[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　$\sum$

0.1　$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，

(1)　固有値を求めよ．

(2)　単位固有ベクトルを求めよ．

(3)　$\exp(X) = E + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$ と定義されている時，$\exp(tA)$ を求めよ．ただし，t ： 定数

(北海道大 1997)　　(m19970102)

0.2　以下の設問に答えよ．途中の計算手順を詳しく記述すること．

(1)　$f(x) = x$ を区間 $[-\pi, \pi]$ 上でフーリエ級数に展開した結果が
$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(nx)}{n}$$
となることを示せ．

(2)　$-\pi \leq a \leq \pi$ を満たす任意の定数 a に対して，x の区間 $[-\pi, \pi]$ において
$$x^2 = a^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx) - \cos(na)}{n^2}$$
が成立することを示せ．

(3)　(2) の結果を用いて，x の区間 $[-\pi, \pi]$ において
$$x^3 - \pi^2 x = 12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(nx)}{n^3}$$
を導け．

(北海道大 2012)　　(m20120104)

0.3　次の級数の収束，発散を調べ，収束する場合はその値を求めなさい．

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{3^{n-1}} + 3\left(-\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3(n+2)}$

(北海道大 2018)　　(m20180104)

0.4　次式の関数について，次の各設問に答えなさい．ただし，$0 < D < 1$ とする．
$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leqq x < -D\pi) \\ 1 & (-D\pi \leqq x < D\pi) \\ 0 & (D\pi \leqq x < \pi) \end{cases}$$

設問 1. 次式で示されるフーリエ級数の各係数を求めなさい．
$$f(x) = \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

設問 2. 上式において，n が偶数の項の係数がすべて 0 となる D の条件を求めなさい．

(北海道大 2018)　　(m20180105)

0.5　周期 2π の関数

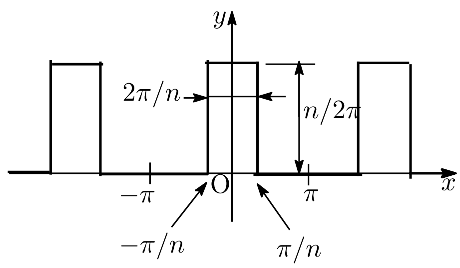
$$f(x) = x^2 \qquad (-\pi \leqq x < \pi)$$
$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

について，次式のようにフーリェ級数展開したとき，各係数 a_0，a_n，b_n を求めなさい．

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

(北海道大 2020)　　(m20200105)

0.6　右図のような周期 2π の周期的パルス列 $f(x)$ を考える．パルスの幅は $2\pi/n$，高さは $n/2\pi$ で与えられ，面積は常に 1 である（ただし n は 2 以上の整数）．この波形は y 軸に関して軸対称なので，次式のようなフーリエ級数に展開することができる．以下の設問に答えなさい．



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

(1)　$n = 2$ のとき，a_k $(k \geqq 1)$ を求めなさい．

(2)　2 以上の整数 n について，a_k $(k \geqq 1)$ を n の関数として表しなさい．

(3)　(2) の結果において，n を ∞ に漸近させると，与えられたパレス列はデルタ関数列になる．この条件における a_k を求めなさい．

(北海道大 2021)　　(m20210103)

0.7　1 の 3 乗根のうち 1 でない解を ω, ω' とする．以下の設問に答えなさい．

(1)　$\omega\omega' = 1$ を示しなさい．

(2)　$\omega^2 = \overline{\omega} = \omega'$ を示しなさい．ただし，$\overline{\omega}$ は ω の複素共役を表す．

