

[選択項目] 年度：1991～2023 年 文中： {:::

0.1 周期が 2π の次の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x \leq 0) \\ 1 & (0 < x \leq \pi) \end{cases}$$

(北海道大 2005) (m20050102)

0.2 図 1 に示す周期が 2π の関数 $y(x) = \begin{cases} -x & (-\pi < x \leq 0) \\ x & (0 < x \leq \pi) \end{cases}$ のフーリエ級数を求めなさい.

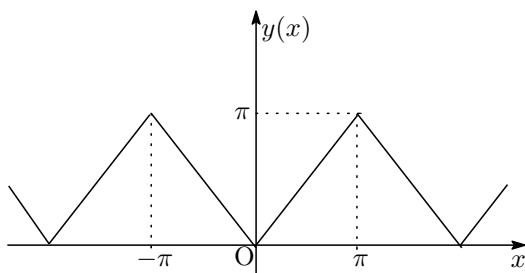


図 1

(北海道大 2006) (m20060103)

0.3 (1) 次の関数 $f(x)$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) のフーリエ級数を求めなさい.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

(2) 次の関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(k)$ を

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

とし、 $i = \sqrt{-1}$ とする. 次の関数のフーリエ変換 $F(k)$ を求めなさい.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

(北海道大 2008) (m20080104)

0.4 微分方程式と周期関数について、以下の設問に答えよ. 途中の計算手順も、詳しく記述すること.

(1) 次の微分方程式を解き、一般解 $y(x)$ を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 10y = 0$$

(2) 次の微分方程式を解き、一般解 $y(x)$ を求めよ. なお、 n は 1 以上の整数である.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 10y = \cos nx$$

(3) 関数 $g(x)$ は、周期 2π の周期関数であり、原点を含む 1 周期は次式で表される.

この関数をフーリエ級数に展開せよ.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{8} \left(1 + \frac{2x}{\pi}\right) & (-\pi \leq x < 0) \\ \frac{\pi^2}{8} \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$$

(4) 次の微分方程式を解き、一般解 $y(x)$ を求めよ。なお、右辺は (3) の周期関数 $g(x)$ である。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 10y = g(x)$$

(北海道大 2013) (m20130102)

0.5 f を周波数とするとき、時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$F[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft} dt$$

で与えられる。ここで、 $i = \sqrt{-1}$ である。このとき、以下の設問に答えよ。

(1) 下記の関数 $P(t)$ を横軸 t として図示し、そのフーリエ変換を求めよ。

$$P(t) = \begin{cases} 1 & , |t| < t_0 \\ 0 & , |t| > t_0 \end{cases} \quad (t_0 > 0)$$

(2) 関数 $P(t + 4t_0) + P(t - 4t_0)$ を横軸 t として図示し、そのフーリエ変換を求めよ。

(北海道大 2015) (m20150104)

0.6 次式の関数について、次の各設問に答えなさい。ただし、 $0 < D < 1$ とする。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < -D\pi) \\ 1 & (-D\pi \leq x < D\pi) \\ 0 & (D\pi \leq x < \pi) \end{cases}$$

設問 1. 次式で示されるフーリエ級数の各係数を求めなさい。

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

設問 2. 上式において、 n が偶数の項の係数がすべて 0 となる D の条件を求めなさい。

(北海道大 2018) (m20180105)

0.7 f を周波数とするとき、時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft} dt$$

で与えられる。また、時間 t の関数 $p(t)$ と $q(t)$ の畳み込みは

$$p(t) * q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)q(t - \tau)d\tau$$

で与えられる。ここで $i = \sqrt{-1}$ である。このとき、以下の設問に答えなさい。

(1) 次の関数 $g(t)$ を横軸 t として図示しなさい。

$$g(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

(2) 次の関数 $h(t)$ を横軸 t として図示しなさい。

$$h(t) = g(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

(3) $g(t)$ のフーリエ変換を求めなさい。

(4) $h(t)$ のフーリエ変換を求めなさい.

(北海道大 2019) (m20190104)

0.8 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 20x_3 = 26 \\ x_1 + + 2x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 = 12 \end{cases}$$

の解が存在するかどうか判定せよ. 存在すれば解を求めよ.

(北見工業大 2004) (m20040205)

0.9 次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{cases} x - 2y - 5z + w = -7 \\ x - y - 3z + 2w = -3 \end{cases}$$

(北見工業大 2005) (m20050209)

0.10 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ を求めよ.

$$\left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right. \text{とおくとよい.} \\ \phantom{\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right.} \end{array} \right)$$

(北見工業大 2011) (m20110205)

0.11 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$ とする.

(1) 領域 D を図示せよ.

(2) 積分 $\iint_D x^2 y dx dy$ を計算せよ.

(北見工業大 2018) (m20180204)

0.12 平面の部分集合 D を次で定める.

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x\}$$

(1) D を図示せよ.

(2) 積分 $\iint_D x^2 dx dy$ を計算せよ.

(北見工業大 2019) (m20190204)

0.13 平面の部分集合 D を次で定める:

$$D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 2\}$$

(1) D を図示せよ.

(2) 積分 $J = \iint_D xy dx dy$ を計算せよ.

(北見工業大 2019) (m20190211)

0.14 区間 $[a, b]$ 上の関数 $f(x), g(x)$ は,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

が成り立つとき互いに直交しているという. 以下の問いに答えよ.

(1) 次の (a)~(e) に示した関数が区間 $[-\pi, \pi]$ 上で互いに直交していることをそれぞれ示せ. ただし, k, l はともに自然数である.

- (a) $\frac{1}{2}$ と $\cos kx$
 (b) $\frac{1}{2}$ と $\sin kx$
 (c) $\cos kx$ と $\sin lx$
 (d) $\cos kx$ と $\cos lx$ ($k \neq l$)
 (e) $\sin kx$ と $\sin lx$ ($k \neq l$)

- (2) 区間 $[-\pi, \pi]$ 上の任意の関数 $f(x)$ は, $\frac{1}{2}, \cos kx, \sin kx$ の線形和によって

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x + \dots$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

と表すことができる (これをフーリエ級数展開という). 係数 a_0, a_k, b_k をそれぞれ $f(x)$ を用いて表せ.

- (3) 次の関数 $f(x)$ を区間 $[-\pi, \pi]$ 上でフーリエ級数に展開せよ.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

(岩手大 2009) (m20090301)

- 0.15** 次の連立微分方程式について, 以下の問いに答えなさい.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + \sin t \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y \end{cases}$$

- (1) $x(t)$ を消去し, $y(t)$ に関する微分方程式を求めなさい.
 (2) $y = A \sin t + B \cos t$ が (1) で求めた微分方程式の解になるような, 適当な定数 A, B を求めなさい.
 (3) (2) の結果を利用して, (1) で求めた微分方程式の一般解を求めなさい.

(岩手大 2014) (m20140304)

- 0.16** 次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

(秋田大 2001) (m20010409)

- 0.17** 次の関数について, 導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めなさい.

(1) $y = x^3 e^{-2x}$

(2) $y = \frac{2x+1}{\sin x}$

(2) $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = 2 \sin t - 2t \cos t \end{cases}$

(4) $x^3 y + 3y^2 + 2x^4 = 0$

(秋田大 2003) (m20030401)

- 0.18** 次の連立一次方程式の解をパラメータを用いて表せ.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

(秋田大 2005) (m20050401)

0.19 次の \square に当てはまる整数を入れよ.

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ の階数は \square である.

(2) 連立一次方程式 $\begin{cases} x + y - 3z = -9 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 34 \end{cases}$ の解は $x = \square$, $y = \square$, $z = \square$ である.

(秋田大 2007) (m20070402)

0.20 次の 1 次連立方程式を解け. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

(秋田大 2008) (m20080402)

0.21 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x + y - az = 2 \\ x - 2y + z = -3 \\ 3x + 2y + 2z = 14 \end{cases}$ を解け. ただし, a は定数である.

(秋田大 2010) (m20100404)

0.22 次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{cases} x + z - w = 1 \\ 3x + y + 2z + w = 1 \\ y - z + 5w = -1 \end{cases}$$

(秋田大 2011) (m20110401)

0.23 $f(x)$ は x の多項式で, 等式 $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) - f(x-1) = (2x-1)^3 \end{cases}$ を満たす. 次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ を求めよ.

(2) 次の級数の和を計算せよ.

$$(\sin x + 1)^3 + (\sin x + 3)^3 + (\sin x + 5)^3 + \cdots + (\sin x + 2n - 1)^3$$

(東北大 1993) (m19930501)

0.24 t を実数とし, 2 つの関数 $x = x(t)$, $y = y(t)$ により与えられる xy 平面上の点 $P(x(t), y(t))$ を考える. $x(t)$ および $y(t)$ が以下の連立微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + \alpha y \end{cases}$$

および初期条件

$$(x(0), y(0)) = (1, 1)$$

を満足するとする. ただし, α は実数の定数である. 以下の問いに答えよ.

(1) $\alpha = 0$ のとき, 与えられた連立微分方程式の解 $x(t)$ および $y(t)$ を求めよ.

(2) $\alpha \neq 0$ のとき, 与えられた連立微分方程式の解 $x(t)$ および $y(t)$ を求めよ.

(3) $t (t \geq 0)$ が変化するとき, 点 P が描く曲線の概形を $\alpha > 0$, $\alpha = 0$, $\alpha < 0$ の場合について描け.

(東北大 2008) (m20080502)

0.25 xy 平面上の点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる.

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{t}{\pi} \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

ここで, $0 \leq t \leq \frac{3}{2}\pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする. このとき, 以下の問に答えよ.

- (1) $t = \frac{m}{2}\pi$ (ただし $m = 0, 1, 2, 3$) における点 P の座標, およびそれらの点における曲線 C の接線の傾きを求めよ. さらに, 曲線 C の概形を描け.
- (2) 不定積分 $\int t \sin^2 t dt$ を求めよ.
- (3) 曲線 C と x 軸 ($x \geq 0$) および y 軸 ($y \geq 0$) によって囲まれる領域の面積を求めよ.

(東北大 2010) (m20100502)

0.26 xy 平面上の点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる.

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$$

ここで, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする.

このとき, 以下の問に答えよ.

- (1) $t = \frac{\pi}{3}$ における点 P の座標, およびその点における曲線 C の接線の傾きを求めよ.
- (2) 曲線 C と x 軸によって囲まれる領域の面積 S を求めよ.
- (3) 曲線 C が x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ.

(東北大 2013) (m20130502)

0.27 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ と定める.

- (1) f は $x = 0$ で連続であることを証明せよ.
- (2) f は $x = 0$ で何回微分可能か.

(東北大 2015) (m20150509)

0.28 \mathbb{R}^2 上で定義された 2 変数関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $f(x, y)$ は $(x, y) = (0, 0)$ で連続であることを示せ.
- (2) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 3 \text{ かつ } y \geq 0\}$ とするとき, 積分 $\int_D f(x, y) dx dy$ の値を求めよ.

(東北大 2017) (m20170506)

0.29 xyz 空間における点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる.

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = -a \sin t \end{cases}$$

ここで, a は正の実数である. $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする. 以下の問に答えよ.

- (1) $t = \frac{\pi}{2}$ と $t = \pi$ のそれぞれに対し, 点 P の座標とその点における曲線 C の接線方向を表すベクトルを求めよ.
- (2) 曲線 C 上の任意の点 P における接線の方程式を求めよ.
- (3) 曲線 C が平面上の曲線であることを示し, その平面の方程式と単位法線ベクトルを求めよ.
- (4) 曲線 C が xz 平面に投影した曲線で囲まれる領域 D の面積を求めよ.

(東北大 2018) (m20180503)

0.30 \mathbb{R}^2 上の 2 変数関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) $f(x, y)$ は $(x, y) = (0, 0)$ において連続であることを示せ.
- (2) $f(x, y)$ は $(x, y) = (0, 0)$ において全微分可能であるか, 理由とともに答えよ.
 なお, \mathbb{R}^2 内の点 (a, b) の近傍で定義された実数値関数 $g(x, y)$ が $(x, y) = (a, b)$ において全微分可能であるとは, ある定数 α, β が存在して

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{g(a+h, b+k) - g(a, b) - (\alpha h + \beta k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

が成り立つことをいう.

(東北大 2018) (m20180510)

0.31 xy 平面上の点 P の座標 (x, y) が, 実数 t を媒介変数として次の式で与えられる.

$$\begin{cases} x(t) = (1 + \cos t) \cos t \\ y(t) = (1 + \cos t) \sin t \end{cases}$$

ここで, $0 \leq t \leq \pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする. このとき, 以下の問に答えよ.

- (1) $x(t)$ および $y(t)$ の増減表を作成し, 曲線 C の概形を図示せよ.
- (2) 曲線 C の長さを求めよ.
- (3) 曲線 C と直線 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ によって囲まれる領域の面積 A を求めよ.

(東北大 2019) (m20190501)

0.32 実数列 $\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体のなす集合 V は, 任意の二つの実数列 $\{a_n\}, \{b_n\} \in V$ と任意の実数 s に対して, 和 $\{a_n\} + \{b_n\} \in V$ とスカラー倍 $s\{a_n\} \in V$ を

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}, \quad s\{a_n\} = \{sa_n\}$$

と定義することにより, 実ベクトル空間となる. V の元 $\{a_n\}$ で, 漸化式

$$a_{n+4} = 4a_{n+3} + 3a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすもの全体のなす, V の部分集合を W とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) W は V の部分空間であることを示せ.
- (2) $\{a_n\}$ を W の元とするとき a_5, a_6 を a_1, a_2, a_3, a_4 を用いて書き表せ.
- (3) $i = 1, 2, 3, 4$ に対して, 実数列 $\{e_n^{(i)}\} = \{e_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$ は,

$$e_n^{(i)} = \begin{cases} 1 & (n = i \text{ のとき}), \\ 0 & (n = 1, 2, 3, 4, n \neq i \text{ のとき}) \end{cases}$$

を満たす唯一つの W の元とする. このとき, $\{e_n^{(1)}\}, \{e_n^{(2)}\}, \{e_n^{(3)}\}, \{e_n^{(4)}\}$ は W の基底であることを示せ.

- (4) 線形写像 $T: W \rightarrow W$ を,

$$T(\{a_n\}) = \{b_n\} \quad \text{ただし} \quad b_n = a_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定める. このとき, 設問 (3) の基底に関する T の表現行列を求めよ. また, その行列式を求めよ.

(東北大 2019) (m20190506)

0.33 重積分

$$\iint_D (3x^2 + y^2) dx dy \quad (D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\})$$

の値を求めよ.

(東北大 2019) (m20190510)

0.34 \mathbb{R}^2 上の関数 f を

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) f は $(0, 0)$ において連続であることを示せ.
- (2) \mathbb{R}^2 の閉領域

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

に対し, 重積分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ の値を求めよ.

(東北大 2021) (m20210510)

0.35 次の連立 1 次方程式について, 以下の間に答えよ. ただし, k は定数とする.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 5y + 9z = 6 \\ 3x + 5y + 7z = k \end{cases}$$

- (1) この連立 1 次方程式の係数行列 \mathbf{A} と拡大係数行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ をそれぞれ示せ.
- (2) 拡大係数行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ を階段行列に変形し, 連立 1 次方程式が解を持つような k を定めよ.
- (3) k の値が (2) で定めた値であるとき, この連立 1 次方程式を解け.

(東北大 2022) (m20220501)

0.36 極座標変換を用いて次に示す重積分を計算する. 以下の間に答えよ.

$$I = \iint_D \frac{x-y}{(x^2+y^2)^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\}$$

- (1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ.
 (2) 次に示す極座標変換のヤコビ行列とその行列式 (ヤコビアン) を求めよ.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

- (3) (2) の極座標変換によって, xy 平面内の領域 D は $r\theta$ 平面内の領域 \bar{D} に対応づけられる. 下図に示す点 $O(0,0)$ を原点とする r と θ の直交座標を用いて, 領域 \bar{D} を図示せよ.



- (4) 重積分 I を計算せよ.

(東北大 2022) (m20220505)

0.37 次の関数 $f(x)$ について以下の問いに答えよ.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \leq 0 \\ x \cos x & x > 0 \end{cases}$$

- (1) 関数 $f(x)$ は $x = 0$ で連続か?
 (2) 関数 $f(x)$ は微分可能か? 微分可能ならば導関数を記しなさい.
 (3) 関数 $f(x)$ は $x = 0$ で何回まで微分可能か?

(お茶の水女子大 2010) (m20100609)

0.38 (1) $m \times n$ 型実行列 $A = (a_{ij})$ の階数 (rank) の定義を述べよ.
 (2) t を実数とする. 次の行列の階数を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2t-2 & t & 1 \\ 1 & 0 & 1 & t \\ t & t-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (3) t を実数とする. 4次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^4 の4つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2t-2 \\ 0 \\ t-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

で生成される \mathbb{R}^4 の部分空間を $V(t)$ で表す. t が実数全体を動くとき, $V(t)$ の次元の最小値をとるような t の値を求めよ. また, そのときの $V(t)$ の基底を求めよ.

- (4) t を実数とする. 未知数 x, y, z に関する次の連立1次方程式が解をもつような t をすべて求めよ.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + (2t-2)y + tz = 1 \\ x + z = t \\ tx + (t-1)y + z = 1 \end{cases}$$

(お茶の水女子大 2017) (m20170604)

0.39 $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ が有理数}) \\ 0 & (\text{上記以外の数}) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (x = \frac{1}{2^m}, m = 1, 2, 3, \dots) \\ 0 & (\text{上記以外の点}) \end{cases}$$

とする.

(1) f が区間 $[0, 1]$ 上リーマン積分可能かどうか、理由とともに答えよ.

(2)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \sup_{\frac{k-1}{2^n} \leq x \leq \frac{k}{2^n}} g(x)$$

を求めよ.

(3) g が区間 $[0, 1]$ 上リーマン積分可能かどうか、理由とともに答えよ.

(お茶の水女子大 2020) (m20200601)

0.40 関数 $\delta_y(x)$ と $g(y)$ を次の式で定義する.

$$\delta_y(x) = \begin{cases} y^{-1} & (|x| < \frac{1}{2}y) \\ 0 & (|x| \geq \frac{1}{2}y) \end{cases} \quad g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_y(x)dx$$

ここで、 $f(x)$ は何回でも微分可能であるとする. このとき、 $g(y)$ を y の 2 次の項まで求めよ.

(お茶の水女子大 2020) (m20200609)

0.41 次の連立常微分方程式を解け. ただし、 $t = 0$ において $x = 1, y = 0$ とする.

$$\begin{cases} 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = x \\ \frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} = y \end{cases}$$

(東京大 2000) (m20000703)

0.42 p, q を任意の実数とするとき、以下の問いに答えよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$ について、 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ を満たす実数 λ と非零ベクトル \mathbf{x} の組をすべて求めよ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を、次の漸化式で与える.
$$\begin{cases} a_{n+1} = (1-p)a_n + qb_n \\ b_{n+1} = pa_n + (1-q)b_n \end{cases}$$

ただし、 $0 < p < 1, 0 < q < 1$ とし、 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の初項を、それぞれ、 a_0, b_0 とする. このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を p, q, a_0, b_0 を用いて示せ.

(東京大 2006) (m20060702)

0.43 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき、下の (1)~(5) を答えよ.

ただし、3つのベクトル $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3$ を $\mathbf{m}_1 = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{pmatrix}$, $\mathbf{m}_2 = \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \end{pmatrix}$, $\mathbf{m}_3 = \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \end{pmatrix}$ と

するとき、 $M = [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3]$ と表される行列 M は $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$ であるとする.

- (1) 行列の3つの固有値を a_1, a_2, a_3 および固有ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ を求めよ。ただし、 $|\mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}_2| = |\mathbf{u}_3| = 1$ とすること。
- (2) 固有ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ を用いて作られる行列 U を $U = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ とする。 $UV = I$ のように行列 U に右からかけると単位行列 I となる行列 V を求めよ。
- (3) 固有ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ は互いにどのような関係にあるか説明せよ。
- (4) 固有ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ と行列 U について、下式を満たすような3つの行列 P_1, P_2, P_3 を求めよ。ただし、 P_1, P_2, P_3 はそれぞれ3行3列の行列であり、 $\mathbf{0}$ は零ベクトルである。

$$\begin{cases} P_1 U = [\mathbf{u}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0}] \\ P_2 U = [\mathbf{0} & \mathbf{u}_2 & \mathbf{0}] \\ P_3 U = [\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{u}_3] \end{cases}$$

- (5) 行列 A の n 乗である A^n を求めよ。ただし、 n は正の整数である。

(東京大 2011) (m20110705)

0.44 $f(x)$ を $-l \leq x \leq l$ で定義された関数とする。このとき、

$$a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx \quad (m = 1, 2, \dots)$$

とすると、 $f(x)$ は、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi}{l}x + b_m \sin \frac{m\pi}{l}x \right) \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

と展開できる。以下の問に答えよ。

- (1) 次式で定義された関数 $f(x)$ の a_m, b_m を求め、 $\textcircled{1}$ 式で $l = 1$ とした式に従い $f(x)$ を展開せよ。

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (-1 \leq x \leq 0) \\ 1-x & (0 < x \leq 1) \end{cases}$$

- (2) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ で定義される関数 $f(x) = \cos x$ を $\textcircled{1}$ 式で $l = \frac{\pi}{2}$ とした式に従い展開し、その展開式を利用し、以下の無限級数

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{15} + \frac{1}{35} - \frac{1}{63} + \dots + \frac{(-1)^{m-1}}{4m^2 - 1} + \dots$$

の値を求めよ。

(東京大 2013) (m20130701)

0.45 ある行列に並んでいる人の待ち時間 t は確率密度関数

$$\begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

に従うものとする。ただし、 λ は正の実数である。以下の問に答えよ。

- (1) 待ち時間が t 以下である確率 $F(t)$ を求めよ。
- (2) 待ち時間の平均 μ と分散 σ^2 を求めよ。

- (3) 十分な数の観測の結果、待ち時間の平均が T であったとする。待ち始めてから時間 τ だけ経過したとき、残りの平均待ち時間を求めよ。

(東京大 2014) (m20140702)

0.46 xy 平面上において、媒介変数 θ を用いて次式で表されるサイクロイド曲線 C を考える。

$$\begin{cases} x(\theta) = \theta - \sin \theta & (1) \\ y(\theta) = 1 - \cos \theta & (2) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ。ただし、必要に応じて次の関係式を用いてよい。

$$\begin{cases} \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} & (3) \\ 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} & (4) \end{cases}$$

- (1) $0 \leq \theta \leq 2\pi$ における曲線 C の概形を、根拠とともに示せ。
- (2) 曲線 C 上の任意の点に対して、 x 方向に 2π だけ平行移動させた点を考える。その点もまた曲線 C 上にあることを示せ。
- (3) 原点 $O(0,0)$ から、曲線 C 上の点 $P(x(\varphi), y(\varphi))$ (ただし $0 \leq \varphi \leq \pi$) までの曲線の長さを $l(\varphi)$ とする。
- (a) $l(\varphi)$ を求めよ。
- (b) 図 3.1 に示すように、点 P における曲線 C の接線上の点 Q を考える。ただし、 $\overline{PQ} = l(\pi) - l(\varphi)$ であり、また、 $\overline{OQ} > \overline{OP}$ とする。点 P を $0 < \varphi < \pi$ の間で動かしたときの点 Q の軌跡を求め、その概形を示せ。

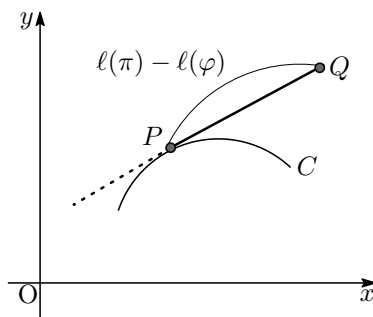


図 3.1

(東京大 2015) (m20150703)

0.47 微分方程式に関する以下の問いに答えよ; ただし, $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ とする。

- (1) 次の定係数微分方程式

$$y'' - (a+2)y' + 2ay = f(x)$$

について以下の問いに答えよ。ただし、 a は実数とする。

- (a) $f(x) = 0$ のとき、一般解を求めよ。
- (b) $f(x) = 5e^{-3x}$ かつ $a < 0$ のとき、一般解を求めよ。
ただし、 e は自然対数の底とする。
- (2) 次のオイラー型の微分方程式の一般解を求めよ。

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$$

(3) 次の連立微分方程式において, $y_1(0) = 4, y_2(0) = -3$ を満たす解を求めよ.

$$\begin{cases} y_1' + 2y_2' = 2y_1 + 5y_2 \\ 2y_1' - y_2' = 14y_1 + 5y_2 \end{cases}$$

(東京大 2016) (m20160701)

0.48 n 次正方形行列 A の第 i 行, 第 j 列の成分 a_{ij} が以下のように与えられている.

$$a_{ij} = \begin{cases} a & (i = j) \\ 1 & (i \neq j) \end{cases}$$

(1) 以下の場合について, A の行列式の値を求めよ.

(a) $n = 3$ (b) $n \geq 1$

(2) 以下の場合について, A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(a) $n = 2$ (b) $n = 3$

対角成分より下の成分が 0 となる正方形行列を上三角行列と呼ぶ. n 次上三角行列 B の成分 b_{ij} が以下のように与えられている. ただし, $b > 1$ である.

$$b_{ij} = \begin{cases} b & (i = j) \\ 1 & (i < j) \\ 0 & (i > j) \end{cases}$$

(3) $n \geq 1$ の時, B に関して, 以下の問いに答えよ.

(a) 正則であることを示せ. (b) 逆行列を求めよ.

(東京大 2022) (m20220704)

0.49 a を定数とする.

$$\text{連立一次方程式} \begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ -x - 2y - 2z + 2w = -2 \\ 2x - 2y - z + aw = -1 \\ 3x - 3y + az - w = -2 \end{cases}$$

について,

(1) この方程式の係数行列の行列式の値を求めよ.

(2) この方程式を解け. (a の値による場合分けになる.)

(東京工業大 2010) (m20100803)

0.50 実数 a に対して, 次の連立一次方程式が解を持つかどうか調べよ. また, 解が一意的でない場合には一般解を求めよ.

$$\begin{cases} x + ay + a^2z + a^3w = 1 \\ a^3x + y + az + a^2w = -1 \\ a^2x + a^3y + z + aw = 1 \\ ax + a^2y + a^3z + w = -1 \end{cases}$$

(東京工業大 2011) (m20110801)

0.51 a を実数とするとき, 連立一次方程式

$$\begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ 2x + y + 2z + aw = 2 \\ 3x + y + 2z + aw = 2 \\ 2x + az + 2w = 1 \end{cases}$$

について次の問いに答えよ.

- (1) この方程式の係数行列の行列式の値を求めよ。
 (2) この方程式を解け。

(東京工業大 2016) (m20160801)

0.52 p, q を実数とする. 連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ 3x \quad \quad + qz = 1 \\ -2x + py - 6z = 0 \end{cases}$$

が解を持たないとき, 点 (p, q) が pq 平面内で動き得る範囲を図示せよ.

(東京工業大 2017) (m20170801)

0.53 a を実数とする. x, y, z に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax + 2y + 2z = a + 3 \\ 2x + y + az = 4 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

について, 次の問いに答えよ.

- (1) 連立 1 次方程式が解をもつための必要十分条件を a で表せ.
 (2) (1) で求めた条件を a がみたすとき, 連立 1 次方程式の解を求めよ.

(東京工業大 2018) (m20180801)

0.54 x_1, x_2, x_3, x_4 に関する次の連立方程式が解をもつための条件を a, b, c, d を用いて表せ. また, その条件のもとで解をすべて求めよ.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = a \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = b \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 = c \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = d \end{cases}$$

(東京工業大 2019) (m20190801)

0.55 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ とするとき, 次の重積分を求めよ.

$$\iint_D (2x^2 + y^2)^2 y^2 dx dy$$

(東京工業大 2019) (m20190804)

0.56 a, b を実数とする. x, y, z に関する連立一次方程式

$$\begin{cases} x + y + az = b \\ x + ay + z = b \\ ax + y + z = b \end{cases}$$

について, 次の問いに答えよ.

- (1) この連立一次方程式が任意の実数 b に対して解をもつための必要十分条件を, a を用いて表せ.
 (2) a が (1) の条件をみたすとき, 解をすべて求めよ.

