[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　√

0.1　円柱座標 (r, θ, z) が直交座標 (x, y, z) によって定義されるとき (1) から (3) の問いに答えよ．

円柱座標 (r, θ, z) と直交座標 (x, y, z) の関係は以下の通りである．

$$x = r\cos\theta\,,\ \ y = r\sin\theta\,,\ \ z = z \qquad (r \geq 0\,,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

(1)　円柱座標 (r, θ, z) が直交曲線座標であることを示せ．

(2)　円柱座標 (r, θ, z) の基本ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ を求めよ．

(3)　曲面 $z = x^2 + y^2$ と $z = 18 - (x^2 + y^2)$ で囲まれた領域を V とするとき，
積分 $\displaystyle\int_V \sqrt{x^2 + y^2}\, dV$ の値を求めよ．

(北海道大 2003)　　(m20030101)

0.2　以下の問いに答えよ．ただし，ベクトルの内積を ”·”，外積を ”×” と表すものとする．

(1)　以下の文章では，平面の方程式を導いている．空欄（1）から（3）に適切な式を入れよ．
原点 O より平面 S に垂直におろした点を G （以下，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を法線ベクトル $\boldsymbol{g}$ と呼ぶ），平面 S 上の任意の点 R の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする．法線ベクトル $\boldsymbol{g}$ と，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{GR}}$ は垂直であることから，両ベクトル間には（　1　）の関係がある．ここで，$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, g_3)$ とすると，平面 S の方程式は x, y, z, g_1, g_2, g_3 を用いて，（　2　）で表される．また，平面 S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ と，原点 O から平面 S までの距離 p を用いると前式は，（　3　）で表される．

(2)　単位法線ベクトルが $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ で $(1, 1, 1)$ を通る平面を求めよ．

(3)　同一平面上に異なる 3 点 A,B,C が与えられたとき，外積を用いてこの 3 点より平面の方程式を求める方法を述べよ．

(4)　3 点 $(1, 2, 3)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 3, 1)$ によって与えられる平面の方程式を求めよ．

(北海道大 2004)　　(m20040102)

0.3　$u = (x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ で表される関数がある．次の設問に答えよ．

(1)　$\mathrm{grad}\, u$ を求めよ．また，求めたベクトルが $u(x, y, z) = c$　$(c:$ 定数$)$ で定義される曲面に対し，幾何学的にどのようなベクトルかを述べよ．ここで $\mathrm{grad}\, u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$ を表し，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルである．

(2)　$\mathrm{grad}\, u \cdot \boldsymbol{v} = 0$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\mathrm{grad}\, u$ とどのような関係にあるかを文章で説明せよ．ただし，“ · ” は内積を表している．

(3)　次のベクトル $\boldsymbol{\ell}$ と $u(x, y, z) = c$　$(c:$ 定数$)$ で定義される曲面との幾何学的関係を図示して述べよ．ただし，$\boldsymbol{v}$ は (2) で定義されるベクトルである．

$$\boldsymbol{\ell} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} + \boldsymbol{v}$$

(北海道大 2007)　　(m20070102)

0.4　z は複素数であり，$i = \sqrt{-1}$ である．また，u, v, x, y, a, b, c は実数とする．

(1)　次の計算をしなさい．　　$(1 + i)^7$

(2)　次の極限値は存在するか．存在する場合はそれを求めなさい．

$$\lim_{z \to 2i} \frac{z^3 - 2iz^2 + z - 2i}{z - 2i}$$

(3)　次の関数を $w = u + vi$ の形で表しなさい．ただし，$z = x + yi$ とし，$\overline{z}$ は z の共役複素数とする．

$$w = z\overline{z} + z - \overline{z}$$

(4) 次の関数が正則関数となるように係数を a, b, c 定めなさい.

$$w = ax^2y - 2y^3 + (bxy^2 + cx^3)i$$

(5) 次の関数は調和関数であることを確かめなさい．また，u を実部にもつ正則関数を求めなさい.

$$u = x^2 - 6xy - y^2$$

(北海道大 2008) (m20080102)

0.5 (1) 次の関数 $f(x)$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$ のフーリエ級数を求めなさい.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

(2) 次の関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(k)$ を

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

とし，$i = \sqrt{-1}$ とする．次の関数のフーリエ変換 $F(k)$ を求めなさい.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

(北海道大 2008) (m20080104)

0.6 z, w は複素数であり，$i = \sqrt{-1}$ である．また，x, y, r, θ は実数である.

(1) 複素数 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ が与えられたとき，$w^n = z$（n は正の整数）の根は n 個であり，

$$w_k = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1)$$

と表せることを示せ.

(2) 方程式 $w^5 = 1$ を満たす 1 つの解が，$w = \cos 72^\circ + i\sin 72^\circ$ と表せることを示せ．また，$\cos 72^\circ$ の値を求めよ.

(3) 複素数 $z = x + iy$ が与えられたとき，関数 $w(z) = e^z$ が正則であることを証明せよ.

(北海道大 2009) (m20090101)

0.7 (1) 関数 $f(t) = \cos(\omega t)$ の（片側）ラプラス変換

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

を求めなさい．ただし，e は自然対数の底で，s はその実数部が正の複素数である.

(2) $s = c + i\phi$ とおく．ここで，i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ で，c, ϕ は実数とする．このとき，$G(\phi) = \lim_{c \to +0} cF(c + i\phi)$ を求めなさい.

(北海道大 2009) (m20090103)

0.8 関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

とし, 関数 $F(\omega)$ のフリーエ逆変換 $f(t)$ を

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

とするとき．次の設問に答えよ．ただし, $i = \sqrt{-1}$ であり，途中の計算手順を詳しく記述すること.

(1) 関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が $e^{-a\omega^2}$ であるとき，もとの関数 $f(t)$ を求めよ．ただし，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

を利用せよ．ここで，$a > 0$ である．

(2) 以下の関係式を満たす関数 $f(t)$ を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)f(\tau)d\tau = e^{\frac{t^2}{2}}$$

(北海道大 2011)　　(m20110102)

0.9 以下の設問に答えよ．途中の計算手順を詳しく記述すること．

(1) $w = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0,\ z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$,
$\alpha_k = a_k + ib_k\ (k = 0, 1, \cdots, n)$　とするとき，w の実部 $Re(w)$ および $Im(w)$ を求めよ．

(2) $f(z) = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$ $(z = x + iy)$　が正則か否かを調べよ．

(3) 次の式を証明せよ．

$$\frac{d}{dz}\sin^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

(北海道大 2011)　　(m20110103)

0.10 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ をそれぞれ x, y, z 方面の単位ベクトルとして, 以下の設問に答えよ．途中の計算手順を詳しく記述すること．

(1) 積分経路 $C : \boldsymbol{r}(t) = \cos t\ \boldsymbol{i} + \sin t\ \boldsymbol{j} + 2t\ \boldsymbol{k}$（$t = 0$ から $t = 2\pi$）に沿った，ベクトル関数 $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ の線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．

(2) $f(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{\sqrt{r^2 + 1}}$ （$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = ||\boldsymbol{r}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ）とし, 原点を中心とする半径が 2 の球の表面を S と表す．このとき，S 上の点 $\boldsymbol{p} = x_p\boldsymbol{i} + y_p\boldsymbol{j} + z_p\boldsymbol{k}$ における $\nabla f \cdot \boldsymbol{n}$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{p}$ における S の外向き単位法線ベクトルであり，$\nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$ とする．

(北海道大 2012)　　(m20120102)

0.11 次の対称行列について，以下の設問に答えよ．

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ は $\mathbf{A}$ の固有ベクトルの一つであることを示し，対応する固有値を求めよ．

(2) $\mathbf{A}$ の固有ベクトルのうち，(1) で与えられた $\boldsymbol{x}_1$ を除くもの 2 つ $(= \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3)$ を挙げよ． ただし，それらの大きさを $|\boldsymbol{x}_2| = |\boldsymbol{x}_3| = 1$ とし， 3 つの固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ が互いに直交するものを選ぶこと．

(3) $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$ $(\mathbf{\Lambda}$: 対角行列) となるような直交行列 $\mathbf{P}$ を求め，これを用いて $\mathbf{A}^n$ を計算せよ．

(北海道大 2013)　　(m20130101)

0.12 f を周波数とするとき，時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

で与えられる．ここで，$i = \sqrt{-1}$ である．ある関数 $m(t)$ のフーリエ変換を $M(f)$ とするとき，オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を利用して，$m(t)\cos(2\pi f_0 t)$ のフーリエ変換が $M(f - f_0)$ および $M(f + f_0)$ を用いて表せることを示せ.

(北海道大 2014)　　(m20140103)

0.13 以下の設問に答えよ．ここで，$z(= x + iy)$ は複素数であり，$i = \sqrt{-1}$，x，y は実数である．なお，途中の計算手順を詳しく記述すること.

(1) $z^3 = -8i$ を満たす z を全て求め，複素平面上に図示せよ.

(2) 次の関数が正則か否かを調べよ.

(a) $f(z) = z\overline{z} + 1$　　(ただし，$\overline{z}$ は z の共役複素数 $\overline{z} = x - iy$)

(b) $f(z) = \dfrac{z^2 + 3}{z}$　　(ただし，$z = 0$ を除く)

(3) 複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ において，$u(x, y) = x^2 + y - y^2$ であるとき，$u(x, y)$ が調和関数であることを示し，$u(x, y)$ を実部に持つ正則関数 $f(z)$ を求めよ.

(北海道大 2014)　　(m20140104)

0.14 以下の設問に答えよ．ここで，$i = \sqrt{-1}$ であり，X, Y, t は実数である.

(1) $z = \pm i$ のとき，$\dfrac{z - 1}{z + 1}$ を求めよ.

(2) $z = it$ のとき，$\dfrac{z - 1}{z + 1} = X + iY$ とおく，このとき (X, Y) の軌跡を求めよ.

(北海道大 2015)　　(m20150103)

0.15 f を周波数とするとき，時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$F[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

で与えられる．ここで，$i = \sqrt{-1}$ である．このとき，以下の設問に答えよ.

(1) 下記の関数 $P(t)$ を横軸 t として図示し，そのフーリエ変換を求めよ.

$$P(t) = \begin{cases} 1 & , |t| < t_0 \\ 0 & , |t| > t_0 \end{cases} \qquad (t_0 > 0)$$

(2) 関数 $P(t + 4t_0) + P(t - 4t_0)$ を横軸 t として図示し，そのフーリエ変換を求めよ.

(北海道大 2015)　　(m20150104)

0.16 一次関数 $f = \dfrac{z - i}{z + 2}$ による，z 平面上の単位円 $|z| = 1$ の f 平面への写像を求めよ.
ここで，$i = \sqrt{-1}$ である.

(北海道大 2016)　　(m20160104)

0.17 以下の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x + 6}{x^2 - 4}dx$　　(3) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\log x}{x^2}dx$

(北海道大 2017)　　(m20170102)

0.18 次式の $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ の行列について，次の設問に答えなさい.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

設問 1. $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

設問 2. $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$（$\boldsymbol{\Lambda}$ は対角行列）となる行列 $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{\Lambda}$ を求めなさい.

設問 3. $\boldsymbol{B}$ が直交行列であることを示しなさい.

設問 4. ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ を $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ による一次変換としたとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の大きさが等しいことを示しなさい．ただし，ベクトルの大きさの二乗は，$\boldsymbol{x}^T\,\boldsymbol{x}$ で求めることができる．ここで，T は転換を表す.

(北海道大 2018)　　(m20180103)

0.19 次の級数の収束，発散を調べ，収束する場合はその値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{3^{n-1}} + 3\left(-\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3(n+2)}$

(北海道大 2018)　　(m20180104)

0.20 f を周波数とするとき，時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

で与えられる．また，時間 t の関数 $p(t)$ と $q(t)$ の畳み込みは

$$p(t) * q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)q(t-\tau)d\tau$$

で与えられる．ここで $i = \sqrt{-1}$ である．このとき，以下の設問に答えなさい.

(1) 次の関数 $g(t)$ を横軸 t として図示しなさい.

$$g(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

(2) 次の関数 $h(t)$ を横軸 t として図示しなさい.

$$h(t) = g(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

(3) $g(t)$ のフーリエ変換を求めなさい.

(4) $h(t)$ のフーリエ変換を求めなさい.

(北海道大 2019)　　(m20190104)

0.21 次式をマクローリン展開したとき，x の 0, 1, 2, n 次の項を求めなさい.

$$\sqrt{e^{3x}}$$

(北海道大 2020)　　(m20200104)

0.22 複素数 z について，以下の設問に答えなさい．ただし，$i = \sqrt{-1}$ である.

(1) 方程式 $z^3 = 27$ を解きなさい.

(2) z が複素平面上の原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，次の 1 次変換により得られる w の軌跡を描きなさい.　　$w = \dfrac{1+iz}{1+z}$

(北海道大 2020)　　(m20200106)

0.23　3 次元空間にある次の 2 つの平面について，以下の設問に答えなさい．

平面 1　:　$x+y+\sqrt{2}z=0$

平面 2　:　$x+y=0$

(1) 平面 1 の法線ベクトルと平面 2 の法線ベクトルをひとつずつ求めなさい．

(2) (1) で求めた 2 つの法線ベクトルのなす角を求めなさい．ただし，答えは 0 以上 π 以下とすること．

(3) (1) で求めた 2 つの法線ベクトルの両方と直交するベクトルのうち，大きさが 1 であるものをひとつ求めなさい．

(北海道大 2021)　　(m20210101)

0.24　次の定積分を求めよ．

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

（北見工業大 2004）　　(m20040202)

0.25　次の定積分を求めよ．

$$\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\ dxdy \qquad D\ :\ x^2+y^2 \leqq\ a^2 \quad (a>0)$$

(北見工業大 2004)　　(m20040204)

0.26　(1) $\displaystyle\int x\log x dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ を，$x=\sin\theta$ という置換積分によって求めよ．

(北見工業大 2005)　　(m20050208)

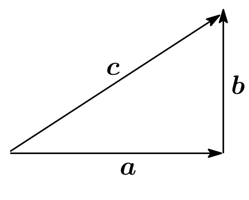
0.27　$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ をベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の内積とし，$||\boldsymbol{a}||$ を $\boldsymbol{a}$ の長さとする．このとき $||\boldsymbol{a}||^2=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$ であり，また，零ベクトル $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が直交すれば $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$ であった．

(1) $\boldsymbol{a}=(-1,\sqrt{3},2)$，$\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},1,2)$ のとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ とする．$\mathbf{0}$ でない $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が直交するとき

$||\boldsymbol{c}||^2=||\boldsymbol{a}||^2+||\boldsymbol{b}||^2$　（ピタゴラス（三平方）の定理）

を示せ．



(北見工業大 2008)　　(m20080204)

0.28　重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x}{\sqrt{y}}\,dxdy$ の値を求めよ．ただし，$D=\{(x,y)\mid 0\leqq\ x\leqq\ 1,\ 2\leqq\ y\leqq\ 3\}$ とする．

(北見工業大 2009)　　(m20090204)

0.29　$\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，$D:1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 4$ を求めよ．

$$\left(\quad \begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \quad \text{とおくとよい．} \quad\right)$$

(北見工業大 2011)　　(m20110205)

0.30 関数 $y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(北見工業大 2012) (m20120201)

0.31 次の関数を微分せよ.

(1) $y = x^2 \sin x$ (1) $y = \sqrt{1+e^x}$

(北見工業大 2015) (m20150201)

0.32 次の積分の値を求めよ. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} 2x^3 e^{-x^2} dx$

(北見工業大 2016) (m20160203)

0.33 次の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \, dx$ (2) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{(\log x)^2}{x} \, dx$

(北見工業大 2018) (m20180201)

0.34 関数 $z = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $((x,y) \neq (0,0)$ とする$)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.

(北見工業大 2018) (m20180202)

0.35 $D = \left\{(x,y) \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}\right\}$ とする.

(1) 領域 D を図示せよ.

(2) 積分 $\displaystyle\iint_D x^2 y \, dxdy$ を計算せよ.

(北見工業大 2018) (m20180204)

0.36 次の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} (\log x)^2 dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+4} dx$

(北見工業大 2019) (m20190201)

0.37 $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ での $x = \tan y$ の逆関数を $y = \arctan x$ とする.

(1) $\arctan x$ の導関数を書け. (証明は省略しても良い.)

(2) 関数 $f(x) = \arctan x - \log\sqrt{1+x^2}$ の $0 \leqq x \leqq \sqrt{3}$ での最大値と最小値を求めよ.

(北見工業大 2019) (m20190203)

0.38 関数 $f(x) = \sqrt{1+x}$ の $x=0$ を中心とする 2 次までのテイラー展開を求めよ.

(北見工業大 2022) (m20220201)

0.39 $-\infty < x < \infty$ で連続な関数の列

$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_n(x), \cdots$

が次の (i) の関係式を満たし, $f_1(x)$ が (ii) で与えられている.

(i) $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) \exp[-(x-t)^2] dt$, ここで $n = 1, 2, 3, \cdots$,

(ii) $f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \exp[-x^2]$.

ここで, exp は指数関数を表し, 必要があれば次の定積分の値を用いてもよい.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-x^2] dx = \sqrt{\pi}$$

次の問に答えよ.

(1) 関数 $f_2(x)$ を求めよ．

(2) n に対応して定まる正定数 a_n, b_n を用いて，関数 $f_n(x)$ を次のようにおく．

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\,a_n}}\exp[-x^2/b_n]$$

a_{n+1}, b_{n+1} をそれぞれ a_n, b_n で表す漸化式 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ．

(3) $a_n, b_n\,(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を n で表す一般形を求めよ．

(4) 次の定積分の値を求めよ． $\quad I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$

(岩手大 1994) (m19940307)

0.40 xyz 直交座標空間におけるある一次変換 f が，次のような行列 A で表されるとする．

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{6} & 3 \\ \sqrt{6} & -2 & -\sqrt{6} \\ 3 & \sqrt{6} & 1 \end{pmatrix}$$

また，x, y, z 方向を向く単位ベクトルをそれぞれ e_1, e_2, e_3 とする．次の各問に答えよ．

(1) A^2, A^3 を求めよ．

(2) 次のベクトル x_1 と x_2 は，1 次変換 f により，どのようなベクトルに移されるか．

$$x_1 = e_1 + e_3, \qquad x_2 = \sqrt{3}e_1 - \sqrt{2}e_2 - \sqrt{3}e_3$$

(3) 次のような 3 つのベクトル ${e_1}', {e_2}', {e_3}'$ を考える．

$${e_1}' = \frac{e_1 - e_3}{\sqrt{2}}, \qquad {e_2}' = e_2, \qquad {e_3}' = \frac{e_1 + e_3}{\sqrt{2}}$$

6 つの内積 ${e_1}'\cdot{e_1}'$，${e_2}'\cdot{e_2}'$，${e_3}'\cdot{e_3}'$，${e_1}'\cdot{e_2}'$，${e_2}'\cdot{e_3}'$，${e_3}'\cdot{e_1}'$ の値を求めよ．

(4) 基底のとりかたを e_1, e_2, e_3 から ${e_1}'$，${e_2}'$，${e_3}'$ に変えると，1 次変換 f を表す行列は，どのような形になるか．

(5) 1 次変換 f はどのような変換か，明確に述べよ．

(岩手大 1994) (m19940308)

0.41 $f(x) = \sqrt{x}\log x \quad (x \geqq 0)$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ の最小値を求めよ．

(4) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け．

(岩手大 1997) (m19970301)

0.42 $f(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \;\; (x > 0)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x+1) = xf(x)$ を部分積分を用いて証明せよ．

(2) x が自然数 n のとき，$f(n) = (n-1)!$ を証明せよ．

(3) $f(5)$ を求めよ．

(4) $f(\frac{5}{2})$ を求めよ．ただし，$f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ である．

(岩手大 1997) (m19970302)

0.43　次の式の分母を有理化せよ．$\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

(岩手大 1998)　　(m19980301)

0.44　次の 2 重根号をはずせ．$\sqrt{2+\sqrt{3}}$

(岩手大 1998)　　(m19980302)

0.45　次の極限値を求めよ．

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$,　　　　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\sin x}{x^3}$

(岩手大 1998)　　(m19980305)

0.46　次の複素数の計算をせよ. ただし,i は虚数単位 $(=\sqrt{-1})$ をあらわす.

$$\frac{1}{\dfrac{1}{5-2i}+\dfrac{1}{6}}$$

(岩手大 2004)　　(m20040301)

0.47　次の問いに答えよ.

(1)　次の定積分を求めよ.

$$\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$$

(2)　楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{64}=1$ について, 次の問に答えよ.

(a) 楕円の内部の面積を求めよ.

(b) x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を求めよ.

(c) y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を求めよ.

（岩手大 2004）　　(m20040302)

0.48　次の問いに答えよ.

(1)　$f(\theta)=\sin\theta$ を, 以下のマクローリンの定理を用いて無限級数へ展開せよ.

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

（ただし $0<\theta<1$）

(2)　$f(i\theta)=e^{i\theta}$ を無限級数へ展開せよ. ただし, i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ とする．

(3)　$f(\theta)=\cos\theta$ を無限級数へ展開し，$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を証明せよ．

(4)　$f(t)=5+0.4\sin\omega t+0.4\sin 2\omega t+0.3\cos 2\omega t+0.3\sin 3\omega t$ を, 以下の形式に書き直した場合の係数 C_2 と C_{-2} を求めよ.

$$f(t)=\sum_{n=-3}^{3}C_n e^{in\omega t}$$

(5)　$f(t)=0.4\sin 2\omega t+0.3\cos 2\omega t$ を, 以下の形式に書き直した場合の係数 A を求めよ.

$$f(t)=A\sin(2\omega t+\phi)$$

（岩手大 2004）　　(m20040303)

0.49 次の関数を各変数について偏微分せよ．

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

（岩手大 2004）　(m20040304)

0.50 曲線 $C: y=2\sqrt{x+4}$, 直線 $l: y=x+a$, 及び 無理方程式 $2\sqrt{x+4}=x+a$ に関し, 次の問に答えなさい．ただし, a は実定数です．

(1) $a=2$ として, 曲線 C と直線 l のおよそのグラフを同じ図の中に描きなさい．

(2) 上の無理方程式が 2 重解をもつとき, a のとる値を求めなさい．

(3) 上の無理方程式が相異なる 2 重解をもつとき, a のとる範囲を求めなさい．

(4) 上の無理方程式が 1 つの実数解しかもたないとき, a のとる範囲を求めなさい．

(5) $a=0$ のとき, 上の無理方程式の解を求めなさい．

(岩手大 2006)　(m20060301)

0.51 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqq\ 2y\right\}$ とするとき，次の重積分について以下の問いに答えなさい．

$$I=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

(1) 領域 D を図示しなさい．

(2) x , y を極座標変換したとき，領域 D が移る領域 G を求め，図示しなさい．

(3) (1) および (2) の結果を用いて，重積分 I を求めなさい．

(岩手大 2011)　(m20110303)

0.52 曲面 $\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2=b^2\ \ (a>b>0)$ で囲まれる立体について，次の問いに答えなさい．

(1) 次の文中の $\boxed{\text{（ア）}}$ から $\boxed{\text{（エ）}}$ に正しい式を入れなさい．

この立体の xy 平面上の断面は．立体を囲む曲面の方程式に $z=0$ を代入した際に，解として得られる 2 つの円 $\boxed{\text{（ア）}}$ 及び $\boxed{\text{（イ）}}$ で囲まれる領域 D_1 である．

この立体の xz 平面上の断面である領域 D_2 は 2 つの円 C_1 及び円 C_2 によって構成される．

円 C_1 及び円 C_2 は方程式 $\boxed{\text{（ウ）}}$ 及び $\boxed{\text{（エ）}}$ で与えられる．

(2) 領域 D_1 及び領域 D_2 を図示しなさい．

(3) 次の文中の $\boxed{\text{（オ）}}$ から $\boxed{\text{（キ）}}$ に正しい式を入れなさい．

この立体は円 C_1 または円 C_2 を z 軸まわりに回転して得られる回転体である．

この立体の体積 V は式 ① で与えられる．

$$V=\pi\int_{-b}^{b}\boxed{\text{（オ）}}\,dx\quad\cdots\cdots①$$

① 式より，この立体の体積は $V=\boxed{\text{（カ）}}$ と求まる．

また，この立体を囲む曲面のうち，$z\geqq\ 0$ の部分は関数 $z=\boxed{\text{（キ）}}$ で表される．

この立体の体積 V は定義域 D_1 に関する積分として次式で与えられる．

$$V = 2\iint_{D_1} \boxed{\quad（キ）\quad}\, dxdy \quad \cdots\cdots ②$$

(4) xy 平面上の極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて ② 式を極座標系の式に変換しなさい．

(岩手大 2015)　　(m20150303)

0.53 次の $\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ．注意：log は自然対数で，π は円周率である．

(1) $\displaystyle\int_2^3 \frac{4(3+3x-x^2)}{(x-1)^2(x+1)}dx = \log\frac{3}{\boxed{\text{(t)}}} + \boxed{\text{(u)}}$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \log x dx = \boxed{\text{(v)}}$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^4 dx = \boxed{\text{(w)}}$　　(4) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-4x}\sin x dx = \frac{1}{\boxed{\text{(x)}}}$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{\boxed{\text{(y)}}}$

(秋田大 2002)　　(m20020403)

0.54 積分 $S = \displaystyle\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}dr$ を計算せよ. ただし,R は正の定数である. 必要ならば変換 $r^2 = u$ を用いよ.

(秋田大 2005)　　(m20050405)

0.55 (1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ のとき, 行列 $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$ と, その行列式 (determinant) を計算せよ.

(2) 積分 $I = \displaystyle\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$ を計算せよ. ただし,R は正の定数で,D は領域 $x^2+y^2 \leqq R^2$ を表す. 必要ならば問題 (1) の変数変換を用いよ.

(3) 半径 R の球の体積 V を, 上の問題 (2) の積分 I を用いて表せ. 理由も簡潔に述べること.

(秋田大 2005)　　(m20050406)

0.56 次の定積分を求め, $\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx = \frac{1}{\boxed{}}\left(\frac{\pi}{2} + \boxed{}\right)$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x\cos x dx = \frac{\boxed{}}{12}$

(3) $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\ dx = \frac{\boxed{}}{3}$　　(4) $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x-1}\ dx = \frac{\boxed{}}{15}$

(5) $\displaystyle\int_1^e \sqrt{x}\ \log x dx = \frac{2}{\boxed{}}\left(e^{\frac{3}{2}} + \boxed{}\right)$　　(6) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx = 1 + \frac{\boxed{}}{e}$　　(7) $\displaystyle\int_1^\infty x^2e^{-x}dx = \frac{\boxed{}}{e}$

(秋田大 2007)　　(m20070404)

0.57 次の $\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ.

曲線 $y = \dfrac{2}{3}(1+x\sqrt{x}\,)$ の区間 $0 \leqq\ x \leqq\ 3$ における，この曲線の弧の長さは $\dfrac{\boxed{}}{3}$ である.
注意：log は自然対数で，e は自然対数の底とする．π は円周率とする.

(秋田大 2007)　　(m20070405)

0.58 次の積分を計算せよ．ただし，(2) では，$\displaystyle\int \log x dx = x\log x - x + C$ となることを使ってよい.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}dx$ (2) $\displaystyle\int \log\frac{x-1}{(x+1)^2}dx$

(秋田大 2008) (m20080404)

0.59 次の極限を求め，カッコ内に当てはまる整数を記入せよ．

以下の arcsin は逆正弦関数のことで, $\sin^{-1}$ と表されることもある．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\boxed{(キ)}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)=\frac{1}{\boxed{(ク)}}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(2x)}{x}=\boxed{(ケ)}$

(秋田大 2010) (m20100402)

0.60 次の定積分を求め, カッコ内に当てはまる整数を記入せよ．

以下の arcsin は逆正弦関数, π は円周率, log は底が e である自然対数を意味する．

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\boxed{(コ)}\,\pi$ (2) $\displaystyle\int_0^1\frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx=\frac{\log 2}{\boxed{(サ)}}\,\pi$

(3) $\displaystyle\int_0^1 x^2\arcsin x\,dx=\frac{\pi}{6}-\frac{2}{\boxed{(シ)}}$

(秋田大 2010) (m20100403)

0.61 以下の四角内に当てはまる値を計算し，解答欄の指定した箇所に記入せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x+1\right)=\boxed{\quad（ア）\quad}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\boxed{\quad（イ）\quad}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\boxed{\quad（ウ）\quad}$

(秋田大 2013) (m20130401)

0.62 以下の四角内に当てはまる式を計算し，解答欄の指定した箇所に記入せよ．ここで，$\arcsin x$ は $\sin x$ の逆関数を表し，$\sin^{-1}x$ と表されることもある．

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\boxed{\quad（エ）\quad}$

(2) $0<x<1$ とするとき，$\displaystyle\frac{d}{dx}x^{\arcsin x}=\boxed{\quad（オ）\quad}$

(秋田大 2013) (m20130402)

0.63 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ とする．また $\boldsymbol{c}$ を 3 次元ベクトルとする．このとき以下の設問 (1),(2) に答えなさい．なお，解答はいずれも設問 (2) の下の空白部分に記入しなさい．

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が正規直交基底をなすように $\boldsymbol{c}$ を定めなさい．

(2) ベクトル $\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ を満たすとする．このとき，ベクトル $\boldsymbol{c}$ とベクトル $\boldsymbol{a}$ のなす角を求めなさい．

(秋田大 2014) (m20140403)

0.64 ベクトル $\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{p}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3},1)$ に対して，$\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{p}$ が $\boldsymbol{p}$ と直交するように定数 k を定めなさい．

(秋田大 2016) (m20160401)

0.65 $f(x,y)=x^3-3x+y^2$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ求めなさい．

(2) 点 $P(1,1)$ における $f(x,y)$ の $\boldsymbol{u}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ 方向の微分（$\boldsymbol{u}$ 方向の方向微分係数ともいう）を求めなさい．

(秋田大 2016) (m20160403)

0.66 次の積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ （但し，$a>0$ とする．）

(2) $\displaystyle\int_{1}^{e}\log_e x\,dx$ （e は自然数の底である．）

(秋田大 2017) (m20170403)

0.67 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{a}$ を法線ベクトルに持つ原点を通る $\mathbb{R}^3$ 内の平面を π とする．$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，平面 π に関して対称なベクトルを対応させる写像を f とすると，f は線形写像になっている．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，$f(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{a}$ を用いて表せ（内積を用いよ）．

(2) $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ となる 3×3 行列を A とするとき，行列 A を求めよ．

(3) A の固有値と，それぞれの固有値に対応する固有空間を求めよ．

(秋田大 2019) (m20190404)

0.68 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}x^2\cos x dx$ (2) $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{1}{x\sqrt{x^2+x}}dx$ ただし，$t=\sqrt{x^2+x}-x$ と置換して求めよ．

(秋田大 2020) (m20200401)

0.69 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx$

(2) $I=\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}}x^2\sqrt{2-x^2}dx$ について次に答えよ．

(a) $x=\sqrt{2}\sin\theta$ とおくとき $\dfrac{dx}{d\theta}$ を求めよ．

(b) (a) を用いて θ で置換積分をして，I を求めよ．

(秋田大 2021) (m20210401)

0.70 2 次方程式 $4x^2-2\sqrt{2}x-1=0$ の解を α, β とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 和 $\alpha+\beta$, 積 $\alpha\beta$ を求め，$\alpha^2+\beta^2$ の値を答えよ．

(2) $|\,\alpha-\beta\,|$ および $|\,\alpha^4-\beta^4\,|$ の値を求めよ．

(3) 行列 $A=\begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta^2 \\ \beta^2 & \alpha^2 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換によって，双曲線 $x^2-y^2=1$ を移したときの関数を求めよ．

(秋田大 2021) (m20210402)

0.71 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+5x-3}{x^4-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to 0}\frac{5x^2y^2}{x^2+y^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$

(秋田大 2021) (m20210403)

0.72 放物線 $\displaystyle y=-\frac{1}{2}x^2+x \qquad (*)$
の上の点 $P(a,b)$ において，放物線より上側に中心 $Q(X,Y)$ をもつ半径 $\sqrt{(a-1)^2+1}$ の円 C が接している．次の問いに答えよ．

(1) 円 C の中心 Q の座標 (X,Y) を a で表せ．

(2) 点 P が放物線 $(*)$ 上を動くとき，円 C の中心 Q が描く曲線の方程式を求めよ．

(3) 中心 Q が直線 $x+2y=6$ に最も近づくとき，中心 Q の座標 (X,Y) を求めよ．

(東北大 1993) (m19930502)

0.73 次の問いに答えよ．

(1) $\sin^4\theta\ \cos^2\theta=a_0+a_2\cos 2\theta+a_4\cos 4\theta+a_6\cos 6\theta$ とおくとき，a_0 , a_2 , a_4 , a_6 を定めよ．

(2) 変数変換 $x=a\sin^2\theta \quad (a>0)$ を用いて，次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^a x\sqrt{ax-x^2}dx$$

(3) 円柱 $(x-a)^2+(y-a)^2\leq a^2$ が，2 平面 $z=ax,\ z=-ax$ により切り取られる部分の体積を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

(東北大 1995) (m19950501)

0.74 3 つの 1 次変換を f,g,h とし，これらを表す行列をそれぞれ A,B,C とおく，また，任意の点 $P(x,y)$ の 2 つの合成変換 $f\circ h$, $h\circ g$ を $f\circ h(P)=f(h(P)), h\circ g(P)=h(g(P))$ と定義し，$f\circ h=h\circ g$ が成立するとする．$A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ ， $C=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ であるとき，次の問いに答えよ．ただし，a は $a\neq 0$ の実定数とする．

(1) 点 P の変換 h により移される点を P' とする．P' の原点からの距離は，P の原点からの距離に等しいことを示せ．

(2) g を表す行列 B を求めよ．

(3) 円 $x^2+y^2=1$ 上の点 Q の変換 $f\circ h$ により移される点を Q' とする．Q' の原点からの距離の最大値と最小値を求めよ．

(東北大 1996) (m19960503)

0.75 関数 $\displaystyle F(x)=x\log x-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}$ の導関数を $F'(x)$ と表し，
関数 $f(x)$ を $f(x)=F'(x)$ と定義する．

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ.　　(2) 関数 $f(x)$ の増加・減少を調べよ.

(2) 等式　$f(c)=0 \quad (1<c<3)$　を満たす c が少なくとも 1 つ存在することを示せ.

(東北大 2001)　(m20010501)

0.76 2 次曲線 C : $3x^2-2\sqrt{3}xy+5y^2-18=0$ は, 行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$, ベクトル $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いて, ${}^t\boldsymbol{pAp}-18=0$ と表すことができる. ただし, ${}^t\boldsymbol{p}=(x \quad y)$ である.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1, λ_2 を求め, それぞれに対応する大きさ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{p}'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とし, ある行列 $\boldsymbol{U}$ を用いて, 線形変換 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{p}'$ を行えば, 2 次曲線 C は標準形になる. 行列 $\boldsymbol{U}$ を求め, 2 次曲線 C の標準形を x', y' を用いて表せ.

(3) x 軸と x' 軸のなす角度を求め, x 軸, y 軸と x' 軸, y' 軸の関係を図示し, 2 次曲線 C の概形を描け.

(東北大 2005)　(m20050501)

0.77 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{x}\neq 0$ において関数 f を

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}, \quad |\boldsymbol{x}|=\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2}$$

で定義する. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $\nabla f=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right)$, および $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_3}^2}$ を求めよ.

(2) $\varepsilon>0$ に対して, $S_\varepsilon=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 ; |\boldsymbol{x}|=\varepsilon\}$ とする. S_ε に沿う表面積分

$$\int_{S_\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S_ε 上の単位外向き法線ベクトルであり, $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}=\nabla f\cdot\boldsymbol{n}$ は f の $\boldsymbol{n}$ 方向への微分を表す.

(3) S を原点 O を内部に含む $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな閉曲面とするとき, S に沿う表面積分

$$\int_{S}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S 上の単位外向き法線ベクトルである.

(東北大 2005)　(m20050505)

0.78 x と y を実数とし, 関数 $f(x,y)$ を　$f(x,y)=4-\sqrt{x^2+y^2}$　と定義する.
不等式 $(x-1)^2+y^2 \leqq 1$, $0 \leqq z \leqq f(x,y)$ で表される領域を R として, 以下の問に答えよ.

(1) 領域 R の概形を描け.　　(2) 領域 R の体積を求めよ.

(3) $xy-$ 平面上で不等式 $(x-1)^2+y^2 \leqq 1$ によって表される領域を D とする. 曲面 $z=f(x,y)$ の D に対応する部分の面積を求めよ.

(東北大 2007)　(m20070507)

0.79 直交座標系 (x,y,z) において, 点 O,A,B,C,D の座標がそれぞれ $O(0,0,0)$, $A(2,2,-4)$, $B(3,5,-2)$, $C(5,1,-3)$, $D(0,0,-6)$ で与えられるものとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 線分 OA, OB, OC を隣り合う 3 辺とする平行六面体の体積 V を求めよ.

(2) 3 辺 A, B, C を通る平面 P の方程式を求めよ.

(3) (2) で求めた平面 P を接平面とし，2 点 O, D を通る球の方程式を求めよ．

(4) 点 A を x 軸の回りに回転した後，平面 Q ： $\sqrt{2}x+y+3z=2$ に直交する方向へ移動することにより，点 O に移すことを考える．この場合の x 軸回りの回転角 θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ と平面 Q に直交する方向の移動量 L を求めよ．

(東北大 2009)　　(m20090501)

0.80 t, x, y を実数，A を実数の定数とし，以下の問いに答えよ．

(1) 置換 $t = x + \sqrt{x^2+A}$ を用い，不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx$ を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \sqrt{x^2+A}\,dx$ を求めよ．

(3) $x \geqq 0, y \geqq 0$．曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ の長さを求めよ．

(東北大 2009)　　(m20090503)

0.81 $a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ が収束することを証明し，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(東北大 2009)　　(m20090506)

0.82 x を実数とし， 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=e^{-x}\cos x$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の第 n 次導関数を $\dfrac{d^nf}{dx^n}$ とするとき，

$$\frac{d^nf}{dx^n}=\left(-\sqrt{2}\right)^n e^{-x}\cos\left(x-\frac{n\pi}{4}\right)$$

であることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(2) 関数 $y=f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べ，増減表を書き，グラフの概略を描け．

(3) 曲線 $y=f(x)$ $\left(\text{区間}\ 0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(東北大 2011)　　(m20110502)

0.83 数列 $\{a_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ とする．このとき．$b_n=a_{n+1}-\alpha a_n$ によって定められる数列 $\{b_n\}$ が公比 β の等比数列となるような α と β をすべて求めよ．

(2) $(n+2)a_{n+2}-2(n+1)a_{n+1}\cos\theta+na_n=0$ であるとき，a_1 と a_2 を用いて a_n $(n \geqq 3)$ を表せ，ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(3) $a_1=1$, $a_2=i$ (ただし $i=\sqrt{-1}$) とし，複素平面上で原点を O，複素数 a_n を表す点を A_n とする．a_n が (2) の式で表されるとき，三角形 OA_nA_{n+1} $(n \geqq 3)$ の面積を求めよ．

(東北大 2012)　　(m20120501)

0.84 以下の問いに答えよ．

(1) 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ を求めよ．

$$a_1=3, \qquad a_2=7, \qquad a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n \qquad (n=1,2,3\cdots)$$

(2) 次の条件を満たす数列 $\{b_n\}$ の極限を求めよ．

$$b_1 = 0, \qquad b_{n+1} = \sqrt{b_n + 2} \qquad\qquad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

(3) 次の条件を満たす c_2，c_3 および c_4 を求め，数列 $\{c_n\}$ を推定せよ．また，その推定が正しいことを，数学的帰納法によって証明せよ．

$$c_1 = 2, \qquad c_{n+1} = \frac{c_n}{1 + c_n} \qquad\qquad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

(東北大 2014)　　(m20140503)

0.85 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ の関係を用いて，以下の関係が成り立つことを示せ．ただし，　$i = \sqrt{-1}$ である．

(1) $\sin 2\theta = 2 \sin\theta \sin\theta$

(2) $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

(東北大 2015)　　(m20150501)

0.86 $a_n \geqq 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ も収束することを示せ．また，逆が成り立たないことを示す例を一つあげよ（証明不要）．

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束し，$a_n \neq 1$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であるとする．このとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 - a_n}$ は収束することを示せ.

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ も収束することを示せ.

(東北大 2015)　　(m20150508)

0.87 領域 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 1,\ \sqrt{2}x^2 \leqq y\right\}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 領域 D の面積 S を求めよ．

(2) 領域 D の重心の座標を求めよ．ここで，領域 D の重心の座標 $(\overline{x},\ \overline{y})$ は以下の式で表される．

$$(\overline{x},\ \overline{y}) = \left(\frac{1}{S}\iint_D x\,dxdy\,,\ \frac{1}{S}\iint_D y\,dxdy\right) \qquad S：\text{領域 } D \text{ の面積}$$

(東北大 2016)　　(m20160502)

0.88 次の対称行列 $\boldsymbol{A}$ およびベクトル $\boldsymbol{r}$ について以下の問に答えよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさを 1 とする．

(2) ベクトル $\boldsymbol{r}$ を回転行列 $\boldsymbol{R}$ によって角度 θ 回転させたものをベクトル $\boldsymbol{s}$ とする．$\theta = 30^\circ$とした場合の回転行列 $\boldsymbol{R}$ とベクトル $\boldsymbol{s}$ を求めよ．ただし，θ は反時計回りを正とする．

(3) 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = [\,1, 0\,]^t$，$\boldsymbol{e}_2 = [\,0, 1\,]^t$ を行列 $\boldsymbol{R}$ によってそれぞれ原点に対して反時計回りに角度 $\theta = 30$回転させたベクトルを　$\boldsymbol{e}'_1$，$\boldsymbol{e}'_2$ とする．(2) で求めたベクトル $\boldsymbol{s}$ を $(\boldsymbol{e}'_1\ \ \boldsymbol{e}'_2)$ 座標系により表記したベクトル $\boldsymbol{s}'$ を求めよ．さらに $\boldsymbol{s}' = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{s}$ となる変換行列 $\boldsymbol{Q}$ を求めよ．

(東北大 2016)　　(m20160504)

0.89　オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いて，次の関係が成り立つことを示せ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ である．

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

(東北大 2018)　　(m20180501)

0.90　$\mathbb{R}^2$ 上の 2 変数関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y) = (0,0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1)　$f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ において連続であることを示せ．

(2)　$f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ において全微分可能であるか，理由とともに答えよ．
なお，$\mathbb{R}^2$ 内の点 (a,b) の近傍で定義された実数値関数 $g(x,y)$ が $(x,y) = (a,b)$ において全微分可能であるとは，ある定数 α，β が存在して

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{g(a+h,\ b+k) - g(a,b) - (\alpha h + \beta k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

が成り立つことをいう．

(東北大 2018)　　(m20180510)

0.91　$\mathbb{R}$ 内の閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数 $f(x)$ は $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 1$ をみたすとする．正の整数 n に対し

$$b_n = \int_0^1 f(x)\cos\frac{x}{\sqrt{n}}dx$$

とおくとき，

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty}(b_n)^n = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)$$

が成り立つことを以下の設問に沿って証明せよ．

(1)　任意の $x \geq 0$ に対し

$$0 \leq \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^3}{6}$$

が成り立つことを示せ．

(2)　任意の n に対し

$$\left|b_n - 1 + \frac{1}{2n}\int_0^1 x^2 f(x)dx\right| \leq \frac{1}{6n\sqrt{n}}\int_0^1 x^3\,|f(x)|\,dx$$

が成り立つことを示せ．

(3)　任意の実数 α，β に対し

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n\sqrt{n}}\right)^n = e^\alpha$$

が成り立つことを示せ．

(4)　(2) および (3) の結果を利用して $(*)$ を結論せよ．

(東北大 2018)　　(m20180511)

0.92 xyz 空間に原点 O を中心とする半径 1 の球面 S_1，点 $P(2,0,a)$ を中心とする半径 r の球面 S_2 がある．以下の問に答えよ．ただし，a, r はそれぞれ実数であり，$r>0$ とする．

(1) S_1 と S_2 が交線をもつ r の範囲を a を用いて表せ．

(2) S_1 と S_2 が交線をもつとき，交線を含む平面の方程式を求めよ．

(3) $a=0$, $r=\sqrt{3}$ のとき，S_1 と S_2 の交線を C とする．交線 C の方程式を求めよ．

(4) 点 $Q(0,0,\sqrt{2})$ と (3) で求めた交線 C 上の点 R を通る直線が xy 平面と交差する点を T とする．点 R が交線 C 上を動くとき，点 T の軌跡の方程式を求めよ;

(東北大 2019) (m20190502)

0.93 次の極限値をそれぞれ求めよ

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x-2}-x+1\right)$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

(東北大 2022) (m20220503)

0.94 次の微分方程式をそれぞれ解け．

(1) $y^2+1-2x\sqrt{x-1}\,y'=0$ (2) $y''-\sqrt{1+y'}=0$

(東北大 2022) (m20220504)

0.95 極座標変換を用いて次に示す重積分を計算する．以下の問に答えよ．

$$I=\iint_D \frac{x-y}{(x^2+y^2)^2}dxdy, \qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1\leqq x^2+y^2\leqq 2,\ \ 0\leqq y\leqq \sqrt{3}x\right\}$$

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) 次に示す極座標変換のヤコビ行列とその行列式（ヤコビアン）を求めよ．

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

(3) (2) の極座標変換によって，xy 平面内の領域 D は $r\theta$ 平面内の領域 $\overline{D}$ に対応づけられる．下図に示す点 $O(0,0)$ を原点とする r と θ の直交座標を用いて，領域 $\overline{D}$ を図示せよ．

(4) 重積分 I を計算せよ．

(東北大 2022) (m20220505)

0.96 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{n^2-i^2}$ を定積分で表し，
極限値を求めよ． (お茶の水女子大 1997) (m19970602)

0.97 次の計算をせよ．ただし，$\log x$ は自然対数であり，$\ln x$ と同じである．

(1) $\dfrac{d}{dx}\sin^2 x$ (2) $\dfrac{d}{dx}\cos(x^3)$ (3) $\dfrac{d}{dx}\log(\sqrt{x^2+1}+x)$ (4) $\dfrac{d}{dx}2^x$ (5) $\dfrac{d}{dx}x^x$

（お茶の水女子大 1999） (m19990601)

0.98 次の２重積分を求めよ．

$$\iint_D \sqrt{x}dxdy, \qquad D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq x\}$$

（お茶の水女子大 2000）　(m20000608)

0.99 (1) 次の対称行列の固有値と固有ベクトルを全て求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

(2) n 行 n 列の実対称行列 A の，n 個の固有ベクトル $b_1, \cdots, b_n$ が，全て求まったとしよう．ベクトル $b_1, \cdots, b_n$ はそれぞれ列ベクトルとし，互いに直交するように取った．次に，列ベクトル $b_1, \cdots, b_n$ を横に並べて作った，n 行 n 列の行列を B としよう．即ち，$B = (b_1, \cdots, b_n)$．このとき，行列の積 B^TAB は対角行列であることを証明せよ．但し，B^T は B の転置行列を表すものとする．

（お茶の水女子大 2000）　(m20000614)

0.100 次の計算をせよ．　$\dfrac{d}{dx}e^{\sqrt{\log x}}$　$(x>1)$

(お茶の水女子大 2003)　(m20030603)

0.101 (1) ２変数関数 $g(x,y)$ が２回連続微分可能であるとき，それと $x = f_1(r,\theta) = r\cos\theta$, $y = f_2(r,\theta) = r\sin\theta$ の合成関数 $h(r,\theta) = g(r\cos\theta, r\sin\theta)$ について次の等式が成立することを示せ．ただし，$r \neq 0, (x,y) \neq (0,0)$ とする．

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

(2) ２変数関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) の近傍 $V = \{(x,y)|\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < r\}$ で２回連続微分可能であるとする．次の条件

$$\frac{\partial}{\partial x}f(a,b) = \frac{\partial}{\partial y}f(a,b) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a,b) > 0\,,\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a,b)\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(a,b) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(a,b)\right)^2 > 0$$

を満たすとき，$f(x,y)$ は (a,b) で極小であることを示せ．すなわち，
$U = \{(x,y)|\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < r'\}$ $(r' \leq r)$ があって，$(x,y) \in U - \{(a,b)\}$ ならば
$f(x,y) > f(a,b)$ が成り立つことを示せ．

(お茶の水女子大 2003)　(m20030607)

0.102 (1) 実対称行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値がすべて正である条件を書け．

(2) (1) の条件のもとで次の重積分を計算せよ．ただし，必要なら $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ を用いてよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}dxdy$$

(お茶の水女子大 2003)　(m20030608)

0.103 行列 A の固有値 λ と固有ベクトル ψ は，

$$A\psi = \lambda\psi$$

という関係式を満足する．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{ab} \\ \sqrt{ab} & a-b \end{pmatrix}$$

ただし，a, b は正の実数とせよ．

(2) エルミート行列の固有値は，実数であることを証明せよ．ただし，エルミート行列 H とは，複素数の成分をもつ行列であり，転置して複素共役を取った（これをエルミート共役を取るという）行列が，もとの H と一致する行列である．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030614)

0.104　次の定積分を計算しなさい．

(1) $\displaystyle\int_1^2 x\log x dx$　(ただし，$\log x$ は自然対数とする.)　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

(お茶の水女子大 2007)　　(m20070602)

0.105　次の関数を微分せよ．

(1) x^{x^x}

(2) $\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$　（主値でかんがえること）

(お茶の水女子大 2010)　　(m20100601)

0.106　次式で決まる曲線で囲まれる面積について考察せよ． 以下の (1) から (3) の手順に従ってもよいし，または別の手順で解答してもよい．ただし，x と y は実数とする．

$$y^2 - x^2(x+a) = 0$$

(1) $a = 1$ のときの曲線の概形をグラフに示す．

(2) $a = -1$ のときの曲線の概形をグラフに示す．

(3) $a = 1$ のときの曲線によって囲まれた領域の面積を求める． 積分の計算においては $t = \sqrt{x+a}$ とおいて置換積分を行ってよい．

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110603)

0.107　次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^2 x^2 \log x\, dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x\, dx$　　ただし，arctan は正接 tan の逆関数の主値を表すものとする．

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130601)

0.108　$n \geq 0$ なる整数 n に対して，

$$I_n = \int_{-1}^1 x^{2n}\sqrt{1-x^2}\, dx$$

とおく．このとき，以下の問に答えよ．

(1) I_0 と I_1 を求めよ．

(2) I_{n+1} と I_n の関係を求めよ．

(3) I_n を求めよ．

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130608)

0.109　3 次元微分演算子 $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ に対して ∇r を求めなさい．

ただし $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ である．

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160607)

0.110 次の行列の行列式を計算し，それが 0 となる x の値をすべて求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega & 1 & x \\ \omega & 1 & 2 & x^2 \\ \omega^2 & \omega^2 & 4 & x^3 \\ 1 & \omega & 8 & x^4 \end{pmatrix}$$

ただし，$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ である．

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200603)

0.111 (1) $t = x + \sqrt{x^2-1}$ のとき，$\dfrac{dt}{dx}$ を求めよ．

(2) 積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$ を，上記 (1) のように $t = x + \sqrt{x^2-1}$ とおいて，t の関数の積分に置換せよ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$ を求めよ．

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200612)

0.112 (1) (i) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$ は収束していることを示せ．

(ii) 0 より大きい実数 x に対し，$f(x) = \displaystyle\int_x^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$ とおく．

$0 < x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$ が成り立つことを示せ．

(iii) (ii) での $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ と記すと，その微分に関して

$g'(x)^2 = g(x)^3 + 1$ が成り立つことを示せ．

(2) 関数 $h(x)$ はすべての実数 x で $h(x) > 0$ をみたす連続関数とし，

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} h(x)$ もみたすと仮定する．

(i) $a > 0$ に対し，X_a は $h(x) \geq a$ をみたす実数 x の集合とする．
このとき，X_a は有界集合であることを示せ．

(ii) $h(x)$ は実数上の関数として最大値をもつことを示せ．
（閉区間上の連続関数に対する最大値の定理を用いてよい.）

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220603)

0.113 以下の設問に答えよ．ただし，$a > 0$ である．

(1) 次の定積分の値を求めよ．$\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax^2}dx$

(2) 次の定積分の値を求めよ．必要ならば，直交座標系 (x, y) を極座標系 (r, θ) に変換せよ．
$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}e^{-ay^2}dxdy$

(3) 次の等式を証明せよ．$\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

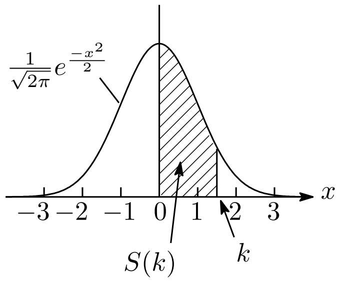
(4) 次の定積分の値を求めよ．ただし，n は 2 以上の整数である．$\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-ax^2}dx$

(東京大 2004)　　(m20040702)

0.114 方程式 $ax^2 + 4bx + c = 0$ が相異なる 2 つの実根をもつ確率を，(1), (2) それぞれの場合に対して求めよ．

(1) a, b, c がそれぞれ無作為に 0, 1, 2 のいずれかの値をとるとき．

(2) a, c がそれぞれ無作為に 1，2 のいずれかの値をとり，a, c と関係なく b は平均 0，標準偏差 1 の正規分布に従うとき．



ただし，$\sqrt{2}=1.4$ とし，次の表を利用してよい．

k	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0	1.2
$S(k)$	0.117	0.191	0.258	0.316	0.341	0.385

ここに，$S(k)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^k e^{\frac{-x^2}{2}}dx$ とする．たとえば，平均 0，標準偏差 1 の正規分布に従う変数 x が 0.7 から 1.0 をとる確率は，$P(0.7<x<1.0)=S(1.0)-S(0.7)=0.083$ である．

(東京大 2004)　　(m20040705)

0.115 $f(x)=x^2\sqrt{a^2-x^2}$，$g(x)=x^2e^{-x}$ として下記の問いに答えよ．ただし，$a>0$ で，$f(x)$ は区間 $-a \leqq x \leqq a$ で定義される関数である．

(1) $y=f(x)$ のグラフをかけ．　　(2) $y=g(x)$ のグラフをかけ．

(3) $\displaystyle\int_0^a f(x)dx$ を求め，結果を a を用いて表せ．

(4) $\displaystyle\int_0^a f(x)dx=\int_0^\infty g(x)dx$ のとき，a の値を求めよ．

(東京大 2006)　　(m20060701)

0.116 複素数平面上で次の式を満たす点 $z=x+yi$ (x, y は実数) の軌跡の名称と概略図を示せ．また，この軌跡の特徴を説明せよ．軌跡の特徴については，特記しない限り，例えば軌跡が円の場合には中心点と半径について説明する程度でよい．

(1) $\left|z-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right|=2$　　(2) $\left|z-\sqrt{2}i\right|=\left|z-\sqrt{2}\right|$

(3) $\left|z-\sqrt{2}i\right|+\left|z-\sqrt{2}\right|=4$　　(4) $\left|z-\sqrt{2}i\right|-\left|z-\sqrt{2}\right|=1$

この問 (4) の軌跡の特徴の説明については，軌跡の名称を明記するだけでよい．

(東京大 2006)　　(m20060704)

0.117 2 つの媒介変数 s, θ によって表される曲面 S

$$S\ :\ x(s,\theta)=(s\cos\theta\,,\ s\sin\theta\,,\ \alpha\theta)\ ,\ (0\leq s\leq 1)\,,\ (0\leq\theta\leq 2\pi)$$

について，以下の設問に答えよ．α は 0 以上の定数とする．

(1) $x(s,\theta)$ の媒介変数 s を 1 と固定する事により，曲線 C

$$C\ :\ y(\theta)=x(1,\theta)=(\cos\theta\,,\ \sin\theta\,,\ \alpha\theta)\,,\ (0\leq\theta\leq 2\pi)$$

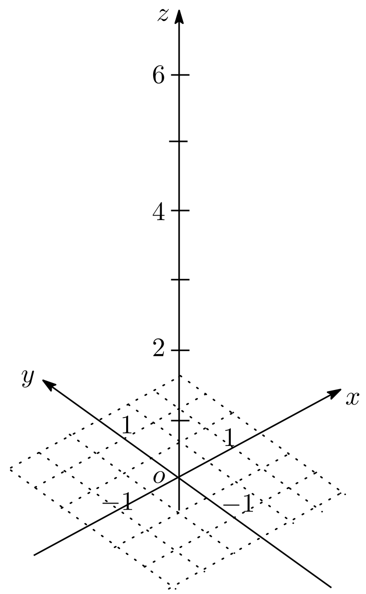
を得る．$\alpha=1$ の場合について，下図の座標軸を参考にして曲線の概略を解答用紙に手描きせよ．

(2) C 上の点を $P(=y(\theta))$ とする．P における接線の方程式を導出せよ．

(3) (2) で求めた接線と xy 平面の交点を Q とする．θ が 0 から 2π まで連続的に変化するとき，Q が描く曲線の長さ ℓ を求めよ．

(4) $\alpha=0$ のとき，曲面 S は xy 平面上の単位円盤に一致する．$\alpha=1$ としたとき，曲面 S の面積は，単位円盤の面積の何倍になるかを求めよ．ただし，次の不定積分の公式を使ってよい．

$$\int\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2}+\log_e\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right\}+c \qquad (c\ は積分定数)$$



(東京大 2009)　　(m20090703)

0.118　(1)　N 個の同じボールを n_1 個, n_2 個, n_3 個 $(n_1+n_2+n_3=N)$ の組に分ける組み合わせの総数が以下の式で表されることを示せ.

$$\frac{N!}{n_1!n_2!n_3!}$$

(2)　N 個の同じボールを n_1 個, n_2 個, $\cdots$, n_m 個 $\left(\sum_{i=1}^{m} n_i = N\right)$ の組に分ける組み合わせの総数 W はいくつになるか. 導出過程とともに示せ.