(3)　$\omega^{100} + \omega^{50} + 1$ を求めなさい．

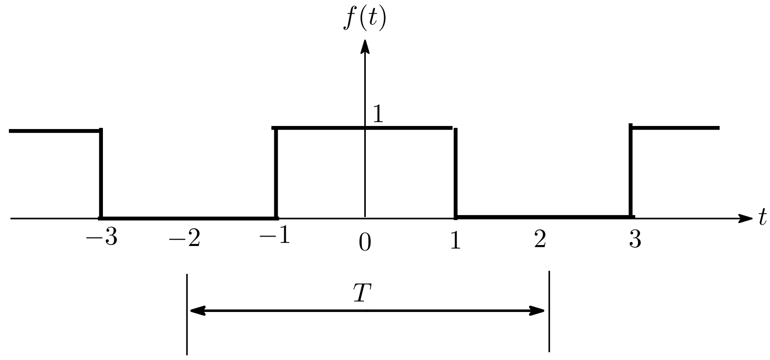
(4)　$\displaystyle\sum_{k=0}^{99} \omega^k$ を求めなさい．

(北海道大 2021)　　(m20210104)

0.8　次の図のような矩形パルス（周期 $T = 4$）をフーリエ級数展開するとき，

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos\left(2\pi\frac{n}{T}t\right) + b_n \sin\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)\right\}$$

で表すことができる．以下の設問に答えなさい．



(1) a_0, a_n および b_n を T を用いた式で表しなさい.

(2) $T=4$ のときの a_0, a_n および b_n を求めなさい.

(北海道大 2022)　　(m20220104)

0.9 次の和を求めよ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

(岩手大 1998)　　(m19980307)

0.10 次のような行列 A 考える.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

ここで, a は実定数とする. 次の問に答えよ.

(1) A^2, A^3 を求めよ.

(2) 一般の正の整数 n に対する A^n を求めよ. A^n の形を正しく推定し, 数学的帰納法により証明すればよい.

(3) 行列 A に対し, A^0, 指数関数 $\exp A$ を次のように定義する.

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

$\exp A$ を求めよ. なお, 行列の無限級数の和を求めるためには, 各成分ごとに無限級数の和を求めればよい.

(岩手大 1998)　　(m19980311)

0.11 次の問いに答えよ.

(1) $f(\theta) = \sin\theta$ を, 以下のマクローリンの定理を用いて無限級数へ展開せよ.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

(ただし $0 < \theta < 1$)

(2) $f(i\theta) = e^{i\theta}$ を無限級数へ展開せよ. ただし, i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ とする.

(3) $f(\theta) = \cos\theta$ を無限級数へ展開し, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を証明せよ.

(4) $f(t) = 5 + 0.4\sin\omega t + 0.4\sin 2\omega t + 0.3\cos 2\omega t + 0.3\sin 3\omega t$ を, 以下の形式に書き直した場合の係数 C_2 と C_{-2} を求めよ.

$$f(t) = \sum_{n=-3}^{3} C_n e^{in\omega t}$$

(5) $f(t) = 0.4\sin 2\omega t + 0.3\cos 2\omega t$ を, 以下の形式に書き直した場合の係数 A を求めよ.

$$f(t) = A\sin(2\omega t + \phi)$$

(岩手大 2004)　　(m20040303)

0.12 区間 $[a,b]$ 上の関数 $f(x)$, $g(x)$ は,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

が成り立つとき互いに直交しているという. 以下の問いに答えよ.

(1) 次の (a)〜(e) に示した関数が区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上で互いに直交していることをそれぞれ示せ. ただし, k, l はともに自然数である.

(a) $\dfrac{1}{2}$ と $\cos kx$

(b) $\dfrac{1}{2}$ と $\sin kx$

(c) $\cos kx$ と $\sin lx$

(d) $\cos kx$ と $\cos lx \quad (k \neq l)$

(e) $\sin kx$ と $\sin lx \quad (k \neq l)$

(2) 区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上の任意の関数 $f(x)$ は, $\dfrac{1}{2}$, $\cos kx$, $\sin kx$ の線形和によって

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x + \cdots$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

と表すことができる（これをフーリエ級数展開という）．係数 $a_0,\ a_k,\ b_k$ をそれぞれ $f(x)$ を用いて表せ.