(東京工業大 2020) (m20200801)

- 0.57 連立方程式
$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + az = 0 \end{cases}$$
 が $x = y = z = 0$ 以外の解をもつような a を求めなさい.
(東京農工大 2006) (m20060902)

- 0.58 t の関数 $x = x(t)$, $y = y(t)$ についての連立微分方程式

$$\begin{cases} x' - 3x + y = -2e^{2t} \\ 6x + y' - 4y = 4e^{2t} \end{cases}$$

の解で、初期条件 $x(0) = 4$, $y(0) = 1$ を満たすものを求めなさい。ただし、 $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$ である。
(東京農工大 2018) (m20180904)

- 0.59 関数 $f(x)$ ($-\pi < x < \pi$) を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{1 - \cos x}} & (-\pi < x < \pi, x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

により定義する。次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ は連続関数であることを示せ。
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$ を求めよ。
- (3) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能でないことを示せ。

(電気通信大 1999) (m19991001)

- 0.60 関数 $f(x, y) = x^2y + xy^2 + y^3 - y$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 1 階および 2 階の偏導関数 $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ を求めよ。
- (2) 連立方程式 $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ の解を求めよ。
- (3) $z = f(x, y)$ の極値を求めよ。

(電気通信大 2000) (m20001002)

- 0.61 3×3 行列 M が

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

と与えられたとして、次の (a)~(d) の計算を考える。

- (1) M^{-1} を求める。
- (2) M を下三角行列 L と上三角行列 U の積 $M = LU$ に分解する。
但し、 L または U のいずれかは、対角要素がすべて 1 に等しい行列とする。

- (3) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

$Mx_1 = e_1, Mx_2 = e_2, Mx_3 = e_3$ を満たすベクトル x_1, x_2, x_3 を求める。

- (4) 連立方程式

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 + 4z_3 = 3 \\ z_1 + z_2 + 3z_3 = 2 \\ 2z_1 + z_2 + 6z_3 = 2 \end{cases}$$

を満たす z_1, z_2, z_3 を求める。

- (1) (a)~(d) のすべての計算を行う場合の、適切な計算の順序を示し、手順を簡単に説明せよ。
 (2) 前問の解答の手順に従って、(a)~(d) の各々の解を求めよ。

(電気通信大 2001) (m20011007)

0.62 コイン投げを 1 回行い、その結果に応じた X を

$$X = \begin{cases} 1 & (\text{裏が出たとき}) \\ 2 & (\text{表が出たとき}) \end{cases}$$

のように定めてから、偏りのないサイコロを X 回投げる。このときのサイコロの 1 の目の出現回数を Y とする。

コインの表の出る確率を p として、以下の問いに答えよ。

- (1) X の確率 $P(X = i)$ ($i = 1, 2$), X の期待値 $E(X)$, X の分散 $V(X)$ を p を使って表せ。
 (2) 条件つき確率 ($X = i$ という条件の下での Y の確率) $P(Y = j | X = i)$ を可能な (i, j) の組み合わせに対しすべて求めよ。
 (3) 条件つき期待値 ($X = i$ という条件の下での Y の期待値) $E(Y | X = i)$ ($i = 1, 2$) を求めよ。
 (4) Y の確率 $P(Y = j)$ ($j = 0, 1, 2$), Y の期待値 $E(Y)$ を p を使って表せ。

(電気通信大 2006) (m20061011)

0.63 次の重積分について、以下の問いに答えよ。

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{1 + (x+y)^4} \quad (D : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1)$$

- (1) $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ とおくとき、 x, y の u, v に関するヤコビアン $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ を求めよ。
 (2) I の値を求めよ。

(電気通信大 2011) (m20111004)

0.64 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を平面 $x+z=0$ に関する対称移動とし、 $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を平面 $y-z=0$ に関する対称移動とすると、以下の問いに答えよ。

- (1) 平面 $x+z=0$ の原点を通る法線に点 (x, y, z) からおろした垂線の足を P とするとき、点 P の座標を求めよ。
 (2) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し、 $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ となる 3 次正方行列 A を求めよ。
 (3) 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ を解け。
 (4) 平面 $x+z=0$ と平面 $y-z=0$ のなす角 θ を求めよ、ただし、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。
 (5) $g \circ f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ は原点を通る直線を軸とする回転移動となる。軸となる直線の方角ベクトルと回転する角度を答えよ。

(電気通信大 2013) (m20131002)

0.65 C^1 級関数 $f(r)$ に対して、次の合成関数

$$u(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2})$$

を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) xyz 空間内の曲面 $S : z = u(x, y)$ を考える. このとき, S 上の点 $(\cos \alpha, \sin \alpha, f(1))$ における S の接平面と z 軸との交点の z 座標 z_0 を $f(1), f'(1)$ を用いて表せ. ただし, α は定数とする.
- (2) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ が r の関数として表されることを示せ.
- (3) $f(r) = r^2 e^{-r^2}$ のとき, 次の重積分 I の値を求めよ.

$$I = \iint_D u(x, y) \, dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

(電気通信大 2019) (m20191003)

- 0.66** xy 平面上の曲線 $C : \begin{cases} x = \sin t \\ y = t \cos t \end{cases} \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ について考える. C 上で y は x の関数となるが,

これを $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) と表す. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ ($0 < x < 1$) を t の関数として表せ.
- (2) $f(x)$ の $x = \frac{1}{2}$ におけるテイラー展開

$$f(x) = a_0 + a_1 \left(x - \frac{1}{2}\right) + a_2 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \dots$$

の係数 a_0, a_1, a_2 を求めよ.

- (3) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分を D とするとき, 重積分 $\iint_D x \, dx dy$ の値を求めよ.

(電気通信大 2022) (m20221003)

- 0.67** (1) m, n を整数とするととき, 以下の式が成り立つことを示せなさい.

$$\int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx = 0$$

- (2) 次の周期関数について解答しなさい.

$$f(x) = \begin{cases} -k & (-\pi < x < 0) \\ k & (0 < x < \pi) \end{cases}, \quad f(x + 2\pi) = f(x) \quad k > 0$$

この関数を以下のように無限級数で表すとき, その係数 a_0, a_n, b_n を求めなさい. さらに, 求められる無限級数を $n = 7$ の項まで示しなさい.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

(横浜国立大 2008) (m20081105)

- 0.68** 次の関数をフーリエ級数 $y = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ に展開せよ.

- (1) 区間 $x = [-\pi, \pi]$ で定義される関数 $y = \begin{cases} a : x \geq 0, & a \text{ は実定数} \\ 0 : x < 0 \end{cases}$
- (2) 区間 $x = [0, \pi]$ で定義される三角関数 $y = a \sin(nx) \cos(nx)$ ここで n は整数
- (3) 区間 $x = [0, \pi]$ で定義される一次関数 $y = x$

(横浜国立大 2017) (m20171102)

0.69 次の初期値問題を解け.

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + x = \sin 2t & (t > 0), \\ x(0) = 0, \\ \frac{dx}{dt}(0) = 0 \end{cases}$$

(千葉大 1997) (m19971202)

0.70 次の連立常微分方程式の一般解を求めなさい.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + 1 \\ \frac{dy}{dt} = -x + 3y - 1 \end{cases}$$

(千葉大 2003) (m20031204)

0.71 (1) 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = -xy$ の一般解を求めなさい.

(2) 初期値問題 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -xy + xe^{-x^2/2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ の解を求めなさい.

(千葉大 2004) (m20041203)

0.72 次の連立方程式を行列式を用いて解きなさい.
$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x + y + 3z = 22 \\ 3x + 2y + z = 25 \end{cases}$$

(千葉大 2007) (m20071203)

0.73 実数直線 \mathbb{R} 上の関数 $f(t)$ が以下のように定義されているとする.

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & 1 \leq t \leq 5, \\ (t-6)^2, & 5 \leq t \leq 6. \end{cases}$$

以下の問に答えよ.

- (1) 区間 $[0, 6]$ 上の f のグラフを描け.
- (2) 定積分 $\int_0^6 f(t)dt$ を求めよ.
- (3) $F(t) = \int_0^t f(s)ds$ とおくとき, すべての t に対して $F(t)$ を求め, 区間 $[0, 6]$ 上の F のグラフを描け.
- (4) 区間 $(0, 6)$ 内の t に対して一階の導関数 $F'(t)$ を求めよ.
- (5) 関数 $F_1(t)$ と $F_2(t)$ を以下のように定義する.

$$F_1(t) = \int_2^t f(s)ds, F_2(t) = \int_3^t f(s)ds.$$

このとき, $F_1(t) - F_2(t)$ を求めよ.

(筑波大 2000) (m20001301)

0.74 $2 \leq x \leq 2$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 2\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) & \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 2\right) \\ 0 & \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

を y 軸の回りに 1 回転してできる曲面によって定義される容器がある. この容器に毎秒 π の割合で水を注入する. 注入開始から 5 秒経過した時点での状態について, 次の各問に答えなさい.

- (1) 容器の底面から測った水面の位置 (h) を求めなさい.
- (2) 水面の上昇速度 (v) を求めなさい.
- (3) 水面の面積の増加速度 (w) を求めなさい.

(筑波大 2004) (m20041306)

0.75 (1) 次の連立方程式の解を求めよ.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 4 \\ 4x + 3y + 2z = 5 \\ 1x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

(2) 次の連立方程式が解を持つための係数 a の条件を求めよ.

$$\begin{cases} 2x + 3y + az = 4 \\ 4x + 3y + 2z = 5 \\ ax + 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

(筑波大 2004) (m20041320)

0.76 次の微分方程式を解くために, 以下の設問に答えよ.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 = 2x_1 - 2x_2 \\ \frac{d}{dt}x_2 = -x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

- (1) 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ とおく. この行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるように行列 P を定め, 行列 A を対角化せよ.
- (3) ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とおく. \mathbf{x} と A を用いて, 上の微分方程式を表せ.
- (4) ベクトル $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおく. $P\mathbf{y} = \mathbf{x}$ として, これを設問 (3) で求めた表現に代入せよ. また, この y_1, y_2 に関する微分方程式の一般解を求めよ.
- (5) x_1, x_2 の一般解を求めよ.
- (6) $t = 0$ における初期値 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に対応する解 x_1, x_2 の, $t \rightarrow \infty$ における振る舞いを調べよ.

(筑波大 2004) (m20041321)

0.77 関数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax - 2}{x - 2} & x > 2 \text{ のとき} \\ b & x \leq 2 \text{ のとき} \end{cases}$

がすべての点において連続となるように, 定数 a と b の値を決めよ.

(筑波大 2005) (m20051301)

0.78 未知数 x_1, \dots, x_n についての連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を考える. ここで,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

である. さらに, A の第 i 列の列ベクトルを \mathbf{a}_i とおくことにより $A = [\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_n]$ と表す. このとき, 以下の設問に答えよ.

- (1) $Ax = b$ の解 x が存在するための必要十分条件は b が a_1, \dots, a_n の 1 次結合で表されることである. このことを示せ.
- (2) $Ax = b$ の解 x が存在するための必要十分条件は $\text{rank}[a_1 \ \dots \ a_n] = \text{rank}[a_1 \ \dots \ a_n \ b]$ が成り立つことである. このことを示せ. ここで, $[a_1 \ \dots \ a_n \ b]$ は A の右側に列ベクトル b を加えた m 行 $n+1$ 列の行列を表す.
- (3) 次の連立 1 次方程式の解が存在するかどうか調べ, 存在するときはそれを求めよ.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

- (4) 次の連立 1 次方程式の解が存在するかどうか調べ, 存在するときはそれを求めよ.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 7 \\ -2x_1 - 5x_2 - x_3 + 13x_4 = -12 \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 21x_4 = 19 \end{cases}$$

(筑波大 2005) (m20051312)

- 0.79** 次の連立方程式の解を調べよ. ただし, a および b は実数のパラメータとする.

$$\begin{cases} x - y - 2z = -2 \\ ax - by - z = -1 \\ x - y - 4az = -4b \end{cases}$$

(筑波大 2007) (m20071303)

- 0.80** a, b を $a^2 + b^2 = 1$ をみたす実数の定数とし, D を $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ で定めるとき,

積分 $\iint_D \frac{(ax + by)^2}{\sqrt{1 - (ax + by)^2}} dx dy$ を求めよ.

必要なら次の変数変換を用いてよい. $\begin{cases} u = ax + by \\ v = -bx + ay \end{cases}$

(筑波大 2007) (m20071309)

- 0.81** (1) 次の連立一次方程式の解の集合を求めよ. $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$

- (2) 次の連立一次方程式の一般解を求めよ. $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y + z = 2 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$

(筑波大 2007) (m20071319)

- 0.82** 次の連立一次方程式を解け. $\begin{cases} 8x + 5y + 7z = 7 \\ 7x + 2y + 7z = 2 \\ 2x + 9y + 8z = -3 \end{cases}$

(筑波大 2008) (m20081329)

- 0.83** 次の連立不等式で示される領域 S について, 以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 18 \\ x + 2y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

- (1) S の面積を求めよ.
 (2) S 中で $x + y$ の値を最大にする点での x と y の値を求めよ.

(筑波大 2008) (m20081334)

0.84 2つの連続な確率変数 X, Y の同時確率密度関数が以下に与えられる.

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y & , \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

- (1) X の期待値を求めなさい.
 (2) $X = 0.5$ の時の Y の条件付確率密度関数を求めなさい.

(筑波大 2009) (m20091304)

0.85 変数 x, y の関数 $z = f(x, y)$ を変数変換 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ により新しい変数 r, θ で表す. このとき, 関数 $z = f(x(r, \theta), y(r, \theta))$ について以下の設問に答えよ.

- (1) 1階偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ を $r, \theta, \frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta}$ を用いて表せ.
 (2) 2階偏導関数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ は

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial z}{\partial \theta} - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

であることを示せ.

(筑波大 2009) (m20091308)

0.86 領域 $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$ 上での重積分 $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ を以下の設問に従って求めよ. ただし, $a > 0, b > 0$ とする.

- (1) $\begin{cases} x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta \end{cases}$ により変数変換を行う. 積分領域 D を変数 r, θ で表せ.
 (2) 前問(1)の変数変換を行ったときのヤコビアンを求めよ.
 (3) 以上の結果を用い重積分 I を求めよ.

(筑波大 2009) (m20091309)

0.87 独立変数が1個 (t), 従属変数が2個 ($x = x(t), y = y(t)$) の連立微分方程式:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + \sqrt{2}y \\ \frac{dy}{dt} = \sqrt{2}x + y \end{cases}$$

を考える. 初期条件を $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ としたときの解を次の設問に従って求めよ.

- (1) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ とおいて, 与えられた微分方程式を行列 A を使って, $\frac{d}{dt} \mathbf{x} = A\mathbf{x}$ の形に書き換える. A を具体的な行列の形で表せ.
 (2) A の固有値, 固有ベクトルをすべて求めよ. 固有ベクトルは正規化 (規格化) し, それを $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ とする.
 (3) $\mathbf{x}(t) = c_1(t)\mathbf{p}_1 + c_2(t)\mathbf{p}_2$ とおくことにする. $c_1(0), c_2(0)$ は x_0, y_0 を使ってどう書けるか.

- (4) $c_1(t), c_2(t)$ が満たす (t に関する) 微分方程式を求めよ.
- (5) 前問 (4) で求めた微分方程式を解いて, $c_1(t), c_2(t)$ を求めよ. 初期条件 $c_1(0), c_2(0)$ は, 設問 (3) で得ていることに注意せよ.
- (6) $x(t), y(t)$ を x_0, y_0 を使って表せ.

(筑波大 2009) (m20091310)

0.88 次の 1 階連立微分方程式の一般解を求めよ.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

(筑波大 2011) (m20111301)

0.89 次の連立一次方程式を掃き出し法によって三角行列に変形して, x_1, x_2, x_3 を求めなさい. 解答に際しては, 以下の各段階に対応する行列を明記しなさい.

$$\begin{cases} 10x_1 - 30x_2 + 20x_3 = 310 \\ 3x_1 - 4x_2 - 69x_3 = 43 \\ 9x_1 - 20x_2 - 82x_3 = 334 \end{cases}$$

第 1 段階

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{array} \right]$$

第 2 段階

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \end{array} \right]$$

第 3 段階

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right]$$

(筑波大 2011) (m20111307)

0.90 制限時間 1 時間のテストに対して, 一人の学生がそれを解答するまでに要する時間を y とする. このとき, y は, 次の確率密度関数に従う確率変数であるとして, 以下の問題に答えなさい.

$$f(y) = \begin{cases} cy^2 + y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

- (1) c を求めなさい.
- (2) 分布関数 $F(y)$ を求めなさい.
- (3) $f(y)$ と $F(y)$ のグラフを描きなさい.
- (4) $F(y)$ において, $F(-1), F(0), F(1)$ を求めなさい.
- (5) 30 分以内に解答を終了する確率を求めなさい.

(筑波大 2011) (m20111313)

0.91 a, b は正の定数とし, D を

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

で定めるとき, 積分

$$\iint_D |(ax + by)(-bx + ay)| e^{-(ax+by)^2} dx dy$$

を次のようにして求めよ.

(1) 次の変数変換のヤコビアンを計算せよ.

$$\begin{cases} u = ax + by, \\ v = -bx + ay \end{cases}$$

(2) 上の変数変換を用いて積分を計算せよ.

(筑波大 2011) (m20111322)

0.92 同時確率密度関数

$$f(x, y) = \begin{cases} 6(x - y) & 0 \leq y < x \leq 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

をもつ連続な確率変数 X, Y を考える.

(1) X, Y の周辺確率密度関数をそれぞれ求めよ.

(2) X, Y の期待値 $E(X), E(Y)$ をそれぞれ求めよ.

(3) X, Y の分散 $V(X), V(Y)$ をそれぞれ求めよ.

(筑波大 2012) (m20121309)

0.93 数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ は次の漸化式を満たす.

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = 2x_n - 3y_n - 2z_n \\ z_{n+1} = 3x_n + 3y_n - z_n \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A を用いて漸化式を $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ と表したとき, A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $x_0 = -5, y_0 = 10, z_0 = 5$ のとき, x_n, y_n, z_n を求めよ.

(筑波大 2013) (m20131311)

0.94 x, y, z に関する連立 1 次方程式について, 以下の問いに答えよ. a は定数である.

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

(1) 解をもつために定数 a が満たすべき条件を求めよ.

(2) そのときの解を求めよ.

(筑波大 2013) (m20131312)

0.95 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} x - [x] & 0 \leq x - [x] < \frac{1}{2} \\ 1 - (x - [x]) & \frac{1}{2} \leq x - [x] < 1 \end{cases}$$

で定義する. ただし $[x]$ は x 以下の最大の整数を表す. $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(2^k x)}{2^k}$$

とおく. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) 関数 $f(x)$ の, $-1 \leq x \leq 1$ におけるグラフを描け.
- (2) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $g(x) \leq 1$ が成り立つことを示せ.
- (3) 関数 $g(x)$ は連続であることを示せ.
- (4) 自然数 n に対して, $g\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{n}{2^n}$ を示せ.
- (5) 関数 $g(x)$ は $x = 0$ において微分不可能であることを示せ.

(筑波大 2014) (m20141315)

0.96 下の関数 f が $(x, y) = (0, 0)$ で連続かどうかを, 理由を示して答えなさい.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2 + y^2}{y} & (y \neq 0) \\ 0 & (y = 0) \end{cases}$$

(筑波大 2015) (m20151314)

0.97 関数 $f(x)$ が次式で与えられているとする.

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $n = 2$ のとき, $x = 0$ において f は微分可能であることを示せ.
- (2) $n = 2$ のとき, $f'(x)$ は $x = 0$ で連続であるかどうかを示せ.
- (3) $n = 3$ のとき, $f'(x)$ は $x = 0$ で連続であるかどうかを示せ.

(筑波大 2016) (m20161311)

0.98 関数 $f(x)$ と f の定義域に含まれる区間 $[0, 1]$ を考える.

$$x_i = \frac{i}{n} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

で与えられる区間 $[0, 1]$ の分割に対して,

$$I_k = (x_{k-1}, x_k] \quad (k = 1, \dots, n)$$

とし, 次の和を定義する.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sup_{x \in I_k} f(x)$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \inf_{x \in I_k} f(x)$$

この S_n, s_n がそれぞれ $n \rightarrow \infty$ において極限を持つとき,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

とする. $S = s$ ならば関数 f が区間 $[0, 1]$ で積分可能であるといい,

$$S = s = \int_0^1 f(x) dx$$

と書く. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $f(x) = x$ とするとき, (a) S_n, s_n を求め, (b) f が $[0, 1]$ 上で積分可能かどうかを示せ.

(2) 以下の関数 f が $[0, 1]$ 上で積分可能かどうかを示せ.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \text{ が無理数}) \\ x & (x \text{ が有理数}) \end{cases}$$

ただし, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ である.

(筑波大 2016) (m20161312)

0.99 次の関数 $f(x)$ について, 以下の設問に答えよ.

$$f(x) = \begin{cases} x \frac{e^{1/x} - 1}{e^{1/x} + 1} & (x \neq 0) \\ a & (x = 0) \end{cases}$$

(1) すべての実数 x において連続となる a に関する条件を求めよ.

(2) 上記 (1) の条件のもとで, $x = 0$ における微分可能性を調べよ.

(3) 上記 (2) において微分可能である場合は $f'(0)$ を求めよ. 微分可能ではないが, 右側微分係数 $f'_+(0)$, 左側微分係数 $f'_-(0)$ が存在する場合は, それぞれを求めよ. ただし, 存在しない場合は, “存在しない” と答えること.

(筑波大 2016) (m20161317)

0.100 領域 $D = \{(x, y) \mid (x+y)^2 + 4(x-y)^2 \leq 1\}$ における重積分

$I = \iint_D \frac{|x^2 - y^2|}{(x+y)^2 + 4(x-y)^2} dx dy$ の値を求めたい. 以下の問いに答えよ.

(1) $x + y = r \cos \theta$, $x - y = \frac{r}{2} \sin \theta$ とするとき, x, y の r, θ に関するヤコビ行列式 (ヤコビアン) を計算せよ.

(2) I を (1) で与えられた変数変換を用いて求めよ.

(筑波大 2017) (m20171301)

0.101 次の 3 変数連立一次方程式を考える.

$$\begin{cases} cx_1 + x_2 + x_3 = 2c \\ x_1 + cx_2 + x_3 = c + 1 \\ x_1 + x_2 + cx_3 = 3c - 1 \end{cases}$$

ただし, c は定数である. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 一意の解が得られるときのすべての c の値を求めよ. また, それぞれの c に対応する解を求めよ.
- (2) 解が存在しないときのすべての c の値を求めよ.
- (3) 解が一組より多くなるときのすべての c の値を求めよ. またそれぞれの c に対応する解を求めよ.

(筑波大 2017) (m20171306)

0.102 以下の関数 $f(x, y)$ が原点 $(x, y) = (0, 0)$ で連続かどうかを, その理由とともに答えよ.

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{y} & (y \neq 0) \\ 0 & (y = 0) \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 3y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

(筑波大 2017) (m20171308)

0.103 $E = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}\}$ とする. \mathbb{R}^2 で定義された連続関数 $f(x, y)$ の E 上でのリーマン和は, それぞれの正整数 m に対して,

$$R_m(f) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m-i} f\left(\frac{2i}{m}, \frac{j}{m}\right) \frac{2}{m^2}$$

で与えられている. $f(x, y) = x + y$ であるとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 関数 $f(x, y)$ の E 上でのリーマン和 $R_m(f)$ を求めよ. ただし, $\sum_{k=1}^m k^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$ である.
- (2) (1) で得られたリーマン和を用いて, 関数 $f(x, y)$ の E 上での二重積分を求めよ.
- (3) 関数 $f(x, y)$ の E 上での累次積分を求めよ.

(筑波大 2017) (m20171309)

0.104 X を非負値離散型確率変数とする. $a > 0$ に対して, 以下の問いに答えよ.

- (1) 確率変数 I を次のよう定義する,

$$I = \begin{cases} 1 & (X \geq a) \\ 0 & (0 \leq X < a) \end{cases}$$

$Pr(A)$ を事象 A が真である確率を表すことにすると, I の期待値 $E(I)$ と「 $X \geq a$ となる」確率 $Pr(X \geq a)$ は以下の等式 (i) を満たすことを示せ,

$$E(I) = Pr(X \geq a) \tag{i}$$

- (2) 等式 (i) を用いて, $E(X)$ と $Pr(X \geq a)$ は以下の不等式 (ii) を満たすことを示せ.

$$Pr(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \tag{ii}$$

- (3) 不等式 (ii) を用いて, $Pr(|X - E(X)| \geq a)$ と X の分散 $V(X)$ は以下の不等式 (iii) を満たすことを示せ.

$$Pr(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2} \tag{iii}$$

(筑波大 2017) (m20171310)

0.105 次の漸化式について考える.

$$\begin{cases} a_{n+1} = 7a_n - 6b_n \\ b_{n+1} = 3a_n - 2b_n \end{cases} \quad a_1 = 1, b_1 = 0$$

以下の問いに答えよ.

- (1) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ を満たす行列 A を求めよ.
- (2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P , およびその逆行列 P^{-1} を求めよ.
- (4) a_n, b_n の一般項を求めよ.

(筑波大 2018) (m20181302)

0.106 関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) f は原点 $x = 0$ で連続である. その理由を答えよ.
- (2) f の原点 $x = 0$ 以外の導関数を求めよ.
- (3) f の原点 $x = 0$ での微分係数を定義に従って求めよ.
- (4) f の導関数 f' が原点 $x = 0$ で連続かどうかを, その理由とともに答えよ.

(筑波大 2018) (m20181310)

0.107 次の二重積分について, 以下の問いに答えなさい.

$$V = \iint_D (x^2 + xy) dx dy \quad \dots\dots(*)$$

ただし, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ とする.

- (1) x と y を極座標変換し, 式 (*) の右辺を書き換えなさい.
- (2) V の値を求めなさい.

(筑波大 2019) (m20191302)

0.108 下記の 2 重積分を変数変換によって求めることを考える.

$$I = \iint_D (4x^2 - y^2) e^{8xy} dx dy, \quad D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq 2x + y \leq 1, 0 \leq x - \frac{1}{2}y \leq 1 \right\}$$

- (1) $u = 2x + y, v = x - \frac{1}{2}y$ と変数変換したとき, 変数の組 (u, v) の積分領域 E を示せ.
- (2) E から D への写像関数のヤコビアンを求めよ
- (3) I を求めよ.

(筑波大 2019) (m20191311)

0.109 (1) 関数 $f(x, y)$ を次のように定義する.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

この関数 $f(x, y)$ について, 以下の問いに答えよ.

- ① $(x, y) = (0, 0)$ での x についての偏微分係数 $f_x(0, 0)$ を求めよ.
 ② $k \neq 0$ に対して $(x, y) = (0, k)$ での x についての偏微分係数 $f_x(0, k)$ を求めよ.
 ③ 偏導関数 $f_x(x, y)$ の $(x, y) = (0, 0)$ での y に関する偏微分係数 $f_{xy}(0, 0)$ の定義を f_x を用いて書け.
 ④ $f_{xy}(0, 0)$ を求めよ.
- (2) 関数 $g(x, y)$ を次のように定義する.

$$g(x, y) = \frac{\log(1+x)}{1+y}$$

この関数 $g(x, y)$ について、以下の問に答えよ.

- ① 導関数 $g_x(x, y)$, $g_y(x, y)$, $g_{xx}(x, y)$, $g_{xy}(x, y)$, $g_{yy}(x, y)$ と $(x, y) = (0, 0)$ におけるそれぞれの値を求めよ.
 ② $(x, y) = (0, 0)$ 周りのテイラー展開を 2 次の項まで計算せよ. なお, 3 次以降は剰余項 R_3 と表記すれば良い.

(筑波大 2020) (m20201304)

- 0.110** 次の関数 $f(x)$ の $x = 0$ における微分可能性を調べよ (a は定数). ただし, 逆三角関数は主値をとるものとする.

$$f(x) = \begin{cases} a|x| - x \tan^{-1} \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

(筑波大 2021) (m20211315)

- 0.111** 同じ係数を持つ 3 つの連立方程式

$$(1) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 3 \end{cases}$$

において, (1) の解は $x = 2, y = 1, z = -2$, (2) の解は $x = -1, y = 2, z = 4$, (3) の解は $x = -3, y = 0, z = 5$ であるという. このとき, $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ を定めよ.

(埼玉大 1999) (m19991404)

- 0.112** 閉区間 $[0, 2\pi]$ 上の関数

$$f(x) = \sqrt{1 + a^2 + b^2 - 2a \cos x - 2b \sin x}$$

を考える. ただし, a, b は正の定数とする.

- (1) $f(x)$ の最大値 M と最小値 m を求めよ.
 (2) 関係式

$$\begin{cases} a = 1 + \frac{\cos \theta}{\sqrt{2}} \\ b = 1 + \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

があるとき, 積 Mm の最大値を求めよ.

(埼玉大 2000) (m20001401)

- 0.113** 実数 α に対し, $f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x^\alpha \sin \frac{1}{x} & (x > 0) \end{cases}$ とおく.

- (1) $\alpha > 1$ のとき, $f(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で微分可能であることを示せ.

(2) $\alpha \leq 1$ のとき, $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能でないことを示せ.

(3) $\alpha > 1$ のとき, $f'(x)$ が $-\infty < x < \infty$ で連続となる α の範囲を求めよ.

(埼玉大 2003) (m20031402)

0.114 以下の問いに答えなさい. ただし, $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, $D = \frac{d}{dt}$ である.

(1) 次の 1 階微分方程式の一般解を求めなさい. $2xyy' = x^2 + y^2$

(2) 次の 2 階微分方程式の一般解を求めなさい. $y'' - 7y' + 10y = 6x + 8e^{2x}$

(3) 次の連立微分方程式の一般解を求めなさい.
$$\begin{cases} Dx = 4x - y \\ Dy = x + 2y \end{cases}$$

(埼玉大 2003) (m20031406)

0.115 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の逆行列を求めなさい.

(2) 次の連立 1 次方程式の解 x, y, z を (1) の結果を用いて求めなさい.

$$\begin{cases} -x - y - z = 3 \\ 4x - 3y - 4z = 2 \\ -4x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

(3) 行列 A の固有値, 固有ベクトルを求めなさい.

(埼玉大 2003) (m20031409)

0.116 次の連立一次方程式について考える.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 5z = 3 \\ x + 5y - 4z = -3 \end{cases}$$

(1) 上の連立方程式の係数行列を A とするとき, $\text{rank}A = 3$ となることを示せ.

(2) クラメールの公式を使って x, y, z を求めよ.

(埼玉大 2011) (m20111404)

0.117 a, b を実数とし, 次の連立 1 次方程式を考える.

$$(*) \begin{cases} x + 2y - 2z = 3 \\ 2x + y + az = 9 \\ -3x - 5y + 4z = b \end{cases}$$

(1) 連立 1 次方程式 (*) が解を持つ条件を a, b を用いて述べよ.