(3)　(2) で得られた W を用いて, $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log_e W$ を計算することを考える.

(a)　$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log_e N = 0$ となることを示せ.

(b)　$N\to\infty$ $\left(N = \sum_{i=1}^{m} n_i\right)$ としたとき, $\dfrac{n_i}{N}$ はそれぞれある値 p_i に収束する. すなわち $p_i = \displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{n_i}{N}$ $(i=1,2,\cdots m)$. このとき, $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log_e W$ を p_i のみで表せ.
ただし以下に示す $k!$ (k は正の整数) に関する不等式を用いてよい.

$$\sqrt{2\pi}k^{k+1/2}e^{-k+1/(12k+1)} < k! < \sqrt{2\pi}k^{k+1/2}e^{-k+1/12k}$$

(東京大 2010)　　(m20100705)

0.119　複素積分を利用して実数積分を求めることを考える．以下の問いに答えよ．

(1)　まず，ガウス積分と呼ばれる実数積分 $I(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ を考える．α は正の定数であり; x は実数である．y を実数とするとき，$\{I(\alpha)\}^2$ は以下の式で表される．

$$\begin{aligned}\{I(\alpha)\}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2}dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)}dxdy\end{aligned}$$

この式を極座標 (r,θ) 表示に変換せよ．

(2)　$I(\alpha) = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$ となることを導出過程とともに示せ.

(3) 図 4.1 に示すように x 軸を実軸，y 軸を虚軸とする複素平面上において半径 R の扇形で C_1，C_2，C_3 からなる経路 C を反時計回りに一周することを考える．i を虚数単位とし，z を複素数とするとき，以下の積分を求めよ．

$$\oint_C e^{iz^2} dz$$

(4) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_2} e^{iz^2} dz = 0$ となることを示せ．ただし，$0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$ において，$\sin\varphi \geq \dfrac{2\varphi}{\pi}$ を用いてよい．

(5) 上記のガウス積分と複素積分を用いて，実数積分 $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2 dx$ の値を求めよ．

(6) 実数積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ の値を求めよ．

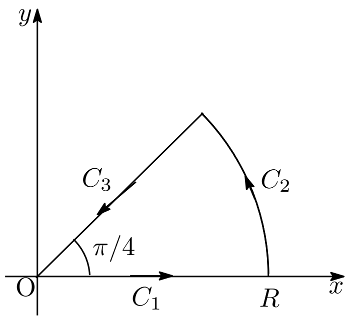


図 4.1

(東京大 2015)　　(m20150704)

0.120　2 つの正方行列 A, B を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}+1 & \frac{1}{\sqrt{2}}-1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}-1 & \frac{1}{\sqrt{2}}+1 & 1 \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

とし，行列 C を $C = BAB^{-1}$ とする．以下の問いに答えよ．なお，以下では任意のベクトル $\overrightarrow{x}$ に対し $\overrightarrow{x}^T$ はその転置を表すものとする． また，行列 I を単位行列とし， ある正方行列 X に対して $\exp(X)$ を

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{k!} = I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots$$

と定義する．

(1) 行列 A の固有値を複素数の範囲で求めよ．

(2) 行列 C の固有値を複素数の範囲で求めよ．

(3) あるスカラー変数 t に対して $\exp(At)$ を求めよ．

(4) 3 次元ベクトル $\overrightarrow{x}$ に対してスカラー関数 $f(\overrightarrow{x})$ を

$$f(\overrightarrow{x}) = \sum_{k=1}^{n}\left\{\exp\left(C\frac{2\pi k}{n}\right)\overrightarrow{a} - \overrightarrow{x}\right\}^T\left\{\exp\left(C\frac{2\pi k}{n}\right)\overrightarrow{a} - \overrightarrow{x}\right\}$$

とおく．ただし，n は $n > 1$ を満たす整数，$\overrightarrow{a}$ は以下のような 3 次元ベクトルである．

$$\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

関数 $f(\overrightarrow{x})$ を最小にする $\overrightarrow{x}$ は，ある単位ベクトル $\overrightarrow{b}$ を用いて以下のような形式で表せる．

$$\overrightarrow{x} = \boxed{\text{（ア）}} \left(\sum_{k=1}^{n} \boxed{\text{（イ）}} \right) \overrightarrow{b}$$

(a) (ア) と (イ) に入る数式を書け．必要であれば a_1，a_2，a_3，n，k を用いてよい．なお，行列を含まない形式で解答すること．

(b) $\overrightarrow{b}$ を求めよ．

(5) (4) で求めた $\overrightarrow{x}$ に対して，$n \to \infty$ としたときの $\overrightarrow{x}$ を a_1，a_2，a_3 を用いて表せ．

(東京大 2018)　　(m20180705)

0.121　i を虚数単位とし，z は複素数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 次の複素数を $x + iy$（x, y は実数）の形ですべて求めよ．ただし，x, y の表式に三角関数を含んではならない．

(a) $\left(1 - \sqrt{3}i\right)^3$　　(b) $i^{1/2}$　　(c) $\dfrac{(1-i)^6}{(1+i)^8}$

(2) 関数 $z = \tan\omega = \dfrac{\sin\omega}{\cos\omega}$ の逆関数を $\omega = \tan^{-1} z$ で表す．

(a) 次の式が成り立つことを示せ．　$\tan^{-1} z = \dfrac{i}{2} \log\left(\dfrac{i+z}{i-z}\right)$

ただし，$\log$ は複素対数関数である．

(b) $\tan^{-1} z$ の z に関する微分を求めよ．

(3) 複素平面において，曲線 C を $z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とする．

(a) 次の積分 $I(k)$ を求めよ．ここで，k は $0 < k < 1$ の定数とする．　$I(k) = \displaystyle\int_C \frac{1}{k^2 z^2 + 1} dz$

(b) $k = 2 - \sqrt{3}$ のとき，I の値を求めよ．

(4) 実積分 J の値を留数定理により求めることを考える．　$J = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx$

(a) J の積分範囲を $[-\infty, \infty]$ と変形して，被積分関数に e^{ix} を用いて J を表せ．

(b) 関数 $f(z) = 1/(z^2+1)^2$ とする．複素平面において，図 1 の半径 Γ（円弧 ADB）の半径 R が十分に大きい時，次のことが成り立つことを示せ．　$\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z) dz = 0$

(c) 図 1 の C に関する周回積分を考えることにより，J の値を求めよ．

このとき，複素平面の上半平面において，

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z) e^{iz} dz = 0$$

であることを用いてよい．

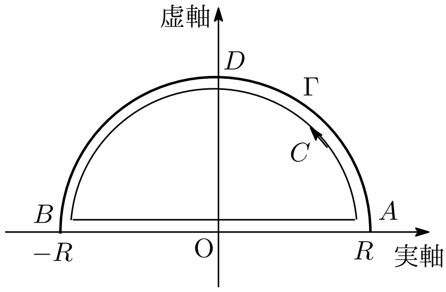


図 1

(東京大 2020)　　(m20200703)

0.122　数列 x_n，y_n，z_n $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を，次の漸化式で定義する．

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \qquad (n \geq 0)$$

ただし，

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，初期値 x_0，y_0，z_0 は実数で与えられているものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の全ての固有値と，それに対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) A^n を求めよ．

(3) $x_0 > 0,\ y_0 > 0,\ z_0 > 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n}$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{{x_n}^2 + {y_n}^2 + {z_n}^2} < C$ となる定数 C $(C > 0)$ が存在するための，初期値 x_0，y_0，z_0 に関する必要十分条件を示せ．

(東京大 2020)　　(m20200704)

0.123 $x^2 + y^2 = 1$ のもとで，$f(x,y) = x^2 + 4\sqrt{2}xy + 3y^2$ の最大値，最小値，およびそれらを与える x, y を求めよ．

(東京工業大 1996)　　(m19960801)

0.124 微分方程式

$$x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$$

の一般解を求めよ．

(東京工業大 1996)　　(m19960803)

0.125 $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$，　$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) $S_\theta = \cos\theta A + \sin\theta B$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする．θ を固定するとき，2 次形式 ${}^t v S_\theta v = c$ (c は 0 でない定数，${}^t v$ は v の転置) の表わす図形は何か？

(東京工業大 1997)　　(m19970804)

0.126 (x,y) 平面内の領域 $D = \{\, 0 \leqq y \leqq x \leqq 1 \,\}$ における重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{2x^2 - y^2}\,dx\,dy$ を計算せよ．

(東京工業大 1998)　　(m19980801)

0.127 (1) 次の積分をせよ．　$\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$　　$D : 0 \leq x \leq y \leq 1$

(2) 二つの曲面 : $z^2 = 4ay$, $x^2 + y^2 = ay$　に囲まれた立体の第 1 象限にある部分の体積を求めよ．

(東京工業大 2001)　　(m20010804)

0.128 $a > 0$ に対して積分　$\displaystyle\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$　の値を求めよ．

(東京工業大 2002)　　(m20020804)

0.129 $f(x,y)$ を $\boldsymbol{R}^2 - \{0\}$ 上の C^2- 級関数，　$x = r\cos\theta$，　$y = r\sin\theta$　を $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 - \{0\}$ の極座標とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) 次の等式を示せ．　$\displaystyle\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$

(2) $f(x,y)$ は $r=\sqrt{x^2+y^2}$ のみの関数で，θ にはよらないとする．さらに f は条件

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0\,,\quad \text{および}\quad r=1\text{ のとき } f=0,\ r=2\text{ のとき } f=1$$

を満たすとする．このような f を求めよ．

(東京工業大 2006)　　(m20060801)

0.130 関数 $\sqrt{1+x}\ \cos x$ の $x=0$ におけるテイラー展開の x^3 までの項を求めよ．

(東京工業大 2008)　　(m20080801)

0.131 次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D e^{y^3}dxdy\,,\quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq\ x\leqq\ 1,\ \sqrt{x}\leqq\ y\leqq\ 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xdxdy\,,\quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq\ x\right\}$

(東京工業大 2016)　　(m20160804)

0.132 (1) $\displaystyle\int\frac{1}{2+\sin x}dx$ を求めよ．

(2) $\sqrt{x^2+1}=t-x$ とおいて $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を求めよ．

(東京農工大 1996)　　(m19960902)

0.133 (1) $1+\sqrt{3}\,i$ を極表示せよ．

(2) 関数 $f(z)=(x^3-3xy^2-2y)+iv(x,y)$ で $f(z)$ を正則とする実数値関数 $v(x,y)$ を求めよ．

(東京農工大 1996)　　(m19960908)

0.134 累次積分 $\displaystyle\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}dy$ の値を，積分の順序を変更して求めなさい．

(東京農工大 2006)　　(m20060906)

0.135 関数 $f(x,y)=3x^2+2y^3-6xy-3$ について，次の問に答えなさい．

(1) $f(x,y)$ の極値を求めなさい．

(2) $f(x,y)=0$ の表す曲線 C 上の点 $(1,\sqrt{3})$ における C の接線の方程式を求めなさい．

(東京農工大 2008)　　(m20080902)

0.136 x の関数 y について，次の問いに答えなさい．

(1) 微分方程式 $y'+y=1$ を解きなさい．

(2) 微分方程式 $2y'-y=-y^3$ $\left(\text{初期条件 } x=0,\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を，$z=\dfrac{1}{y^2}$ と置いて，z の微分方程式に書き換えて解きなさい．

(東京農工大 2008)　　(m20080904)

0.137 領域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq\ 1,\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0\}$ における次の二重積分の値を求めなさい．

$$\iint_D\left(\sqrt{x^2+y^2}-x^3\right)dxdy$$

(東京農工大 2010)　　(m20100903)

0.138 領域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq\ y\leqq\dfrac{\pi}{4}\ ,\ 0\leqq\ x\leqq\ \sin y\right\}$ における次の重積分 A および B の値を求めなさい．

$$A=\iint_D\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\,dxdy\ ,\qquad B=\iint_D\sqrt{1-x^2}\,dxdy$$

(東京農工大 2011)　　(m20110903)

0.139 領域 $D=\left\{(x,y)|x^2+y^2\leqq\ x\right\}$ における次の二重積分 I の値を求めなさい．

$$I=\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

(東京農工大 2012)　　(m20120902)

0.140 2 重積分 $\displaystyle\iint_D xydxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq\ x\leqq\ 3,\ \frac{x^2}{9}\leqq\ y\leqq\sqrt{4-x}\right\}$ の値を求めなさい．

(東京農工大 2015)　　(m20150902)

0.141 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3y=\cos\sqrt{3}x$ の解 $y=y(x)$ が，$y(0)=1$，$\dfrac{dy}{dx}(0)=1$ を満たすとき，y を求めなさい．

(東京農工大 2015)　　(m20150904)

0.142 累次積分 $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3}dx\right)dy$ の値を求めなさい．

(東京農工大 2020)　　(m20200902)

0.143 関数 $f(x)\quad(-\pi<x<\pi)$ を

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\sqrt{1-\cos x}} & (-\pi<x<\pi,\ x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

により定義する．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ は連続関数であることを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}f'(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to 0-}f'(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ は $x=0$ で微分可能でないことを示せ．

(電気通信大 1999)　　(m19991001)

0.144 次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy,\quad D=\{(x,y):y\leqq\ 3x,\ x\leqq\ 3y,\ x+y\leqq\ 4\}$

(2) $\displaystyle\iint_D\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\quad D=\{(x,y):x^2+y^2\leqq\ 1\}$

(電気通信大 2000)　　(m20001003)

0.145 定義域を $0\leqq\ u\leqq\ 2\pi,\ 0\leqq\ v\leqq\ 1$ とするベクトル関数

$$\overrightarrow{r}(u,v)=\left(\sqrt{1+v^2}\cos u,\sqrt{1+v^2}\sin u,v\right)$$

が表す曲面を S とする．曲面 S 上の (u,v) に対応する点における法線単位ベクトルを求めよ．また，曲面 S の面積を求めよ．

(電気通信大 2001)　　(m20011005)

0.146 確率変数 X,Y,U が互いに独立で，各々正規分布 $N(\mu_1,{\sigma_1}^2),N(\mu_2,{\sigma_2}^2),N(\mu_3,{\sigma_3}^2)$ に従うとする．

(1) 任意の定数 a, b, c に対して，$W = aX + bY + cU$ の分布を求めよ．

(2) $V = \left(\dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 \bigg/ \left(\dfrac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2$ の分布を求めよ．

(3) $P\left(-3 \leq \dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1} \leq 3\right)$ を求めよ．

ただし，標準正規分布 $N(0,1)$ の分布関数を

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

とおくと，次表の値をとる．

z	0.0	1.0	2.0	3.0
$\Phi(z)$	0.5000	0.8413	0.9772	0.9987

(電気通信大 2001)　　(m20011011)

0.147 次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_3^8 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$

(電気通信大 2005)　　(m20051004)

0.148 $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}x}{x^2+1}\right)$ について，次の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ の値を求めよ．

(2) $f'(x)$ を計算せよ．　　(3) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(電気通信大 2006)　　(m20061001)

0.149 次の手順によって，任意の正数 X の平方根 $\sqrt{X}$ の近似値を求めることができる．

① $\sqrt{X}$ に近い数 x を選ぶ．

② x と $\dfrac{X}{x}$ の平均値 $x' = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{X}{x}\right)$ を計算する．

③ あらかじめ定めておいた小さい数 ℓ に対して，$|x - x'| < \ell$ となれば，x' を $\sqrt{X}$ の近似値とする．そうでない場合は，x' を新しい x として ② に戻り計算を繰り返す．

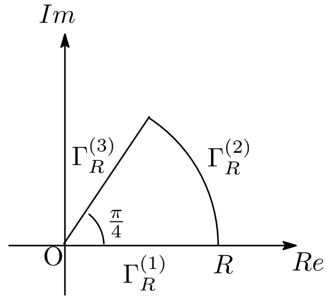
(1) この手順によって $\sqrt{X}$ の近似値が得られることを説明せよ．

(2) $X = 7$ として，その平方根 $\sqrt{X}$ の近似値を求めよ．ただし，$\ell = 0.001$, x の初期値を 3 とする．

(3) 区間 $[0, 7]$ において，関数 $f(x) = A\sqrt{x} + B$ を一次関数 $g(x) = ax + b$ で最小二乗近似する．この時，$g(x) = \dfrac{\sqrt{7}}{7}x$ になるとすると，元の関数 $f(x) = A\sqrt{x} + B$ の A, B の値はいくらであるか？小数点以下三桁まで求めよ．

(電気通信大 2006)　　(m20061006)

0.150 右図に示すように，複素平面上にある中心角 $\pi/4$，半径 $R(>0)$ の領域の周囲を反時計回りに 1 周する経路 Γ_R を考える．また，図にあるように経路 Γ_R の各部分を $\Gamma_R^{(1)}, \Gamma_R^{(2)}, \Gamma_R^{(3)}$, と名付ける．



以下の 3 つの問いに順に答えよ．

(1) 経路 Γ_R では式 ① が成立する．

$$\int_{\Gamma_R} e^{-z^2} dz = 0 \qquad ①$$

次式のように $G_R,\ P_R,\ C_R,\ S_R$ を定義するとき，式 ① をこれらを用いて表せ．

$$G_R = \int_0^R e^{-x^2} dx\ , \qquad P_R = \int_{\Gamma_R^{(2)}} e^{-z^2} dz\ ,$$

$$C_R = \int_0^R \cos r^2 dr\ , \qquad S_R = \int_0^R \sin r^2 dr\ ,$$

(2) P_R について次の不等式 ② が成立することを示すとともに，

$$|P_R| \leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2\theta} R d\theta \qquad ②$$

$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$ では $0 \leq 1 - \dfrac{4}{\pi}\theta \leq \cos 2\theta$ となることを使って，$\displaystyle\lim_{R \to \infty} P_R = 0$ を示せ．

(3) 小問 (1), (2) で求めた結果を使って，定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^2 dx$ と $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2 dx$ を計算せよ．ただし、$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明なしに用いてよい．

(電気通信大 2006)　　(m20061008)

0.151 微分の定義に基づいて，次の各関数を x について微分せよ．

(1) $\cos x$　　(2) $\sqrt[3]{x}$

(電気通信大 2006)　　(m20061009)

0.152 $f(x) = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{10}$ のとき，次の値をそれぞれ求めよ．但し，$f'(x)$ は $f(x)$ の x に関する 1 階の微分を表す．

(1) $f'(0)$　　(2) $\dfrac{f'(1)}{f(1)}$　　(3) $f'(1)f'(-1)$

(電気通信大 2006)　　(m20061010)

0.153 複素平面の円 $|z+i| = \sqrt{3}$ を正の向きに 1 周する積分路を C とするとき，次の複素積分の値を求めよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2+1} dz$　　(2) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^4-1} dz$

(電気通信大 2007)　　(m20071005)

0.154 C^2 級の関数 $f(x,y,z)$ が $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ だけの関数 $g(r)$ を用いて $f(x,y,z) = g(r)$ と表されるとする．$\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) Δf を $g'(r),\ g''(r)$ を用いて表せ．

(2) $\Delta f = 0,\ g(1) = 1,\ g'(1) = 2$ のとき，$g(r)$ を求めよ．

(電気通信大 2008)　　(m20081004)

0.155 複素関数

$$f(z) = \frac{z^3+3}{z-2i}\ , \quad g(z) = \sin\left(f(z)\right)$$

について，以下の問いに答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする．

(1) $f(1)$, $f'(1)$, $g(0)$, $g'(0)$ のそれぞれの値の実部と虚部を求めよ．

(2) 次の積分値を求めよ．

$$\int_C \frac{f(z)}{z^2-1}dz$$

ただし，C は複素平面の原点を中心とし半径 $\dfrac{3}{2}$ の円を正の向きに 1 周する積分路である．

(電気通信大 2009)　　(m20091005)

0.156　関数 $f(r)$ から決まる 2 変数関数

$$u(x,y)=f(r)\ ,\qquad r=\sqrt{x^2+y^2}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ を $f'(r)$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)+\dfrac{1}{r}f'(r)$ が成り立つことを示せ．

(電気通信大 2010)　　(m20101003)

0.157　次の重積分，3 重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D (x+y)^2 e^{2(x-y)}dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\ :\ |x+y|\leqq\ 1,\ |x-y|\leqq\ 1\}$

ただし，e は自然対数の底とする．

(2) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\leqq\ 2x,\ y\geqq\ 0\right\}$

(3) $\displaystyle\iiint_V \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz\ ,\quad V=\left\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2\leqq\ 1\right\}$

(電気通信大 2012)　　(m20121004)

0.158　次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D (x+2y)\sin^2(x-2y)dxdy\quad D=\left\{(x,y)\ :\ 0\leq x+2y\leq\pi\ ,\ 0\leq x-2y\leq\frac{\pi}{4}\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \log\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\quad D=\left\{(x,y)\ :\ 1\leq x^2+y^2\leq 4\ ,\ 0\leq y\leq x\right\}$

(電気通信大 2013)　　(m20131004)

0.159　複素関数 $f(z)\ \dfrac{z^2}{z^4+z^2+1}$ について以下の問いに答えよ．

(1) $z^6=1$ を満たす複素数 z をすべて求めよ．

(2) 上半平面 $\mathbb{H}=\{x+iy\ :\ x,y\in\mathbb{R},\ y>0\}$ 上にある $f(z)$ の各特異点 α に対して，その留数 $\mathrm{Res}(\alpha)$ を求めよ．ただし，$i=\sqrt{-1}$ とする．

(3) 定積分 $I=\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ の値を求めよ．

(電気通信大 2013)　　(m20131005)

0.160　複素関数 $f(z)=\dfrac{8}{2z^4+1-\sqrt{3}i}$ に対して，　以下の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ の特異点をすべて求めよ．

(2) $f(z)$ の各特異点 α に対して，その留数 $\mathrm{Res}(\alpha)$ を求めよ．

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_{|z-1|=\frac{2}{3}} f(z)dz$ を求めよ．ただし，積分路は正の向きに一周するものとする．

(電気通信大 2014)　　(m20141005)

0.161 次の重積分，3 重積分の値を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $\displaystyle\iint_D e^{(x+y)^2}dxdy\,,\qquad D=\{(x,y):0\leqq\ x-y\leqq\ x+y\leqq\ 1\}$

(2) $\displaystyle\iiint_V xy\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz\,,\qquad v=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leqq\ 1,\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0\}$

(電気通信大 2015)　　(m20151004)

0.162 以下の問いの答えよ．ただし，$i=\sqrt{-1}$ とする．

(1) $z=e^{i\theta}$ とおくとき，$\sin\theta$ を z の式で表せ.

(2) 複素関数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4iz-1}$ の極をすべて求め，各極における留数を計算せよ．

(3) 定積分 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\sin\theta}$ の値を求めよ.

(電気通信大 2015)　　(m20151005)

0.163 複素関数 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ に対して，以下の各問いに答えよ．ただし，$i=\sqrt{-1}$ で， e は自然対数の底とする．

(1) $f(z)$ のすべての極を求め，各極における留数を求めよ．

(2) $z=Re^{i\theta}$ $(R>1,\ 0\leqq\theta\leqq\pi)$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$|f(z)|\leqq\frac{1}{R^2-1}$$

(3) 広義積分 $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx$ を求めよ.

(電気通信大 2016)　　(m20161005)

0.164 C^1 級関数 $f(r)$ に対して，次の合成関数

$$u(x,y)=f(\sqrt{x^2+y^2})\qquad(r=\sqrt{x^2+y^2})$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) xyz 空間内の曲面 $S:z=u(x,y)$ を考える． このとき，S 上の点 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ f(1))$ における S の接平面と z 軸との交点の z 座標 z_0 を $f(1),\ f'(1)$ を用いて表せ．ただし，α は定数とする．

(2) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ が r の関数として表されることを示せ.

(3) $f(r)=r^2e^{-r^2}$ のとき，次の重積分 I の値を求めよ．

$$I=\iint_D u(x,y)\,dxdy\,,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq 1\right\}$$

(電気通信大 2019)　　(m20191003)

0.165 関数

$$f(x,y)=\frac{\pi}{4}-\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{x^2+y^2}$$

に対して，xyz 空間内の曲面 S ： $z=f(x,y)$ を考える．以下の問いに答えよ．
ただし，$y=\mathrm{Tan}^{-1}x$ は $x=\tan y$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を表す

(1) $(x,y)\neq(0,0)$ に対して，偏導関数 $f_x(x,y),\ f_y(x,y)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 曲面 S 上の点 $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ f\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)\right)$ における S の接平面の方程式を求めよ.

(3) 曲面 S と平面 $z=0$ で囲まれる立体の体積 V を求めよ.

(電気通信大 2020) (m20201003)

0.166 次の重積分の値をそれぞれ計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D xy\, dxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y): x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ \sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \sin(x^2)\, dxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y): 0 \leqq y \leqq x \leqq \sqrt{\pi}\right\}$

(電気通信大 2020) (m20201004)

0.167 (1) $z^4+1=0$ となる複素数 z を求めよ.

(2) $x=\sqrt{\tan\theta}\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して，導関数 $\dfrac{dx}{d\theta}$ を x の式で表せ.

(3) 広義積分 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta$ を求めよ.

(電気通信大 2020) (m20201005)

0.168 次の重積分の値を求めよ.

(1) $I_1=\displaystyle\iint_{D_1} e^y\, dxdy,\qquad D_1=\Big\{(x,y)\ :\ 0 \leqq x+y \leqq 1,\ 0 \leqq x-y \leqq 1\Big\}$

(2) $I_2=\displaystyle\iint_{D_2} x\sqrt{x}\, dxdy,\qquad D_2=\Big\{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \leqq x\Big\}$

(3) $I_3=\displaystyle\iiint_V y\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}\, dxdydz,\quad V=\Big\{(x,y,z)\ :\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leqq 1\Big\}$

(電気通信大 2022) (m20221004)

0.169 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\left(xy^3+3x^3y\right)\dfrac{dy}{dx}-\left(y^4+4x^2y^2+x^4\right)=0$

(2) $xy\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{4-y^2}$

(横浜国立大 2012) (m20121102)

0.170 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $x\dfrac{dy}{dx}-y=\sqrt{x^2+y^2}$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{2}{x}\dfrac{dy}{dx}=0$

(横浜国立大 2013) (m20131102)

0.171 以下の行列 A に対して，次の問いに答えよ．但し，$i=\sqrt{-1}$ とする.

$$A=\begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}i \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A の逆行列を求めよ.

(横浜国立大 2015)　　(m20151101)

0.172 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = y + e^x \sin x$　　　(2) $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\dfrac{dy}{dx} = 0$

(横浜国立大 2016)　　(m20161102)

0.173 次の行列 A および B に関して以下の問いに答えよ.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix} \qquad B = \frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & a & -1 & -a \end{bmatrix}$$

ただし, a は実数の定数であり, $A^{-1} = A^T$ が成り立つものとする. なお, 任意の実数行列 X の逆行列を X^{-1} と表し, 転置行列を X^T と表す.

(1) a を求めよ.

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(3) BB^T を求めよ.

(4) B の逆行列 B^{-1} を求めよ.

(横浜国立大 2021)　　(m20211101)

0.174 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)}{x^4}$$

(千葉大 1994)　　(m19941201)

0.175 (1) 次の極限値を求めよ. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

(2) 次の関数の概形を描け. $y = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$

(千葉大 1995)　　(m19951201)

0.176 次の不定積分を求めよ.

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx$ (但し, $A \neq 0$)

(千葉大 1995)　　(m19951202)

0.177 ３次元空間中に球 $x^2+y^2+z^2 = 4a^2$ と円柱 $x^2+y^2 = 2ax$ がある. 球が円柱によって切り取られる立体の体積 V を以下の設問に答えることによって求めなさい.

(1) V が次のような重積分になることを図を書いて示しなさい.

$$V = 2\iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy\ ,\ D = \{(x,y)\,|\,(x-a)^2 + y^2 \leq a^2\}$$

(2) x-y 座標系の原点を中心とする極座標 (r,θ) を用いると, 領域 D が次のように表されることを示しなさい.

$$D = \left\{(r,\theta)\ \middle|\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\ ,\ 0 \leq r \leq 2a\cos\theta\right\}$$

(3) 設問 (1) の重積分を極座標に変換して体積 V を求めなさい.

(千葉大 2001)　　(m20011201)

0.178 x を変数とする関数を $f(x)$ とする．複素単位を $i=\sqrt{-1}$ として，

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}dx$$

によって決まる ω の関数 $F(\omega)$ を関数 $f(x)$ のフーリエ変換という． $F(\omega)$ から逆に $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x}d\omega$$

によって求めることができる．この逆を逆フーリエ変換という．

関数 $F(\omega)$ を ω で微分することを考える．

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}dx$$

より微分と積分を入れ換えると，

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\omega}\big(f(x)\, e^{-i\omega x}\big)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\big(-ixf(x)\, e^{-i\omega x}\big)dx$$

となり，関数 $(-ix)f(x)$ のフーリエ変換が $\dfrac{d}{d\omega}F(\omega)$ であることがわかる．このことを利用して以下の設問に答えなさい．ただし，ここで扱う全ての関数は微分と積分の順序を交換できる性質を満たしていることを仮定する．

(1) ω に関する $F(\omega)$ の決める関数 $\dfrac{d^2}{d\omega^2}F(\omega)$ が関数 $(-x^2)f(x)$ のフーリエ変換であることを示しなさい．

(2) 逆フーリエ変換が $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ になる関数を $F(\omega)$ によって表しなさい．

(3) 微分方程式

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}-x^2f(x)=-(2n+1)f(x)\ ,\ \lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0 \qquad (*)$$

の解 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が満たす微分方程式を導きなさい．ただし， n は零以上の整数である．

(4) 設問 (3) の結果から，式 $(*)$ の微分方程式の解のフーリエ変換に関する性質を５０字程度で述べなさい．

(千葉大 2001)　　(m20011204)

0.179 x を変数とする関数を $f(x)$ とする．複素単位を $i=\sqrt{-1}$ として，

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

によって決まる ω の関数 $F(\omega)$ を関数 $f(x)$ のフーリェ変換という．$F(\omega)$ から逆に $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

によって求めることができる．この変換を逆フーリェ変換という．

関数 $F(\omega)$ を ω で微分することを考える．

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

より微分と積分とを入れ換えると，

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\omega}\Big(f(x)e^{-i\omega x}\Big)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\Big(-ixf(x)e^{-i\omega x}\Big)dx$$

となり，関数 $(-ix)f(x)$ のフーリェ変換が $\dfrac{d}{d\omega}F(\omega)$ であることがわかる．このことを利用して以下の設問に答えなさい．ただし，ここで扱う全ての関数は微分と積分との順序を交換できる性質を満たしていることを仮定する．

(1) ω に関する $F(\omega)$ の決める関数 $\dfrac{d^2}{d\omega^2}F(\omega)$ が関数 $(-x^2)f(x)$ のフーリエ変換であることを示しなさい.

(2) 逆フーリエ変換が $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ になる関数を $F(\omega)$ によって表しなさい.

(3) 微分方程式

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} - x^2 f(x) = -(2n+1)f(x)\ , \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \qquad (*)$$

の解 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が満たす微分方程式を導きなさい．ただし，n は零以上の整数である.

(4) 設問 (3) の結果から，式 $(*)$ の微分方程式の解のフーリエ変換に関する性質を 50 字程度で述べなさい.

(千葉大 2002)　　(m20021205)

0.180 次の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(1+x)^{1/x}$

(千葉大 2004)　　(m20041201)

0.181 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $D=\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\le a^2\}$ として, 次の 2 重積分の値を求めなさい.

$$I=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

(千葉大 2005)　　(m20051203)

0.182 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int(x^2+3)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

(千葉大 2005)　　(m20051206)

0.183 次の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

(千葉大 2008)　　(m20081201)

0.184 三次元空間中に，球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ と円柱面 $x^2+y^2=2ax$ がある．球面に囲まれる領域が円柱により切り取られる立体の上半分 $(z\ge 0)$ の体積 V を求めたい.

(1) V が次のような重積分になることを図で示しなさい.

$$V=\iint_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy\,,\quad D=\{(x,y)\mid (x-a)^2+y^2\le a^2\}$$

(2) 極座標を用いると，領域 D は次のように表されることを示しなさい.

$$D=\left\{(r,\theta)\mid -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\,,\ 0\le r\le 2a\cos\theta\right\}$$

(3) 極座標に変換して体積 V を求めなさい.

(千葉大 2008)　　(m20081203)

0.185 次の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x\sin x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2-3x-1}\right)$

(千葉大 2011)　　(m20111201)

0.186 下記の重積分について以下の問いに答えなさい.

$$I = \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy \qquad D = \left\{(x,y)\ \middle|\ \left(x^2+y^2\right)^2 \leq y^2-x^2\,,\ y \geq 0\right\}$$

(1) 極座標に変換して D を図示しなさい.

(2) I で示される積分領域の立体の外形を図示しなさい.

(3) I を極座標で書きなさい.

(4) I を求めなさい.

(千葉大 2012)　　(m20121204)

0.187 次の数列，または，関数の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$　　ここで，$a_n = 2 + \dfrac{2}{a_{n-1}}$ $(n=1,2,\cdots)$, $a_0 = 2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x+1\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

(千葉大 2013)　　(m20131201)

0.188 三次元空間中に，球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ と円柱面 $x^2+y^2=ax$ がある．ただし，$a>0$．球面に囲まれる領域が円柱により切り取られる立体の上半分 $z \geq 0$ の体積 V を求めたい.

(1) V が次のような重積分になることを図で示しなさい.

$$v = \iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy\ , \qquad D = \left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leq ax\right\}$$

(2) 極座標を用いると，領域 D が次のように表されることを示しなさい.

$$D = \left\{(r,\theta)\ \middle|\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\,,\ 0 \leq r \leq a\cos\theta\right\}$$

(3) 極座標に変換して体積 V を求めなさい.

(千葉大 2013)　　(m20131203)

0.189 次の関数の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x)}{x}$

(千葉大 2014)　　(m20141201)

0.190 三次元空間の $O-XYZ$ 座標系で与えられた，放物面 $z=1+\sqrt{2}-x^2-y^2$，および，二葉双曲面 $x^2+y^2-z^2=-1$ について，以下の問に答えなさい.

(1) 放物面と二葉双曲面との交線の式を求めなさい.

(2) 放物面が二葉双曲面に挟まれる部分の概形を図示しなさい.

(3) 放物面 $z=1+\sqrt{2}-x^2-y^2$ と二葉双曲面の上半分 $z=\sqrt{1+x^2+y^2}$ とで囲まれる部分の体積 V を求めなさい.

(千葉大 2015)　　(m20151203)

0.191 (1) $x=0$ 近傍で次の近次式が成り立つように，定数 A_i $(i=0.1,2,3,4)$ を求めなさい.

$$\cos(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4$$

(2) 次の関数をテイラー展開しなさい.

$$\log(x+1)$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{x}$ の極限値を求めなさい.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{1+x^2}}$ の極限値を求めなさい.

(千葉大 2016)　　(m20161201)

0.192 次の微分方程式を解きなさい.

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+2y=\sin t$　　初期条件：$t=0,\ y=1,\ \dfrac{dy}{dt}=1+\sqrt{2}$

(2) $\dfrac{dy}{dx}+2xy=4xe^{x^2}$ の一般解を求めなさい.

(千葉大 2016)　　(m20161204)

0.193 次の問に答えなさい. ただし, $\log x$ の底は, 自然対数の底 (e) とする.

(1) (a) 関数 $\log(1+x)$ と $x\cos x$ を, それぞれ 3 次の項までマクローリン展開しなさい.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x\cos x}\right)$ を求めなさい.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n+3^n}$ を求めなさい.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\log x+\sqrt{\log x}}-\sqrt{\log x-\sqrt{\log x}}\right)$ を求めなさい.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}(1-\tanh x)^{\frac{1}{\sin x}}$ を求めなさい.

(千葉大 2017)　　(m20171201)

0.194 ω は 1 の立方根で $\omega\neq 1$ であるとする.

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega & \omega^2 & \omega^3 & 1 \\ \omega^2 & \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^3 & 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix}=\pm 3\sqrt{3}i \quad \text{を証明せよ.}$$

(筑波大 1998)　　(m19981303)

0.195 $f(x,y)=r^n$ とするとき, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を次の手順に従って求めよ.

ただし, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, n は整数とする.

変数の組 (x,y) を $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ により, (r,θ) の組に変数変換することを考える.

(1) $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=-\dfrac{\sin\theta}{r}$ および $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\cos\theta$ であることを示せ.

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial\theta}=0$ であることに注意し,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{\sin^2\theta}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r}$$

であることを示せ.

同様に, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ についても求め, 整理することにより,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial f}{\partial r}\Big)$$

となる.

(3) $f(x,y)=r^n$ のとき, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を具体的に計算せよ.

(筑波大 2000)　　(m20001303)

0.196 $\sin z = \dfrac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$ であることを利用して，その逆関数である $\arcsin z$ が

$$\arcsin z = -i\log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$

と表されることを示せ.

(筑波大 2000）　(m20001311)

0.197 x が限りなく正の無限大に近づくとき，次の式の値を小さい順に並べよ.

$$\frac{x}{\log x}\,,\ \sqrt{x}\,,\ \frac{1}{\sin(1/x)}$$

(筑波大 2003)　(m20031301)

0.198 次の定積分を行え.　$\displaystyle\int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

(筑波大 2003)　(m20031306)

0.199 以下の設問 (1),(2) に答えなさい.

(1) $|x| < 1$ のとき，$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x$ を証明しなさい．また，これを用いて $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ を計算しなさい.

(2) 次の不等式が成立することを証明しなさい．ただし，$n > 2$ とする.

$$\frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} < \frac{\pi}{6}$$

(筑波大 2004)　(m20041307)

0.200 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - 2\sqrt{x+y} + \sqrt{2}$ とすると, この関数は $0 < x, y < \infty$ において下に凸である. $f(x,y)$ が最小値をとるときの x, y の値, および関数の最小値を求めよ.

（筑波大 2004）　(m20041313)

0.201 (1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$　を導け.

(2) $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-ax^2}dx$　$(a > 0,\ n$ は自然数)　を求めよ.

(筑波大 2004)　(m20041314)

0.202 $g(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ なる関数を考える. ただし, $\ln x$ は x の自然対数を表す.

(1) $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ 及び $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ を求めよ. また, 点 $(2,1)$ における $g(x,y)$ の勾配の大きさを求めよ.

(2) $\displaystyle\iint_D g(x,y)dxdy$ を求めよ. ただし, $D : x^2+y^2 \leq 1$ とする.

(筑波大 2004)　(m20041315)

0.203 任意の実ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の組に実数（スカラー）値を対応させる演算 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が以下を満たすものとする.

(1) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$

(2) 任意の実数 λ に対して $(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$

(3) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})$

(4) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \geqq 0$ であり, 等号は $\boldsymbol{x} = 0$ の場合に限る.

さらに $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$ と定義するとき, 以下の問に答えよ.

(1) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|^2 - |\boldsymbol{y}|^2$ を示せ.

(2) この演算について $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqq |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|$ が成り立つ. このことを証明済みとして, $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \leqq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$ を示せ.

（筑波大 2004） (m20041318)

0.204 $A(\lambda)$ は実数のパラメータ λ を含む次の正方行列である.

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \lambda \end{pmatrix}$$

また,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする. x, y, z もすべて実数である.

(1) x, y, z を未知変数とする連立一次方程式

$$A(\lambda)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

が自明でない解を持つための, パラメータ λ が満たすべき条件を求めよ. また, そのときの解を求めよ.

(2) 連立一次方程式

$$A(\lambda)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考える. パラメータ λ に応じた場合分けをして, 解が存在するか否かを調べよ. 存在する場合には, 一意性に注意して, その解を求めよ.

(筑波大 2004) (m20041319)

0.205 曲線 $y = 2x^2\sqrt{x} - 5x^2 \quad (x \geq 0)$ について, 次の問いに答えよ.

(1) y が最小値をとる x の値と, その最小値は何か?

(2) y の変曲点における x の値は何か?

(3) y が上に凸である x の範囲と, 下に凸である x の範囲を示せ.

(4) y のグラフの概形を描き, その上に, x 軸と交わる点, 最小値をとる点, 変曲点の座標をそれぞれ示せ.

(5) このグラフの x 軸の下にある部分と x 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ.

(筑波大 2005) (m20051302)

0.206 2 変数関数 $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ の 2 階偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を求めよ.

(筑波大 2005) (m20051310)

0.207 クーロンポテンシャル $\phi = \dfrac{1}{r}$ は原点以外の領域においてラプラスの方程式 $\Delta\phi = 0$ を満たすことを示しなさい．ただし，$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ である．

(筑波大 2006) (m20061303)

0.208 関数 $f(x) = e^{\frac{x}{2}} \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ について，以下の設問に答えよ．

(1) 第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ． (2) 関数 $f(x)$ の原始関数を 1 つ答えよ．

(3) $x \leq 0$ において，曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた全領域の面積が有限か否か，理由をつけて答えよ．

(筑波大 2006) (m20061314)

0.209 次の極限を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^2+4x+3}{x^2-1}$ (2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left\{ \frac{1}{2} \log(x+1) + \log(\sqrt{3x+2} - \sqrt{3x}) \right\}$

(筑波大 2006) (m20061322)

0.210 (1) 2 つのベクトル $\vec{a} = (\sqrt{2}, 1, 1)$, $\vec{b} = (0, -1, -1)$ のなす角を求めなさい．

(2) 2 つのベクトル $\vec{x} = (1, 0, 3)$, $\vec{y} = (2, -1, 1)$ の両方に直交する単位ベクトルを求めなさい．解答する単位ベクトルは一つでよい．

(3) 3 点 $A(2, 1, -3)$, $B(3, 1, -1)$, $C(1, 4, 4)$ を通る平面の方程式を求めなさい．

(筑波大 2006) (m20061324)

0.211 a, b を $a^2 + b^2 = 1$ をみたす実数の定数とし，D を $D = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ で定めるとき，

積分 $\displaystyle\iint_D \frac{(ax+by)^2}{\sqrt{1-(ax+by)^2}} dxdy$ を求めよ．

必要なら次の変数変換を用いてよい． $\left\{ \begin{array}{l} u = \ \ ax + by \\ v = -bx + ay \end{array} \right.$

(筑波大 2007) (m20071309)

0.212 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x} + x \right)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x) = \sin^{-1} \sqrt{1-x^2}$ の導関数を求めよ．

(筑波大 2007) (m20071310)

0.213 すべての実数 x に対し $\sqrt{3} \sin x - \cos x = A \sin(x - \alpha)$ が成り立つとき，A, α を求めよ．ただし $A > 0$, $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$とする ．

(筑波大 2007) (m20071326)

0.214 (1) $t = \sqrt{y^2 - x^2}$ と置換することにより，次の積分を計算せよ．ただし，$x > 0$ とする．

$$\int_x^\infty \frac{y}{1+y^2} \frac{dy}{\sqrt{y^2-x^2}}$$

(2) 次の累次積分を計算せよ． $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^\infty \frac{y}{1+y^2} \frac{dy}{\sqrt{y^2-x^2}}$

(筑波大 2008) (m20081316)

0.215 積分 $\displaystyle\iiint_D dxdydz \ \ln \left(\alpha \sqrt{x^2+4y^2+9z^2} \right)$ を求めよ．

ただし，α は正の定数であり，$\ln x$ は x の自然対数を表している．

さらに積分領域 D は，$D = \{(x, y, z) \mid 1 < x^2 + 4y^2 + 9z^2 < 4\}$ とする．

(筑波大 2008) (m20081321)

0.216 行列 A について以下の設問に答えよ.

$$A \equiv (\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3) \equiv \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A を構成する 3 個の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ は, 1 次独立か 1 次従属か, 理由を示して答えよ.

(2) A が正則かどうかを調べ, 正則な場合は逆行列を求めよ.

(3) A の固有値と固有ベクトル（大きさを 1 に正規化したもの）をすべて求めよ.

(4) A を対角化する行列を与え, それを用いて対角化されることを示せ.

(筑波大 2008)　　(m20081323)

0.217 以下の (1)〜(3) において, 「前提」が正しい場合に「結論」が正しい例, 正しくない例をそれぞれ1つずつ, a, b, c 等の文字の具体的な数値例で示せ. 下の例も参照のこと.

- 正しい例／正しくない例が存在しない場合には解答欄に「なし」と記すこと.
- 考える数値は実数の範囲とし, $1 \div 0$, $\sqrt{-1}$ のように実数として意味を持たない例は用いないこと.

	前提	結論	正しい例	正しくない例
例 1	$a > 0$	$a = ab$	$a = b = 1$	$a = b = 2$
例 2	$x^2 - 3x + 2 = 0$	$x > 0$	$x = 1$	なし

(1) 前提：$a > b,\ c > d$　　結論：$ac > bd$

(2) 前提：$a^2 + b^2 = 1$　　結論：$2ab \leqq 1$

(3) 前提：$a > b > 1$　　結論：$a^b > b^a$

(筑波大 2008)　　(m20081333)

0.218 1 直線上にない 3 点 O, A, B をとり, $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$ とする. また, ベクトルの内積は $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, 絶対値は $|\overrightarrow{a}|\ (= \sqrt{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})})$ のように表し, $a = |\overrightarrow{a}|,\ b = |\overrightarrow{b}|$ とする.

O, A, B を含む平面上の任意の点 P は, 適当な実数 p, q により：

$$\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{a} + q\overrightarrow{b} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

のように表すことができる. これについて, 以下の問いに答えよ.

(1) 点 P が線分 AB（両端 A, B を含む）の上にあるとき, $(*)$ の p, q はどのような条件を満たすか.

(2) 点 P が線分 AB の中点のとき, $\overrightarrow{OP}$ を $(*)$ の形で表せ.

(3) $\angle AOB$ の 2 等分線と線分 AB の交点を P とするとき, $\overrightarrow{OP}$ を $(*)$ の形で表せ.

(4) A から直線 OB に下ろした垂線の足を P とするとき, $\overrightarrow{OP}$ を $(*)$ の形で表せ.

(5) $\triangle OAB$ が直角三角形のとき, $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ が取りうる値をすべて示せ.

(筑波大 2008)　　(m20081336)

0.219 (1) 複素変数 z のべき関数 $f(z) = z^i\ (i = \sqrt{-1})$ において, $f(i)$ の値をすべて求めよ.

(2) xyz 空間における曲面 $z = (x+y)^2 e^{x-y}$ 上の点 $(1, 0, e)$ での接平面の方程式を求めよ.

(筑波大 2009)　　(m20091305)

0.220 独立変数が 1 個 (t)，従属変数が 2 個 $(x = x(t),\ y = y(t))$ の連立微分方程式:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + \sqrt{2}y \\ \dfrac{dy}{dt} = \sqrt{2}x + y \end{cases}$$

を考える．初期条件を $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ としたときの解を次の設問に従って求めよ.

(1) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ とおいて，与えられた微分方程式を行列 A を使って，$\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$ の形に書き換える．A を具体的な行列の形で表せ.

(2) A の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．固有ベクトルは正規化（規格化）し，それを $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ とする.

(3) $\boldsymbol{x}(t) = c_1(t)\boldsymbol{p}_1 + c_2(t)\boldsymbol{p}_2$ とおくことにする．$c_1(0),\ c_2(0)$ は x_0 , y_0 を使ってどう書けるか.

(4) $c_1(t),\ c_2(t)$ が満たす（t に関する）微分方程式を求めよ.

(5) 前問 (4) で求めた微分方程式を解いて，$c_1(t),\ c_2(t)$ を求めよ．初期条件 $c_1(0),\ c_2(0)$ は，設問 (3) で得ていることに注意せよ.

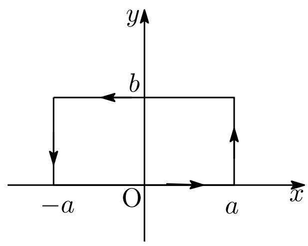
(6) $x(t),\ y(t)$ を x_0 , y_0 を使って表せ.

(筑波大 2009)　　(m20091310)

0.221 (1) 次の式が成り立つことを示せ.　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

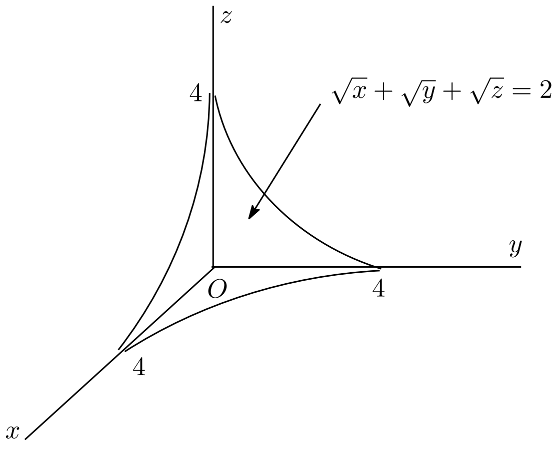
(2) 複素関数 $f(z) = e^{-z^2}$ を下図の四角形に沿って積分することにより, 次の定積分の値を求めよ. ただし, $a > 0,\ b > 0,\ i = \sqrt{-1}$ である.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ibx-x^2}\,dx$$



(筑波大 2010)　　(m20101312)

0.222 曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=2$ の接平面が x 軸 y 軸, z 軸と交わる点を A, B, C とし，原点 O から点 A, B, C への距離を $OA,\ OB,\ OC$ とする．このとき，$OA + OB + OC$ の値は接平面によらず一定であることを証明しなさい.



(筑波大 2011)　　(m20111308)

0.223 次の二重積分を求めなさい.

$$\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \log_e(x^2+y^2)\,dxdy\ , \quad D=\{(x,y)\mid 1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 5,\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0\}$$

(筑波大 2011)　　(m20111309)

0.224 正弦関数 $\sin x$ の逆関数 $\mathrm{Sin}^{-1}x$ を用いた関数の導関数について以下の問いに答えよ．ただし，$\mathrm{Sin}^{-1}x$ は値域を閉区間 $[-\pi/2,\pi/2]$ に制限した主値を表す関数である.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\mathrm{Sin}^{-1}x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ であることを示せ.

(2) 定義域 $-1<x<0$ および $0<x<1$ において $\dfrac{d}{dx}\left(\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{1-x^2}\right)$ を求めよ.

(筑波大 2011)　　(m20111316)

0.225 次数が 2 以下の実係数多項式全体で構成される実線形空間 $P_2(R)$ において

内積　$(f,g)=\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$　　$(f,g\in P_2(R))$

ノルム　$||f||=\sqrt{(f,f)}$

を定義する．以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)=1$ のとき，ノルム $||f||$ を求めよ.

(2) $f(x)=1,\ g(x)=x$ のとき，内積 (f,g) を求めよ.

(3) 基底 $\{1,x,x^2\}$ からグラム・シュミットの直交化法により正規直交基底を求めよ.

(筑波大 2011)　　(m20111318)

0.226 2 次曲線 $13x^2-6\sqrt{3}xy+7y^2-4x-4\sqrt{3}y-12=0$ を ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}+2\,{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}-12=0$ と表すことにする.
ここで，$A=\begin{pmatrix} 13 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$, ${}^t\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-2 & -2\sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ${}^t\boldsymbol{x}=(x \quad y)$
である．この 2 次曲線について以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値 $a_1,\ a_2\ (a_1<a_2)$ とその各々に対応した正規化された固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ を並べて作った 2 次の正方行列を $P=(\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2)$ とする.
${}^tPP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を示せ.

(3) 前問で作った P を使って座標変換 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を行うと，この 2 次曲線は
${}^t\boldsymbol{x}'\,{}^tPAP\boldsymbol{x}'+2\,{}^t\boldsymbol{b}P\boldsymbol{x}'-12=0$ と書ける．この式を $x',\ y'$ を使って表せ.

(4) さらに，座標の平行移動 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{c}$ を行って，この 2 次曲線を標準形で表せ.
ここで，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ である．$c_1,\ c_2$ の値も答えよ.

(5) XY 平面上にこの 2 次曲線の概形を描け．さらに，その図中に $x'y'$ 座標軸および xy 座標軸も描き加えよ.

(筑波大 2012)　　(m20121312)

0.227 次の式が成立する自然数 n の値を求めなさい.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=2$$

(筑波大 2012)　　(m20121321)

0.228 領域 D を

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 < x+y+z < 1,\ x,y,z > 0\}$$

と定める．このとき広義重積分

$$I = \iiint_D \frac{\log(x+y+z)}{\sqrt{xyz}}\,dxdydz$$

を以下の手順で求めよ．

(1) 変数変換

$$u = x+y+z$$
$$uv = y+z$$
$$uvw = z$$

により，D が領域 $E = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 < u,v,w < 1\}$ に写されることを示せ．

(2) 上の変数変換のヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ を求めよ．

(3) I の値を求めよ．

(筑波大 2012) (m20121327)

0.229 2 変数関数 $f(x,y)$ を $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ (ただし，$(x,y) \neq (0,0)$) と定義する．ここで，$\log$ は自然対数である．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の全微分を求めよ．

(2) 曲面 $z = f(x,y)$ について，点 $(a,b,f(a,b))$ における法線および接平面の方程式を求めよ．

(3) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ を $D = \{(x,y) \,|\, 0 < x^2+y^2 \leq 1\}$ として求めたい．$f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ において定義されていないので，

$D_\varepsilon = \{(x,y) \,|\, \varepsilon^2 < x^2+y^2 \leq 1\,,\ \varepsilon \in \boldsymbol{R}\}$ として，$\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \iint_{D_\varepsilon} f(x,y)dxdy$ を計算せよ．

(筑波大 2013) (m20131308)

0.230 半径 a の球体の領域 $D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}$ を積分領域とする定積分 $\displaystyle\iiint_D z^2\sqrt{x^+y^2}dxdydz$ の値を以下の問いに従って求めよ．

(1) x,y,z を極座標 r,θ,φ の関数として表せ．r,θ,φ の定義を図示すること．

(2) x,y,z の r,θ,φ の関するヤコビアンを計算せよ．

(3) 極座標を用いて定積分の値を求めよ．

(筑波大 2014) (m20141310)

0.231 $\phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ $(-\infty < x < \infty)$ とおく．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 1$ を示せ．

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu x}\phi(x)dx$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \int_{-\infty}^{y} \phi(x)dx\right) e^{\mu y - \frac{\mu^2}{2}}dy$ を求めよ．ただし，$\mu > 0$ とする．

(筑波大 2015) (m20151304)

0.232 次の 2 重積分を求めなさい.

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy, \quad D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 2x\}$$

(筑波大 2015) (m20151319)

0.233 確率変数 Z が x 以上になる確率を $P(Z \geq x)$ と書くとき，$0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす α に対して Z の $100(1-\alpha)$ パーセント点 z_α は

$$P(Z \geq z_\alpha)=\alpha$$

で定義される．特に Z が標準正規分布に従うとき，z_α の具体的な値は次表で与えられる.

α	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
z_α	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

また，期待値 μ，分散 σ^2 が正規分布を $N(\mu,\sigma)$ で表すとする．このとき，以下の問に答えよ.

(1) 期待値 μ，分散 σ^2 が未知の $N(\mu,\sigma)$ に従う母集団からとった n 個の標本に対して，標本平均と標本分散をそれぞれ $\overline{x}$ と s^2 とする．このとき，$\sqrt{n}\dfrac{(\overline{x}-\mu)}{s}$ は t 分布に従う．t 分布の $100(1-\alpha)$ パーセント点を $t_{n-1;\alpha}$ とするとき，μ の $100(1-\alpha)$ パーセント信頼区間を示せ.

(2) $N(\mu,\sigma)$ に従う母集団から大きさ 4 の標本を選んだところ，観測値は 12.7, 13.0, 13.3, 13.0 であったとする．以下の (a),(b) の場合に μ の 95% 信頼区間を求めよ.

(a) $\sigma^2=0.16$ であることがわかっている場合

(b) σ^2 が未知である場合（ただし，$t_{n-1;\alpha}$ は z_α に等しいと仮定する）

(筑波大 2016) (m20161314)

0.234 以下の関数 $f(x,y)$ が原点 $(x,y)=(0,0)$ で連続かどうかを，その理由とともに答えよ.

(1) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{y} & (y \neq 0) \\ 0 & (y=0) \end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$

(筑波大 2017) (m20171308)

0.235 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}x}\exp\left\{-\dfrac{(\log_e x-\mu)^2}{2}\right\} \qquad (0<x<\infty\ ;\ -\infty<\mu<\infty)$ とおく.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^m f(x)dx=\frac{1}{2}$ となる m を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_0^\infty xf(x)dx$ を求めよ.

(筑波大 2017) (m20171316)

0.236 図のような円柱座標系での微積分に関する以下の問いに答えよ.

(1) 直交座標 (x,y,z) を円柱座標 (r,θ,z) に変換する，x，y，$\dfrac{\partial x}{\partial r}$，$\dfrac{\partial x}{\partial \theta}$，$\dfrac{\partial x}{\partial z}$ を r，θ，z の関数として示せ.