(3) 次の関数 $f(x)$ を区間 $[-\pi\,,\ \pi]$ 上でフーリエ級数に展開せよ.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

(岩手大 2009)　　(m20090301)

0.13 N 組の計測データ $(X_1, Y_1), \cdots, (X_N, Y_N)$ がある．いま，変数 a, b を用いて

$$Z = \sum_{i=1}^{N} (Y_i - a - bX_i)^2$$

とする．Z を最小とする a, b の値を，計測データを用いて表しなさい．

(秋田大 2001)　　(m20010410)

0.14 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $\dfrac{1}{1-x}$ を

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + R_n(x)$$

とおくとき，$|x| < 1$ の範囲で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ となることを示せ．

(2) (1) を利用して，関数 $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ の x に関するべき級数展開を $|x| < 1$ の範囲で求めよ．

(3) (2) の結果を利用して，$\sin x$ に関するべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\sin x)^{2n}$ の和を求めよ．ここに，$|x| < \frac{\pi}{2}$ とする．

(東北大 1996)　　(m19960501)

0.15 関数 $f(x)$ の $x = a$ を中心とするテイラー展開は以下のように与えられる.

$$f(x) \sim f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \cdots$$

ただし, $f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の第 n 次導関数 $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ を表す. また, $f'(x)$ および $f''(x)$ は $f(x)$ の導関数 $\dfrac{df}{dx}$ および第 2 次導関数 $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ をそれぞれ表す. 特に, $-1 < x < 1$ に対する関数 $\dfrac{1}{1-x}$ および $-\infty < x < \infty$ に対する関数 e^x の $x = 0$ を中心とするテイラー展開はそれぞれ次のように与えられる.

$$\frac{1}{1-x} \sim \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad , \qquad e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

x を実数とし, 関数 $g(x)$ と $h(x)$ を

$$g(x) = e^{x^2} \qquad , \qquad h(x) = \frac{e^{x^2}}{2-x}$$

と定義する.

(1) $g(x)$ の $x=0$ を中心とするテイラー展開を求めよ.

(2) 問 (1) の結果を用いて, $h(x)$ の $x=0$ を中心とするテイラー展開の x^2 の項までを求めよ.

(3) $h(x)$ の導関数 $h'(x)$ を求めよ.

(4) $y=h(x)$ の $-\infty < x < \infty$ における発散する点, 極値を与える点に注意して, グラフの概略を描け.

（東北大 2004） (m20040502)

0.16 無限級数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

が収束するかどうか判定せよ.

(東北大 2011) (m20110506)

0.17 $a_n \geqq 0 \ \ (n=1,2,3,\cdots)$ とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ も収束することを示せ．また，逆が成り立たないことを示す例を一つあげよ（証明不要）.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束し，$a_n \neq 1 \ \ (n=1,2,3,\cdots)$ であるとする．このとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1-a_n}$ は収束することを示せ.

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ も収束することを示せ.

(東北大 2015) (m20150508)

0.18 (1) 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ を求めよ．ただし，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とする.

$$a_1 = 1, \ \ a_{n+1} = -a_n + S_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(2) 次の数列が収束するとき，実数 x の範囲と数列の極限を求めよ.

$$\frac{(2x-1)^n}{3^n} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(3) ロピタルの定理を用いて，以下の極限を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

(東北大 2016) (m20160503)

0.19 V を実ベクトル空間とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) n 個の元 $\boldsymbol{a}_1, \ \boldsymbol{a}_2, \ \cdots, \ \boldsymbol{a}_n \in V$ の中に同じものがあれば，$\boldsymbol{a}_1, \ \boldsymbol{a}_2, \ \cdots, \ \boldsymbol{a}_n$ は一次従属であることを示せ.