(2) 連立 1 次方程式 (*) が解を無限個持つような a, b に対して, その一般解を求めよ.

(埼玉大 2014) (m20141405)

0.118 半径 a の円の面積を二重積分を用いて求めよ.

ただし, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ とする.

(埼玉大 2019) (m20191404)

0.119 次の連立方程式の一般解を求めよ.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x + y \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 5y \end{cases}$$

(埼玉大 2019) (m20191408)

0.120 次の4つの不等式が与えられたとき, 以下の3問に答えよ.

$$\begin{cases} x + 2y \leq a \\ x - y \leq 4 \\ 2x - y \geq -5 \\ 2x + y \geq -7 \end{cases}$$

- (1) $a = 10$ のとき, この4つの不等式をすべて満たす x と y の組で, どちらも正の整数となるものは何組あるか.
- (2) $a = 10$ のとき, この4つの不等式をすべて満たす x と y の組で, どちらも負の整数となるものは何組あるか.
- (3) 4つの不等式をすべて満たす x と y のうち, x と y がどちらも正の整数となる組とどちらも負の整数となる組が同数となるように a を変化させるとき, a が最小となる値を求めよ. ただし, $a > 0$ とする.

(群馬大 2005) (m20051504)

0.121 次の3つの不等式が与えられているとき, 以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} ax - y \geq 0 \\ x - 3y \leq 0 \\ 4x + 3y \leq 30 \end{cases}$$

- (1) この3つの不等式をすべて満たす領域の面積が15であるとき, a の値を求めよ. ただし, $a > 0$ とする.
- (2) (1) で求めた a の値のとき, この3つの不等式をすべて満たす領域の中で, x と y の組がともに整数となるものは何組あるか.
- (3) (1) で求めた a の値のとき, この3つの不等式をすべて満たす x と y の組で, $-x + y$ が最小となる x と y を求めよ.

(群馬大 2009) (m20091502)

0.122 次の3つの直線が与えられたとき. 以下の3つの問に答えよ.

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = \frac{1}{2}x \\ y = 3x \end{cases}$$

- (1) この3つの直線で囲まれる面積が10であり, 2つの直線 $y = ax + b$ と $y = \frac{1}{2}x$ が垂直に交わるとする. このとき a と b の値を求めよ. ただし, $b > 0$ とする.
- (2) (1) で求めた a と b の値のとき, この3つの直線で囲まれる領域の中で, x 座標と y 座標がともに整数となる点はいくつあるか. ただし, 境界上の点を含む.
- (3) (1) で求めた a と b の値のとき, 直線 $y = ax + b$ が $x = 2$ において, 2次曲線 $y = cx^2 + 8$ と接するとする. このとき, c の値を求めよ.

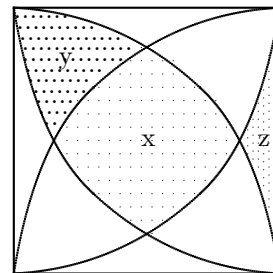
0.123 右下の図形は1辺の長さ1の正方形の中に、各頂点を中心として半径1の円弧を4つ描いたものである。図の x, y, z それぞれの領域の面積をやはり x, y, z で表す。

(1) 次の各式の空欄を埋めて、 x, y, z の満たす連立方程式を作れ。

ただし、 π は円周率である。

$$\begin{cases} \square x + \square y + \square z = 1 \\ \square x + \square y + \square z = \frac{\pi}{4} \\ x + 2y + z = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{\square}}{\square} \end{cases}$$

(2) x を求めよ。



(図書館情報大 1999) (m19991601)

0.124 整数 x の n 乗 x^n を計算するとき、次の漸化式

$$x^k = \begin{cases} x^\ell \times x^\ell & (k = 2\ell \text{ のとき}) \\ x^{2\ell} \times x & (k = 2\ell + 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を再帰的に適用すると効率よく求められることが、2200 年以上前から知られている。

(1) $n = 15$ のとき、上の漸化式を適用して x^{15} を分解すると、

$$\begin{aligned} x^{15} &= x^{\boxed{7}} \times x \\ x^{\boxed{7}} &= x^{\boxed{4}} \times x^{\boxed{4}} \\ x^{\boxed{4}} &= x^{\boxed{2}} \times x \\ x^{\boxed{2}} &= x^{\boxed{2}} \times x^{\boxed{2}} \\ x^{\boxed{2}} &= x^{\boxed{2}} \times x \\ x^{\boxed{2}} &= x^{\boxed{2}} \times x^{\boxed{2}} \end{aligned}$$

となるので、これを下の行から逆順にたどれば、 x^{15} が6回の乗算で求められる。

(2) $n = 15$ に対して (1) は実は最短手順ではなく、途中の値を1個保存することにより、5回の乗算で x^{15} を求めることができる。その手順の1つは、

$$\begin{aligned} x &\times x &\longrightarrow x^{\boxed{2}} \\ x^{\boxed{4}} &\times x^{\boxed{2}} &\longrightarrow x^{\boxed{6}} \\ x^{\boxed{6}} &\times x^{\boxed{3}} &\longrightarrow x^{\boxed{9}} \\ x^{\boxed{9}} &\times x^{\boxed{3}} &\longrightarrow x^{\boxed{12}} \\ x^{\boxed{12}} &\times x^{\boxed{3}} &\longrightarrow x^{15} \end{aligned} \quad (\text{ただし、} x^{\boxed{9}} \text{を保存した。})$$

と表される。($\boxed{\text{キ}} \sim \boxed{\text{ツ}}$)には同じ数字が入る箇所もある。また、 $\boxed{\text{キ}}$ と $\boxed{\text{ク}}$ のように交換可能なものについては、解答順は問わない。

(図書館情報大 2002) (m20021604)

0.125 (1) 微分方程式 $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = -1 \end{cases}$ の解 $y(t)$ を求めよ。

(2) (1) で求めた関数 $y(t)$ のグラフを $0 \leq t \leq 4\pi$ の範囲でかけ。

(茨城大 1999) (m19991705)

0.126 (1) 下記の方程式をみたす x の値を求めよ。

$$\begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 0 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$$

(2) 次の連立1次方程式をクラメルの公式を用いて解け.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

(この公式を知らないときは, 公式を用いないでよい.)

(茨城大 2002) (m20021705)

0.127 $k > 0$ に対して, 微分方程式 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^{k+1} & (t \geq 0) \\ x(0) = 1 \end{cases}$ の解を $x_k(t)$ とする.

(1) $x_k(t)$ を求めよ. (2) $\lim_{k \rightarrow 0} x_k(t)$ を求めよ.

(茨城大 2003) (m20031702)

0.128 連立方程式 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + az = a - 3 \end{cases}$ について

(1) 係数行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix}$ の行列式の値を求めよ.

(2) 拡大係数行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & a & a - 3 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ.

(3) この方程式が解をもつか否かを判定し, 解をもつ場合にはその解を求めよ.

(茨城大 2003) (m20031703)

0.129 (u, v) 平面における正方形 $A = \{(u, v) | 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$ が,

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \end{cases}$$

で表される写像により, (x, y) 平面上に写される図形を B とするとき,

(1) B を (x, y) 平面上に図示せよ. さらに, B の面積は A の面積の何倍であるか, 答えよ.

(2) 二重積分 $\iint_B x dx dy$ を求めよ.

(茨城大 2004) (m20041701)

0.130 $x = x(t), y = y(t)$ のとき, 次の連立微分方程式を初期条件 $x(0) = 0, y(0) = 1$ のもとで解け.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}$$

(茨城大 2008) (m20081706)

0.131 $f(t)$ を $[0, \infty)$ 上で連続かつ広義積分可能な関数とする. また a, b は $a, b > 0$ を満たす実数とし, $g(x, y) = f(a^2x^2 + b^2y^2)$ とおく. 以下の各問いに答えよ.

(1) $f(t)$ が $[0, \infty)$ 上で広義積分可能であることの定義を記述せよ.

(2) 変数変換

$$\begin{cases} x = \frac{r}{a} \cos \theta \\ y = \frac{r}{b} \sin \theta \end{cases}$$

によって、 $r\theta$ 平面内の集合 $[0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ は xy 平面内のどのような集合に写るか図示せよ.

(3) 等式

$$\iint_{[0, \infty) \times [0, \infty)} g(x, y) dx dy = \frac{\pi}{4ab} \int_0^\infty f(t) dt$$

が成り立つことを示せ.

(4)

$$I(a, b) = \iint_{[0, \infty) \times [0, \infty)} e^{-a^2(x^2+1)-b^2(y^2+1)} dx dy$$

とする. (3) の結果を用いて, 条件 $a^2 + b^2 = 1$ の下での $I(a, b)$ の最小値を求めよ.

(茨城大 2009) (m20091706)

0.132 空でない集合 X について考える. X の部分集合全体からなる集合を P とし, X から $\{0, 1\}$ への写像全体の集合を F とする. ここで, $\{0, 1\}$ は整数 0 と 1 からなる集合を表す. F の要素 f, g に対し, X の上で定義された関数 $f * g, f \square g$ を

$$(f * g)(x) = f(x)g(x), \quad (f \square g)(x) = f(x) + g(x) - f(x)g(x), \quad x \in X$$

で定める. また, $A \in P$ に対して, $I_A \in F$ を

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \text{ のとき,} \\ 0 & x \notin A \text{ のとき} \end{cases}$$

で定め, 写像 $\Phi : P \rightarrow F$ を $\Phi(A) = I_A$ と定義する. 以下の各問に答えよ.

(1) $f, g, h \in F$ に対し, 次の等式を示せ.

$$f * (g \square h) = (f * g) \square (f * h), \quad (f \square g) \square h = f \square (g \square h)$$

(2) $A, B \in P$ に対し, 次の等式を示せ.

$$\Phi(A \cap B) = \Phi(A) * \Phi(B), \quad \Phi(A \cup B) = \Phi(A) \square \Phi(B)$$

(3) Φ は全単射であることを示せ.

(茨城大 2010) (m20101707)

0.133 以下の各問に答えよ.

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ -6 & 9 & -3 & -6 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ.

(2) 連立一次方程式 $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ -6x + 9y - 3z = -6 \\ x - 3y + z = 2 \end{cases}$ を解け.

(茨城大 2013) (m20131703)

0.134 $x = x(t)$, $y = y(t)$ のとき, 次の連立微分方程式を初期条件 $x(0) = 5$, $y(0) = 2$ のもとで解け.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases}$$

(茨城大 2013) (m20131704)

0.135 自然数全体の集合 \mathbb{N} から整数全体の集合 \mathbb{Z} への写像 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ を

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ が偶数} \\ -\frac{n-1}{2}, & n \text{ が奇数} \end{cases}$$

と定義する. f による, 偶数全体の集合の像と, 奇数全体の集合の像を求めて, f が全単射であることを示し, f の逆写像 $f^{-1}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ を求めよ.

(茨城大 2015) (m20151706)

0.136 実 2 変数関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

を考える. 以下の各問に答えよ.

- (1) 原点 $(0, 0)$ における $f(x, y)$ の連続性を調べよ.
- (2) 原点 $(0, 0)$ における $f(x, y)$ の偏微分可能性を調べよ.
- (3) 原点 $(0, 0)$ における $f(x, y)$ の全微分可能性を調べよ.
- (4) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ とする.

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy \text{ を計算せよ.}$$

(茨城大 2020) (m20201701)

0.137 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$ を解きなさい.

(山梨大 2007) (m20071801)

0.138 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 4x_2 - 3x_3 + x_3 = 3 \end{cases}$ を解きなさい.

(山梨大 2008) (m20081801)

0.139 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = -2 \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 = -4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$ を解きなさい.

(山梨大 2009) (m20091801)

0.140 連続な確率変数 X の確率密度関数 $p(x)$ が次の式で与えられている.

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq -1 \\ 2(1+x)/3 & \text{for } -1 \leq x \leq 0 \\ (2-x)/3 & \text{for } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{for } 2 \leq x \end{cases}$$

- (1) この確率分布に対して、平均値 m と分散 σ^2 を求めよ。
 (2) 不等式 $P(|X - m| \geq 1) \leq \sigma^2$ がこの確率密度関数に対して成立することを示せ。
 なお $P(|X - m| \geq 1)$ は確率変数 X が平均値より 1 以上離れている事象の確率である。

(山梨大 2018) (m20181808)

0.141 連続的な確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が次の式で与えられたとする。

$$f(x) = \begin{cases} ax(6-x) & (0 \leq x \leq 6) \\ 0 & (x < 0, x > 6) \end{cases}$$

- (1) 定数 a の値を求めよ。
 (2) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散値 $V(X)$ をそれぞれ求めよ。

(山梨大 2020) (m20201803)

0.142 次の x, y, z, u に関する連立一次方程式を解け。

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 4u = 11 \\ x + y + z - u = 6 \\ x + 3y + 5z - 7u = 16 \end{cases}$$

(信州大 2003) (m20031901)

0.143 k を実数とするととき、次の連立 1 次方程式を解け。

$$\begin{cases} kx_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + (k+1)x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (k+2)x_3 = 0 \end{cases}$$

(信州大 2005) (m20051901)

0.144 次の連立 1 次方程式を Cramer の公式により解け。

$$\begin{cases} x + 5y + 2z = 6 \\ 3x - y + z = -2 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

(信州大 2006) (m20061902)

0.145 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ 2x + 3y - z = -1 \\ 3x + ay - 12z = -12 \end{cases}$$

(信州大 2007) (m20071902)

0.146 a, b は実数とする。実数の未知数 x, y, z, w に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 1 \\ 2x + y + 4z + aw = 1 \\ 3x + 4y + z + 2w = 1 \\ 4x + 3y + 2z + w = b \end{cases}$$

は無数の解をもつとする。このとき、 a, b が満たす条件を求め、連立 1 次方程式を解け。

(信州大 2016) (m20161903)

0.147 k を実定数とするとき, x, y, z を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x - y + k^2 z = k \end{cases}$$

について, 以下の問いに答えよ.

- (1) 解をもたないような k の値を求めよ.
- (2) 解を無数にもつような k の値と, そのときの一般解を求めよ.
- (3) 解をただ一つもつための k の条件と, そのときの解を求めよ.

(信州大 2019) (m20191904)

0.148 $f(x)$ を \mathbb{R} 上で定義された実数値関数とする. $f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは, 次の主張が成り立つ事として定義される.

P : 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して, $|x - a| < \delta$ となる任意の x に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ である.

以下の問いに答えよ.

- (1) 命題 P の否定を書け.
- (2) $f(x)$ を次で定義する.

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(1) の答えにもとづいて, $f(x)$ は $x = 0$ で連続ではないことを証明せよ.

(信州大 2019) (m20191906)

0.149 自然数 n に対し n 次正方行列 $A_n = (a_{ij})$ および $B_n = (b_{ij})$ を次のように定める.

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & (i = j > 1) \\ 1 & (\text{その他}) \end{cases} \quad b_{ij} = \begin{cases} 0 & (i = j) \\ 1 & (\text{その他}) \end{cases}$$

- (1) A_4, B_4 の行列式 $|A_4|, |B_4|$ を求めよ.
- (2) A_n の行列式 $|A_n|$ を求めよ.
- (3) B_n の行列式 $|B_n|$ を求めよ.

(信州大 2019) (m20191910)

0.150 実数 p は $0 < p \leq 1$ を満たすとする. $D_n = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{n} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x - \frac{1}{n} \right\}$ ($n = 2, 3, \dots$) とおき, 領域 D_n 上の 2 重積分

$$I_n(p) = \iint_{D_n} \frac{dx dy}{(x - y)^p}$$

を考える. このとき, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(p)$ を調べ. それが存在する場合は極限値を求めよ.

(信州大 2020) (m20201902)

0.151 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ とする. 関数 $f(x, y) = 2x - xy^2$ の D における最大値を求めよ.

(信州大 2021) (m20211901)

0.152 関数 $f(x, y)$ は

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

で定義されているとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f_x(0, 0)$ と $f_y(0, 0)$ を求めよ。
- (2) $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ で全微分可能であることを示せ。
- (3) $f_x(x, y)$ を求めよ。また、 $f_x(x, y)$ は点 $(0, 0)$ で不連続であることを示せ。

(信州大 2022) (m20221901)

0.153 $D_n = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq y, \frac{1}{n} \leq y \leq 1 \right\}$ ($n = 2, 3, \dots$) とおき、領域 D_n 上の 2 重積分

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

を考える。このとき、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ を求めよ。

(信州大 2022) (m20221903)

0.154 次の問いに答えよ。

- (1) どんな無理数 p に対しても、有理数の列 $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = p$ となるものが存在する。その理由を述べよ。
- (2) どんな有理数 q に対しても、無理数の列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = q$ となるものが存在する。その理由を述べよ。
- (3) 関数 f を次のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \text{ が無理数のとき}) \\ 0 & (x \text{ が有理数のとき}) \end{cases}$$

このとき、 f の連続性を述べよ。

(新潟大 2000) (m20002001)

0.155 実変数の実数値関数 $f(x)$ を $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \text{ の場合} \\ 0 & , x = 0 \text{ の場合} \end{cases}$ によって定義する。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ となることを示せ。
- (2) $x \neq 0$ に対して、 $f'(x)$ を求めよ。
- (3) $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ を求めよ。
- (4) $f'(x)$ は $x = 0$ で連続でないことを示せ。
- (3) $F(x, y) = f(xy)$ とおくと、 $xy \neq 0$ に対して、 x に関する偏導関数 $\frac{\partial F}{\partial x}$ 、および、 y に関する偏導関数 $\frac{\partial F}{\partial y}$ を求めよ。

(新潟大 2001) (m20012004)

0.156 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) A の固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ。
- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求めよ。

(3) 数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を $x_0 = 1, y_0 = 0$ とし, $n \geq 1$ に対して,

$$\begin{cases} x_n = 5x_{n-1} - 2y_{n-1} \\ y_n = -2x_{n-1} + 8y_{n-1} \end{cases}$$

と定義する. このとき, 一般項 x_n と y_n を求めよ.

(新潟大 2003) (m20032004)

0.157 (1) x, y, z に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y - 2z = a \\ 2x - y - z = b \\ 3x + 2y - 5z = c \end{cases}$$

が解を持つための必要十分条件は, $7a + b - 3c = 0$ が成り立つことである. このことを示せ.

(2) 実数 x, y, z に関する関数

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$$

の最小値を求めよ. ここで, $\|\mathbf{v}\|$ は標準内積に関するベクトル \mathbf{v} の大きさである.

(新潟大 2009) (m20092008)

0.158 a を実数とするとき, 次の未知数 x, y, z, w に関する連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z + 6w = 6 \\ x + y + 2z + 3w = 2 \\ 2x + y + 3z + 2w = 1 \\ 3x + y + 4z + 2w = a \end{cases}$$

(新潟大 2010) (m20102007)

0.159 $\begin{cases} x = 3 \cos \theta \\ y = 5 \sin \theta \end{cases}$ で表される点 $P(x, y)$ はどのような曲線を描くか求めなさい.

また, 概略形も示すこと. (フリーハンドでよい)

(新潟大 2011) (m20112011)

0.160 次の関数 $f(x)$ が $x = 0$ において微分可能であるとき以下の間に答えよ. ただし, e は自然対数の底であり, a, b は定数とする.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & (x < 0 \text{ のとき}) \\ (ax + b)e^{-x} & (x \geq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(1) 定数 a, b を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の増減を調べ, 曲線 $y = f(x)$ の概形を描け.

(3) 定積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ の値を求めよ.

(新潟大 2012) (m20122009)

0.161 実数を成分とする 3×3 行列

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 8 \\ 2 & 5 & b \\ c & 4 & 18 \end{pmatrix}$$

に対して, M により与えられる連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + ay + 8z = 0 \\ 2x + 5y + bz = 0 \\ cx + 4y + 18z = 0 \end{cases}$$

がある. このとき, 次の各問いに答えよ.

(1) 上の連立 1 次方程式の解の集合が

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2z = y + 3z = 0\}$$

であるとき, a, b, c の値を求めよ.

(2) (1) の解である a, b, c を成分にもつ M に対して, M は正則でない. その理由を述べよ.

(3) (1) の解である a, b, c を成分にもつ M に対して, \mathbb{R}^3 から \mathbb{R}^3 への写像 f を $f(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$) によって定義する. このとき, $f(\mathbb{R}^3)$ を求めよ.

(新潟大 2012) (m20122017)

0.162 関数 $f(x)$ を

$$\begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{2x}\right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

により定める. このとき, $f(x)$ は区間 $(-1, 1)$ で微分可能かどうかを答えよ. すなわち微分可能ならば導関数を求め, 微分可能でないなら, そのことを証明せよ.

(新潟大 2013) (m20132001)

0.163 a を定数とする. 以下の連立一次方程式の解が存在する a をすべて求め, その全ての a に対して連立方程式の解 (x, y, z) をすべて求めよ.

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 3x + 5y - 7z = 5 \\ -x - 3y + 5z = a \end{cases}$$

(新潟大 2014) (m20142012)

0.164 a を定数とする. 以下の連立一次方程式の解が存在する a をすべて求め, そのすべての a に対して連立方程式の解 (x, y, z) をすべて求めよ.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 4y + 2z = 3 \\ 3x + 7y + 5z = a \end{cases}$$

(新潟大 2016) (m20162006)

0.165 4次元数ベクトル空間 \mathbb{R}^4 の部分集合 W_1 を次のように定める.

$$W_1 = \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

このとき, 次の各問いに答えよ.

- (1) W_1 は \mathbb{R}^4 の線形部分空間になることを示せ.
 (2) W_1 の基底を求めよ.
 (3) 線形変換 $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ の像 $\text{Im}(f) = \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4\}$ が W_1 であると仮定する. このとき, f の核 $\text{Ker}(f)$ の次元を求めよ.
 (4) W_2 は \mathbb{R}^4 の 2次元線形部分空間で, $W_1 \cup W_2$ が \mathbb{R}^4 の線形部分空間であると仮定する. このとき, $W_1 = W_2$ となることを示せ.

(新潟大 2017) (m20172022)

0.166 次の連立方程式を解け. ただし, a, b は定数とする.

$$\begin{cases} 2x + y + az = b \\ x + 2z = 1 \\ x - y + 3z = 1 \end{cases}$$

(新潟大 2019) (m20192006)

0.167 次の連立方程式を解け. 不定の場合, 任意定数を用いて答えよ.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 4 \\ 4x - 5y + 2z = 10 \\ -6x + 8y - 4z = -14 \end{cases}$$

(新潟大 2020) (m20202006)

0.168 次の連立方程式を解け (a は定数). 不定の場合, 任意の定数 (パラメータ) を用いて答えよ.

$$\begin{cases} x + y + az = a + 2 \\ x + ay + z = a + 2 \\ ax + y + z = a + 2 \end{cases}$$

(新潟大 2022) (m20222011)

0.169 連立方程式 $\begin{cases} ax - y + 3z = 0 \\ x + y + az = 0 \\ x - ay + z = 0 \end{cases}$ が $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ 以外の解をもつような a を求めよ.

(長岡技科大 2001) (m20012106)

0.170 (1) 1周期が T である関数 $f(t)$ は, 以下のようにフーリエ級数展開される.

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$ として C_n および θ_n を, a_n および b_n で表せ. 但し, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ とする.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \end{aligned}$$

(2) 上式におけるフーリエ係数 a_n および b_n は, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ として,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

により計算できる. 1周期において, 次式で定義される関数 $f(t)$ をフーリエ級数展開せよ.

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\frac{T}{2} \leq t < 0 \\ 1, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

(3) $\sin^2 t$ および $\sin^3 t$ を, それぞれフーリエ級数展開せよ.

(4) $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ となることを証明せよ.

(長岡技科大 2005) (m20052106)

0.171 連続時間 $t[s]$ の関数 $f(t)$ のフーリエ変換は,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

により計算される. このことを利用して以下の問に答えよ. ただし, $j = \sqrt{-1}$ であり, ω [rad/s] は角周波数を表す. また, a は正の実数とする.

(1) 関数 $f(t) = \begin{cases} 1 & , 0 < t < a \\ 0 & , t < 0, t > a \end{cases}$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ. また, $f(t)$ と $|F(\omega)|$ をそれぞれ図示せよ. ただし, $|F(\omega)|$ は複素関数 $F(\omega)$ の絶対値を意味する.

(2) $f(t) = \begin{cases} \exp(-at) & , t > 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ. また, $f(t)$ と $|F(\omega)|$ をそれぞれ図示せよ.

(3) $f(t-a)$ のフーリエ変換が $F(\omega)e^{-j\omega a}$ となることを証明せよ.

(4) $f(at)$ のフーリエ変換が $a > 0$ に対して $\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ となることを証明せよ.

(長岡技科大 2006) (m20062105)

0.172 連立微分方程式

$$\begin{cases} x'(t) = -4y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$$

について以下の問いに答えなさい.

(1) 一般解を求めなさい.

(2) 初期条件 $x(0) = 0, y(0) = 1$ を満たす解を求めなさい.

(長岡技科大 2009) (m20092104)

0.173 下の問いに答えなさい.

(1) α を定数, x を未知数とする方程式

$$\alpha x + 3x = 0$$

が $x = 0$ 以外の解を持つような α の値を求めなさい.

(2) α を定数, x, y を未知数とする連立方程式

$$\begin{cases} \alpha x + y = 0 \\ 2x + (\alpha - 1)y = 0 \end{cases}$$

が $x = y = 0$ 以外の解を持つような全ての α の値を求め, それぞれの α に対する $x = y = 0$ 以外の解 (x, y) を 1 つずつ求めなさい.

(長岡技科大 2014) (m20142102)

0.174 実数 t の実数値関数 $x = x(t), y = y(t)$ に関する連立微分方程式

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

を考える. 下の問いに答えなさい.

- (1) $z = x + y$, $w = x - y$ において, (*) を z, w についての連立微分方程式に書き換えなさい.
 (2) 前問 (1) で得られた連立微分方程式の一般解を求めなさい.
 (3) (*) の一般解を求めなさい.

(長岡技科大 2019) (m20192102)

0.175 実数 t の実数値関数 $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ についての連立微分方程式

$$(*) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 6x_1 + 6x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - x_2 \end{cases}$$

を考える. また, $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ とおく. 下の問いに答えなさい.

- (1) A の固有値, 固有ベクトルを求めなさい.
 (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 2 次正方行列 P を一つあげなさい. また, $P^{-1}AP$ を求めなさい.
 (3) P を前問 (2) におけるものとし, 実数 t の実数値関数 $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$ を

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

により定める. このとき, (*) を y_1, y_2 についての連立微分方程式に書き換えなさい. また, y_1, y_2 を求めなさい.

- (4) x_1, x_2 を求めなさい.

(長岡技科大 2021) (m20212102)

0.176 次のことを示せ.

- (1) $f(x) = \begin{cases} x^{-1} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ とする. $f(x)$ は連続でない.
 (2) $f(x) = \begin{cases} x^m & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$ とする. $m \geq 3$ ならば, $f'(x)$ は微分可能である.
 (3) 数列 $\left\{ \frac{1}{n^2} \right\}$ は有界である.

(金沢大 1999) (m19992201)

0.177 (1) 極座標変換 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ に対して, ヤコビ行列式 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

(2) 重積分

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{x^2+y^2} \exp\left(-(\sqrt{x^2+y^2})^3\right) dx dy$$

を求めよ. ただし, $\exp(t) = e^t$ である.

(金沢大 1999) (m19992204)

0.178 変数変換 $\begin{cases} x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta \end{cases}$ (a, b は正定数) に対して, 次の問いに答えよ.

- (1) $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, (x, y) の動く領域 D を図示せよ.

(2) ヤコビ行列式 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

(3) 重積分 $\iint_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} dx dy$ を求めよ.

(金沢大 2000) (m20002202)

0.179 重積分 $I = \iint_D \frac{x}{y\sqrt{1+x^2+y^2}} dx dy$ について次の問に答えよ.

ここに $D = \left\{ (x, y) : y \geq x \geq 0, \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$ とする.

(1) D の形を図示せよ.

(2) 極座標変換 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ を用いて重積分 I の値を求めよ.

(金沢大 2001) (m20012202)

0.180 連立1次方程式 $\begin{cases} x + ay + az = 0 \\ ax + y + az = 0 \\ ax + ay + z = 0 \end{cases}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $x = y = z = 0$ 以外の解をもつように a の値を定めよ.

(2) 上で定めた a の値に対して, この方程式の解を求めよ.

(金沢大 2002) (m20022203)

0.181 $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) n 階導関数 $\sinh^{(n)} t$, $\cosh^{(n)} t$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ.

(2) $\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sinh t \end{cases}$ とおく. t を消去し, x と y の関係を求めよ.

また, $-\infty < t < \infty$ のとき, 点 (x, y) の描く曲線の概形を示せ.

(金沢大 2004) (m20042201)

0.182 (1) 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, ある数 k とある零行列と異なる2次正方行列 B が存在

して, $AB = BA = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ.

(2) t を実数とする. 連立一次方程式

$$\begin{cases} 3x + 5y + 2z = 0 \\ x + (t+2)y + z = 0 \\ tx + y + (t-1)z = 0 \end{cases}$$

が $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ でない解を持つための t についての必要十分条件を求めよ. また, そのときの解を求めよ.

(金沢大 2005) (m20052205)

0.183 関数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\log(2 + \cos x)}{x - \pi} & (x \neq \pi) \\ 0 & (x = \pi) \end{cases}$ について, 次の問に答えよ.

(1) $f(x)$ は $x = \pi$ で連続であるかどうか調べよ.

- (2) $x = \pi$ での $f(x)$ の微分係数 $f'(\pi)$ は存在するか. 存在するときにはその値を求め, 存在しないときにはその理由を述べよ.