(2) $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} & \dfrac{\partial r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} & \dfrac{\partial \theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = E$ が成り立つことに留意し，$\dfrac{\partial r}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を r, θ, z を用いて示せ．なお，E は単位行列である．

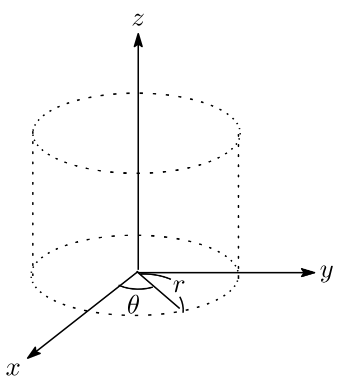
(3) (2) の結果を用いると円柱座標系のラプラシアンは
$\triangle = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ で表される． 関数 $f(r,\ \theta,\ z) = rz\cos\theta$ に対して $\triangle f$ を計算せよ．

(4) 円柱座標系で r だけを変数 $(r > 0)$ とする関数 $g(r)$ が $\triangle g(r) = 0,\ g(1) = 0,\ g(e) = 2$ の条件を満たす．この $g(r)$ を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

(5) $x,\ y,\ z$ の $r,\ \theta,\ z$ に対するヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算せよ．

(6) K を積分領域とする以下の三重積分を，円柱座標系への変数変換を用いて計算せよ．ただし，a は正の定数である．

$$\iiint_k y^2\sqrt{x^2+y^2}dxdydz, \qquad K = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq a\right\}$$



(筑波大 2018) (m20181301)

0.237 以下の関数を積分せよ．ただし，k は整数であり，積分定数は省略してよい．

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ (2) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (3) $\dfrac{1}{\sin x}$ (4) $x^k \ln x$

(筑波大 2018) (m20181311)

0.238 次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, $D = \left\{(x,y) \mid 1/4 \leqq x^2+y^2 \leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (x+y)^3|x-y|e^{(x^2-y^2)(x-y)}dxdy$, $D = \{(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1\}$

(筑波大 2018) (m20181320)

0.239 (1) 以下の広義積分の値を求めよ．

$$\int_0^{\pi} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx$$

(2) 関数 $f(x)$ は閉区間 $[0,1]$ で連続であり，$f(x) > 0$ $(x \in [0,1])$ とする．このとき，以下の広義積分が収束することを示せ．

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)f(x)}}\,dx$$

(筑波大 2021)　　(m20211304)

0.240 次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D \sqrt{y^2-x^2}\,dxdy, \qquad D=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq y\leqq 1\}$$

(筑波大 2021)　　(m20211306)

0.241 xy 平面上における 2 次曲線 C

$$4x^2-2\sqrt{3}xy+6y^2=21\ ,$$

について考える．以下の問いに答えよ．

(1) $4x^2-2\sqrt{3}xy+6y^2=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす対称行列 A を求めよ．

(2) A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leqq \lambda_2$ とする．

(3) (2) で求めた各固有値について，正規化された固有ベクトルを求めよ．

(4) A を $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ の形に対角化する直交行列 P，およびその逆行列 P^{-1} を求めよ．

(5) 座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 行うとき，2 次曲線 C を，x', y' を用いて表せ．

(6) x' 軸および y' 軸を，それぞれ x, y を用いた直線の式で表せ．

(7) 2 次曲線 C の概形を xy 平面上に描け．ただし，図中には x' 軸と y' 軸を明記すること．

(筑波大 2022)　　(m20221304)

0.242 2 つの 2 変数関数

$$F(x,y)=x^2+2xy-y^2$$
$$G(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\frac{y}{x}$$

について，以下の各問に答えよ．ただし，$y=\arctan x$ は $y=\tan x$ $\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数である．また，$\frac{d}{dx}\arctan x=\frac{1}{1+x^2}$ である．

(1) $G(x,y)$ の x,y に関する偏導関数 $G_x(x,y)$, $G_y(x,y)$ をそれぞれ求めよ．

(2) ラグランジュの未定乗数法を用いて，$F(x,y)$ が条件 $G(x,y)=0$ のもとで極値をとる点の候補を求めよ．

(3) $G(x,y)=0$ の陰関数 $y=g(x)$ について，その 1 次導関数 $g'(x)$ を x および $g(x)$ で表せ，また，2 次導関数 $g''(x)$ を $x, g(x)$ および $g'(x)$ で表せ．

(4) (3) を用いて，条件 $G(x,y)=0$ のもとでの $F(x,y)$ の極小値を求めよ．

(筑波大 2022)　　(m20221308)

0.243 次は，あるクラスのテストの点数である．

77 74 75 85 90 67 62 60 58

このデータの標本平均は 72.0，標本不偏分散は 124.5 である．テストの点数は，正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従う母集団から無作為に抽出した標本とみなせるものとする．このとき，以下の各問に答えよ．なお，計算の過程で適宜，有効数字 3 桁に丸めてよい．

(1) 母分散 σ^2 の 95 % 信頼区間を求めよ．

(2) 母平均 μ の 95 % 信頼区間を求めよ．

(3) $\sigma^2 = 121$ と判明したとき，μ の 95 % 信頼区間を求めよ．

(筑波大 2022)　　(m20221309)

付表１

$\sqrt{2} = 1.414$	$\sqrt{3} = 1.732$	$\sqrt{5} = 2.236$	$\sqrt{7} = 2.646$	$\sqrt{11} = 3.317$

付表２

$e^1 = 2.718$	$e^2 = 7.389$	$e^3 = 20.09$	$e^4 = 54.60$	$e^5 = 148.4$

付表３　標準正規分布表 : $Q(z) = \displaystyle\int_0^z \phi(t)dt$,　ただし，$\phi(\cdot)$ は標準正規分布の確率密度関数　（省略）

付表４　χ^2 分布表：自由度 m の χ^2 分布の上側 $100\alpha\%$ 点 $\chi^2_\alpha(m)$

α \ m	6	7	8	9	10
0.975	1.237	1.690	2.180	2.700	3.247
0.950	1.635	2.167	2.733	3.325	3.940
0.050	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31
0.025	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48

付表５　t 分布表：自由度 m の両側 $100\alpha\%$ 点 $t_\alpha(m)$

α \ m	6	7	8	9	10
0.10	1.943	1.895	1.860	1.833	1.812
0.05	2.447	2.365	2.306	2.262	2.228

0.244　次の方程式が開区間 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ で互いに異なる解をちょうど n 個持つことを証明しなさい．

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-2)^n = 0$$

(筑波大 2022)　　(m20221312)

0.245　D を xy 平面上の領域とするとき，曲面 $z = f(x,y)$ $\big((x,y) \in D\big)$ の面積は

$$\iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\ dxdy$$

で表される．このことを用いて半径 R の球の表面積の公式を導け．

(埼玉大 1998）　　(m19981401)

0.246　次の極限を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to 0+} x\sqrt{-\log x}$

(埼玉大 1999)　　(m19991401)

0.247　a を正の実数とし，次の不等式で定義された領域を D であらわす．

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{a}\ , \qquad x \geq 0\ ,\ y \geq 0$$

このとき，次の値を求めよ．

$$\iint_D dxdy\ , \qquad \iint_D x\ dxdy$$

(埼玉大 1999）　　(m19991403)

0.248　閉区間 $[0, 2\pi]$ 上の関数

$$f(x) = \sqrt{1 + a^2 + b^2 - 2a\cos x - 2b\sin x}$$

を考える．ただし，a, b は正の定数とする．

(1) $f(x)$ の最大値 M と最小値 m を求めよ．

(2) 関係式

$$\begin{cases} a = 1 + \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2}} \\[2ex] b = 1 + \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

があるとき，積 Mm の最大値を求めよ．

(埼玉大 2000)　　(m20001401)

0.249 $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^2}$ とする．

(1) 正数 R に対し，次が成り立つことを示せ．

$$\int_0^R\left(\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)dx\right)dy \leqq \int_0^R\left(\int_0^R f(x,y)dx\right)dy \leqq \int_0^{\sqrt{2}R}\left(\int_0^{\sqrt{2R^2-y^2}} f(x,y)dx\right)dy$$

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^R\left(\int_0^R f(x,y)dx\right)dy$ の値を求めよ．

(埼玉大 2000)　　(m20001402)

0.250 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3-3x^2-2x}{x^2-4x+3}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

(2) $\displaystyle\int (2x+1)\ln x dx$

（埼玉大 2001）　　(m20011404)

0.251 $\mathbb{R}^n$ のベクトル　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して内積 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を次のように定義する．

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

さらに，$\boldsymbol{x}$ の長さを $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$ と定義する．

次の (1),(2),(3) に答えよ．

(1) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して不等式　$|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \leq ||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}||$　が成り立つことを証明せよ．

(2) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して不等式　$||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|| \leq ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||$　が成り立つことを証明せよ．

(3) 上の (1),(2) において等号が成立するための必要十分条件を求めよ．

(埼玉大 2002)　　(m20021403)

0.252 $\cos 46^\circ$ の近似値を有効数字３桁の範囲において求めなさい．ただし，$\dfrac{\pi}{180} = 0.01745\cdots$，$\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である．

(埼玉大 2003)　　(m20031405)

0.253 次の数列 $\{a_n\}$ は, ある有限の値に収束することを示せ.

$$a_1 = \sqrt{2}\,,\quad a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$$

(埼玉大 2005)　　(m20051401)

0.254 次の関数を微分せよ.

(1) $y=\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}$ (2) $y=\sqrt{1+\cos x}$

(3) $y=x^e e^x \quad (x>0)$ (4) $y=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

(埼玉大 2006) (m20061401)

0.255 (1) 関数 $f(x)=(1+x)^\alpha$ をマクローリン展開することにより，次式を導き出せ.

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{i=1}^{\infty}{}_\alpha\mathrm{C}_i x^i \quad \cdots\cdots\cdots①$$

ただし，${}_\alpha\mathrm{C}_i$ は次式で表される. ${}_\alpha\mathrm{C}_i=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!} \quad (i\geq 1)$

(2) 式①を用いて次の関数 $g(x)$ のマクローリン展開式を x^3 の項まで求めよ. $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$

(埼玉大 2007) (m20071401)

0.256 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int\sqrt{4-x^2}dx$ (2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+1}$

(埼玉大 2007) (m20071402)

0.257 (1) 関数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい.

(2) 関数 $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x}$ の第 4 次導関数 $f^{(4)}(x)$ を求めなさい.

(3) 次の極限値を求めなさい.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos 2x)}{\log(\cos 3x)}$$

(4) xy 平面において $y=\dfrac{1}{\sin x}$ のグラフで与えられる曲線と 直線 $x=\dfrac{\pi}{3}$，$x=\dfrac{2\pi}{3}$ および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい.

(埼玉大 2009) (m20091401)

0.258 $f(x)=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ とする.

(1) $(1+x^2)f''(x)+xf'(x)=0$ が成り立つことを示せ.

(2) 非負整数 n に対し，

$$(1+x^2)f^{(n+2)}(x)+(2n+1)xf^{(n+1)}(x)+n^2f^{(n)}(x)=0$$

が成り立つことを示せ.

(埼玉大 2009) (m20091406)

0.259 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$

(埼玉大 2013) (m20131403)

0.260 次の 2 重積分を求めよ. ただし，$x\geq 0$，$\sqrt{x}\geq y\geq x$ で囲まれた領域を D とする.

$\displaystyle\iint_D(x+y)dxdy \qquad D: x\geq 0,\ \sqrt{x}\geq y\geq x$ (埼玉大 2013) (m20131404)

0.261 $-1 < x < 1$ に対し，$t = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) x を t の式で表し，さらに，導関数 $\dfrac{dx}{dt}$ を求めよ．

(2) 不定積分

$$\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$$

を t の不定積分で表せ．

(3) 広義積分

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$$

を求めよ．

(埼玉大 2013)　　(m20131410)

0.262 直交座標系の座標軸 O-xyz を，原点を固定して回転した座標軸を O-XYZ とする．直交座標の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がそれぞれ，新座標系の正規直交形で

$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ と表されたとき，以下の設問に答えよ．

(1) 旧座標系で表された点 $(\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{6})$ の新座標系での座標を求めよ．

(2) 新座標系で $(0, 4, 2)$ と表される点の旧座標系での座標を求めよ．

(埼玉大 2014)　　(m20141401)

0.263 (1) $x = x_0$ 付近で連続な関数 $f(x)$ に対し，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$ が成り立つ関数 $\delta(x)$ がある．$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} 3\delta(x)e^{-ixy}dx$ の値を求めよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする．

(2) 関数 $f(x), g(x)$ があり，それぞれ $F(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx$，$G(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ixy}dx$ とするとき，次式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx\right)e^{-iyz}dz$ が収束するとして，これを，$F(y)$ および $G(y)$ を用いて表せ．ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx < \infty$，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|dx < \infty$ とする．

(埼玉大 2014)　　(m20141403)

0.264 次の重積分を求めよ．ただし，$0 \leq x \leq 1$，$x \leq y \leq \sqrt{x}$ で囲まれる領域を D とする．

$$\iint_D (2x + y)\, dxdy$$

(埼玉大 2015)　　(m20151404)

0.265 次の関数の x に関する偏導関数 z_x を求めよ．

$$z = \log\sqrt{x^2 + y^2}$$

(埼玉大 2019)　　(m20191402)

0.266　次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1)　$\dfrac{dy}{dx} = (2y+1)^2 xe^{-x}$

(2)　$\dfrac{x}{y}\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} - 1 = 0$

(3)　$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 2\sin x\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{2}\cos 2x = 0$

(埼玉大 2019)　　(m20191407)

0.267　以下の 3 つの問いに答えよ．

(1)　点 $A(-6, 8)$ を中心とし，原点を通る円の方程式を求めよ．

(2)　2 点 $B(-4, 6)$ と $C(12, -6)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ．

(3)　3 点 $D(0, -1),\ E(2, 1),\ F(1, -1-\sqrt{3})$ を通る円の方程式を求めよ．

(群馬大 2012)　　(m20121501)

0.268　$\sqrt{15}$ は無理数である．以下の各問に答えよ．

(1)　$(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$ を展開して整理せよ．

(2)　$\sqrt{3}-\sqrt{5}$ が無理数であることを示せ．

(3)　等式 $4a + (5b-3)\sqrt{15} + \sqrt{15}\left(a - 2b\sqrt{15}\right) = 0$ を満たす有理数 a, b の値を求めよ．

(群馬大 2014)　　(m20141501)

0.269　蓋(ふた) のない t 個の箱 $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_t$ が置いてある．いずれの箱も高さは同じである．箱 b_n の幅と奥行きはともに $a_n\ cm$ であり，$a_1 = 10,\ a_t = 30,\ a_n = \sqrt{\dfrac{n}{n-1}}a_{n-1}\ (n = 2, 3, \cdots, t)$ とする．このとき，石を投げて箱に入れるゲームを考える．石がいずれかの箱に入る確率は $\dfrac{5}{6}$ それぞれの箱に石が入る確率は上面の面積に比例しているとする．以下の問いに答えよ．

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)　すべての箱の上面の面積の合計を求めよ．

(3)　投げた石が箱 b_1 に入る確率を求めよ．

(4)　箱 b_n に石が入ったときの得点を p_n としたとき，$p_1 = 10,\ p_n = p_{n-1} - 1\ (n = 2, 3, \cdots, t)$ とする．いずれの箱にも入らなかったときの得点を 0 点とする．このとき，石を投げて得られる得点の期待値を求めよ．

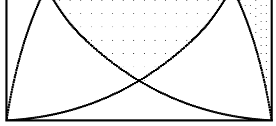
(群馬大 2016)　　(m20161502)

0.270　右下の図形は 1 辺の長さ 1 の正方形の中に，各頂点を中心として半径 1 の円弧を 4 つ描いたものである．図の x, y, z それぞれの領域の面積をやはり x, y, z で表す．

(1)　次の各式の空欄を埋めて，x, y, z の満たす連立方程式を作れ．
ただし，π は円周率である．

$$\begin{cases} \square x + \square y + \square z = 1 \\ \square x + \square y + \square z = \dfrac{\pi}{4} \\ x + 2y + z = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{\square}}{\square} \end{cases}$$

(2)　x を求めよ．



(図書館情報大 1999)　　(m19991601)

0.271 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $f(r)=\log r$ とする．次の各問に答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\dfrac{1}{r^2}$ を示せ．

(茨城大 2000)　　(m20001701)

0.272 (1) $y=2\sqrt{1+x}+\log\left|\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{\log x}{\sqrt{1+x}}\,dx$ を求めよ．

(茨城大 2001)　　(m20011701)

0.273 複素関数 $\omega=\dfrac{z-i}{z+i}$ について

(1) $z=1$ のとき，$|\omega|=1$ であることを示せ．

(2) z を ω の式で表せ．

(3) z 平面の円 $|z+1|=\sqrt{2}$ は，ω 平面内のどのような曲線に写るか．

(茨城大 2003)　　(m20031704)

0.274 関数 $y=\tan x$ の定義域を $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ に制限すると, その逆関数 $y=\mathrm{Arctan}\,x$ を考えることができる. 次の各問に答えよ.

(1) $y=\mathrm{Arctan}\,x$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ は $\dfrac{1}{1+x^2}$ となることを示せ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\mathrm{Arctan}\,x\,dx$ を求めよ.

(茨城大 2005)　　(m20051702)

0.275 3 次正方行列　$A=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 1\end{bmatrix}$　について，以下の各問に答えよ.

(1) A の固有値 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$ および対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ を一組求めよ.

(2) ベクトル列 $\boldsymbol{u}_n$ を　$\boldsymbol{u}_n=A^n\begin{bmatrix}\varepsilon\\ -1+2\varepsilon\\ 2+\varepsilon\end{bmatrix}$,　$(n=0,1,2,\cdots)$　で定める．だだし，$\varepsilon=2^{-100}$ とし，A^0 は単位行列を表す．このとき，$\boldsymbol{u}_n$ を (1) で求めた $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ の一次結合で表せ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，ユークリッドノルムを $||\boldsymbol{x}||=\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$ とする．(2) で与えた $\boldsymbol{u}_n$ について，以下を調べよ.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}||\boldsymbol{u}_n||$　　(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{||\boldsymbol{u}_{n+1}||}{||\boldsymbol{u}_n||}$　　(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\boldsymbol{u}_n}{||\boldsymbol{u}_n||}$

(d) $\left|\left|\boldsymbol{u}_n-\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}\right|\right|\leqq 2^{-10}$ なる n の存在の有無.

(茨城大 2007)　　(m20071707)

0.276 次の連立不等式で表される領域を D とする.　$x+y\leqq 2$,　$0\leqq y\leqq\sqrt{x}$

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ． (2) 領域 D 上の 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (1+y)\,dxdy$ を求めよ．

(茨城大 2008) (m20081704)

0.277 (1) 関数 $y=\cos(x^2)$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ と $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．

(2) 次の連立不等式で表される範囲を xy 平面に図示せよ．

$$0 \leqq y \leqq \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad y \leqq x \leqq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(3) 次の累次積分の順序を交換し，値を計算せよ．

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \left(\int_y^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \cos(x^2)dx \right) dy$$

(茨城大 2009) (m20091701)

0.278 座標平面内の領域 $D = \{(x,y)\,|\,x,\,y$ は実数で $x^2+y^2 \leqq 1$ をみたす $\}$ で定義された 2 変数の関数 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ について, 以下の各問いに答えよ．

(1) $x=0.01,\ y=0.02$ のとき, $f(x,y)$ の値を小数点以下 4 桁まで正確に求めよ．

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ における接平面を H とする．

3 つの座標平面 $x=0,\ y=0,\ z=0$ と H とで囲まれた立体の体積を求めよ．

(3) 二重積分

$$\iint_D x^n y^n f(x,y)\,dxdy$$

の値を, $n=1,\ 2$ についてそれぞれ求めよ．

(茨城大 2010) (m20101705)

0.279 次の連立不等式の表す領域を D とする．

$$y \geqq x\,,\ y \geqq -x\,,\ 4 \leqq x^2+y^2 \leqq 9$$

以下の各問に答えよ．

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) 極座標変換 $x=r\cos\theta\,,\ y=r\sin\theta$ に対して，$J=\dfrac{\partial x}{\partial r}\dfrac{\partial y}{\partial \theta}-\dfrac{\partial x}{\partial \theta}\dfrac{\partial y}{\partial r}$ とおく．J を計算せよ．

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$ を計算せよ．

(茨城大 2012) (m20121704)

0.280 i を虚数単位とし，$z=\dfrac{\sqrt{3}(i-1)-(1+i)}{1+i}$ とおくとき，以下の各問に答えよ．

(1) $z=a+ib$ を満たす実数 a,b を求め，絶対値 $|z|$ を答えよ．

(2) $z=re^{i\theta}$ となる r と θ を求めよ．ただし，$r>0$ かつ $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(3) z^n が実数となるような最小の自然数 n を求めよ．

(茨城大 2014) (m20141702)

0.281 $\boldsymbol{R}^2$ 上に定義域 D をもつ実数値関数 $f(x,y)$ を考える.

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{y^2-1}}$$

このとき，次の小問 (1) と (2) に答えよ.

(1) 関数 $f(x,y)$ の定義域 D を調べ，xy 平面上に図示せよ.

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ となる点 (x,y) が，(1) で求めた定義域 D 上に何個存在するか調べよ.

(茨城大 2018) (m20181702)

0.282 a を正の定数とする．関数 $f(x)=\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.
ただし，対数は自然対数とする.

(茨城大 2020) (m20201703)

0.283 xy 平面内の領域 $D:0\leqq x\leqq 1,\ \sqrt{x^2+3}\leqq y\leqq\sqrt{x^2+8}$ における 2 重積分 $\displaystyle\iint_D\frac{1}{y^2}dxdy$ を計算せよ.

(茨城大 2020) (m20201704)

0.284 i を虚数単位とするとき，以下の各問に答えよ.

(1) $x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，複素数 $1-e^{i2x}$ を $a+ib$ (a,b は実数) の形で答え，その絶対値を求めよ.

(2) 前問 (1) で得られた複素数 $a+ib$ を $re^{i\theta}$ の形で表せ．ただし，$r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi$ とする.

(3) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，$1-e^{i2x}$ の絶対値が $\sqrt{2}$ になるときの x を求めよ.

(茨城大 2020) (m20201707)

0.285 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2\leq 4,\ 0\leq y\leq\sqrt{3}x\}$ とする．このとき，つぎの小問 (1) および (2) に答えよ.

(1) D を xy 平面に図示せよ.

(2) $\displaystyle\iint_D\frac{xy}{(\sqrt{25-6x^2+15y^2})^3}dxdy$ の値を求めよ.

(茨城大 2021) (m20211703)

0.286 $-\infty<x<\infty$ である x に対して，$\tan y=x$ 満たす y で $-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす唯一のものを $y=\mathrm{Arctan}\,x$ と表わす．以下の各問に答えよ.

(1) $\cos(\mathrm{Arctan}\,x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ を示せ.

(2) 曲面 $z=\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 上の点 $P=\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$ での接平面を求めよ.

(3) 関数 $y=x\sqrt{x^2+1}+\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ の微分を求めよ.

(4) 曲面 $z=\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ の，xy 平面上の有界閉領域 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2\leqq 1\right\}$ の真上にある部分の曲面積を求めよ.

(茨城大 2022) (m20221702)

0.287 不定積分 $\displaystyle\int\cos\sqrt{x}dx$ を求めよ.

（山梨大 2004） (m20041802)

0.288 関数 $f(x)=\sqrt{x}-\log x\quad(x>0)$ を考える．ただし，対数関数は自然対数によるものとする.

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい.

(2) $f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めなさい.

(3) $f(x)$ の極小値を求めなさい.

(山梨大 2009)　　(m20091803)

0.289 定積分 $\displaystyle\int_2^6 x\sqrt{x-1}\,dx$ の値を求めなさい.

(山梨大 2010)　　(m20101804)

0.290 以下の関数に対して, $x=0$ での 3 次までの Taylor 展開を求めなさい.

$$f(x)=\frac{\mathrm{Sin}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(山梨大 2010)　　(m20101807)

0.291 $A=\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$ を対角化し，A^n を n で表せ.

(山梨大 2015)　　(m20151801)

0.292 数学的帰納法を用いて次の不等式を証明せよ.　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{-1/2} \geq \sqrt{n}$

(山梨大 2015)　　(m20151803)

0.293 x, y を実数としたとき，次のそれぞれが「$x^2+y^2 \leq 1$」に対して「必要条件」「十分条件」「必要十分条件」「いずれでもない」のうちいずれかを答えよ.

(1) $x \leq 1/2$ または $y \leq 1/2$

(2) $|x| \leq 1$ かつ $y \leq \sqrt{1-x^2}$ かつ $y \geq -\sqrt{1-x^2}$

(3) $|xy| \leq 1/2$

(4) $|x| \leq 1/\sqrt{2}$ かつ $|y| \leq 1/\sqrt{2}$

(山梨大 2016)　　(m20161801)

0.294 (1) 関数 $f(x)$ が $x=0$ を含む区間で n 回微分可能であるとき，下式を満たす点 $\theta(0<\theta<1)$ が存在する．ただし，$f^{(n)}(x)$ は第 n 次導関数とする.

$$f(x)=f(0)+xf^{(1)}(0)+\frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0)+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)$$

上式の最終項を除いた n 項までの和の部分を関数 $f(x)$ の近似式と呼ぶ.

$f(x)=(1+x)^k$　(k は任意の実数) を 2 次式で近似し，$\sqrt{1.1}$ の近似値を求めなさい.

(2) n 回微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$ の積 $f(x)\cdot g(x)$ の第 n 次導関数 $\Big(f(x)\cdot g(x)\Big)^{(n)}$ が次の式で与えられることを数学的帰納法によって証明しなさい.

$$\Big(f(x)\cdot g(x)\Big)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n} {}_nC_i f^{(n-i)}(x)\cdot g^{(i)}(x)$$

(山梨大 2016)　　(m20161804)

0.295 $-\pi \leqq x \leqq \pi$ で定義された関数 $f_n(x)$　$(n=1,2,3)$ を考える．$f_i(x)$ と $f_j(x)$ との内積 $(f_i,\ f_j)$ を $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f_i(x)f_j(x)dx$ と定義するとき，i, j をそれぞれ $1,2,3$ のいずれかとして，次の設問に答えよ.

(1) $f_1(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}x+1\right)$，$f_2(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}x-1\right)$ とすると，$(f_1,\ f_1) = (f_2,\ f_2) = 1$，$(f_1,\ f_2) = 0$ が成り立つことを示せ.

(2) $f_3(x) = ax^2 + b \quad (a,\ b$ は定数$)$ とするとき，$(f_1,\ f_3) = (f_2,\ f_3) = 0$，$(f_3,\ f_3) = 1$ となるような a，b を求めよ.

(3) $f_i(-x) = Mf_i(x)$ のように，x を $-x$ と変換する操作を M と書く．M によってベクトル $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ はどのように変換されるか，その行列表現を求めよ.

(4) 直交行列 A によってベクトル $\boldsymbol{f}$ が，ベクトル $\boldsymbol{g} = A\boldsymbol{f}$ に移るとする．操作 M によって $\boldsymbol{g}$ がその定数倍になるような A と $\boldsymbol{g}$ を求めよ.

(山梨大 2017)　　(m20171802)

0.296　関数　$f(x) = e^x \sin(x+\alpha)$　の第　n　階導関数は

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin(x+\alpha+\frac{n\pi}{4})$$

であることを証明せよ.

(信州大 1998)　　(m19981901)

0.297　$0 < R_1 < R_2$ とする. 次の定積分を求めよ.

$$\int_{R_1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq R_2} \log(x^2+y^2)\,dxdy$$

(信州大 2003)　　(m20031905)

0.298　次の問いに答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dr$ を計算せよ.

(2) 2 重積分 $I_n = \displaystyle\iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ を計算せよ.

ただし，$D_n = \left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq \left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^2\right\}$　$(n = 1,2,3,\cdots)$ とする.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．また，$I_n > \pi$ を満たす最小の自然数 n を求めよ.

(信州大 2013)　　(m20131902)

0.299　重積分 $I = \displaystyle\iint_D \sin(x^2)dxdy$ を求めよ．ただし，$D = \{(x,y)\ :\ 0 \leqq\ y \leqq\ x \leqq \sqrt{\pi}\}$ とする.

(信州大 2014)　　(m20141902)

0.300　行列 $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) A の固有値と B の固有値を求めよ.

(2) A，B について，それらが対角化できるか調べ，対角化できれば対角化せよ.

(信州大 2016)　　(m20161904)

0.301　(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\sqrt{x^2-1}}$ を求めよ.

(2) 実数 p, q は，$p > 1,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たすとする．　このとき，$a \geqq 0,\ b \geqq 0$ を満たすすべての実数 a, b に対して，不等式　$ab \leqq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$　が成り立つことを示せ.

(信州大 2017)　　(m20171901)

0.302 $a,\ b$ は定数で $a < b$ とする．$a < p < q < b$ を満たす $p,\ q$ に対して，

$$I(p,q) = \int_p^q \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $t = \sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}$　$(p \leqq x \leqq q)$ とおいて，置換積分法により $I(p,q)$ を求めよ.

(2) 極値 $I = \displaystyle\lim_{p \to a+0} \left\{ \lim_{q \to b-0} I(p,q) \right\}$ を求めよ.

(信州大 2018)　　(m20181902)

0.303 (1) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right)$$

(2) 次の極限が存在しないことを示せ.

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

(3) 2 変数関数 $z = f(x,y)$ と $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ の合成関数 $f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ に対し，関係式

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

が成り立つことを示せ.

(信州大 2020)　　(m20201905)

0.304 (1) 次の不定積分を求めよ.

$$\int \tan^{-1} \sqrt{x}\, dx$$

(2) $\mathbb{R}^2$ 内の領域 D を $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x + y \leq 1,\ 0 \leq x - 2y \leq 1 \right\}$ で定めるとき，2 重積分

$$\iint_D (3x + 2y)\,dxdy$$

の値を求めよ.

(3) f は $[0,1]$ 上の実数値連続関数で，$\displaystyle\int_0^1 |xf(x)|dx < \infty$ であるとする．このとき，次の関数が $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを示せ.

$$g(x) := \int_0^1 \cos(xy) f(y) dy$$

(信州大 2020)　　(m20201906)

0.305 関数 $f(x,y)$ は

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

で定義されているとする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $f_x(0,0)$ と $f_y(0,0)$ を求めよ．

(2) $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で全微分可能であることを示せ．

(3) $f_x(x,y)$ を求めよ．また，$f_x(x,y)$ は点 $(0,0)$ で不連続であることを示せ．

(信州大 2022)　　(m20221901)

0.306　$\sqrt{x^2+a}=t-x$ とおいて，置換積分法により不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ を求めよ．ただし $a \neq 0$ とする．

(信州大 2022)　　(m20221902)

0.307　$D_n=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leqq x \leqq y\ ,\ \dfrac{1}{n} \leqq y \leqq 1\right\}$ $(n=2,3,\cdots)$ とおき，領域 D_n 上の 2 重積分

$$I_n=\iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

を考える．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

(信州大 2022)　　(m20221903)

0.308　関数 $f(x)$ は開区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ において，

$$f(x)=\log\cos x$$

で定義されているとする．このとき，次に問いに答えよ．ただし，対数は自然対数である．

(1) $f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の 2 次までのマクローリン展開を求めよ．また，剰余項 $R_3(x)$ を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ を求めよ．

(信州大 2023)　　(m20231901)

0.309　楕円 C ： $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ について，次の問いに答えよ．

(1) 点 $F(\sqrt{3},0)$ と C 上の点 $P(x,y)$ を結ぶ線分 FP の長さを r，線分 FP と x 軸の正の方向とのなす角を θ とするとき

$$r=\frac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 点 F を通る C の任意の弦 PQ に対して，線分 FP,FQ の長さをそれぞれ p,q とするとき，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}$ の値は一定であることを示せ．

(3) 点 F において互いに直交する C の二つの弦の長さの逆数の和は一定であることを示せ．

ここで楕円 C の弦とは C 上の異なる 2 点を結ぶ線分のことである．

(新潟大 1998)　　(m19982001)

0.310　一般項が次の式で表される数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限値を求めるとともに，その値が極限値になることを証明せよ．

(1) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

(2) $\dfrac{10^n}{n!}$

(3) $\sqrt[n]{a}$，　(a は正の定数)

(新潟大 1999)　　(m19992002)

0.311 $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ ， $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (θ は実数) とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 行列 P の逆行列 P^{-1} 及び，行列 A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように $\theta\ (0 \leq \theta \leq \pi/2)$ の値を定めよ．

(3) 曲線 $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 2$ の概形を描け．

(新潟大 2000)　　(m20002004)

0.312 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left\{\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+x}\right\}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1+x)}{x}$

(新潟大 2001)　　(m20012001)

0.313 自然数 n に対して, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$ とおく. 次の問に答えよ.

(1) 任意の実数 x に対して, $1 + x \leqq e^x$ を示せ.

(2) $(1-x^2)^n \leqq e^{-nx^2}\ \ (-1 \leqq x \leqq 1)$ および $e^{-nx^2} \leqq (1+x^2)^{-n}\ \ (-\infty < x < \infty)$ を示せ.

(3) $x = \cos t$ とおくことにより, $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n dx = I_{2n+1}$ を示せ.

(4) $x = \tan t$ とおくことにより, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n}dx = I_{2n-2}\ \ (n \geqq 2)$ を示せ.

(5) $\sqrt{n}\, I_{2n+1} \leqq \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx \leqq \sqrt{n}\, I_{2n-2}\ \ (n \geqq 2)$ を示せ.

(新潟大 2005)　　(m20052003)

0.314 位置ベクトル $\overrightarrow{r} = (\sqrt{3}, 1, 0)$ と力をあらわすベクトル $\overrightarrow{F} = (2, 2, 0)$ がある．以下の問いに答えよ.

(1) xy 平面内にあり，ベクトル $\overrightarrow{r}$ に垂直な単位ベクトル $\overrightarrow{e}$ を求めよ.

(2) トルク $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$ を計算せよ.

(3) 二つのベクトル $\overrightarrow{r}$ と $\overrightarrow{F}$ の間の角度を求めよ.

(新潟大 2007)　　(m20072001)

0.315 物理によく用いられるオイラーの公式（ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ 　ここで，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位 ）は，指数関数と三角関数を結びつける重要な公式である．この公式を使って，次の関係式を証明せよ.

(1) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$　　(2) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

(新潟大 2007)　　(m20072003)

0.316 関数 $F(x)$ は　$F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$　で与えられるものとする.

また,　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x) = \int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$　であることがわかっている.

(1) $\dfrac{dF(x)}{dx}$ を求めよ.　　(2) $\displaystyle\int_x^\infty e^{-t^2}dt$ を $F(x)$ を用いて表せ.

(3) e^{-t^2} のマクローリン展開（$t = 0$ の周りでのテイラー展開）を用いて，$x = 0.1$ のときの $F(x)$ の値の近似値を有効数字 4 桁で求めよ.

(4) 次の定積分の値を求めよ．(a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-a^2t^2}dt$　（a は正の定数とする）　(b) $\displaystyle\int_0^\infty t^2e^{-t^2}dt$

(新潟大 2008)　　(m20082001)

0.317 (1) 三角関数に対して次のような公式がある.

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx \tag{a}$$

ここで, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする. 式 (a), または, 三角関数の加法定理, 倍角公式などを用いて, 次の式が成り立つことを証明せよ.

$$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x \tag{b}$$

(2) 式 (b) の両辺を x で微分することにより

$$\sin 5x = (16\cos^4 x - 12\cos^2 x + 1)\sin x \tag{c}$$

となることを証明せよ.

(3) $\cos\dfrac{\pi}{5}$ を求めよ.

(新潟大 2008) (m20082002)

0.318 次の複素数を極形式 $(re^{i\theta})$ であらわし, 複素数平面上に図示せよ.

(1) $2i$

(2) $-1+\sqrt{3}i$

(3) $2+2i$

(新潟大 2009) (m20092001)

0.319 (1) $y = x^n$ を n 回微分せよ. なお, n は正の整数である.

(2) $y = \sin x$ を n 回微分せよ.

(3) α は任意の実数で $x > 0$ とする. $y = x^{\alpha}$ のとき, $y' = \alpha\, x^{\alpha-1}$ であることを与式の両辺の対数を取って示せ.

(4) (3) と同様の方法を用いて $y = x^2\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ を微分せよ.

(新潟大 2010) (m20102001)

0.320 (1) $a,\ b$ を複素数とするとき, $A = \dfrac{1}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}}\begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ はユニタリ行列であることを示せ. ただし, $|a|$, $\bar{a}$ はそれぞれ a の絶対値および複素共役を表す.

(2) $U = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}$ のとき, $U^{-1}BU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ を満たす行列 B について, B^n を求めよ. ただし i は虚数単位である.

(新潟大 2010) (m20102012)

0.321 次の二重積分の値を求めよ. ただし, $D_1 : x+y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0$ とする.

$$\iint_{D_1} \sqrt{x+y}\, dxdy$$

(新潟大 2010) (m20102014)

0.322 $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1+i \\ x+iy \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ とするとき, $\boldsymbol{a}$ のノルムが 3, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積の絶対値が $\sqrt{7}$ となるような x と y の値を求めよ. ただし i は虚数単位, x, y は実数とする.

(新潟大 2012) (m20122008)

0.323 a を実数とする. このとき, 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) A の階数 (rank) を求めよ.

(2) A が対角化可能であるかどうか理由をつけて答えよ．また，A が対角化可能であるとき，A を対角化せよ.

(3) $a=\sqrt{2}$ のとき，$A^{-1}=bE_3+cA+dA^2$ となる実数 b,c,d を求めよ．ただし，A^{-1} を A の逆行列，E_3 を 3 次単位行列とする.

(新潟大 2012)　　(m20122010)

0.324 3 次元ユークリット空間 $\mathbb{R}^3$ において $ax+by+cz+d=0$ で与えられる平面 H を考える．平面 H 上にない点 P_0 の座標を (x_0,y_0,z_0) とし，H 上の点 P_1 の座標を (x_1,y_1,z_1) とする．また，$\boldsymbol{v}=(x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1)$ とする．このとき，次の各問いに答えよ.

(1) H の単位法線ベクトル $\boldsymbol{u}$（H と直交する長さ 1 のベクトル）を求めよ.

(2) $\boldsymbol{v}-\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle\,\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{u}$ は直交することを示せ．また $\boldsymbol{v}-\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle\,\boldsymbol{u}$ の幾何学的な意味を説明せよ.
ただし，$\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle$ は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積を表す.

(3) 点 P_0 と平面 H との距離は $|\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle|$ で与えられることを説明せよ.

(4) (3) を用いて点 P_0 と平面 H との距離の公式

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

を証明せよ.

(新潟大 2012)　　(m20122015)

0.325 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int(5x-4)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\sqrt{x^5}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int x\cos x\,dx$

(新潟大 2014)　　(m20142014)

0.326 $y=\sqrt{\cos x}$ のとき，y'' を求めよ.

(新潟大 2015)　　(m20152007)

0.327 次の (1)〜(3) の関数を微分せよ.

(1) $y=x^3(x-1)^2(x+2)^2$　　(2) $y=\sqrt{1+\cos x}$　　(3) $y=\dfrac{x^2+2}{x-1}$

(新潟大 2015)　　(m20152013)

0.328 次の (1)〜(3) の不定積分を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする.

(1) $\displaystyle\int(6x-1)^3\,dx$　　(2) $\displaystyle\int x\sqrt{3x-1}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int\log_e x\,dx$

(新潟大 2015)　　(m20152014)

0.329 曲線 $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{4}+y^2+z^2-1=0$ 上の点 $\left(-1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ における法線の方程式を求めよ.

(新潟大 2017)　　(m20172008)

0.330 次の (a)〜(c) の関数を x で微分せよ.

(a) $y=\dfrac{x}{(x+1)^2}$　　(b) $y=\sqrt{x}\log_e x\quad(x>0)$　　(c) $y=x^{\log_e x}\quad(x>0)$

(新潟大 2017)　　(m20172012)

0.331 つぎの (a)〜(c) の不定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+2}$ (b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ (c) $\displaystyle\int \log_e x dx$

(新潟大 2017) (m20172013)

0.332 $\dfrac{3}{(\sqrt{2})^x}+\dfrac{5}{2^x}=2$ を x について解け．

(新潟大 2017) (m20172014)

0.333 以下のように行列 $A,\ B,\ C$ を定義する．

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad B=\frac{1}{i\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

また，I を 3×3 の単位行列とする．ここで，i は虚数単位で $i=\sqrt{-1}$ である．

(1) $A^2+B^2+C^2=kI$ となることを示し，定数 k を求めよ．

(2) A の固有値を求めよ．

(3) 一般に，正方行列 M の指数関数 e^M は，無限級数 $e^M\equiv\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}M^n$ で定義される．α を実定数としたとき，

$$e^{i\alpha C}=\begin{pmatrix}e^{i\alpha}&0&0\\0&0&0\\0&0&e^{-i\alpha}\end{pmatrix}$$

(問題ではこうなっていましたが, $(2,2)$ 成分は 1 になるものと思われます)

となることを示せ．

(4) ベクトル $\overrightarrow{v}(\phi)$ を $\overrightarrow{v}(\phi)=\dfrac{\sin\phi}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\dfrac{i\cos\phi}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ と定義する．

このとき，$e^{i\alpha C}\overrightarrow{v}(\phi)=\overrightarrow{v}(\phi')$ と書けることを示し，ϕ' を求めよ．ただし，ϕ と ϕ' は実定数である．

(新潟大 2017) (m20172017)

0.334 (1) $\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ の導関数を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を求めよ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int\sqrt{x^2+1}\,dx$ を求めよ．

(新潟大 2017) (m20172019)

0.335 次の (1)〜(3) の関数を x で微分せよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $y=\sqrt{1+\sin x}$ (2) $y=xe^{1/x}$ (3) $y=-\log_e(\cos x)$

(新潟大 2018) (m20182001)

0.336 $a,\ b$ を $0<a<b<1$ となる実数とする．このとき，定積分 $\displaystyle\int_a^b\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$ を求めよ．

(新潟大 2018) (m20182009)

0.337 $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ の整数部分を a，小数部分を b とする．a と b の値を求めよ．

(新潟大 2019) (m20192007)

0.338 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け． $\sqrt{2}\sin 2x - \sqrt{2}\sin x - 2\cos x + 1 < 0$

(新潟大 2019) (m20192009)

0.339 関数 $f(x) = (x+3)\sqrt{-x^2-2x+3}$ $(-3 \leqq x \leqq 1)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の最大値を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to -3+0} f'(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} f'(x)$ を求めよ．

(新潟大 2019) (m20192013)

0.340 整数 $n \geqq 0$ に対して，$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ とする．次の各問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して $I_{2n-1} = \dfrac{(2^n \cdot n!)^2}{2n \cdot (2n)!}$，$I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2} \cdot \dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$ を求めよ． (3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{\sqrt{n} \cdot (2n)!}$ を求めよ．

(新潟大 2019) (m20192014)

0.341 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ と座標軸に囲まれた部分の面積を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

(新潟大 2020) (m20202002)

0.342 虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を含む指数関数 $e^{i\theta}$ を三角関数で表す公式はオイラーの公式と呼ばれる．物理の問題を扱うには，よく似た行列の関係式を用いると便利なことが多い．このことに関連した以下の問いに答えよ．

(1) オイラーの公式を書け．つまり，実数 θ に対して $e^{i\theta}$ を三角関数を用いて表せ．

(2) 二次正方行列 I および J を

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する．J^2 を計算し，J^2 と I の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3) 一般に二次正方行列 X に対し，そのゼロ乗 X^0 および指数関数 e^X は次式で定義される：

$$X^0 = I, \qquad e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n = I + X + \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{3!} X^3 + \cdots$$

(2) の関係式に着目すると，行列 $e^{\theta J}$ は I に比例する部分と J に比例する部分の和

$$e^{\theta J} = f(\theta) I + g(\theta) J$$

で表すことができる．このとき，関数 $f(\theta)$ および $g(\theta)$ を求めよ．

なお，必要ならば，三角関数のベキ展開（テイラー・マクローリン展開）が次式で与えられることを用いてもよい．

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} \qquad = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \cdots$$

$$\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots$$

(4) (3) で求めた行列 $e^{\theta J}$ に対して，その行列式の値を答えよ．

次に，これまでの結果の応用として，調和振動子の運動を表す微分方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega^2 x(t)=0$$

の解 $x(t)$ を求めたい．ここで ω は正の定数である．以下の問いに答えよ．

(5) 変数 $p(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$ および $q(t)=\omega x(t)$ を用いると，この微分方程式は,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$$

の形に表すことができる．ここで K は t に依らない二次正方行列である．行列 K を答えよ．

(6) (5) の微分方程式の解は次式で与えられる：

$$\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = e^{Kt}\begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$$

以上のことから，初期条件 $p(0)=p_0$, $q(0)=q_0$ に対応する解 $x(t)$ を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222006)

0.343 行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ．

(2) $\boldsymbol{A}$ を対角化する行列 $\boldsymbol{P}$ のうち，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となるものを求めよ．

ただし，$0\leq\theta\leq\pi/2$ とする．また，θ を求めよ．さらに，$\boldsymbol{P}$ を用いて $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ．

(3) 前問 (2) の条件において，$\mathbf{P}^6$ を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222009)

0.344 空間の　$0\leqq z\leqq\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$　,　$x^2+y^2\leqq 1$　を満たす部分の体積を求めよ．

(長岡技科大 1991)　　(m19912104)

0.345 空間の点 (x,y,z) の平面 $z=\sqrt{3}x$ に関する対称点を (x',y',z') とする．$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と表すとき，行列 A を求めよ．

(長岡技科大 1994)　　(m19942107)

0.346 $(a+bi)^2=i$ となる実数の組 (a,b) を求めよ．(ただし，$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位.)

(長岡技科大 1996)　　(m19962101)

0.347 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$ を求めよ．

(長岡技科大 2001)　　(m20012102)

0.348 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+2^n}$ を求めよ．

(長岡技科大 2001)　　(m20012103)

0.349 連続時間 $t[s]$ の関数 $f(t)$ のフーリエ変換は，

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

により計算される．このことを利用して以下の問に答えよ．ただし，$j=\sqrt{-1}$ であり，ω [rad/s] は角周波数を表す．また，a は正の実数とする．

(1) 関数 $f(t)=\begin{cases} 1 & , \quad 0<t<a \\ 0 & , \quad t<0,\ t>a \end{cases}$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，$f(t)$ と $|F(\omega)|$ をそれぞれ図示せよ．ただし，$|F(\omega)|$ は複素関数 $F(\omega)$ の絶対値を意味する．

(2) $f(t)=\begin{cases} \exp(-at) & , \quad t>0 \\ 0 & , \quad t<0 \end{cases}$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，$f(t)$ と $|F(\omega)|$ をそれぞれ図示せよ．

(3) $f(t-a)$ のフーリエ変換が $F(\omega)e^{-j\omega a}$ となることを証明せよ．

(4) $f(at)$ のフーリエ変換が $a>0$ に対して $\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$ となることを証明せよ．

(長岡技科大 2006)　　(m20062105)

0.350 $z=x^2+y^2$ とする，以下の問いに答えなさい．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めなさい．

(2) 空間の曲面 $z=x^2+y^2$ 上の点 (a,b,c) における接平面の方程式を求めなさい．

(3) 前問の接平面が点 $(0,0,-\sqrt{2})$ を通るような c の値を求めなさい．

(長岡技科大 2008)　　(m20082102)

0.351 $0<t<1$ として，空間の 4 点

$$A(t,\sqrt{1-t^2},0),\ B(t,-\sqrt{1-t^2},0),\ C(-t,0,\sqrt{1-t^2}),\ D(-t,0,-\sqrt{1-t^2})$$

を考える，以下の問いに答えなさい．

(1) AB の中点 E の座標を求めなさい．

(2) $\triangle CDE$ の面積 S を t で表しなさい．

(3) 四面体 $ABCD$ の体積 V を t で表しなさい．

(4) V を最大にする t の値とその最大値を求めなさい．

(長岡技科大 2008)　　(m20082103)

0.352 xy 平面において，連立不等式 $\sqrt{y} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ で表される領域を D とする．下の問いに答えなさい．

(1) 領域 D を図示しなさい．

(2) 連立不等式 $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq f(x)$ で表される領域が D であるような $f(x)$ を求めなさい．

(3) 積分順序の変更をして，重積分 $V=\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{1+x^3}\,dxdy$ を求めなさい．

(長岡技科大 2016)　　(m20162104)

0.353 (1) 極座標変換 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ に対して，ヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ．

(2) 重積分

$$\iint_{x^2+y^2 \leqq 1} \sqrt{x^2+y^2}\,\exp\Bigl(-\bigl(\sqrt{x^2+y^2}\bigr)^3\Bigr)dxdy$$

を求めよ．ただし， $\exp(t) = e^{\,t}$ である．

(金沢大 1999)　　(m19992204)

0.354 (1) マクローリンの展開

$$\sqrt{1-x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

の係数 a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ．

(2) $\sqrt{1-x} \fallingdotseq a_0 + a_1x$ を用いて，積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-c\sin^2\theta}\,d\theta \quad (0 < c < 1)$$

の値がおよそ $\dfrac{\pi}{2}\left(1-\dfrac{c}{4}\right)$ であることを示せ．

(金沢大 2000)　　(m20002201)

0.355 変数変換 $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ $(a, b$ は正定数$)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，(x,y) の動く領域 D を図示せよ．

(2) ヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$ を求めよ．

(金沢大 2000)　　(m20002202)

0.356 重積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{x}{y\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dxdy$ について次の問に答えよ．

ここに　$D = \left\{(x,y)\ :\ y \geq x \geq 0\ ,\ \dfrac{1}{2} \leq x^2+y^2 \leq 1\right\}$　とする．

(1) D の形を図示せよ．

(2) 極座標変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ を用いて重積分 I の値を求めよ．

(金沢大 2001)　　(m20012202)

0.357 不等式 $\displaystyle\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy < \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ を利用して次の問いに答えよ．

ただし，$D_1 = \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$，$D_2 = \{(x,y) : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 2\}$ とする．

(1) $\displaystyle\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy < \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$ を示せ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx < \sqrt{\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)}$ を示せ．

(金沢大 2002)　　(m20022202)

0.358 関数 $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(2) 閉領域 $D(a)=\left\{(x,y)|1 \leqq x^2+y^2 \leqq a\right\}$ $(a>1)$ に対して $\displaystyle\iint_{D(a)} f(x,y)dxdy=\frac{\pi}{2}$ であるとき，a の値を求めよ．

(金沢大 2003)　　(m20032202)

0.359 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$ とするとき, 次の問に答えよ.

(1) $1+x-\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}<f(x)<1+x-\dfrac{x^2}{2!}$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{4}\right)$ を示せ.

(2) (1) を利用して $\cos(0.1)+\sin(0.1)$ の近似値を小数点以下第 2 位まで求めよ.

(金沢大 2005)　　(m20052202)

0.360 関数 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $((x,y)\neq(0,0))$ について, 次の問に答えよ.

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を計算せよ.

(2) $0<\varepsilon<1$ とする. 積分 $I(\varepsilon)=\displaystyle\iint_{\varepsilon \leqq \sqrt{x^2+y^2} \leqq 1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dxdy$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}(\sin\varepsilon)I(\varepsilon)$ を求めよ.

(金沢大 2006)　　(m20062203)

0.361 領域 $D(\varepsilon)=\{(x,y)\mid x^2+y^2 \leqq 1-\varepsilon,\ |y| \leqq x\}$ $(0<\varepsilon<1)$ に対して
$I(\varepsilon)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\iint_{D(\varepsilon)}\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 領域 $D(\varepsilon)$ を図示せよ.　(2) $I(\varepsilon)$ を計算せよ.　(3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\log I(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}$ の値を求めよ.

(金沢大 2007)　　(m20072203)

0.362 $f(x)=\sqrt{1+x}$ $(x>-1)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$，$f''(x)$ および $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

(2) マクローリンの定理を適用し，$f(x)$ の $(n-1)$ 次近似多項式およびその剰余項 R_n を求めよ.

(3) (2) で得られた結果を $n=2$ の場合に用いて，$\sqrt{1.01}$ の近似値を 1.005 としたときの誤差を評価せよ.

(金沢大 2008)　　(m20082202)

0.363 次の問に答えよ.

(1) $(1+\sqrt{x}\,)^3$ は x の整式 $p(x), q(x)$ を用いて

$$(1+\sqrt{x}\,)^3=p(x)+q(x)\sqrt{x}$$

と表すことができる．$p(x)$ と $q(x)$ を求めよ.

(2) 次の等式

$$\left(\sqrt{x}\,\right)^{(n)}=\frac{-(2n-3)}{2x}\left(\sqrt{x}\,\right)^{(n-1)},\quad n=2,3,4,\cdots$$

を示せ．ただし，$(\sqrt{x}\,)^{(n)}$ は $\sqrt{x}$ の n 階導関数である.

(3) $f(x)=(1+\sqrt{x}\,)^3$ とおくとき,

$$f^{(n)}(x)=3\left(1-\frac{x}{2n-3}\right)\left(\sqrt{x}\,\right)^{(n)},\quad n=2,3,4,\cdots$$

を示せ.

(金沢大 2011)　　(m20112202)

0.364 xy 平面内の図形に関する, 次の問いに答えよ.

(1) $y = x^3$ 上の点 $P(t, t^3)$ から, $y = x$ へ下ろした垂線の足を Q とする. 点 Q の座標を, t を用いて表せ.

(2) 原点 O から点 Q までの距離を s とする. $t \geqq 0$ のとき, s を t の式として表せ.

(3) 点 P から点 Q までの距離を, (2) の s を変数として $f(s)$ と表すとする. $y = x$ と $y = x^3$ が $x \geqq 0$ の条件の下で囲む図形を, $y = x$ のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を, s に関する積分として $f(s)$ を用いて表せ.

(4) $V = \dfrac{4\sqrt{2}}{105}\pi$ を示せ.

(金沢大 2012)　　(m20122207)

0.365 関数 $f(x, y)$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

で定める. 次の問い (1)〜(3) に答えよ.

(1) x に関する偏導関数 $f_x(x, y)$ を求めよ.

(2) 偏導関数 $f_x(x, y)$ は原点 $(0, 0)$ で不連続であることを示せ.

(3) $f(x, y)$ は原点 $(0, 0)$ で全微分可能であることを示せ.

(金沢大 2013)　　(m20132204)

0.366 $D = \left\{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leqq x,\ y \geqq 0\right\}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) D を図示せよ.

(2) 極座標による変数変換を用いて, 2 重積分

$$\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy$$

を計算せよ.

(金沢大 2014)　　(m20142203)

0.367 関数 $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ $(|x| < 1)$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ を求めよ.

(2) $(x - x^3)f''(x) = f'(x)$ を示せ.

(3) $f^{(n)}(0)$ を求めよ.

(金沢大 2015)　　(m20152202)

0.368 (1) $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(-1 < x < 1)$ を示せ. ここで, $\sin^{-1} x$ は逆正弦関数を表す.

(2) 座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi)$$

に対するやコビ行列式 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

(3) 重積分

$$\iint_D \frac{y}{(x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy$$

を求めよ．ただし，$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \frac{1}{4}\leqq\ x^2+y^2\leqq\frac{3}{4},\ 0\leqq\ y\leqq\ x\right\}$ とする．

(金沢大 2015)　　(m20152203)

0.369　次の広義積分の収束・発散を判定せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+3x}$　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$　　(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$

(金沢大 2015)　　(m20152206)

0.370　有界閉領域 D,E を

$$D=\left\{(x,y)\in R^2\ \middle|\ \frac{1}{2}\leqq\ x^2+y^2\leqq\ x\right\}\ ,$$

$$E=\left\{(r,\theta)\in R^2\ \middle|\ -\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\ r\leqq\ \cos\theta\right\}$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) D を図示せよ．

(2) 写像 $T:R^2\to R^2$ を

$$T(r,\theta)=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

とする．$(r,\theta)\in E$ のとき $T(r,\theta)\in D$ であることを示せ．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$ の値を求めよ．

(金沢大 2015)　　(m20152208)

0.371　位置ベクトル $\boldsymbol{r}=xi+yj+zk$, $r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,　曲面 S の面要素を dS, dS に垂直な単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ として以下の問いに答えなさい．

(1) $\nabla\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ を計算しなさい．ただし $y\neq 0$ とする．

(2) 原点 O を含まない閉曲面 S に対して，以下の面積分を求めなさい．

$$\iint_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}dS$$

(3) 原点 O を含む半径 a の球面 S に対して，次の式が成り立つことを示しなさい．

$$\iint_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}dS=4\pi$$

(4) (3) の関係式が，原点 O を含む任意の閉曲面 S に対して成り立つことを示しなさい．

(金沢大 2015)　　(m20152210)

0.372　$Q_0(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $Q_n(t)$ は n 次式 $(n=1,2,3)$ で

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(Q_n(t))^2\,dt=1$,

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1}Q_m(t)Q_n(t)dt=0\ \ (0\leqq\ m<n\leqq\ 3)$,

(c) $Q_n(t)$ の t^n の係数は正

とする．このとき $Q_n(t)$ $(n=1,2,3)$ を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162203)

0.373　次の計算をしなさい．ただし，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸方向の単位ベクトルである．

(1)　スカラー関数 $\phi = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ の勾配

(2)　ベクトル関数 $\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ の発散

(3)　ベクトル関数 $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$ の回転

(金沢大 2016)　　(m20162209)

0.374　x は $0<x<1$ を満たす実数とし，n は $n>2$ を満たす整数とする．

(1)　$f(x) = \sin^{-1} x$ の導関数を求めよ．ここで，$\sin^{-1} x$ は $\sin x$ の逆関数である．

(2)　$\sqrt{1-x^2} < \sqrt{1-x^n} < 1$ を示せ．

(3)　$\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^n}}dx < \dfrac{\pi}{6}$ を示せ．

(金沢大 2016)　　(m20162222)

0.375　a,b,c は正の定数とし，x,y は次で定義される R^2 の領域 D の点とする．

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 \,\middle|\, 0 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq c^2 \right\}$$

(1)　変数 r,θ を用いて $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$ と変数変換を行う．この時,
関数行列式（ヤコビアン）$\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|$ を求めよ．

(2)　(1) の変数変換を用いて重積分　$\displaystyle\iint_D \sqrt{c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$　を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162223)

0.376　$7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 1 \cdots (*)$ を次の手順で，(x,y) 平面に図示せよ．

(1)　$(*)$ の左辺は $2\times\ 2$ の対称行列 A を用いて，$(x\quad y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すことが出来る．A を求めよ．

(2)　A の固有値 $(\lambda_1 < \lambda_2)$，および，長さ 1 の固有ベクトル $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$（$\lambda_1$に対応），
$v_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$（$\lambda_2$に対応）を求めよ．ただし，$a>0$, $c>0$ と選ぶ．

(3)　行列 $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ とおく．$P^{-1}AP$ を計算せよ．

(4)　変数変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ としたとき，(x,y) 平面上の図形は，反時計回りに q ラジアン回転すると (X,Y) 平面上の図形に移る．q を求めよ．また，上記の図形を (X,Y) 平面上で図示せよ．

(5)　$(*)$ を (x,y) 平面上で図示せよ．

(金沢大 2016)　　(m20162234)

0.377　(1)　不等式 $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < \dfrac{\pi}{6}$ を示せ．

(2) n を自然数とする．広義積分

$$I_n = \int_1^\infty e^{1-t}\frac{1}{t^n}dt$$

は関係式

$$I_1 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k! + (-1)^{n+1}(n+1)!\, I_{n+2}$$

を満たすことを示せ.