(2) n 個の元の組 $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_n \in V$ は一次独立とし，$C = (c_{ij})_{ij}$ を n 次実正方行列，$\boldsymbol{a}_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\boldsymbol{b}_j\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ とおく．$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_n$ が一次独立であることの必要十分条件は C が正則行列であることを示せ．

(東北大 2016)　　(m20160505)

0.20 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束することを示せ．

(2) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ のある部分列 $\{a_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して，$a_{n(k)} < \dfrac{1}{n(k)}$ が成り立つことを示せ．

(3) (2) において，「 $a_{n(k)} < \dfrac{1}{n(k)}$ 」を「 $\left|a_{n(k)}\right| < \dfrac{1}{n(k)}$ 」と置き換えても主張は成り立つか，もし成り立つならばそれを証明し，成り立たない場合は反例をあげよ．

(東北大 2016)　　(m20160508)

0.21 (1) 0 以上の整数 n に対して，

$$\int_0^1 \frac{1-(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{2n+1}$$

を示せ．

(2) 無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ が収束することを示し，その極限を求めよ．

(東北大 2017)　　(m20170508)

0.22 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ．

(2) 任意の n に対し $a_n \geq 0$ であるとする．級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散するならば，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$$

も発散することを示せ．

(東北大 2018)　　(m20180509)

0.23 (1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ は収束しないことを示せ．

(2) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ は収束することを示せ．

(東北大 2019)　　(m20190508)

0.24 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{n^2 - i^2}$ を定積分で表し，
極限値を求めよ．　　(お茶の水女子大 1997)　　(m19970602)

0.25 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ は $p>1$ ならば収束し，$p\leq 1$ ならば発散することを証明せよ．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970604)

0.26 (1) 次の級数の収束・発散を言え．

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$　　(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$

(2) 次の関数のマクローリン展開（$x=0$ のまわりの Taylor 級数展開）とその収束半径 ρ を例に従ってかけ．

(例) $\displaystyle\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots(\rho=0)$

(i) $\displaystyle\frac{1}{1+x^2}$　　(ii) e^x　　(iii) $\sin x$

（お茶の水女子大 1999）　　(m19990607)

0.27 (1) 次の展開式を簡単に示せ．

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\cdots$$

(2) 次の無限級数の値を求めよ．

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$$

（お茶の水女子大 2000）　　(m20000607)

0.28 指数関数 $f(x)=e^x$ を考える．

(1) 任意の自然数 n と任意の実数 x に対して，

$$e^x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}x^k+\int_0^x\frac{e^t}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}dt$$

となることを示せ．

(2) $\displaystyle R_n(x)=\int_0^x\frac{e^t}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}dt\quad(|x|<+\infty)$

と表すとき，$R_n(x)$ は実数の任意の有界閉区間 $[a,b]$ 上で一様に 0 に収束することを示せ．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030606)

0.29 $\lambda\in\mathbb{C}$ に対して，次のような複素 n 次正方行列 $N,\ J_\lambda(n)$ を考える．

$$N=\begin{pmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&0&1\\&&&&0\end{pmatrix}\qquad J_\lambda(n)=\begin{pmatrix}\lambda&1&&&\\&\lambda&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&\lambda&1\\&&&&\lambda\end{pmatrix}$$

(1) 自然数 k に対して N の k 乗 N^k を求めよ．

(2) 自然数 k に対して $J_\lambda(n)^k$ を求めよ．

(3) 複素正方行列 A が対角化可能であることの定義を述べよ．

(4) 複素正方行列 A がある自然数 k に対して $A^k=E$ を満たすならば A は対角化可能であることを示せ．ただし E は単位行列である．必要ならば次の定理を用いてもよい．

定理 任意の複素 l 次正方行列 A に対して l 次正則行列 P，m 個の複素数 $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ および m 個の自然数 $n_1,\ldots,n_m$ で $\sum_{i=1}^{m}n_i=l$ を満たすものが存在して

$$PAP^{-1}=\begin{pmatrix}J_{\lambda_1}(n_1)&&&\\&J_{\lambda_2}(n_2)&&\\&&\ddots&\\&&&J_{\lambda_m}(n_m)\end{pmatrix}$$ と書ける．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030615)

0.30　関数 $f(x)=\log(1-x)$ を考える.