(金沢大 2005) (m20052206)

- 0.184** (1) 関数 $\sin x$ を $x = 0$ でテーラー展開したときのテーラー級数の最初の 3 項を求めなさい.
 (2) (1) の結果を使い, 次の関数 $f(x)$ の $x = 0$ における導関数の値 $f'(0)$ を求めなさい.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

- (3) 次の関数 $g(x)$ を $x = -\pi/2$ から $x = 1$ まで定積分しなさい.

$$g(x) = \begin{cases} \cos^2 x & (x < 0) \\ \frac{1}{2x+1} & (x \geq 0) \end{cases}$$

(金沢大 2005) (m20052208)

- 0.185** 次のことを示せ.

- (1) $f(x) = \begin{cases} x^{-1} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ とする. $f(x)$ は連続でない.
 (2) $f(x) = \begin{cases} x^m & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$ とする. $m \geq 3$ ならば, $f'(x)$ は微分可能である.

(金沢大 2007) (m20072209)

- 0.186** 連立方程式 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ を満たすベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$ の全体を V とする.

- (1) V は \mathbf{R}^4 の線形部分空間であることを示せ. (2) V の基底を一つ求めよ.
 (3) \mathbf{R}^4 の基底で, (2) で求めた V の基底を含むものを一つ求めよ.

(金沢大 2007) (m20072213)

- 0.187** 関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{e^x - e^y - x + y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

で定める. 次の問いに答えよ.

- (1) x に関する偏導関数 $f_x(x, y)$ を求めよ.
 (2) $f_{xy}(0, 0), f_{yx}(0, 0)$ をそれぞれ求めよ.

(金沢大 2010) (m20102207)

- 0.188** 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

と定義するとき, $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示し, 微分係数 $f'(0)$ を求めよ.

(金沢大 2011) (m20112207)

- 0.189** (1) 変換 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ ($r \geq 0$) のヤコビ行列式 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.
 (2) 重積分

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 2} \log(1+x^2+y^2) dx dy$$

を計算せよ.

(金沢大 2012) (m20122203)

- 0.190** 関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

で定める. 次の問い (1)~(3) に答えよ.

- (1) x に関する偏導関数 $f_x(x, y)$ を求めよ.
 (2) 偏導関数 $f_x(x, y)$ は原点 $(0, 0)$ で不連続であることを示せ.
 (3) $f(x, y)$ は原点 $(0, 0)$ で全微分可能であることを示せ.

(金沢大 2013) (m20132204)

- 0.191** 実数 ℓ に対して, 連続関数 $f_\ell : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$f_\ell(\theta) = \begin{cases} \frac{\sin \ell \theta}{\sin \theta} & (\theta \neq 0), \\ a & (\theta = 0) \end{cases}$$

と定める. 次の問いに答えよ.

- (1) a を求めよ.
 (2) f_ℓ は $\theta = 0$ で微分可能であることを示せ.
 (3) 積分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_\ell(\theta) d\theta$ の値を $\ell = 2, 3$ の場合に求めよ.

(金沢大 2014) (m20142208)

- 0.192** (1) $(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($-1 < x < 1$) を示せ. ここで, $\sin^{-1} x$ は逆正弦関数を表す.

- (2) 座標変換

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (r > 0, 0 < \theta < 2\pi)$$

に対するヤコビ行列式 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

- (3) 重積分

$$\iint_D \frac{y}{(x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy$$

を求めよ. ただし, $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}, 0 \leq y \leq x \right\}$ とする.

(金沢大 2015) (m20152203)

- 0.193** $D = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq x + y \leq 5, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 変数変換 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \\ y = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v \end{cases}$ のヤコビ行列式 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

(2) (1) の変数変換で、領域 D に対応する uv 平面の領域を E とする. 領域 E を図示せよ.

(3) 重積分 $\iint_D \frac{x^2 + y^2}{(x+y)^3} dx dy$ の値を求めよ.

(金沢大 2016) (m20162208)

0.194 次のことを示せ.

(1) $f(x) = \begin{cases} x^{-1} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ とする. $f(x)$ は連続でない.

(2) $f(x) = \begin{cases} x^m & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$ とする. $m \geq 3$ ならば, $f'(x)$ は微分可能である.

(金沢大 2016) (m20162213)

0.195 a, b, c は正の定数とし, x, y は次で定義される R^2 の領域 D の点とする.

$$D = \left\{ (x, y) \in R^2 \mid 0 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq c^2 \right\}$$

(1) 変数 r, θ を用いて $x = ar \cos \theta$, $y = br \sin \theta$ と変数変換を行う. この時, 関数行列式 (ヤコビアン) $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right|$ を求めよ.

(2) (1) の変数変換を用いて重積分 $\iint_D \sqrt{c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$ を求めよ.

(金沢大 2016) (m20162223)

0.196 連立方程式

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

を満たす点 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in R^4$ の全体を V とする.

(1) V は R^4 の線形部分空間であることを示せ.

(2) V の基底を一つ求めよ.

(3) R^4 の基底で, (2) で求めた V の基底を含むものを一つ求めよ.

(金沢大 2016) (m20162225)

0.197 (1) $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ の階数 ($\text{rank} M$) を求めよ.

(2) 次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 5 \end{cases}$$

(金沢大 2016) (m20162232)

0.198 関数 $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ について、次の問いに答えよ.

- (1) $x > 0$ に対し、 $f'(x)$ と $f''(x)$ を計算せよ.
- (2) 正の整数 n に対し、 $\lim_{y \rightarrow \infty} y^n e^{-y} = 0$ を示せ.
- (3) $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ であることを示せ.

(金沢大 2017) (m20172207)

0.199 関数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ について、次の問いに答えよ.

- (1) $f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)$ を求めよ.
- (2) 領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{3}x, x^2 + y^2 \geq 1, x \leq 1\}$ を図示せよ.
- (3) (2) の領域 D 上の重積分

$$\iint_D \{f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)\} dx dy$$

を求めよ.

(金沢大 2017) (m20172208)

0.200 (1) 任意の非負整数 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

が成り立つことを示せ.

- (2) 次の関数 $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

- (3) (2) の関数 $f(x)$ は \mathbf{R} 上で 2 回微分可能であり、2 階導関数 $f''(x)$ は $x = 0$ で連続であることを示せ.
- (4) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け.

(金沢大 2018) (m20182203)

0.201 正接関数 $\tan x$ の逆関数を $\tan^{-1} x$ とし、 $x \neq 0$ となる (x, y) に対して関数 $f(x, y) = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$ を定める. 次の問いに答えよ.

- (1) 偏導関数を計算して、 $f_y(x, y) - f_x(x, y)$ と $f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)$ を求めよ.
- (2) $0 < a < 1$ に対し

$$D_a = \{(x, y) \mid a^2 \leq x^2 + y^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\}$$

とするとき、重積分

$$I_a = \iint_{D_a} \{f_y(x, y) - f_x(x, y)\} dx dy$$

を計算し、極限值 $\lim_{a \rightarrow +0} I_a$ を求めよ.

(金沢大 2019) (m20192203)

0.202 k を実数とする. 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k-7 \\ 0 & -1 & 1 & 3k \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ.

- (1) B の階数 ($\text{rank} B$) を求めよ.
- (2) 次の連立一次方程式が解をもつような k の値と, その k に対する連立一次方程式の解をすべて求めよ.

$$\begin{cases} x + y + z = k - 7 \\ -y + z = 3k \\ 2x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

- (3) B による \mathbf{R}^4 から \mathbf{R}^3 への線形写像

$$f : \mathbf{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$$

を考える. f の核 ($\text{Ker } f$) の次元と 1 組の基底, f の像 ($\text{Im } f$) の次元と 1 組の基底をそれぞれ求めよ.

(金沢大 2019) (m20192205)

- 0.203** 関数 $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を次式で定義する.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{x^2}{4} \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ.
- (2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求め, $f'(x)$ が $x = 0$ で連続でないことを示せ.
- (3) $f(x)$ は $x = 0$ のとき最小値をとり, かつ $f(x)$ が最小値をとるのは $x = 0$ のときに限ることを示せ.

(金沢大 2019) (m20192206)

- 0.204** (1) $A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ を座標平面上の 3 点とする. 線分 AB , BC , CA 上にそれぞれ点 P , Q , R を, 三角形 PQR における $\angle Q$ が直角になるようにとる. ただし, P , Q , R は A , B , C のいずれとも異なるとする. $Q(t, 0)$, $\angle CQR = \theta$ とおくと, 直角三角形 PQR の面積 S を t と θ を用いて表せ.
- (2) (1) で求めた S を, 集合

$$D = \left\{ (t, \theta) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 < t < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}$$

を定義域とする関数と考える. このとき, $\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial \theta} = 0$ を満たす (t, θ) を求めよ.

- (3) (2) で求めた (t, θ) において, 関数 S が極値をとるかどうかが調べよ.

(金沢大 2019) (m20192207)

- 0.205** 次の問いに答えよ.

- (1) 実数 α に対し, 広義積分 $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ が存在するような α の値の範囲を求めよ.
- (2) $L > 1$ に対し, 集合 D_L を

$$D_L = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq L^2\}$$

と定める. 実数 β に対し, 極限值

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \iint_{D_L} \frac{dx dy}{1 + (x^2 + y^2)^{\frac{\beta}{2}}}$$

が存在するような β の値の範囲を求めよ.

(金沢大 2019) (m20192208)

0.206 \mathbf{R}^2 上の関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6xy^2}{2x^2 + 3y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

について, 次の問いに答えよ.

- (1) $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ で連続であることを示せ.
- (2) $f(x, y)$ の点 $(0, 0)$ における偏微分係数 $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$ を求めよ.
- (3) $f(x, y)$ が点 $(0, 0)$ で全微分可能かどうか調べよ.

(金沢大 2020) (m20202203)

0.207 (1) 集合 $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$ の概形を描け.

(2) (1) で定義した D に対して積分 $\iint_D (x - y + 1) e^{x+y} dx dy$ を求めよ.

(3) $\max\{u, v\} = \begin{cases} u & (u \geq v) \\ v & (u < v) \end{cases}$ とする. 積分 $\int_0^3 \left(\int_0^1 e^{\max\{x^2, 9y^2\}} dy \right) dx$ を求めよ.

(金沢大 2020) (m20202206)

0.208 領域 $D = \{(x, y) \mid |y| \leq e^{-x^2}, x \geq 0\}$ に対して, 重積分

$$\iint_D xy^2 dx dy$$

の値を求めよ.

(金沢大 2021) (m20212203)

0.209 (1) \mathbf{R}^3 のベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が \mathbf{R} 上 1 次従属となるような実数 α の値を求めよ.

(2) β を実数とする. \mathbf{R}^3 の部分空間

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{pmatrix} \beta & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

の次元が 2 となるときの β の値を求めよ. また, そのときの W の 1 組の基底を求めよ.

(3) 写像

$$f: \mathbf{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ 3x^2 - y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$$

が線形写像ではないことを示せ.

(金沢大 2021) (m20212207)

0.210 次の問いに答えよ.

- (1) 正の数 A, B および実数 α に対して, \mathbf{R}^2 内の集合

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid A(x - \alpha)^2 + By^2 \leq 1\}$$

で表される図形の面積を求めよ.

- (2) \mathbf{R}^3 内の集合

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + 4y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$$

と平面 $H = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + z = 1\}$ の共通部分 $H \cap E$ で表される図形の面積 S を求めよ.

(金沢大 2021) (m20212210)

0.211 次の $y_1(t), y_2(t)$ に関する連立微分方程式を考える.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_1 + \cos t \end{cases}$$

- (1) 上の連立微分方程式の同次方程式 (第 2 式右辺の $\cos t$ が無い場合の連立微分方程式) の一般解を求めよ.

- (2) 定数変化法を用いて, 上の連立微分方程式の一般解を求めよ.

(富山大 1994) (m19942301)

0.212 次の問いに答えよ.

(1)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$
 を示せ.

- (2) 連立方程式
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + az = 1 \\ x + 4y + a^2z = 1 \end{cases}$$
 がただ 1 組の解 (x, y, z) を持つための a に関する必要十分条件を求め, そのときの解を求めよ.

(3) 行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$
 を因数分解せよ.

(富山大 2000) (m20002306)

0.213 関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \end{cases}$$

は微分可能であるか. 微分可能であるならば導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(富山大 2004) (m20042310)

0.214 2 変数関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

について, 次の問いに答えよ.

- (1) $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ で連続であることを示せ.
 (2) $f(x, y)$ の点 $(0, 0)$ における 1 階偏微分係数を求めよ.
 (3) $f(x, y)$ の点 $(0, 0)$ における全微分可能性を調べよ.

(富山大 2005) (m20052309)

- 0.215** 开区間 $(-1, 1)$ の上で定義された写像 $f(x) = \begin{cases} x & (-1 < x \leq 0) \\ 1 - x & (0 < x < 1) \end{cases}$
 は $(-1, 1)$ から $(-1, 1)$ への全単射であることを示せ.

(富山大 2008) (m20082308)

- 0.216** 関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

に対して、原点 $(0, 0)$ における 2 次の偏微分係数 $f_{xx}(0, 0)$, $f_{xy}(0, 0)$, $f_{yx}(0, 0)$, $f_{yy}(0, 0)$ を求めよ.

(富山大 2012) (m20122310)

- 0.217** 次の各問いに答えよ.

- (1) 次の微分方程式の一般解 $x(t)$ を求めよ.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x$$

- (2) 次の連立方程式の $x(0) = y(0) = 1$ を満たす特殊解 $x(t)$, $y(t)$ を求めよ.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = x - y \\ \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

- (3) 次の連立方程式の $x(0) = y(0) = 1$ を満たす特殊解 $x(t)$, $y(t)$ を求めよ.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = -x + y \\ \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

(富山大 2015) (m20152310)

- 0.218** θ の範囲が $0 \leq \theta \leq 2\pi$ のとき、次の式で定義される xy 平面上の曲線に囲まれる領域の面積を求めよ.

$$\begin{cases} x = 2 \sin \theta \\ y = 2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \end{cases}$$

(富山大 2020) (m20202303)

- 0.219** 次の式で定義される xy 平面上の曲線 y_1 と y_2 および $x = 0$ と $x = 2\pi$ で囲まれる面積を求めよ

$$\begin{cases} y_1 = 2 \cos \left(\frac{x}{2} \right) \\ y_2 = \sin(x) \end{cases}$$

(富山大 2021) (m20212304)

- 0.220** 次の同次連立一次方程式がある.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

- (1) 係数行列のランク (rank) はいくらか.
- (2) この連立方程式の解の自由度はいくらか.
- (3) この同次連立一次方程式の非自明な解を求めなさい.

(福井大 2003) (m20032414)

0.221 (1) 次の定積分を示せ. m と n は整数とする.

$$(a) \int_0^{2\pi} \sin mx dx = 0, \int_0^{2\pi} \cos nx dx = 0$$

$$(b) \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$$

$$(c) \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 (m \neq n) \\ \pi (m = n) \end{cases}$$

$$(d) \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 (m \neq n) \\ \pi (m = n) \end{cases}$$

(2) $x(t)$ を周期 T の周期関数とするとき, $x(t)$ を次のように書くことができる.

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T} t \right)$$

このとき, (1) の知見を活用し, $a_k (k \geq 0)$, $b_k (k \geq 1)$ を $x(t)$ を用いて表せ.

(福井大 2003) (m20032417)

0.222 4つの未知変数 x, y, z, w からなる次の連立一次方程式が解をもつために, スカラー a, b, c が満たすべき条件を求めよ.

$$\begin{cases} x + 2y + z + 3w = a \\ -2x + 3y + 5z + w = b \\ 3x + 4y + z + 7w = c \end{cases}$$

(福井大 2006) (m20062405)

0.223 二次元直交座標 (x, y) を, 以下の式に従い極座標 (r, θ) に変換するものとする.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{ただし, } r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi \text{ として, 以下の設問に答えよ.}$$

- (1) r および θ を, x および y を用いて表せ (答のみでよい).
- (2) $\frac{\partial r}{\partial x}$ および $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ を計算せよ (途中経過も書くこと).
- (3) (2) の結果を用いて, $\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}$ を計算せよ (途中経過も書くこと).

(福井大 2007) (m20072403)

0.224 (1) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ のとき

(a) $\mathbf{AP} = \mathbf{PA}$ となる条件を求めよ.

(b) $\mathbf{AQ} = \mathbf{QA}$ となる条件を求めよ.

(2) 次の3つの列ベクトルがある.

(a) ベクトルは \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} は1次独立か1次従属か.

(b) その理由も述べよ.

(c) もし1次従属なら, それらの関係式を書け.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

(3) A と B を正則行列とするとき, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ を証明せよ.

(4) 次の連立方程式がある.

(a) 連立方程式が解を持つように式中の a を決定せよ.

(b) 決定された a の値の連立方程式の一般解を求めよ.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - 2y + 2z = a \\ 8x - 6y + 4z = 13 \end{cases}$$

(福井大 2009) (m20092403)

0.225 次の連立1次方程式を解け. 解がなければその理由を示せ.

$$(1) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 5y + 6z = 2 \\ y + 4z = 3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 5y + 6z = 0 \\ y + 4z = 0 \end{cases}$$

(福井大 2010) (m20102419)

0.226 次の連立方程式を行列とベクトルで表し, ガウスの消去法 (掃き出し法) を利用して解を求めよ.

$$(1) \begin{cases} 3x + 3y - z = 8 \\ 2x - y + z = -1 \\ x + 2y - 4z = 11 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} a - b + 2c + 3d + 4e = -8 \\ -2a + 3b - 4c - 5d - 5e = 14 \\ -a + 2b - 2c - 2d - 2e = 7 \\ a + 0b + 3c + 4d + 6e = -7 \\ 0a - 2b + c - d - 3e = 1 \end{cases}$$

(福井大 2013) (m20132422)

0.227 関数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ の原点における微分可能性を調べよ.

(福井大 2014) (m20142404)

0.228 連立微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - y - 6 \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 2y + 1 \end{cases}$$

について, 以下の問いに答えよ. ただし, この微分方程式の解 $x(t), y(t)$ を要素とするベクトルを $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする. ただし, $a \neq \frac{5}{2}$ とする.

(1) 任意の t に対して $\mathbf{r}(t)$ が不変となるような解 $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^2$ を, a を用いて表せ.

(2) 今, $\mathbf{d}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とするとき, $X(t)$ および $Y(t)$ に関する連立微分方程式を導け.

(3) (2) で求めた連立微分方程式を満たす解 $\mathbf{d}(t)$ が, 任意の初期値に対して $t \rightarrow +\infty$ で $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に収束する条件を a を用いて表せ.

(4) $a = -4$, 初期値ベクトル $\mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ としたときの解 $\mathbf{r}(t)$ を求めよ.

(福井大 2016) (m20162410)

0.229 2変数関数 $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x, y)$ の1階の偏導関数

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_x(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_y(x, y)$$

ならびに2階の偏導関数

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = f_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) = f_{xy}(x, y), \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = f_{yy}(x, y)$$

を, すべて求めよ.

(2) 関数 $f(x, y)$ について, $z = f(x, y)$ は, xyz 空間において曲面を表す.

この曲面上の点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ における接平面の方程式は

$$z - f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \bullet (x - x_0, y - y_0)$$

によって与えられる. ただし, 上式の \bullet は2次元ベクトルの内積を表している. このとき, 点 $(1, 2, f(1, 2))$ における接平面の方程式を $ax + by + cz = d$ の形式で求めよ. すなわち, 上式が点 $(1, 2, f(1, 2))$ での曲面 $z = f(x, y)$ の接平面の方程式となるような a, b, c, d を求めよ.

(3) 関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ について,

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

を満たす (x, y) の組を, $f(x, y)$ の極値の候補と呼ぶ. 関数 $f(x, y)$ の極値の候補をすべて求めよ.

(4) 2次の偏導関数を用いて, 関数 $\phi(x, y)$ を

$$\phi(x, y) = \{f_{xy}(x, y)\}^2 - f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y)$$

と定義すると, 極値の候補である (x_1, y_1) に対して,

- $\phi(x_1, y_1) < 0$ かつ $f_{xx}(x_1, y_1) > 0$ ならば (x_1, y_1) は極小
- $\phi(x_1, y_1) < 0$ かつ $f_{xx}(x_1, y_1) < 0$ ならば (x_1, y_1) は極大
- $\phi(x_1, y_1) > 0$ ならば (x_1, y_1) は極値ではない

といえる. 上の(3)で求めた極値の候補について, それぞれ極小であるか, 極大であるか, あるいは極値ではないか, 調べよ.

(福井大 2016) (m20162418)

0.230 関数 $f(t)$ のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

について, 以下の問いに答えなさい. ただし, $\theta(t - \alpha)$ は単位階段関数で

$$\theta(t - \alpha) = \begin{cases} 1 & (t \geq \alpha) \\ 0 & (t < \alpha) \end{cases}$$

によって定義される.

- (1) 単位階段関数 $\theta(t)$ および $\theta(t-1)$ のラプラス変換を求めなさい。
 (2) $\mathcal{L}[e^{-(t-1)}\theta(t-1)]$ について、変数 s を用いて表しなさい。必要であれば以下の関係を用いてもよい。

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha)\theta(t-\alpha)] = e^{-s\alpha}F(s)$$

(福井大 2018) (m20182410)

- 0.231** 未知数 x と y に関する以下の連立一次方程式を解け。ただし、 a は定数であるとする。

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ 2x + (a^2 - 3)y = a - 1 \end{cases}$$

(注) この連立一次方程式は定数 a によって、「一意的な解」、「2つ以上の解」、「解なし」の3つの状態を取りえることに注意せよ。

定数 a のどのような値に対して、どのような解をもつのか、あるいは解をもたないのかを場合分けして答えよ。

(福井大 2018) (m20182415)

- 0.232** 次の連立方程式を行列とベクトルを用いて書き直し、クラメルの公式を用いて解け。

$$\begin{cases} 2x - y + z = 7 \\ x + 2y - 3z = -1 \\ x - 3y - z = -2 \end{cases}$$

(福井大 2018) (m20182431)

- 0.233** 次の関数 $f(x)$ について $x=0$ における微分可能性を調べよ。

ただし、必要であれば $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ の関係を用いてもよいこととする。

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & (x < 0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases}$$

(福井大 2020) (m20202401)

- 0.234** 関数 $f(x)$ が以下のように与えられている。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1 \\ 1 & |x| < 1 \end{cases}$$

この関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$ を求めよ。

(福井大 2020) (m20202413)

- 0.235** (1) 以下のベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ の一次独立, 1次従属を判定せよ。ただし、 x は実数とする。

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3+x \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 5+x \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- (2) n を 2 以上の整数, α を 0 でない実数とする。次式で定義される n 次正方行列 $A = (a_{i,j})$ について、以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{すなわち } a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & i+j = n+1 \text{ のとき} \\ \alpha & i=j=n \text{ のとき} \\ 0 & \text{上記以外} \text{ のとき} \end{cases}$$

- (a) A の逆行列を求めよ.
 (b) A の行列式を計算せよ.

(3) 次の行列の階数を求めよ. ただし, z は実数とする.

$$\begin{pmatrix} z & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & z \end{pmatrix}$$

(福井大 2020) (m20202415)

0.236 (1) 次の連立微分方程式の解を求めたい. 以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} \frac{dy(x)}{dx} = y(x) + z(x) + 1 \\ \frac{dz(x)}{dx} = -y(x) + 3z(x) + 3 \end{cases}$$

- (a) $z(x)$ を消去して, $y(x)$ のみに対する微分方程式を導出せよ.
 (b) $y(x)$ と $z(x)$ の一般解を (a) を利用して求めよ.

(2) 次の連立微分方程式の $y(x)$ と $z(x)$ の一般解を求めよ.

$$\begin{cases} \frac{dy(x)}{dx} = y(x) + z(x) + 1 \\ \frac{dz(x)}{dx} = -y(x) + 3z(x) + 3 + \frac{e^{2x}}{(1+x)^2} \end{cases}$$

(3) 次の連立微分方程式の解を求めたい. 以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} \frac{dy(x)}{dx} = -y(x)z(x) \\ \frac{dz(x)}{dx} = y(x)z(x) \end{cases}$$

- (a) $y(x) + z(x)$ が常に一定の値 (定数) c_1 をとること, すなわち,

$$y(x) + z(x) = c_1$$

が成立することを証明せよ.

- (b) 初期値として,

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

が与えられたとき, $y(x)$ と $z(x)$ の解を (a) を利用して求めよ.

(福井大 2020) (m20202416)

0.237 次の連立方程式について以下の問に答えなさい.

$$x + y + z = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x - y + z = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

- (1) 上式を行列とベクトルを使って表現しなさい.
 (2) はきだし法などを用いて解きなさい.
 (3) 求めた解の概形を, 式 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ が示す図形とともに示し, 簡潔な補足説明を加えなさい.

(福井大 2020) (m20202431)

0.238 非負の実数 θ [rad] を媒介変数とする曲線

$$\begin{cases} x = \theta \cos \theta \\ y = \theta \sin \theta \end{cases} \quad (1)$$

は「アルキメデスのらせん」と呼ばれ、その概形は図1に示す「蚊取り線香」に近い、図2のような渦巻状の曲線となる。

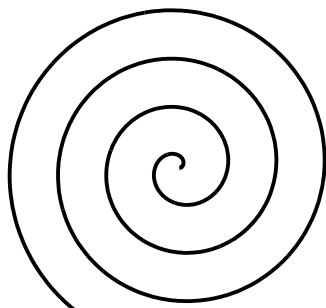


図1：蚊取り線香

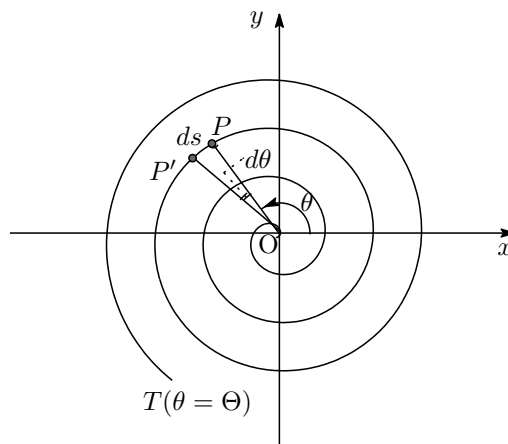


図2：「アルキメデスのらせん」

図2に示すように、曲線上の点 P に対して θ を微小角度 $d\theta$ だけ増加させ、点 P が P' に移動したとする。このときの $P - P'$ 間の微小な長さを ds と表すと、 $\frac{ds}{d\theta}$ は、

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \quad (2)$$

で与えられる。以下の問いに答えよ。

- (1) 式(1)の x, y に対し、 $\frac{dx}{d\theta}$, $\frac{dy}{d\theta}$ を各々求めよ。
- (2) 式(2)を利用して、 $\frac{ds}{d\theta}$ を θ によって表せ、 $\frac{ds}{d\theta}$ ではなく $\frac{d\theta}{ds}$ を求めることに注意。
- (3) (2)で求めた θ の関数 $\frac{d\theta}{ds}$ について、グラフの概形を描きたい。 $\frac{d\theta}{ds}$ の θ に関する1階導関数を用いて増減を調べ、 $\frac{d\theta}{ds}$ を縦軸に、 θ を横軸に取ったグラフの概形を示せ。
- (4) 図2に示すように、「らせん」の内側の端点は原点 O に一致し、外側の端点 T に対する θ を $\theta = \Theta$ とおく。このとき、 O から T までの曲線の長さ L を Θ によって表せ。【ヒント】 L の計算過程で現れる定積分には複数の計算方法が知られており、そのひとつに $\theta = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ と置換する方法がある ($\frac{e^t - e^{-t}}{2}$ は双曲正弦関数 $\sinh t$ であるので、双曲線関数を用いてもよい)。

(福井大 2021) (m20212419)

0.239 次式で表される曲線(サイクロイド)と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

$$\begin{aligned} x &= 2(t - \sin t) \\ y &= 2(1 - \cos t) \end{aligned}$$

ここで、 $0 \leq t \leq 2\pi$

(福井大 2021) (m20212422)

0.240 次の関数 $f(x)$ について $x = 0$ における微分可能性を調べよ。

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x < 0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases}$$

0.241 次の積分の値を計算せよ.

$$\iint_D \sin(x+y) \cos(x-y) dx dy, \quad D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x+y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x-y \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

(福井大 2022) (m20222416)

0.242 基本周期が 2π である関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開を考える. 以下の問いに答えよ.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \left(0 < x \leq \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \left(\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{2}\right) \\ 1 & \left(\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi\right) \end{cases}$$

(1) 以下の積分を計算せよ.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n \neq 0)$$

(2) 以下の積分を計算せよ.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n \neq 0)$$

(3) 基本周期が 2π である関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開を求めよ.

(福井大 2022) (m20222423)

0.243 3×3 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

$$(2) \text{連立方程式} \begin{cases} -5x + 10y = 5 \\ 2x - 3y - \frac{1}{2}z = 5 \\ x + y + z = 5 \end{cases} \text{を解け.}$$

(静岡大 2006) (m20062506)

0.244 次の微分方程式の初期値問題の解 $y = y(x)$ を求めよ.

$$(1) \begin{cases} \frac{dy}{dx} + y - y^2 = 0 \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{dy}{dx} + y = x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(静岡大 2010) (m20102507)

0.245 次の微分方程式の初期値問題の解 $y = y(x)$ を求めよ.

$$(1) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y^2 \sin 2x \cos 3x & (x \geq 0) \\ y(0) = \frac{5}{3} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{x} & (x \geq 1) \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

(静岡大 2011) (m20112507)

0.246 次の微分方程式の解 $y = y(x)$ を求めよ ((1) は一般解を求めよ).

$$(1) \frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0 \quad (2) \begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} + y = x^2, \\ y(0) = 0, \\ \frac{dy}{dx}(0) = 0 \end{cases}$$

(静岡大 2012) (m20122503)

0.247 次の連立方程式を解け. $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$

(岐阜大 2001) (m20012601)

0.248 関数 $p(x)$ が $p(x) = \begin{cases} 0 & (x < -a) \\ \frac{x}{a^2} + \frac{1}{a} & (-a \leq x < 0) \\ -\frac{x}{a^2} + \frac{1}{a} & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (a < x) \end{cases}$

で与えられるとき, 以下の問いに答えよ. ただし, $a > 0$ である.