(金沢大 2017)　　(m20172205)

0.378 関数 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ について，次の問いに答えよ.

(1) $f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)$ を求めよ.

(2) 領域 $D = \left\{(x,y) \,\middle|\, 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x,\ x^2+y^2 \geqq 1,\ x \leqq 1\right\}$ を図示せよ.

(3) (2) の領域 D 上の重積分

$$\iint_D \{f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)\}\,dxdy$$

を求めよ.

(金沢大 2017)　　(m20172208)

0.379 関数 $f(x,y) = (x+y)e^{-(x^2+y^2)}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 曲面 $z = f(x,y)$ 上で点 $(1, 0, f(1,0))$ における接平面の方程式を $z = ax+by+c$ と表すとき，定数 a, b, c を求めよ.

(2) $f(x,y)$ の極値を調べよ.

(3) 次の広義重積分の値を求めよ．必要ならば，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを利用してよい.

$$\iint_D f(x,y)dxdy, \quad D = \{(x,y)\,|\,x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$$

(金沢大 2018)　　(m20182208)

0.380 被積分関数に自然対数を含んでいる定積分

$$I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx$$

の値が $0.18 < I < 0.28$ となることを確かめる．次の問いに答えよ.

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，不等式

$$\frac{\log(1+x)}{1+x^2} \geqq \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)(1-x^2)$$

が成り立つことを示し，これを用いて $I \geqq \dfrac{11}{60}$ であることを導け.

(2) 2 つの等式

$$1 + \tan\theta = \frac{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\cos\theta} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

および

$$\int_0^{\pi/4} \log\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right\}d\theta = \int_0^{\pi/4}\log(\cos\theta)d\theta$$

がそれぞれ成り立つことを示し，これらを用いて定積分 I を計算せよ.

(3) $\pi < 3.2$ および $\log 2 < 0.7$ であることと問題 (1)(2) の結果を合わせて，$0.18 < I < 0.28$ であることを確かめよ．

(金沢大 2019)　　(m20192202)

0.381 正接関数 $\tan x$ の逆関数を $\tan^{-1} x$ とし，$x \neq 0$ となる (x, y) に対して関数 $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ を定める．次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数を計算して，$f_y(x, y) - f_x(x, y)$ と $f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)$ を求めよ．

(2) $0 < a < 1$ に対し

$$D_a = \left\{(x, y) \;\middle|\; a^2 \leqq x^2 + y^2,\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x\right\}$$

とするとき，重積分

$$I_a = \iint_{D_a} \{f_y(x, y) - f_x(x, y)\}\, dxdy$$

を計算し，極限値 $\displaystyle\lim_{a \to +0} I_a$ を求めよ．

(金沢大 2019)　　(m20192203)

0.382 (1) $A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ を座標平面上の 3 点とする．線分 AB, BC, CA 上にそれぞれ点 P, Q, R を，三角形 PQR における $\angle Q$ が直角になるようにとる．ただし，P, Q, R は A, B, C のいずれとも異なるとする．$Q(t, 0)$, $\angle CQR = \theta$ とおくとき，直角三角形 PQR の面積 S を t と θ を用いて表せ．

(2) (1) で求めた S を，集合

$$D = \left\{(t,\ \theta) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; -1 < t < 1,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$$

を定義域とする関数と考える．このとき，$\dfrac{\partial S}{\partial t} = \dfrac{\partial S}{\partial \theta} = 0$ を満たす $(t,\ \theta)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた $(t,\ \theta)$ において，関数 S が極値をとるかどうか調べよ．

(金沢大 2019)　　(m20192207)

0.383 $x \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$f(x) = x\left(\log\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) - 2\right) + \sqrt{2}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x\right)$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x \log(x)}$ を求めよ．

(2) f の導関数を求めよ．

(3) f の極値を求めよ．

(金沢大 2020)　　(m20202207)

0.384 $\boldsymbol{R}^2$ 上の関数

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \sqrt{3}x - 3y$$

について，次の問いに答えよ．

(1) f のすべての極値を求めよ．

(2) 閉領域 $D = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 9,\ y \geqq 0\right\}$ における f の最大値と最小値を求めよ．

(3) (2) の D に対して，重積分

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

を求めよ．

(金沢大 2021)　　(m20212209)

0.385 (1) $\alpha > 1$ のとき，関数 $f(x) = (x + |x|)^\alpha$ は $\boldsymbol{R}$ 上の C^1 級関数であることを証明せよ．

(2) 集合 $\left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{4}(x+|x|)^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq -2\right\}$ の面積を求めよ．

(3) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin(x^2)}$$

(金沢大 2022)　　(m20222201)

0.386 次の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int \sqrt{3x+1}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx$

(富山大 2000)　　(m20002303)

0.387 次の各問いの計算をせよ．

(1) $x = \log(y + \sqrt{y^2+1})$ を y について解け

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 1+0} \frac{x}{1-x^2}$，　$\displaystyle\lim_{x \to 1-0} \frac{x}{1-x^2}$　　(3) $\displaystyle\frac{d}{dx} e^{x \log x}$

(富山大 2001)　　(m20012301)

0.388 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ．

(1) A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ．ただし，$\lambda_1 > \lambda_2$ とする．

(2) λ_1, λ_2 に対する固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ のうちで，長さが 1，第 1 成分が正のものを求めよ．

(3) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ は直交することを証明せよ．

(4) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ とするとき，$\mathbf{x} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2$ をみたす実数 k_1, k_2 を求めよ．

(富山大 2001)　　(m20012306)

0.389 次の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{2x+1}}\right)$　　(2) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(x^{\sin x}\right)$　$(x > 0)$

(富山大 2003)　　(m20032301)

0.390 $a > 0$ とし，$D = \left\{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leqq \frac{3}{4}a^2\right\}$ とする．R^3 内の曲面

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad (x,y) \in D$$

の面積を求めよ．

(富山大 2004)　　(m20042316)

0.391 次の関数の導関数を求めよ．

(1) $x\cos x$　　(2) $\sqrt{1+x^2}$　　(3) $\displaystyle\frac{1}{1+\sin^2 x}$　　(4) $\mathrm{Tan}^{-1}x$

(富山大 2005)　　(m20052301)

0.392 関数 $f(x,y)=2xy-x^2-y^2$ を考える. 座標平面の点 $(1,2)$ を P とする. 以下の問に答えよ.

(1) 点 P での, x および y に関する偏微分係数を求めよ.

(2) 点 P での, ベクトル $\vec{a}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ 方向の方向微分係数を求めよ.

(3) 点 P での, 曲面 $z=f(x,y)$ の接平面の方程式を求めよ.

(富山大 2005)　　(m20052303)

0.393 $2\times\ 2$ 行列　$L=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-\beta^2} & -\beta/\sqrt{1-\beta^2} \\ -\beta/\sqrt{1-\beta^2} & 1/\sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix}$　とするとき（ただし, $0<\beta<1$ とする）, 以下の問いに答えよ.

(1) L による 1 次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を行ったとき, $x'^2-y'2=x^2-y^2$ が成り立つことを示せ.

(2) L が行列の方程式 $L^2-2L/\sqrt{1-\beta^2}+I=O$ を満足することを示せ. ただし, I は $2\times\ 2$ の単位行列で, O は $2\times\ 2$ の零行列である.

(3) L の固有値を求めよ.

(4) L と別の $2\times\ 2$ 行列 $M=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-\gamma^2} & -\gamma/\sqrt{1-\gamma^2} \\ -\gamma/\sqrt{1-\gamma^2} & 1/\sqrt{1-\gamma^2} \end{pmatrix}$ を用いた 1 次変換 $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}=ML\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を行ったとき, $x''^2-y''^2=x^2-y^2$ が成り立つことを示せ. ただし, $0<\gamma<1$ とする.

(5) L の逆行列を求めよ.

(富山大 2007)　　(m20072303)

0.394 (1) $f(\theta(t))=\sqrt{1+\sin^2\theta(t)}+3\cos\theta(t)+2$ において, $\dfrac{df}{dt}$ を求めよ.

(2) $f(\theta_1(t), \theta_2(t))=5+\cos\theta_1(t)+2\sin(\theta_1(t)+\theta_2(t))$ において, $\dfrac{df}{dt}$ を求めよ.

(富山大 2007)　　(m20072305)

0.395 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\log_e\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}x^{\frac{1}{x}}$

(3) $\displaystyle\int\sin^{-1}x dx$　　(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-2x}$

(富山大 2008)　　(m20082301)

0.396 次の微分方程式の解を $y=f(x)$ の形で求めよ. ただし, (1)〜(3) については一般解, また, (4) については特殊解とする.

(1) $x^3\dfrac{dy}{dx}+y=0$　　(2) $x\dfrac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2+y^2}$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4x+2y}{2x+y-1}$　　(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}-10y=0$　$\left(x=0 \text{ の時}\quad y=0,\ \dfrac{dy}{dx}=7\right)$

(富山大 2008)　　(m20082305)

0.397 (1) 位置ベクトル $\overrightarrow{r}=(x,y,z)$ とし, スカラー関数 $f(x,y,z)=\dfrac{1}{|\overrightarrow{r}|}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ の勾配 $\mathrm{grad}\, f$ を, $\overrightarrow{r}$ を用いて表せ.

(2) ベクトル関数 $\overrightarrow{A}(x,y,z)=(x^2y, xy^2, 2z)$ の発散 $\mathrm{div}\,\overrightarrow{A}$ を求めよ．

(3) スカラー関数 $f(x,y,z)$ について，その勾配の回転 $\mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\, f$ は，常に零ベクトルとなることを示せ．

(富山大 2009)　　(m20092302)

0.398 懸垂曲線 $y=a\cosh\dfrac{x}{a}\quad(a>0)$ と直線 $y=b\quad(b>a)$ で囲まれた図形を考える．

(1) 直線と懸垂曲線は $x=\pm\ell$ で交差する．逆双曲線関数を用いて，定数 a と b で ℓ を表せ．

(2) 曲線の長さは曲線の線素 $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ を積分することによって与えられる．この図形の周囲の長さを a と b を用いて表せ．

双曲線関数 $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ ，　$\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，逆双曲線関数 $\cosh^{-1}x=\pm\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ $(x>1)$ ，　$\sinh^{-1}x=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ を用いても良い．

(富山大 2012)　　(m20122305)

0.399 次の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int x^2e^x dx$　　　　(2) $\displaystyle\int\frac{1}{3x^2+2\sqrt{3}x+2}dx$

(富山大 2013)　　(m20132302)

0.400 $y=\sqrt{x-a}$, $(a>0,\ x\geq a)$ で与えられる曲線 C と C 上の点 $P(p,q)$ で接し，点 $(0,b)$ を通る直線 L を考える．以下の設問に答えよ．

(1) 直線 L の方程式を a,b,p 用いて表せ．

(2) p と q を a と b で表せ．

(3) 上の結果を用いて，直線 L と曲線 C および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．ただし，$b=0$ とする．

(富山大 2013)　　(m20132305)

0.401 次の計算をせよ．ただし，(1) を解くにあたっては，$x+\sqrt{x^2+5}=t$ なる変数変換を用い， 積分計算結果は x の式で表すこと．

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}dx$　　　　(2) $\displaystyle\int\frac{x\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(富山大 2014)　　(m20142302)

0.402 $\mathbf{R}^2$ をユークリッド平面とする．すなわち，$\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2)\ \in\mathbf{R}^2$ に対し，その距離を $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ で定義したときの距離空間とする．$f_1,\ f_2\ :\ \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ を連続関数とし， $f\ :\ \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ を，$f(x_1,\ x_2)=(f_1(x_1,\ x_2),\ f_2(x_1,\ x_2))\quad\left((x_1,\ x_2)\in\mathbf{R}^2\right)$ で定義する．このとき，f が連続写像であることを示せ．

(富山大 2014)　　(m20142309)

0.403 x,y を実数とする．座標平面上の点 (x,y) に対して，行列

$$A=\begin{pmatrix} x & y & 2\\ y & 1 & y\\ 2 & y & x\end{pmatrix}$$

を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 直交行列 $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，${}^tPAP$ を求めよ．

(2) A の相異なる固有値の個数が 2 であるような点 (x, y) の集合を図示せよ．

(富山大 2015)　　(m20152303)

0.404 スカラー関数 $f(x, y, z) = e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)}$ について， 次の各問いに答えよ．ただし，$\overrightarrow{i}$，$\overrightarrow{j}$，$\overrightarrow{k}$ は，それぞれ直角座標系の x，y，z 方向の単位ベクトルとする．

(1) 点 $P\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 0\right)$ を含む等位面（関数 f の値が等しい点の集合）の点 P における単位法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ の x，y，z 成分を求めよ．

(2) 関数 f の勾配の発散 $\nabla \cdot \nabla f$ を求めよ．

(3) 関数 f の勾配の回転 $\nabla \times \nabla f$ を計算し，$\overrightarrow{0}$ となることを示せ．

(4) 点 $Q(1, 0, 1)$ における，ベクトル $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \sqrt{2}\,\overrightarrow{k}$ の方向への f の方向微分係数を求めよ．

(富山大 2017)　　(m20172303)

0.405 $y = a \arcsin\left(\sqrt{\dfrac{x}{a}}\right) + \sqrt{ax - x^2}$　(a： 定数，$0 < x \leq a$) の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(富山大 2018)　　(m20182301)

0.406 半径 $a(a > 0)$ の円が x 軸に接して滑らずに転がるとき，円周上の定点が描く曲線をサイクロイドといい，パラメータを t として

$$x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

で与えられる．このとき次の各問いに答えよ．

(1) 導関数 $\dfrac{dx}{dt}$，$\dfrac{dy}{dt}$ を計算せよ．

(2) $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$ を求めよ．

(3) 一般に，パラメータ t が α から β まで変化したとき，点 $(x(t), y(t))$ が描く曲線の長さ l は次式で表される．

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

サイクロイドにおいて，$t = t_0$ $(0 < t_0 < 2\pi)$ を初期値として

円が一回転したとき $(t = t_0 + 2\pi)$ の曲線の長さを求めよ．

(富山大 2018)　　(m20182307)

0.407 次の計算をせよ．ただし，計算の概略も示すこと．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(xe^{\sin x}\right)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\left(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x\right)$

(富山大 2019)　　(m20192301)

0.408 次の計算をせよ．ただし，計算の概略も示すこと．

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 1}$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 1}}$

(富山大 2019)　　(m20192302)

0.409 次の各問いに答えよ．ただし，$\overrightarrow{i}$，$\overrightarrow{j}$，$\overrightarrow{k}$ はそれぞれ x，y，z の各軸方向の単位ベクトルとする．

(1) ベクトル場 $\overrightarrow{A}(x,y,z)=(xyz)\overrightarrow{i}+(-y^2z^3)\overrightarrow{j}+(2x^2y)\overrightarrow{k}$ に対して $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\overrightarrow{A})$ を求めよ．

(2) スカラー場 $\phi(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 　(ただし，$x^2+y^2+z^2\neq 0$) に対して，

(a) $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$ を計算せよ．

(b) grad ϕ を求めよ．

(c) div(grad ϕ) $=0$ を示せ．

(富山大 2019)　　(m20192303)

0.410 次の式の値を求めよ．ただし，計算の概略も示すこと．

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy \quad (D\ :\ x^2+y^2\leqq 1,\ 0\leqq y)$$

(富山大 2022)　　(m20222303)

0.411 次の関数の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \log(x^2-1)\,dx$

(3) $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx$

(4) $\displaystyle\int \sqrt{x}\log x\,dx$

(福井大 2000)　　(m20002404)

0.412 関数 $f(X)=\sqrt{3}\sin X+\cos X$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 関数 $f(X)$ の導関数 $f'(X)$ を求めなさい．

(2) 関数 $f(X)$ の区間 $0\leq X\leq\pi$ における最大値 f_M と最小値 f_m を求めなさい．

(3) 関数 $f(X)$ の定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(X)dX$ を求めなさい．

(4) 関数 $f(X)$ の区間 $0\leq X\leq\pi$ でのグラフの概略を示しなさい．

(福井大 2000)　　(m20002406)

0.413 次の複素数を極形式で表せ．ただし，$j=\sqrt{-1}$ である．

(1) $1+j$

(2) $(1+\sqrt{3}j)/(1+j)$

(福井大 2000)　　(m20002418)

0.414 以下の関数の 1 次導関数を求めなさい．

(1) x^ne^{-x}　　(2) x^x　　(3) $\cos^{-1}x^3$　　(4) $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}$　　(5) $\sin^{-1}(n\sin x)$

(福井大 2001)　　(m20012402)

0.415 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\log(1+\tan\theta)d\theta$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cos x^2dx$

(福井大 2001)　　(m20012406)

0.416 $(0,-2,0)$ を中心とする球上の点 $(1,-3,\sqrt{2})$ における接平面の方程式を求めよ．また，この接平面が 3 つの座標軸と交わる点をそれぞれ A,B,C とするとき，立体 $OABC$ の体積を求めよ．

(福井大 2001)　　(m20012415)

0.417 点 (x_1,y_1) から，直線 $ax+by+c=0$ に下ろした垂線の長さは

$\dfrac{|\,ax_1+by_1+c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ で表されることを証明せよ．

(福井大 2003)　　(m20032401)

0.418 次の関数のグラフを描きなさい．　　$y=\sqrt[3]{x(x^2-1)}$

(福井大 2003)　　(m20032404)

0.419 次の関数を微分しなさい．

(1) $y=\sqrt[3]{x^2(x-1)}$　　(2) $y=\sin(3x+2)$　　(3) $y=\log(\sin x^2)$

(福井大 2003)　　(m20032405)

0.420 一般に，関数 $y=f(x)$ について，x の微小増加量 Δx にともなう y の微小増加量を Δy とすると，導関数 dy/dx は近似的に $\Delta y/\Delta x$ を表す．このことを利用して，下記の問いに答えよ．

(1) 空気中の音速 u と絶対温度 T との間に，$u=\sqrt{kRT}$ の関係が成り立つものとする．ただし，比熱比 k と気体定数 R は定数である．このとき，du/dT を求めよ．

(2) 空気の絶対温度を 2% 増やすと，音速は近似的に何 % 増加するか答えよ．

(福井大 2003)　　(m20032406)

0.421 次の関数を積分しなさい．

(1) $y=\dfrac{\sqrt{\log x}}{x}$　　(2) $y=x\sin x^2$　　(3) $y=\dfrac{1}{\cos x}$

(福井大 2003)　　(m20032409)

0.422 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-1}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$

(福井大 2004)　　(m20042402)

0.423 次の関数の導関数を求めなさい．

(1) $y=x^2e^{3x}\sin x$　　(2) $y=e^{\sqrt{x}}$

(福井大 2004)　　(m20042406)

0.424 次の不定積分を求めなさい．

$$\int\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}dx$$

(福井大 2004)　　(m20042410)

0.425 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{3x}\sqrt{1-e^{3x}}dx$

(福井大 2005)　　(m20052413)

0.426 次の不定積分および定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$

(福井大 2005)　　(m20052418)

0.427 a, b を正の数とするとき, 以下の関係が成り立つことを証明せよ.

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

(福井大 2005) (m20052420)

0.428 次の不定積分を求めよ. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $\quad a>0$, $|x| \leq a$
ただし，必要に応じて三角関数の 2 倍角の公式
“ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ および $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ ”を使え.

(福井大 2006) (m20062403)

0.429 次の行列 $\boldsymbol{B}$ とベクトル $\boldsymbol{x}$ がある．行列 $\boldsymbol{B}$ で定まる一次変換で，平面の図形 $2{x_1}^2 + {y_1}^2 = 4$ が異なる図形にうつされる.

(1) 変換後の図形の式を求めなさい.

(2) 変換後の図形を描きなさい.

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

(福井大 2006) (m20062406)

0.430 以下の問に答えよ．なお，i は虚数単位である.

(1) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ を極形式（$\cos\theta + i\sin\theta$ の形式）で表せ.

(2) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ の 3 乗根を複素平面上に図示せよ.

(福井大 2006) (m20062411)

0.431 次の値を求めなさい.

(1) $(x^3y^2)^{-\frac{2}{3}} \times\ x^2y^{\frac{4}{3}}$

(2) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{729}}$

(3) $4\log_2\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\log_2 3 + \log_2\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

(4) $5^{\log_5 7}$

(5) $\log_2 3 \cdot \log_{27} 25 \cdot \log_5 16$

(福井大 2006) (m20062413)

0.432 $y = a\sin x + b\cos x$ について次の問いに答えよ.

(1) 上の関数が，$y = A\sin(x+\theta)$ の形に変換できることを示しなさい.

(2) $a=1$, $b=\sqrt{3}$ の時，A および θ の値を求めよ.

(3) $0 \leq x \leq \pi$ とする時，関数の最大値と最小値，ならびにその時の x の値を示せ.

(福井大 2006) (m20062415)

0.433 次の関数を微分しなさい.

(1) $y = \sqrt{x}$

(2) $y = \dfrac{1}{x+1}$

(3) $y = \cos x \sin^2 x$

(4) $y = e^{x^2}$

(5) $y = x^{3x}$

(福井大 2006) (m20062416)

0.434 次の関数の不定積分を求めよ.

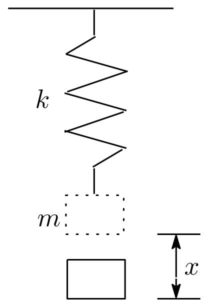
(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$

(2) $\dfrac{e^{2x}}{e^x - 1}$

(3) $x\log x$

(福井大 2006) (m20062417)

0.435 図のように，バネ定数が k で，質量を無視できるバネに，質量 m のおもりを吊り下げる．つりあった位置から，上下方向に振動させる時の変位を x とする．このとき，時間 t に対するおもりの運動は，次の運動方程式によって表現できる．



$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

(1) $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とおくとき，$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ は，上の運動方程式の一般解であることを示しなさい．

(2) $m = 0.16(kg)$, $k = 4(kg/sec^2)$ とするとき，おもりの運動の周期を求めなさい．

(3) $t = 0$ において，$x = 2(cm)$, $\dfrac{dx}{dt} = 0(cm/sec)$ とするとき，定数 A, B の値を求め，3 秒間の変位のグラフのおよその形を示せ．

(福井大 2006)　　(m20062418)

0.436 次の積分を求めよ．（途中の計算式も書くこと）　$\displaystyle\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$　　($a > 0$)

(福井大 2007)　　(m20072404)

0.437 (1) 関数 $f(x) = \log(1 + x)$（ただし $x > -1$）の 1〜4 階の導関数（つまり $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, および $f^{(4)}(x)$ ）をそれぞれ求めよ．

(2) (1) の結果にもとづき, 上で定義された関数 $f(x)$ の n 階の導関数を推測し，$f^{(n)}(x)$ が実際に推測された関数で表現されることを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) (2) の結果を使い，関数 $f(x)$ のマクローリン展開（$x = 0$ でのテーラー展開）を，無限級数の和の形 $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \text{の形}\right)$ で求めよ,

(4) (3) の結果を用いて，関数 $g(x) = \log\left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)$（ただし $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$）のマクローリン展開を，無限級数の和の形で求めよ（経過を書く必要はあるが，証明の必要はなし）．

(福井大 2008)　　(m20082401)

0.438 (1) 次の関数を積分せよ．　（途中の計算式も書くこと）

$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$　　　　ヒント ： $\sqrt{x^2 + a} = t - x$ とおく．

(2) 次の定積分を求めよ．　（途中の計算式も書くこと)}

$\displaystyle\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}dx$　　　　$(a > 0)$

なお，必要に応じて三角関数の二倍角の公式 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ を用いよ．

(福井大 2008)　　(m20082403)

0.439 次の値を求めよ．

(1) $\cos 55^\circ + \cos 65^\circ + \cos 175^\circ$　　(2) $\log_3 9\sqrt{5} + \dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{1}{5}$　　(3) $\left(\sqrt[3]{27^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(4^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$

(福井大 2008)　　(m20082412)

0.440 次の関数を微分しなさい．

(1) $y = \sin^{-1} x$　　(2) $y = x^x$　　(3) $y = \log\sqrt{x^2 + a^2}$

(4) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$　　(5) $y = a^x$

(福井大 2008)　　(m20082414)

0.441 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$ (2) $\dfrac{1-x}{x^2}$ (3) $\tan x$ (4) $e^x \cos x$

(福井大 2008) (m20082416)

0.442 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ (2) $y = x^{1/x}$ (3) $y = \log_a x$

(4) $y = \tan^{-1} x$ (5) $y = e^{-a^2x^2}$

(福井大 2009) (m20092408)

0.443 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $y = (3x-2)^5$ (2) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (3) $y = \dfrac{x}{ax+b}$

(4) $y = \dfrac{\log x}{x}$ (5) $y = \dfrac{1}{e^x + 1}$

(福井大 2009) (m20092410)

0.444 (1) 次の関数の導関数を求めよ.

$$f(x) = x\sqrt{x^2+a} + a\log\left(x + \sqrt{x^2+a}\right)$$

(2) 次の関数の不定積分を求めよ.

$$f(x) = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

(福井大 2009) (m20092416)

0.445 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{1-2x^2}\, dx$ (2) $\displaystyle\int \log x\, dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-9}$

(福井大 2010) (m20102404)

0.446 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin x - x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right)$ (3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n+2}{3n^2+4}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{9n^2+2n} - 3n\right)$ (5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

(福井大 2010) (m20102413)

0.447 次の微分方程式を解け.

(1) $xy\dfrac{dy}{dx} = y - 1$ (2) $\dfrac{dy}{dx} + y = x$ (3) $x\dfrac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2+y^2}$

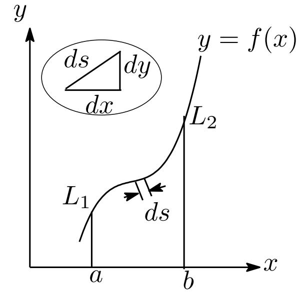
(福井大 2010) (m20102420)

0.448 次の各問にしたがって，半径 R の円の円周の長さを求めよ.

(1) 右の図のように，関数 $f(x)$ の L_1 から L_2 の長さは $\displaystyle\int_{L_1}^{L_2} ds$ で求めることができる.

$$\int_{L_1}^{L_2} ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

となることを導け.



(2) 点 (x, y) と x 軸との間の角度を θ とすると，x および y を θ の関数で表せ． また，dy/dx を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_{L_1}^{L_2} ds = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ の積分の式を用いて，半径 R の円の円周の長さが $2\pi R$ となることを示せ．ただし，計算の途中過程も必ず示すこと．

(福井大 2011)　　(m20112404)

0.449 次の値を求めよ．

(1) $(x^3y^2)^{-\frac{2}{3}} \times\ x^2y^{\frac{4}{3}}$

(2) $5^{\log_5 7}$

(3) $4\log_2\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\log_2 3+\log_2\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

(4) $(\sin 40^\circ + \sin 50^\circ)^2 + (\cos 50^\circ - \cos 40^\circ)^2$

(5) $\sin x+\cos x = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}$ の値

(福井大 2011)　　(m20112413)

0.450 次の関数の不定積分を求めよ

(1) $x(2x-3)^2$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$　　(3) $\dfrac{e^x}{e^x+1}$　　(4) $e^x\cos x$

(福井大 2011)　　(m20112415)

0.451 次の公式を使って極限値を求めよ．

〈公式〉 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\,,\quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+2x)}{x}$

(福井大 2012)　　(m20122403)

0.452 次の定積分を求めよ．

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a \geqq 0)$$

(福井大 2012)　　(m20122406)

0.453 $\displaystyle\iint_R \left(y-x^3\right)dxdy\,,\quad \left(R : 0 \leqq x \leqq 1,\ x^2 \leqq y \leqq 2\sqrt{x}\right)$ の値を求めよ．
また積分領域 R も図示せよ．

(福井大 2012)　　(m20122409)

0.454 縦軸を y とし，横軸を x とする座標系でベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ が $\dfrac{{x_1}^2}{4}+{y_1}^2 = 1$ 上の点であるとする．
$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ として，ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ で一次変換する．

(1) 一次変換後の $\boldsymbol{y}$ の関係式を求めよ．

(2) 一次変換後の x_2 と y_2 の関係が表す形を描け．

(福井大 2012)　　(m20122413)

0.455 次の値を求めよ.

(1) $\dfrac{a^{\frac{5}{6}}b^{-\frac{1}{3}}\left(b^{-\frac{3}{2}}\sqrt{a^2b}\right)^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{2}}b^{-2}}$ ，　ただし，a,b は正の数とする.

(2) $\log_5 \sqrt[8]{5}$

(3) $\dfrac{\log_5 8\cdot\log_3 6\cdot\log_2 3}{\log_5 3+\log_5 2}$

(福井大 2012)　　(m20122414)

0.456 次の方程式を解け.

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$$

(福井大 2012)　　(m20122415)

0.457 次の関数を微分せよ.

(1) $y=\sqrt{4\sin x+6}$

(2) $y=\log\sqrt[5]{\dfrac{x+5}{x-5}}$

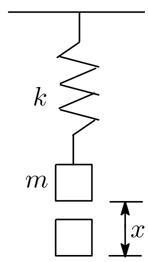
(3) $y=-\tan^5 x$

(4) $y=\sin^5 x+\cos^5 x$

(福井大 2012)　　(m20122417)

0.458 図のように，バネ定数が k で，質量を無視できるバネに，質量 m のおもりを吊り下げる．つりあった位置から，上下方向に振動させる時の変位を x とする．このとき，時間 t に対するおもりの運動は，次の運動方程式によって表現できる.

$m\dfrac{d^2x}{dt^2}+kx=0$



(1) $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とおくとき，$x=A\cos\omega t+B\sin\omega t$ は，上式の一般解であることを示せ.

(2) $m=2.25(kg)$，$k=4\pi^2(kg\cdot m/s^2/m)$ とするとき，おもりの振動の周期を求めなさい.

(3) $t=0$ において，$x=2(cm)$，$\dfrac{dx}{dt}=0\ (cm/s)$ とするとき，定数 A,B の値を求め，3 秒間の変位と時間の関係のおよその形を示せ.

(福井大 2012)　　(m20122423)

0.459 次の式を計算せよ．なお，$\alpha>1$ とする.

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\alpha}}$$

(福井大 2013)　　(m20132402)

0.460 極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{2x - x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x}$

(福井大 2013)　　(m20132405)

0.461 次の設問に答えよ．

(1) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{729}}$ の値を求めよ．

(2) $4\log_2 \sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\log_2 3 + \log_2 \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ の値を求めよ．

(3) $\log_{10} E(M) = 1.5M + 11.8$ の時，$E(7)$ および $\dfrac{E(9)}{E(7)}$ の値を求めよ．

(福井大 2013)　　(m20132415)

0.462 以下の設問に答えよ．ただし以下で i は虚数単位である．

(1) $\dfrac{5-i}{5+i}$ を $a+bi$ の形で表せ．

(2) $\left|\dfrac{1+i}{2+i}\right|$ の値を求めよ．

(3) 次の複素数を極形式で表せ．

1) $2+2\sqrt{3}i$　　2) $\dfrac{2}{1-i}$

(4) $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$，$y = \cos\beta + i\sin\beta$ とするとき，$xy = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$ であることを確かめよ．

(5) 上記 (4) の x について，$x^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$ が成り立つことを示せ．ただし n は自然数とする．

(福井大 2013)　　(m20132417)

0.463 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \sqrt{x^2+1}$　　(2) $y = xe^{-x^2}$

(福井大 2014)　　(m20142402)

0.464 $\displaystyle \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} (y+y^3)dydx$ の <u>積分順序を変更</u> して，その値を求めよ．また，<u>積分領域も図示</u> せよ．

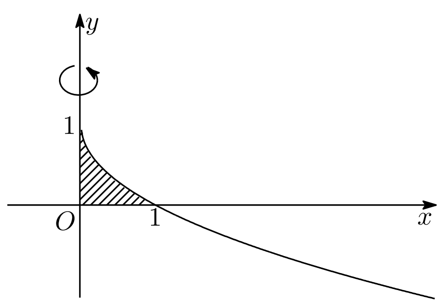
(福井大 2014)　　(m20142408)

0.465 次の (1), (2) および (3) の関数の不定積分を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$　　(2) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$　　(3) $\dfrac{e^{3x}}{e^x - 1}$

(福井大 2014)　　(m20142421)

0.466 曲線 $y = 1 - \sqrt{x}$ と直線 $x = 0$ および $y = 0$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転できる立体の体積を求めよ．



(福井大 2015)　　(m20152404)

0.467 単振子の周期 T は，振子の長さを ℓ，重力の加速度を g とすれば，$T=2\pi\sqrt{\ell/g}$ で与えられる．ℓ，g が微小量 $\triangle\ell$，$\triangle g$ だけ変化するときの T の変化量を $\triangle T$ とするとき，$\triangle T$ が近似的に以下の式で表されることを示せ．

$$\frac{\triangle T}{T}=\frac{1}{2}\left(\frac{\triangle\ell}{\ell}-\frac{\triangle g}{g}\right)$$

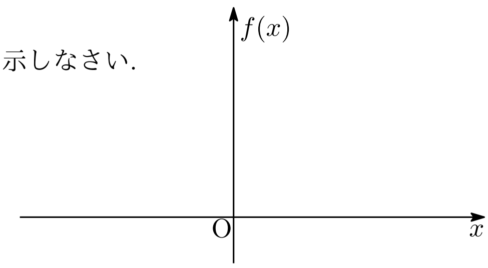
(福井大 2015)　　(m20152405)

0.468 平均 μ，分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ は，確率密度関数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

をもつ．

(1) $N(10,4)$ に従う確率変数 X の確率密度関数を図示しなさい．



(2) 確率変数 X が正規分布 $N(10,4)$ に従うとき，次の確率を求めなさい．
必要に応じて，別紙の標準正規分布表を用いなさい．

(i) $P[X>13]$　　(ii) $P[8<X<12]$

(福井大 2015)　　(m20152426)

0.469 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}{x-1}$

(福井大 2016)　　(m20162401)

0.470 次の関数の導関数を求めよ．

(1) $y=x^3\sqrt{3x^2+1}$　　(2) $y=(1+x)^x$

(福井大 2016)　　(m20162402)

0.471 $\displaystyle\int_0^1\int_y^1\sqrt{1+x^2}dxdy$ の積分順序を変更することによって，その値を求めよ．また積分領域も図示せよ．

(福井大 2016)　　(m20162405)

0.472 次の微分方程式の一般解を導出せよ．

(1) $\displaystyle\frac{dy}{dx}+y\sin x=0$　　(2) $\displaystyle\sqrt{x}\frac{dy}{dx}+2xy=x$　　(3) $\displaystyle(x+y)\frac{dy}{dx}=-y$

(福井大 2016)　　(m20162408)

0.473 次の微分方程式を解け．

(1) $\displaystyle x\frac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2+y^2}$　　(2) $(1+x)dy+(1+y)dx=0$

(福井大 2016)　　(m20162413)

0.474 次式に与えられる行列 A について，以下の問いに答えよ．(4) 以外については計算の課程も示すこと．

$$A=\begin{pmatrix}1&3&0\\3&1&4\\0&4&1\end{pmatrix}$$

(1) A の固有値を λ として，固有方程式を“ $(1-\lambda)$ の多項式 $=0$ ”の形に表せ．

(2) A の固有値を全て求めよ．固有方程式“ $(1-\lambda)$ の多項式 $=0$ ”の左辺をどのように因数分解したのかがわかるように解答すること．

(3) A の固有値を λ_1, λ_2, λ_3, $(\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3)$ とする．固有値 λ_n に対応する正規化（規格化）された固有ベクトル $\boldsymbol{u}_n$ を以下の形で求めよ．

$$\boldsymbol{u}_1=\frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3\\ \square\\ \square\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{u}_2=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\ \square\\ \square\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{u}_3=\frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3\\ \square\\ \square\end{pmatrix}$$

(4) 以下の空欄を埋めよ．ただし，(あ) と (い) には数値，(う) と (お) には語句，(え) には行列が入る．なお，$\boldsymbol{u}_n\cdot\boldsymbol{u}_m$ は $\boldsymbol{u}_n$ と $\boldsymbol{u}_m$ の内積，${}^tP$ は P の転置行列を表す．3 つの固有ベクトル $\boldsymbol{u}_n$ の長さは全て $\boxed{\text{(あ)}}$ であり，さらに $\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{u}_3\cdot\boldsymbol{u}_1=\boxed{\text{(い)}}$ である．従って，行列 $P=(\boldsymbol{u}_1\,\boldsymbol{u}_2\,\boldsymbol{u}_3)$ は $\boxed{\text{(う)}}$ 行列である．よって，${}^tP$ と $\boxed{\text{(え)}}$ の積は単位行列となる．なお，P が $\boxed{\text{(う)}}$ 行列であるのは A が $\boxed{\text{(お)}}$ 行列であることの必然的な結果である．

(5) P^{-1} を求めよ．

(6) $P^{-1}A^2P$ を求めよ．

(福井大 2016)　　(m20162419)

0.475 以下の積分をおこないなさい．ただし，$i=\sqrt{-1}$ とする．

(1) $\displaystyle\int e^{-i\omega t}dt$　　(2) $\displaystyle\int_0^{1-i}(iz+2)dz$　　なお，積分経路は直線とする．

(福井大 2016)　　(m20162423)

0.476 2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix}4&2\\2&4\end{pmatrix}$ 及びベクトル $\boldsymbol{q}_0=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ を用いて以下のような漸化式を定義する．このとき，以下の設問に答えよ．

$$\boldsymbol{q}_{n+1}=A\boldsymbol{q}_n\quad(n\text{ は整数})$$

(1) $\boldsymbol{q}_n$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\varepsilon_n=\frac{{}^T\boldsymbol{q}_n\,A\,\boldsymbol{q}_n}{{}^T\boldsymbol{q}_n\,\boldsymbol{q}_n}$ 及び $\displaystyle\boldsymbol{p}_n=\frac{\boldsymbol{q}_n}{|\boldsymbol{q}_n|}$ とするとき，ε_n 及び $\boldsymbol{p}_n$ を求めよ．ここで，${}^T\boldsymbol{q}_n$ は $\boldsymbol{q}_n$ を転置したベクトルである．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n$ 及び $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{p}_n$ を求めよ．

(福井大 2018)　　(m20182406)

0.477 $\displaystyle\int_0^\infty\left\{\int_0^1\sqrt{x}e^{-2y}dx\right\}dy$ を計算せよ．

(福井大 2018)　　(m20182417)

0.478 次の関数を微分せよ．

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$　　(2) $y=xe^{-x^2}$

(3) $y=(2^x+1)^3$　　(4) $y=\sqrt{\sin x}$

(福井大 2018)　　(m20182424)

0.479 次の関数を x で微分せよ.

(1) $y = \sin^3 e^x$ (2) $y = \sqrt[3]{x\sqrt{x-1}}$ （ただし，$x > 1$）

(福井大 2020) (m20202402)

0.480 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \left(\dfrac{4x+3}{x^2-3x+4}\right)$ (2) $y = \sin^5 x\ \cos 5x$

(3) $y = \log(1+x^2)$ (4) $y = e^{\sqrt{x}}$

(福井大 2020) (m20202423)

0.481 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx$ (2) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

ただし，m および n は正の整数とする.

(福井大 2021) (m20212402)

0.482 次の関数 $u = f(x,y,z)$ の全微分を求めよ.

$$u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

(福井大 2021) (m20212404)

0.483 次の定積分を計算せよ.

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

(福井大 2021) (m20212415)

0.484 非負の実数 θ[rad] を媒介変数とする曲線

$$\begin{cases} x = \theta\cos\theta \\ y = \theta\sin\theta \end{cases} \qquad (1)$$

は「アルキメデスのらせん」と呼ばれ，その概形は図 1 に示す「蚊取り線香」に近い，図 2 のような渦巻状の曲線となる.

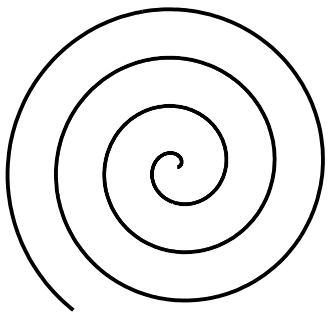


図 1 ：蚊取り線香

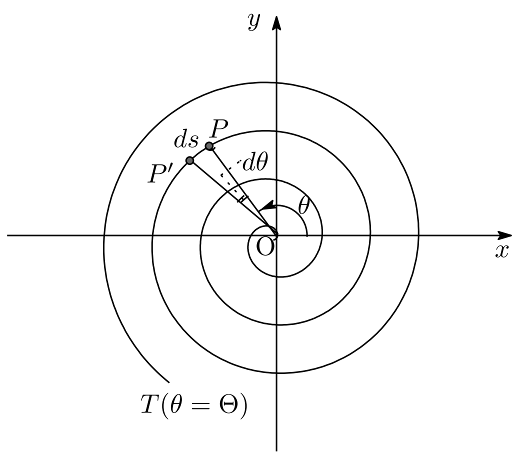


図 2 ：「アルキメデスのらせん」

図 2 に示すように，曲線上の点 P に対して θ を微小角度 $d\theta$ だけ増加させ，点 P が P' に移動したとする．このときの $P-P'$ 間の微小な長さを ds と表すと，$\dfrac{ds}{d\theta}$ は,

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \tag{2}$$

で与えられる．以下の問いに答えよ．

(1) 式 (1) の x, y に対し，$\dfrac{dx}{d\theta}$，$\dfrac{dy}{d\theta}$ を各々求めよ．

(2) 式 (2) を利用して，$\dfrac{d\theta}{ds}$ を θ によって表せ，$\dfrac{ds}{d\theta}$ ではなく $\dfrac{d\theta}{ds}$ を求めることに注意．

(3) (2) で求めた θ の関数 $\dfrac{d\theta}{ds}$ について，グラフの概形を描きたい．$\dfrac{d\theta}{ds}$ の θ に関する 1 階導関数を用いて増減を調べ，$\dfrac{d\theta}{ds}$ を縦軸に，θ を横軸に取ったグラフの概形を示せ．

(4) 図 2 に示すように，「らせん」の内側の端点は原点 O に一致し，外側の端点 T に対する θ を $\theta = \Theta$ とおく．このとき，O から T までの曲線の長さ L を Θ によって表せ．【ヒント】L の計算過程で現れる定積分には複数の計算方法が知られており，そのひとつに $\theta = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ と置換する方法がある $\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right.$ は双曲正弦関数 $\sinh t$ であるので，双曲線関数を用いてもよい$\left.\right)$.

(福井大 2021)　　(m20212419)

0.485 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \log x(5-x)$

(2) $y = \dfrac{4x-1}{e^x}$

(3) $y = \dfrac{\sin x}{\cos x + 1}$

(4) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}+2x}$

(福井大 2021)　　(m20212420)

0.486 (1) 次の不定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-16}{e^x-4}dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}dx$

(2) 次の定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_6^{10} x(x-6)^2 dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} (\cos\theta+1)^2 d\theta$

(福井大 2021)　　(m20212421)

0.487 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \log\left(5\sqrt{x^2+1}+5x\right)$　　(2) $y = \dfrac{-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(3) $y = \cos\dfrac{5\pi}{x^2+5}$　　(4) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(福井大 2022)　　(m20222401)

0.488 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^2 e^{2x}\sqrt{e^x}\ dx$　　(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\ dx$

(福井大 2022)　　(m20222403)

0.489 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ を含む定積分，あるいは不定積分に関し，以下の問いに答えよ．ただし，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\sqrt{2\pi} \tag{1}$$

であることを用いてよい．答えを導く思考過程あるいは計算過程を丁寧に記述すること．

(1) 式 (1) を利用して，定積分　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{2}x)dx$　の値を求めよ．

(2) 不定積分　$\displaystyle\int xf(\sqrt{2}x)dx$　を求めよ．

(3) 定積分　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2f(\sqrt{2}x)dx$　の値を求めよ．

(福井大 2022)　　(m20222424)

0.490 閉領域 $D=\{(x,y)|4\leqq x^2+y^2\leqq 9,\ y\leqq x\}$ を図示し，2 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ．

(静岡大 2004)　　(m20042505)

0.491 (1) 関数 $f(x)=x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$ を微分せよ．

(2) 2 変数関数 $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ に対して，$\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$ を計算せよ．

(3) 2 変数関数 $f(x,y)=e^x(x^2+y^2)$ の極値を求めよ．

(静岡大 2005)　　(m20052501)

0.492 2 変数関数 $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$ の第 2 次偏導関数をすべて求めよ．

(静岡大 2006)　　(m20062502)

0.493 $a>0$ とし，$D(a)=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq a\,,\ 0\leq y\leq\sqrt{3}\}$ とおく．
このとき 2 重積分　$I(a)=\displaystyle\iint_{D(a)}\frac{y}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy$　について，次の問いに答えよ．

(1) $D(a)$ を図示し，$I(a)$ の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty} I(a)$ を求めよ．

(静岡大 2006)　　(m20062505)

0.494 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-3}-1}$ を求めよ．

(静岡大 2007)　　(m20072501)

0.495 (1) 関数 $f(x)=\sin x\cos x$ の原点を中心とするテイラー級数を求めよ．

(2) 複素数 $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{14}$ を $x+iy$ の形に改めよ．（i は虚数単位）

(3) 2 変数関数 $f(x,y)=x^4+y^4-(x-y)^2$ の極値を求めよ．

(静岡大 2008)　　(m20082501)

0.496 $(0,2\pi)$ において，$f(x)=x+\sqrt{2}\cos x$ の極値を求めよ．なお，極大値・極小値の区別も明記すること．

(静岡大 2008)　　(m20082507)

0.497 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$ を求めよ．

(静岡大 2008)　　(m20082508)

0.498 以下の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\,,\ 0\le x\ ,\ 0\le y\}$

(静岡大 2009)　(m20092504)

0.499 (1) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ を $x=1$ を中心にテイラー展開せよ.

(2) 複素数平面上に 2 点 $A(\sqrt{3}+2i)$, $B(2\sqrt{3}+3i)$ をとる. 以下の問いに答えよ.

(a) 点 C を三角形 ABC が正三角形となるように定める. 点 C を表す複素数を求めよ.

(b) 点 D は直線 AC に関して B と線対称となる点である. 点 D を表す複素数を求めよ.

(静岡大 2009)　(m20092505)

0.500 次の重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D e^{\frac{y}{x}}\,dxdy\,,\quad D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqq\ y\leqq\ 1\,,\ \sqrt{y}\leqq\ x\leqq\ 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy\,,\quad D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqq\ y\leqq\ 1\,,\ -1\leqq\ x\leqq\ -y\right\}$

(静岡大 2012)　(m20122501)

0.501 3 つの複素数を $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$, $\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$, $\gamma=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とする. ここで, i は虚数単位をあらわす. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を複素平面上に図示せよ.

(2) α^{2011} を $x+yi$ $(x,y$ は実数$)$ という形にあらわせ.

(3) $\alpha^m=\beta,\ \alpha^n=\gamma$ をみたす整数 m,n があれば求めよ.

(4) 複素平面上で $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を結んでできる三角形の内角をそれぞれ a,b,c とするとき,

$$(\cos a+i\sin a)(\cos b+i\sin b)(\cos c+i\sin c)$$

を求めよ.

(静岡大 2012)　(m20122507)

0.502 次の関数の偏導関数を求めよ.

(1) $f(x,y)=\mathrm{arctan}\dfrac{y^2}{x}-\mathrm{arctan}\dfrac{x+y^2}{x-y^2}$　　(2) $f(x,y)=x\sqrt{y^2-x^2}+y^2\mathrm{arcsin}\dfrac{x}{y}$

(静岡大 2013)　(m20132503)

0.503 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy\,,\quad D=\left\{(x,y)\,\middle|\,1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 4\right\}$ を求めなさい.

(静岡大 2013)　(m20132509)

0.504 次の極限値を求めなさい.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x\sin(x)-\frac{\pi}{2}}{\cos(x)}\right)$　　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2}\right)$

(静岡大 2015)　(m20152501)

0.505 次の不定積分を求めなさい.

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$$

(静岡大 2016)　(m20162501)

0.506 変数 (r,θ) $(r \geq 0\ ,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ から変数 (x,y) への変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

を考える．また領域 D を

$$D = \{(x,y) \quad ;\ -x \leq y \leq x\}$$

によって定義する．

(1) (x,y) が領域 D を動くとき (r,θ) が動く範囲を求めよ．また，その対応が 1 対 1 であることを示せ．

(2) 次の積分の値を上記の変数変換を用いて求めよ．

$$\iint_D \exp(-x^2-y^2-xy)dxdy$$

ここで積分の範囲は領域 D である．

(岐阜大 1997) (m19972601)

0.507 $e^{i\pi}+1=0$ であることを証明せよ. ここで, $i=\sqrt{-1}$ である.

(岐阜大 2005) (m20052609)

0.508 i を虚数単位としたとき，$\sqrt{i}$ を複素数 $a+bi$ の形で表せ．ただし a, b は実数とする．

(岐阜大 2006) (m20062602)

0.509 $-4+i4$ の 3 乗根を求めよ．ただし，$i=\sqrt{-1}$ である．

(岐阜大 2006) (m20062611)

0.510 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ (2) $\displaystyle\int_1^e \log x dx$

(岐阜大 2007) (m20072623)

0.511 次の関数 $f(x)$ を x について微分せよ.

(1) $f(x)=\sqrt{e^{2x}+1}$ (2) $f(x)=\dfrac{x}{1+\sin 3x}$

(岐阜大 2008) (m20082612)

0.512 2 以上の整数 n に対して，不等式

$$\frac{1}{2} \leqq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^n}}dx \leqq \frac{\pi}{6}$$

が成り立つことを示せ.

(岐阜大 2009) (m20092607)

0.513 次の式の値を求めよ.

(1) $\tan\theta = 1/3$ のとき．$(\sin\theta+\cos\theta)^2$ の値を求めよ.

(2) $(1+\tan\alpha)/(1-\tan\alpha) = 2+\sqrt{3}$ のとき，$\cos\alpha$ の値を求めよ.

(岐阜大 2009) (m20092614)

0.514 a, b を正の実数とする．次の広義積分 I の値を求めよ．

$$I = \iint_D \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2}}\,dxdy\,, \qquad D\,:\,\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

(岐阜大 2012)　　(m20122602)

0.515 以下の式でガンマ関数 $\Gamma(t)$ を定義する．

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x}x^{t-1}dx\,,\ t > 0.$$

次の問に答えよ．ただし， $t > 0$ のとき $\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^t = 0$ となることは証明しなくても使ってよい．

(1) $t > 0$ に対して $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ となることを示せ．

(2) 自然数 n に対して $\Gamma(n+1) = n!$ となることを示せ．

(3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ，すなわち

$$\left(\int_o^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx\right)\left(\int_o^\infty e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}dy\right)$$

を x, y の 2 変数関数の重積分で表せ．

(4) 変数 (x, y) から (r, θ) への変数変換

$$\begin{cases} \sqrt{x} = r\cos\theta, \\ \sqrt{y} = r\sin\theta \end{cases}$$

に対してヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ．

(5) 前問 (4) の変数変換を用いて (3) の重積分を計算し $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ．

(岐阜大 2014)　　(m20142601)

0.516 $a, b > 0$ とする．xy 平面の第 1 象限において $\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}} = 1$ が表す曲線を C とする．

また，x 軸，y 軸および C で囲まれる閉領域を A とする．以下の問に答えよ．

(1) $x = a\cos^4 t.\ y = b\sin^4 t$ とする．このとき，$\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}}$ の値を求めよ．また，$\dfrac{dx}{dt}$ を t を用いて表せ．

(2) 曲線 C を $y = y(x)$ と表し，$y'(x) = \dfrac{dy(x)}{dx}$ とする．このとき，$\lim_{x\to a-0} y'(x)$ および $\lim_{x\to 0+0} y'(x)$ を求めよ．

(3) A の概形を描け．

(4) A の面積を求めよ．

(岐阜大 2016)　　(m20162601)

0.517 x を変数とする関数 $F(x)$ が

$$F(x) = \int_x^{\sqrt{3}x} \sqrt{1 - t^2}\,dt$$

と与えられるとき，次の問に答えよ．ただし， $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とする．

(1) $\dfrac{dF}{dx}$ を求めよ．

(2)　$F(x)$ の最大値を求めよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}$ を求めよ．

(豊橋技科大 1996）　(m19962705)

0.518　$\sin A+\cos A=\sqrt{2}$ のとき，$\sin A\cos A$ および $\sin^4 A+\cos^4 A$ の値を求めよ．

(豊橋技科大 1998)　(m19982702)

0.519　次の極限値を求めよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

(豊橋技科大 1998)　(m19982706)

0.520　$x>0$ であるとき，以下の不等式が成り立つことを示せ．ただし，log は自然対数を表す．

(1)　$\log(x+1)<x$

(2)　$\displaystyle\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-1<\int_0^x\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt$

(豊橋技科大 1998)　(m19982708)

0.521　次の各問いに答えよ．

(1)　次の無限数列の一般項を示し，収束・発散を調べ，収束する場合にはその極限値を求めよ．

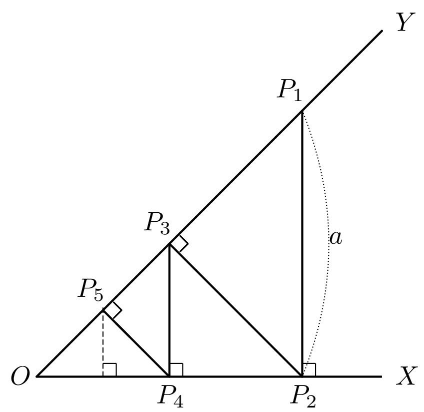
(a)　$\dfrac{3}{1}$, $\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{7}{7}$, $\dfrac{9}{10}$, $\dfrac{11}{13}$, $\cdots\cdots$

(b)　$\sqrt{2}-\sqrt{1}$, $\sqrt{4}-\sqrt{2}$, $\sqrt{6}-\sqrt{3}$, $\cdots\cdots$

(2)　図において，$\angle XOY=\pi/4$, P_1P_2 の長さを a とする．OY 線上の点 P_1 から，OX 線上に垂線を下ろした点を P_2 とする．さらに点 P_2 から OY 線上に垂線を下ろし，その点を P_3 とする．同様に順次 , P_4 , P_5 , $\cdots\cdots$ を無限にとるものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(a)　垂線（線分）の和を級数で示せ．

(b)　垂線（線分）の和を求めよ．



(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$ 　を求めよ．

(豊橋技科大 1999)　(m19992704)

0.522 式（イ）,（ロ）,（ハ）に関して各問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{（イ）}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{（ロ）}$$

$$z=3x^2+2\sqrt{3}xy+5y^2-4\sqrt{3}x+4y \qquad \text{（ハ）}$$

(1) 式（イ）の A の行列式を求めよ．

(2) 式（ロ）の固有値 λ を求めよ．

(3) 式（ロ）の固有ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めよ．

(4) x, y, z で表される 2 次曲面（ハ）を x, y, z に関して座標変換し，標準形で表せ．標準形とは，楕円面, 一葉双曲面, 二葉双曲面, 楕円放物面, 二次すい面を指す．

(豊橋技科大 1999)　　(m19992708)

0.523 次の微分方程式の一般解 $y(x)$ を示せ．ただし，任意定数として新たな記号を用いた場合には，その記号が任意定数であることを明記せよ．また，$i=\sqrt{-1}$ とする．

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+2y=0$$

(豊橋技科大 2000)　　(m20002705)

0.524 複素数 $-2+2\sqrt{3}i$ について,

(1) 絶対値を求めよ.

(2) 偏角を求めよ.

(3) 2 乗根を求めよ.

（豊橋技科大 2004）　　(m20042708)

0.525 $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^8$ を計算すると，$A+Bi$ となる．A および B を求めよ. ただし，A と B は実数とする.

（豊橋技科大 2004）　　(m20042709)

0.526 複素数 $z_1=\sqrt{3}+i$，$z_2=1+\sqrt{3}i$ について，次の値を求めよ．ただし，$\mathrm{Re}(z)$ は z の実部を，$|z|$ は z の絶対値を表す.