(1) 関数 $f(x)$ の $x=0$ のおけるマクローリン展開を考え，３次関数による近似 $S_3(x)$ を求めなさい.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{-k}}{k}$ を求めなさい.

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090603)

0.31　$f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x\ \text{が有理数})\\ 0 & (\text{上記以外の数})\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}1 & (x=\dfrac{1}{2^m}, m=1,2,3,\cdots)\\ 0 & (\text{上記以外の点})\end{cases}$$

とする.

(1) f が区間 $[0,1]$ 上リーマン積分可能かどうか、理由とともに答えよ.

(2)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}\sup_{\frac{k-1}{2^n}\le x\le\frac{k}{2^n}}g(x)$$
を求めよ.

(3) g が区間 $[0,1]$ 上リーマン積分可能かどうか、理由とともに答えよ.

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200601)

0.32　(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx dx$ を求めよ．なお計算過程も示せ．ただし，m,n は $m,n>0$ の整数とする.

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx$ を求めよ．なお計算過程も示せ．ただし，m,n は $m,n>0$ の整数とする.

(3) フーリエ級数 $f(x)\approx\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$ について，

$\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2dx=\frac{{a_0}^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[{a_n}^2+{b_n}^2\right]$　　を証明せよ.

(東京大 1998)　　(m19980704)

0.33　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^n}{n!}\sin\Big(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\Big)\pi$ を求めたい.

$f(\theta)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^n}{n!}\sin\Big(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\Big)\pi$ とするとき，以下の問に答えよ.

(1) $f'(\theta)$ を無限級数の形を用いて表せ.

(2) $f''(\theta)$ を $f(\theta)$ を用いて表せ.

(3) $f(\theta)$ を求め，$f(\pi)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^n}{n!}\sin\Big(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\Big)\pi$ を計算せよ.

(東京大 1999)　　(m19990702)

0.34 極座標 (r,θ) で表せる 2 次元領域 $r>1$, $0\le\theta<2\pi$ で

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0 \qquad \text{(i)}$$

を満たし，境界条件

$$u(1,\theta)=\cos 3\theta \quad 0\le\theta<2\pi \qquad \text{(ii)}$$

$$\lim_{r\to\infty}u(r,\theta)=0 \quad 0\le\theta<2\pi \qquad \text{(iii)}$$

を満たす解 $u(r,\theta)$ を以下の手順で求めよ．

(1) (i) の解として $u(r,\theta)=f(r)g(\theta)$ と表せるものを考える．これを (i) に代入し，左辺が r のみの関数，右辺が θ のみの関数であるような式を導け．

(2) この式が上記の 2 次元領域に対応する任意の (r,θ) に対して成立するためにはその両辺は r , θ によらない定数でなくてはならない．そこで，この定数を c として f の r に関する微分方程式と g の θ に関する微分方程式を導け．

(3) m を整数として $f(r)=r^m$ とおき，定数 c を m で表せ．次に，これを g の θ に関する微分方程式に代入し，(i) の解で，$u_m(r,\theta)=f(r)g(\theta)$ の形のものを求めよ．

(4) d_m を定数として，(i) の解で $u(r,\theta)=\sum_m d_m u_m(r,\theta)$ の形の解を考え，それが境界条件 (ii),(iii) をみたすようにして求める解 $u(r,\theta)$ 定めよ．

(東京大 2000)　　(m20000705)

0.35 (1) 複素変数の指数関数 e^x の級数展開は次式で表される．

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

上式を利用して, $\cos z$, $\sin z$ の級数展開を求めよ.

(2) 次の複素関数を特異点 $z=0$ のまわりでローラン展開し $f(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n z^n$ の形で表せ. また, 特異点の種類を答えよ.

$$f_1(z)=z\sin\left(\frac{1}{z}\right), \qquad f_2(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}, \qquad f_3(z)=\frac{1}{z^2(1-z)}$$

(3) 次の積分を求めよ.

$$I=\oint_C f_3(z)dz$$

ただし, 積分路 C は複素平面上で原点を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を反時計回りに一周するものとする.