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \text{ を求めよ.} \quad (2) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx \text{ を求めよ.}$$

(岐阜大 2006) (m20062609)

0.249 行列 A が次のように与えられるとき, 以下の問いに答えよ. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(1) 行列 A の行列式 $|A|$ を求めよ. (2) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) 行列 A の逆行列 A^{-1} を使って次の連立方程式を解け. $\begin{cases} 3x + 2y + 5z = 10 \\ 7x + 3y + 4z = 3 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases}$

(岐阜大 2006) (m20062610)

0.250 コンピュータのグラフィックディスプレイに (x, y) 座標系の原点を中心とする半径 r の円を描くことを考える. このとき, 半径 r の円は, x 軸となす角 θ (反時計回りを正方向とする) をパラメータとして

$$\begin{cases} x = \boxed{\text{(ア)}} \\ y = \boxed{\text{(イ)}} \end{cases}$$

と表現できるから, 円を n 等分して, $\Delta\theta = 2\pi/n$ より $\Delta\theta$ を求め,

$$\theta_0 = 0, x_0 = r, y_0 = 0$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \Delta\theta \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

として,

$$\begin{cases} x_{i+1} = \boxed{\text{(ウ)}} \\ y_{i+1} = \boxed{\text{(エ)}} \end{cases}$$

より, 次々と点の座標 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ を求め, これらの 2 点間を順次, 直線で結んでいけば円を描くことができる. 上記の (ア) ~ (エ) に入る式を答えよ. ただし, (ウ), (エ) については, $r, \theta_i, \theta_{i+1}$ は使わない形で答えよ.

(岐阜大 2006) (m20062622)

0.251 次の連立1次方程式が解をもつように定数 a を定め、そのときの一般解も求めよ.

$$\begin{cases} x + y + z + w = -1 \\ 2x + y + 4z + 2w = 4 \\ 3x + y + 3z + 2w = 1 \\ \quad 2y \quad \quad + w = a \end{cases}$$

(岐阜大 2008) (m20082615)

0.252 連立1次方程式

$$\begin{cases} x - 3y - 5z = a \\ 2x - 2y - 4z = b \\ -3x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

が、少なくとも1つの解をもつための定数 a, b についての必要十分条件を求めよ. また、求めた条件を満たす1組の a, b を選び、その場合の一般解を求めよ.

(岐阜大 2009) (m20092604)

0.253 次のパラメータ表示で与えられる xyz 空間内の曲線 C と直線 l について、以下の問いに答えよ. ただし、空間内の二点 P, Q に対して、二点間の距離を \overline{PQ} で表す.

$$C : \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \\ z = \cos \theta + \sin \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad \quad l : \begin{cases} x = t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

- (1) P を曲線 C 上の点、 Q を直線 l 上の点とすると、 \overline{PQ}^2 を θ と t の式で表せ.
- (2) P を曲線 C 上の点、 Q を直線 l 上の点とすると、 \overline{PQ} の最小値、および、そのときの P と Q の座標を求めよ.

(岐阜大 2010) (m20102604)

0.254 以下の式でガンマ関数 $\Gamma(t)$ を定義する.

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx, \quad t > 0.$$

次の問いに答えよ. ただし、 $t > 0$ のとき $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^t = 0$ となることは証明しなくても使ってよい.

- (1) $t > 0$ に対して $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ となることを示せ.
- (2) 自然数 n に対して $\Gamma(n+1) = n!$ となることを示せ.
- (3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2$, すなわち

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx \right) \left(\int_0^{\infty} e^{-y} y^{-\frac{1}{2}} dy \right)$$

を x, y の2変数関数の重積分で表せ.

- (4) 変数 (x, y) から (r, θ) への変数変換

$$\begin{cases} \sqrt{x} = r \cos \theta, \\ \sqrt{y} = r \sin \theta \end{cases}$$

に対してヤコビアン $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

- (5) 前問(4)の変数変換を用いて(3)の重積分を計算し $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ を求めよ.

0.255 k を実数とする. 連立 1 次方程式

$$(E) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3k + 2 \\ \quad 4x_2 + kx_3 + x_4 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - kx_4 = -10 \end{cases}$$

を考える. 以下の間に答えよ.

- (1) (E) の係数行列の行列式の値を求めよ.
- (2) (E) が解を持たないときの k の値を求めよ.
- (3) (E) が複数個の解を持つときの k の値を求め, さらにそのときの解を示せ.

(岐阜大 2016) (m20162602)

0.256 k を定数とする. 次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z = -1 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 5x + 2y + 7z = k \end{cases}$$

(岐阜大 2017) (m20172605)

0.257 a, b を定数とする. 連立方程式

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ 2x - 11y + 6z = a \\ x + 7y - 2z = b \end{cases} \quad (E)$$

が次の 2 条件を同時に満たすような定数 a, b の条件を求めよ.

- (i) (E) の解は無数個ある.
- (ii) $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ は (E) の解ではない.

(岐阜大 2020) (m20202603)

0.258 以下の連立不等式が表す領域の面積 S を求めよ.

$$\begin{cases} x + y \leq 3 \\ xy \geq 2 \\ x > 0 \end{cases}$$

(豊橋技科大 1999) (m19992703)

0.259 次の連立一次方程式に対して, 解が存在するための定数 b の条件を求めよ. また, その条件のもとで, この連立方程式を解け.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = b \\ 2x + 3y - 2z = 2 \\ -x - y + 5z = 1 \end{cases}$$

(豊橋技科大 2000) (m20002706)

0.260 次の連立 1 次方程式が非自明解 ($x = y = 0$ 以外の解) をもつように k の値を定め, その一般解を求めよ.

$$\begin{cases} 3x + (2 - k)y = 0 \\ x + ky = 0 \end{cases}$$

(豊橋技科大 2003) (m20032707)

0.261 次の連立不等式の解を求めよ。また、連立不等式を満たす最大の整数を求めよ。

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 \geq 0 \\ x^2 - 10x + 21 < 0 \end{cases}$$

(豊橋技科大 2004) (m20042701)

0.262 次の連立不等式を解け。

$$\begin{cases} 2x^2 - 6x + 1 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 > 0 \end{cases}$$

(豊橋技科大 2004) (m20042703)

0.263 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 15y^2 = 0 \\ 2x + xy - 15y - 30 = 0 \end{cases}$$

(豊橋技科大 2005) (m20052703)

0.264 (1) $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は次の式で計算される。

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

この関係を用いて、以下に示す関数のラプラス変換を求めよ。

ただし、以下の計算では、 $(\text{Re}[s] > 0)$ とする。

(a) $f(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$ ただし、 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

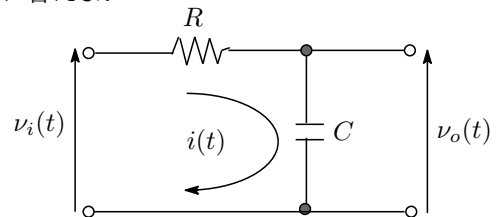
(b) $f(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(c) $f(t) = t u(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(d) $f(t) = e^{-\alpha t} u(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t \geq 0 \quad (\alpha > 0) \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(2) 右図に示すように直列 RC 回路について以下の問いに答えよ。

- (a) 図に示すように、入力電圧を $v_i(t)$ 、出力電圧を $v_o(t)$ 、ならびに、電流を $i(t)$ とするとき、これらの関係を示す回路方程式を記述せよ。
ただし、 $t = 0$ のとき、 $v_o(t) = 0$ である。



- (b) $v_i(t)$ 、 $v_o(t)$ ならびに $i(t)$ のラプラス変換を、それぞれ $V_i(s)$ 、 $V_o(s)$ そして $I(s)$ と表すものとする。このとき、(a) で求めた回路方程式をラプラス変換して、次の伝達関数 $G(s)$ を求めよ。

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

- (c) $v_i(t)$ が次のように与えられるとき

$$v_i(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

出力電圧 $v_o(t)$ のラプラス変換 $V_o(s)$ を求めよ。

- (d) $V_o(s)$ をラプラス逆変換して出力電圧 $v_o(t)$ を求めよ。
(e) $G(s)$ をラプラス逆変換して、インパルス応答 $g(t)$ を求めよ。

(f) インパルス応答 $g(t)$ を用いて, (c) で定義した入力電圧があるときの出力電圧 $v_o(t)$ を求めよ.

(豊橋技科大 2006) (m20062708)

0.265 次の連立一次方程式が解をもつための条件 (a の値) を求め, その条件のもとでの一般解を示せ.

$$\begin{cases} x + y - 2z + u = 2 \\ -x - 2y + 3z - u = 3 \\ 2x + y - 3z + 2u = a \end{cases}$$

(豊橋技科大 2011) (m20112703)

0.266 以下の連立一次方程式を解け, ただし, 計算過程を解答用紙に明記すること.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 5y + 3z = 13 \\ x + 8z = -5 \end{cases}$$

(豊橋技科大 2014) (m20142703)

0.267 次の関数 $f(t)$ と $g(t)$ について, 以下の問いに答えよ. ここで, e は自然対数の底である.

$$f(t) = 5e^{-t}, \quad g(t) = t^2 + t + 1$$

(1) $\frac{df}{dt}, \frac{dg}{dt}$ をそれぞれ求めよ.

(2) t を媒介変数とする媒介変数方程式

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

に対し, 以下の問いに答えよ.

ア. $\frac{dy}{dx}$ を t の関数で表せ.

イ. $\frac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数で表せ.

(3) $z(t) = f(t)g(t)$ とし, 以下の問いに答えよ. なお, 答えは e を含んだままでもよい.

ア. $z(t)$ に関して, すべての極値を求めよ. また, そのときの t も示せ.

イ. $\int_0^1 z(t)dt$ を求めよ.

(豊橋技科大 2016) (m20162701)

0.268 次の重積分を計算せよ.

(1) $\iint_D x^2 y dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$

(2) $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$

(豊橋技科大 2022) (m20222703)

0.269 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\iint_D y \sin(x+y) dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x+y \leq \pi, x \geq 0, y \geq 0\}$

(2) $\iint_D xy dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid \left|x - \frac{1}{\sqrt{3}}y\right| \leq 1, \left|x + \frac{1}{\sqrt{3}}y\right| \leq 2\}$

(豊橋技科大 2023) (m20232703)

0.270 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

- (1) A を適当な正則行列 P によって対角化せよ.
- (2) A^n を求めよ (ただし, n は正整数とする).
- (3) A によって 1 次変換 $f: \begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 2x + 4y \end{cases}$ を定める.
 f は任意の直線を直線に, 平行な直線を平行な直線に移すことを証明せよ.
- (4) 頂点が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である正方形の写像 f による像を Z とする. Z の面積を求めよ.

(名古屋大 2003) (m20032802)

0.271 次のサイクロイド曲線に対して, 以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (a > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

- (1) 曲線の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ.
- (2) $\theta = \pi$ における接線の方程式を求めよ.
- (3) 曲線を x 軸のまわりに回転させるときにできる立体の体積を求めよ. なお, 次の公式を用いてもよい.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2} & (n: \text{偶数}) \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$

$$\text{ただし, } n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots 2 & (n: \text{偶数}) \\ n(n-2)(n-4)\cdots 1 & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$

(名古屋大 2008) (m20082802)

0.272 次式 (n は整数) で示される関数のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & (2n-1)\pi < x \leq 2n\pi \\ 1 & 2n\pi < x \leq (2n+1)\pi \end{cases}$$

(名古屋大 2016) (m20162803)

0.273 関数 $f(x, y)$ が

$$f(x, y) = \begin{cases} xy, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

で与えられるとき, 重積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, dx \, dy$$

を求めよ.

(名古屋工業大 1998) (m19982905)

0.274 次の連立一次方程式を解け.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 6x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

(名古屋工業大 2008) (m20082901)

0.275 次の連立一次方程式が解をもつように定数 k の値を定め, そのときの解を求めよ.

$$\begin{cases} x + 3y - z = k & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2x + y + 3z = 5 & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 3x + 2y + 4z = 9 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

(名古屋工業大 2011) (m20112901)

0.276 a を定数とするとき, 次の連立一次方程式の解を求めよ.

$$\begin{cases} x - y + az = 1 \\ x + ay - z = a \\ ax + y + z = a + 1 \end{cases}$$

(名古屋工業大 2014) (m20142905)

0.277 次の定積分と 2 重積分を求めよ.

$$(1) I_1 = \int_0^2 \sqrt{|x^2 - 1|} dx$$

$$(2) I_2 = \iint_D \frac{\sin y}{1 + \sin^2 x} dx dy, \quad D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

(名古屋工業大 2017) (m20172902)

0.278 a, b を定数とするとき, R^4 の部分集合

$$W = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ w \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} x + 3y + 5z - w = a \\ x - y - 3z + 3w = b \\ 2x - y - 4z + 5w = 0 \end{array} \right\}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) W が R^4 の部分空間となるように a, b の値を定めよ.

(2) a, b が (1) で定めた値のとき, W の次元と基底を求めよ.

(名古屋工業大 2017) (m20172904)

0.279 重積分 $I = \iint_D y^2 \sqrt{1 - x^2} dx dy$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ の値を求めよ.

(名古屋工業大 2018) (m20182904)

0.280 (1) 次の x, y, z に関する連立一次方程式が, 解を持たないための定数 k の条件を求めよ.

$$\begin{cases} -3y + z = -3 \\ 3x - 2z = k \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ について, 連立一次方程式

式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を考える. \mathbf{b} として $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶとき, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

のそれぞれの解 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ を求めよ.

(名古屋工業大 2018) (m20182905)

0.281 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2 - 2y + 4)^3}} \quad \text{ただし } D = \{(x, y) \mid 2x^2 - 1 \leq y \leq x^2\}$$

(名古屋工業大 2020) (m20202904)

0.282 x, y, z についての次の連立 1 次方程式を解け. ただし a は定数である.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 3y + az = 5 \\ x + ay - 2z = a \end{cases}$$

(名古屋工業大 2020) (m20202905)

0.283 連立方程式 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$ を, 逆行列を用いて解きなさい.

(三重大 2002) (m20023116)

0.284 $y = \begin{cases} c(1 - \sqrt{x}) & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (x < 0, 1 < x) \end{cases}$

が確率密度になるように c を求め, その分布の平均と分散を計算しなさい.

(三重大 2003) (m20033115)

0.285 x, y, z に関する次の連立方程式

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + \alpha y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$$

が, 自明な解 ($x = 0, y = 0, z = 0$) の他に解をもつための α の条件を求めなさい.

(三重大 2004) (m20043111)

0.286 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{c}{(1 + x + y)^4} & (x \geq 0, y \geq 0) \\ 0 & (\text{その他の } x, y) \end{cases}$

の確率密度をもつ同時確率分布について以下の問に答えよ.

- (1) $f(x, y)$ が確率密度になるように c の値を求めよ.
- (2) $f(x, y)$ の周辺確率密度 $f_1(x)$ を求めよ.
- (3) 条件付き確率密度 $f(y | x)$ を求めよ.

(三重大 2005) (m20053119)

0.287 確率密度が $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$ で与えられる分布について, 次の問に答えよ.

- (1) この分布の平均を求めよ.
- (2) この分布の分散を求めよ.
- (3) この分布のモーメント母関数を求めよ.

(三重大 2006) (m20063117)

0.288 次の関数 $f(x) = \begin{cases} c \cos x & (|x| \leq \frac{\pi}{2}) \\ 0 & (|x| > \frac{\pi}{2}) \end{cases}$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ が確率密度になるような定数 c の値を求めよ.
- (2) その分布の分布関数を求めよ.

(3) その分布の平均を求めよ.

(4) その分布の分散を求めよ.

(三重大 2007) (m20073116)

0.289 $p(x) = 2xe^{-x^2}$, $q(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$ とする時, $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \cdot q(t-x)dt$ のグラフの概要を下の xy 平面に描きなさい. グラフの概要には最大値や変曲点を明示すること.

(三重大 2009) (m20093102)

0.290 x, y に関する下記の連立方程式について行列を用いて表せ. さらに, この連立方程式が解をもたないようにするための定数 a を行列式を用いて求めよ.

$$\begin{cases} (a-6)x + (a+1)y = 0 \\ (a-10)x + a(a+1)y = a-2 \end{cases}$$

(三重大 2013) (m20133113)

0.291 x_1, x_2, x_3 に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ \alpha x_1 + x_2 = \beta \quad (\alpha, \beta \text{ は実定数}) \end{cases}$$

について, 以下の問に答えなさい.

(1) 連立方程式を行列 A, \mathbf{b} を用いて $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と書くとき, 行列 A, \mathbf{b} を求めなさい,

ただし, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ である.

(2) $\alpha = 1, \beta = 3$ のとき, A^{-1} を求め, それを利用して連立方程式の解 \mathbf{x} を求めなさい.

(3) 任意の α, β について $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解が存在するかどうかを調べ, 存在する場合にはその解を求めなさい.

(三重大 2015) (m20153102)

0.292 次の連立方程式を行列を用いて解け. ただし, a は定数とする.

$$(1) \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x + 5y = -1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 7x - 5y = 11 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} a^2x + 2y = 2a \\ ax + y = 2 \end{cases}$$

(三重大 2015) (m20153109)

0.293 xy 平面上のサイクロイドは, θ をパラメータとして

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

で与えられる. ただし, a は正の定数である. この曲線の $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 部分の長さを求めよ.

(三重大 2016) (m20163114)

0.294 次の連立 1 次方程式を行列を用いて解け.

$$(1) \begin{cases} 5x + 6y - 7z = -3 \\ 4x + 7y + 3z = 4 \\ -3x - 9y + z = 4 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} -x + y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

(三重大 2018) (m20183108)

0.295 次の連立1次方程式を，行列を用いて解け．

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 1 \\ 2x + 4y - 3z = 6 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

(三重大 2022) (m20223112)

0.296 m と n が整数のとき，次の式を証明せよ．

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta(m-n)} d\theta = \delta_{m,n}$$

ただし， $i = \sqrt{-1}$ である．また， $\delta_{m,n}$ はクロネッカーのデルタで，

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad \text{と定義されている.}$$

また，必要なら公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用いよ．

(奈良女子大 2003) (m20033210)

0.297 3次元空間の0でないベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ があり，それらの間の内積（スカラー積）が

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \begin{cases} |\vec{a}_i|^2 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

で与えられている．ただし， $i, j = 1, 2, 3$ で， $|\vec{a}_i|$ はベクトル \vec{a}_i の大きさである．以下の問いに答えよ．

(1) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を係数とする方程式

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = 0$$

が， $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ のときのみ成り立つ場合， $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ は線形独立なベクトルであるという．実際に， $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ が線形独立であることを示せ．

(2) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ に対して，

$$\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) = \vec{a}_2 \cdot (\vec{a}_3 \times \vec{a}_1) = \vec{a}_3 \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)$$

が成り立つことを示せ．ただし， $\vec{a}_i \times \vec{a}_j$ は \vec{a}_i と \vec{a}_j のベクトル積である．

(奈良女子大 2004) (m20043209)

0.298 (1) 次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{5x - 4}{2x^2 + x - 6} dx$$

(2) 自然数 m, n に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

(奈良女子大 2016) (m20163202)

0.299 以下の微分方程式を考える．

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_1 x_2 - k_2 (x_2 - x_1) \end{cases}$$

ただし， m, k_1, k_2 は正の実定数である．以下の問いに答えよ．

- (1) これら2つの方程式を $X_1 = x_1 + x_2$, $X_2 = x_1 - x_2$ で定義される X_1, X_2 に対する方程式に書き直せ. また, $\omega = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$, $\omega' = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}}$ とおいて, X_1, X_2 に対する一般解を求めよ.
- (2) $t = 0$ で, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ かつ $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ を満たす解 $x_1(t)$, $x_2(t)$ を求めよ. ここで, $v_1 = \frac{dx_1}{dt}$, $v_2 = \frac{dx_2}{dt}$ とする.

(奈良女子大 2017) (m20173206)

- 0.300** 時間 $t (t \geq 0)$ の関数 $N_1(t)$ および $N_2(t)$ に関する以下の連立微分方程式についての問いに答えよ. ただし, λ_1, λ_2 は時間に依存しない正の定数とする.

$$\begin{cases} \frac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_1 N_1(t) \\ \frac{dN_2(t)}{dt} = -\lambda_2 N_2(t) + \lambda_1 N_1(t) \end{cases}$$

- (1) $N_1(t)$ を求めよ. ただし, $N_1(t)$ の初期値は $N_1(0)$ とする.
- (2) 時間 t を横軸にとり, $N_1(t)$ のグラフの概形を描け.
- (3) $N_2(t) = e^{-\lambda_2 t} C(t)$ とおいて $C(t)$ についての微分方程式を導出せよ.
- (4) $C(t)$ についての微分方程式を解き, $N_2(t)$ を求めよ. ただし, $N_2(t)$ の初期値はゼロとする.

(奈良女子大 2018) (m20183206)

- 0.301** 時間 $t (t \geq 0)$ で関数 $x(t)$ についての次の微分方程式を考える.

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(f(t) - x(t))$$

ここで a は正の実数で, $f(t)$ は与えられた実関数とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $a = \log_e 2$ で, $t \geq 0$ で $f(t) = 0$ である場合に, $x(0) = 1$ をみたす解 $x(t)$ を求めよ.
- (2) 一般に時間が十分に経った後の解は, $x(0)$ の値に関係なく

$$x(t) = a \int_0^t f(u) e^{a(u-t)} du$$

に近づくことを示せ.

- (3) 次に, $a = \log_e 2$ で, 関数 $f(t)$ が 0 以上の任意の整数 n について

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (2n \leq t < 2n+1) \\ 0 & (2n+1 \leq t < 2n+2) \end{cases}$$

である場合を考える. 整数 N が十分大きくなったときに $x(2N)$ が近づく値を求めよ.

(奈良女子大 2022) (m20223208)

- 0.302** 関数 $f(z)$ を次のように定義する.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z}{e^z - 1} & (z \neq 0) \\ 1 & (z = 0) \end{cases}$$

この関数は $|z| < 2\pi$ において解析的である. テイラー展開を

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

のように表し, ベルヌーイ数 B_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ を定義する. $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$ を示せ. さらに, $(e^z - 1)f(z) = z$ のべき級数展開から, B_n が次の漸化式を満たすことを示せ.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0$$

ただし, $\binom{n}{k}$ は 2 項係数を表す.

(京都大 2002) (m20023305)

0.303 平面 \mathbf{R}^2 の座標系 (x, y) と実数値のパラメータ t を用いて表される曲線

$$C : \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty)$$

について以下の (1)~(4) に答えよ.

- (1) 曲線 C とその x 軸に平行な接線との接点の座標を求めよ. また, y 軸に平行な接線との接点の座標を求めよ.
- (2) 曲線 C が自分自身と交差する点の座標を求めよ. さらに, その交点において 2 本ある曲線 C の接線の傾きを求めよ.
- (3) (1),(2) の結果を用い, さらに $t \rightarrow \pm\infty$ のときの様子に注意して, 曲線 C の概形を描け.
- (4) 曲線 C によって囲まれる領域の面積を求めよ.

(京都大 2009) (m20093301)

0.304 正の整数 $k, N (1 \leq k \leq N)$ が与えられたとき, 方程式

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = N \quad (1)$$

の正の整数解

$$\begin{cases} x_1 = m_1 \\ x_2 = m_2 \\ \cdots \\ x_k = m_k \end{cases} \quad (2)$$

の総数を求めるために, 解 (2) に対して項数が $N - k$ であるような数列

$$\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{m_1-1 \text{ 個}}, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{m_2-1 \text{ 個}}, \dots, \underbrace{k, k, \dots, k}_{m_k-1 \text{ 個}}$$

をつくる. ただし, $m_i = 1$ であるような i はこの数列の項にはならないとする. 以下では, 項数 M の数列 a_1, a_2, \dots, a_M を $\{a_n\}_{n=1}^M$ と表すことにして, (1)~(4) に答えよ. なお, 数列の項は全て正の整数とする.

- (1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^M$ が与えられたとき, 新たな数列 $\{\bar{a}_n\}_{n=1}^M$ を

$$\bar{a}_n = a_n + n - 1 \quad (n = 1, 2, \dots, M)$$

と定義する. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^M$ が正の整数 k に対して

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_M \leq k$$

を満たすとき, 数列 $\{\bar{a}_n\}_{n=1}^M$ は

$$1 \leq \bar{a}_1 < \bar{a}_2 < \cdots < \bar{a}_M \leq k + M - 1 \quad (3)$$

を満たすことを示せ.

- (2) 条件 (3) を満たすような数列 $\{\bar{a}_n\}_{n=1}^M$ の総数を求めよ.

- (3) 2つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^M$ と $\{b_n\}_{n=1}^M$ について,

$$a_n = b_n \quad (n = 1, 2, \dots, M)$$

であるとき, かつ, そのときに限り $\{a_n\}_{n=1}^M = \{b_n\}_{n=1}^M$ と表すことにする. このとき,

$\{a_n\}_{n=1}^M = \{b_n\}_{n=1}^M$ であれば $\{\bar{a}_n\}_{n=1}^M = \{\bar{b}_n\}_{n=1}^M$ であり, また, その逆も成り立つことを示せ.

- (4) (1) から (3) の結果を利用して, 方程式 (1) の正の整数解の総数を求めよ.

(京都大 2009) (m20093302)

0.305 2次元ユークリッド空間の直交座標系を一つ定め, その x 軸および y 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ e_x, e_y とする. また, x 軸および y 軸をそれぞれ反時計方向に θ だけ回転して得られる座標軸を x' 軸, y' 軸とし, x' 軸と y' 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ e'_x および e'_y とする. このとき, 以下の (1)~(5) に答えよ.

- (1) 条件 $(e'_x \ e'_y) = (e_x \ e_y)P$ を満足する 2 次の正方行列 P を θ を用いて表せ.
- (2) 行列 P に対して $P^T P = P P^T = I$ が成り立つことを示し, この等式の幾何的な意味を, 4 つのベクトル e_x, e_y, e'_x, e'_y を用いて説明せよ. なお, P^T は P の転置行列を, また, I は 2 次の単位行列をそれぞれ表す.
- (3) このユークリッド空間における任意のベクトル \mathbf{u} は $\mathbf{u} = x e_x + y e_y = x' e'_x + y' e'_y$ のように, 2 通りの座標を用いて表すことができる. これら 2 通りの座標間の関係を行列 P を用いて表せ. さらに, $x^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2$ が成り立つことを示せ.
- (4) このユークリッド空間におけるベクトル全体をそれぞれ自身に写す変換 f が

$$f(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v})$$

なる関係を満たすとき, f を一次変換という. ここに α と β は任意の実数, \mathbf{u} と \mathbf{v} は任意のベクトルである. 一次変換 f と $e_x \ e_y$ に対して,

$$\begin{cases} f(e_x) = a_{xx} e_x + a_{yx} e_y \\ f(e_y) = a_{xy} e_x + a_{yy} e_y \end{cases} \quad \textcircled{4}$$

が成り立つとし, ベクトル \mathbf{u} と $f(\mathbf{u})$ をそれぞれ $\mathbf{u} = x e_x + y e_y, f(\mathbf{u}) = X e_x + Y e_y$ と表すとき, これら 2 組の座標間の関係を

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の形で表現する行列 A を求めよ.

- (5) 一次変換 f に対して, (4) の条件④に加えて,

$$\begin{cases} f(e'_x) = a'_{xx} e'_x + a'_{yx} e'_y \\ f(e'_y) = a'_{xy} e'_x + a'_{yy} e'_y \end{cases}$$

が成り立つとする. ベクトル \mathbf{u} と $f(\mathbf{u})$ をそれぞれ $\mathbf{u} = x' e'_x + y' e'_y, f(\mathbf{u}) = X' e'_x + Y' e'_y$ と表せば, 2 組の座標間の関係は (4) と同様に

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

と表現される. このとき, 行列 A と A' の関係を P を用いて表せ.

(京都大 2009) (m20093303)

0.306 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 1 & 0 & a & 3 \\ 1 & 2 & a+2 & a \end{pmatrix}$ を考える. ただし, a は定数である.

(1) 行列 A の階数を求めよ.

(2) 次の連立1次方程式が解をもつように a の値を定め, その解を求めよ.

$$\begin{cases} x + y + (a+1)z = 2 \\ x + az = 3 \\ x + 2y + (a+2)z = a \end{cases}$$

(京都工芸繊維大 2001) (m20013409)

0.307 連立1次方程式 $\begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y + 2z - 2w = 3 \\ x - y + z + 2w = k - 3 \end{cases}$ が解をもつように定数 k の値を定め, これを解け. また, 係数行列 A を示し, その階数 $\text{rank } A$ を求めよ.

(京都工芸繊維大 2006) (m20063410)

0.308 連続時間信号 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

で定義する. ただし, t は時間を表す実数, ω は角周波数を表す実数であり, $j = \sqrt{-1}$ とおいている. このとき,

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

で与えられる連続時間信号 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ と振幅スペクトル $|F(\omega)|$ を求めなさい.