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)|z_2|^2$$

(豊橋技科大 2006)　　(m20062701)

0.527 関数 $y=f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ に関する以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ が $0<x<\sqrt{3}$ の範囲において上に凸であることを示せ.

(2) 関数 $f(x)$ の点 $(t, f(t))$ における接線 h の方程式を求めよ.

(3) 接線 h と直線 $x=0$，$x=1$，および $y=0$ で囲まれる領域の面積 $S(t)$ を求めよ．ただし，t の範囲は $0\leq t\leq 1$ とする.

(4) 面積 $S(t)$ が $t=\dfrac{1}{2}$ のときに最小となることを示せ.

(5) $t=\dfrac{1}{2}$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と接線 h，および直線 $x=0$，$x=1$ で囲まれる領域の面積を求めよ．

(豊橋技科大 2007)　　(m20072703)

0.528 (1) 次の関数の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$

(2) 次の関数を微分せよ．ただし，$x\neq 0$ とする．　$\exp\left(-\sin\dfrac{1}{x}\right)$

(3) 次の関数を微分せよ．ただし，$x\pm a\neq 0$ とする．　$\log\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$

(豊橋技科大 2009)　　(m20092701)

0.529 定積分 $I(n,a)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}x^{2n}\,dx$ について以下の問いに答えよ．ただし，n は 0 または正の整数，a は実数とする．

(1) $n=0,\ a=1$ のとき，$I(0,1)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ である．

$a>0$ のとき，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ であることを証明せよ．

(2) 問 (1) の結果を用いて定積分 $I(n,a)$ を n と a の関数として表せ．ただし，n は 1 以上とする．

(豊橋技科大 2009)　　(m20092702)

0.530 行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ a & -b \end{pmatrix}$ で与えられる 1 次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ により，曲線 $y=x^2$ の上の点 (x,y) は，曲線 $x^2+2xy+y^2+\sqrt{2}x-\sqrt{2}y=0$ の上の点 (x',y') に移される．$a>0$ であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) x,y を用いて x' および y' を表せ．

(2) a を用いて b を表せ．

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は，1 次変換 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}$ によりベクトル $\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ に移される．$|\boldsymbol{q}|=|\boldsymbol{p}|$ であるとき，a の値を求めよ．

(4) $\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる最小の正の整数 n を求めよ．

(豊橋技科大 2009)　　(m20092703)

0.531 次の関数について以下の問いに答えよ．

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

(1) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

(2) $f(x)$ の一次導関数を $f'(x)$ とする．$f'(0)$ の値を求めよ．

(豊橋技科大 2010)　　(m20102703)

0.532 媒介変数 t を用いて表される次の曲線について, 以下の問いに答えよ．

$$x=\sqrt{3}\sin t$$
$$y=\sqrt{3}\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)$$

ただし, $0\leq t\leq\dfrac{\pi}{3}$ である．

(1) $t = 0,\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{3}$ のそれぞれに対応する x y 座標上の点 A, B および C の座標を示せ.

(2) この曲線は点 A, B および C を通る楕円の一部を表している. この曲線と x 軸, y 軸の正の部分で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

(豊橋技科大 2010)　　(m20102704)

0.533 (1) 次式が成り立つような定数 a の値を求めよ.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x + a - \sqrt{x^2 + x + 1}\right) = 1$$

(2) 次の関数を微分せよ.

$$f(x) = \log\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$$

(豊橋技科大 2011)　　(m20112705)

0.534 (1) 次の不定積分を解け.

$$\int \frac{3x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$$

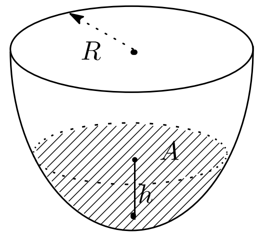
(2) $x = 2(\theta - \sin\theta),\ y = 1 - 2\cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ で表される曲線について以下の問いに答えよ.

(a) $y \geqq 0$ となる θ の範囲を求めよ.

(b) $y \geqq 0$ の範囲の曲線と x 軸とで囲まれた部分の面積 S を求めよ.

(豊橋技科大 2011)　　(m20112706)

0.535 半径 R の上に開いた半球があり，上面が地面に対して平行になるように置かれている．この半球に水が入っており（下図の斜線部分），半球の底から測った水面の高さを h とする．次の問いに答えよ．ただし，$h \leq R$ とする．



(1) 水面の面積 A を h の関数として表せ.

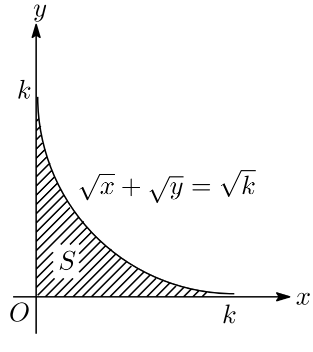
(2) 水面の体積 V を h の関数として求めよ.

(3) 最下部に微小な小穴を開けた．単位時間当たりの水の体積 V の変化，すなわち dV/dt を示せ．ただし，小穴の大きさは十分に小さく，小穴を開けても半球の体積は変化しないと考えてよい.

(4) (3) の状況において，流体に関する基本定理から，単位時間当たりに小穴から流れ出る水の体積（体積速度）は $Sk\sqrt{h}$ で表される（S は微小な小穴の面積，k は正の定数）．単位時間当たりに小穴から流出する水の体積が，半球において単位時間当たりに減少する水の体積に等しいことを用いて，高さ h と時間 t の関係式（微分方程式）を示せ．さらに，$t = 0$ において $h = R$ であったとし，水が全て流出するのに要する時間 T を求めよ.

(豊橋技科大 2013)　　(m20132703)

0.536 (1) 下図に示される，曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k} \quad (k \geq 0)$ と x 軸，y 軸で囲まれる図形 S の面積が $\dfrac{1}{6}k^2$ となることを導け.



(2) 曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ と z 軸に垂直な平面 $z=t\ \ (0 \leq t \leq 1)$ との交線の方程式を求めよ．

(3) 曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ と xy 平面，yz 平面，zx 平面で囲まれる立体 V を，z 軸に垂直な平面 $z=t\ \ (0 \leq t \leq 1)$ で切ったとき切り口は上の図形 S と相似な形状となる．この切り口の面積が $\dfrac{1}{6}(1-\sqrt{t})^4$ と表されることを示せ．

(4) 立体 V の体積を求めよ．

(豊橋技科大 2014)　　(m20142701)

0.537 $x-y$ 平面上の 2 つの曲線 $y=f(x)=a-\cos 2x$ と $y=g(x)=2\sqrt{2}\sin x$ に関する以下の問いに答えよ．ただし，a は定数である．

(1) $f(x)$ と $g(x)$ の導関数 $f'(x)$ と $g'(x)$ を求めよ．

(2) $f'(x)=g'(x)$ となる x を求めよ．ただし，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(3) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において接するとき，a の値を求めよ．

(4) (3) のように 2 つの曲線が接するとき，$x \geqq 0$ かつ (3) の接点までの範囲で y 軸と 2 つの曲線が囲む面積を求めよ．

(豊橋技科大 2015)　　(m20152701)

0.538 関数 $f(x,y)=x^2-2xy+3y^2$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $(1,2,9)$ における接平面の方程式を求めよ．

(3) $x(t)$, $y(t)$ はともに t について微分可能な関数で $\left(\dfrac{df}{dt}\right)_{t=0}=0$ をみたしており，

さらに $x(0)=1,\ y(0)=0,\ \left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{t=0}>0$ とする．$t=0$ のとき，

単位ベクトル $\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}}\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}$ を求めよ．

(豊橋技科大 2019)　　(m20192701)

0.539 次の行列 A, B に関して，以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ -\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

(1) A の行列式の値を求めよ．

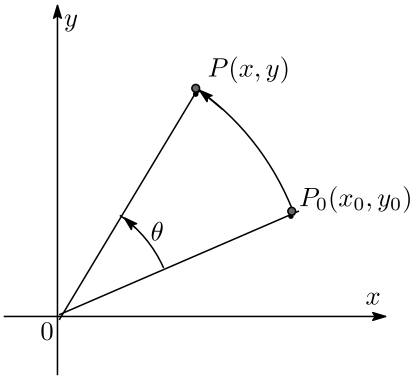
(2) A の逆行列を求めよ．

(3) BA を求めよ．

(4) $ABABA^2$ を求めよ．

(豊橋技科大 2020)　　(m20202701)

0.540 図のように，xy 平面上の点 $P_0(x_0,y_0)$ を原点 O のまわりに θ だけ回転した点 $P(x,y)$ に移す座標変換は次の線形変換により表される．また，このときの変換行列を $A(\theta)$ と定義する．以下の設問に答えよ．



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) xy 平面上の点を x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍する変換行列 B を a と b を用いて表せ．

(2) xy 平面上の点を原点 O のまわりに $(-\theta)$ 回転し，その後 x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍し，最後に原点 O のまわりに θ 回転する線形変換を考える．このときの変換行列 C を a, b, $\cos\theta$ および $\sin\theta$ を用いて表せ．

(3) 次に示す変換行列 D の固有値を求め，それぞれの固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルをすべて求めよ．

$$D = \begin{pmatrix} \dfrac{11}{4} & \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{4} & \dfrac{9}{4} \end{pmatrix}$$

(4) 変換行列 C が変換行列 D に等しいとき，a, b および θ の値を求めよ．ただし，θ は $0 \leq \theta \leq \pi/2$ の範囲にあるとする．

(豊橋技科大 2021)　　(m20212701)

0.541 次の重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2 y dxdy$,　　$D = \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq x,\ 0 \leqq x \leqq 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$,　　$D = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0\ \right\}$

(豊橋技科大 2022)　　(m20222703)

0.542 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D y\sin(x+y)dxdy, \quad D = \left\{(x,\ y) \;\middle|\; x+y \leqq \pi,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xydxdy, \quad D = \left\{(x,\ y) \;\middle|\; \left|x - \frac{1}{\sqrt{3}}y\right| \leqq 1,\ \left|x + \frac{1}{\sqrt{3}}y\right| \leqq 2\right\}$

(豊橋技科大 2023)　　(m20232703)

0.543 関数 $y = e^{\sqrt{3}x}(\sin x + 1)$ の第 n 次導関数が $y^{(n)} = e^{\sqrt{3}x}\left\{2^n \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}n\right) + \left(\sqrt{3}\right)^n\right\}$ となることを証明せよ．

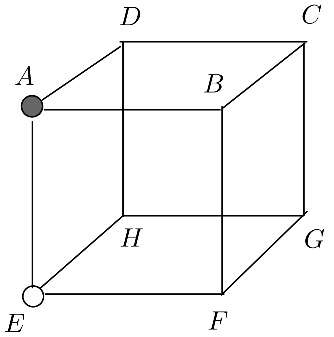
(名古屋大 2005)　　(m20052802)

0.544 図1のように，各頂点に A〜H の名前がつけられた，一辺の長さ a の立方体を考える．最初に，黒いピンと白いピンが，それぞれ頂点 A，頂点 E に設置してある．サイコロを4回振り，1回目と2回目のサイコロの出た目の合計分だけ，黒いピンを $A \to B \to C \to D \to A \cdots$ と移動させ，3回目と4回目のサイコロの出た目の合計分だけ，白いピンを $E \to F \to G \to H \to E \cdots$ と移動させることとする．次の問いに答えよ．

(1) 黒いピンが頂点 C に止まる確率を求めよ．

(2) 黒いピンと白いピンの距離が $\sqrt{2}a$ となる確率を求めよ．

(3) 黒いピンと白いピンの距離の期待値を求めよ．なお，無理数は無理数のままで解答して良い．



(名古屋大 2008)　　(m20082804)

0.545 以下の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx$ （m, n は負でない整数）

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\, dx$ （ヒント：$x = \tan\theta$とおけ．また，$\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right)$ である．）

(名古屋大 2011)　　(m20112803)

0.546 以下の問いに答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 x} dx$ の値を求めよ．

(2) 関数 $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ の導関数を求めよ．

(3) $y = \dfrac{1}{2}x^2$ によって表される曲線の $0 \leq x \leq 1$ の部分の長さを求めよ．

(名古屋大 2014)　　(m20142803)

0.547 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$ の値を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx$ の値を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\, dx$ の値を求めよ．

(4) $I_n = \displaystyle\int (\log x)^n \, dx$ の漸化式を導き，I_3 を求めよ．なお，n は0以上の整数とする．

(名古屋大 2022)　　(m20222803)

0.548 次の 2×2 の行列 A について以下の問に答えよ．本問題において，ベクトルは2次元の縦ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を意味する．

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値とそれぞれの固有値に対する一つの固有ベクトルを求めよ．

(2) (1) で求めた固有値と固有ベクトルを用いて行列 E と B を適当に定め，行列 A を

$$A = EBE^{-1}$$

の形で表せ．ここで，E^{-1} は E の逆行列で B は $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ のような形である．

(3) (2) で定めた E と B を用いて，A^n はどのように表すことができるか．ここで，A^n は n 個の A を掛け合わせたものである．

（ヒント）まず，$A = EBE^{-1}$ の表現を用いて A^2 がどのようになるかを調べよ．

(4) ベクトル全体の集合を V と書く．V の任意の二つの要素 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$，$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$，に対して，

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

とする．ベクトルの列 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \cdots$ が一つのベクトル $\mathbf{x}$ に対して，

$$\lim_{n \to \infty} d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) = 0$$

を満たすとき，この列は $\mathbf{x}$ に収束すると言う．

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ を一つのベクトルとし，行列 A を用いて，

$\mathbf{a}, A\mathbf{a}, A^2\mathbf{a}, A^3\mathbf{a}, \cdots$ なる列をつっくたとき，この列が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に収束ことを示せ．(3) で求めた A^n の表現を用いよ．

(名古屋工業大 1997）　(m19972904)

0.549 曲面 $x^2 + y^2/4 + z^2 = 1$ 上の点 $(1/2, \sqrt{2}, 1/2)$ における接平面の方程式を求めよ．

(名古屋工業大 1998）　(m19982903)

0.550 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan(3x)}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} (x - \sqrt{1 + x + x^2})$

(名古屋工業大 2000)　(m20002901)

0.551 (1) 逆三角関数 $y = \arcsin x$ (ただし，$-\pi/2 \le y \le \pi/2$) の導関数は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

であることを示せ．

(2) 次の定積分の値を部分積分法を用いて求めよ．

$$\int_0^1 (\arcsin x)^2 dx$$

(名古屋工業大 2000）　(m20002902)

0.552 $\alpha > 1$ とする．a_1 を $\sqrt{\alpha}$ より大きい数とし，　$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + \dfrac{\alpha}{a_n}) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$
によって，数列 $\{a_n\}$ を定義する．次の問いに答えよ．

(1) $a_n \ge \sqrt{\alpha}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ を示せ．

(2) この数列 $\{a_n\}$ は収束することを示し，その極限値を求めよ．

(名古屋工業大 2001)　　(m20012901)

0.553 $D=\{(x,y)|0\leq y\leq x,\ x^2+y^2\leq a^2\}$ のとき，　$I=\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$
を求めよ．ただし a は正の定数とする．

(名古屋工業大 2001)　　(m20012904)

0.554 (1) 次の 2 つの逆三角関数の導関数を求めよ．

(i) $\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$　　(ii) $\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(2) (1) を参考にして，原点以外で定義される関数　$f(x)=\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$
を簡単な形にせよ．

(名古屋工業大 2006)　　(m20062903)

0.555 $\{(x,y)\ ;\ x^2+y^2-ax=0,\ y>0\}$ $(a>0)$ 上の 1 点を P とし，原点を O とする．

(1) 直線 OP と x 軸のなす角を θ とした時，OP の長さを求めよ．

(2) 領域 $D=\{(x,y)\ ;\ x^2+y^2-ax\leq 0,\ y\geq 0\}$ を極座標で表せ．

(3) D を (2) の領域とした時，次の定積分を求めよ．　$I=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$

(名古屋工業大 2008)　　(m20082904)

0.556 (1) 次の不定積分 I を求めよ．　$I=\displaystyle\int\frac{3x^2-x+1}{(x+1)(x^2-2x+2)}\,dx$

(2) 次の 2 重積分 J の値を求めよ．　$J=\displaystyle\int_1^2\left(\int_x^2\frac{dy}{\sqrt{4-y^2}}\right)dx$

(名古屋工業大 2009)　　(m20092903)

0.557 (1) 次の累次積分 I を計算しなさい．

$$I=\int_0^2\left\{\int_0^{\sqrt{3(x^2+5)}}\frac{1}{x^2+y^2+5}\,dy\right\}dx$$

(2) 次の 2 重積分 J を指示に従って計算しなさい．

$$J=\iint_D e^{-(x^2-2xy+4y^2)}\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\,|\,x\geq 0,\ y\geq 0\}$$

(a) 変数変換 $s=x-y\ ,\ t=\sqrt{3}y$ により D が st 平面内の集合 K に移されるとき, J を (s,t) 変数の 2 重積分として表しなさい. ただし K を具体的に表示する必要はない.

(b) (a) の集合 K を求めなさい.

(c) さらに st 平面における極座標変換を行って J の値を計算しなさい.

(名古屋工業大 2010)　　(m20102904)

0.558 定積分 $\displaystyle\int_0^\pi\sqrt{1-\sin x}\,dx$ を計算せよ.

(名古屋工業大 2011)　　(m20112907)

0.559 次の行列 A と P について，問 (1) と (2) に答えよ.

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\ ,\quad P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}a & b & c\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値を $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\quad(\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3)$ とする．このとき行列 P が直交行列で，かつ次を満たすように a,b,c を求めよ.

$$
{}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}
$$

(名古屋工業大 2012)　　(m20122902)

0.560　次の重積分の値を求めよ.

$$
\iint_D xye^{-(x^2+y^2)}dxdy\ ,\quad D = \left\{(x,y)\,\middle|\,0 \leqq \sqrt{3}y \leqq\ x\ ,\ x^2+y^2 \leqq\ 5\right\}
$$

(名古屋工業大 2013)　　(m20132902)

0.561　次の問いに答えよ.

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$ の値を求めよ.

(2) 関数 $F(x)$ が $\displaystyle F(x) = \int_1^{\sqrt{x}}\left(2-\frac{1}{3t}\right)dt,\quad x>0$ によって定義される．このとき，$F(x)$ の増減範囲を調べ，極値を求めよ.

(名古屋工業大 2013)　　(m20132907)

0.562　次の不定積分を求めよ.

$$
\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx
$$

(名古屋工業大 2014)　　(m20142901)

0.563　次の不定積分を求めよ.　$\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx$

(名古屋工業大 2016)　　(m20162902)

0.564　次の重積分の値を求めよ.

$$
\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\ ,\qquad D = \left\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y-1)^2 \leqq\ 2\right\}
$$

(名古屋工業大 2016)　　(m20162903)

0.565　次の定積分と 2 重積分を求めよ.

(1) $\displaystyle I_1 = \int_0^2 \sqrt{|x^2-1|}dx$

(2) $\displaystyle I_2 = \iint_D \frac{\sin y}{1+\sin^2 x}dxdy,\qquad D\left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leqq\ x \leqq\ y \leqq \frac{\pi}{2}\right\}$

(名古屋工業大 2017)　　(m20172902)

0.566　関数 $\displaystyle f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$ を $|x-1|<1$ に対して

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{4} a_n(x-1)^n + R(x),\qquad \lim_{x\to 1}\frac{R(x)}{(x-1)^4} = 0
$$

と表すとき，係数 $a_n\ (0 \leqq n \leqq 4)$ をすべて求めよ.

(名古屋工業大 2018)　　(m20182901)

0.567 重積分 $I = \iint_D y^2\sqrt{1-x^2}dxdy, \qquad D = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0\right\}$ の値を求めよ．

(名古屋工業大 2018)　　(m20182904)

0.568 関数 $y = \sin x \ \left(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ と $y = \cos x \ (0 \leqq x \leqq \pi)$ に対して，その逆関数をそれぞれ $\mathrm{Sin}^{-1}x$, $\mathrm{Cos}^{-1}x$ と書く．そのとき次の方程式を解け．

$$\mathrm{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{15}}{4} + \mathrm{Cos}^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3} = \mathrm{Cos}^{-1}x$$

(名古屋工業大 2019)　　(m20192901)

0.569 (1) 次の不定積分を求めよ． $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\cos x}$

(2) 次の広義積分が収束するかどうか判定せよ． $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+1}}$

(名古屋工業大 2020)　　(m20202902)

0.570 次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2-2y+4)^3}} \qquad \text{ただし} \quad D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 2x^2-1 \leqq y \leqq x^2\right\}$$

(名古屋工業大 2020)　　(m20202904)

0.571 関数 $y = f(x) = \sqrt[3]{x^2(x+3)}$ について，以下の問に答えなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\{y-(mx+b)\} = 0$ となるように，係数 m, b の値を決定しなさい．極限値を求めるときには，途中の計算過程もわかるようにしなさい．「$x = 1/t$ への変形，テイラー展開，ロピタルの定理」等の工夫のうち，一部，または全部の工夫をすることにより，答えを求める方法もある．

(2) (1) で求めた直線 $y = mx + b$ は，一般に何と呼ばれるか？答えなさい．(漢字で書くと，より望ましい）．

(3) $f(x)$ を 1 回微分，2 回微分した式を，それぞれ，求めなさい．

(4) (1)〜(3) をもとに，$f(x)$ のグラフの概形を書きなさい．途中の手順も示しなさい．また，極大値，極小値，変曲点，x 軸，y 軸との交点などが，もしあれば，それぞれ，その座標をグラフ中に示しなさい．

(三重大 2003)　　(m20033101)

0.572
$$y = \begin{cases} c(1-\sqrt{x}) & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (x < 0\,,\ 1 < x) \end{cases}$$

が確率密度になるように c を求め，その分布の平均と分散を計算しなさい．

(三重大 2003)　　(m20033115)

0.573 次の各不等式を解け．

(1) $\log_{\sqrt{a}}(x-5) < \log_a(x-2)$ 　ただし，a は 1 でない正の定数とする．

(2) $x^{\log x} > \dfrac{1000}{x^2}$ 　（対数の底は 10）

(三重大 2004)　　(m20043101)

0.574 以下の式で表される，二つの 3 次関数について，(1)〜(3) のすべてに答えよ．

$$y = -2x^3 + 8x^2 - 6x \qquad ①$$

$$y = x^3 - 2x^2 + ax \qquad ②$$

(1) ①，②で表される 2 本の曲線は，原点 $(0,0)$ で交差する．このほかに，ただ 1 点で両者が接するような，a の値を求めよ．以下の問題で，a はこの値を取るとする．

(2) ①の関数の増減表は，以下のようになる．

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
y'				0				0			
y		0		$\dfrac{40-28\sqrt{7}}{27}$		0		$\dfrac{40+28\sqrt{7}}{27}$		0	

表中の空欄に適切な内容を記入し，増減表を完成せよ．記入内容は以下の通りとする．

(a) x の行の空欄には，適切な数値を記入する（分数・無理数を含む可能性がある）．

(b) y' の行の空欄には，正負のいずれの値を取るかを示す $-$ または $+$ を記入する．

(c) y の行の空欄には，グラフの傾きを表す $\searrow$ または $\nearrow$ を記入する．

また，xy 平面上に，①,② の曲線の概形を描き，以下の座標を記入せよ．

(a) 曲線同士の交点・接点

(b) x, y 軸との交点

(c) （もしあれば）極大点・極小点

(3) 曲線①,②で囲まれた図形の面積を，積分を用いて求めよ．

（三重大 2004） (m20043106)

0.575 空間座標系で，$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leqq 1$$

をみたす点の集合の作る立体の体積を求めよ．

(三重大 2004) (m20043108)

0.576 行列 $\begin{pmatrix} a & 1/\sqrt{5} \\ b & 2b \end{pmatrix}$ が直交行列であるとき, 実数 a, b の値を求めよ.

(三重大 2005) (m20053105)

0.577 (1) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ であることを導け. ただし, $\alpha>0$ とする.

(2) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-\alpha x^2}dx$ を求めよ.

(三重大 2005) (m20053111)

0.578 (1) 位置ベクトル $\boldsymbol{a}=(1,0,1)$ と $\boldsymbol{b}=(1,\sqrt{6},1)$ がなす角 θ を求めなさい.

(2) (1) の $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に直交する単位ベクトルの一つ求めなさい.

(3) (1) の $\boldsymbol{a}$ の終点と $\boldsymbol{b}$ の終点を通る直線を考える．この直線上の任意の点を終点とする位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を用いて求めなさい.（パラメータを一つ使ってもよい）.

(三重大 2006) (m20063112)

0.579 (1) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ であることを導け．ただし，$\alpha>0$ とする．

(2) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-\alpha x^2}dx$ を求めよ．

(三重大 2006) (m20063119)

0.580 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を $t = x + \sqrt{x^2+1}$ と置くことにより求めよ.

(三重大 2007) (m20073103)

0.581 以下の重積分の値を求めなさい. $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$ $D\ :\ x^2+y^2 \leqq 1,\quad x>0,\quad y>0$

(三重大 2007) (m20073105)

0.582 以下の方程式および不等式が表す範囲を図示せよ.

(1) $y - x = \sqrt{1-2xy}$ (2) $y - x < \sqrt{1-2xy}$

(三重大 2007) (m20073110)

0.583 (1) $x^3 - 3x \geqq 0$ を満たす x の範囲を求めよ ((1) の配点はわずか).

(2) $y = \sqrt{x^3-3x}$ のグラフの概形を書きなさい.

(3) 方程式 $x^3 - 3x - y^2 = 0$ が表す曲線の概形を書きなさい.

<u>(2),(3) の回答上の注意</u>

グラフ（曲線）中には，極大値，極小値，最大値，最小値，変曲点，x 軸との交点の値，y 軸との交点の値を記入せよ．なお，極大値，極小値，最大値，最小値，変曲点，x 軸との交点，y 軸との交点は，それぞれ，存在しないかもしれないし，複数存在するかもしれない．また，各種の数値が無理数であった場合は，そのままの形で，解答用紙に記入しなさい．但し，有効数字 2 桁程度の近似値も求めないと，グラフが若干不正確になり, 若干減点となる.

(三重大 2007) (m20073114)

0.584 (1) $\displaystyle I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)\,dx$ としたとき, I^2 を極座標を用いて計算し $I = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$ となることを示せ. ただし, $a > 0$ とする. 次に $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-x^2)\,dx$ の値を求めよ.

(2) $\displaystyle f(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt$ とするとき, n を 0 または正の整数として

(i) $f(n+1) = n!$, (ii) $f(n+\frac{1}{2}) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$ となることを示せ.

(三重大 2010) (m20103112)

0.585 以下の不定積分を求めよ. 積分定数は C とする.

(1) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{\sqrt{x}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \sin(\log x)\,dx$

(三重大 2010) (m20103114)

0.586 指示に従って導関数を求めなさい.

(1) $y = \left(e^x + e^{-x}\right)^2$ を x で微分せよ. e は自然対数の底を表す.

(2) $y = x\cdot\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$ を x で微分せよ. a は定数を示す.

(3) $x = \sin t,\ y = \cos 2t$ のとき, $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(三重大 2011) (m20113101)

0.587 以下の (1) については不定積分を，(2) と (3) については積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{4x+1}{4x^2+2x+6}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} t^2 e^{-at} dt$

(3) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

(三重大 2012)　　(m20123102)

0.588 次の関数を微分せよ.

(1) $y=\sqrt{x^2+1}$　　(2) $y=(x+1)(x+2)(x+3)$　　(3) $y=\sin\sqrt{x^2+x+1}$

(4) $\log\dfrac{1+x}{1-x}$　　(5) $y=\log_a(x^2-1)\quad(a>0\,,\ a\neq 1)$

(三重大 2012)　　(m20123111)

0.589 次の不定積分を求めよ.

$\displaystyle\int\frac{x+1}{x\sqrt{2x+1}}\,dx$　　$\displaystyle\int x\cos^2 x\,dx$

(三重大 2012)　　(m20123112)

0.590 以下の関数を微分せよ.

(1) $y=\dfrac{3x-2}{x^2+1}$　　(2) $y=\sqrt{2x^2-3}$　　(3) $y=e^x\sin x$

(4) $y=\dfrac{1}{\tan x}$　　(5) $y=\log(x^2+1)$

(三重大 2012)　　(m20123116)

0.591 以下の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int\sqrt{2x-3}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int x^2\sin x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int(\log x)^2\,dx$

(三重大 2012)　　(m20123117)

0.592 次の関数を微分せよ.

(1) $y=(3x-1)^3$　　(2) $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$

(3) $y=\log_e\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$　　(4) $y=\dfrac{2e^x+1}{e^x+1}$

(三重大 2014)　　(m20143106)

0.593 空間ベクトルである $\overrightarrow{a}=(1,-1,2)$ と $\overrightarrow{b}=(-1,-2,1)$ について，(1)〜(3) に答えなさい.

(1) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角度を求めよ.

(2) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の両方に垂直で，大きさが $\sqrt{3}$ となるベクトル $\overrightarrow{c}$ を求めよ.

(3) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の両方に 60°の角度をなし ，大きさが $\sqrt{6}$ となるベクトル $\overrightarrow{d}$ を求めよ.

(三重大 2014)　　(m20143109)

0.594 以下の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int\frac{(x^2+1)^2}{x^3}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$

(3) $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$　ただし $|x|<a,\ a>0$　　(4) $\displaystyle\int\sinh x\,dx$

(三重大 2015)　　(m20153104)

0.595 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int xe^{-2x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{b}{\sqrt{b^2-x^2}}\,dx$　（ ここで b は $b\neq 0$ の実数であり，$|x|<|b|$ ）

(三重大 2015)　　(m20153106)

0.596 関数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ に関して，次の問いに答えなさい．

(1) 範囲 $0 \leqq\ x \leqq\ a$ (a は 1 未満の正の定数) で $y=f(x)$ の描く曲線を xy 平面上に図示し，$\displaystyle\int_0^a f(x)dx$ の示す意味を説明しなさい．

(2) 次の式が成り立つことを，問 (1) を利用して図形を用いて説明しなさい．

$$\int_0^a \sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\Big(a\sqrt{1-a^2}+\sin^{-1}a\Big)$$

(三重大 2016)　　(m20163107)

0.597 次の関数を微分せよ．

(1) $y=\dfrac{\sin x-x\cos x}{x\sin x+\cos x}$　　(2) $y=\sqrt{x^2+3x+2}$　　(3) $y=x^{\log_e x}$

(三重大 2016)　　(m20163109)

0.598 x, y に関する実数値関数 $f(x,y)=2x^2+3y^2+2\sqrt{2}xy$ について，以下の問に答えなさい．

(1) $f(x,y)=\begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}$ を満たす対称行列 A を求めなさい．

(2) A の全ての固有値と，それぞれの固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めなさい．

(3) $T^{-1}AT$ が対角行列となるような正規直交行列 T を求めなさい．さらに，$T^{-1}AT$ を求めなさい．

(4) $\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix}$ により変数変換をすることで，$f(x,y)$ を変換した結果得られる $g(u,v)$ を求めなさい．また，$g(u,v)=4$ の概形を u-v 平面上に描きなさい．

(三重大 2017)　　(m20173108)

0.599 次の関数を微分せよ．

(1) $y=\dfrac{4\sqrt[4]{x}-2x^{-2}+x}{3x}$　　(2) $y=\dfrac{1}{\cos 2x}$　　(3) $y=\sqrt{x\sqrt{x}}$

(三重大 2017)　　(m20173109)

0.600 2 重積分 $\displaystyle\int_0^2\int_0^x \sqrt{x^2-t^2}dtdx$ の値を求めよ．

(三重大 2017)　　(m20173116)

0.601 次の関数を微分せよ．

(1) $y=5^{-2x}$　　(2) $y=\sin^4 x\cos^4 x$　　(3) $y=x^{\log x}$

(4) $y=\dfrac{(x-1)\cdot\sqrt[3]{3x+1}}{\sqrt{(2x+5)^3}}$　　(5) $y=\log_a(2x^2-4)\quad (a>0,\ a\neq 1)$

(三重大 2018)　　(m20183106)

0.602 次の関数を微分せよ．（e は自然対数の底である.）

(1) $y=x^2e^x$　　(2) $y=\sqrt{\cos 2x}$

(3) $y=\log_e(1-e^{-x})$　　(4) $y=\sqrt{\dfrac{x}{(x+1)^5}}$

(三重大 2020)　　(m20203101)

0.603 以下の問いに答えなさい．ただし，y は x の関数であり，$y'=\dfrac{dy}{dx}$, $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

(1) 初期条件を $y(1)=0,\ y'(1)=1$ とするとき，微分方程式　$xy''+y'=0$　を解きなさい．

(2) 区間 $\sqrt{3} \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$ において，(1) の解である関数が描く曲線の長さ L を求めなさい．ただし，区間 $a \leqq x \leqq b$ の関数 $y = f(x)$ の曲線の長さ L は，$L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ で与えられる．

(三重大 2020)　(m20203109)

0.604 $-x + 2\sqrt{2}y - 4z = 1$ で表される平面 A と，$2x + 2z = 1$ で表される平面 B がある．この 2 つの平面に関する以下の各問に答えなさい．

(1) この 2 つの平面のなす角は何度になるか求めなさい．

(2) この 2 つの平面の交線の方程式を求めなさい．

(3) この 2 つの平面の交線を含み，かつ原点を通る平面の方程式を求めなさい．

(三重大 2022)　(m20223105)

0.605 以下の関数の y の値が最小値となる x の値を求めなさい．

$y = \sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{(x-5)^2 + 1}$

(三重大 2022)　(m20223107)

0.606 次の関数を微分せよ．

(1) $y = x^{2x} \quad (x > 0)$　(2) $y = e^{-2x} \sin 3x$

(3) $y = \left(\tan x + \dfrac{1}{\tan x}\right)^2$　(4) $y = (3x-1)\sqrt{x^3 + 1}$

(三重大 2022)　(m20223109)

0.607 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

(2) $y = \sinh^{-1}(x)$　（ただし, $\sinh(y) = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$ である）

(奈良女子大 2001)　(m20013201)

0.608 次の関数のグラフの概形を描きなさい．

(1) $y = 2x^3 - 9x^2 + 18x$　(2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$　(3) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

(奈良女子大 2001)　(m20013203)

0.609 $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \ (s > 0)$ に対して以下の等式を証明せよ．

(1) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$　(2) $\Gamma(n) = (n-1)!$　（n は正の整数）

(2) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$　（必要ならば $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$ を使ってもよい）

(奈良女子大 2001)　(m20013205)

0.610 次の各数列は収束しますか，収束する場合はその極限値を求めなさい．

(1) $1 + (-1)^n$　(2) $\sqrt{n^2 + 5n} - \sqrt{n^2 + n}$

(奈良女子大 2001)　(m20013207)

0.611 次の関数の導関数を求めよ．

(1) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$　(2) $y = \tan^{-1}(1 + x)$

(奈良女子大 2002)　(m20023201)

0.612 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 (1+x)\sqrt{1-x}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin x dx$

(奈良女子大 2002)　(m20023203)

0.613 次の関数の導関数を求めよ.　$y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(奈良女子大 2003)　(m20033201)

0.614 次の関数　$y = e^x \sin x$　について以下の問に答えよ.

(1) 第 1 次導関数 $y^{(1)}$ が　$y^{(1)} = \sqrt{2}e^x \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　となることを示せ.

(2) 第 n 次導関数 $y^{(n)}$ が　$y^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x+\dfrac{n\pi}{4}\right)$　となることを，数学的帰納法を用いて証明せよ.

(奈良女子大 2003)　(m20033202)

0.615 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ を実数とするとき，次の不等式を証明せよ.

(1) $\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2} \geq a_1b_1+a_2b_2$

(2) $\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2} \geq a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

(奈良女子大 2003)　(m20033207)

0.616 m と n が整数のとき，次の式を証明せよ.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta(m-n)}d\theta = \delta_{m,n}$$

ただし，$i = \sqrt{-1}$ である．また，$\delta_{m,n}$ はクロネッカーのデルタで，

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$　と定義されている.

また，必要なら公式　$e^{ix} = \cos x + i\sin x$　を用いよ.

(奈良女子大 2003)　(m20033210)

0.617 次の関数の導関数を求めよ.

(1) $y = \log(x+\sqrt{x^2+a^2})$，ただし, a は定数である.

(2) $y = \dfrac{x+3}{x^2-1}$

（奈良女子大 2004）　(m20043201)

0.618 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2}$　$(a>0)$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$　$(a>0)$

(奈良女子大 2008)　(m20083206)

0.619 3 次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ とする．$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は，直交座標系の x, y, z 軸方向の単位ベクトルである．また，$\boldsymbol{r}$ の大きさを $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) r のこう配，∇r を求めよ．ただし，$\nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ である．∇r は，$\mathrm{grad}\, r$ とも書く.

(2) 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ に対して

$$\nabla \times \ (\nabla\phi(\boldsymbol{r}))$$

を求めよ．ただし，$\phi(\boldsymbol{r})$ は連続な 2 階偏導関数を持つスカラー関数である．また，$\nabla \times \ (\nabla\phi(\boldsymbol{r}))$ は $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\phi(\boldsymbol{r}))$ とも書く.

(奈良女子大 2008)　　(m20083208)

0.620 次の微分を求めよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{-ax}\cos(bx)\right)$ （a, b は定数）

(2) $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(奈良女子大 2009)　　(m20093204)

0.621 次の不定積分と定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int xe^{-ax}dx$ （a は定数）

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{1-2a\cos\theta+a^2}}$ 　$(a>0)$

(奈良女子大 2009)　　(m20093205)

0.622 関数 $f(x)=\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})$ $(x>0)$ に関して次の問に答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ.

(奈良女子大 2010)　　(m20103202)

0.623 次の定積分 I に関する以下の問いに答えよ.

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx$$

(1) 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}\,dx$$

(2) 変数を変えることで, I^2 は次のように書けることを示せ.

$$I^2=\iint_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

(3) この 2 次元積分は直交座標 (x,y) から極座標 (r,θ) に変換することで求めることができる. 積分を実行して I^2 を求め, $I=\sqrt{\pi}$ であることを示せ.
ただし, $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ であり, $dxdy=rdrd\theta$ である.

(奈良女子大 2010)　　(m20103204)

0.624 以下の関数を微分せよ.

(1) $y=\cosh\left(\sqrt{x^2+1}\right)$　　(2) $y=\tan^{-1}x$

(奈良女子大 2011)　　(m20113204)

0.625 次のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{A}=\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 0\right)$$

(1) $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ を求めよ.

(2) $\nabla\times\ \boldsymbol{A}$ を求めよ.

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の概形を $x-y$ 平面上に図示せよ.

ここで，∇ は次のように定義された演算子である.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

(奈良女子大 2012)　　(m20123204)

0.626 次の実対称行列 A について以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) 行列 A の固有値を求めよ.

(3) 行列 A の固有ベクトルをすべて求めよ．なお，固有ベクトルは規格化すること.

(4) 行列 A は，直交行列 V とその転置行列 V^T を以下のように左右からかけることにより，対角行列 B に変換することができる.

$$B = V^T A V$$

行列 V と B を求めよ.

(奈良女子大 2012)　　(m20123205)

0.627 関数 $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$ に対して，次の問に答えよ.

(1) 極限値 $\lim_{x\to 0} f(x)$ および $\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ.

(奈良女子大 2012)　　(m20123207)

0.628 関数 $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}\ \ (x > -1)$ に対して，次の問に答えよ.

(1) 極限値 $\lim_{x\to 0} f(x)$ および $\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ.

(奈良女子大 2013)　　(m20133202)

0.629 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$　　(3) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)}\, dx$

(奈良女子大 2013)　　(m20133205)

0.630 次の微分を求めよ．ただし，a は実定数である.

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}\tan^{-1}(ax)$　　(2) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(x^2 e^{-ax}\right)$　　$\displaystyle\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(奈良女子大 2014)　　(m20143201)

0.631 以下の微分方程式を考える.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots（ア）$$

ただし，μ, ω は正の定数である．以下の問に答えよ.

(1) $x(t) \propto \exp(-at)$ の形の解を考える．$x(t)$ が式（ア）の解となる a の値を，μ と ω を用いて表せ.

(2) $a = a_R \pm ia_I$ のとき，式（ア）の解は振動しながら減衰する．このとき μ と ω が満たす不等式を答えよ．ただし，a_R と a_I は実数で，$i = \sqrt{-1}$ である．

(3) 前問 (2) の場合に，初期条件が $x(0) = 0$，$\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 1$ であるときの 式（ア）の解を求め，a_R と a_I を用いて表せ．

(奈良女子大 2015)　　(m20153203)

0.632 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$，$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ の時，以下の量を計算せよ．ただし，$r \neq 0$ とする．

(1) ∇r^n　(2) $\nabla \times\ r^n \boldsymbol{r}$　(3) $\nabla \cdot \left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)$　(4) $\nabla \left(\dfrac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3}\right)$　(5) $\nabla f(\boldsymbol{r})$

ここで，∇ は以下で定義する微分演算子であり，

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$f(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{r}$ の任意の関数，$\boldsymbol{p}$ は定ベクトル，n は定数である．

(奈良女子大 2015)　　(m20153204)

0.633 初項 $a_1 = \sqrt{2}$ であり，次の漸化式を満たす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．

$$a_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{a_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

数学的帰納法を用いて，次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，不等式 $a_n < 2$ を示せ．

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加であることを示せ．

(奈良女子大 2016)　　(m20163203)

0.634 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ を求めよ．

(2) 関数 $y = \log \sqrt{1 - x^2}$ を微分せよ．ただし，x は実数で $|x| < 1$ とする．

(奈良女子大 2016)　　(m20163204)

0.635 正の実数 a に対して，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ が成り立つことを利用して，

定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-1)^2 e^{-a(x^2-2x)} dx$ を計算せよ．

(奈良女子大 2016)　　(m20163206)

0.636 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$a_1 = 1\ , \qquad a_n = \frac{a_{n-1} + 2}{a_{n-1} + 1} \quad (n \geq 2)$$

と定められている．以下の問いに答えよ．

(1) a_2，a_3 を求めよ．

(2) $n \geq 2$ に対し　$a_n - \sqrt{2} = -\dfrac{\sqrt{2} - 1}{a_{n-1} + 1}(a_{n-1} - \sqrt{2})$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = \sqrt{2}$ を示せ．

(奈良女子大 2017)　　(m20173202)

0.637 (1) 関数 $f(x) = \arctan\left(\dfrac{2}{x}\right)$ を x で微分せよ．

(2) 関数 $f(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$ を考える．ここで，ω_0, γ は正の実定数とする．以下の問いに答えよ;

(a) 極限値 $\displaystyle\lim_{\omega\to\infty} f(\omega)$ を求めよ．

(b) $\omega > 0$ の範囲で，$f(\omega)$ が極大をもつために満たすべき ω_0 と γ に対する条件式を求めよ．またその時の ω を求めよ．

(奈良女子大 2017)　　(m20173204)

0.638 次の 2 重積分

$$I = \int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy$$

を求めよ．ここで a は正の実定数とする．

(奈良女子大 2017)　　(m20173205)

0.639 以下の微分方程式を考える．

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -k_1x_1 + k_2(x_2-x_1) \\ m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -k_1x_2 - k_2(x_2-x_1) \end{cases}$$

ただし，m, k_1, k_2 は正の実定数である．以下の問いに答えよ．

(1) これら 2 つの方程式を $X_1 = x_1 + x_2$, $X_2 = x_1 - x_2$ で定義される X_1, X_2 に対する方程式に書き直せ．また，$\omega = \sqrt{\dfrac{k_1}{m}}$，　$\omega' = \sqrt{\dfrac{k_1+2k_2}{m}}$ とおいて，X_1, X_2 に対する一般解を求めよ．

(2) $t = 0$ で，$x_1 = 1$, $x_2 = 0$ かつ $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ を満たす解 $x_1(t)$, $x_2(t)$ を求めよ． ここで，$v_1 = \dfrac{dx_1}{dt}$，　$v_2 = \dfrac{dx_2}{dt}$ とする．

(奈良女子大 2017)　　(m20173206)

0.640 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする．以下の量を計算せよ．

(1) r の勾配 ∇r

(2) $\dfrac{1}{r}$ の勾配 $\nabla\dfrac{1}{r}$

(3) $\boldsymbol{r}$ の発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{r}$

(4) $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$　(ω は正の実定数) とするときの，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ の回転 $\nabla\times\boldsymbol{v}$

ここで，∇ は以下で定義される微分演算子である．

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

(奈良女子大 2017)　　(m20173207)

0.641 $a < b$ となる正の実数 a, b に対して，数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次で定義する．

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, \quad b_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$$

以下の問いに答えよ．

(1) $n \geqq 2$ に対し，$a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1}$ が成り立つことを示せ．

(2) $n \geqq 2$ に対し，$b_n - a_n < \dfrac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ となる実数 α が存在することを示せ．

(奈良女子大 2018)　　(m20183202)

0.642 与えられた条件の下で，以下の関数を微分せよ．

(1) $y = xe^x$

(2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$ ， (σおよび m は正の定数)

(3) $y = \sin^{-1} x$ (x のとりうる値は $\left[-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right]$ を満たす範囲のみとする)

(奈良女子大 2018) (m20183204)

0.643 関数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ について，一次偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, および二次偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ を求めよ．

(奈良女子大 2019) (m20193206)

0.644 2 次元の xy 平面内の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ に関する以下の問いに答えよ．

ただし，$a > b > 0$ であり，また楕円の離心率を

$$\tilde{e} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

とする．

(1) 楕円の周囲の長さ L は

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \tilde{e}^2 \cos^2 \theta}\ d\theta$$

で与えられることを示せ．

(2) 離心率 $\tilde{e}$ が 1 より十分小さいとき，長さ L は近似的に

$$L = 2\pi a \left(1 - \frac{1}{4}\tilde{e}^2\right)$$

となることを示せ．

(奈良女子大 2022) (m20223207)

0.645 つぎの各問いに答えよ．

(1) i , $1 + i$, $1 - \sqrt{3}i$ を極形式で表せ．

(2) $e^z = 4i$ なる z を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_C \frac{z - \frac{1}{3}}{z^3 - z} dz$ ， $C : \left|z - \dfrac{1}{2}\right| = 1$ の反時計を計算せよ．

(4) $\dfrac{1}{z(z - i)}$ を $z = i$ 近辺でローラン展開せよ．

(京都大 1999) (m19993304)

0.646 次の複素積分を行え．ただし，$i = \sqrt{-1}$（虚数単位）とする．

(1) $I = \displaystyle\int_C (z - z_0)^n dz$ $\quad C : |z - z_0| = r$

(2) 留数定理を用いて，次の積分を行え．

$$I_1 = \int_{C_1} \frac{3z + 1}{z^2 + 1} dz \qquad C_1 : |z - i| = 1$$

$$I_2 = \int_{C_2} \frac{(z^2 + 2)^2}{(2z^2 - z)(z + 3)} dz \qquad C_2 : |z| = 1$$

(京都大 2000) (m20003303)

0.647 次のラプラスの積分を考える． $I(a)=\int_0^\infty \exp[-x^2]\cos 2ax\,dx$ 以下の問に答えよ．

(1) 平面の直角座標 (x,y) から極座標 (r,θ) への変換公式を用いて，x^2+y^2 および $dxdy$ を極座標で表せ．

(2) 積分 $I(0)$ の値は $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ と求められることを，$I(0)^2$ を計算して示せ．

(3) 積分 $I(a)$ の値を求めよ．例えば，$I(a)$ を a に関して微分してみる．

(京都大 2006) (m20063304)

0.648 a を $-1<a<1$ なる実数とする．複素数 z に対して

$$w=\frac{z-ai}{1+aiz}$$

とおく．$i=\sqrt{-1}$ は複素単位．以下の問いに答えよ．

(1) 複素数平面で点 z が単位円周 $C=\{z\mid |z|=1\}$ 上を動くとき点 w はどのような図形を描くか．

(2) 複素数平面で点 z が単位円周 $C=\{z\mid |z|=1\}$ の内部にあるとき点 w はどのような領域にあるか図示せよ．

(京都大 2006) (m20063305)

0.649 関数

$$f(x)=\frac{1}{x^2-a-ibx}$$

について，以下の設問に答えよ．ただし，x は実変数，a と b は正の実定数，$i=\sqrt{-1}$ である．

(1) $f(x)$ を変形して

$$f(x)=A\left(\frac{1}{x-z_1}-\frac{1}{x-z_2}\right)$$

としたとき，z_1 および z_2 を求め，複素平面上に図示せよ．ただし，A, z_1, z_2 は複素数の定数である．

(2) ζ を実数とし，積分

$$I(\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-\zeta}\,dx$$

のコーシーの主値，すなわち

$$I(\zeta)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{\zeta-\varepsilon}\frac{f(x)}{x-\zeta}\,dx+\int_{\zeta+\varepsilon}^{\infty}\frac{f(x)}{x-\zeta}\,dx\right) \qquad ①$$

を考える．式①の積分路は実数軸上にあるが，図 1 で示した複素平面内における積分路 C_1, C_2, C_3 に沿った複素積分を利用することにより，$I(\zeta)$ を求めることができる．ここで，C_1 は原点を中心とした半径 R の下半円周，C_2 は ζ を中心とした半径 ε の下半円周，C_3 はこれらの半円周とそれらを結ぶ実数軸の線分で構成される閉曲線であり，いずれも図中の矢印に沿って積分するものとする．

(a) C_1 に沿った積分路の $R\to\infty$ での極限値を求めよ．

(b) ε が十分小さいとき，C_2 に沿った積分値を求めよ．

(c) C_3 に沿った積分値を求めよ．

(d) 以上の結果から，$I(\zeta)$ を求めよ．

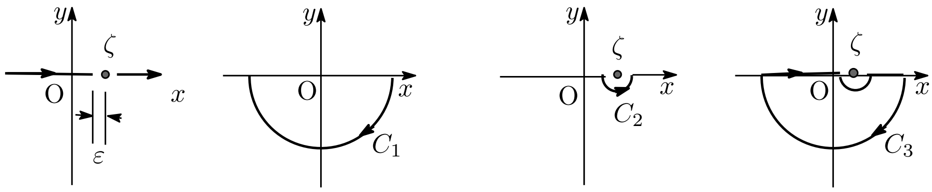


図 1　左から順に，式 ① の積分路，C_1，C_2，C_3 を示す．

(京都大 2008)　　(m20083305)

0.650　(1)　複素数 z が以下の式で表されるとき, 以下の問いに答えよ. ただし, $i=\sqrt{-1}$ とする.

$$z=\left(\frac{4+3i}{1+2i}\right)^2-\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$$

(a) z を極形式で表せ.

(b) z^n が実数となる最小の正の整数 n と, そのときの z^n を求めよ.

(c) $\sqrt[3]{z}$ を求めよ.

(2)　次の関数 $f(z)$ の極を求め, それらの点における留数を求めよ.

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z^4-z^2}$$

(京都大 2010)　　(m20103305)

0.651　数列 $\{a_n\}$ を　$a_1=3,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{3}{a_n}\right)$　$(n=1,2,3,\cdots)$
によって定めるとき，次の (1)〜(3) に答えよ．

(1)　$n\geqq 1$ であるすべての n に対して，$a_n>\sqrt{3}$ であることを証明せよ．

(2)　$n\geqq 1$ であるすべての n に対して，$a_{n+1}-\sqrt{3}<\dfrac{1}{2}\left(a_n-\sqrt{3}\right)$ であることを証明せよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{3}$ であることを証明せよ．

(京都大 2012)　　(m20123302)

0.652　直交座標系（デカルト座標系）Γ に対して，$O'(1,\ 1,\ 1)$，$e_x{}'={}^t\!\left(1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2},\ 0\right)$，
$e_y{}'={}^t\!\left(1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3}\right)$，$e_z{}'={}^t\!\left(-1/\sqrt{6},\ -1/\sqrt{6},\ 2/\sqrt{6}\right)$ とするとき，次の問に答えよ．

(1)　新座標系 $\Gamma'=\{O'\ :\ e_x{}',\ e_y{}',\ e_z{}'\}$ も直交座標系であることを示し，かつ座標変換 $\Gamma\to\Gamma'$ の式を求めよ．

(2)　座標系 Γ における方程式が $x+y+z=6$ である平面 π の，新座標系 Γ' における方程式を求めよ．

(3)　座標系 Γ における方程式が，$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ である直線 g の，新座標系 Γ' における方程式が，$\dfrac{x'-\boxed{\text{あ}}}{\boxed{\text{い}}}=\dfrac{y'-\boxed{\text{う}}}{\boxed{\text{え}}}=z'$ になるとき，$\boxed{\text{あ}}$〜$\boxed{\text{え}}$ の空欄に入る数を求めよ．

(京都大 2014)　　(m20143304)

0.653　次の定積分の値を求めよ．

（イ）$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{5dx}{\sqrt{1-x^2}}$　　　（ロ）$\displaystyle\int_0^3\frac{3dx}{x^2+3}$

(京都大 2018)　　(m20183301)

0.654　(1)　次の積分の値を求めよ．

（イ） $\displaystyle\int_e^3 x^2 \log_e x \ dx$　　（ロ） $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x \ dx$　　（ハ） $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2+x}{4x^2+1}dx$

(2) 次の広義積分の値を求めよ.

（イ） $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$　　（ロ） $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\log_e(1+x^2) \ dx$

(京都大 2022)　(m20223303)

0.655 領域 $D=\{(x,y):\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 1 \leqq \sqrt{x^2+y^2} \leqq 2\}$ に対して重積分

$$\iint_D \frac{2xy}{x^2+y^2}dx\ dy$$

の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2000)　(m20003407)

0.656 次の定積分の値を求めよ.　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

(京都工芸繊維大 2003)　(m20033405)

0.657 領域 $D=\{(x,y): 0 \leqq\ x \leqq\ 1, 0 \leqq\ y \leqq \sqrt{x}\}$ 上で重積分　$\displaystyle\iint_D \sqrt{x}(x+y)dxdy$　の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2003)　(m20033407)

0.658 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy\,,\qquad D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq\ 8,\ y \geqq\ 0\}$$

(京都工芸繊維大 2005)　(m20053403)

0.659 行列 $A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ p & q & r \end{pmatrix}$ が直交行列となり, その行列式が 1 となるように p,q,r を定めよ.

(京都工芸繊維大 2005)　(m20053404)

0.660 極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^{\sqrt{x}}$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2006)　(m20063402)

0.661 $-1 \leqq\ x \leqq\ 1$ のとき，不等式　$\sin^{-1}x+\sqrt{2(1-x)} \leqq \dfrac{\pi}{2}$　が成り立つことを示せ.
ただし $\sin^{-1}$ は sin の逆関数の主値である.

(京都工芸繊維大 2006)　(m20063403)

0.662 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}dx$ を計算せよ.

(京都工芸繊維大 2006)　(m20063404)

0.663 次の極限値を求めよ.　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2)$

(京都工芸繊維大 2006)　(m20063406)

0.664 次の定積分の値を求めよ.　$\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

(京都工芸繊維大 2006)　(m20063407)

0.665 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^{\sqrt{x}}-1-\sqrt{x}}{x}$

(京都工芸繊維大 2007) (m20073402)

0.666 (1) α を正の定数とするとき，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x^{\alpha}\log x=0$ を示せ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2008) (m20083402)

0.667 連続時間信号 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

で定義する．ただし，t は時間を表す実数，ω は角周波数を表す実数であり，$j=\sqrt{-1}$ とおいている．このとき，

$$f(t)=\begin{cases}e^{-t} & (t\geq 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

で与えられる連続時間信号 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ と振幅スペクトル $|F(\omega)|$ を求めなさい．

(京都工芸繊維大 2008) (m20083405)

0.668 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\cos x-e^x}{x\sin x}$ を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^3\frac{x^3-3x+1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2009) (m20093402)

0.669 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{t^2}{(1+t^2)^2}dx$ の値を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{(1+t^2)^2}$ の値を求めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}(2-x^2)^2}dx$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2013) (m20133403)

0.670 xy 平面の領域

$$D=\left\{(x,y)\;\middle|\;0\leqq\ x\leqq\ 2,\ 0\leqq\ y\leqq\ x^2\right\}$$

に対して．重積分

$$I=\iint_D\sqrt{x^3+1}\,dxdy$$

の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2015) (m20153403)

0.671 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}$ および $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2017) (m20173402)

0.672 定積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}}$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2017) (m20173403)

0.673 (1) 積分 $\displaystyle\int_0^T\frac{\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}}dx\quad\left(0\leqq T<\frac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．

(2) a を正の実数とする．広義積分 $\displaystyle\int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\sin x}}{(1-\sin x)^a} dx$ が収束するような a の範囲．および a がその範囲にあるときの，この広義積分を求めよ．

(京都工芸繊維大 2019)　　(m20193402)

0.674　広義積分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}}$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2020)　　(m20203403)

0.675　x の関数 $f(x)=2\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$ を考える．

(1) $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ．

(3) 関数 $y=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$ $(x \geqq 0)$ の値域を求めよ．

(京都工芸繊維大 2022)　　(m20223402)

0.676　$I_n=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{(\sqrt{x})^{n-1}}{1+\sqrt{x}}dx$ に対し，

(1) I_0 , I_1 を求めよ．

(2) I_n+I_{n-1} を求めて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n=0$ を示せ．

(3) (1),(2) より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\log 2$ を証明せよ．

(大阪大 1997)　　(m19973502)

0.677　実数値関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{1-2x\cos y+x^2}}\,dy$$

とするとき，次の問に答えよ．

(1) $f(0)$ の値を求めよ．

(2) 積分を用いずに $f(x)$ を表せ．

(3) $f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ を求めよ．

(大阪大 1999)　　(m19993502)

0.678　(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ を用いて，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx-x^2}dx$ を計算せよ．

(2) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$ の値を求めよ．

(大阪大 2002)　　(m20023505)

0.679　曲線 $y=\dfrac{1}{2a}(e^{ax}+e^{-ax})$ $(a>0)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) この曲線上の 2 点，$\mathrm{A}(0,\dfrac{1}{a})$，$\mathrm{B}(p,q)$ $(p>0)$ の間の弧の長さ ℓ を a と q で表せ．

(2) $\ell=\dfrac{\sqrt{3}}{a}$ のとき，点 $\mathrm{B}(p,q)$ $(p>0)$ の座標を求めよ．

（大阪大 2004）　　(m20043504)

0.680 n 枚のコインを 1 列に並べる．各コインは表, 裏のどちらを上にして置くかの 2 通りの置き方があるものとする. ただし, コインは区別できないものとする. このとき, 以下の設問に答えよ.