(東京大 2001)　　(m20010703)

0.36 (1) $\cos t$, $\sin t$ を e^{it} , e^{-it} の関数として表せ.

(2) 関数

$$f(u)=a_0+2\sum_{n=1}^{N}a_n\cos(2nu) \qquad (1)$$

が与えられたとき,

$$a_n=\frac{1}{2N+1} \qquad (2)$$

（ただし $0\le n\le N$）とすると,

$$f(u)=\frac{A}{B} \qquad (3)$$

の形に変形することができる. A と B とを求めよ. 途中の計算式も示すこと.

(3) 関数

$$g(u) = 2\sum_{n=1}^{N} a_n \cos\{(2n-1)u\} \tag{4}$$

が与えられている.

$$a_n = \frac{1}{2N} \tag{5}$$

（ただし $0 \leq n \leq N$）としたとき，関数 $g(u)$ はどのような形に変形することができるか. できるだけ簡単な形で記せ. 途中の計算も示すこと.

(東京大 2002)　　(m20020703)

0.37 (1) 変数 t に関して周期 2π の周期関数 $f(t)$ が

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)) \tag{1}$$

と書けたときの a_n , b_n が

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt\,, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt\,, \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{3}$$

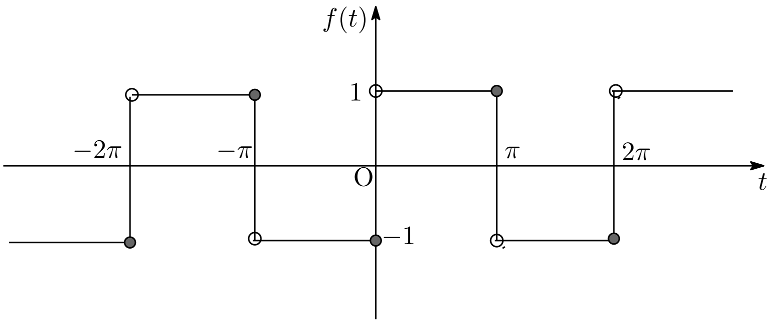
で与えられることを説明せよ．ただし，必要ならば三角関数の公式

$\sin A\sin B = -\dfrac{1}{2}\{\cos(A+B) - \cos(A-B)\}$,　$\sin A\cos B = \dfrac{1}{2}\{\sin(A+B) + \sin(A-B)\}$

$\cos A\sin B = \dfrac{1}{2}\{\sin(A+B) - \sin(A-B)\}$,　$\cos A\cos B = \dfrac{1}{2}\{\cos(A+B) + \cos(A-B)\}$

を用いよ．

(2) 下図は，値 1 と -1 をとる周期 2π の周期関数 $f(t)$ のグラフを示したものである．この関数 $f(t)$ を式 (1) の形に展開せよ．



(東京大 2003)　　(m20030704)

0.38 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = f(x) \tag{a}$$

ただし，　$x = 0$　のとき，　$y = 1$　かつ　$\dfrac{dy}{dx} = 0$　について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = 0$ のときの解を求めよ．

(2) $f(x) = \sin 2x$ のときの解を求めよ．ただし，(a) の特解が $y_p = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$ の形となることを利用してよい．A, B は定数である．

(3) $f(x) = \displaystyle\sum_{N=1}^{100} \sin Nx$ のときの解を y_s とする．x が十分大きいとき，$\dfrac{y_s}{x}$ を x の関数として表せ．

(東京大 2006)　　(m20060703)

0.39 1回の試行において事象 A の起こる確率を p とする．この試行を独立に n 回くり返すときに A が起こる回数を X とすると，X は0から n までの整数値をとる確率変数であり，この確率分布を二項分布 $B(n,p)$ とよぶ．

例えば，表の出る確率が0.5のコインを3回投げる場合，表の出る回数は0回，1回，2回，3回のいずれかであり，この各回数の確率の分布が二項分布 $B(3\,,\,0.5)$ である．