(京都工芸繊維大 2008) (m20083405)

0.309 インパルス応答が

$$h(n) = \begin{cases} 1 & (n = 0, 1) \\ 0 & (n \leq -1 \text{ または } n \geq 2) \end{cases}$$

であたえられる線形時不変な離散時間システムに対して,

$$u(n) = \begin{cases} 1 & (n = 0, 1) \\ 0 & (n \leq -1 \text{ または } n \geq 2) \end{cases}$$

となる離散時間信号 $u(n)$ を入力したときの出力を $y(n)$ とする. ただし, n は離散時刻を表す整数とする. このとき, $n = 1$ および $n = 3$ におけるシステムの出力 $y(1)$ と $y(3)$ の値を求めなさい.

(京都工芸繊維大 2008) (m20083406)

0.310 xy 平面上で定義された関数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

がある. ここで, $\text{Tan}^{-1}x$ は逆正接関数の主値を表す.

(1) $x \neq 0$ のとき, 偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ および $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ を求めよ.

(2) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ および $\frac{\partial f}{\partial y}(0, y)$ を定義に基づいて求めよ.

(3) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ および $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ の値を求めよ.

0.311 a を実数とする. x, y, z, w に関する連立 1 次方程式

$$(*) \quad \begin{cases} x + 2y + z + 4w = 1 \\ x + y + 3w = a \\ x - y - 2z + w = a^2 \end{cases}$$

について次の問いに答えよ.

- (1) $(*)$ が解を持つような a の値をすべて求めよ.
- (2) (1) で求めた a の値それぞれについて $(*)$ の解を求めよ.

(京都工芸繊維大 2011) (m20113401)

0.312 xy 平面上の図形 $D : \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ ($0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq e^\theta$) に対して,

重積分 $\iint_D 1 dx dy$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2013) (m20133404)

0.313 関数 $y = y(x)$ は $\begin{cases} yy'' + (y')^2 + yy' = x \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$ を満たしている. 関数 $z = z(x)$ を $z = yy'$ で定める.

- (1) $(e^x z)'$ を x の式で表せ.
- (2) z を x の式で表せ.
- (3) y を x の式で表せ.

(京都工芸繊維大 2014) (m20143404)

0.314 a を定数とする. x, y, z に関する連立 1 次方程式

$$(*) \quad \begin{cases} x - y + az = 1 \\ ax - ay + 4z = -2 \\ (a+1)x - 3y + (a+4)z = -1 \end{cases}$$

の解が 2 組以上存在するような a の値を求め, さらにその a の値に対して $(*)$ の解を求めよ.

(京都工芸繊維大 2016) (m20163401)

0.315 a を実数とする. 実数全体で定義された関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & (x \neq 0) \\ a & (x = 0) \end{cases}$$

を満たし, $x = 0$ で連続であるとする.

- (1) a の値を求めよ.
- (2) 関数 $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ. さらに, $f'(0)$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2018) (m20183403)

0.316 a, b を実数とする. x, y, z に関する連立 1 次方程式

$$(*) \begin{cases} ax + ay + 2bz = 3 \\ 2x + 3y + 3z = 4 \\ 3x + 5y + 2z = 5 \end{cases}$$

を考える. $(x, y, z) = (-4, 3, 1)$ は $(*)$ の解であり, かつ $(*)$ はそれ以外の解ももつとする. このとき, a, b の値を求めよ. また, $(*)$ の解を求めよ.

(京都工芸繊維大 2022) (m20223401)

0.317 (1) $x > 0$ における微分方程式 $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 0$ の一般解を求めよ.
 (2) $x > 0$ における微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = e^{2x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

の解を求めよ.

(京都工芸繊維大 2022) (m20223404)

0.318 実数値未知パラメタ α を含む次の連立一次方程式を考える. 未知パラメタ α の値によって, この連立一次方程式の解の性質がどのようなになるかを示せ.

$$\begin{cases} \alpha x + y - z = 2 \\ 2x + y + \alpha z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

(大阪大 1998) (m19983502)

0.319 $a, b > 0, a \neq b$ とし, 常微分方程式の初期値問題,

$$\begin{cases} u'(t) + au(t) = 0 & (0 < t < \infty) \\ v'(t) + bv(t) - au(t) = 0 & (0 < t < \infty) \\ u(0) = 1 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

を考える.

- (1) 解 $u(t), v(t)$ を求めよ.
- (2) $v(t)$ の増減を調べ, グラフの概形を描け.
- (3) $v(t)$ の最大値を求めよ.

(大阪大 2002) (m20023503)

0.320 次のような 4 つの未知変数 x_1, x_2, x_3, x_4 をもつ連立一次方程式を考える.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 & = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 & = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \end{cases}$$

次の (1), (2) に答えよ.

- (1) 上述の連立一次方程式の係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の列ベクトルのうちで、なるべく少ない個数の列ベクトルを用いて、それらの一次結合（線形結合）によって、その他の列ベクトルを表現せよ。

- (2) 上述の連立1次方程式の解 x_1, x_2, x_3, x_4 のうちで、

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2$$

を最小にするものを求めよ。

(大阪大 2003) (m20033502)

- 0.321** X と Y は独立な確率変数で共に次の指数分布に従うものとする。すなわち、分布密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases} \quad \text{であるものとする。ただし, } \lambda > 0.$$

- (1) $X < Y$ となる確率 $P(X < Y)$ を求めなさい。
 (2) $\min\{X, Y\}$ の分布密度関数を求めなさい。ただし、 $\min\{x, y\}$ は x と y のうち、大きくない方を表す。
 (3) $a < b < 0$ のとき、確率 $P(a < X - Y < b)$ を求めなさい。

(大阪大 2006) (m20063511)

0.322 連立微分方程式
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + a(x^3 + xy^2) \\ \frac{dy}{dt} = -x + a(x^2y + y^3) \end{cases}$$

の解で、初期時刻 $t = 0$ において $(0, 0)$ でないものを考える。ただし a は定数とする。このような $(x(t), y(t))$ について以下が成り立つことを示せ。

- (1) $a = 0$ のとき、 t の周期関数である。
 (2) $a > 0$ のとき、 $t > 0$ では有限時刻を越えて延長できない。
 (3) $a < 0$ のとき、すべての $t > 0$ に対して存在し、 $t \rightarrow \infty$ で $(0, 0)$ に収束する。

(大阪大 2008) (m20083504)

- 0.323** 実数値関数 $x = x(t)$, $y = y(t)$ は次の連立微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2xy \\ \frac{dy}{dt} = x^2 - y^2 \end{cases}$$

に解で、 $t = 0$ において $(x(0), y(0)) = (a, b)$ である。ただし、 $a \neq 0$ とする。

- (1) 解 $(x(t), y(t))$ に対してある定数 C があり、つねに $x^2 + y^2 = Cx$ が成り立つことを示せ。
 (2) t が実数全体を動くとき $|x(t)|$ の最大値があることを示し、それを a, b で表せ。

(大阪大 2010) (m20103508)

- 0.324** 次の連立微分方程式について、以下の問いに答えよ。

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = 2x(t) - 3y(t) + F(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t) - 2x(t) \end{cases}$$

- (1) $F(t) = 0$ の場合、一般解 $x(t), y(t)$ を求めよ。
 (2) $F(t) = e^{2t}$ の場合、 $y(t)$ の特殊解を $y_1(t) = Ae^{2t}$ と表す。このとき、定数 A を求めよ。

(3) $F(t) = e^{2t}$ の場合, 一般解 $x(t), y(t)$ を求めよ.

(4) $F(t) = e^{2t}$ の場合, 初期条件 $x(0) = 2, y(0) = 0$ の下で解 $x(t), y(t)$ を求めよ.

(大阪大 2011) (m20113502)

0.325 実数値関数 $x = x(t), y = y(t)$ は, 連立微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x^2 + y^2)y + kx \\ \frac{dy}{dt} = -(x^2 + y^2)x + ky \end{cases}$$

の解であり, 初期時刻 $t = 0$ において

$$(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$$

を満たしている. ただし, $x_0^2 + y_0^2 = 1$ であるとする.

(1) $X(t) = x^2(t) + y^2(t)$ とする. $X(t)$ の満たす微分方程式を導き, その解を求めよ.

(2) $x(t), y(t)$ を t, k, x_0, y_0 を用いて表せ.

(大阪大 2013) (m20133505)

0.326 m を自然数, k を 2 以上の自然数とする. x_0 を正の実数とし, 関数 $x(t)$ に対する常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) - t^m x(t)^k = 0 & (t > 0), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (*)$$

を考える. 以下の問に答えよ.

(1) $y(t) = x(t)^{1-k}$ とおくと, $y(t)$ が満たす常微分方程式を導け.

(2) 広義積分

$$\int_0^\infty t^m e^{-(k-1)t} dt$$

を求めよ.

(3) 初期値問題 (*) の解 $x(t)$ に対して, $\lim_{t \rightarrow t_0-0} |x(t)| = \infty$ となる正の実数 t_0 が存在するとき解 $x(t)$ は爆発するということにする. 解 $x(t)$ が爆発するような正の実数 x_0 の範囲を求めよ.

(大阪大 2014) (m20143504)

0.327 関数 $x(t), y(t)$ に関する次の連立微分方程式について, 以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 2y + \cos 2t \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

(1) $x(t)$ および $y(t)$ の一般解を求めよ.

(2) 初期条件 $x(0) = y(0) = 0$ として $x(t)$ と $y(t)$ を求めよ.

(3) $t \rightarrow \infty$ において $x(t)$ が $A \cos(\omega t + \theta)$ なる関数形に漸近することを示し, その時の A, ω, θ の値を求めよ. ただし, A, ω, θ は実数であり, $A > 0, \omega > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ とする. また, θ は逆三角関数を用いて表しても構わない.

(大阪大 2016) (m20163509)

0.328 以下に示す連立微分方程式の解 $x(t)$, $y(t)$ を求めよ. ただし, $t = 0$ のとき, $x = 1$, $y = 0$ とする.

$$\begin{cases} 2\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt} = 3x(t) + e^{2t} \\ \frac{dx(t)}{dt} + 2\frac{dy(t)}{dt} = y(t) + e^{2t} \end{cases}$$

(大阪大 2022) (m20223502)

0.329 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $x_0 > 0$ として, 次の微分方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta x^2, t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

- (1) $x(t)$ を求めよ.
- (2) $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ を求めよ.
- (3) $\frac{\alpha}{\beta} \neq x_0$ のとき, $x(t)$ が区間 $t \geq 0$ において単調関数であることを示せ.

(大阪大 2022) (m20223505)

0.330 確率変数 X の確率密度関数が $f(x) = \begin{cases} c(x^2 - 2x) & , 0 \leq x \leq 2 \text{ のとき} \\ 0 & , \text{それ以外のとき} \end{cases}$ であるとする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 定数 c の値を求めよ.
- (2) 期待値 $E(X)$ を求めよ.
- (2) 分散 $V(X)$ を求めよ.

(大阪府立大 2001) (m20013606)

0.331 次の連立方程式について, 以下の間に答えよ. $\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + 3y + 4z = b \\ 3x + 4y + 5z = c \end{cases}$

- (1) 係数行列の階数 (rank) を求めよ.
- (2) この連立一次方程式が解をもつための必要十分条件を求めよ.
- (3) 解があるときそれを求めよ.

(大阪府立大 2006) (m20063601)

0.332 領域 D を $D = \left\{ (x, y) \in R^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$ とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) D を図示せよ.
- (2) 二重積分 $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ の値を求めよ.

(大阪府立大 2016) (m20163609)

0.333 3次元空間内の単位球を B とおく. すなわち,

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$ とおく. この変数変換のヤコビ行列式を計算せよ.

(2) 定積分

$$\iiint_B (x^2 + y^2) e^{-(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} dx dy dz$$

の値を求めよ.

(大阪府立大 2019) (m20193607)

0.334 パラメータ表示の曲線 $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ の長さを求めよ.

(関西大 2003) (m20033702)

0.335 次の3元連立一次方程式の解を求めよ.

$$\begin{cases} ax + y + z = 3a \\ x + ay + z = 2a + 1 \\ x + y + az = a + 2 \end{cases}$$

(神戸大 2001) (m20013810)

0.336 実数 a, b が与えられている. このとき, x, y, z に関する以下の連立方程式を解け.

$$(1) \begin{cases} 3x - 2y - 2z = a \\ 5x - 4y + 4z = -1 \\ 3x - 4y + 20z = 1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} (b-2)x - y - 2z = 1 \\ x + y + 2z = -2 \\ x + by + 2z = 1 \end{cases}$$

(神戸大 2008) (m20083803)

0.337 (1) 次の行列 A の行列式 $|A|$ は, x に関する高々4次の多項式で表される. このとき, x^2 の係数を A の成分を用いて表せ. ただし, A の $(1,1), (2,2), (3,3)$ 成分以外の成分は x に無関係な定数とする.

$$A = \begin{pmatrix} x & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & x & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & x^2 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

(2) $\{a, b, c\}$ を3次元ベクトル空間 V の基底とし, f を次のような V の線形変換とする. このとき, 以下の各問に答えよ.

$$\begin{cases} f(a) = -a - c \\ f(b) = a \\ f(c) = a + b + 2c \end{cases}$$

(a) $\{a + b + c, a + b, a\}$ は V の基底であることを示せ.

(b) V の基底 $\{a + b + c, a + b, a\}$ に関する f の表現行列 A を求めよ.

(神戸大 2009) (m20093801)

0.338 \mathbb{R} 上の関数列 $\{f_n\}_{n=0,1,\dots}$ を次式によって帰納的に定義する:

$$\begin{cases} f_0(x) = 1, \\ f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x t f_n(t) dt, \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

このとき, $f_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^{2k}}{2^k k!}$ $n = 1, 2, \dots$ となることを数学的帰納法によって示せ.

(神戸大 2009) (m20093807)

0.339 a, b, c, d, p, q を実数とし, $ad - bc \neq 0$ と仮定する. x, y についての連立 1 次方程式

$$(*) \quad \begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

に関する以下の問いに答えよ.

- (1) $a \neq 0$ のとき, 掃き出し法で連立方程式 (*) を解け.
- (2) $a = 0$ のとき, 連立方程式 (*) を解け.
- (3) (1) の解を整理して $a = 0$ とおいたものと, (2) の解とが一致することを確かめよ.

(神戸大 2011) (m20113809)

0.340 $g(x)$ を \mathbb{R} 上定義された 2 回微分可能な関数とし, \mathbb{R} 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} g(x) + x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ g(0) & x = 0 \end{cases}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) $x \neq 0$ として $f'(x)$ を求めよ.
- (2) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示し, $f'(0)$ を求めよ.
- (3) $f'(x)$ は $x = 0$ で微分可能でないことを示せ.

(神戸大 2013) (m20133806)

0.341 $a, b, c > 0$, $V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$ とするとき, 積分 $I = \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$ の値を求めよ.

(神戸大 2017) (m20173802)

0.342 xy -平面上の 2 変数関数 f を

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき} \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \text{ のとき} \end{cases}$$

として定義するとき, f の原点 $(0, 0)$ での連続性, 偏微分可能性, 全微分可能性を判定せよ.

(神戸大 2018) (m20183808)

0.343 a を実数とする. x, y, z に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

を解け.

(神戸大 2020) (m20203801)

0.344 n を正整数とする. 積分

$$\iint_A (x + y)^2 (x - y)^n dx dy, \quad A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{2} \leq y \leq x \leq \frac{1}{2} \right\}$$

を求めよ.

(神戸大 2022) (m20223808)

0.345 自然数 n に対し, $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ とおく. このとき次の各問いに答えよ.

(1) $P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ を求めよ.

(2) 自然数 n を固定する. 各 $j = 0, 1, \dots, n-1$ に対し, 多項式 $\frac{d^j}{dx^j} (x^2 - 1)^n$ は $x^2 - 1$ で割り切れることを数学的帰納法を用いて証明せよ.

(3) 次の関係式が成り立つことを示せ.

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

ただし必要ならば $\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t dt = \frac{2n(2n-2)\cdots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3 \cdot 1}$

を用いてよい.

(鳥取大 2001)

(m20013902)

0.346 次の連立一次方程式を消去法 (掃き出し法) によって解け.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + y + 4z = 6 \end{cases}$$

(鳥取大 2005)

(m20053911)

0.347 次の連立一次方程式を消去法 (掃き出し法) によって解け.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 4x - 2y + z = 3 \\ -2x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

(鳥取大 2006)

(m20063909)

0.348 クラメル公式を用いて次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} 3x + 6y + z = 4 \\ 4x + 9y + 2z = 3 \\ 2x + 3y + 4z = 9 \end{cases}$$

(鳥取大 2007)

(m20073917)

0.349 (1) 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ の行列式の値を求めよ.

(2) 行列 A の逆行列を求めよ.

(3) 次の連立一次方程式を解け.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

(鳥取大 2008)

(m20083905)

0.350 ある工業製品の故障の発生時間 X は, 次式の確率密度関数をもつ指数分布に従っているという.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 0.0005e^{-0.0005x} & (x \geq 0) \end{cases}$$

(1) 故障の発生時間 X (単位は時間 (hours)) の平均値を求めなさい.

(2) この製品が 2000 時間以内に故障が発生しない確率を求めなさい. ただし, $e \doteq 2.718$ とする.

(鳥取大 2008)

(m20083909)

0.351 連立一次方程式

$$\begin{cases} y - 2z = 1 \\ 2x + 2y + az = b \\ 4x + 3y = b \\ 2x + y + z = c \end{cases} \quad (*)$$

に関して、以下の問いに答えよ。ただし、 a, b, c は実数であるとする。

- (1) 方程式 (*) の解がただ一つ存在するとき、 a, b, c の間に成り立つ関係を述べよ。また、その解を求めよ。
- (2) 方程式 (*) の解の全体が 3 次元ユークリッド空間内の直線になっているとき、 a, b, c の間に成り立つ関係を述べよ。また、その直線のあらわす式を求めよ。

(岡山大 2003) (m20034003)

0.352 (1) $\int \frac{dy}{y\sqrt{1-y^2}}$ を計算せよ。

(2) $p \frac{dp}{dy} = y - 2y^3$ ($0 \leq y < 1$), $p(0) = 0$ の解 $p \in C^1([0, 1])$ をすべて求めよ。

(3) (1) と (2) を利用して $\begin{cases} y'' - y + 2y^3 = 0, & 0 \leq y < 1, x \in \mathbf{R}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 1, \end{cases}$ の解を求めよ。

(岡山大 2007) (m20074003)

0.353 関数 $f(x)$ を $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ で定める。以下の問いに答えよ。

- (1) e^x のマクローリン展開を書け。
- (2) a_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) を $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ により定める。 a_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) の値を求めよ。
- (3) $f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ で表す。 $f^{(99)}(0)$ を求めよ。
- (4) 広義積分 $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ が収束するか発散するかを判定せよ。

(岡山大 2016) (m20164002)

0.354 (1) 関数 $g(x) = \sqrt{1+x}$ のマクローリン展開は

$$g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}n} \binom{2n-2}{n-1} x^n$$

であることを示せ。ただし、 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ とする。また、右辺の無限級数の収束半径は 1 であることを示せ。

(2) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

で定めるとき、 $f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n$$

であることを示せ。

(3) 上の問い(2)の $f(x)$ のマクローリン展開について、その収束半径を求めよ。

(岡山大 2017) (m20174001)

0.355 (1) 3次正方行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

のすべての固有値および各固有値に属する固有ベクトルを求めよ。

(2) x, y, z を変数とする連立1次方程式

$$\begin{cases} x - y - 2z = a \\ 2x + y + z = b \\ 3y + 5z = c \end{cases}$$

が解をもつための a, b, c の条件を答えよ。また、その一般解を求めよ。

(岡山大 2017) (m20174004)

0.356 $p > 0$ を定数とし、 \mathbb{R} 上の関数 f を、 $f(x) = \begin{cases} x^p \sin \frac{1}{x^2} & (x > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ で定義する。

(1) f は \mathbb{R} 上で連続であることを示せ。

(2) f が \mathbb{R} 上で微分可能となるような p の値の範囲を求めよ。

(3) f が \mathbb{R} 上で微分可能で、さらにその導関数が連続となるような p の値の範囲を求めよ。

(広島大 2006) (m20064101)

0.357 \mathbb{R} 上の微分可能な関数 $f(x)$ が $f(0) = a, f(x) < a$ ($0 < x \leq 1$), $f'(0) \neq 0$ を満たすとする。

(1) $f'(0) < 0$ であることを示せ。

(2) 関数 $g(x)$ を次のように定める。

$$g(x) = \begin{cases} -f'(0) & (x = 0) \\ \frac{a - f(x)}{x} & (x > 0) \end{cases}$$

このとき、 $g(x)$ は $x \geq 0$ で連続であることを示せ。

(3) ある $C > 0$ が存在して、

$$a - f(x) \geq Cx \quad (0 \leq x \leq 1)$$

が成立することを示せ。

(広島大 2010) (m20104103)

0.358 以下の各命題について、正しければ証明し、正しくなければ反例を用いてそのことを説明せよ。

(1) 区間 $(0, \infty)$ 上で微分可能な関数 $f(x)$ が $x = a$ で最大値を取るならば、 $f'(a) = 0$ を満たす。

(2) 区間 $[0, \infty)$ 上で微分可能な関数 $f(x)$ が $x = a$ で最大値を取るならば、 $f'(a) = 0$ を満たす。

(3) 区間 $I = [0, 1]$ 上の非負値連続関数 $f(x)$ が $\int_0^1 f(x) dx = 0$ を満たすならば、任意の $x \in I$ に対し $f(x) = 0$ となる。

(4) 区間 $I = [0, 1]$ 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ と I 上の関数 $f(x)$ に対し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ が任意の $x \in I$ で成り立つとする。このとき、 $f(x)$ も I 上の連続関数である。

(5) \mathbb{R}^2 上の関数

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

は、原点 $(0, 0)$ において連続である.

(広島大 2013) (m20134106)

0.359 実数 ℓ に対して \mathbb{R}^2 上の関数 $f(x, y)$ を次で定める.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^4 + y^4)}{(x^2 + y^2)^\ell}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

以下の問いに答えよ.

- (1) f が原点 $(0, 0)$ において連続であるための ℓ の条件を求めよ.
- (2) f が原点 $(0, 0)$ で x について偏微分可能であるための ℓ の条件を求めよ.
- (3) $\ell = 1$ のとき、極限

$$J = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} f(x, y) dx dy$$

を考える. 変数変換 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ により, J は

$$J = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \frac{\sin(r^4 \varphi(\theta))}{r} dr \right) d\theta$$

となることを示せ. ここで, $\varphi(\theta) = \cos^4 \theta + \sin^4 \theta$ である.

- (4) $\ell = 1$ のとき (3) の極限 J が存在することを示し, その値を求めよ.
その際, 広義積分 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ は収束し, その値が $\frac{\pi}{2}$ であることを用いても良い.

(広島大 2014) (m20144110)

0.360 (1) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0), \end{cases}$ とする.

- (a) $f(x)$ が \mathbb{R} で微分可能であることを示せ.
- (b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が $x = 0$ で連続であるか否か理由もつけて答えよ.
- (2) $g(x)$ は开区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の微分可能な関数とし, $a, b \in I$ は $a < b$ を満たすとする.
 - (a) $g'(a) < 0 < g'(b)$ とする. $g(x)$ は $a < \xi < b$ を満たすある $\xi \in \mathbb{R}$ で閉区間 $[a, b]$ での最小値をとることを示せ. また $g'(\xi)$ を求めよ.
 - (b) $g'(a) < k < g'(b)$ を満たす任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して, $g'(\eta) = k$, $a < \eta < b$ を満たす $\eta \in \mathbb{R}$ が存在することを示せ.
 - (c) $g'(x)$ が I で狭義単調増加であるならば, $g'(x)$ は I で連続であることを示せ.

(広島大 2015) (m20154105)

0.361 (1) 2 以上の自然数 n に対して,

$$\int \cos^n \frac{x}{3} dx = \frac{3}{n} \cos^{n-1} \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} \frac{x}{3} dx$$

が成り立つことを示せ.

(2) $f(\theta) = \cos^3 \frac{\theta}{3}$ とし, xy 平面上の曲線

$$C : \begin{cases} x = f(\theta) \cos \theta \\ y = f(\theta) \sin \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

を考える. 次の (i), (ii), (iii) に答えよ.

- (i) C の概形を図示せよ (x 軸, y 軸との交点の座標も記すこと).
- (ii) C の長さを求めよ.
- (iii) C で囲まれた部分の面積を求めよ.

(広島大 2016) (m20164102)

0.362 $0 < r < 1$ とする. 座標空間において, 原点を中心とし半径が 1 である球体 B から, 領域 $\{(x, y, z) \in B \mid x^2 + y^2 < r^2\}$ を取り除いて得られる物体を $B(r)$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $B(r)$ の体積を求めよ.
- (2) $B(r)$ の体積が B の体積の $\frac{1}{8}$ であるとする. このとき, r の値と $B(r)$ の表面積を求めよ.
- (3) $B(r)$ の表面積の最大値と, 最大値を与える r の値を求めよ.

(広島大 2018) (m20184104)

0.363 複素数を成分とする 2 次正方行列全体のなす集合を $M(2, \mathbb{C})$ で表す. E_2 を 2 次の単位行列とする. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C})$ に対し, A の随伴行列 A^* を

$$A^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

により定める. ただし, 複素数 z に対し \bar{z} は z の複素共役を表す. また

$$H(2) = \{A \in M(2, \mathbb{C}) \mid A^* = A\}$$

$$U(2) = \{A \in M(2, \mathbb{C}) \mid P \text{ は正則で } P^{-1} = P^*\}$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

- (1) $A \in H(2)$ とする. A の固有値は実数であることを示せ.
- (2) $A \in H(2)$ とする. A がただ一つの固有値をもつならば, ある実数 λ が存在して $A = \lambda E_2$ となることを示せ.
- (3) $A \in H(2)$ は異なる二つの固有値をもつとする. \mathbf{v}, \mathbf{w} をそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルとすると,

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$$

が成り立つことを示せ. ただし, $(\ , \)$ は \mathbb{C}^2 の標準エルミート内積である.

- (4) $A \in H(2)$ に対し, ある $P \in U(2)$ が存在して P^*AP が対角行列となることを示せ.

(広島大 2021) (m20214104)

0.364 次の連立方程式を解け. $\begin{cases} 3x^2 + 4x - 4 < 0 \\ x^2 + 4x - 1 > 0 \end{cases}$

(山口大 2000) (m20004301)

0.365 次の直線と円で囲まれた図形の面積を積分して求めなさい。

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + (y - 1)^2 = 1 \end{cases}$$

(山口大 2005) (m20054302)

0.366 (1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx$ (n : 整数) をそれぞれ求めなさい。

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx$ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx$ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx$ (n, m : 正整数) をそれぞれ求めなさい。

(3) 周期 2π をもち、 $f(x) = \begin{cases} -\pi/4 & (-\pi < x < 0 \text{ のとき}) \\ \pi/4 & (0 < x < \pi \text{ のとき}) \end{cases}$ で定義される関数をフーリエ級数に展開しなさい。

(山口大 2007) (m20074301)

0.367 次の曲線と直線とで囲まれた図形の面積を求めなさい。

$$\begin{cases} y^2 = 2x + 5 \\ y = -x - 1 \end{cases}$$

(山口大 2011) (m20114303)

0.368 連立微分方程式 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 2y \end{cases}$ について、次の間に答えよ。

(1) 上の微分方程式を満たす x, y に対して、 $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x$ と $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y$ の値を求めよ。

(2) 上の微分方程式の解 $x = x(t)$, $y = y(t)$ で $x(0) = 3$, $y(0) = 6$ となるものを求めよ。

(徳島大 2000) (m20004403)

0.369 $u(x)$ が次の微分方程式の初期値問題を満たす。 $\begin{cases} u'' + (u')^2 - 3u' + 2 = 0 \\ u(0) = 0, u'(0) = \frac{3}{2} \end{cases}$

(1) 定数係数の 2 階線形同次微分方程式 $v'' - 3v' + 2v = 0$ の一般解 $v(x)$ を求めよ。

(2) $u(x) = \log y(x)$ において初期問題の微分方程式に代入し、(1) を用いることにより、初期問題を満たす解 $u(x)$ を求めよ。

(徳島大 2007) (m20074404)

0.370 次の連立微分方程式の一般解 $x = x(t)$, $y = y(t)$ を求めよ。 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \sin t \\ \frac{dy}{dt} = x \cos t + y \sin t \end{cases}$

(徳島大 2008) (m20084404)

0.371 次の微分方程式の初期値問題の解 $y_0 = y_0(x)$, $y_1 = y_1(x)$ を求めよ。

$$\begin{cases} y_0' = y_1 + x, \\ y_1' = -2y_0 - 3y_1, \end{cases} \quad y_0(1) = \frac{1}{e} - \frac{1}{4}, \quad y_1(1) = -\frac{1}{e} + \frac{1}{2},$$

(徳島大 2014) (m20144404)

0.372 関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で連続であるとは

『任意の正の数 ε に対し、正の数 δ で $|x - x_0| < \delta$ であるならば $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ をみたすものがとれる』… (★)

ときをいう。このとき、次の問いに答えよ。

まず $f(x) = x^2$ として、(1) と (2) に答えよ。

(1) $x_0 = 0$, $\varepsilon = \frac{1}{100}$ としたときに (★) が成立する δ を求めよ。

(2) $x_0 = 0$ とし、任意の $\varepsilon > 0$ に対して (★) が成立する δ を求めることにより、 $f(x) = x^2$ が $x = 0$ で連続であることを示せ。

次に

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{m} & (x \text{ が } 0 \text{ でない有理数で、その既約分数表示が } m > 0 \text{ として } \frac{n}{m} \text{ と表せるとき)} \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき、または } x \text{ が無理数のとき)} \end{cases}$$

と定義された関数について、以下の (3)~(5) に答えよ。

(3) 次の値を求めよ。

(a) $f\left(\frac{2}{3}\right)$ (b) $f(\sqrt{2})$ (c) $f\left(\frac{4}{8}\right)$

(4) M を自然数とする。 $|x| < \frac{1}{M}$ をみたす有理数 x ($x \neq 0$) の既約分数表示の分母を m とすれば $|m| > M$ となることを示せ。

(5) $f(x)$ が $x = 0$ で連続となることを示せ。

(高知大 2007) (m20074502)

0.373 線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ は基本ベクトル $e_i = \begin{pmatrix} \delta_{i,1} \\ \delta_{i,2} \\ \delta_{i,3} \\ \delta_{i,4} \end{pmatrix}$ に対して $f(e_i) = \sum_{k=1}^i i e_k$ となっている。た

だし、 $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ である。このとき次の問いに答えよ。

(1) $f(e_4)$ はどんなベクトルか、成分表示せよ。

(2) $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$ は 1 次独立であることを示せ。

(3) \mathbb{R}^4 の基底を e_1, e_2, e_3, e_4 とするとき、 f の表現行列 A を求めよ。

(4) A は正則であることを示せ。

(5) f の逆写像はあるか。あれば求め、無ければその理由を述べよ。

(高知大 2011) (m20114504)

0.374 実数直線 \mathbb{R} 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定義する。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ が $x = 0$ で連続であることを示せ。

(2) $x \neq 0$ のとき、 $f(x)$ の 1 階導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(3) $f(x)$ が $x=0$ で微分可能であることを示せ. また, $f'(0)$ を求めよ.

