(2) $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ として，以下の問いに答えなさい．

(a) B の行列式を求めなさい．

(b) B の固有値 λ_1，λ_2 を求めなさい．ただし $\lambda_1 \geq \lambda_2$ とする．

(c) 固有値 λ_1，λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}$ を求めなさい．ただし，各成分は $x_{11} \geq x_{21}$，$x_{12} \geq x_{22}$ を満たし，絶対値の最も小さい整数とする．

(d) 行列 P が $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ で定義されるとき，$BP = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ となることを示しなさい．

(e) 行列 P の逆行列を求めなさい．

(f) B^n を求めなさい．

(和歌山大 2009) (m20096501)

0.241 次の各問いに答えなさい．

(1) サイコロを 3 回振るとき 1 の目が出る回数を X とする．X の確率分布表を示しなさい．

(2) 確率変数 X が $P(X = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ （ $\lambda > 0$, k は 0 以上の整数 ）で与えられる確率分布に従うとき，次の各問いに答えなさい．

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)=1$ を示しなさい.

(b) 確率変数 X の平均が λ であることを示しなさい.

(和歌山大 2011)　　　(m20116503)