(1) n 枚のコインを置く場合の数を $f(n)$ とする. 例えば, 表を H, 裏を T で表すと, $n=1$ のときは $(H),(T)$ の 2 通り置き方があるので $f(1)=2$ であり, $n=2$ のときは (H,H), (H,T), (T,H), (T,T) の 4 通りの置き方があるので $f(2)=4$ である. $f(n)$ を n の関数として表せ.

(2) 裏のコインを 2 枚以上続けて置くことを許さない場合の, n 枚のコインを置く場合の数を $g(n)$ とする. 例えば, $n=1$ のときは $(H),(T)$ の 2 通りの置き方があるので $g(1)=2$ であり, $n=2$ のときは $(H,H),(H,T),(T,H)$ の 3 通りの置き方があるので $g(2)=3$ である（ここで, (T,T) の置き方は裏が 2 枚続いているので許されないことに注意）. このとき, 以下の設問に答えよ.

(a) すべての並べ方を列挙することによって, $g(3)$, $g(4)$ を求めよ.

(b) n を 3 以上の整数とする. このとき, $g(n)$ を $g(n-1)$, $g(n-2)$ を用いて表せ.

(c) (b) の漸化式より,

$$g(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}$$

となることを, 数学的帰納法を用いて証明せよ.

(大阪大 2005) (m20053507)

0.681 関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ （$z=x+iy$, $i=\sqrt{-1}$, x と y は実数, $u(x,y)$ と $v(x,y)$ は実関数）は $z=z_0=x_0+iy_0$ で正則である. 以下の問に答えよ.

(1) コーシー・リーマンの方程式

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

を示せ.

(2) $u(x,y)=x^3-3xy^2$ となる正則関数 $f(z)$ を求めよ.

(大阪大 2005) (m20053509)

0.682 微分方程式

$$x^2y''-xy'+y=f(x) \qquad (A)$$

について，以下の問に答えなさい．ただし $x>0$ とする．

(1) $f(x)=0$ のとき，$y_1=x$ は微分方程式 (A) の特殊解であることを示しなさい．

(2) u を $y=uy_1$ を満足する関数，w を $w=u'$ を満足する関数とするとき，微分方程式 (A) を w の x に関する一階の微分方程式に変形しなさい．

(3) $f(x)=0$ のとき，微分方程式 (A) を解きなさい．

(4) $f(x)=x^2\sqrt{x}$ のとき，微分方程式 (A) を解きなさい．

(大阪大 2006) (m20063503)

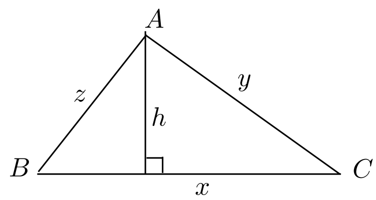
0.683 a を正定数とする．3 辺の和が $2a$ という条件を保ちながら変化する三角形 ABC を考える．

$BC=x$, $CA=y$, $AB=z$ とする．頂点 A から辺 BC に下ろした垂線の長さを h とする．次の問いに答えよ．

(1) 辺 BC を軸として三角形 ABC を回転してできる立体の体積 V を，x および h を用いて表せ．

(2) 体積 V を $x,\ y$ の関数として表せ．同時に，変数 $x,\ y$ の動きうる領域 D を図示せよ．必要があれば三角形 ABC の面積は $\sqrt{a(a-x)(a-y)(a-z)}$ で与えられるというヘロンの公式を用いてもよい．

(3) $x,\ y$ が領域 D 内において変動するとき，V の値が最大となるときの $x,\ y$ の値およびそのときの V の値を求めよ．



(大阪大 2009)　　(m20093504)

0.684 正の値をとる確率変数 X が確率密度関数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}x^{-1}\exp\left\{-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\quad (x>0\,,\ \mu\in\mathbb{R}\,,\ \sigma^2>0)$$

をもつとし，$Y=\log X$ とする．

(1) $n=1,2,\cdots$ に対して，Y^n の期待値を $g_n=E[Y^n]$ とする．このとき，

$$g_{n+2}=\mu g_{n+1}+(n+1)\sigma^2 g_n$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n=1,2,\cdots$ のとき，$E[(Y-\mu)^n]$ を求めよ．

(大阪大 2009)　　(m20093508)

0.685 次の問いに答えよ. ただし, $z,\ \omega$ は複素数とし, i は虚数単位とする.

(1) $|5z-i|=|3z-7i|$ なる方程式を満足する z を複素平面上で図示し, どのような図形となるか答えよ.

(2) z に対し,

$$w=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}z-1}{2z+2\sqrt{3}}$$

なる変数変換を行った場合, w が満たす方程式を複素平面上に図示せよ.

(大阪大 2010)　　(m20103504)

0.686 実数を成分に持つ, 対称かつ正定値な n 次正方行列を B とする. その (i,j) 成分を B_{ij} と書くことにする. n 次元実ベクトルを $\boldsymbol{x}={}^t(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$, $\boldsymbol{y}={}^t(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$ と表し, その内積を $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i$ と定める（ ^{t} は転置を表す）. 行列 B の行列式を $\det B$, 逆行列を B^{-1} と表すことにする.

(1) 任意の実数 s と $b>0$ に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ts}e^{-\frac{t^2}{2b}}\,dt=e^{\frac{bs^2}{2}}$$

(2) 任意の n 次元実ベクトル $\boldsymbol{y}$ に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det B}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\ dx_1\,dx_2\,\cdots\,dx_n=e^{\frac{1}{2}(B\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}$$

(3) $1 \leqq\ j,k \leqq\ n$ に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det B}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_j x_k e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\ dx_1\, dx_2\, \cdots\, dx_n = B_{jk}$$

(4) n 次正方行列 A に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det B}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\ dx_1\, dx_2\, \cdots\, dx_n = \mathrm{Tr}(AB)$$

ここで, $\mathrm{Tr}(AB)$ は行列 AB の対角成分の和を表す.

(大阪大 2010)　　(m20103511)

0.687 以下のの問いに答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位であり，a, b は $a > b > 0$ を満たす定数とする．

(1) 次の式で表される曲線 C を複素平面上に図示せよ．

$$C : z = z(t) = a\,\cos t + i\,b\,\sin t \qquad (0 \leqq\ t \leqq\ 2\pi)$$

(2) (1) で与えられた曲線 C に沿う次の積分の値を求めよ．

$$\int_C \frac{1}{z} dx$$

(3) 次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt$$

(大阪大 2015)　　(m20153504)

0.688 2 次元平面において，4 点 $(\sqrt{2}, 0)$，$(0, \sqrt{2})$，$(-\sqrt{2}, 0)$，$(0, -\sqrt{2})$ で囲まれた菱形を考える．その内部において，ランダムに点 P をとる．P から最も近い菱形の周上の点を Q とし，PQ の長さを X とする．PQ の長さを求める操作を独立に n 回繰り返し，X_1，X_2，$\cdots$，X_n を得た．ただし n は自然数とする．以下の設問に答えよ．

(1) X の分布関数，すなわち，$F(x) = P(X \leq x)$ を求めよ．
また，$F(x) = \displaystyle\int_0^x f(y)dy$ を満たす確率密度関数 $f(x)$ も求めよ．

(2) PQ の長さの平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ の期待値 $E(\overline{X})$ を求めよ．

(3) 平均 $\overline{X}$ の分散 $V(\overline{X})$ を求めよ．

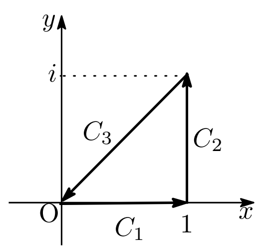
(大阪大 2016)　　(m20163507)

0.689 以下の問いに答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) $\dfrac{(1-\sqrt{3}i)^5}{(\sqrt{3}-i)^3}$ を $x + iy$ の形で表せ．

(2) 複素関数 $f(z) = f(x+iy) = x^2 - y^2 + 2xyi$ は正則であることを示し，
導関数 $f'(z)$ を求めよ．また，$f'(z)$ も正則であることを示せ．

(3) 図に示す複素平面上の積分経路 C_1, C_2, C_3 に沿って，
問い (2) の複素関数 $f(z)$ をそれぞれ積分した，
$\displaystyle\int_{C_1} f(z)dz$, $\displaystyle\int_{C_2} f(z)dz$, $\displaystyle\int_{C_3} f(z)dz$ を求めよ．
また，積分経路 $C = C_1 + C_2 + C_3$ に沿って
$f(z)$ を積分した $\displaystyle\int_C f(z)dz$ を求めよ．



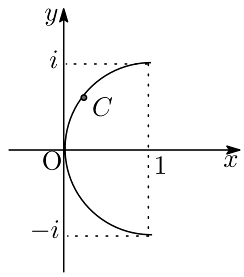
(大阪大 2016)　　(m20163511)

0.690　複素数 $z = x + iy$, $w = u + iv$ について以下の問いに答えよ．ただし，x, y, u, v は実数，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{z \to i} \frac{e^{2\pi z} - 1}{z - i}$

(2) 複素関数 $w = f(z) = \dfrac{z-1}{z-i}$ により，z 平面上の図形 $|z-1| < \sqrt{2}$ は，w 平面上でどのような図形に写されるかを図示せよ．

(3) 右図に示す通り，$z = 1$ を中心とする単位円の左半分に沿った $z = 1 - i$ から $z = 1 + i$ に至るまでの曲線を経路 C とするとき，$\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2 - 2z - 3} dz$ を求めよ．



(大阪大 2017)　　(m20173504)

0.691　複素数 $z = x + iy$ について以下の問いに答えよ．ただし，x, y は実数，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) 複素数 $1 + \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{99}$ の絶対値と偏角を求めよ．

(2) 曲線 C を放物線 $y = x^2 - 1$ の $z = -1$ から $z = 1$ に向かう曲線とする．このとき，複素関数 $f(z) = \overline{z} + z^2$ を C 上で積分せよ（$\overline{z}$ は z の共役複素数）．

(3) 複素数 $g(z) = \dfrac{1}{(z-1)(3-z)}$ において，中心が $z = 0$ のべき級数展開を求めよ．ただし，$|z| < 3$ とし，この範囲で収束するものをすべて求めること．なお，以下の幾何級数を用いてもよい．

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}\,, \qquad |z| < 1$$

(大阪大 2018)　　(m20183503)

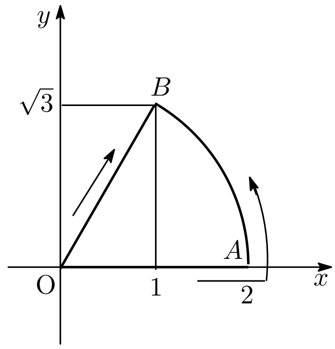
0.692　複素数 $z = x + iy$ に対して，$f(z) = \overline{z}$ で表される関数を考える．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位であり，$\overline{z}$ は z の共役複素数を表す．以下の問に答えよ．

(1) $f(z)$ は複素平面の全域で正則であるか，調べよ．

(2) 右下の複素平面図を参考にして，以下の二種類の経路で，$f(z)$ を原点 O から点 B まで積分せよ．ただし，図中において，AB は原点を中心とする半径 2 の円弧である．

(a) 原点 O から線分 OA, 円弧 AB に沿って点 B に至る経路

(b) 原点 O から線分 OB に沿って点 B に至る経路



(大阪大 2019)　　(m20193501)

0.693　次式で表される xyz 座標系の 2 次曲面について以下の問いに答えよ．

$$8x^2 + 2\sqrt{3}yz + 7y^2 + 5z^2 = 8$$

(1) 与式の左辺の対称行列 A を用いて $(x\ y\ z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の形式で表せ.

(2) A のすべての固有値を重複する場合も含めて求め，それぞれに対応する固有ベクトルを求めよ. ただし，固有ベクトルは互いに直交するものを示すこと.

(3) A を対角化する直交行列を一つ示し，その直交行列で対角化せよ.

(4) xyz 座標系の原点から小問 (2) で求めた各固有ベクトルの方向に X 軸，Y 軸，Z 軸をとるとき，与えられた 2 次曲面の $X-Y$, $Y-Z$, $Z-X$ の各平面による切断面をそれぞれ図示せよ．その際，切断面の輪郭線と各軸との交点の座標を記入すること.

(大阪大 2019)　　(m20193503)

0.694 以下 n を与えられた自然数とする.

(1) 変量 z のデータ $z_1, \cdots, z_n$ の平均が 1，分散が 1 であるとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {z_i}^2$ の値を求めよ.

(2) 2 つの変量 x, y のデータ $x_1, \cdots, x_n$ および $y_1, \cdots, y_n$ がある．これらのデータの平均はともに 0，分散はともに 1 であり，$\gamma = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ に対して $\gamma > 0$ が成り立つとする.

与えられた実数 α, β に対し，　$d_i = \dfrac{|\alpha x_i + \beta - y_i|}{\sqrt{1+\alpha^2}}$　$(i = 1, \cdots, n)$　とおく.

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$ を α, β, γ, n で表せ.

(b) α を固定し β を変化させるときの $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$ の最小値を $m(\alpha)$ とする．$m(\alpha)$ を与える β を求めよ.

(c) α, β を変化させるときの $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$ の最小値を m とする．m を求めよ.

(大阪大 2019)　　(m20193511)

0.695 (1) 次の微分方程式を解け．ただし，$x = 0$ において $y(0) = 0$ とする.

$$\frac{dy(x)}{dx} - 2y(x) - 2e^x\sqrt{y(x)} = 0$$

(2) ラプラス変換を用いて，次の微分方程式を解け．ただし，$t = 0$ において $x(0) = -1$ とする.

$$\frac{x(t)}{dt} + 2x(t) - 3\int_0^t x(\tau)d\tau = t$$

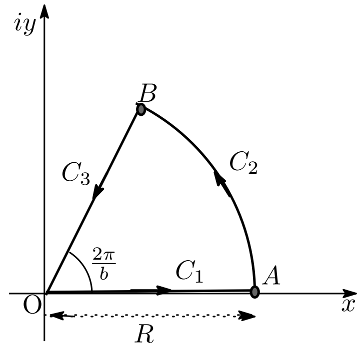
(大阪大 2020)　　(m20203502)

0.696 積分 $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^b+1}dx$ を考える．ただし，b は正の整数とする．この積分を計算するため，右下図に示す複素平面上の扇形の周に沿う単位閉曲線 C を考え，以下の図のように経路 C_1, C_2, C_3 を定める．ただし，x, y は実数で，AB は原点を中心とする半径 R $(R > 1)$ で中心角が $\dfrac{2\pi}{b}$ の円弧である.

C_1 ：原点 O から線分 OA に沿って点 A に至る経路

C_2 ：点 A から円弧 AB に沿って点 B に至る経路

C_3 ：点 B から線分 BO に沿って原点 O に至る経路



このとき，複素数 $z = x + iy$ について以下の問に答えよ．
ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) $I_3 = \displaystyle\int_{C_3} \frac{1}{z^b + 1} dz$ を，$I_1 = \displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z^b + 1} dz$ を用いて表せ．

(2) 閉曲線 C で囲まれた領域内における $f(z) = \dfrac{1}{z^b + 1}$ の特異点を求め，そこでの留数を計算せよ．

(3) 留数定理および $\displaystyle\lim_{R \to \infty} \int_{C_2} \frac{1}{z^b + 1} dz = 0$ を用いて，I を計算せよ．ただし，i を用いずに表せ．

(大阪大 2020)　　(m20203503)

0.697 複素数 z に関する以下の複素関数 $f(z)$ を考える．

$$f(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{(3z^2 - 10z + 3)(2z^2 + 5z + 2)}$$

(1) $f(z)$ の孤立特異点を全て求めよ．

(2) (1) で求めた孤立特異点のうち，$|z| < 1$ を満たすそれぞれの点における $f(z)$ の留数を求めよ．

(3) $|z| = 1$ のとき，実数 θ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ を用いて $z = e^{i\theta}$ とおける．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位を表す．このとき，$\cos\theta$ を z を用いて表せ．

(4) 以下の積分を複素積分に置き換えることにより，その値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta + 1}{(5 - 3\cos\theta)(5 + 4\cos\theta)}\, d\theta$$

(大阪大 2021)　　(m20213504)

0.698 2 変数関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

で定める．ここで，関数 $\theta = \tan^{-1} s$ は，関数

$$s = \tan\theta \quad \left\{-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$$

の逆関数である．2 変数関数 $g(x, y)$ を

$$g(x, y) = h\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) e^{f(x,y)}$$

で定める．ここで，関数 $h(r)$ は区間 $(0, \infty)$ を定義域とし，区間 $(0, \infty)$ において 1 回微分可能とする．
以下の問いに答えよ．

(1) 2 変数関数 $p(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ の x についての偏導関数 $p_x(x, y)$ を求めよ．

(2) 2 変数関数 $q(x, y) = e^{f(x,y)}$ の x についての偏導関数 $q_x(x, y)$ と y についての偏導関数 $q_y(x, y)$ を求めよ．

(3) $g(x, y)$ の定義域において，等式

$$-y g_x(x, y) + x g_y(x, y) - h'\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) e^{f(x,y)} = 0$$

が成り立っているとする． ここで，$g_x(x, y)$ は $g(x, y)$ の x についての偏導関数，$g_y(x, y)$ は $g(x, y)$ の y についての偏導関数，$h'(r)$ は $h(r)$ の導関数を表す． $h(1) = 1$ を満たす $h(r)$ を求めよ．

(大阪大 2021)　　(m20213506)

0.699 以下の問いに答えよ．ただし，$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) 方程式 $e^{iz}=1-i$ を満たす複素数 z をすべて求め，$a+bi$（a, b は実数）の形で表せ．

(2) 以下の複素関数 $f(z)$ が $z \neq 1$ において正則であることを示せ．

$$f(z)=\frac{1}{z-1}$$

(3) 以下の複素関数 $g(z)$ の $z=0$ のまわりでのローラン展開を求めよ．ただし，$1<|z|<2$ とする．

$$g(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}$$

(大阪大 2022)　　(m20223503)

0.700 $0 \leqq \theta < 2\pi,\ 0 \leqq \phi < 2\pi$ とする．3 次の正方行列 $A,\ B$ を次式で定義し，$C=AB$ とする．

$$A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}$$

なお，虚数単位は $i\ (=\sqrt{-1})$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 行列 C の行列式の値を求めよ．

(2) 行列 C のすべての固有値およびそれらの絶対値を求めよ．

(大阪大 2022)　　(m20223506)

0.701 (1) 関数 $y=y(x)$ が微分方程式

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}=2xy+(1+x^2)^2+y^2$$

を満たしているとする．このとき，関数 $z=z(x)$ を

$$z=\frac{y}{1+x^2}$$

によって定義する．z が満たす微分方程式を求めよ．

(2) (1) の微分方程式の，初期条件 $y(0)=0$ の下での解を求めよ．

(3) (2) で求めた解は，0 を含むある有界開区間 $(a,\ b)$ 上で連続であり

$$\lim_{x\to a+0}|y(x)|=\lim_{x\to b-0}|y(x)|=\infty$$

を満たしている．このような $a,\ b$ を求めよ．

(4) 関数 $u=u(x)$ が微分方程式

$$(1+x^2)\frac{du}{dx}=2xu+(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)^2+u^2}$$

を満たしているとする．この微分方程式の，初期条件 $u(0)=0$ の下での解を求めよ．

(大阪大 2022)　　(m20223509)

0.702 (1) 次の値をそれぞれ $re^{i\theta}$ の形で表せ．

(a) $\dfrac{5-i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+i3}$　　　(b) $\sqrt[3]{1-i}$

(2)　次の積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{2}{5+4\cos\theta} d\theta$

(大阪府立大 2003)　(m20033603)

0.703　次の関数の導関数を求めなさい．

(1)　$\tanh x$　(2) $\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$　$(-1 < x < 1)$　(3) $\log_e(\cos x)$　$\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

(大阪府立大 2010)　(m20103611)

0.704　次の問いに答えよ．

(1)　次の等式が任意の実数 t に対して成立することを示せ．

$$\int_0^t (s^2+1)^{-\frac{3}{2}} ds = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

(2)　積分 $\displaystyle\int_0^\infty (s^2+1)^{-\frac{3}{2}} ds$ の値を求めよ．

(大阪府立大 2011)　(m20113601)

0.705　次の積分 (1),(2) の値を求めよ．ただし，集合 D, E を正の実定数 $R,\ a,\ b,\ c$ により

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 \mid x^2+y^2 \leq R^2\right\},\quad E = \left\{(x,y,z) \in R^3 \mid ax^2+by^2+cz^2 \leq 1\right\}$$

と定める．

(1)　$\displaystyle\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dxdy$　(2)　$\displaystyle\iiint_E dxdydz$

(大阪府立大 2011)　(m20113603)

0.706　(1)　$y = \{\log(\log x)\}^3$ の一次導関数を求めよ．

(2)　$y = \cos 2x$ の二次導関数を求めよ．

(3)　$y = \sqrt[3]{x^2-2x+3}$ の一次導関数を求めよ．

(大阪府立大 2011)　(m20113610)

0.707　次の値を求めなさい．

(1)　$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$　(2)　$\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$

(大阪府立大 2013)　(m20133602)

0.708　a を実数の定数とする．関数 $f(x)$ を

$$f(x) = 1 + a\sqrt{x} - \log x$$

とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　方程式 $f(x) = 0$ の異なる実数解の個数を調べよ．

(2)　$F(x,y) = f(x^y)$ $(x > 0)$ とおくとき，$(\log x)\dfrac{\partial F}{\partial x} - \dfrac{y}{x}\dfrac{\partial F}{\partial y}$ を計算せよ．

(大阪府立大 2016)　(m20163607)

0.709　非負の整数 n に対して

$$S_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$$

とおく．このとき，各問に答えよ．

(1) $n \geqq 2$ に対して等式 $S_n = \dfrac{n-1}{n} S_{n-2}$ を示し，n の偶奇で場合分けをして，S_n の値を求めよ．

(2) 比 $\dfrac{S_{2n}}{S_{2n-1}}$ を考え，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_{2n}}{S_{2n-1}}$ の値を求めることで，次を示せ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$$

(大阪府立大 2018)　　(m20183604)

0.710 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の各問に答えよ．

(1) $\{a_n\}$ が有界な単調増加数列であることを証明せよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(神戸大 1996)　　(m19963802)

0.711 x の 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解が，

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

で与えられることを説明（証明・解説）せよ．

(神戸大 1997)　　(m19973801)

0.712 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq x, y \geq 0\right\}$ とするとき，

$$\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

を求めよ．

(神戸大 1997)　　(m19973807)

0.713 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right)$ の値を求めよ．

(神戸大 1999)　　(m19993801)

0.714 関数 $f(x) = \sqrt{1+x}$, $|x| < 1$ とするとき，次の各問に答えよ．

(1) n 次導関数 $f^{(n)}(x)$, $n \geq 1$ を求めよ．

(2) $f(x)$ のマクローリン (Maclaurin) 展開を求めよ．

(3) (2) を利用して，$\sqrt{101}$ を小数第 5 位まで求めよ．

（神戸大 2001）　　(m20013803)

0.715 次の関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $\partial f / \partial x$, $\partial f / \partial y$ を求め，それらが原点で連続かどうか調べよ．

$$f(x, y) = xy \sin\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

（神戸大 2001）　　(m20013804)

0.716 次の積分を計算せよ．

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \qquad \left(D = \{(x, y) \in \mathbf{R^2} \;:\; x^2 + y^2 \leq 1\} \right)$$

(神戸大 2003)　　(m20033805)

0.717 次の重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x dx dy,$ $\quad D : \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, ただし, $a, b > 0$

(2) $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)dxdy,$ 　　D は 3 直線 $x=0, y=0, x+y=\pi/2$ で囲まれる三角形の内部

(3) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy,$ 　　$D: x^2+y^2 \leq a^2$

(神戸大 2003)　　(m20033806)

0.718 a, b を $a \geq b > 0$ を満たす実数とする. $a_0 = a$, $b_0 = b$ より出発して, 漸化式

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\,,\ b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$$

で数列 a_n , b_n を定める.

(1) $a_n \geq b_n$ を示せ（相加平均 $\geq$ 相乗平均 を示せ）.

(2) a_n は単調減少, b_n は単調増加であることを証明せよ.

(神戸大 2005)　　(m20053805)

0.719 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を行列式が 1 の行列とする：$ad-bc=1$．A のトレース $a+d$ を t とする：$t=a+d$.
このとき

$$A^2 = f(t)A + g(t)I$$

を満たす関数 $f(t)$, $g(t)$ を求めよ．ここで，I は単位行列を表す．ただし，$A \neq \pm I$ と仮定しておく.
さらに，$t=0$ または $t=\sqrt{2}$ のとき，それぞれ $A^4 = I$ または $A^4 = -I$ となることを示せ.

(神戸大 2006)　　(m20063801)

0.720 次の重積分を求めよ．　$\displaystyle\int_{0\leq y\leq\sqrt{1-x^2}} x^2y\,dxdy$

(神戸大 2006)　　(m20063803)

0.721 $r: [a,b] \longrightarrow \boldsymbol{R}^+$ を連続微分可能な関数とし，$(x,y)-$ 平面上の曲線 $x=r(\theta)\cos\theta$, $y=r(\theta)\sin\theta$,
$a \leq \theta \leq b$ を α とする．ここで $0 \leq a \leq b \leq \pi/2$．曲線 α 上の各点と原点を結ぶ線分から出来る扇形領域の面積を $\mathcal{A}$, α の長さを $\mathcal{L}$ とするとき

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(r)d\theta\,, \qquad \mathcal{L} = \int_a^b g(r,r')d\theta$$

となる $f(r)$ と $g(r,r')$ を与えよ．さらに $r(\theta)=1/\cos\theta$ の場合の $\mathcal{A}$ または $\mathcal{L}$ の上記公式を用いて

$$\int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \sqrt{3}$$

を説明せよ.

(神戸大 2006)　　(m20063804)

0.722 次の 2 次対称行列　$A = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$　を直交行列 P を用いて対角化せよ.

(神戸大 2006)　　(m20063806)

0.723 次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の極限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ について次の問いに答えよ．　$a_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{a_n}$

(1) $a_1 = 2$ または $a_1 = 4$ のとき，　$a_n = a_1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を確認せよ.

(2) $a_1 < 2$ のとき，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ を示せ.

(3) $a_1 > 4$ のとき，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ を示せ.

(4) $4 > a_1 > 2$ のとき, $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ を示せ.

(神戸大 2007)　　(m20073807)

0.724 以下の重積分の値を求めよ.

(1) $\iint_D xy^2\,dxdy\,,\qquad D\ :\ 0 \leqq\ y \leqq\ x \leqq\ 1$

(2) $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy\,,\qquad D\ :\ x^2+y^2 \leqq\ 1$

(3) $\iint_D (x-y)e^{x+y}\,dxdy\,,\qquad D\ :\ 0 \leqq\ x+y \leqq\ 2,\ 0 \leqq\ x-y \leqq\ 2$

(神戸大 2007)　　(m20073808)

0.725 (1) 関数 $z = \dfrac{1}{\sqrt{y}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4y}\right)$ $(y > 0)$ が, 関係式 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を満たすことを示せ.

(2) f, g を C^2 級の関数, $c > 0$ を定数とするとき, 関数 $z = f(x+cy)+g(x-cy)$ が, 関係式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = c^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を満たすことを示せ.

(神戸大 2008)　　(m20083802)

0.726 次の計算をせよ.

(1) $\iiint_D \dfrac{dxdydz}{\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}}\quad (D = \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 | x^2+y^2+z^2 \leq 1\})$

(2) $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

(神戸大 2008)　　(m20083808)

0.727 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上で定義された関数 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ について, 次の計算をせよ.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

(神戸大 2009)　　(m20093809)

0.728 重積分

$$V = \iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy\ .\quad D = \{(x,y) \in R^2\,|\,1 \leqq\ x \leqq\ 2,\ 0 \leqq\ y \leqq \sqrt{3}x\}$$

に関する以下の問いに答えよ.

(1) D が変数変換 $x = u,\ y = uv$ によってどのような領域に写されるかを図示せよ.

(2) (1) の変数変換に対するヤコビアンを求めよ.

(3) V の値を求めよ.

(神戸大 2011)　　(m20113808)

0.729 行列 $A = \begin{pmatrix} u & -4 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}$ は正則でないという. 以下の問いに答えよ.

(1) u の値を求めよ.

(2) 行列 $A+E$ の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ と対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3$ を求めよ.

(3) $B\boldsymbol{x}_1 = \sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{x}_1,\ B\boldsymbol{x}_2 = \sqrt{\lambda_2}\boldsymbol{x}_2,\ B\boldsymbol{x}_3 = \sqrt{\lambda_3}\boldsymbol{x}_3$ を満たす行列 B を求めよ.

(神戸大 2013)　　(m20133801)

0.730 二重積分 $I = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 15y\sqrt{2+x^5}dxdy$ について以下の問に答えよ.

(1) この二重積分に対応する積分領域を図示せよ.

(2) I の値を求めよ.

(神戸大 2014) (m20143804)

0.731 $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(2x^2+2\sqrt{2}xy+3y^2)}dxdy$ の値を求めよ.

(神戸大 2016) (m20163804)

0.732 (1) $x = \sin^2\theta$ と変数変換して，次の積分の値を求めよ. $\int_0^1 \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}dx$

(2) 次の xy 平面上の領域 D を図示せよ. $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 1 \leqq x+y \leqq 4,\ 0 \leqq x,\ 0 \leqq y\right\}$

(3) 変数変換 $x = st,\ y = s(1-t)$ により，次の st 平面上の領域 E が (2) の領域 D に 1 対 1 に写されることを示せ. $E = \left\{(s,t) \;\middle|\; 1 \leqq s \leqq 4,\ 0 \leqq t \leqq 1\right\}$

(4) 次の重積分の値を求めよ．ただし，D は (2) で定義した領域とする. $\iint_D \sqrt{\dfrac{x}{y(x+y)}}dxdy$

(神戸大 2016) (m20163809)

0.733 行列 $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$ $(a, b, c \in \mathbb{C})$ に対して，次の問に答えよ.

以下，I は 3 次の単位行列を表し，ω は 1 の 3 乗根 $\omega = \dfrac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$ を表す.

(1) Λ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) A が $A = aI + b\Lambda + c\Lambda^2$ と表されることを用いて，A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(3) 等式 $\det(A) = (a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$ を示せ.

(神戸大 2017) (m20173801)

0.734 xz 平面において，曲線 $z = \sqrt{8-x^2}$ (ただし $0 \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$)，直線 $z = x$，および z 軸で囲まれた領域を D とする．また，xyz 空間内において，z 軸を回転軸として D を 1 回転して得られる立体を V とする．以下の各問いに答えよ.

(1) D の概形を描け.

(2) D の面積を求めよ.

(3) V の体積を求めよ.

(4) $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ の値を求めよ.

(神戸大 2017) (m20173810)

0.735 $(-1, 1)$ で定義された C^∞-級関数 $f(x)$ は次の微分方程式を満たすとする：

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1, \quad f(0) = 0.$$

自然数 n に対し，$a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ とおく.

(1) a_n を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leqq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$ が成り立つことを示せ．ただし，不等式 $1-x \leqq e^{-x} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ および等式 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明せずに用いてよい．

(3) $n \to \infty$ のとき数列 $\{a_n\}$ の収束・発散を判定せよ．また，収束するときは極限値を求めよ．

(神戸大 2018)　　(m20183805)

0.736 (1) $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ を求めよ．

ただし，$D = \left\{(x,y) \mid x, y \in R,\ 0 \leqq x^2+y^2 < \infty\right\}$ とする．

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ となることを示せ．

(神戸大 2018)　　(m20183809)

0.737 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 5 \\ -5 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ とし，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x})\ ,\ \ ||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

と定める．ただし，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積とする．また，$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ を A の固有値とする（ ただし $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ ）．以下の各問に答えよ．

(1) $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ と，各 $i = 1, 2, 3$ について固有値 λ_i に対する A の固有値ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ で $||\boldsymbol{u}_i|| = 1$ を満たすものを一つずつ求めよ．また，その $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ について $(\boldsymbol{u}_i,\ \boldsymbol{u}_j)$ (ただし $1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq j \leq 3$) を計算せよ．

(2) $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ を (1) で求めたベクトルとし，$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ とする．このとき，$f(c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3)$ を c_1, c_2, c_3 で表せ．

(3) $S = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; ||\boldsymbol{x}|| = 1\right\}$ とする．S における $f(\boldsymbol{x})$ の最大値と最小値，および，それらを与える $\boldsymbol{x} \in S$ を求めよ．

(神戸大 2019)　　(m20193802)

0.738 xy 平面の第 1 象限（$x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ を満たす領域）において，2 本の曲線 $xy = 1,\ xy = 9$ と 2 本の直線 $y = x,\ y = 4x$ で囲まれた領域を R とする．以下の各問に答えよ．

(1) R の概形を書け．

(2) 変数変換 $x = \dfrac{u}{v},\ y = uv$ により R と 1 対 1 に対応する uv 平面の第 1 象限（$u \geq 0$ かつ $v \geq 0$ を満たす領域）に含まれる領域 S を求め，S の概形を書け．

(3) (2) の変数変換を用いて，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_R \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right) dxdy$$

(神戸大 2019)　　(m20193804)

0.739 $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x+y \leq 1\ .\ 1 \leq 3x-2y \leq 2\}$ とする．次の各問いに答えよ．

(1) 領域 D の概形を図示せよ．

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)\left\{\log(3x-2y)\right\}^2 dx\ dy$　の値を求めよ．

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{13x-7y}}\,dx\,dy$ の値を求めよ.

(神戸大 2022) (m20223804)

0.740 (1) 微分方程式 $y''+\sqrt{5}y'-y+2=0$ の解 $y(x)$ を求めよ.

(2) 上記の解のうち，$x>0$ で $y(x)>0$ となるものをすべて求めよ.

(神戸大 2023) (m20233802)

0.741 $I=\displaystyle\int_0^{\log 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$ を求めよ.

(鳥取大 1997) (m19973903)

0.742 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

(鳥取大 2000) (m20003902)

0.743 (1) $x>0$ において，不等式 $\sqrt{1+x}<1+\dfrac{x}{2}$ を証明せよ.

(2) $\sin x$ をマクローリン展開し，はじめの 4 項を書け.

(3) 前問 (2) の結果をも使って，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ を求めよ.

(鳥取大 2001) (m20013903)

0.744 (1) $x=\tan y$ のとき，逆関数 $y=\tan^{-1}x$ が定義できる．このとき，逆関数の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(2) $y=x^4e^{-1/x}$ を微分せよ.

(3) 次の関数を微分せよ．ただし，$x>0$ とし，また log の底は e とする.

$$y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$$

(鳥取大 2008) (m20083901)

0.745 次を求めよ．ただし，$\nabla=\dfrac{\partial}{\partial x}i+\dfrac{\partial}{\partial y}j+\dfrac{\partial}{\partial z}k$ である.

(1) $\nabla(x^2+y+z^3)$

(2) $\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right)$ （ただし，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）

(3) $\nabla\times\ (x^2i+xy^2j)$

(鳥取大 2009) (m20093906)

0.746 次の各積分を求めよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int\tan x\,dx$

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1\log x\,dx$

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_{|x|\le y\le 1}\sqrt{y^2-x^2}\,dxdy$

(鳥取大 2009) (m20093913)

0.747 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \log x\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{4x+2}{x^2-4x+7}\,dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x}}$

(鳥取大 2010) (m20103904)

0.748 $n=1,2$ に対して，極座標で与えられた曲線 $C_n : r^n = \cos n\theta$ を考える。次の問に答えよ。

(1) 曲線 C_1 を xy 平面に描き，x 軸のまわりに回転してできる図形の表面積を求めよ.

(2) 曲線 $C_2 (0 \leq \theta \leq \pi/4)$ の長さ l は，$l = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ で与えられることを示せ.

(岡山大 2006) (m20064002)

0.749 (1) $\displaystyle\int \frac{dy}{y\sqrt{1-y^2}}$ を計算せよ.

(2) $p\dfrac{dp}{dy} = y - 2y^3\ (0 \leqq\ y < 1),\ p(0) = 0$ の解 $p \in C^1(\,[0,1)\,)$ をすべて求めよ.

(3) (1) と (2) を利用して $\begin{cases} y'' - y + 2y^3 = 0,\ 0 \leqq\ y < 1,\ x \in \boldsymbol{R}, \\ \displaystyle\lim_{x\to 0} y(x) = 1, \end{cases}$ の解を求めよ.

(岡山大 2007) (m20074003)

0.750 実数全体を定義域とする関数 $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ を考える.

(1) $f(x)^2 - f'(x)^2$ を計算せよ.

(2) $f(x)$ は単調増加であることを示せ.

(3) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ について

$$\left\{f^{-1}(x)\right\}' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

を示せ.

(岡山大 2010) (m20104001)

0.751 a を実数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を考える．以下の問いに答えよ.

(1) $A - E$ は逆行列を持たないことを示せ．（ただし，E は単位行列とする.）

(2) ある正の実数 b に対して，$A - bE$ も $A + bE$ も逆行列を持たないとする．このとき a の値を求めよ.

(3) ある正則な行列 P により

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

であるとする．このとき a の値を求めよ．また，このような行列 P を一つ求めよ.

(岡山大 2013) (m20134003)

0.752 3 次正方行列 $A,\ B$ を

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad B = {}^tAA$$

により与えられる．ここで，${}^tA$ は A の転置行列である．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) A および B の行列式を計算せよ.

(2) $P^{-1}BP$ が対角行列となるような直交行列 P を一つ求めよ.

(3) $B=C^2$ となる対称行列 C を求めよ.

(4) C は正則行列であり，AC^{-1} は直交行列であることを示せ.

(岡山大 2015)　　(m20154004)

0.753 (1) 関数 $g(x)=\sqrt{1+x}$ のマクローリン展開は

$$g(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}n}\begin{pmatrix}2n-2\\n-1\end{pmatrix}x^n$$

であることを示せ．ただし，$\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ とする．また，右辺の無限級数の収束半径は1であることを示せ.

(2) 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$$

で定めるとき，$f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\begin{pmatrix}2n\\n\end{pmatrix}x^n$$

であることを示せ.

(3) 上の問い (2) の $f(x)$ のマクローリン展開について，その収束半径を求めよ.

(岡山大 2017)　　(m20174001)

0.754 次の関数を x で微分せよ.　$\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

(広島大 2001)　　(m20014101)

0.755 $n=1,2,3,\cdots$ に対し，$\mathbb{R}$ 上の関数 $f_n(x)$ を　$f_n(x)=\sqrt{\dfrac{1}{n^2}+x^2}$　で定める．次に答えよ.

(1) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ で連続であることを示せ.

(3) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ での微分可能性を調べよ.

(広島大 2003)　　(m20034101)

0.756 次の定積分を導け（計算せよ）．ただし，$a>0$ とする.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

ヒント：$\displaystyle\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx\right)^2=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ay^2}dy$ であるから，x,y の2重積分を求めればよい.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-ax^2}dx$

(広島大 2003)　　(m20034106)

0.757 (1) 実数 t に対して，　$t=\tan\theta$　かつ　$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

を満たす θ として，関数 $\theta=\arctan t$ を定める．このとき，$\dfrac{d}{dt}(\arctan t)$ を求めよ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n dx$ を $x=\sinh t$ と変数変換することにより求めよ．

ただし，n は 2 以上の自然数とし，$\sinh t$ は $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ とする．

(3) α と R を実数とし，$R \geqq 1$ と仮定する． 領域 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leqq x^2+y^2\leqq R^2\}$ における重積分 $\displaystyle\iint_D x^2(x^2+y^2)^\alpha dxdy$ の値を求めよ．

(広島大 2008) (m20084101)

0.758 (1) 曲線 $y=\cosh x$ $(0\leqq x\leqq \log 3)$ の長さを求めよ．ただし，$\cosh x = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ である．

(2) $\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq 1\}$ のとき，$\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$ を求めよ．

(広島大 2009) (m20094101)

0.759 (1) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを示せ．

(3) 積分 $I(c)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2cx\,dx$ について，$\dfrac{dI(c)}{dc}$ を c, $I(c)$ を用いて表せ．

(4) 積分 $I(c)$ を求めよ．

(広島大 2010) (m20104102)

0.760 (1) $\cos x$ の $x=0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ．

(2) $\log(1-x)$ の $x=0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ．

(3) (1) と (2) を用いて, $\log\cos x$ の $x=0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ．

(4) a を実数とするとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos^n\frac{a}{\sqrt{n}} = e^{-\frac{a^2}{2}}$ が成り立つことを示せ．

(広島大 2011) (m20114105)

0.761 $u(r)$ は区間 $(0,\ \infty)$ 上で 2 回微分可能な関数とし，さらに，$u''(r)$ が $(0,\ \infty)$ 上で連続であるとする．関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=u(r)\quad (\text{ただし，}\ r=\sqrt{x^2+y^2})$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = u''(r)+\dfrac{1}{r}u'(r)$ を示せ．

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$ が成り立つためには,

$$u(r)=a\log r + b\quad (a,b\ \text{は定数})$$

と表されることが必要十分であることを示せ．

(広島大 2012) (m20124103)

0.762 以下の問いに答えよ．

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{r\sqrt{\log r}}\,dr$ の値を求めよ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{r(\log r)^2}\,dr$ の値を求めよ．

(広島大 2012) (m20124105)

0.763 以下の問いに答えよ．

(1) 次の広義重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\,dxdy$$

ただし，積分領域 D を次で定める．

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2>e^2\}$$

(2) 関数

$$f(x,y)=\frac{1}{(x^2+y^2)\left\{\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^{1/2}+\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\right\}}$$

についての広義重積分 $\displaystyle\iint_E f(x,y)dxdy$ が収束することを示せ．ただし．積分領域 E を次で定める．

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2>1\}$$

(広島大 2012)　　(m20124106)

0.764 次の積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{ax+b}\,dx$ 　（a,b はいずれも 0 でない定数）

(2) $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(広島大 2012)　　(m20124110)

0.765 以下の各命題について，正しければ証明し，正しくなければ反例を用いてそのことを説明せよ．

(1) 区間 $(0,\infty)$ 上で微分可能な関数 $f(x)$ が $x=a$ で最大値を取るならば，$f'(a)=0$ を満たす．

(2) 区間 $[0,\infty)$ 上で微分可能な関数 $f(x)$ が $x=a$ で最大値を取るならば，$f'(a)=0$ を満たす．

(3) 区間 $I=[0,1]$ 上の非負値連続関数 $f(x)$ が $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=0$ を満たすならば，任意の $x\in I$ に対し $f(x)=0$ となる．

(4) 区間 $I=[0,1]$ 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ と I 上の関数 $f(x)$ に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ が任意の $x\in I$ で成り立つとする．このとき，$f(x)$ も I 上の連続関数である．

(5) $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

は，原点 $(0,0)$ において連続である．

(広島大 2013)　　(m20134106)

0.766 関数 $f(x)=x^2(x-1)(4-x)$ を考える．定積分

$$I=\int_1^4\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

に関して，以下の問いに答えよ．

(1) $t=\sqrt{\dfrac{x-1}{4-x}}$ とするとき，x を t の関数として表し，$\dfrac{dx}{dt}$ を計算せよ．

(2) 定積分 I において，積分変数を x から t に変換せよ．

(3) 定積分 I の値を求めよ．

(広島大 2014)　　(m20144106)

0.767 実数列 $\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体のなす実ベクトル空間を V とし，級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} {a_i}^2$ が収束するような実数列 $\{a_n\}$ 全体の集合を W とする．以下の問いに答えよ．

(1) W が V の部分ベクトル空間をなすことを示せ．

(2) $\{a_n\}$, $\{b_n\} \in W$ に対して，級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ が絶対収束することを示せ．

(3) $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ は W 上の内積であることを示せ．

(4) $a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, $b_n = \left(\dfrac{5}{7}\right)^n$ のとき，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の交角 θ を求めよ．ただし，内積空間の元 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対してノルムを $||\boldsymbol{a}|| := \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$ と書くとき，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の交角とは $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ||\boldsymbol{a}|| \, ||\boldsymbol{b}|| \cos\theta$ を満たす実数 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ のことである．

(広島大 2014)　　(m20144109)

0.768 (1) 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ の値を求めよ．

(2) $J = \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x^2)}{x}$ とおく．J を求めよ．

(3) 定数 $C > 0$ と $R > 0$ が存在して $x \geq R$ ならば $\log(1+x^2) < C\sqrt{x}$ となることを示せ．

(4) 広義積分 $K = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{x^2} dx$ の値を求めよ．

(広島大 2015)　　(m20154102)

0.769 実行列　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　を考える．以下の問いに答えよ．

(1) A の階数を求めよ．

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) 実 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の中で，次の図形 S を考える．

$$S = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \boldsymbol{v} \cdot A\boldsymbol{v} = \sqrt{2} \right\}$$

ただし，$\boldsymbol{v} \cdot A\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{v}$ との内積を表す．S の概形を図示せよ．

(4) S の点で，原点との距離が最小のものをすべて求めよ．

(広島大 2016)　　(m20164101)

0.770 $\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & m \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & n \end{bmatrix}$ が直交行列となるように，m, n を定めよ．

(広島大 2016)　　(m20164108)

0.771 (1) x, y, z, w を正の実数とする．次の不等式を示せ．

$$\sqrt[4]{xyzw} \leqq \frac{x+y+z+w}{4}$$

(2) $a \leqq b$ を満たす正の実数 a, b に対し，二つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_1 = a, \quad b_1 = b,$$
$$a_{n+1} = \sqrt[4]{a_n b_n^3} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

により定める．このとき，次の不等式を示せ．

$$a_n \leqq b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(3) (2) の数列 $\{a_n\}$ は単調非減少数列であることを示せ．また，(2) の数列 $\{b_n\}$ は単調非増加数列であることを示せ．

(4) (2) の数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はともに収束することを示せ．さらに，数列 $\{a_n\}$ の極限値と数列 $\{b_n\}$ の極限値は等しいことを示せ．

(広島大 2021) (m20214101)

0.772 a を正の実数とする．以下の問いに答えよ．ただし，任意の正整数 k に対し，

$$\lim_{t \to \infty} t^k e^{-t} = 0$$

が成立することは証明なしに用いてもよい．

(1) 任意の非負整数 n に対し，ある正の実数 C が存在して，$x \geqq 1$ において

$$x^n e^{-ax^2} \leqq Cx^{-2}$$

が成立することを示せ．さらに，任意の非負整数 n に対し，広義積分

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx$$

が収束することを示せ．

(2) 非負整数 n に対し，

$$I_n(a) = \int_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx$$

とおく．$I_1(a)$ および $I_3(a)$ を a を用いて表せ．

(3) $I_n(a)$ を (2) で定めた値とする．非負整数 m に対し，$I_{2m+1}(a)$ を a と m を用いて表せ．

(4) $I_n(a)$ を (2) で定めた値とする．$I_4(a)$ を a を用いて表せ．ただし，

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

であることは証明なしに用いてもよい．

(広島大 2021) (m20214103)

0.773 非負整数 n に対し，

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

と定める．ただし，$0! = 1$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) x を実数とする．級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

は $4|x| < 1$ のとき絶対収束し，$4|x| > 1$ のとき発散することを示せ．

(2) $4|x| < 1$ 満たす実数 x に対し,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

と定める．このとき,

$$(1-4x)f'(x) = 2f(x)$$

が成り立つことを示せ．ここで, $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す.

(3) $4|x| < 1$ 満たす実数 x に対し,

$$\sqrt{1-4x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$$

が成り立つことを示せ.

(4) 級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}$$

は ∞ に発散することを示せ.

(広島大 2021)　　(m20214105)

0.774 次の関数の不定積分を求めよ．ただし, a は定数とする.

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

(広島大 2022)　　(m20224102)

0.775 次の対称行列について以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) (1) で求めた各固有値に対する A の正規化された固有ベクトルを求めよ.

(3) ${}^tPAP$ が対角行列となる直交行列 P を求め対角化せよ.（ ${}^tP$ は P の転置行列を表す ）

(広島市立大 2005)　　(m20054203)

0.776 $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x-y}}$ のマクローリン展開（点 $(0,0)$ におけるテイラー展開）を x, y に関して 2 次の項（x^2, y^2, xy の項）まで求めよ.

(広島市立大 2006)　　(m20064202)

0.777 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ とする.

(1) $(x,y) \neq (0,0)$ において, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.

(2) $(x,y) \neq (0,0)$ において, $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ 方向の微分係数（方向微分係数）を求めよ.

(3) $(x,y) = (0,0)$ において, z が全微分可能でないことを示せ.

(広島市立大 2011)　　(m20114202)

0.778 $D=\left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, x^2+y^2\leq 1\,,\ x\leq\sqrt{3}y\right\}$ とおく.
変数変換 $x=r\cos\theta\,,\ y=r\sin\theta$ を用いて,

$$\iint_D xy^2dxdy$$

を求めよ.

(広島市立大 2013) (m20134202)

0.779 次の関数のマクローリン展開を x^3 の項まで求めよ.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

(山口大 1999) (m19994302)

0.780 $\sqrt{3}\sin x+\cos x$ を $r\sin(x+\alpha),\ r>0$ の形に表せ.

(山口大 2001) (m20014302)

0.781 次の式を $r\sin(x+\alpha),\ -\pi<\alpha\leqq\pi$ の形に表せ. $\sin x-\sqrt{3}\cos x$

(山口大 2001) (m20014306)

0.782 微分とは, 導関数を求めることをいう. 導関数とは, 関数 $f(x)$ における微分係数を, x の関数で表した関数 $\dfrac{df(x)}{dx}$ のことをいう. 微分係数とは, x から $x+\Delta x$ の区間における関数 $f(x)$ の平均変化率において, $\Delta x\to 0$ の極限を取った値をいう. そのような定義に従って

(1) $y=x^2$ を x について微分すると, $\dfrac{dy}{dx}=2x$ となることを示しなさい.

(2) $y=\sqrt{x+1}$ を x について微分すると, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ となることを示しなさい.

(山口大 2005) (m20054307)

0.783 $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{3x+9}$ の最大値・最小値を求めなさい.

(山口大 2006) (m20064303)

0.784 次の定積分の値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int_1^4\frac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt{x}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$

(山口大 2009) (m20094305)

0.785 $y=\dfrac{1}{4}\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)$ に関する次の問いに答えなさい.

(1) $\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ を求めなさい.

(2) 区間 $-1\leqq\ x\leqq\ 1$ における曲線 y の長さを求めなさい.

(山口大 2009) (m20094312)

0.786 $y=\dfrac{1}{3}x\sqrt{x}+3$ に関する次の問いに答えなさい.

(1) $\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ を求めなさい.

(2) 区間 $(4 \leq x \leq 8)$ における曲線 y の長さ L を求めなさい.

(山口大 2016) (m20164304)

0.787 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ について, 次の問に答えよ.

(1) $1 < a_n < 2$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示せ.

(2) $a_n < a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示せ.

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(徳島大 2005) (m20054402)

0.788 $f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$ について，次の問いに答えよ.

(1) $f'(x)$ を求めよ.　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\{f'(x)\}^2$ を求めよ.

(3) $f''(x)$ を求めよ.　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f''(x)$ を求めよ.

(徳島大 2008) (m20084402)

0.789 広義積分 $I = \displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$ について，次の問いに答えよ.

(1) $t = x + \sqrt{x^2+1}$ おいたとき，x を t で表せ.

(2) (1) の変数変換により，I を t の積分に変換せよ.

(3) I の値を求めよ.

(徳島大 2012) (m20124403)

0.790 $a > 0$ に対して，次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$ を求めよ.

(2) $D = \left\{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 \leqq a^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}$ とするとき，$\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\,dxdy$ を求めよ.

(徳島大 2012) (m20124407)

0.791 $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\log x}}dx$, $J = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{-\log x}\,dx$ を考える．次の問いに答えよ.

(1) $0 < x < 1$ において $\sqrt{-\log x}$ を微分せよ.

(2) J を I で表せ.

(3) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を利用して J を求めよ.

(徳島大 2014) (m20144402)

0.792 xy 平面上の領域を $D = \left\{(x,\ y)\,;\, x^2 + y^2 \leqq 2x,\ y \geqq \dfrac{x}{\sqrt{3}}\right\}$ とする.

(1) D の概形を図示せよ.

(2) 変数変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ により，D に対応する $r\theta$ 平面上の領域を E とする．E は，定数 $\alpha,\ \beta$ および関数 $f(\theta)$ を用いて $\{(r,\ \theta)\,;\, \alpha \leqq \theta \leqq \beta,\ 0 \leqq r \leqq f(\theta)\}$ と表される．$\alpha,\ \beta,\ f(\theta)$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ を求めよ.

(徳島大 2018) (m20184403)

0.793 実数 x の関数 $\varphi(x)$ および $\varphi_N(x)$ を

$$\varphi(x) = e^{-x^2}, \quad \varphi_N(x) = N\varphi(Nx) \qquad (N = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定義する．実係数の多項式 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ が与えられたものとして，次の各問いに答えなさい．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_N(x)p(x)dx$ の値を求めなさい．

(2) 実数 c に対して，極限 $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_N(x-c)p(x)dx$ の値を求めなさい．

なお，解答に必要なら $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx = \sqrt{\pi}$ を用いてもよい．

（高知大 2001） (m20014501)

0.794 $f(x)$ を閉区間 $I = [a, b]$ 上の連続関数とする. I 上に $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$ を

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

となるように選び, I の分割と呼び Δ で表す. また

$$|\Delta| = \max_{1\leq i\leq n}(x_i - x_{i-1})$$

とする. さらに $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ を満たす ξ_i をとり, $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ をこの分割の代表系と呼び, $\xi(\Delta)$ で表す. このとき

$$S\left(f, \xi(\Delta)\right) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

を分割 Δ とその代表系 $\xi(\Delta)$ に関するリーマン和と呼ぶ. 任意の分割の列と任意の代表系に対して

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S\left(f, \xi(\Delta)\right)$$

が一意に存在する. その極限 S を $f(x)$ の I における積分といい

$$\int_a^b f(x)dx = S$$

とかく. この定義を用いて次の問に答えよ. ただし, 以下において $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で正値連続な関数とし

$$f_{in} = f(a + i\delta_n), \qquad \delta_n = \frac{b-a}{n}$$

とする.

(1) 次の式を示せ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{1n} + f_{2n} + \cdots f_{nn}}{n} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

(2) 次の式を示せ.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f_{1n}f_{2n}\cdots f_{nn}} = \boldsymbol{e}^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f(x)dx}$$

(3) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)}$$

(高知大 2005) (m20054501)

0.795 関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で連続であるとは

『任意の正の数 ε に対し，正の数 δ で $|x - x_0| < \delta$ であるならば $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ をみたすものがとれる』$\cdots$ (★)

ときをいう．このとき，次の問いに答えよ．

まず $f(x) = x^2$ として，(1) と (2) に答えよ．

(1) $x_0 = 0,\ \varepsilon = \dfrac{1}{100}$ としたときに (★) が成立する δ を求めよ．

(2) $x_0 = 0$ とし，任意の $\varepsilon > 0$ に対して (★) が成立する δ を求めることにより，$f(x) = x^2$ が $x = 0$ で連続であることを示せ．

次に

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{m} & (x \text{ が } 0 \text{ でない有理数で, その既約分数表示が } m > 0 \text{ として} \dfrac{n}{m} \text{と表せるとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき, または } x \text{ が無理数のとき}) \end{cases}$$

と定義された関数について，以下の (3)〜(5) に答えよ．

(3) 次の値を求めよ．

(a) $f\left(\dfrac{2}{3}\right)$ (b) $f\left(\sqrt{2}\right)$ (c) $f\left(\dfrac{4}{8}\right)$

(4) M を自然数とする．$|x| < \dfrac{1}{M}$ をみたす有理数 x $(x \neq 0)$ の既約分数表示の分母を m とすれば $|m| > M$ となることを示せ．

(5) $f(x)$ が $x = 0$ で連続となることを示せ．

(高知大 2007) (m20074502)

0.796 べき級数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の項別微分を求めよ．

(2) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ は収束することを示せ．

(3) $f(x)$ は開区間 $(-1, 1)$ で収束することを示せ．

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} f(x)dx$ の値を求めよ．

(高知大 2011) (m20114502)

0.797 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とする．A の固有値は τ と $\overline{\tau} = -\dfrac{1}{\tau}$ であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ \tau \end{pmatrix}$ は固有値 τ と $\overline{\tau}$ に対する固有ベクトルで，単位ベクトルとなることを示せ．

(3) $\boldsymbol{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_n = A^n \boldsymbol{v}_0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とするとき，$\boldsymbol{v}_n = \dfrac{\tau^n \boldsymbol{u}_1 - \overline{\tau}^{n-1} \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{1+\tau^2}}$ を示せ．

(高知大 2011) (m20114503)

0.798 次の問いに答えよ．

(1)　微分可能な関数 $f(x)$ が微分可能な逆関数 $f^{-1}(x)$ を持つとする．このとき，次の式を示せ，

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

(2)　$f(x) = \tan x$ とし，$\tan x = t$ とおく．(1) を用いて次の式を示せ.

$$(f^{-1})'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

(3)　(2) を用いて次の式を示せ.