(4) $f'(x)$ が $x=0$ で連続でないことを示せ.

(高知大 2012) (m20124501)

0.375 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^{x^2} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $x \neq 0$ のとき, $f'(x)$ を求めよ.

(2) 任意の実数 x に対して, $|f(x)| \leq x^2$ であることを示せ.

(3) $f(x)$ は $x=0$ で微分可能かどうかを理由を挙げて答えよ.

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} x f'(x)$ を求めよ.

(高知大 2014) (m20144501)

0.376 x, y, z, w を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y + z + w = 2 \\ 3x \quad -z = 0 \\ x + 2y + 3z + 2w = 2 \\ 2y \quad -w = 0 \end{cases}$$

について, 次の各問いに答えよ.

(1) この連立 1 次方程式の係数行列 A の行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(2) 以下の 4 次正方行列 A_x, A_y, A_z, A_w の行列式の値をそれぞれ求めよ.

$$A_x = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$A_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_w = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) クラームルの公式を用いて, この連立 1 次方程式を解け.

(高知大 2015) (m20154506)

0.377 $f(x)$ は开区間 $(-1, 1)$ 上で連続な正值関数で,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 1$$

を満たすとする. さらに, 正の整数 n ごとに実数直線 \mathbb{R} 上で定義された関数 $f_n(x)$ を,

$$f_n(x) = \begin{cases} n f(nx) & \left(x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \text{ のとき}\right) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

で与える. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$ を求めよ.

(2) N を正の整数とし, ε を正の数とする. \mathbb{R} 上で定義された連続関数 $g(x)$ が閉区間 $\left[-\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right]$ 上で $|g(x)| < \varepsilon$ を満たせば, $n > N$ を満たす任意の整数 n に対して,

$$-\varepsilon \leq \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x)dx \leq \varepsilon$$

であることを示せ.

(3) \mathbb{R} 上で定義された任意の連続関数 $h(x)$ に対して, $a_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)h(x)dx$ とおく.

このとき, $g(x) = h(x) - h(0)$ に対して (2) の結果を利用することにより, 数列 $\{a_n\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき $h(0)$ に収束することを示せ.

(高知大 2016) (m20164502)

0.378 \mathbb{R}^2 の領域 D_1, D_2 を

$$D_1 = \{(x, y) \mid 0 < x < 1 \text{ かつ } x^2 + y^2 < 1\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid 0 < x < 1 \text{ かつ } |y| < 1\}$$

により定義する. 次の問いに答えよ.

(1) D_1 上の C^1 級関数 $f(x, y)$ が $x^2 + y^2$ のみに依存するとき, すなわち,

$$f(x, y) = h(x^2 + y^2)$$

が任意の $(x, y) \in D_1$ に対して成り立つような一変数関数 h が存在するとき, D_1 上で

$$(*) \quad y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

が成り立つことを示せ.

(2) 逆に, D_1 上の C^1 級関数 $f(x, y)$ が D_1 上で (*) を満たすとき, f は $x^2 + y^2$ のみに依存する関数であることを示せ.

(3) D_2 上の関数 $g(x, y)$ を

$$g(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)^2 & (x^2 + y^2 > 1 \text{ かつ } y > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

で定義する. g は (*) の f を g で置き換えた方程式を D_2 上で満たすことを示せ.

(4) 小問 (1), (2) の D_1 を D_2 に置き換えると, それぞれ正しいと言えるだろうか. 理由を挙げて述べよ.

(高知大 2017) (m20174503)

0.379 (1) \mathbb{R} 上の実数値関数 f を次で定義する.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ は存在するか. 理由をつけて答えよ.

(2) $a, A, B \in \mathbb{R}$ を定数とする. g, h を \mathbb{R} 上の実数値関数とする. $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ と $\lim_{x \rightarrow A} h(x) = B$ が成り立つとする. また, $x \neq a$ のとき, $g(x) \neq A$ であるとする. このとき, $\lim_{x \rightarrow a} h(g(x)) = B$ が成り立つことを $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて示せ.

- (3) $a, A, B \in \mathbb{R}$ を定数とする. g, h を \mathbb{R} 上の実数値関数とする. $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ と $\lim_{x \rightarrow A} h(x) = B$ が成り立つとする. このとき, $\lim_{x \rightarrow a} h(g(x)) = B$ が常に成り立つか. 理由をつけて答えよ.

(高知大 2018) (m20184501)

0.380 α と β について連立方程式

$$\begin{cases} \sin \beta = 2 \sin \alpha + 2 \\ \sin \beta = -\sin \alpha + h \end{cases}$$

について (但し, $0 \leq \alpha \leq 2\pi, 0 \leq \beta \leq 2\pi$ とする.), 以下の問いに答えよ.

- (1) 連立方程式が解を持つ為の h の範囲を求めよ.
- (2) (1) の範囲の各 h について, 解の個数を求めよ.
- (3) h が (1) の範囲にある時, $h^3 - h$ が最小となる h の値と最小値を求めよ.

(高知大 2020) (m20204501)

0.381 (1) 行列 $\begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(2) 次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} 10x + 4y + z = 10 \\ 10x + 6y + 3z = 0 \\ 5x + 4y + 3z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

(愛媛大 2004) (m20044609)

0.382 (1) 次の関数を微分せよ.

(a) $\log(1+x^4)$ (b) $\sin^{-1} x^2$

(2) α, β を定数とし,

$$f(x) = \begin{cases} \tan^{-1} x & (x > 1) \\ \beta & (x = 1) \\ \alpha x - \alpha + \beta & (x < 1) \end{cases}$$

とおく. ただし $\tan^{-1} x$ の値域は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ とする. 次の問いに答えよ.

- (a) $f(x)$ が $x = 1$ で連続になるように β を定めよ.
- (b) $\lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x)$ となるように α を定めよ.

(愛媛大 2005) (m20054601)

0.383 定数 a, b が $a > b > 0$ を満たすとき, パラメータ表示された曲線

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

を考える.

- (1) この曲線の概形を描け.
- (2) $t = \frac{\pi}{4}$ に対応する点におけるこの曲線の接線の方程式を求め, (1) で描いた図に書き入れよ.
- (3) もとの曲線を y 軸を中心に回転したときにできる図形の体積を求めよ.

(愛媛大 2005) (m20054605)

0.384 x, y, z についての連立方程式
$$\begin{cases} 4x + y + 2z = 2 \\ ax - 5y + z = 8 \\ x - 4y - z = 9 \\ 3x - y + z = 5 \end{cases}$$
 が解を持つように、定数 a を定めよ.

(愛媛大 2006) (m20064605)

0.385 連立 1 次方程式
$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ x + 4y - z + 6w = 7 \\ x + 3y + 4w = 6 \\ 3x + 8y - z + 8w = 11 \end{cases}$$
 について次の問いに答えよ.

(1) 上の連立 1 次方程式の解をすべて求めよ.

(2) a, b, c を定数とする. 組 $x = a, y = 7, z = b, w = c$ が上の連立 1 次方程式の解になるとき, a, b, c の値を求めよ.

(愛媛大 2006) (m20064607)

0.386 C^2 級の 2 変数関数 $z = f(x, y)$ と 2 次元の極座標変換
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$
 の合成は, r と θ の関数 $z = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ になる.

(1) 次の等式を示せ.
$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を z の r と θ についての偏導関数および r と θ のみを用いて表せ.

(愛媛大 2006) (m20064615)

0.387 x, y, z についての連立方程式
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -2 \\ -2x + y + z = -1 \\ x - 3y + 2z = a \end{cases}$$

が解を持つように、定数 a を定めて解を求めよ.

(愛媛大 2011) (m20114611)

0.388 (1) 次で定義される関数 $f(x, y)$ の原点 $(0, 0)$ での連続性を調べよ.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(2) C^1 級の関数 $f(x, y)$ は

$$x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

を満たすとする. このとき, $z = f(x, y)$ と $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ の合成関数 $z = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ は r だけの関数であることを示せ.

(3) 連続関数 $f(x)$ について, 次の等式を示せ.

$$\int_0^x dy \int_0^y dz \int_0^z f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt$$

(愛媛大 2016) (m20164603)

0.389 $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq x \leq \frac{\pi}{3} \right\}$ とする.

- (1) D を図示せよ.
 (2) 次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D \sin(x+y) dx dy$$

(愛媛大 2018) (m20184604)

0.390 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$ とする.

- (1) D を図示せよ.
 (2) 2 重積分 $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$ を求めよ.

(愛媛大 2021) (m20214604)

0.391 次の各問いに答えよ.

- (1) $z(t)$ に関する微分方程式 $\frac{d^2 z}{dt^2} + mz = 0$ の一般解を求めよ. ただし, m は正定数とする.
 (2) 連立微分方程式 $\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + 2x - y = 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} - x + 2y = 0 \end{cases}$ の解を求めたい. そのため, この微分方程式に一次変換 $\begin{cases} x = x_1 + x_2 \\ y = ax_1 + bx_2 \end{cases}$ を施す. x_1 に関する方程式が x_2 を含まないように, x_2 に関する方程式が x_1 を含まないようにするための a, b の値を求めよ. ただし, $a \neq b$ とする.
 (3) x_1, x_2 の一般解を用いて, 初期条件 $t = 0$ で, $x = 2, \frac{dx}{dt} = 0, y = 0, \frac{dy}{dt} = 0$ のときの解 x, y を求めよ.

(九州大 1998) (m19984706)

0.392 $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$

- (1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.
 (2) 導関数 $f'(x)$ は連続であるか調べ, また, 導関数 $f'(x)$ が微分可能な関数か調べよ.

(九州大 1999) (m19994701)

0.393 次の連立微分方程式がある.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = y(t) - t^2 - 4 \\ \frac{d}{dt}y(t) = -x(t) - t^2 \end{cases}$$

ただし, $x(1) = -1, y(1) = 1$ である.

- (1) 上の連立微分方程式より $y(t)$ を消去し, $x(t)$ に関する微分方程式を導け.
 (2) $x(t), y(t)$ を求めよ.

(九州大 1999) (m19994704)

0.394 連立微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -x(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = x(t) - ay(t) \end{cases}$$

に関して以下の問いに答えよ. ただし, $x(0) = 1, y(0) = 0$ とし, a は正の定数とする.

- (1) $x(t)$ と $y(t)$ を求めよ.
 (2) $y(t)$ を最大にする t の値とその最大値を求めよ.

(九州大 2000) (m20004702)

0.395 次の間に答えよ.

- (1) 行列 A の階数の定義について、以下の下線部に適切な単語を記入せよ.
 (a) A の 0 でない小行列式の _____.
 (b) A の _____ な列ベクトルの最大個数.
 (c) A の _____ な行ベクトルの最大個数.
 (d) A で定まる線形変換の値域の _____.

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ.

- (3) 次の連立方程式に解があれば、そのすべてを求めよ.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

(九州大 2003) (m20034706)

0.396 次の連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を考える. ただし,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 6 & 14 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix}$$

である. このとき、以下の問いに答えよ.

- (1) 上三角行列 U と、対角成分が 1 の下三角行列 L を用いて、 $A = LU$ と書くとき、 L と U を求めよ.
 (2) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は以下の 2 つの問題を解くことで求まることを説明せよ.

$$\begin{cases} L\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ U\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

- (3) (2) の方法で $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を解け.

(九州大 2004) (m20044704)

0.397 A_n を対角成分がすべて a でそれ以外はすべて 1 の n 行 n 列の行列とする.

- (1) A_n の行列式を因数分解された形で求めよ.
 (2) 次の連立一次方程式を解け (a, b は定数).

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = b \\ x_1 + ax_2 + x_3 + \cdots + x_n = b \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + ax_n = b \end{cases}$$

(九州大 2005) (m20054706)

- 0.398** (1) 微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} - ay = 0$ を解け.

- (2) 区間 $[0, \ell]$ での $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0$ の解で $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\ell) = 0 \end{cases}$ を満たす恒等的に 0 でない解を求めよ。

また, a がどのような値のときにそのような解が存在するか答えよ。

- (3) 微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = f(x)$ (ただし, $f(x)$ は既知関数) の一般解を定数変化法により求めることを考える。

同次形 $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0$ の一般解は, $y = c_1 \sin ax + c_2 \cos ax \cdots \textcircled{1}$

であるとし, c_1 および c_2 を x の関数と考えて方程式の特殊解を求めた結果, 一般解が

$$y = \frac{1}{a} \left\{ \sin ax \int f(x) \cos ax dx - \cos ax \int f(x) \sin ax dx \right\} + c_1 \sin ax + c_2 \cos ax$$

となることを示せ。

(九州大 2006) (m20064702)

- 0.399** (1) 2つの任意の自然数 m, n について, 次をそれぞれ示せ。

$$(a) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nxdx = 0 \quad (b) \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nxdx = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ \pi; & m = n \end{cases}$$

$$(c) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nxdx = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ \pi; & m = n \end{cases}$$

- (2) 周期 2π の関数 $f(x)$ がフーリエ級数に展開できる, つまり $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

と表現できるとき,

$$(a) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (b) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos px dx \quad (c) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin px dx \quad (p = 1, 2, \dots)$$

をそれぞれ計算せよ。

- (3) 周期 2π の関数 $f(x) = |x|$; $-\pi < x \leq \pi$ をフーリエ級数に展開せよ。

- (4) (3) の結果を用いて,

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \quad \text{をそれぞれ計算せよ。}$$

(九州大 2006) (m20064704)

- 0.400** 2変数関数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき} \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \text{ のとき} \end{cases}$ に関する以下の問に答えなさい。

- (1) $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で連続であることを示しなさい。
 (2) $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で x に関して, また y に関して偏微分可能であることを示しなさい。
 (3) 偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ および $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ は $(0, 0)$ で連続であるかどうか調べなさい。

(九州大 2006) (m20064706)

- 0.401** 連続型の確率変数を X とする。 X が a 以下の値をとる確率を $P_X(a)$ とし, $P_X(a)$ が以下で与えられているものとする。以下の設問に答えよ。

$$P_X(a) = \begin{cases} 0 & (-\infty \leq a < -T) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi a}{2T}\right) & (-T \leq a \leq T) \\ 1 & (T \leq a \leq \infty) \end{cases}$$

- (1) X が値 $X_0 \sim X_1$ (ただし, $X_0 < X_1$ とする) のいずれかをとる確率を求めよ。

- (2) X が任意の定数 B となる確率を求めよ. (3) X の確率密度関数 $p(X)$ を求めよ.
 (4) X の平均を求めよ. (5) X の標準偏差を求めよ.

(九州大 2007) (m20074704)

0.402 実数 p に対して n 次正方行列 A_n を以下のように定める.

$$(A_n)_{i,j} = \begin{cases} 2 & i = j \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ p & i = j = n \\ -1 & |i - j| = 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

ただし, $(A_n)_{i,j}$ は行列 A_n の (i, j) 成分を表す. また, $A_1 = p$ とする.

- (1) $p = \frac{2}{3}$ のとき A_3 の階数を求めよ.
 (2) $p = 1$ のとき A_3 の逆行列を求めよ.
 (3) A_n の行列式 $|A_n|$ を a_n とおく. 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ のみたす漸化式を導き, a_n , $n = 1, 2, \dots$, を求めよ.

(九州大 2007) (m20074709)

0.403 次の問いに答えよ. ただし, $D = \frac{d}{dt}$ とする.

- (1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(D^2 - 6D + 5)x = 0$$

- (2) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(D^2 - 6D + 5)x = e^{4t}$$

- (3) 次の x と y に関する連立微分方程式の一般解を求めよ.

$$\begin{cases} (D - 2)x + y = \frac{1}{4}e^{4t} \\ (4D - 5)x + Dy = 0 \end{cases}$$

(九州大 2009) (m20094702)

0.404 関数 $y = y(x)$, $z = z(x)$ のそれぞれについて, x に関する微分を y' , z' とし, 2 階微分を y'' , z'' とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$y'' + 5y' + 4y = 0$$

- (2) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$y'' + 5y' + 4y = e^{2x}$$

- (3) 次の y と z に関する連立微分方程式の一般解を求めよ.

$$\begin{cases} y' + 2y + 2z = -e^{2x} \\ y + z' + 3z = 0 \end{cases}$$

(九州大 2012) (m20124702)

0.405 (1) 次の周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi \leq x < -\frac{\pi}{4}) \\ 1 & (-\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{4}) \\ -1 & (\frac{3\pi}{4} \leq x < \pi) \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

(2) 関数 $f(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$ で定義する. 次式で定義される関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ. また, 関数 $y = F(\omega)$ のグラフの概形を描け. なお, T は正の実数とする.

$$f(t) = \begin{cases} a & (|t| \leq T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

(3) 関数 $f(t)$ は $t > 0$ で定義されているものとし, $f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ で定義するとき, 以下の問いに答えよ.

(a) $f(t) = \sin \omega t$ のラプラス変換が $F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ であることを示せ.

(b) $f(t) = \cos \omega t$ のラプラス変換が $F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$ であることを示せ.

(c) $f(t) = a + bt$ のラプラス変換が $F(s) = \frac{as + b}{s^2}$ であることを示せ.

(九州大 2012) (m20124704)

0.406 (1) 周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を次のように定める. 以下の問いに答えよ.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, \dots), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(a) 任意の実数 α に対して $\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \cos nx dx = a_n$ が成立することを示せ.

(b) 整数 n と実数 x に対して $\cos n(x + \pi) = \begin{cases} \cos nx & (n \text{ が偶数}) \\ -\cos nx & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$ が成立する.

このことを踏まえ, 関数 $g(x) = f(x + \pi)$ のフーリエ係数 $a'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx dx$,

$b'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx dx$ を a_n, b_n を用いて表せ.

(2) 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$ とおく. 以下の問いに答えよ.

(a) $f(x) = e^{-|x|}$ のフーリエ変換を求めよ.

(b) フーリエの積分定理 (逆フーリエ変換) を利用して, 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos u}{1+u^2} du$$

(九州大 2013) (m20134703)

0.407 (1) (a) 周期 $2L$ の区分的に連続な関数 $f(x)$ をフーリエ級数で表現した式を示し, そのフーリエ係数を求める式を示せ.

(b) 次の関数 $f(x)$ ($-2 \leq x \leq 2$) のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 4 & (-2 \leq x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 4 - 2x & (0 < x \leq 2) \end{cases}$$

- (2) $t > 0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \mathfrak{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ とする. 必要ならば下記の表にある関係式を用いて, 次の関数の逆ラプラス変換を求めよ. また (b) については, $f(t)$ ($t > 0$) のグラフをかけ.

$$(a) F(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

$$(b) F(s) = \frac{-s+2}{s^2+2s+4}$$

<p>表 :</p> $\mathfrak{L}[1] = \frac{1}{s}, \quad \mathfrak{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \mathfrak{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}, \quad \mathfrak{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},$ $\mathfrak{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad \mathfrak{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad \mathfrak{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a), \quad \mathfrak{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau} F(s)$

(九州大 2016) (m20164703)

- 0.408** a を定数として, 変数 x, y, z, w に関する次の連立一次方程式を考える.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - w = a \\ x + 3y - z + w = 1 \\ x + 2y + z - w = 0 \\ y + 2z + 2w = -1 \end{cases}$$

このとき, 以下の各問いに答えよ.

- (1) この方程式が解を持つための a の値を求めよ.
- (2) 前問 (1) の a の値に対して, 方程式の解を求めよ. 解がただ一つではない場合には, 適切な方法を用いて解 (一般解) を表現すること.

(九州大 2016) (m20164705)

- 0.409** (1) $f(x) = \begin{cases} 1, & (0 \leq x \leq 1) \\ 0, & (\text{上記以外}) \end{cases}$ とする. 以下の設問に答えよ.

(a) $f(x)$ 自身の畳み込み積分 $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)dy$ を求めよ.

(b) $f(x)$ のフーリエ変換 $F(u)$ を求めよ.

(c) $g(x)$ のフーリエ変換 $G(u)$ が $F(u)^2$ で与えられることを示せ.

- (2) $f(x)$ が $f(x) = x$, $(-\pi \leq x \leq \pi)$ で与えられる周期関数とする. ここで周期 T は 2π である. $f(x)$ を $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$ によりフーリエ級数展開し, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$ であることを示せ. なお, i は虚数単位を表す. また, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ である.

(九州大 2017) (m20174708)

- 0.410** 確率変数 X が次の形の確率密度関数を持つ.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} & (|x| \leq 2) \\ 0 & (|x| > 2) \end{cases}$$

- (1) 確率 $P(-1 \leq X \leq 1)$ を求めよ.

(2) $I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$ は次の漸化式 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ($n \geq 2$) を満たすことを示せ.

(3) 期待値 $E[X^4]$ を求めよ.

(九州大 2018) (m20184703)

0.411 2次元実平面上の閉区間 D, D_+ を

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4 \leq y^2 \leq x^2 - 1 \text{ かつ } 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$$

$$D_+ = D \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ かつ } y \geq 0\}$$

とするとき, 次の重積分を求めよ.

(1) $\iint_{D_+} xy dx dy$ (2) $\iint_D xy dx dy$

(九州大 2019) (m20194706)

0.412 $x > 0, y > 0$ において, 2変数関数 $f(x, y)$ および $g(x, y)$ を次の式で定義する.

$$f(x, y) = \log(x^2 + y^2), \quad g(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/3}$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x, y)$ の x に関する2次偏導関数 $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y)$ を求めよ.

(2) 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\lim_{t \rightarrow +0} t \log t = 0$$

(3) 領域 $D = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1, 0 < y < x\}$ における次の2重積分を求めよ.

$$\iint_D \frac{f(x, y)}{g(x, y)} dx dy$$

(九州大 2019) (m20194712)

0.413 $0 < A < B \leq 1$ とするとき, 領域 D を $D = \{(x, y) \mid A \leq x \leq B, x^2 \leq y \leq x\}$ とし,

$f(x, y) = \frac{y + y^2}{x^2 + y^2}$ とする. このとき, 次の各問に答えよ.

ただし, 逆正接関数 $\arctan(x)$ が $\frac{1}{x^2 + 1}$ の原始関数であることは既知として用いてよい.

(1) 関数 $g(x, y) = y - x \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ を y で偏微分した偏導関数を求めよ.

(2) 不定積分 $\int f(x, y) dx$ を求めよ. ただし, $x > 0, y > 0$ とする.

(3) 関数 $h(x) = 2 \arctan(x) - 2x + x \log(x^2 + 1)$ の微分を求めよ.

(4) $\int_D f(x, y) dx dy = H(B) - H(A)$ を満たす関数 $H(x)$ を求めよ.

(九州大 2021) (m20214708)

0.414 n を正の整数として以下のように $f(x)$ と G_n を定義する.

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$G_n = \begin{cases} \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + e^x} dx & \text{for } n = 1 \\ \int_{-1}^1 \frac{x^{n-1}}{1 + \exp(x^n)} dx & \text{for } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

- (1) $f(x)$ の不定積分 $F(x)$ を求めよ. ただし積分定数を C とせよ.
 (2) 定積分 G_1 の値および定積分 G_2 の値を求めよ.
 (3) 一般の正の整数 n について, 定積分 G_n を求めよ.

(九州大 2022) (m20224706)

0.415 次の連立 1 次方程式に対して係数行列の行列式の値, 係数行列の逆行列, および, 解を求めよ.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = -1 \\ x - y = 2 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases}$$

(九州芸術工科大 2001) (m20014808)

0.416 次の連立方程式を逆行列を用いて解け.

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 3 \\ 3x - 2y + 2z = -1 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$$

(佐賀大 2003) (m20034929)

0.417 次の問に答えよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & a \end{pmatrix}$ が正則であるための条件を求めよ.

(2) a は $|A|$ を満たす整数であるとき, 次の連立方程式を逆行列を用いて解け.

$$\begin{cases} (a+2)x + y = 1 \\ 3x + ay = -3 \end{cases}$$

(佐賀大 2004) (m20044930)

0.418 次の連立方程式をクラメルの解法で解け.

$$\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

(佐賀大 2004) (m20044931)

0.419 クラメルの公式を用いて, 次の連立 1 次方程式を満たす y を求めよ.

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 2 \\ 2x + y + 4z = 1 \\ 3x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

(佐賀大 2006) (m20064911)

0.420 次の連立一次方程式の解を求めよ.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + px_2 + x_3 = 0 \\ px_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad (p \text{ は実数})$$

(佐賀大 2006) (m20064933)

0.421 連立一次方程式 $\begin{cases} 9x + 4y + 3z = -1 \\ 5x + y + 2z = 1 \\ 7x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$ を解け.

(佐賀大 2006) (m20064944)

0.422 次の連立一次方程式が解を持つように α の値を決定し、その連立一次方程式を解け.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 10x_4 = \alpha \end{cases}$$

(佐賀大 2007) (m20074921)

0.423 次の連立一次方程式を解け.

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 3x + y + z = 7 \\ 2x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

(佐賀大 2007) (m20074928)

0.424 連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 - 6x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

の解 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$ の全体を W で表す. 以下の問いに答えよ.

(1) W の次元と W の一組の正規直交基 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ を求めよ.

(2) ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は, W に含まれないことを示せ.

(3) \mathbf{a} との距離 $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ がもっとも近い W のベクトル \mathbf{x} は,

$$\mathbf{x} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2$$

で与えられることを示せ. ただし, 一般に 4 次ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix}$ に対して

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^4 x_i y_i \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

である.

(佐賀大 2009) (m20094920)

0.425 次の連立一次方程式を解け.

$$(1) \begin{cases} x + 4y + 7z = 1 \\ 2x + 5y + 8z = 3 \\ 3x + 6y + 9z = -2 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 5x + 2y + 5z = -2 \\ x + 3y + z = -3 \\ 3x - 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

(佐賀大 2011) (m20114915)

0.426 次の連立 1 次方程式を掃き出し法 (消去法) で解きなさい.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ 2x + 5y - z = 8 \\ -2x - y + 11z = 18 \end{cases}$$

(佐賀大 2012) (m20124916)

0.427 次式で定義される関数について、以下の問いに答えよ。

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき} \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \text{ のとき} \end{cases}$$

- (1) 偏導関数 f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} を求めよ。
- (2) $f(x, y)$ が原点 $(0, 0)$ で連続であることを示せ。
- (3) $f_x(x, y)$ および $f_y(x, y)$ が原点 $(0, 0)$ で連続であることを示せ。
- (4) $f_{xy}(x, y)$ および $f_{yx}(x, y)$ が原点 $(0, 0)$ で不連続であることを示せ。

(佐賀大 2016) (m20164902)

0.428 次式は変数 x, y, z に関する連立方程式であり、 k は定数である。以下の問いに答えよ。

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = k \\ 5x + 3y - z = 7 \\ x - y - 3z = 3 \end{cases}$$

- (1) 連立方程式が解をもつように k の値を定めよ。
- (2) (1) の条件のもとで、連立方程式の解を求めよ。

(佐賀大 2016) (m20164904)

0.429 一次連立方程式

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ x - y + cz = 2 \\ 2x + cy - z = 1 \end{cases}$$

について、以下の問いに答えなさい。

- (1) 方程式が解を持たない場合について、 c の値を求めなさい。
- (2) 方程式が解が無数に解を持つ場合について、 c の値を求めなさい。

(佐賀大 2018) (m20184904)

0.430 次の重積分を計算せよ。

$$\iint_D x^2 dx dy, \quad D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, y \geq 0 \right\}$$

(佐賀大 2021) (m20214902)

0.431 連立一次方程式 $\begin{cases} 2x - y + 8z = 11 \\ x - y + 5z = 6 \\ -3x + 5y - 16z = -17 \end{cases}$ を解きなさい。

(佐賀大 2021) (m20214922)

0.432 $\begin{cases} x_n = 3x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ y_n = x_{n-1} + 4y_{n-1} \end{cases}$ (ただし、 $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$) で表される数列について、 x_n, y_n を n で表しなさい。

(佐賀大 2021) (m20214925)

0.433 次の連立一次方程式を解け.

$$\begin{cases} -x - 3y + 2z - 2w = 3 \\ -2x - 6y + 4z - 5w = -1 \\ 3x + 9y - 6z + 7w = -2 \end{cases}$$

ただし, 答えは t, s を任意の実数として, 以下の $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ を求め

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \\ 0 \\ a_2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

の形に書くこと.

(佐賀大 2022) (m20224910)

0.434 連立一次方程式 $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y + 3z = 4 \\ -x + 2y - 4z = -2 \end{cases}$ を解きなさい. 答えだけでなく途中経過 も記載すること.

(佐賀大 2022) (m20224926)

0.435 重積分 $\iint_D \sin 2x \, dx dy$ $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x + y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x - y \leq \frac{\pi}{2}\}$ を求めなさい.

答えだけでなく途中経過 も記載すること.

(佐賀大 2022) (m20224929)

0.436 関数 $f(t)$ に関するフーリエ変換を $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$ で定義するとき, 以下の問に答えよ.

(1) $f(t)$ が実数で偶関数の時 $F(\omega)$ が実数になることを証明せよ.

(2) $f(t)$ が $f(t) = \begin{cases} 1 & , |t| \leq T \\ 0 & , |t| > T \end{cases}$ ただし T は正の実数 で与えられるとき, フーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ.

(3) 上で求めたフーリエ変換 $F(\omega)$ を, 横軸を ω , 縦軸を $|F(\omega)|$ として図示せよ.

(長崎大 2005) (m20055007)

0.437 (1) 定積分 $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin x \, dx$ を求めよ.

(2) 定積分 $\int_0^1 x^3 e^{x^2} \, dx$ を求めよ.

(3) 2重積分 $\iint_D x^2 y \, dx dy$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\}$ を計算せよ.

(4) 平面曲線が $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$, $(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$ で与えられるとき, 曲線の長さ L を求めよ.

(長崎大 2007) (m20075004)

0.438 次の連立1次方程式を解け.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 15 \\ 4x + 2y + 5z = 39 \\ 8x + 8y + 9z = 83 \end{cases}$$

(長崎大 2008) (m20085015)

0.439 (1) 定積分 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$ を求めよ.

(2) $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$ とするとき、領域 D を図示し、2重積分 $\iint x\sqrt{y} dx dy$ を求めよ.

(3) xy 平面上での曲線が次式で与えられるとき、曲線を図示し、その長さを求めよ.

$$\begin{cases} x = t \cos t \\ y = t \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(長崎大 2009) (m20095008)

0.440 (1) 不定積分 $\int (1+x)\sqrt{1-x} dx$ を求めよ.

(2) $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$ とするとき、領域 D を図示し、次の2重積分を求めよ.

$$I = \iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

(3) xy 平面上での曲線が次式で与えられるとき、その長さを求めよ.

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$$

(長崎大 2009) (m20095012)

0.441 $\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 \\ y_2 = 2x_1 \\ y_3 = x_2 \end{cases}$ を行列を用いて表わせ.

(長崎大 2010) (m20105017)

0.442 次の関数 $f(x)$ の $[-\pi, \pi]$ におけるフーリエ級数を求めなさい.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (-\pi \leq x \leq 0) \\ -1 & (0 < x < \pi) \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

(大分大 2009) (m20095103)

0.443 座標平面上の助変数表示をもつ曲線

$$C : \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = -1 + \cos t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

について次の問いに答えよ.

(1) 曲線 C の概形を示せ.

(2) 曲線 C の長さを求めよ.

(大分大 2009) (m20095104)

0.444 座標平面上を動く点 P の時刻 t における位置が

$$\begin{cases} x = e^{-t} \cos t \\ y = e^{-t} \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t < +\infty)$$

で与えられている.

(1) $t = \frac{\pi}{6}$ のときの点 P の位置を求めよ.

(2) $t = \frac{\pi}{3}$ のときの点 P の速度ベクトルを求めよ.

(3) $0 \leq t \leq 4\pi$ の間に点 P の進む距離を求めよ.

(大分大 2010) (m20105101)

0.445 1 周期が次のように定義された周期 2π の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (-\pi < t \leq 0) \\ 1 & (0 < t \leq \pi) \end{cases}$$

(大分大 2011) (m20115103)

0.446 1 周期が次のように定義された周期 2π の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (-\pi \leq t \leq 0) \\ -1 & (0 < t < \pi) \end{cases}$$

(大分大 2012) (m20125103)

0.447 1 周期が次のように定義された周期 2π の周期関数 $f(t)$ のグラフを描き, そのフーリエ級数を求めよ.

$$f(t) = \begin{cases} -\pi & (-\pi < t \leq 0) \\ 2t - \pi & (0 < t \leq \pi) \end{cases}$$

(大分大 2012) (m20125106)

0.448 次の連立微分方程式は, 騎馬数 100 騎の X チームと騎馬数 60 騎の Y チームが, 騎馬戦を行ったときの双方の騎馬数の変化を, 「自軍の騎馬数の減少速度はその時点での敵の騎馬数に比例し, その比例定数は $1/10$ である」との仮定のもとでモデル化したものである.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{10}y, & x(0) = 100, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{10}x, & y(0) = 60, \end{cases}$$

ここで, $x = x(t)$, および $y = y(t)$ は, それぞれ X チーム, および Y チームの時刻 $t \geq 0$ における騎馬数を表す. 以下の問に答えよ.

- (1) 上の連立微分方程式を解け.
- (2) Y チームが全滅したときに生き残っている X チームの騎馬数を求めよ.

(宮崎大 2005) (m20055305)

0.449 次の連立一次方程式について, 次の各問に答えよ.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 - 2x_3 = 2 \\ x_2 + 3x_3 = -7 \end{cases}$$

- (1) この連立一次方程式を, 行列 A とベクトル \mathbf{b} を用いて $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ とあらわしたときの, 係数行列 A

を記せ. ただし, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とする.

- (2) 係数行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.
- (3) 上の連立一次方程式を解け.

(宮崎大 2010) (m20105301)

0.450 変数 t の関数 $x = x(t)$, $y = y(t)$ が次の連立微分方程式の初期値問題を満たしているとする.

$$(*) \dots \dots \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0 \end{cases}$$

このとき, 次の各問に答えよ.

- (1) 新しい関数 $r = r(t)$ と $\theta = \theta(t)$ を用いて、関数 x, y を $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, とおく (ただし, $r > 0$) . このとき, r, θ はそれぞれ

$$\frac{dr}{dt} = 2r, \quad \frac{d\theta}{dt} = 1$$

を満たすことを示せ.

- (2) 連立微分方程式の初期値問題 (*) を解け.

(宮崎大 2011) (m20115305)

0.451 連立一次方程式
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$
 について、次の各問に答えよ.

- (1) この連立一次方程式を、行列 A を用いて $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と表したときの A を求めよ. ただし, \mathbf{x} と \mathbf{b}

はベクトルであり, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする.

- (2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.
 (3) 連立一次方程式を解け.

(宮崎大 2014) (m20145303)

0.452 連立一次方程式

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

について、次の各問いに答えよ.

- (1) この連立一次方程式を、行列 A を用いて $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と表したときの A を求めよ. ただし, \mathbf{x} と \mathbf{b}

はベクトルであり, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする.

- (2) この連立一次方程式を解け.

(宮崎大 2015) (m20155302)

0.453 重積分

$$I = \iint_D \sin \frac{2x+y}{9} dx dy, \quad D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq x, x + \frac{y}{2} \leq 3\pi \right\}$$

について、次の各問に答えよ.

- (1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) 等式 $I = \int_{\text{ア}}^{\text{イ}} \left(\int_{\text{ウ}}^{\text{エ}} \sin \frac{2x+y}{9} dx \right) dy$ の空欄 $\text{ア} \sim \text{エ}$ に当てはまる数値あるいは数式を答えよ.

- (3) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2016) (m20165305)

0.454 関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

について、次の各問に答えよ.

- (1) $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき, $f_x(x, y)$ を求めよ.
 (2) $f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$ を示せ.
 (3) $f_{xy}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k} = 0$ を求めよ.

(宮崎大 2017) (m20175304)

0.455 重積分

$$I = \iint_D x dx dy, \quad D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x^2 \leq y \leq \frac{1}{2}x \right\}$$

について, 次の各問に答えよ.

- (1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ.
 (2) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2017) (m20175305)

0.456 連立一次方程式
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$$
 について, 次の各問に答えよ.

- (1) この連立一次方程式を, 行列 A を用いて $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と表したときの A を求めよ. ただし, \mathbf{x} と \mathbf{b} はベクトルであり, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ とする.
 (2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.
 (3) 連立一次方程式を解け.

(宮崎大 2018) (m20185303)

0.457 k を実数の定数とする. 連立一次方程式

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -2x + 3y - z = 0 \dots\dots\dots (*) \\ -x + ky + z = 0 \end{cases}$$

について, 次の各問に答えよ.

- (1) (*) を, 行列 A を用いて $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ と表したときの A を求めよ. ただし, \mathbf{x} と $\mathbf{0}$ はベクトルであり,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 とする.
 (2) (1) で求めた行列 A に対して, 行列式 $|A|$ の値を求めよ.
 (3) (*) が自明解 $x = y = z = 0$ 以外の解をもつような k の値を求めよ.
 (4) (3) で求めた k の値に対する (*) の解を, すべて求めよ.

(宮崎大 2019) (m20195302)

0.458 重積分

$$I = \iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$$

について, 次の各問に答えよ.

- (1) 領域 D を, xy 平面上に図示せよ.

(2) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2020) (m20205304)

0.459 連立一次方程式
$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 2 \\ x - 3y - 2z = 5 \\ -x + y + z = -3 \end{cases}$$
 について, 次の各問に答えよ.

(1) この連立一次方程式を, 行列 A を用いて $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と表したときの A を求めよ. ただし, \mathbf{x} と \mathbf{b}

はベクトルであり, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ とする.

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) この連立一次方程式を解け.

(宮崎大 2020) (m20205305)

0.460 次の連立の微分方程式について, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$ という条件の下での解 $y = y(x)$, $z = z(x)$ を求めよ.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y \\ \frac{dz}{dx} = y - 2z \end{cases}$$

(宮崎大 2022) (m20225305)

0.461 次のように定まるフィボナッチ数列 f_0, f_1, f_2, \dots について, 設問に答えなさい.

$$f_n = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ 1 & (n=1) \\ f_{n-1} + f_{n-2} & (n \geq 2) \end{cases}$$

(1) f_2, f_3, f_4 の値を答えなさい.

(2) f_0, f_1, f_2, \dots は

$$f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1 \quad n \in N \equiv \{0, 1, 2, \dots\}$$

を満たすことを証明しなさい.

(宮崎大 2022) (m20225307)

0.462 行列を用いて, 次の連立一次方程式を解け;

$$(1) \begin{cases} 4x + 6y + z = 2 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ 3x - 2y + 5z = 8 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 4x + 6y + z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \\ 3x - 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

(鹿児島大 2015) (m20155416)

0.463 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ のとき, $A + B$, AB , A^2 , $B^T A^T$ をそれぞれ求めよ.

(2) 行列を用いて, 次の連立一次方程式を解け (計算過程を示すこと).

$$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ x + y + z = 6 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$$

(3) 行列 A, B が正則な行列であるとする. このとき, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ となることを示せ.

(鹿児島大 2017) (m20175415)

- 0.464 行列式を利用して、次の連立方程式を解け.
- $$\begin{cases} 3x + y + 5z = 5 \\ x + y + 3z = 2 \\ 2x - y - z = 3 \end{cases}$$
- (室蘭工業大 2006) (m20065501)

- 0.465 下記の連立1次方程式について、以下の問に答えよ。

$$\begin{cases} 2x + 5y - 4z = 7 \\ 3x + y - 3z = -6 \\ -5x + 4y - z = 21 \end{cases} \quad (1)$$

(1) 連立1次方程式(1)の係数行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ が正則であることを示せ。

(2) 連立1次方程式(1)の係数行列 A の第2行第3列成分 a_{23} の余因子 A_{23} を求めよ。

(3) クラメルの公式を用いて、連立1次方程式(1)を解け。

(香川大 2006) (m20065702)

- 0.466 次の関数が $(x, y) = (0, 0)$ において連続かどうか判定せよ。理由も述べること。

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) = (0, 0) \text{ のとき} \\ \frac{2xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき} \end{cases}$$

(香川大 2022) (m20225702)

- 0.467 以下のベクトル \vec{v} の集合 V は、線形空間（ベクトル空間とも呼ぶ）である。 V の次元と基底を求めよ。

$$V = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \mid x, y, z, u \text{ は } \begin{cases} x + 2y + 3z + u = 0 \\ 2x + 3y + z + 2u = 0 \\ 3x + 5y + 4z + 3u = 0 \\ x + y - 2z + u = 0 \end{cases} \text{ の解} \right\}$$

(香川大 2022) (m20225705)

- 0.468 非負の整数 x, y に対して関数 f を次のように定義する。

$$\begin{cases} f(0, y) = y + 1 \\ f(x + 1, 0) = f(x, 1) \\ f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y)) \end{cases}$$

(1) $f(1, 3)$ の値を計算せよ。ただし、その計算過程も示せ。

(2) $f(0, y) = y + 1$ の例のように、 y に関する多項式として $f(1, y)$ を表現せよ。そして、その正しさを帰納法により示せ。

(3) $f(x, y) \geq x + y + 1$ であることを示せ。

(島根大 2005) (m20055802)

- 0.469 次の問に答えよ。

(1) 次の連立1次方程式が解をもつような a, b の値を求めよ。また、その時の解も求めよ。

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 1 \\ -4x_1 + 2x_2 - 10x_3 + 12x_4 = a - 7 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = b + 2 \end{cases}$$

(2) 次の連立 1 次方程式が自明でない解をもつような a の値を求めよ.

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + (a+2)x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + ax_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 2ax_4 = 0 \end{cases}$$

(3) 次の解空間の次元と 1 組の基を求めよ.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 \mid \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases} \right\}$$

(島根大 2005) (m20055810)

0.470 一般に, 関数 $f(x)$ が周期 2π の周期関数で, 区間 $[-\pi, \pi]$ でいくつか (有限個) の点を除いて連続であるとき, 次のように三角関数の級数に展開できる. これを $f(x)$ のフーリエ級数という.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

周期 2π の周期関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} -2x & (-\pi \leq x \leq 0) \\ 2x & (0 < x \leq \pi) \end{cases} \quad \text{のとき, } f(x) \text{ のフーリエ級数を求めよ}$$

(島根大 2007) (m20075814)

0.471 (1) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$ は原点 $(0, 0)$ で偏微分可能かどうか調べよ.

(2) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$ は原点 $(0, 0)$ で全微分可能かどうか調べよ.

(3) 関数 $f(x, y) = xy(x - y + 1)$ の極値を求めよ.

(島根大 2010) (m20105803)

0.472 次の連立 1 次方程式が自明な解以外の解をもつのは定数 a がどのような値のときか.

$$\begin{cases} (2-a)x + 3y = 0 \\ 3x + (2-a)y = 0 \end{cases}$$

(島根大 2010) (m20105806)

0.473 次の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\exp(x^3 - y^3) - 1}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$ に対して, $f_x(0, 0)$ と $f_y(0, 0)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x, y) = \frac{(x+1)^2(y+1)^2}{xy}$ ($xy \neq 0$) の極値を求めよ.

(島根大 2012) (m20125808)

0.474 (1) 次の行列 A と行列 A' の階数を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4a+13 \\ 3 & 0 & 4 & a \end{pmatrix}$$

(2) 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x - y + 3z = 4a + 13 \\ 3x + 4z = a \end{cases}$$

の解が存在するための必要十分条件を (1) で求めた階数を用いて述べよ. さらに, 解が存在するような a の値をすべて求めよ.

(3) (2) の連立 1 次方程式が解をもつとき, その一般解を求めよ.

(島根大 2015) (m20155803)

0.475 (1) 3 次元実ベクトル全体からなるベクトル空間 \mathbb{R}^3 の 4 つのベクトルを

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

とする. このとき,

(ア) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は 1 次独立であることを示せ.

(イ) \mathbf{a}_4 を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ の 1 次結合で表せ.

(2) 実数上のベクトル空間 V の基底を $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ とする. 線形写像 $f: V \rightarrow V$ が次を満たすとき,

$$\begin{cases} f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \\ f(\mathbf{v}_2) = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \\ f(\mathbf{v}_3) = 4\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 \end{cases}$$

このとき,

(ウ) f の像 $f(V)$ の次元を求めよ.

(エ) $f(W) = W$ を満たす V の 1 次元の部分空間 W をすべて求めよ.

(島根大 2016) (m20165801)

0.476 $g(x)$ は $0 < \alpha \leq x \leq \beta$ で連続であり,

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x, 0 \leq y, \alpha \leq x + y \leq \beta\}$$

とする. このとき,

$$\iint_D g(x+y) dx dy = \int_\alpha^\beta x g(x) dx$$

となることを証明せよ.

(島根大 2019) (m20195808)

0.477 (1) 連立方程式
$$\begin{cases} (\lambda - 4)x + 2y - 15z = 0 \\ 2x + (\lambda - 1)y - 30z = 0 \\ 4x - 2y - 5(\lambda - 5)z = 0 \end{cases}$$
 が自明でない解をもつように, λ の値を定めよ.

(2) 前問で定めた λ の値の全てについて, それぞれに対応する自明でない解を求めよ.

(首都大 2008) (m20085901)

0.478 次の連立一次方程式が解を持つための必要十分条件となる定数 a, b, c の関係式を求めよ. またそのときの解を求めよ.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + 3y + 4z = 2b \\ 3x + 4y + 5z = c \end{cases}$$

(首都大 2010) (m20105902)

0.479 次の連立一次方程式がただ一組の解を持つように a の値を定め, そのときの解を求めなさい.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ 3x + ay + z = 2 \\ 2x - 2y + (a + 3)z = a - 5 \end{cases}$$

(首都大 2011) (m20115901)

0.480 実数 x, y, z に関する連立 1 次方程式について, 以下の問いに答えなさい.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -2x + 3y - z = 0 \\ -x + ky + z = 0 \end{cases}$$

- (1) 連立 1 次方程式が $x = y = z = 0$ 以外の解をもつための定数 k の値を求めなさい.
 (2) k が (1) の値を取るときの解を求めなさい. ただし, $z = t$ (任意の実数) とおいてよい.

(首都大 2018) (m20185902)

0.481 $-\infty < x < \infty$ に対して

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $-\infty < x < \infty$ に対して, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ を求めよ.
 (2) $-\infty < x < \infty$ に対して, $g(x) = \int_{-\infty}^x f(t)f(x-t)dt$ を求めよ.
 (3) $-\infty < x < \infty$ に対して, (2) で求めた $g(x)$ を用いて $G(x) = \int_{-\infty}^x g(t)dt$ を求めよ.

(東京都立大 2020) (m20205911)

0.482 曲線 $y = f(x)$ 上の点 (x, y) と点 $(x + dx, y + dy)$ の間の無限小長さ ds は

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

によって与えられる. さらに, 曲線に沿って $a \leq x \leq b$ の長さ L_1 は, 次の式で与えられる.

$$L_1 = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

(1) 曲線がパラメータ t によって

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

のように表されるとき, パラメータ $\alpha \leq t \leq \beta$ に対応する曲線の長さ L_2 が

$$L_2 = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

で与えられることを示せ.

(2) 次のパラメータ t によって表される曲線 $C : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \frac{1}{3}t^3 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2)$ の長さを求めよ.

(滋賀県立大 2010) (m20106001)

0.483 パラメータ t で表された曲線

$$C : \begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2)$$

の長さ $L(C)$ を求めよ.

(滋賀県立大 2014) (m20146001)

0.484 x, y, z を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ 2x + 3y + (a+3)z = 3 \\ x + 3y + a^2z = -3 \end{cases}$$

を考える.

- (1) これが解をもたないように a を定めよ.
- (2) これが無限個の解をもつように a を定めよ.

(滋賀県立大 2014) (m20146003)

0.485 次の連立微分方程式の解を求めよ. ただし, $t = 0$ のとき $x = 2, y = 0$ とする.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -3y - 2x \end{cases}$$

(宇都宮大 2010) (m20106103)

0.486 (1) 関数 $y = e^{\sin x}$ を微分せよ.

(2) x, y の関係が次のように媒介変数 t を用いて表されるとき, $\frac{dy}{dx}$ を t の式で表せ.

$$\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = 3t^2 - t - 2 \end{cases}$$

(宇都宮大 2010) (m20106105)

0.487 下の問いに答えよ. なお, 計算過程も記入せよ.

(1) 次の行列の階数を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

(2) 次の連立 1 次方程式が解を持つときの a の値を求めよ.

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = a \\ 2x + 3y - z = 2a \\ 2x + 5y + 9z = 6 \end{cases} \quad (*)$$

(3) (2) で求めた a の値に対する連立 1 次方程式 (*) の解を求めよ.

(宇都宮大 2016) (m20166101)

0.488 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2) 求められた逆行列 A^{-1} を用いて、次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

(工学院大 2005) (m20056205)

0.489 連立1次方程式

$$\begin{cases} -x + 5y + 3z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ -3x + 7y + 5z = -1 \end{cases}$$

を解け.

(ほこだて未来大 2011) (m20116302)

0.490 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(2) 連立方程式 $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 3x + 4y + 3z - w = 2 \\ 6x + 7y + 5z + w = 1 \end{cases}$ を解け.

(東京海洋大 2008) (m20086401)

0.491 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(2) 連立方程式 $\begin{cases} 3x + 4y + 5z + 7w = 6 \\ -x + 4y + 5z - w = -6 \\ 3x + 3y - 5z - 2w = -2 \end{cases}$ を解け.

(東京海洋大 2009) (m20096401)

0.492 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(2) x, y, z に対する連立方程式 $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ ax - 2y - 7z = 0 \\ 3x - 3y + az = 0 \end{cases}$ が非自明解を持つときの a の値を求め、そのとき連立方程式を解け.

(東京海洋大 2016) (m20166405)

0.493 連立1次方程式

$$\begin{cases} x - y + z + w = 1 \\ 2x - y + z + w = 2 \\ 3x - y + 2z + w = 5 \\ 4x - 2y + 3z + 2w = 6 \end{cases}$$

を解け.

(東京海洋大 2021) (m20216406)

- 0.494 (1) $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, \sqrt{x} \leq y \leq x\}$ に対し, 重積分

$$\iint_D 2y \log x \, dx dy \text{ の値を求めよ.}$$

- (2) $E = \{(x, y) \mid 0 \leq x + y \leq 2, 0 \leq x - y \leq 1\}$ に対し, 重積分

$$\iint_E (x^2 - y^2) \, dx dy \text{ の値を求めよ.}$$

(東京海洋大 2021) (m20216410)

- 0.495 次の連立1次方程式が解をもつように a, b を定めて, これを解け.

$$\begin{cases} 3x - 2y + z & = 3 \\ 2x - 3y - z + w & = 1 \\ 2x - 8y - 6z + 4w & = a \\ -x - 6y - 7z + 4w & = b \end{cases}$$

(東京海洋大 2022) (m20226410)

- 0.496 連立方程式
$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + y + kz = 0 \end{cases}$$
 が, $x = y = z = 0$ 以外の解をもつように定数 k を定めなさい, また, そのときの解を媒介変数を用いて表しなさい.

(和歌山大 2007) (m20076503)

- 0.497 確率変数 X の確率密度関数が $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$ で与えられるとき, $P(X \leq a) = \frac{2}{9}$ となる a の値を求めなさい

(和歌山大 2007) (m20076512)

- 0.498 周期 X の周期関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq d/2) \\ 0 & (d/2 < |x| \leq X/2) \end{cases}$$

について次の問いに答えなさい. ただし, $0 < d < X$ である.

- (1) $f(x)$ をフーリエ級数に展開しなさい.
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\alpha}{n}$ の値を求めなさい. ただし, $0 < \alpha < 1$ とする.
(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi\alpha}{2n-1}$ の値を求めなさい. ただし, $0 < \alpha < 1$ とする.

(和歌山大 2010) (m20106504)

- 0.499 次の連立一次方程式を行列の演算を使って解きなさい.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 4 \\ x + 2y + z = 8 \\ 2x - 3y - 2z = -10 \end{cases}$$

(和歌山大 2014) (m20146502)

- 0.500 次の関数のフーリエ変換を求めなさい.

(1) $f(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

$$(2) f(t) = e^{-|t|}$$

$$(3) f(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

(和歌山大 2014) (m20146509)

- 0.501 (1) 正数 L に対し $\omega = \frac{2\pi}{L}$ と置く. 整数 k に対し, 次式が成り立つことを示しなさい.

$$\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{ik\omega t} dt = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

- (2) (1) の条件のもと, 自然数 n に対し, $D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ik\omega t}$ とおく. このとき, 以下の式が成立することを示しなさい.

$$(a) \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} D_n(t) dt = 1$$

$$(b) \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^0 D_n(t) dt = \frac{1}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} D_n(t) dt = \frac{1}{2}$$

$$(c) D_n(t+L) = D_n(t)$$

$$(d) D_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\omega t)}{\sin(\frac{\omega}{2}t)}$$

(和歌山大 2015) (m20156507)

- 0.502 関数 $f(x)$ に対する次式の積分をフーリエ変換と定義する. ただし, i は虚数単位, e は自然対数の基底である.

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux} dx$$

また, 2つの関数 $g(x), h(x)$ に対する次式の積分をたたみこみと定義する.

$$g(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-\alpha)h(\alpha) d\alpha$$

フーリエ変換およびたたみこみに関する次の (1)~(3) に答えなさい.

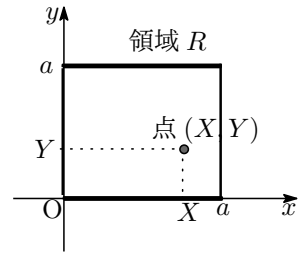
- (1) 次式で与えられる関数 $f_1(x)$ のフーリエ変換 $F_1(u)$ を求めなさい.

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \left(x \leq \left|\frac{1}{2}\right| \text{ の場合} \right) \\ 0, & \left(x > \left|\frac{1}{2}\right| \text{ の場合} \right) \end{cases}$$

- (2) 関数 $f_1(x)$ 同士のたたみこみによって得られる関数を $f_2(x)$ とする. 関数 $f_2(x)$ を求め, その概略図を描きなさい.
- (3) 関数 $f_2(x)$ のフーリエ変換 $F_2(u)$ を求めなさい.

(和歌山大 2017) (m20176509)

- 0.503 右図の一辺の長さが a の正方形領域 R からランダムに 1つの点を選択する試行を考える. 選択された点の座標を (X, Y) としたとき, X および Y は連続確率変数と扱うことができ, それらの同時確率密度関数は次式で与えられるものとする,



$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2}, & (0 \leq x \leq a, \text{ かつ } 0 \leq y \leq a \text{ の場合}) \\ 0, & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

ただし、 a は正の実数である。領域 R 内であれば、 x および y の値に関わらず同時確率密度関数が等しいことから、この試行は領域 R から一様ランダムに点を選択するものである。この試行に関する次の (1)~(3) に答えなさい。

- (1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy$ の値を求めなさい。
- (2) 同時確率密度関数 $f_{X,Y}(x,y)$ を用いて、 $X \leq \frac{a}{3}$ となる確率を求めなさい。
- (3) $Z = X + Y$ とする。領域 R 内のどの位置の点を選択された場合に $Z \geq a$ となるか、すなわち、 $Y \geq -X + a$ となるかを考え、それを基に、 $Z \geq a$ となる確率を求めなさい。

(和歌山大 2017) (m20176510)

0.504 関数 $f(x)$ ($-\pi \leq x \leq \pi$)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ x & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

のフーリエ級数展開を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

とするとき、次の (1)~(3) に答えなさい。

- (1) a_0 を求めなさい。
- (2) $a_n, n = 1, 2, 3, \dots$ を求めなさい。
- (3) $b_n, n = 1, 2, 3, \dots$ を求めなさい。

(和歌山大 2018) (m20186506)

0.505 整数 $m, n \geq 0$ に対する次の再帰関数について、あとの問いに答えなさい。解答は途中の式も省略せずに書きなさい。

$$A(m, n) = \begin{cases} 2n & , m = 0 \text{ のとき} \\ 0 & , m \geq 1 \text{ かつ } n = 0 \text{ のとき} \\ 2 & , m \geq 1 \text{ かつ } n = 1 \text{ のとき} \\ A(m-1, A(m, n-1)) & , m \geq 1 \text{ かつ } n \geq 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

- (1) $A(1, 2)$ を答えなさい。
- (2) 整数 $m \geq 1$ について、 $A(m, 1)$ を答えなさい。
- (3) 整数 $m \geq 1$ について、 $A(1, n) = 2^n$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明しなさい。
- (4) 整数 $m \geq 1$ について、 $A(m, 2)$ を答えなさい。

(岩手県立大 2010) (m20107001)

0.506 次の連立一次方程式の解を行列を使用して求めなさい.

$$\begin{cases} -5y - 3z = 2 \\ 4x + y - 2z = 9 \\ x - 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

(岩手県立大 2013) (m20137004)

0.507 次の行列 A, B, C とベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ について, あとの問いに答えなさい, 解答は途中の式も省略せずに書きなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

- (1) AB と BA をそれぞれ答えなさい. 定義されないときには「定義されない」と答えなさい.
- (2) 行列式 $|A|, |C|$ をそれぞれ答えなさい.
- (3) 行列 A, C の逆行列をそれぞれ答えなさい. 定義されないときには「定義されない」と答えなさい.
- (4) ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ の組が線形独立か線形従属か 理由とともに 答えなさい.
- (5) 次の連立一次方程式の解を 行列を使用して 求めなさい. 行列を使用したことが分かるように, 途中経過を示しなさい.

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 5 \\ x + y + z = -7 \\ x + 3y + 9z = -5 \end{cases}$$

(岩手県立大 2017) (m20177001)