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{3}$$

(4)　次の値を求めよ.

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

(高知大 2013)　　(m20134501)

0.799　ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の内積を，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して,

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + 2a_2b_2 + 3a_3b_3$$

により定義する．$\mathbb{R}^3$ を通常の内積ではなく，この内積に関する計量ベクトル空間とみなすとき，次の問いに答えよ.

(1)　$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ が正規直交系であるならば．$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ は一次独立であることを示せ.

(2)　$\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく．$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ は一次独立であるが，正規直交系ではないことを示せ.

(3)　(2) の $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ をシュミットの直交化法を用いて直交化せよ.

(高知大 2018)　　(m20184503)

0.800　$D = \{(x, y)\ ;\ x^2 + y^2 \leqq \pi^2\}$ とするとき, 次の重積分を求めよ.

$$\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

(愛媛大 2004)　　(m20044606)

0.801　関数 $f(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{x^3+x}$ について, 次の問に答えよ.

(1)　等式 $f(x) = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ が成り立つように定数 A, B, C を定めよ.

(2)　不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ.

(3)　定積分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} f(x)dx$ の値を求めよ.

(愛媛大 2005)　　(m20054602)

0.802 $a>0,\ x>0$ のとき, 関数 $f(x)$ は等式

$$\int_a^{\sqrt{x}} f(t)dt=-2+\log x$$

を満たす. このとき, $f(x)$ と定数 a の値を求めよ.

(愛媛大 2005) (m20054609)

0.803 (1) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

(2) 次の関数を微分せよ.

(a) $x\sin^{-1}x$ (b) $\log\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ (c) $a^{x\log x}$（ただし，a は $a\neq 1$ である正の定数）

(愛媛大 2006) (m20064601)

0.804 (1) 不定積分 $\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx$ を求めよ。 (2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1+3t^2}\,dt$ を求めよ。

(愛媛大 2006) (m20064602)

0.805 $D=\{(x,y)\,;\,1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 4\}$ とするとき，次の積分の値を求めよ. $\displaystyle\iint_D\frac{\log\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$

(愛媛大 2006) (m20064604)

0.806 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\tan^{-1}x$ について，次の各問に答えよ.

(1) $f(x)$ は区間 $(0,\infty)$ 上単調減少であることを示せ.

(2) 次の定積分の値を求めよ. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}x^3 f\left(\frac{1}{2}x^2\right)dx$

(愛媛大 2006) (m20064606)

0.807 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{(x+a)(x+b)}-\sqrt{(x-a)(x-b)}\right\}$ （a,b は定数） (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x\tan(t^2)dt$

(愛媛大 2006) (m20064611)

0.808 (1) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^{10}-a^{10}}{x-a}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x^2}{x\sin 2x}$

(2) 次の関数を微分せよ.

(a) $e^{-2x}\cos\dfrac{x}{2}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (c) $x^{\frac{1}{x}}$ $(x>0)$

(愛媛大 2007) (m20074601)

0.809 $(x,y)\neq(0,0)$ で定義された関数 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を考える.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ. (2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を計算せよ.

(愛媛大 2007) (m20074611)

0.810 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の 1 階導関数を求めよ.

(2) $f(x)$ の逆関数を求めよ.

(3) $g(x)^2 - f(x)^2$ を求めよ.

(4) $a > 0$ とする．このとき $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ を求めよ.

(愛媛大 2008) (m20084603)

0.811 (1) (a) 次の極限値を求めよ. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\frac{1}{\cos x} - 1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ を示せ. ただし，n は自然数とする.

(2) 次の関数の導関数を求めよ.

(a) $\log|2x+1|$ (b) $\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ (c) $(\sin x)^{\sin x}$

(愛媛大 2008) (m20084608)

0.812 (1) $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ が偏微分可能であるとき，$J(u,v) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\psi}{\partial v} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial\psi}{\partial u}$ とおく．次の φ, ψ に対して $J(u,v)$ を求めよ.

(a) $\varphi(u,v) = e^u\cos v$, $\psi(u,v) = e^u \sin v$

(b) $\varphi(u,v) = \sqrt{u^2+v^2}$, $\psi(u,v) = \tan^{-1}\dfrac{v}{u}$

(2) $D = \{(x,y)\ ;\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1\}$ とするとき，次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D x\sqrt{y}\,dxdy$$

(愛媛大 2008) (m20084610)

0.813 (1) 次の関数の導関数を求めよ.

(a) $x\tan^{-1}2x$ (b) $\dfrac{x}{\sqrt{1+9x^2}}$

(2) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ について，次の問いに答えよ.

(a) $\{g(x)\}^2 - \{f(x)\}^2 = 1$ を示せ.

(b) 関数 $y = f(x)$ が単調増加であることを示せ.

(c) 関数 $y = f(x)$ の逆関数を $h(x)$ とおくとき，導関数 $h'(x)$ を求めよ.

(愛媛大 2009) (m20094601)

0.814 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{a}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{a}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{a}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$ とする．（ただし，$a > 0$）

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) 逆行列 A^{-1} が存在しないときの a の値を求めよ.

(3) 行列 A の固有値をすべて求めよ.

(4) 行列 A の最大の固有値に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

(愛媛大 2009) (m20094604)

0.815 (1) 次の曲線上の与えられた点 (a,b) における接線の方程式を求めよ.

(a) $y = x\log x$, $(a,b) = (e,e)$ (b) $y = \dfrac{e^{2x} - e^{-x}}{e^{3x} + e^{-2x}}$, $(a,b) = (0,0)$

(2) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{3-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x}-2}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan^{-1}x-x}{x^3}$　ただし, $\tan^{-1}x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする.

(3) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義を述べよ. さらに, $f(x)=c$（定数関数）ならば $f'(x)=0$ であることを定義に従って示せ.

(愛媛大 2010)　　(m20104601)

0.816 (1) $x=\sin t\left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおいて, 次の不定積分を求めよ. ただし, 最終的な答えは x の関数で表わすこと.

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

(2) $S(x)=\displaystyle\int_1^x\log t\,dt$ とする. 次の値を求めよ.

(a) $S'(e)$　　(b) $S(e)$　　(c) $\displaystyle\int_1^e e^{S(x)}\log x\,dx$　　(d) $\displaystyle\int_1^\infty\frac{e^{S(x)}}{x^x}\,dx$

(愛媛大 2010)　　(m20104602)

0.817 以下の問に答えよ.

(1) 次の累次積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{2y}{\pi}}^1\cos\frac{y}{x}dx\right)dy$$

(2) $D=\{(x,y)\,:\,x,y\geq0,\ 0\leq x^2+y^2\leq2\}$ とするとき，次の積分の値を求めよ.

$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2+1}\,dxdy$$

(愛媛大 2011)　　(m20114605)

0.818 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ とする.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

(2) 空間内の点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt3},\ \dfrac{1}{\sqrt3},\ \dfrac{1}{\sqrt3}\right)$ における曲面 $z=f(x,y)$ の接平面の方程式を求めよ.

(3) 空間における領域

$$\Omega=\Big\{(x,y,z)\,:\,x^2+y^2\leqq\ a^2\ \ 0\leqq\ z\leqq\ f(x,y)\Big\}$$

の体積を求めよ．ただし，$0<a<1$ とする.

(愛媛大 2013)　　(m20134603)

0.819 次の累次積分を求めよ.

$$\int_0^1\left(\int_{\sqrt{x}}^1\sqrt{1+y^3}\,dy\right)dx$$

(愛媛大 2014)　　(m20144604)

0.820 (1) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\log(1+x)}{x^2}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{4}{x}\right)^{x^2}$

(2) x の関数 $x\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}x$ を微分せよ.

(3) 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi$$

ただし，$\cos^{-1} x$ の値域は $[0,\ \pi]$ とする.

(愛媛大 2015)　　(m20154601)

0.821 (1) 次の不定積分を求めよ.　$\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2-1)}dx$

(2) 次の広義積分を求めよ．ただし，$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いてよい.

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$　(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2e^{-x^2}dx$　(c) $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} x^2e^{-x^2-2x-2}dx$

(愛媛大 2015)　　(m20154602)

0.822 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 \sqrt{y^2+y}\ dydx$$

(愛媛大 2015)　　(m20154607)

0.823 (1) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log\sin x$　(b) $\displaystyle\lim_{x\to+0}(\sin x)^x$

(2) 次の関数の導関数を求めよ.

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$　(b) $\tan^{-1}(2x+3)$

(愛媛大 2017)　　(m20174601)

0.824 (1) 次の不定積分を求めよ.　$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

(2) 次の定積分を求めよ.　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^{-1} 2x\ dx$

(3) 曲線 $y = \sin^{-1} 2x \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\right)$，直線 $y = \dfrac{\pi}{2}$ および y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ.

ただし，$\sin^{-1} x$ の値域は $\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ とする.

(愛媛大 2017)　　(m20174602)

0.825 曲線 $x^2 - y^2 = -1$ 上の点 $(1,\ \sqrt{2})$ における接線の方程式を求めよ.

(愛媛大 2017)　　(m20174608)

0.826 $z = f(t)$ を C^1 級の関数とする．$t = \sqrt{x^2+y^2}$ とするとき，　$yz_x - xz_y = 0$　が成立することを示せ.

(愛媛大 2017)　　(m20174609)

0.827 (1) 次の関数の導関数を求めよ．ただし，a は正の定数とする.

(a) $\sin^{-1}(x^2)$　(b) $x^{\sin x}\quad (x>0)$　(c) $\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$

(2) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$　(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x}$

(愛媛大 2018)　　(m20184601)

0.828 (1) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2x\tan x - \frac{\pi}{2}}{\sin x - \cos x}$　(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log\left(\frac{x+2}{x+4}\right)$

(2) $f(x)=\sqrt{x+2}$ とする.

(a) 3 階までの導関数 $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ を求めよ.

(b) 次の式

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-a_0-a_1x-a_2x^2}{x^2}=0$$

が成り立つように定数 a_0, a_1, a_2 を定めよ.

(愛媛大 2021) (m20214601)

0.829 次の不定積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int\frac{1}{(1+\sin^2 x)\tan x}dx$ (b) $\displaystyle\int x^9e^{-x^{10}}dx$

0.830 次の広義積分が収束するように定数 a を定め，そのときの広義積分の値を求めよ.

$$\int_1^{\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}-\frac{a}{\sqrt{x}}\right)dx$$

(愛媛大 2021) (m20214602)

0.831 (1) 次の極限値を求めよ．ただし，$[x]$ は，実数 x を超えない最大の整数とする.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+3x^2)}{\log(5+7x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-[3x]x+2}{x-1}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^{x/2}\frac{dt}{(\sin x)\sqrt{1-t^2}}$

(2) 次の関数の導関数を求めよ.

(a) $\sqrt{1+\cos^2 x}$ (b) $\sin^{-1}(\log x)$

(愛媛大 2022) (m20224606)

0.832 $f(x,y,z)=\dfrac{e^{kr}}{r}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

の時，次の問に答えよ（ここで k は定数である）.

(1) $\dfrac{\partial r}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}$ を求めよ.

(2) ラプラシアン $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ を求めよ.

(九州大 1996) (m19964701)

0.833 $V: x^2+y^2+z^2\leq a^2$, $(a>1)$ において，次の積分を求めよ.

(1) $$\int_V\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

(2) $$\int_V\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}}$$

(九州大 1996) (m19964702)

0.834 xyz 空間内の円柱面 $T: x^2+y^2=x$ と曲面 $S: z=\sqrt{x^2+y^2}$ について，次の設問に答えよ.

(1) T, S と xy 平面で囲まれる立体の体積を求めよ.

(2) 曲面 S の円柱面 T で切れ取られた部分の曲面積を求めよ.

(九州大 2003) (m20034703)

0.835 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 つの空間ベクトルとする．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の面積を S とする.

(1) S は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の長さ $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$ と内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を用いて

$$S=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$$

と表されることを示せ.

(2) 以下の設問では，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，S を求めよ．

(3) $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を含む平面上にあるベクトル $\boldsymbol{d}$ で，$\boldsymbol{c} - \boldsymbol{d}$ がその平面と直交するものを求めよ．

(4) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を隣り合う 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ．

(九州大 2003)　　(m20034705)

0.836 複素平面上の中心 a，半径 r の半円 $C_r(a)$ を $C_r(a) = \{z = a + re^{i\theta}\ ;\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$ で定める. ただし, $i = \sqrt{-1}$ である.

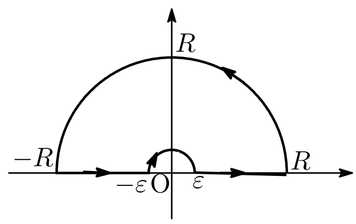
(1) 正則関数 $f(z)$ に対して次式を示せ. $z = a + \varepsilon e^{i\theta}$ とおいて考えよ.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{z-a} dz = i\pi f(a)$$

(2) 不等式 $\dfrac{2}{\pi}\theta \leq \sin\theta \left(0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が成立つことを示せ.

(3) (2) の結果を用いて次式を証明せよ.

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$



(4) 関数 $\dfrac{e^{iz}}{z}$ の積分を図の矢印に示す道に沿って考えることにより, 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ の値を計算せよ.

（九州大 2004）　　(m20044708)

0.837 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$,　$x < 1$　について以下の問に答えよ.

(1) $x = 0$ の周りで最も $f(x)$ に近い 1 次式 $f_1(x)$ を求めよ.

(2) $x = 0$ の周りで最も $f(x)$ に近い 2 次式 $f_2(x)$ を求めよ.

(3) $y = f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ のグラフ 3 つを重ねて xy 平面上に描け.

(4) $f(x)$ を $x = 0$ を中心に Taylor 級数に展開せよ. x^n の項まで展開したときの剰余項の評価を一つ与えよ.

(九州大 2005)　　(m20054709)

0.838 有名な公式　$\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$　$(a > 0)$
の両辺を a に関して微分して,「形式的に微分と積分の順序を交換」すれば

$$-\frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}} = \frac{d}{da}\left(\int_0^\infty e^{-ax^2} dx\right) = \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial a} e^{-ax^2}\right) dx = -\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx\ ,$$

すなわち

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}} \tag{$*$}$$

となる．この問題の目的は，$(*)$ が実際に成立することを上の手順で示すことである．

(1) 任意の $h > 0$ に対して，不等式　$0 \leqq \dfrac{e^{-hx^2} - 1}{h} + x^2 \leqq \dfrac{hx^4}{2}$,　$x \in \mathbb{R}$　を示しなさい．

(2) $\displaystyle\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2}dx < \infty$ を示しなさい.

(3) (1), (2) を用いて $(*)$ を示しなさい.

(九州大 2006)　　(m20064705)

0.839 正の実数 $p>0$ に対して，定積分　$f_n(p) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+nx^p}\,dx\,,\quad n=1,2,\cdots$　を考える.

(1) 次の極限値を求めよ.　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,f_n(2)$

(2) $0<\varepsilon<1$ に対して $f_n(p)$ の積分区間を $[0,\ \varepsilon]$ と $[\varepsilon,\ 1]$ に分けることにより次の不等式を示せ.

$$0 < f_n(p) < \varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{1+n\varepsilon^p}$$

(3) (2) を用い　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(p) = 0$　であることを示せ.

(九州大 2007)　　(m20074705)

0.840 3 次元空間内で

$$S\ :\ (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))\,,\quad (u,v)\in D$$

の形で表される曲面を考える．ただし，D はパラメータ (u,v) の動く 2 次元平面の領域である．このとき，S の面積 $\mu(S)$ は

$$\mu(S) = \int_D \sqrt{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}^2}\ dudv$$

で与えられる．ただし，$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ は行列式を表す．これを用いて以下の問いに答えよ.

(1) 曲面 S が $z=f(x,y)\,,\quad (x,y)\in D$ で与えられるときは

$$\mu(S) = \int_D \sqrt{\,1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2\,}\ dxdy$$

であることを示せ.

(2) 半径 1 の球面 $x^2+y^2+z^2=1$ の面積は 4π であることを (1) の公式を用いて確かめよ.

(九州大 2007)　　(m20074707)

0.841 積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a\cos\theta}\,d\theta$ を複素平面の積分に変換して計算する．ただし，a は $0<a<1$ の実数である.

(1) 単位円上の任意の点，$z=e^{i\theta}$ に対して，$d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ であることを示せ.

(2) $\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ であることから，I を積分経路を単位円 $|z|=1$ とする複素積分へ変換せよ.

(3) (2) で得られた複素積分の被積分関数の特異点のうち，単位円内部に含まれる点を書け.

(4) 留数計算によって，$I = \dfrac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$ となることを示せ.

(九州大 2008)　　(m20084703)

0.842 $G(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4t}\right)$ とおく．ただし，$\exp z = e^z$ である.

(1) $t>0$ のとき

$$\frac{\partial G}{\partial t}-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=0$$

であることを示せ.

(2) $t>0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x,t)\,dx=1$$

であることを示せ．ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}=\sqrt{\pi}$ を用いてよい.

(3) f を $\boldsymbol{R}=(-\infty,\ \infty)$ 上の有界な連続関数とするとき，すべての $x\in\boldsymbol{R}$ に対して,

$$\lim_{t\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t)f(y)\,dy=f(x)$$

であることを証明せよ.

(九州大 2008)　　(m20084712)

0.843 A を $n\times\ n$ 実行列とする．V を n 実ベクトル $\boldsymbol{v}$ で

$$\lim_{m\to\infty} A^m\boldsymbol{v}=0 \quad (m \text{ は自然数})$$

となるものの全体とする.

(1) V は $\boldsymbol{R}^n$ の線形部分空間であることを示せ.

(2) $n=3$ で

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -9/4 & 1/2 \\ -3/2 & 1 & 1/2 \\ 3/2 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

とするとき，A の固有値は $-1,\ 2\pm\sqrt{2}$ であることを示せ.

(3) A が (2) で与えられるとき V を求めよ.

(九州大 2008)　　(m20084713)

0.844 (1) 区間 $I=(0,1)$ で定義された微分可能な非負関数 $g(x)$ が区間 I で $f(x)=e^{-x^2}$ に対して $f(g(x))=x$ を満たすとき，区間 I において，$g(x)$ および導関数 $g'(x)$ を求めよ.

(2) 次の広義積分の値を求めよ.　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{xg'(x)}$

ただし，　$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　を用いてよい.

(九州大 2008)　　(m20084717)

0.845 (1) 実数 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leq t\leq 1$ に対して，等式　$\dfrac{1+t^2}{t(1+t-t^2)}=\dfrac{a}{t}+\dfrac{b+ct}{1+t-t^2}$　が成り立つように a,b,c を定めよ.

(2) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくとき，　$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$，　$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$　と表せることを示せ.

(3) 変数変換 $t=\tan\dfrac{x}{2}$ を行い，次の定積分　$\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{(\sin x+2\cos x)\sin x}$　の値を求めよ.

(九州大 2008)　　(m20084718)

0.846 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を $2\times\ 2$ 行列とする．以下の問いに答えよ．なお，行列やベクトルの要素は全て実数とする.

(1) 全ての 2 次元ベクトル $\boldsymbol{p}$ にたいし $|A\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{p}|$ となるための A の条件を a, b, c, d で表せ.

(2) A が (1) の条件を満たすとき, $(ad - bc)^2 = 1$ であることを示せ.

(3) $A\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}$ となる 0 ではない 2 次元ベクトル $\boldsymbol{q}$ が存在するための A の条件を a, b, c, d で表せ.

(4) A が (1) と (3) の条件を満たし, かつ $ad - bc = 1$ のとき, A を求めよ.

(5) A が (1) の条件を満たし, かつ直線 $y = \sqrt{3}x$ 上の点が A による変換で移動しないとき, A を求めよ.

(九州大 2009)　　(m20094701)

0.847 曲線 C は xy-平面の第一象限と第二象限に描かれているとし, 次の条件を満たすとする.

- C は y 軸上の点 $(0, a)$ $(a > 0)$ を通る.
- 第一象限内では接線の傾きが $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ で与えられ, 第二象限内では接線の傾きが $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ で与えられる.

このとき

(1) 曲線 C は第一象限内では $x = a\log\dfrac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ で与えられ, 第二象限内では $x = a\log\dfrac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2}$ で与えられることを示し, C の概形を描け.

(2) 曲線 C を x 軸の周りに回転させて出来る回転体の体積を求めよ.

(九州大 2009)　　(m20094712)

0.848 3 次元空間内で

$V = \{(x, y, z)\ ;\ x = t\cos\theta\ ,\ y = t\sin\theta\ ,\ z = r\ ,\ 0 \leq t \leq r\ ,\ 0 \leq r \leq 3\ ,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$

で表される集合 V を考える.

(1) V の体積を求めよ.

(2) L を平面

$$z = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + 1$$

とし, $S = V \cap L$ とおく.

$$\min\{z\ ;\ (x, y, z) \in S\} \qquad \max\{z\ ;\ (x, y, z) \in S\}$$

を求めよ.

(九州大 2010)　　(m20104705)

0.849 次の各問いに答えよ.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^3}}$ を求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{|x-2|}}$ は収束するか発散するか, いずれであるかを判定せよ.

(九州大 2011)　　(m20114701)

0.850 関数 $f(x) = \sin(\log x)$　$(x > 0)$ を考える. $f'(x)$, $f''(x)$ をそれぞれ $f(x)$ の 1 次および 2 次の導関数とする. また, π は円周率, e は自然対数の底とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $1 \leqq x \leqq e^{\pi}$ において $f'(x) = 0$ となる x を求めよ.

(2) $1 \leqq x \leqq e^{\pi}$ において $f''(x) < 0$ となる x の範囲を求めよ．

(3) 2 点 $(1, f(1))$, $(e^{\pi/2}, f(e^{\pi/2}))$ を通る直線の方程式を求めよ．

(4) $\dfrac{e^{\pi/4}-1}{e^{\pi/2}-1} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が成り立つことを示せ．

(九州大 2012)　　(m20124705)

0.851 次の重積分を求めよ．

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{y}}\,dxdy \qquad D : x^2+y^2 \leqq y$$

(九州大 2015)　　(m20154704)

0.852 x, y を実数とし，行列 A, B および $\boldsymbol{p}$ を下記のように定義する．

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

また，$C = AB({}^tA)$ とする．ここで ${}^tA$ は A の転置行列である．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 行列 C の固有値を求めよ．

(3) 行列 C の行列式 $\det(C)$ を求めよ．

(4) $x > 0$, $x^2+y^2=1$ および $\boldsymbol{p}\cdot(C\boldsymbol{p}) = 1$ を満たす x と y を求めよ．

(九州大 2016)　　(m20164701)

0.853 a は $a > 0$ なる定数とする．xy-平面内の領域 D と，D 上の 2 変数関数 $f(x, y)$ を，次のように定義する．

$$D = \{(x, y) \mid 0 < y < x < a\}$$

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ．

(2) $0 < x < a$ なる x を固定するとき，次の積分（広義積分）を求めよ．

$$\int_0^x f(x, y)dy$$

(3) 領域 D における $f(x, y)$ の 2 重積分（広義積分）を求めよ．

(九州大 2017)　　(m20174705)

0.854 確率変数 X が次の形の確率密度関数を持つ．

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2} & (|x| \leqq 2) \\ 0 & (|x| > 2) \end{cases}$$

(1) 確率 $P(-1 \leqq X \leqq 1)$ を求めよ．

(2) $I_n = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$ 　は次の漸化式 　$I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ $(n \geqq 2)$ 　を満たすことを示せ．

(3) 期待値 $E[X^4]$ を求めよ．

(九州大 2018)　　(m20184703)

0.855 次の定積分および広義積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$　　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(九州大 2021)　　(m20214707)

0.856 x の関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\mid t-x \mid}\,dt$ について，次の問に答えよ.

(1) $f(x)$ の微分 $f'(x)$ を求めよ.

(2) $-1 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大・最小値を求めよ.

(九州芸術工科大 1999)　　(m19994802)

0.857 以下に答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を示し，これを使って $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a^2+x}-\sqrt{a^2-x}}{x}$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ を微分せよ.

（九州芸術工科大 2000）　　(m20004801)

0.858 次の問に答えよ．ただし，log は自然対数を表す．自然対数の底は $e=2.718\cdots$ である.

(1) 次の積分（広義積分）の値を求めよ.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon>0,\ \varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

(2) 極限値に関する次の二つの等式が成り立つことを証明せよ.

$$\lim_{x>0,\ x\to 0} x\log x = 0 \quad , \qquad \lim_{x>0,\ x\to 0} x^x = 1$$

(3) 閉区間 $[0,1]$ 上の関数 f, g を次のように定義する.

$$0<x\leq 1 \text{ のとき } f(x)=x\log x,\quad g(x)=x^x,\quad f(0)=0,\quad g(0)=1$$

このとき，f, g の各々について，$[0,1]$ における最大値と最小値を求めよ.

(4) 次の積分（広義積分）は有限値に収束するか，それとも無限大に発散するか，いずれであるか判定せよ．その理由も示せ.

$$\int_0^1 \frac{x^x}{\sqrt{x}}dx$$

（九州芸術工科大 2000 ）　　(m20004802)

0.859 以下に答えよ.

(1) 次の行列が直交行列になるような a, b, c の値を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & a \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ b & c & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列の行列式と逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

また，次式を満たす x, y, z を求めよ．

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

（九州芸術工科大 2000）　(m20004806)

0.860 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ を求めよ．

(2) 以下に順に答えよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を示せ．

(b) $\displaystyle 1+\cos x = 2\left(\sin\frac{\pi-x}{2}\right)^2$ を示せ．

(c) 上の (a) と (b) を使って，$\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\frac{d}{dx}e^{x^x}$ を求めよ．

（九州芸術工科大 2001）　(m20014801)

0.861 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3\sqrt{a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で与えられる数列が収束することを,「上に有界な単調増加列は収束する」という定理を用いて示し，その極限値を求めよ．

(九州芸術工科大 2001)　(m20014804)

0.862 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ を求めよ．　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\cos x}{1-\cos x}$ を求めよ．

(九州芸術工科大 2005)　(m20054805)

0.863 次の関数の 1 次微分を求めなさい．

(1) $y = e^{2x}(x^2+1)$　(2) $y = \sqrt{x/(x^2+1)}$

(佐賀大 1999)　(m19994902)

0.864 以下の関数の 1 次微分を求めなさい．

(1) $y = e^x \sin x$　(2) $y = \dfrac{\sin x}{e^x}$　(3) $y = \dfrac{\log x}{x}$　(4) $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

（佐賀大 2000）　(m20004902)

0.865 以下の関数の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

（佐賀大 2001）　(m20014901)

0.866 以下の関数の 1 次常微分を求めなさい．

(1) $y = (2-x^2)^3$　(2) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$　(3) $y = \dfrac{1}{\log x}$　(4) $y = \log|\sin x|$

（佐賀大 2001）　(m20014902)

0.867 以下の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \sin(2x+1)dx$ (2) $\displaystyle\int e^{2x}\sin(3x)dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$

(4) $\displaystyle\iint e^{(3x+2)}dxdx$ (5) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$ (6) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$

（佐賀大 2001） (m20014903)

0.868 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+3})$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-5\sin 2x}{x\cos x}$

(佐賀大 2003) (m20034906)

0.869 2 変数関数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ について

(1) 偏導関数 f_x , f_y を計算せよ. (2) $f_{xy}=f_{yx}$ を示せ.

(佐賀大 2003) (m20034916)

0.870 次の問に答えよ.

(1) $\sqrt{1+2\log x}$ を x について微分せよ.

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\tan x-\frac{1}{\cos x}\right)$ を求めよ.

（佐賀大 2004） (m20044902)

0.871 次の各問に答えよ.

(1) $x>0$ のとき次の不等式が成り立つことを示せ.

$$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$$

(2) $y=\log|x+\sqrt{x^2+a}|$ $(a\neq 0)$ を微分せよ.

(3) $y=x\sin x$ $(-\pi\leq x\leq\pi)$ のグラフの概形を描け.

（佐賀大 2004） (m20044907)

0.872 以下の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int x^4e^{3x}dx$ (2) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ (3) $\displaystyle\int 2^x dx$ (4) $\displaystyle\int_1^e 4x\log x dx$

（佐賀大 2004） (m20044908)

0.873 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x}dx$ $\left(\text{ヒント}:\ \tan\frac{x}{2}=t\ \text{とおく}\right)$

(2) $\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $(a>0)$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx$ $(m,n\ :\ 0$ 以上の整数$)$

（佐賀大 2004） (m20044911)

0.874 次の定積分を求めよ, a は正の定数である.

(1) $\displaystyle\int_1^2 dx\ \log x$ (2) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}dx\ e^{-ax^2}$ (4) $\displaystyle\int_0^{\infty}dx\ \frac{\sin x}{x}$

(佐賀大 2005) (m20054910)

0.875 次の関数の 1 次微分を求めなさい.

(1) $y=\sqrt{2x^2+3}$ (2) $y=\dfrac{1}{\cos x}$ (3) $y=e^{-x}\sin(5x+2)$ (4) $y=\log\dfrac{x-1}{x+1}$

(佐賀大 2005) (m20054920)

0.876 以下の各問に答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$ を計算せよ.

(3) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=-30\sin 4x$ の一般解を求めよ.

(4) $y=2Cx-C^2$ が解となるような微分方程式を作れ. ただし, C は任意の定数とする.

(佐賀大 2005) (m20054933)

0.877 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を a,b,c を用いて表せ.

(2) a,b,c が実数のとき，A の固有値も実数になることを証明せよ．また，A が対角化できることを証明せよ.

(3) $a=1+i,\ b=1-i,\ c=0$ のとき，A を対角化せよ．ただし，i は虚数単位とする.

(4) $a=1,\ b=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2},\ c=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ のとき，A の固有値がすべて 0 になること，および A は対角化できないことを証明せよ．ただし，i は虚数単位とする.

(佐賀大 2006) (m20064904)

0.878 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x-y}}\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid 0\leq y<x\leq 1\}$ を計算せよ.

(佐賀大 2006) (m20064918)

0.879 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{5}}{x-3}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x}{5x^2-4x+7}$

(佐賀大 2006) (m20064935)

0.880 (1) 関数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ を $x=0$ の周りでテイラー展開し，x^3 の項まで書け.

(2) 微分方程式 $y''(x)+9y(x)=0$ の一般解を求めよ.

(3) 関数 $f(x)=x$（定義域を $-\pi\leq x\leq\pi$ とする）を $\displaystyle f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[\,a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\,]$ と書くとき，$a_0,\ a_n,\ b_n$ を求めよ.

(佐賀大 2007) (m20074906)

0.881 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x\log x\,dx$ （ 不定積分．積分定数を C とせよ．）

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3x^2}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$

(4) $\displaystyle\iint_D x^2 y\,dxdy$ $\left(\text{但し, } D=\left\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1,\ x\leq y\leq \sqrt{x}\ \right\}\right)$

(佐賀大 2007) (m20074907)

0.882 次の関数の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$

(佐賀大 2007) (m20074915)

0.883 次の不定積分を求めよ．但し，積分定数は C とする．

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$ (2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+a^2}$

(佐賀大 2007) (m20074924)

0.884 $a,\ b$ を実数とし，次の問いに答えよ．

(1) 次の等式を証明せよ．

$$\int_0^{2\pi} f(a\sin x+b\cos x)dx=\int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\ \sin x\right)dx$$

(2) 前問の結果を用いて，次の定積分を求めよ．

$$\int_0^{2\pi}(a\sin x+b\cos x)^2dx$$

(佐賀大 2009) (m20094901)

0.885 $x>0$ で次の定積分で定義された関数 $f(x)$ について，以下の問いに答えよ．

$$f(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

(1) 次の等式を証明せよ．ただし，$x>1$ とする．

$$f(x)=(x-1)f(x-1)$$

(2) x が自然数 n のとき，次式を示せ．

$$f(n)=(n-1)!$$

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ を示し，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ．

(佐賀大 2009) (m20094903)

0.886 全微分可能な 2 変数関数 $z=f(x,y)$ が，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を満たすとする．

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ のとき，$\dfrac{\partial z}{\partial r}$，$\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めよ．

(佐賀大 2009) (m20094906)

0.887 (1) 導関数の定義 $f'(x)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ を利用して $\left(\sqrt{2x}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ であることを示せ．

(2) $x=3\sin t$ として $\displaystyle\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算せよ．

(佐賀大 2009) (m20094910)

0.888 次の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2(2x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

(佐賀大 2009)　　(m20094916)

0.889 連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x_1 \quad\quad + 2x_3 - 6x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

の解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$ の全体を W で表す. 以下の問いに答えよ.

(1) W の次元と W の一組の正規直交基 $\{\boldsymbol{u}_1\,,\ \boldsymbol{u}_2\}$ を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は, W に含まれないことを示せ.

(3) $\boldsymbol{a}$ との距離 $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}||$ がもっとも近い W のベクトル $\boldsymbol{x}$ は,

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2$$

で与えられることを示せ. ただし, 一般に 4 次ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix}$ に対して

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i \qquad ||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$$

である.

(佐賀大 2009)　　(m20094920)

0.890 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x}$ を求めよ.

(2) $y = \sqrt{1 + 2\log x}$ の導関数を求めよ.

(佐賀大 2009)　　(m20094921)

0.891 (1) 次の関数を微分しなさい.

$y = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$

(2) 次の関数を合成関数の微分法で微分しなさい.

(a) $y = \sqrt{x^2+4}$

(b) $y = e^{2x+1}$

(3) 不定形の極限値を求めなさい.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - 2\cos x}{x^3}$　（$x \cong 0$ のとき $x = \sin x$ となる関係を利用して解答しなさい）

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log x}{x^2}$

(佐賀大 2009)　　(m20094929)

0.892 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ と両軸座標で囲まれた部分の面積を求めなさい.

(佐賀大 2009) (m20094932)

0.893 次の関数を微分せよ.

(1) $\dfrac{1}{\tan x}$ (2) $e^{\sqrt{x}}$

(佐賀大 2010) (m20104901)

0.894 次の曲線の概形をかけ.

$$y=x\sqrt{1-x^2}$$

(佐賀大 2010) (m20104902)

0.895 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 x^3\log x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 (2+x)\sqrt{1-x^2}\,dx$

(佐賀大 2010) (m20104903)

0.896 次の関数の極限を求めよ. ただし, $a>0$ とし, $\log$ は自然対数とする.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{\sin x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log\left(1+\frac{2}{x}\right)$

(佐賀大 2010) (m20104908)

0.897 積分に関する, 以下の問いに答えよ. ただし, $\sin^{-1}x$ は $\sin x$ の逆関数とする.

(1) $\left(x\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}x\right)'=2\sqrt{1-x^2}$ を示せ.

(2) $f(x)=x^2\sin^{-1}x$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(3) 不定積分 $\displaystyle\int x\,\sin^{-1}x\,dx$ を求めよ.

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{1/2} x\,\sin^{-1}x\,dx$ を計算せよ.

(佐賀大 2010) (m20104910)

0.898 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $(a>0)$

(佐賀大 2010) (m20104914)

0.899 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-x-10}{x-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$

(佐賀大 2010) (m20104917)

0.900 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_3^4\frac{1}{x^2-x-2}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ 　ただし，$a>0$ とする．

(佐賀大 2011)　　(m20114907)

0.901 (1) $t=\sin^{-1}x$ とおいて，置換積分法で不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{(\sin^{-1}x)^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$ を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{1}{(\sin^{-1}x)^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$ を求めよ．

(佐賀大 2012)　　(m20124902)

0.902 次の関数 y の導関数 dy/dx を求めなさい．

(1) $y=x^2+\sqrt{x}$　　(2) $y=e^{2x^2}$

(3) $y=\sin(3x)\cos x$　　(4) $y=x\log x$

(佐賀大 2012)　　(m20124907)

0.903 2 つの直交する大きさ 1 のベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ が次のように与えられているとき，以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{i}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ -\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{j}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ と直交する単位ベクトル $\boldsymbol{k}$ を 2 つ求めよ．

(2) (1) で求めた $\boldsymbol{k}$ のいずれかを用いて，次のベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ の一次結合で表せ．

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$$

(佐賀大 2013)　　(m20134907)

0.904 $y=\sqrt{1+\sin x}$ の導関数を求めよ．

(佐賀大 2013)　　(m20134917)

0.905 $\displaystyle\int_0^4 dx\int_{\sqrt{x}}^2 \frac{dy}{\sqrt{y^3+1}}$ の積分順序を変更して計算せよ．

(佐賀大 2013)　　(m20134918)

0.906 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int(3x+1)^{1/3}dx$　　(2) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x}dx$　　(3) $\displaystyle\int\frac{x^3}{x^4+2}dx$

(4) $\displaystyle\int x^2\sin x dx$　　(5) $\displaystyle\int xe^{3x}dx$

(佐賀大 2013)　　(m20134925)

0.907 次の図形の面積を求めなさい．

(1) $y=2x^2$ と $y=2x+4$ で囲まれた部分

(2) $y=(4-x)\sqrt{x}$ と x 軸で囲まれた部分

(佐賀大 2013)　　(m20134927)

0.908 次の関数 $f(x)$ の微分 $f'(x)$ を計算せよ.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ (2) $f(x)=x\log_{10}x$

(佐賀大 2014) (m20144901)

0.909 次の $\nu(t)$ で表される正弦波交流

$$\nu(t)=V_m\sin\omega t$$

の実効値 $|V|$

$$|V|=\sqrt{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\nu(t)^2dt}$$

を求めよ．ここで $\omega T=2\pi$ とする.

(佐賀大 2014) (m20144904)

0.910 全微分可能な 2 変数関数 $z=f(x,y)$ が $\dfrac{\partial z}{\partial x}=x\sqrt{x^2+y^2}$ ， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=y\sqrt{x^2+y^2}$ を満たすとする. $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ のとき, $\dfrac{\partial z}{\partial r},\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めよ.

(佐賀大 2014) (m20144913)

0.911 次の関数 y の導関数 dy/dx を求めなさい.

(1) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\quad (ad-bc\neq 0)$ (2) $y=\log_e\bigl(x+\sqrt{x^2+1}\bigr)$

(3) $y=e^x\bigl(x^2+1\bigr)$ (4) $y=2^{\sin x}$

(佐賀大 2015) (m20154904)

0.912 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{1-x}}$ (2) $\displaystyle\int x\log_e x dx$ (3) $\displaystyle\int\frac{e^x-1}{e^x+1}$ (4) $\displaystyle\int\sin^3 x dx$

(佐賀大 2015) (m20154906)

0.913 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-3x}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sin x}\,dx$

(佐賀大 2015) (m20154919)

0.914 次の行列が直交行列となるように, a,b,c を決めよ.

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & a\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & b & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ c & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

(佐賀大 2015) (m20154924)

0.915 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int(x^5-3x^2+2x)dx$ (2) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$ (3) $\displaystyle\int\sin^3 x dx$ (4) $\displaystyle\int\frac{\log x}{x}dx$

(佐賀大 2016) (m20164908)

0.916 次のベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ について以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{c}$ に垂直で大きさが $\sqrt{5}$ であるベクトル $\boldsymbol{p}$ を求めよ．

(佐賀大 2016)　　(m20164917)

0.917 次の関数の極限を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$

(佐賀大 2016)　　(m20164925)

0.918 次の関数 y の導関数 dy/dx を求めなさい．

(1) $y=\sqrt[3]{x^2+1}$　　(2) $y=\left\{1-(1-x^2)^2\right\}^2$　　(3) $y=\tan 4x$　　(4) $y=x^{\sin x}$

(佐賀大 2016)　　(m20164930)

0.919 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int\frac{x^3+x^2+3x+1}{x^2+1}dx$　　(2) $\displaystyle\int\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$

(3) $\displaystyle\int\cos^4 x\,\sin x dx$　　(4) $\displaystyle\int xe^{x^2}dx$

(佐賀大 2016)　　(m20164932)

0.920 次の関数を微分しなさい．

(1) $y=\dfrac{4}{3}x^6$　　(2) $y=\left(x^2+1\right)^3$　　(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(4) $y=2e^{5x}$　　(5) $y=\sin^2 x$　　(6) $y=\ln\left(x^2+x\right)$

(佐賀大 2017)　　(m20174911)

0.921 次の不定積分を求めなさい．

(1) $y=x^3-3x^2+4$　　(2) $y=\dfrac{1}{x}\quad(x>0)$　　(3) $y=e^x$　　(4) $y=x\sqrt{x^2+1}$

(佐賀大 2017)　　(m20174913)

0.922 xy 平面上の集合 $\left\{(x,y)\mid x^2+y^2<R^2\right\}$ で定義された関数 $f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ について，下記の問いに答えなさい．ただし，定数 R は $R>2$ を満たすとする．

(1) $\displaystyle\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$ を求めなさい．

(2) 集合 D を $D=\left\{(x,y)\mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\right\}$ とし，極座標を利用して，

重積分 $\displaystyle I=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy$ を求めなさい．

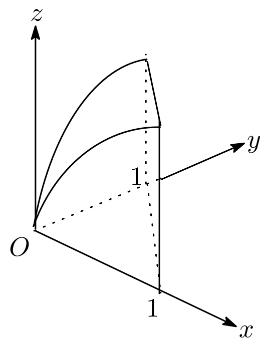
(佐賀大 2018)　　(m20184903)

0.923 次の関数を微分せよ．

(1) $\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+1}$　　(2) $\log\dfrac{\cos x}{x}$

(佐賀大 2018)　　(m20184909)

0.924 図に示されている，曲線 $z=\sqrt{x+y}$ と平面 $x+y=1$ および三つの座標平面で囲まれた立体の体積を求めよ．



(佐賀大 2018)　　(m20184911)

0.925　次の問いに答えよ．ただし，log は自然対数であり，e は自然対数の底である．

(1)　次の不定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\cos x}$　　(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$

(2)　次の定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_1^e x\log x dx$　　(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(佐賀大 2018)　　(m20184917)

0.926　次の関数 y の導関数 dy/dx を求めよ．

(1) $y=x^2e^{-x}$　　(2) $y=\tan x$　　(3) $y=\dfrac{x^2}{\log x}$　　(4) $y=\sqrt{\dfrac{(1-x)(x^2+3)}{(x-1)^2}}$

(佐賀大 2018)　　(m20184921)

0.927　次の関数を微分しなさい．

(1) $y=\dfrac{1}{2}x^4$　　(2) $y=\left(2x^2+1\right)^2$　　(3) $y=\sqrt{x}$　　(4) $y=3\ e^{-4x}$

(佐賀大 2021)　　(m20214906)

0.928　次の問いに答えよ．ただし，log は自然対数であり，e は自然対数の底である．

(1)　次の極限を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-7x^2+2x+3}{2x^3-7x^2+7x-2}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

(2)　次の微分を求めよ．

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$　　(b) $\tan^2(x)$

(佐賀大 2021)　　(m20214915)

0.929　$\sqrt[20]{e}$ の近似値を小数 3 桁まで求めなさい．

(佐賀大 2021)　　(m20214921)

0.930　以下の微分方程式の一般項を求めなさい．

(1)　$x\dfrac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2+y^2}$

(2)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}+3y=2e^{2x}$

(佐賀大 2021)　　(m20214927)

0.931 つぎの積分をせよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \log(x^2+1)\,dx$

(佐賀大 2022)　(m20224902)

0.932 次の関数 y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい.

(1) $y=(x+3)^8$　(2) $y=\sin(2x)$　(3) $y=e^{\cos x}$

(4) $y=\sqrt{x^3+x^2+1}$　(5) $y=\log(x^3+1)$　(6) $y=\dfrac{\log(x)}{x^2+3}$

(佐賀大 2022)　(m20224919)

0.933 水中の砂糖は，そのとき残っている量に比例する速度で溶解する．$50g$ の砂糖が $15g$ に減るのに 3 時間かかるとすれば，砂糖の 20 % が溶解するのには何時間かかるか答えなさい．必要ならば $\log(5)$, $\sqrt{3}$ 等の表記を用いて解答してよい．ただし，必要な計算過程を記すこと.

(佐賀大 2022)　(m20224923)

0.934 $a>0$ の範囲で定義された関数 $f(x)=x+\sqrt{a^2+x^2}$ について以下の問に答えよ.

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(2) $\sqrt{a^2+x^2}$ を $f(x)$ と $f'(x)$ で表せ.

(3) 定積分 $I=\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ を計算せよ.

(4) 定積分 $J=\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2+x^2}dx$ を (3) で求めた I を用いて表せ.

(長崎大 2005)　(m20055003)

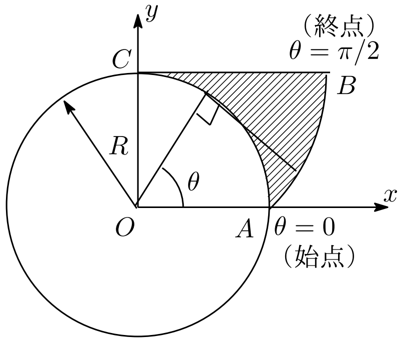
0.935 以下の問に答えよ.

(1) (x,y,z) 空間内の 3 点を $A(x_1,y_1,z_1), B(x_2,y_2,z_2), C(x_3,y_3,z_3)$ とするとき, ベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ をこれらの座標で示せ.

(2) $f(r)=\dfrac{1}{r}$,　$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とするとき, $f(r)$ の傾き $\nabla f(r)$ およびその発散 $\nabla\cdot\Big[\nabla f(r)\Big]=\nabla^2 f(r)$ を求めよ. 但し, $r\neq 0$ とする.

(長崎大 2005)　(m20055014)

0.936 太さを無視できる糸を巻き付けた半径 R の円柱がある．糸を張りながら円柱から外すとき以下の問いに答えよ.



(1) 図のように $\theta=0$ の位置からはじめて $\theta=\pi/2$ まで糸が外れた．円柱から外れた糸の長さ BC はいくらか.

(2) θ の位置まで糸が外れたとき，糸の先端の x および y 座標を R と θ を用いて表せ.

(3) $\theta=\pi/2$ まで糸を外す間に，糸の先端が描く曲線の長さ AB は次式で計算できる.

$$AB=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

上式を計算して曲線 AB の長さを求めよ.

(4) 図中の斜線部分の面積 $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = R^2 \left\{ \int_0^{\pi/2} \left(\theta \sin\theta \cos\theta + \theta^2 \sin^2\theta \right) d\theta - \frac{\pi}{4} \right\}$$

で与えられる．右辺に含まれる定積分 $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \theta \sin\theta \cos\theta \, d\theta$ の値を求めよ．

(長崎大 2007)　　(m20075002)

0.937 $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r,\ f(x,y,z) = \dfrac{1}{r} = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ とするとき．

(1) $f_x(x,y,z),\ f_y(x,y,z),\ f_z(x,y,z)$ を求めよ．

(2) $f_{xx}(x,y,z) + f_{yy}(x,y,z) + f_{zz}(x,y,z)$ を求めよ．

ここで，$f_x(x,y,z) = \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \cdots, f_{xx}(x,y,z) = \dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2}, \cdots$ とする．

(長崎大 2007)　　(m20075003)

0.938 関数

$$f(x) = 1 - e^{-x/2} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-x/2} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

について，以下の問いに答えなさい．ただし，$0 \leq x \leq 2\sqrt{3}\pi$ とする．

(1) $\dfrac{df}{dx} = 0$ を満足する x の値をすべて求めなさい．

(2) (1) で求めた x に対して，$f(x)$ の値および $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ の値を求めなさい．

(3) $0 \leq x \leq 2\sqrt{3}\pi$ における，最初の極大値を y_1，2 番目の極大値を y_2 とし，

$$p_1 = y_1 - 1\ , \quad p_2 = y_2 - 1$$

と定義する．このとき，$\ln(p_2/p_1)$ を求めなさい．ln は自然対数（底が e の対数）を表す．

(長崎大 2008)　　(m20085001)

0.939 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ を求めよ．

(2) $D = \left\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1\ ,\ x^2 \leq y \leq 1\right\}$ とするとき，領域 D を図示し，2 重積分 $\displaystyle\iint x\sqrt{y}\, dxdy$ を求めよ．

(3) xy 平面上での曲線が次式で与えられるとき，曲線を図示し，その長さを求めよ．

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{array} \right. \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(長崎大 2009)　　(m20095008)

0.940 (1) 不定積分 $\displaystyle\int (1+x)\sqrt{1-x}\, dx$ を求めよ．

(2) $D = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\ ,\ x \geq 0\}$ とするとき，領域 D を図示し，次の 2 重積分を求めよ．

$$I = \iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\, dxdy$$

(3) xy 平面上での曲線が次式で与えられるとき，その長さを求めよ．

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{array} \right. \qquad (0 \leq t \leq 2\pi\ ,\ a > 0)$$

(長崎大 2009)　　(m20095012)

0.941 次の関数について, x^3 の項まで Maclaurin（マクローリン）の級数展開で表せ.

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

(長崎大 2010)　　(m20105005)

0.942 (1) $e^{a\sqrt{x}}$ の微分を求めよ. ただし, a は実定数である.

(2) $x^k \sin ax$ の微分を求めよ. ただし, k は整数, a は実定数である.

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(a^x+b^x)-\log 2}{x}$ を計算せよ. ただし, $a,\ b$ は正定数である.

(長崎大 2010)　　(m20105011)

0.943 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx$ を求めよ.

(2) 次の 3 つの曲線で囲まれた図形を x 軸に関して回転してできる回転体の体積を求めよ.

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\ , \qquad x \text{ 軸}\ , \qquad \text{直線 } x = 2$$

(長崎大 2010)　　(m20105013)

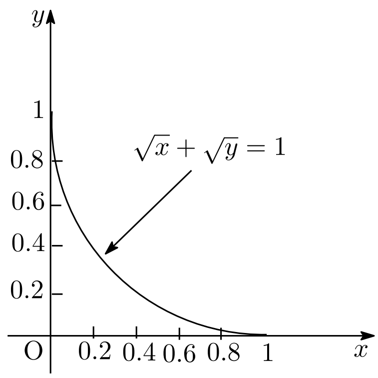
0.944 $\log_e \sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ を x で微分せよ.

(長崎大 2011)　　(m20115001)

0.945 右図に示すような曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ について, 以下の問題に答えよ.

(1) この曲線と直線 $x=0,\ y=0$ で囲まれる部分の面積を求めよ.

(2) この曲線を x 軸のまわりに回転して出来る回転体の体積を求めよ.



(長崎大 2011)　　(m20115005)

0.946 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ の第 2 階導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(3) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ をマクローリン展開し, 2 次の項まで求めよ.

(長崎大 2011)　　(m20115009)

0.947 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$

(長崎大 2011)　　(m20115010)

0.948 いま，2 次元平面上の任意の点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) の間で，$\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2} \leq \sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}$ が成り立つとき，この 2 点間の関係を，$(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ と表現するものとする．このとき，下記の問いに答えよ．

(1) ２点間の関係 L について，下記の①〜③は成り立つかについて，それぞれ答えよ．

① $(x_1, y_1)L(x_1, y_1)$

② $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2)L(x_3, y_3)$ ならば，必ず $(x_1, y_1)L(x_3, y_3)$

③ $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ ならば，必ず $(x_2, y_2)L(x_1, y_1)$

(2) $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2)L(x_1, y_1)$ が成り立つとき，この２点間の関係を $(x_1, y_1)E(x_2, y_2)$ と表すものとする．このとき，点 $(1, 1)$ に対して，$(1, 1)E(x, y)$ が成り立つ点 (x, y) の集合は，２次元平面上でどのような図形を描くか図示せよ．

(3) 任意の点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) について $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ が成り立つものとする．また，$(x_1, y_1)E(x_3, y_3)$ を満足する点 (x_3, y_3) と，$(x_2, y_2)E(x_4, y_4)$ を満足する点 (x_4, y_4) について考える．
このとき，$(x_3, y_3)L(x_4, y_4)$ が必ず成り立つことを，以下の手順で証明する．
[　ア　] と [　イ　] に，(1) における①〜③のいずれかを入れよ．

関係 E の定義より，$(x_1, y_1)E(x_3, y_3)$ から $(x_3, y_3)E(x_1, y_1)$ が成り立つ．
さらに，仮定より，$(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ が成り立つ．
ここで，[　ア　] より，$(x_3, y_3)L(x_2, y_2)$ が成り立つ．
また，関係 E の定義より，$(x_2, y_2)E(x_4, y_4)$ から $(x_2, y_2)L(x_4, y_4)$ が成り立つ．
以上により，[　イ　] により，$(x_3, y_3)L(x_4, y_4)$ が成り立つ．

(大分大 2002)　　(m20025101)

0.949 次の積分を求めなさい．

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \qquad (a > 0)$$

（大分大 2004）　　(m20045101)

0.950 (1) 次の不定積分を求めよ．　$\displaystyle\int x^2 e^{2x} dx$

(2) 次の定積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_1^2 \sqrt{3 + 2x - x^2}\, dx$

(大分大 2008)　　(m20085101)

0.951 関数 $f(x)$ を $f(x) = \sqrt{1 + 2x} \quad \left(|x| < \dfrac{1}{2}\right)$ と定義するとき，次の問いに答えよ．

(1) $f'(0)$，$f''(0)$，$f'''(0)$ を求めよ．

(2) n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ $(n \geqq 2)$ を答え，それが成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

(3) (1)，(2) の結果を使って，関数 $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ..

(大分大 2008)　　(m20085103)

0.952 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\, dx$　　　(1) $\displaystyle\int \sqrt{1 - 4x^2}\, dx$

(大分大 2011)　　(m20115104)

0.953 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{2r}{\sqrt{1 - r^2}} dr$ を求めよ．

(熊本大 2006)　　(m20065202)

0.954 xy 平面上の集合 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + \dfrac{y^2}{4} \leqq 1\right\}$ とするとき，２重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - \dfrac{y^2}{4}}} dxdy$ を求めよ．

(熊本大 2006)　　(m20065203)

0.955 xy 平面上の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を同じ平面上の点 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ に移す写像

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad ①$$

について，以下の問いに答えなさい．

(1) この写像を表す行列の固有値と固有ベクトルの組は，次に示す ② と ③ の二つであることを示しなさい．なお，固有ベクトルの大きさは，$\sqrt{2}$ に選んである．

$$固有値\ \lambda_1 = \frac{3}{2}\ ,\quad 固有ベクトル\ \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad ②$$

$$固有値\ \lambda_2 = \frac{1}{2}\ ,\quad 固有ベクトル\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad ③$$

(2) 二つの固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立なので，xy 平面上の点を表すベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の 1 次結合によって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \boldsymbol{x}_1 + \beta \boldsymbol{x}_2$$

のように表現できる．α および β を，x および y を用いて表しなさい．

(3) この写像によって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が移る点 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ を，α, β, $\boldsymbol{x}_1$ および $\boldsymbol{x}_2$ を用いて表しなさい．

(熊本大 2013)　　(m20135202)

0.956 次の重積分の値を求めるために，以下の小問 (1) と (2) について答えなさい．

$$\iint_{4 \leq x^2+y^2 \leq 9} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy \qquad ①$$

(1) 変数 x, y を $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ のように変数 r, θ を用いて変数変換をする，この変数変換のヤコビアン $J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$ を求めなさい．

(2) 変数 r, θ とヤコビアン J を用いて，式 ① の重積分の値を求めなさい．

(熊本大 2014)　　(m20145203)

0.957 xy 平面上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を同じ平面上の点 $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ に移す写像

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) この写像の表す固有値 λ_1, λ_2 と固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ の組を求めなさい．なお，固有ベクトルの大きさは $\sqrt{2}$ とすること．

(2) xy 平面上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ により以下のように表せる．

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha \boldsymbol{x}_1 + \beta \boldsymbol{x}_2$$

α, β を x, y を用いて表しなさい．

(3) $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ を $\alpha,\ \beta,\ \boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ を用いて表しなさい.

(熊本大 2019)　　(m20195203)

0.958 $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 　$((x,y,z)\neq(0,0,0))$ において，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ を計算せよ.

(宮崎大 2001)　　(m20015301)

0.959 変数 x, y, z から, 変数 u, v, w への変数変換を

$$u=x\cos z-y\sin z\ ,\qquad v=x\sin z+y\cos z\ ,\qquad w=z$$

と定めたとき, 以下の各問に答えよ.

(1) 次の恒等式が成立することを示せ.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)=1$$

(2) 関数 $f=e^{-\sqrt{u^2+v^2}}\cos w$ に対して, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ を x, y, z の関数として求めよ.

(宮崎大 2005)　　(m20055303)

0.960 (1) 平面内の集合 D を，$D=\{(x,y)\mid 0\leqq\ y\leqq\ 1,\ y^2\leqq\ x\leqq\ y\}$ と定義する.
集合 D を座標平面上に図示せよ.

(2) (1) の集合 D 上での次の重積分の値を求めよ. $\displaystyle\iint_D \sqrt{xy}\,dxdy$

(宮崎大 2007)　　(m20075304)

0.961 次の各問いに答えよ．ただし，i を虚数単位とする.

(1) 次の複素数を計算せよ.

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$$

(2) 次の式を満足する A および θ の値を求めよ．ただし，$A>0,\ 0\leqq\theta<2\pi$ とする.

$$1+\sqrt{3}\,i=Ae^{i\theta}$$

(宮崎大 2008)　　(m20085305)

0.962 次の各問に答えよ．ただし，i を虚数単位とする.

(1) 複素数 $-1+\sqrt{3}i$ を極形式 $re^{i\theta}$ で表せ．ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とせよ.

(2) 複素数 z についての方程式

$$e^{2z}+(1-\sqrt{3}i)e^z=0$$

の解 z を求めよ．答えは，$z=x+iy$ の形で表せ.

(宮崎大 2009)　　(m20095302)

0.963 次の各問に答えよ. ただし, i を虚数単位とする.

(1) 複素数 $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ を極形式 $re^{i\theta}$ で表せ. ただし, $0\leqq\theta<2\pi$ とする.

(2) 複素数

$$\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}$$

を計算せよ. ただし, $x+iy$（$x,\ y$ は実数）という形で答えよ.

(宮崎大 2010)　　(m20105302)

0.964 次の各問に答えよ．ただし，答えは，$x+yi$ の形（$x,\ y$ は実数，i は虚数単位）で表せ．

(1) $\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^3$ を計算せよ．

(2) 次の方程式を満たす複素数 z をすべて求めよ．

$$z^2+i=0$$

(宮崎大 2011)　　(m20115302)

0.965 重積分

$$I=\iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqq 1\}$$

について，次の各問いに答えよ．

(1) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とおいたときのヤコビアン $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を求めよ．

(2) 重積分 I の値を求めよ．

(宮崎大 2011)　　(m20115304)

0.966 複素数 $z_1=1+i,\ z_2=-1+\sqrt{3}i$ について，次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．以下では，$z=re^{i\theta}\ (r\geqq\ 0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ を複素数 z の極形式という．

(1) $z_1,\ z_2$ を極形式で表せ．

(2) $z_1z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2}$ を極形式で表せ．

(宮崎大 2013)　　(m20135304)

0.967 複素数 $z=2+2\sqrt{3}i$ について，次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) z を複素平面上に図示せよ．

(2) 絶対値 $|z|$ と偏角 $\arg z$ の値を，それぞれ求めよ．ただし，$0\leqq\ \arg z<2\pi$ とする．

(3) z を極形式で表せ．

(宮崎大 2016)　　(m20165302)

0.968 次の複素数を，極形式を用いて計算し，その答を $x+yi\ (x,y$ は実数$)$ の形で表せ．ただし，n は整数とし，i は虚数単位とする．

(1) 1 の 3 乗根　　(2) $(1+\sqrt{3}i)^n$

(宮崎大 2018)　　(m20185302)

0.969 関数 $f(x,\ y)=\sqrt{x^2+y^2}$ について，次の各問に答えよ．

(1) $(x,\ y)\neq(0,\ 0)$ のとき，$f_x(x,\ y)$ と $f_{xx}(x,\ y)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 次のそれぞれの極限について，存在する場合はその値を求め，存在しない場合はその理由を述べよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0} f_{xx}(x,\ y)\right)$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0} f_x(x,\ y)\right)$

(宮崎大 2018)　　(m20185304)

0.970 次の各問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 複素数 $1-\sqrt{3}i$ を，複素数平面上に図示せよ．

(2) 複素数 z についての方程式 $z^2=1-\sqrt{3}i$ のすべての解を，$x+yi$ $(x, y$ は実数$)$ の形で求めよ．

(宮崎大 2019)　　(m20195301)

0.971 次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 2 つの複素数 $\sqrt{3}-i$ と $(\sqrt{3}-i)^{-1}$ を，複素平面上に図示せよ．

(2) $(\sqrt{3}-i)^{-6}$ を計算し，$x+yi$（x, y は実数）の形で求めよ．

(宮崎大 2020)　　(m20205301)

0.972 重積分

$$I=\iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq 2\right\}$$

について，次の各問に答えよ．

(1) 領域 D を，xy 平面上に図示せよ．

(2) 重積分 I の値を求めよ．

(宮崎大 2020)　　(m20205304)

0.973 2 変数関数 $f(x,y)=\sqrt{x}\,y^2$ について，次の各問に答えよ．

(1) 2 階までの偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$，$f_{xx}(x,y)$，$f_{yy}(x,y)$，$f_{xy}(x,y)$ をすべて求めよ．

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy, \qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 2x\right\}$ の値を求めよ．

(宮崎大 2021)　　(m20215303)

0.974 次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 複素数 z についての方程式 $z^2=-i$ のすべての解を，$x+yi$（x, y は実数）の形で求めよ．

(2) 複素数 z は，等式 $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2}$ を満たすとする．このとき，$z^8+\dfrac{1}{z^3}$ がとりうるすべての値を，$x+yi$（x, y は実数）の形で求めよ．

(宮崎大 2022)　　(m20225304)

0.975 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}$

（鹿児島大 2001）　　(m20015402)

0.976 関数 $y=x\sqrt{x-x^2}$ の増減，極値，凹凸を調べ，グラフの概形を示せ．

（鹿児島大 2001）　　(m20015403)

0.977 関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$ の x に関する 3 次の導関数 $f^{(3)}(x)$ を示し，$f^{(3)}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ．

（鹿児島大 2001）　　(m20015406)

0.978 置換積分法を用いて，次の不定積分を求めよ．ただし，$a\neq 0$

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$　　$(x=a\sin\theta$とおく$)$　　(2) $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}dx$　　$(x=a\sin\theta$とおく$)$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}dx \qquad (t = \tan\frac{x}{2}$ とおく$)$

（鹿児島大 2001） (m20015407)

0.979 次の微分, 積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\frac{\log x}{\sqrt{x^2+2}}\right)$

(2) $\displaystyle\frac{d^2}{dx^2}\left(\sin^3 x\right)$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x^4 - 2\sin x\right)dx$

(4) $\displaystyle\int xe^{-x}dx$

(鹿児島大 2005) (m20055405)

0.980 次の定積分を実施しなさい.

(1) $\displaystyle\int_0^1\left(4x^3 - 6x^2 + 1\right)dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{x+1}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2 x\ dx$

(鹿児島大 2005) (m20055410)

0.981 平面内にある直交直線座標系で規定したベクトルの変換行列 $\boldsymbol{A}$ において, 次の問に答えなさい.

(1) 原点の周りに反時計回りに $\dfrac{\pi}{6}$ ラジアン回転させるベクトルの変換行列 $\boldsymbol{A}$（直交行列）は次のように与えられる.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

行列 $\boldsymbol{A}$ を用いてベクトル $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を回転変換させるには, $\boldsymbol{Ar}$ の演算をすればよい. 回転変換によって得られるベクトルを求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ をベクトル $\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$ に変換する 2 行 2 列の変換行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ. ただし, a, b は実数とする.

(鹿児島大 2005) (m20055411)

0.982 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int xe^x dx$ (2) $\displaystyle\int\frac{(x+c)dx}{(x+a)(x+b)} \quad (a \neq b)$ (3) $\displaystyle\int\frac{1-\cos 2x}{2}\cos x dx$

(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (-a < x < a,\ a > 0)$

(鹿児島大 2006) (m20065401)

0.983 空間に $o - xyz$ 直交座標系をとる．空間内の平面の方程式は

$$ax + by + cz + d = 0\ , \quad (a, b, c) \neq 0 \qquad (1)$$

で与えられる．以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ は式 (1) で与えられる平面と垂直であることを示せ．

(2) 式 (1) を $\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ で割って，

$$lx + my + nz = p\,, \quad (p \geq 0) \qquad (2)$$

と表すことができる．このとき p は原点 O からこの平面への垂直距離を表すことを示せ．

(3) 空間内の一点 $Q(x_1, y_1, z_1)$ から式 (2) で表される平面への距離 h は，次式で与えられることを示せ．

$$h = |\, lx_1 + my_1 + nz_1 - p \,|$$

(鹿児島大 2006)　　(m20065404)

0.984 ベクトル $\boldsymbol{a} = (1, 1, 3)$,　$\boldsymbol{b} = (1, -1, 1)$ のどちらにも垂直で大きさが $2\sqrt{6}$ のベクトル $\boldsymbol{c}$ を求めなさい．

(鹿児島大 2006)　　(m20065407)

0.985 次の関数を積分せよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$　　(2) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x(1 + x)}$

(鹿児島大 2006)　　(m20065412)

0.986 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x^2 e^x\, dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 4x + 3}\, dx$　　(3) $\displaystyle\int \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0,\ -a < x < a)$

(鹿児島大 2008)　　(m20085401)

0.987 次の微分・積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\log\left|x + \sqrt{x^2 + 2}\right|\right)$　　(2) $\displaystyle\int e^x \cdot \sin x\, dx$

(鹿児島大 2008)　　(m20085405)

0.988 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle I = \int_0^1 x e^x\, dx$　　(2) $\displaystyle I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

(鹿児島大 2008)　　(m20085410)

0.989 (1) $|B| = \begin{vmatrix} 7 & 3 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & -5 & 2 \\ 8 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

(2) $U = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & a \\ \dfrac{1}{2} & b \end{bmatrix}$ が直交行列になるように a, b を求めなさい．

(3) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ を対角化せよ．

(鹿児島大 2008)　　(m20085413)

0.990 (1) $\displaystyle\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a}\right)$ を x で微分せよ．　　(2) x^x を x で微分せよ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2-x-2}\,dx$ を求めよ.　　(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$ を求めよ.

(鹿児島大 2008)　　(m20085414)

0.991 (1) $t^2-2t+3/\sqrt{t}+5$ を微分しなさい.

(2) $(5-3x^2)^4$ を微分しなさい.

(3) 底面の直径が 10cm, 深さが 10cm の直円錐形の容器が頂点を下にして直立している. これに $4\mathrm{cm}^3/\mathrm{sec}$ の割合で水を注ぐとき, 水深が 6cm になった瞬間の水面の上昇する速度を求めなさい.

(鹿児島大 2009)　　(m20095411)

0.992 空間に直交座標系 (x,y,z) をとる. 以下の設問に答えなさい.

(1) 点 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ および $(0,0,1)$ を含む平面の方程式を求めよ.

(2) この平面の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}=(l,m,n)$　$(\sqrt{l^2+m^2+n^2}=1)$ を求めよ.

(3) 座標原点からこの平面までの距離 s を求めよ.

(鹿児島大 2009)　　(m20095415)

0.993 曲線 : $y=x^2$ と, 曲線 : $y=\sqrt{x}$ $(x>0)$ とによって囲まれた部分の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2010)　　(m20105410)

0.994 直交座標系 $O-XYZ$ におけるベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ と $\boldsymbol{c}=(c_1,\ c_2,\ c_3)$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ により作られる三角形に余弦定理を適用して, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積について, $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ が成り立つことを示せ. ただし, θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角であり, また $|\boldsymbol{a}|$ と $|\boldsymbol{b}|$ はそれぞれ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の大きさを表し, $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$, $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2}$ である.

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積は $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$ と定義される. これより, $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\ \boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\ \boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b})$ が成り立つことを示せ.

(鹿児島大 2011)　　(m20115403)

0.995 次の微分を求めなさい.

$\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right)$　(ただし, 対数は自然対数とする.)

(鹿児島大 2011)　　(m20115409)

0.996 ベクトルに関する以下の各問に答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ について, $2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$, $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\dfrac{|\boldsymbol{c}|}{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}\neq 0$ が成り立つ. ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めよ. ただし, 求める θ の範囲は $-\pi\leq\theta\leq\pi$ とする.

(2) $\overrightarrow{OA}=(1,2,3)$, $\overrightarrow{OB}=(1,1,-1)$, $\overrightarrow{OC}=(1,0,1)$ であり, 原点 O から $\triangle ABC$ に垂線を下ろしたときの交点を D とする. $\overrightarrow{OD}$ ならびに $\triangle ABC$ の面積 S, 四面体 $OABC$ の体積 V を求めよ.

(鹿児島大 2012)　　(m20125405)

0.997 3 次元の空間に直交座標 x 軸, y 軸, z 軸を考える. 点 $A(2,2,2\sqrt{2})$, 点 $B(3,3,-3\sqrt{2})$ があるとき, 以下の問いに答えなさい.

(1) 原点を O とした時, $\angle AOB$ を求めなさい.

(2) 原点 O から線分 AB に垂線を下ろしたとき，その足を点 P とする．線分 AP と線分 PB の長さの比を求めなさい．また，その時の点 P の座標も求めなさい．

(鹿児島大 2012)　　(m20125414)

0.998 以下の問いに答えなさい．

(1) 関数 $y=\cos x \quad (-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2)$ と x 軸で囲まれた面積を求めなさい．

(2) t の関数 $F(t)=\displaystyle\int_0^{10} z(x)\cos(t-x)dx$ の最大値が $\sqrt{\left\{\displaystyle\int_0^{10} z(x)\cos x dx\right\}^2+\left\{\displaystyle\int_0^{10} z(x)\sin x dx\right\}^2}$ となることを示しなさい．ただし，$z(x)$ は，x に関する任意の関数である．

(鹿児島大 2012)　　(m20125422)

0.999 以下の問題に答えなさい．

(1) 加法定理 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ を用いて $\cos^2 t=\dfrac{1+\cos 2t}{2}$ が成立することを示しなさい．

(2) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ を，$x=a\sin t$ とおくことにより計算しなさい．ただし，$a>0$ とする．

(鹿児島大 2012)　　(m20125426)

0.1000 $z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}$ であるとき，$|z|$ および，$\arg z$ を求めなさい．

(鹿児島大 2012)　　(m20125429)

0.1001 次の微分を求めなさい．

$$\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\sqrt{x}\right] \qquad (\text{ただし，} \tan^{-1} \text{ は } \arctan \text{ とする.})$$

(鹿児島大 2013)　　(m20135406)

0.1002 次の不定積分を求めなさい．

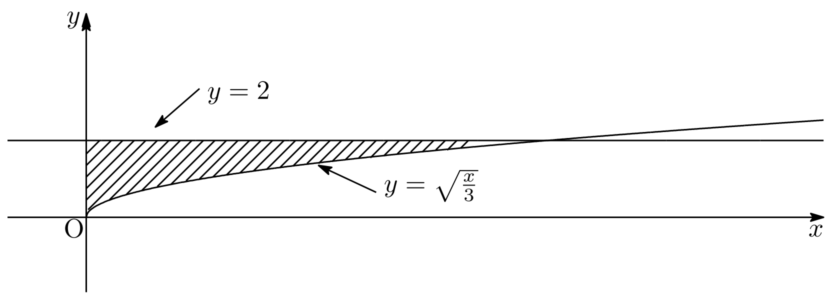
$$\int \frac{1+x+x\sqrt{x}+x^3}{x^2}\,dx$$

(鹿児島大 2013)　　(m20135407)

0.1003 直線 $y=2$ と曲線 $y=\sqrt{x/3}$ と y 軸によって囲まれる図形（下図の斜線部）の面積を求めたい．以下の (1),(2) に答えよ．

(1) 斜線部の面積を求めるための手順を簡潔に説明せよ．

(2) 斜線部の面積を求めよ．



(鹿児島大 2014)　　(m20145401)

0.1004 以下の積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+2}{3x^2+4x+1}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx$

(鹿児島大 2014)　(m20145407)

0.1005 行列 $A=\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$ の固有値は $\frac{4}{5}$ であり，固有単位ベクトルは $\overrightarrow{a}=(a_x,\ a_y)=\frac{\sqrt{5}}{5}(1,2)$ である．以下の問いに答えなさい．

(1) $\overrightarrow{a}$ と直交する単位ベクトル $\overrightarrow{b}=(b_x,\ b_y)$ を求めなさい．ただし，$b_x<0$ とする．

(2) 行列 P を $\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{pmatrix}$ とおく．${}^tP\,P$ と $P\,{}^tP$ を求めなさい．ただし，${}^tP$ は P の転置行列とする．

(3) ${}^tP\,A\,P$ を求めなさい．

(鹿児島大 2014)　(m20145414)

0.1006 以下の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}dx$

(鹿児島大 2015)　(m20155402)

0.1007 三角形の加法定理を用いて，

$$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=2\sin(\theta-a)$$

の式における a を決定したい．どのように決定するか解法の過程を説明せよ．また a の値を答えよ．

(鹿児島大 2016)　(m20165411)

0.1008 以下の不定積分，定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$　　(2) $\displaystyle\int_0^\pi x\sin x dx$

(鹿児島大 2017)　(m20175402)

0.1009 次の 2 次行列 $\boldsymbol{U}$ が直交行列になるように，正規直交基底 a, b を求めなさい．

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & a \\ \frac{1}{2} & b \end{bmatrix}$$

(鹿児島大 2017)　(m20175419)

0.1010 次の不定積分を求めなさい．

$$\int x^2\sqrt{x^3+2}dx$$

(鹿児島大 2018)　(m20185407)

0.1011 2 つのベクトル $\boldsymbol{A}=(\sqrt{3},1)$，$\boldsymbol{B}=(\sqrt{3},-1)$ のなす角 θ $(0\le\theta\le\pi)$ を求めなさい．(鹿児島大 2018) (m20185417)

0.1012 次の 2 次行列 $\boldsymbol{U}$ が直交行列になるように，正規直交基底 a, b を求めなさい．

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & a \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & b \end{bmatrix}$$

(鹿児島大 2018)　(m20185418)

0.1013 以下の微分を求めなさい.

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\cos x + 1}\right)$$

(鹿児島大 2018)　　(m20185425)

0.1014 次の関数について x, y 方向の偏微分の和を求めよ.

$$f(x,y) = \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}$$

(鹿児島大 2018)　　(m20185431)

0.1015 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^1 \int_{-2}^4 \left(x^3 \cdot \sqrt{3y+1}\right) dxdy$$

(鹿児島大 2018)　　(m20185433)

0.1016 以下の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2 x^3 \log x\, dx$

(鹿児島大 2021)　　(m20215402)

0.1017 $\sqrt{\cos x}$ の導関数を求めよ.

(鹿児島大 2021)　　(m20215413)

0.1018 曲線 C : $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $z = \sqrt{3} \cdot t$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ のとき, 次式を求めなさい.
ただし, s は曲線の長さを表す.

$$\int_C (xy + z) ds$$

(鹿児島大 2021)　　(m20215420)

0.1019 放物線 : $y = x^2$ $(0 \leq x \leq 1)$ を y 軸のまわりに回転してできる容器を水で満杯にする. この容器の底に排水口があり, 時刻 $t = 0$ に排水口を開けて排水を開始する. 時刻 t において容器に残っている水の深さを h, 体積を V とする. V の変化率 $\dfrac{dV}{dt}$ は $\dfrac{dV}{dt} = -\sqrt{h}$ とする. このとき, 次の問に答えなさい.

(1) 水の深さ h の変化率 $\dfrac{dh}{dt}$ を h を用いて表しなさい.

(2) 容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めなさい.

(鹿児島大 2021)　　(m20215422)

0.1020 以下の不定積分, 定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \sin x \sin 3x\, dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$

(鹿児島大 2022)　　(m20225402)

0.1021 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $x\dfrac{dy}{dx} + \sqrt{1+y^2} = 0$ （ただし, $x > 0$）　　(2) $-x^2 + y^2 = 2xy\dfrac{dy}{dx}$ （ただし, $x > 0$）

(3) $\dfrac{4x-2y+1}{2x-y-1} = \dfrac{dy}{dx}$

(鹿児島大 2022)　　(m20225403)

0.1022 $\dfrac{d}{dx}\left(\cos(\sin x^2) + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}\right)$ を求めなさい.

(鹿児島大 2022)　　(m20225406)

0.1023 以下の関数の導関数を求めよ．

(1) $(ax+b)^n$ (2) $\sqrt{1-x}$ (3) $\log(ax+b)$ (4) $e^{\frac{1}{x}}$

(室蘭工業大 2006) (m20065513)

0.1024 次の複素数を実部と虚部に分け，$a+jb$（a,b は実数）の形で表せ．ただし，$j=\sqrt{-1}$ である．

(1) $\dfrac{5(1-j2)}{(1+j2)(1+j3)(2+j)}$ (2) $2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+j\dfrac{1}{2}\right)^8$

(室蘭工業大 2007) (m20075509)

0.1025 (1) $a>0$ のとき，$\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\pi$ を満たす a の値を求めよ．

(2) 関数 $g(x)$ は，関数 $f(x)$ に対して， $\displaystyle g(x)=f(0)+\sum_{n=1}^{m}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ ， $(m=1,2,3,\cdots)$
と定義される．ここで，$f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の n 階の導関数を表す．$f(x)=e^{2x}$ とするとき，$g(x)$ を，$m=3$ として求めなさい．

(室蘭工業大 2008) (m20085508)

0.1026 (1) 次の微分を計算せよ．

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

(2) $f(x)=\sin(\sqrt{x})$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)=3x^3+1$，$g(x)=x^4-5$ に対する合成関数 $h(x)=f(g(x))$ および $k(x)=g(f(x))$ の導関数 $h'(x),k'(x)$ をそれぞれ求めよ．

(室蘭工業大 2010) (m20105501)

0.1027 (1) 次の不定積分を計算せよ．

$$\int 2x\,\ln(x)\,dx$$

(2) 次の定積分を計算せよ．

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{5-x^2}}\,dx$$

(室蘭工業大 2010) (m20105506)

0.1028 次の関数を微分せよ．

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ (2) $y=\dfrac{\cos x}{x}$

(室蘭工業大 2011) (m20115503)

0.1029 次の微分を計算しなさい．

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x-x\sqrt{1-x^2}\right)\quad\text{（ただし，}-\frac{\pi}{2}<\sin^{-1}x<\frac{\pi}{2}\text{とする）}$$

(室蘭工業大 2011) (m20115507)

0.1030 関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$（ただし，$x<1$）の x^3 までのマクローリン展開を求めなさい．

(室蘭工業大 2011) (m20115512)

0.1031 置換積分法を用いて，関数 $f(x)=x^3\sqrt{1+x^2}$ の不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めなさい．

(室蘭工業大 2011) (m20115513)

0.1032 以下の微分を計算せよ．

$$\frac{d}{dx}\left\{\sin^{-1}\left(x^2-1\right)\right\} \qquad \left(0<x<\sqrt{2}\right)$$

(室蘭工業大 2017) (m20175507)

0.1033 ベクトル解析に関する以下の問いに答えよ．

(1) $f(\boldsymbol{r})=f(x,y,z)$ を任意のスカラー場として，$\nabla\times(\nabla f(\boldsymbol{r}))=0$ が成り立つことを示せ．
ここに，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ をそれぞれ x，y，z 方向の単位ベクトルとして，$\nabla\equiv\dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$ である．

(2) $f(\boldsymbol{r})=|\boldsymbol{r}|$ のとき，$\nabla f(\boldsymbol{r})$ を計算せよ．ただし，$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする．

(室蘭工業大 2018) (m20185511)

0.1034 つぎの微分，積分を計算せよ．なお，不定積分では積分定数を省略してよい．

(1) $\dfrac{d(e^{-2x^2})}{dx}$ (2) $\displaystyle\int\frac{2x^2-4}{x^3-2x^2}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_2^3\frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

(室蘭工業大 2021) (m20215501)

0.1035 2 次元直交座標系における任意の点 $P(x,y)$ の座標を変換する行列について，以下の問いに答えよ．

(1) 点 P を x 軸に対称な座標に変換する行列 A を示せ．

(2) 点 P を，原点を中心として反時計回りに $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転させる行列 B を示せ．

(3) 点 P を直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ に対して対称な座標に変換する行列 C を求めよ．

(室蘭工業大 2021) (m20215503)

0.1036 つぎの積分を計算せよ．なお，不定積分では積分定数を省略してよい．

(1) $\displaystyle\int\sin^3 x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$

(室蘭工業大 2022) (m20225509)

0.1037 行列 $A=\begin{pmatrix} a^5 & 0 & a^5 & a^5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ a^5 & 1 & a^5 & 2a^5 \\ a^5 & 1 & 2a^5 & a^5 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) A の行列式を求めよ．

(2) $a=-\dfrac{1}{2}-j\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，A の行列式の値を示せ．ただし，$j=\sqrt{-1}$ である．

(室蘭工業大 2022) (m20225511)

0.1038 次の各問に答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x$ を求めよ．

(2) $f(x)=\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ を微分せよ．

(3) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$ を求めよ．

(岡山県立大 2005) (m20055601)

0.1039 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を求めよ.

(岡山県立大 2007) (m20075602)

0.1040 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$$

(香川大 2013) (m20135701)

0.1041 以下の式で表される多変数関数 z について，次の問いに答えよ.

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

(1) z の定義域ならびに値域を求めよ.

(2) z の表す曲面の概形をグラフに表せ.

(3) この曲面上の $x = 2,\ y = 2$ に対応する点における接平面の方程式を求めよ.

(4) この曲面と座標平面で囲まれる図形の体積を V とする． V の値を求めるための二重積分の式，ならびにその積分領域 D を数式で表せ.
（積分計算を求める必要はない）

(香川大 2015) (m20155701)

0.1042 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4 - 4x^2}{8x^4 + 5x^3}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{4x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{2x^2+x+1} - \sqrt{2}x\right)$

(香川大 2016) (m20165701)

0.1043 直線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ に関する以下の点の対称移動をそれぞれ求めよ.

(1) $(1,\ \sqrt{3})$ (2) $(0,\ 1)$

(香川大 2016) (m20165703)

0.1044 以下の行列 V に関して，次の問いに答えよ.

$$V = \begin{bmatrix} \dfrac{2\sqrt{2}}{3} & a \\ \dfrac{1}{3} & b \end{bmatrix}$$

(1) 行列 V の固有値が $1,\ \sqrt{2}$ となる $a,\ b$ を求めよ.

(2) 行列 V が直交行列になるための $a,\ b$ を求めよ.

(香川大 2018) (m20185705)

0.1045 $z = \sin\sqrt{x^2+y^2},\ x = \sqrt{2}\,t,\ y = 1 - t^2$ のとき $\dfrac{dz}{dt}$ を t を用いて表せ.

(香川大 2019) (m20195702)

0.1046 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2+3x-6} - 2x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 2x^2 - 2x - 1}{2x^3}$

(香川大 2020) (m20205701)

0.1047 以下に示す行列 $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ について各設問に答えよ.

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & -8 \\ -1 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{U}$ の階数（ランク）を求めよ.

(2) 直交行列を求め，行列 $\boldsymbol{V}$ を対角化せよ.

(香川大 2020)　　(m20205705)

0.1048 $z = e^{x^2}\left(x + \dfrac{1}{y}\right)$, $x = \sqrt{2}t$, $y = e^{t^2}$ のとき，$\dfrac{dz}{dt}$ を t を用いて表せ.

(香川大 2021)　　(m20215701)

0.1049 逆正弦関数 $\sin^{-1} x$ と逆余弦関数 $\cos^{-1} x$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 次の値を求めよ.

(i) $\sin^{-1}(-1)$,　(ii) $\cos^{-1} 0$,　(iii) $\sin^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(iv) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

(2) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ.

(3) $y = \sin^{-1} x$ の微分と不定積分を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}$ の値を求めよ.

(島根大 2005)　　(m20055806)

0.1050 次の広義積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$　(2) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$　(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

(島根大 2006)　　(m20065809)

0.1051 n の関数 $f(n) = \displaystyle\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ について，以下の設問に答えよ.

(1) $f(1)$ の値を求めよ.

(2) $f(n+1) = nf(n)$ を証明せよ.

(3) n が自然数のとき，$f(n+1) = n!$ を証明せよ.

(4) $f(\frac{1}{2}) = 2\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ を証明せよ.

(5) $\dfrac{f(3)f(-\frac{5}{2})}{f(\frac{3}{2})}$ の値を求めよ．なお，$f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ である.

(島根大 2007)　　(m20075808)

0.1052 次の関数 u は方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ を満たすことを示せ.

(1) $u = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$　(2) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(島根大 2007)　　(m20075810)

0.1053 $u = u(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4t}}$ であるとき，$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いて次式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) dx = 1$
が成り立つことを示せ．ただし，t はパラメータ (> 0) とする.

(島根大 2007)　　(m20075811)

0.1054 次の関数 $u = u(x,y,z)$ について $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ の値を求めよ.

(1) $u = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{vmatrix}$ (2) $\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(島根大 2008) (m20085807)

0.1055 (1) 次の極限値は存在するかどうか調べよ.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(2) $f(x,y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ とするとき，次の問いに答えよ.

(a) f の 2 次偏導関数をすべて求めよ.

(b) $x = \sin(u+v)$, $y = \cos(u-v)$ とするとき，偏導関数 f_u と f_v を求めよ.

(島根大 2009) (m20095803)

0.1056 (1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$ は原点 $(0,0)$ で偏微分可能かどうか調べよ.

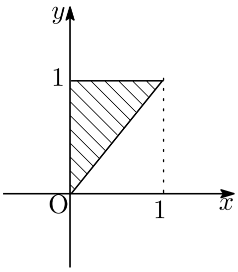
(2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$ は原点 $(0,0)$ で全微分可能かどうか調べよ.

(3) 関数 $f(x,y) = xy(x-y+1)$ の極値を求めよ.

(島根大 2010) (m20105803)

0.1057 (1) $\displaystyle\int_a^1 xe^{-x^2}\,dx$ を計算せよ.

(2) 図 1 の斜線部で示すような, xy 平面上の領域を D とする. 領域 D における積分 $\displaystyle\iint_D e^{-y^2}\,dxdy$ を計算せよ.



(3) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_0^{\sqrt{x}} (x^2+y^2)\,dy \right\} dx$ を計算せよ.

(島根大 2010) (m20105813)

0.1058 3 次正方行列 X を以下のように定義する.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & -\sqrt{6} & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

以下の設問に答えよ. ただし, ${}^tX$ は X の転置行列を表す.

(1) $x_{11} = 1$ とする．積 $X\,{}^t\!X$ を計算せよ．

(2) $x_{11} = 1$ とする．$(X\,{}^t\!X)^{-1}$ の行列式の値を求めよ．

(3) $x_{11} = 1$ とする．X の階数を求めよ．

(4) $x_{11} = 1$ とする．X^2 の行列式の値を求めよ．

(5) $x_{11} = -7$ とする．以下の命題が真か偽かを示せ．
命題「任意の $\boldsymbol{a}$ に対して，方程式 $X\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}$ の解 $\boldsymbol{y}$ が存在する.」
ただし，以下のように，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{y}$ は 3 次列ベクトルとする．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

(島根大 2012)　　(m20125802)

0.1059 関数 $f(x) = \arcsin x \ \ (-1, x < 1,\ -\pi/2 < y < \pi/2)$ に関する次の問いに答えよ．

(1) 逆関数の微分法を用いて $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を証明せよ．

(2) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(3) $f^{(n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次導関数とする．ただし $f^{(0)}(x) = f(x)$ である．このとき，0 以上の整数 n に対し，

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (1+2n)xf^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0$$

が成り立つことを証明せよ．

(4) $f(x) = \arcsin x$ のマクローリン展開を 5 次の項まで求めよ．

(島根大 2015)　　(m20155806)

0.1060 微分方程式 $y = x\dfrac{dy}{dx} + 3 \cdot \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = p$ と置き，置き換えた式を示せ．

(2) 設問 (1) の結果を x に関して微分せよ．

(3) 設問 (2) の結果から p, x のみを含む微分方程式を示せ．

(4) $\dfrac{dp}{dx} \neq 0$ のとき x を p を用いて表せ．

(5) $\dfrac{dp}{dx} \neq 0$ のとき y を p を用いて表せ．

(6) $\dfrac{dp}{dx} \neq 0$ のとき x と y はある 1 つの半円上にあることを示せ．また，その半径を示せ．

(島根大 2016)　　(m20165806)

0.1061 $\mathrm{Sin}^{-1}x \ \ (-1 < x < 1)$ を $\sin x$ の逆関数とし，$f(x) = \sin(2\mathrm{Sin}^{-1}x)$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $y = f(x)$ は次の微分方程式をみたすことを示せ．

$$(1-x^2)y'' - xy' + 4y = 0$$

(2) $y = f(x)$ に対して，$(1-x^2)^2y''' + p(x)y' + q(x)y = 0$ が成り立つような x の多項式 $p(x)$，$q(x)$ を 1 組求めよ．

(3) $f(x)$ の増減を調べ，$f(x)$ が最大値をとる x の値と最小値をとる x の値をそれぞれ求めよ．

(4) 次の定積分を計算せよ．

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{Sin}^{-1} x \, dx$$

(島根大 2020)　　(m20205806)

0.1062 次の微分方程式を解け（一般解を求めよ）．

(1) $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\dfrac{dy}{dx} = 0$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x+xy^2}{2y+x^2y}$

(首都大 2003)　　(m20035906)

0.1063 デカルト座標系 (x,y) で，$(x^2+y^2)^3 = 4x^2y^2$ と表現される曲線について以下の問に答えよ．

(1) 極座標系 (r,θ) での関係式に変換せよ $(r = \sqrt{x^2+y^2}, \tan\theta = y/x)$.

(2) グラフの概形を図示せよ．

(3) 曲線が囲む図形の面積（複数の図形がある場合はすべての合計）を求めよ．

(首都大 2004)　　(m20045905)

0.1064 行列 A を $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) A の固有値をすべて求めなさい．

(2) A の各固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めなさい．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P と $P^{-1}AP$ を求めなさい．

(首都大 2012)　　(m20125903)

0.1065 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ について以下の問いに答えなさい．

(1) $f(x)$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めなさい．

(2) (1) の結果を利用して $f(0.02)$ の近似値を求めなさい．

(首都大 2012)　　(m20125906)

0.1066 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めなさい．

(首都大 2015)　　(m20155906)

0.1067 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ を求めなさい．

(首都大 2015)　　(m20155907)

0.1068 次の関数を微分しなさい．

(1) $f(x) = \sqrt{3-2x^2}$　　(2) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$　　(3) $f(x) = \tan^{-1}(1-x)$

(首都大 2016)　　(m20165904)

0.1069 (1) 次の 2 次正方行列 A の固有値および長さが 1 であるすべての固有ベクトルを求めよ．ただし，実数の範囲で扱うものとする．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) 次の 3 次正方行列 P が直交行列であるとき，a, b, c の値をすべて求めよ．

$$P = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & a \\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} & \dfrac{-1}{\sqrt{3}} & b \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & c \end{bmatrix}$$

(首都大 2016)　　(m20165910)

0.1070 次の関数を微分しなさい．解答は答えのみでよい．

(1) $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$　　(2) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$　　(3) $f(x) = \cos^{-1}(\log x)$

(首都大 2017)　　(m20175901)

0.1071 次の関数を微分しなさい．ただし，a は正の実数とする．

(1) x^x　　$(x > 0)$　　(2) $x\sqrt{x^2+a} + a\log(\sqrt{x^2+a}+x)$

(首都大 2018)　　(m20185904)

0.1072 関数 $\sqrt{1+x} + \log(1+x)$ のマクローリン級数を x^3 の項まで求めなさい．

(首都大 2018)　　(m20185906)

0.1073 次の関数を微分しなさい．

(1) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$　　(2) $f(x) = \sin^{-1}\dfrac{x}{2}$　　(ただし，$-2 < x < 2$)

(首都大 2019)　　(m20195903)

0.1074 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \log x dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}dx$

(首都大 2019)　　(m20195907)

0.1075 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ のマクローリン級数を x^3 の項まで求めなさい．

(東京都立大 2020)　　(m20205905)

0.1076 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sqrt{x}\log x\,dx$

(東京都立大 2020)　　(m20205907)

0.1077 (1) 次の関数について $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．　$x = \dfrac{a}{\cos\theta}$，　$y = b\tan\theta$　（ a，b は定数，ただし，$a \neq 0$ ）

(2) 次の関数について $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．　$y = \dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1}x\right)$

(3) 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to+0} x^x$

(東京都立大 2020)　　(m20205910)

0.1078 3 次元空間内に原点 $O(0,0,0)$ および

3 点 $A(0,\ 2+2\sqrt{3},\ 0)$，　$B(2-\sqrt{6},\ 2\sqrt{3}-\sqrt{6},\ 2\sqrt{3})$，　$C(2+2\sqrt{3},\ 0,\ 0)$ がある．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角を求めよ．

(2) 三角形 ABC の面積を求めよ.

(3) 四面体 $OABC$ において，三角形 ABC を底面としたときの高さを求めよ.

(東京都立大 2021) (m20215902)

0.1079 (1) 関数 $z = e^x \sin xy$ について，偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.

(2) 関数 $z = f(ax+by)$ について，$b\dfrac{\partial z}{\partial x} = a\dfrac{\partial z}{\partial y}$ であることを証明せよ. (a, b は定数)

(3) 関数 $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ について，

$$(\triangle u =)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

であることを示せ. ここで，$\triangle$ はラプラシアンである.

(東京都立大 2021) (m20215903)

0.1080 $f(x) = \log \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ を x について微分せよ.

(東京都立大 2022) (m20225903)

0.1081 $y = \sinh x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ の逆関数 $y = \sinh^{-1} x$ について，次の式を示せ.

$$y = \sinh^{-1} x = \log\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\bigr), \qquad y' = \frac{d}{dx}\sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(滋賀県立大 2005) (m20056001)

0.1082 (1) 未知関数 $y = f(x)$ に対する 2 階同次線形常微分方程式

$$y'' - 2\sqrt{3}y' + 3y = 0$$

の一般解を求めよ.

(2) 2 階非同次線形常微分方程式

$$y'' - 2\sqrt{3}y' + 3y = \sin x$$

の特殊解を求めよ. その結果を使って，一般解を書き下せ.

(滋賀県立大 2005) (m20056002)

0.1083 (1) $x^2 + y^2 \leqq 2x$ で与えられる平面の領域 D を図示せよ.

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$ の値を求めよ,

(滋賀県立大 2007) (m20076004)

0.1084 原点を中心とする半径 R の円盤の $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ の部分を B とする.

このとき, $\displaystyle\iint_B \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$ の値を求めよ.

(滋賀県立大 2009) (m20096004)

0.1085 曲線 $y = f(x)$ 上の点 (x, y) と点 $(x+dx, y+dy)$ の間の無限小長さ ds は

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

によって与えられる. さらに, 曲線に沿って $a \leq x \leq b$ の長さ L_1 は, 次の式で与えられる.

$$L_1 = \int_a^b \sqrt{1 + \bigl(f'(x)\bigr)^2}\, dx$$

(1) 曲線がパラメータ t によって

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

のように表されるとき、パラメータ $\alpha \leq t \leq \beta$ に対応する曲線の長さ L_2 が

$$L_2 = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

で与えられることを示せ.

(2) 次のパラメータ t によって表される曲線 $C : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \dfrac{1}{3}t^3 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2)$ の長さを求めよ.

(滋賀県立大 2010) (m20106001)

0.1086 累次積分 $I = \displaystyle\int_0^a \left\{ \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - y^2}\, dy \right\} dx$ の値を計算したい.

(1) $I = \displaystyle\int\int_D \sqrt{a^2 - y^2}\, dx\, dy$ となるような D を不等式で表し図示せよ.

(2) 積分の順序を交換して累次積分 I の値を求めよ.

(滋賀県立大 2010) (m20106004)

0.1087 $y = \cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ の逆関数 $y = \cosh^{-1} x$ について，次の各式を示せ.

(1)

$$y = \cosh^{-1} x = \pm \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

(2) $y > 0$ の $y = \cosh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ について

$$y' = \frac{d}{dx} \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

(滋賀県立大 2011) (m20116001)

0.1088 (1) $x^2 + y^2 \leqq 2$ で与えられる平面の領域 D を図示せよ.

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{2 - x^2 - y^2}\, dxdy$ の値を求めよ.

(滋賀県立大 2011) (m20116004)

0.1089 曲線 $C : y = f(x)$ に沿って $0 \leqq x \leqq a$ の間の長さ $L(C)$ は，次の式で与えられる.

$$L(C) = \int_0^a \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

特に，曲線 C を懸垂線またはカテナリーと呼ばれる次の式で表される曲線とする.

$$C : y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

この懸垂線に沿っての $0 \leqq x \leqq a$ の間の長さ $L(C)$ を求めよ.

(滋賀県立大 2013) (m20136001)

0.1090 不等式 $x^2 + y^2 \leqq 2x$ で与えられる xy 平面の領域を D とする.

(1) D を図示せよ.

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ を求めよ.

(滋賀県立大 2014)　　(m20146004)

0.1091　(1) $|x|$ が 1 と比べて非常に小さいときに $\sqrt{1+x}$ を最もよく近似する x の 1 次式 $p_1(x)$ を求めよ.

(2) 上の $p_1(x)$ に対して，$x \geqq 0$ のとき $\left|\sqrt{1+x}-p_1(x)\right| \leqq \dfrac{x^2}{8}$ が成り立つことを示せ.

(滋賀県立大 2015)　　(m20156001)

0.1092　(1) 次の関数を微分せよ．ただし $a>0$ とする．

$$y=\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\ \right|$$

(2) m と n を正の整数とするとき，次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \ dx$$

(宇都宮大 2005)　　(m20056103)

0.1093　以下の定積分および不定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 (x+2)(x-1)dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-q)(x-q-1)}dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x+1}}dx$

(宇都宮大 2007)　　(m20076101)

0.1094　n は 2 以上の自然数とする．数学的帰納法によって，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$$

(宇都宮大 2007)　　(m20076106)

0.1095　3 つのベクトル $\boldsymbol{a}=\left(\sqrt{3},\ 1,\ 0\ \right)$，$\boldsymbol{b}=(0,\ 2,\ 0\ )$，$\boldsymbol{c}=\left(1,\ \sqrt{3},\ 2\sqrt{3}\ \right)$ が，いずれも原点 $(0,\ 0,\ 0)$ を始点として存在しているとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の成す角の大きさを求めよ.

(3) $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ を共に含む平面を α と呼ぶとき，平面 α と $\boldsymbol{c}$ の成す角の大きさを求めよ.

(宇都宮大 2014)　　(m20146102)

0.1096　曲線 $y=x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ と直線 $y=x,\ x=1,\ x=4$ で囲まれた図形を A とする.
下の問いに答えよ

(1) 図形 A の面積を求めよ．なお，計算過程も記入せよ.

(2) 図形 A を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．なお，計算過程も記入せよ.

(宇都宮大 2019)　　(m20196103)

0.1097　$\log x$ は自然対数を表すものとして，下の問いに答えよ.

問 1　C を積分定数とするとき，積分公式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}=\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+C \quad (A \neq 0)$$

を証明せよ.

問 2　問 1 の公式を用いて関数 $y = y(x)$ に関する 1 階の微分方程式

$$y' = \sqrt{1+y^2}$$

の一般解を求め，さらに $x=0$ のとき $y=0$ となるもの（特殊解）を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

問 3　問 2 の特殊解を積分して

$$f(x) = \int_0^x y dx$$

を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(宇都宮大 2022)　　(m20226104)

0.1098　複素数 $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{1}{2}$ に対し，共役複素数 $\overline{z}$, $\arg\dfrac{z}{\overline{z}}$ を求めよ．但し，$i = \sqrt{-1}$ とする．

(工学院大 2003)　　(m20036207)

0.1099　2 つのベクトル $\vec{a} = (1,1)$, $\vec{b} = (-1+\sqrt{3},\ -1-\sqrt{3})$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．また，$\vec{a}$, $\vec{b}$ が成す角 θ を求めよ．

(工学院大 2004)　　(m20046207)

0.1100　$\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$　を解け．

(工学院大 2005)　　(m20056204)

0.1101　$x = \sqrt{t+1}$, $y = t^2+2t+3$ で表される関数において $\dfrac{dx}{dy}$ を t の式で表せ．

(工学院大 2005)　　(m20056209)

0.1102　次の極限値を求めよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^3}{\sqrt{x}}$

(はこだて未来大 2007)　　(m20076303)

0.1103　$I = \displaystyle\int_0^{2a} x\sqrt{2ax-x^2}dx (a>0)$ とおくとき, 以下の問に答えよ.

(1)　$I = \displaystyle\int_{-a}^{a}(t+a)\sqrt{a^2-t^2}dt$ となることを示せ.

(2)　$I = a\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-t^2}dt$ となることを示せ.　　(3) I の値を求めよ.

(はこだて未来大 2007)　　(m20076304)

0.1104　$y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}\,,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対する正接関数 $\tan y$ の逆関数を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ とする．すなわち,

$$y = \mathrm{Tan}^{-1}x \quad\Longleftrightarrow\quad x = \tan y \qquad \left(x \in (-\infty,\ \infty)\,,\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$\mathrm{Tan}^{-1}1$ の値を求めよ．

(2)　$\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{3\sqrt{3}}{7}$ の値を求めよ．
ただし，必要であれば，次の正接関数に対する加法定理は既知として用いてよい．

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

(はこだて未来大 2009)　　(m20096303)

0.1105 次式で与えられる関数 $f(x)$ について，以下の問いに答えよ．

$$f(x)=\sqrt{(x-1)(2-x)} \qquad (1 \leq x \leq 2)$$

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形を描け．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$ の値を求めよ．

(はこだて未来大 2009)　　(m20096304)

0.1106 次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,dx$

(はこだて未来大 2012)　　(m20126303)

0.1107 $f(x)=\arctan x$，つまり $f(x)$ を $\tan x$ の逆関数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の第 3 次導関数 $f^{(3)}(x)$ を求めよ．

(2) 以下の等式を満たす 4 つの定数 a_0，a_1，a_2，a_3 をすべて求めよ．

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+o(x^3) \qquad (x \to 0)$$

ただし，記号 o はランダウのスモールオーである．

(3) $f\left(\sqrt{3}\right)$ の値を求めよ．

(4) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} f(x)dx$ の値を求めよ．

(はこだて未来大 2017)　　(m20176302)

0.1108 (1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx$ を求めよ．　(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ を求めよ．

(はこだて未来大 2018)　　(m20186302)

0.1109 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D xe^{y^2}dxdy\ , \quad D=\{(x,y)\mid 0 \leqq\ x \leqq \sqrt{y}\ ,\ 0 \leqq\ y \leqq\ 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (x+y)^2dxdy\ , \quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2 \leqq\ 1\}$

(東京海洋大 2007)　　(m20076406)

0.1110 次の重積分の値を求めよ

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy\ , \quad D=\{(x,y)\mid x^2 \leqq\ y \leqq\ x+2\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy\ , \quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2 \leqq\ 1\}$

(東京海洋大 2008)　　(m20086405)

0.1111 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy\ , \quad D=\{(x,y)\mid x^2 \leqq\ y \leqq \sqrt{x}\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{x^2+y^2+1}\,dxdy$,　$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq 1,\ x\geqq 0\ ,\ y\geqq 0\}$

(東京海洋大 2010)　(m20106405)

0.1112 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x-3}{x^4-1}\,dx$ を計算せよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\log x}}\,dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2012)　(m20126404)

0.1113 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy$,　$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|\leqq y\leqq \sqrt{1-x^2}\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy$,　$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\leqq 1\right\}$

(東京海洋大 2012)　(m20126406)

0.1114 次の関数を微分しなさい.

(1) $f(x)=x^2+x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$　(2) $f(x)=x^2\cos\dfrac{1}{x}$

(3) $f(x)=\left(x^2+\sqrt{x}+1\right)^{\frac{3}{2}}$　(4) $f(x)=\log_e(x^3+x+1)$

(東京海洋大 2012)　(m20126407)

0.1115 次の曲線および直線で囲まれた部分の面積を求めなさい.

$$y=\sqrt{x}\ ,\qquad x=4\ ,\qquad y=0$$

(東京海洋大 2012)　(m20126410)

0.1116 以下の関数を x で微分しなさい.

(1) $y=2x^3-5x^2$　(2) $y=\sin^2 x$

(3) $y=\left\{\log\left(\sqrt{x}+1\right)\right\}^2$　(4) $y=\displaystyle\int_x^{2x}\sin\theta d\theta$

(東京海洋大 2013)　(m20136401)

0.1117 下記の定積分, または不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int_0^1(3x^3+4x^2-2)dx$　(2) $\displaystyle\int(\cos 2x+\sin 3x)dx$　(3) $\displaystyle\int\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}{x^2}dx$

(4) $\displaystyle\int x\cos(1+x^2)dx$　(5) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$

(東京海洋大 2013)　(m20136402)

0.1118 下記の定積分, または不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int\frac{2}{2x-1}dx$　(2) $\displaystyle\int 2^{3x}dx$　(3) $\displaystyle\int x\cos x dx$　(4) $\displaystyle\int_{-1}^2\frac{x}{\sqrt{3-x}}dx$

(東京海洋大 2014)　(m20146402)

0.1119 次の関数を x で微分しなさい.

(1) $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}+x+1$　(2) $y=\dfrac{1}{4x+3}$　(3) $y=x^2\sin\dfrac{1}{x}$　(4) $y=\sqrt{1-x^2}$

(東京海洋大 2015)　(m20156401)

0.1120　次の不定積分，または定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int 2\sin x\cos x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^1 (x^3+3x^2-x+1)\,dx$

(東京海洋大 2015)　　(m20156402)

0.1121　次の関数を x で微分しなさい．

(1) $x^2(x^3-x^2)$　　(2) $(x^2-2x+5)^4$　　(3) $e^{2x}\sqrt{x}$　　(4) $\dfrac{\sin x}{x}$　　(5) $x\log_e x$

(東京海洋大 2016)　　(m20166401)

0.1122　次の曲線および直線で囲まれた部分からなる図形について，各問に答えなさい．

$$y=\sqrt{2x}\,,\quad x=9\,,\quad y=0$$

(1)　この図形の面積を求めなさい．

(2)　この図形を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めなさい．

(東京海洋大 2016)　　(m20166403)

0.1123　(1)　行列式 $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

(2)　x, y, z に対する連立方程式 $\begin{cases} x\ -\ y+2z=0 \\ ax-2y-7z=0 \\ 3x-3y+az=0 \end{cases}$ が非自明解を持つときの a の値を求め，そのとき連立方程式を解け．

(東京海洋大 2016)　　(m20166405)

0.1124　次の定積分，または不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int(7x^3+3x^2+2x+5)dx$　　(2) $\displaystyle\int x^5\log x\ dx$　　(3) $\displaystyle\int_3^5 \frac{dx}{x^2+3x-10}$　　(4) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx$

(東京海洋大 2017)　　(m20176402)

0.1125　次の関数を x で微分しなさい．

(1) $y=\dfrac{1}{2x+5}$　　(2) $y=\sqrt{1-x^2}$

(3) $y=\dfrac{\log_e x}{x^2}$　　(4) $y=\cos(5x-3)$

(東京海洋大 2021)　　(m20216401)

0.1126　次の不定積分，または定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int(2\cos^2 x-1)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int 3x\sqrt{x^2+1}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2+3x-28}$　　(4) $\displaystyle\int_0^2 (2x+1)^3\,dx$

(東京海洋大 2021)　　(m20216402)

0.1127　(1)　$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1\leqq x\leqq 2,\ \sqrt{x}\leqq y\leqq x\right\}$ に対し，重積分 $\displaystyle\iint_D 2y\log x\ dxdy$ の値を求めよ．

(2) $E=\{(x,y)\mid 0\leqq x+y\leqq 2,\ 0\leqq x-y\leqq 1\}$ に対し，重積分 $\displaystyle\iint_E (x^2-y^2)\,dxdy$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2021)　　(m20216410)

0.1128 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2+3x+3}{x^3+x^2+2x+2}dx$ を計算せよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi^2}\cos\left(3\sqrt{x}\,\right)dx$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2022)　　(m20226403)

0.1129 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}dxdy,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \sqrt{y}\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_E \log(x^2+y^2+9)dxdy,\qquad E=\left\{(x,y)\ \middle|\ 2\leqq x^2+y^2\leqq 5,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$

(東京海洋大 2022)　　(m20226405)

0.1130 次の関数を x で微分しなさい．

1) $y=(x^2+x+3)(x^2-x+2)$　　2) $y=\left(1+x^2\right)^3$

3) $y=\dfrac{1}{(x+2)^2(x+5)^2(x+7)}$　　4) $y=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

(東京海洋大 2022)　　(m20226406)

0.1131 次の不定積分，または定積分を求めなさい．

1) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}dx$　　2) $\displaystyle\int 2\sin x\cos x dx$

3) $\displaystyle\int_1^4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx$　　4) $\displaystyle\int_1^2 x^2\log x\,dx$

(東京海洋大 2022)　　(m20226407)

0.1132 曲面 $z=\sqrt{x^2+y}$ の $(x,y)=(1,3)$ における接平面の方程式を求めなさい．

(和歌山大 2007)　　(m20076505)

0.1133 ある工場で製造される製品の重さ（単位 kg）が正規分布 $N(2,\ 0.0016)$ に従っているとする．ある日，100 個の製品を抜き取り，重さを測定したところ平均が 2.011kg であった．この日の製品が，平常と比べて重くなっているといえるか．危険率（有意水準）1% で検定しなさい．なお，解答にあたっては，次の定理および正規分布表を用いてよい．

定理 $X_1,\ X_2,\ \cdots X_n$ が，正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ に従う独立な確率変数であるとき，

$\overline{X}=\dfrac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$ は正規分布 $N(\mu,\sigma^2/n)$ に従う．

よって，$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ は正規分布 $N(0,1)$ に従う．

(和歌山大 2008)　　(m20086503)

0.1134 次の各問に答えなさい．なお，i は虚数単位である．

(1) $\dfrac{5-i}{1+5i}$ を計算しなさい．

(2) 複素数 $\sqrt{3}-3i$ を極形式で表しなさい．

(3) $\displaystyle\lim_{z \to -i} \frac{z+i}{z^4-1}$ を求めなさい.

(4) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{z+i}{z^4-1}\,dz$ を求めなさい.

ただし，曲線 C は中心が $-1-i$，半径が $\sqrt{2}$ の円周（反時計回り）とする.

(和歌山大 2009) (m20096505)

0.1135 $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ とするとき, 次の問いに答えよ．ただし, $a \neq b$ である.

(1) P の行列式の値と逆行列とを求めなさい.

(2) PQP^{-1} の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(和歌山大 2010) (m20106501)

0.1136 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{x-1}\,dxdy \quad D = \left\{(x,y)\,\middle|\, x^2+y^2 \leqq x\right\}$ を求めなさい.

(和歌山大 2012) (m20126505)

0.1137 次の各問いに答えなさい．ただし，i を虚数単位とする.

(1) $\dfrac{3-i}{4+3i}$ の実部の値を求めなさい.

(2) 複素数 $-1+i\sqrt{3}$ の偏角の値を求めなさい.

(3) 複素関数 $f(z) = \dfrac{z^2-\frac{1}{3}}{z^3-z}$ について次の問いに答えなさい.

(a) $z^3-z=0$ の根を全て求めなさい.

(b) 円周 $\left|z-\dfrac{1}{2}\right| = 1$ に反時計回りの向きを与えた経路を C とする．複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)dz$ の値を求めなさい.

(和歌山大 2012) (m20126508)

0.1138 次の値を求めなさい.

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$$

(和歌山大 2013) (m20136502)

0.1139 次の関数のマクローリン展開を x^3 の項まで求めなさい.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

(和歌山大 2013) (m20136503)

0.1140 原点の回りの $\dfrac{\pi}{3}$ の回転により，方程式 $x^2-2\sqrt{3}xy+3y^2-2\sqrt{3}x+2ay+b=0$ が 2 次曲線 $y=x^2-1$ に移される場合，定数 a, b の値を求めなさい.

(和歌山大 2014) (m20146503)

0.1141 次の 2 重積分の値を求めなさい. $\displaystyle\iint_D \sqrt{x}dxdy$, $D = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq x\right\}$

(和歌山大 2016) (m20166503)

0.1142 a が 0 でない実数のとき，次の不定積分を求めなさい．

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$$

なお，解答に際して，

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

を用いてよい．

(和歌山大 2017)　　(m20176501)

0.1143 (1) 次の重積分を，極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ によって，r と θ の積分に変数変換しなさい．

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy, \qquad D = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\right\}$$

(2) (1) の積分の値を求めなさい．

(和歌山大 2018)　　(m20186503)

0.1144 関数 $f_n(x,y) = \sin\sqrt{x^n+y^n}$（$n$：自然数）について，次の問いに答えよ，

(1) 1 階偏導関数 $\dfrac{\partial f_n}{\partial x}$ を求めよ．

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{f_1(x,0)}{\sqrt{x}}\,dx$ を求めよ．

(3) 自然数 m に対して $I_m = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{(f_1(x,0))^m}{\sqrt{x}}\,dx$ とするとき，I_m と I_{m-2} の関係式を求めよ．また m は奇数として I_m を求めよ．

(4) $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \leq x^2+y^2 \leq \dfrac{\pi^2}{4}\right\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D f_2(x,y)\,dxdy$ を求めよ．

(京都府立大 2008)　　(m20086702)

0.1145 xy 平面上において, 原点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と, 放物線 $C_2 : y = \dfrac{2}{3}x^2 - a$ $(a > 1)$ を考える. C_2 の接線のうち, 傾きが $\tan\theta$ となるものを l とし, C_2 との接点を P とする. ただし, θ は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする. また, 原点 O を通り, l と直交する直線を m とし, m と円 C_1 との交点のうち第 4 象限の点を Q とする.

(1) 直線 l の傾きが $\sqrt{3}$ であるとき, θ の値を求めよ. また, このときの点 P の座標が $\left(\dfrac{3}{4}\sqrt{3},\ \dfrac{9}{8} - a\right)$ となることを示せ.

(2) 直線 l の傾きが $\sqrt{3}$ であるとき, 直線 m を表わす方程式を求めよ. また, 点 Q の座標を求めよ.

(3) 3 点 O, P, Q が同一直線上に並ぶための必要十分条件は $\tan\theta = \sqrt{\dfrac{8}{3}a - 2}$ であることを示せ.

(4) $a = \dfrac{9}{8}$ のとき, C_1 上の点と C_2 上の点を結ぶ線分の長さの最小値を求めよ.

(東京工科大 2010)　　(m20106907)

0.1146 (1) i は虚数単位とする． $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$ の実部と虚部を求めよ．

(2) $0 < x < 1$ のとき，方程式 $\log_3 x - 3\log_x 9 + 1 = 0$ を解け．

(3) 不等式 $\sin 2\theta > \sin\theta$ を満たす θ の値の範囲を求めよ．

(富山県立大 2017)　　(m20177101)