(1) A が r 回起こる確率を $P(r)$ とする．$P(r)$ を n,r,p を用いて表せ．

(2) 二項定理を用いて $\displaystyle\sum_{X=0}^{n} P(X)=1$ を証明せよ．

(3) 横軸を X，縦軸を $P(X)$ として，二項分布 $B(3\,,\,0.5)$ および $B(8\,,\,0.5)$ のグラフを示せ．ただし，有効数字を二桁とする．

(4) 二項分布 $B(n,p)$ の平均 μ を n,p を用いて表せ．またその導出過程を示せ．

(東京大 2006)　　(m20060705)

0.40 複素数 $z(t)=e^{i\omega t}$ を考える．ただし，t は0以上の実数，i は虚数単位，e は自然対数の底である．

(1) ω が実数であるとき，$z(t)$ は複素平面上で t の関数としてどのような軌跡を描くかを，ω が正の場合，負の場合について図示せよ．$z(t)$ の移動方向を矢印で示し，実軸，虚軸との交わる点の位置も明示すること．

(2) ω が複素数 $a+ib$ で表されるとき（a は正の実数，b は0でない実数），$z(t)$ は複素平面上で t の関数としてどのような軌跡を描くか図示せよ．$z(t)$ の移動方向を矢印で示し，実軸，虚軸と交わる最初の4点（出発点も含める）の値を求め，複素平面上に図示せよ．また，$b/a\to\infty$ で軌跡はどのような曲線になるかを図示せよ．

(3) (2) において，$z_n=z(n)$，ただし n を整数とする．複素平面上における z_{n+1} と z_n の間の距離 $d_n=|z_{n+1}-z_n|$ を a,b,n の関数として求めよ．

(4) (3) で求めた d_n を用いて，$D=\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} d_n$ を a,b,N の関数として求めよ．また，a を固定して $b\to\infty$ および $b\to 0$ の極限をとったときの D の値を求めよ．ただし N は自然数とする．

(東京大 2009)　　(m20090701)

0.41 (1) (a) X を値が自然数 $1,2,\cdots,a$ のみをとる確率変数とする．X の平均 $E(X)$ は，

$$E(X)=\sum_{k=1}^{a} kP(X=k)$$

で定義される．ここで，$P(X=k)$ は，$X=k$ となる確率である．このとき，次の等式が成り立つことを証明せよ．ただし，$P(X\geq k)$ は，$X\geq k$ となる確率である．

$$E(X)=\sum_{k=1}^{a} P(X\geq k) \tag{1}$$

(b) X の2乗の平均は，

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{a} k^2P(X=k)$$

で定義される．このとき，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{a}(2k-1)P(X\geq k) \tag{2}$$

(2) 袋の中に白い玉が1個，赤い玉が $a-1$ 個入っている．袋から，玉を一つずつ無作為に取り出し，袋の中に返さないものとする．このとき，以下の設問に答えよ．

(a) 白い玉が出るのが k 回目以降である確率を求めよ．ただし，この確率は，「最初の $k-1$ 回は，常に赤い玉が出てくる確率」と等しいことを利用してよい．

(b) (a) の回答と式 (1) を用いて，白い玉が出るのに要する平均の回数を求めよ．

(c) (a) の回答と式 (2) を用いて，白い玉が出るのに要する回数の分散を求めよ．
ただし，確率変数 X の分散 $V(X)$ は，$E(X^2)-(E(X))^2$ で与えられる．

(東京大 2009)　　(m20090702)

0.42　2 行 2 列の行列 $A=\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) A^2, A^{-1}, $|A|$ を求めよ.

(2) A の全ての固有値を求めよ.

(3) $(A-I)^2=0$ が成り立つことを示せ. ただし, $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(4) 任意の実数 t について, ある t の多項式 $g(t)$ と定数 a, b が存在して

$$t^{100}=g(t)(t-1)^2+at+b$$

が成り立つ. a と b を求めよ.

(5) A^{100} を A と I を用いて表せ.

(6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}$ を自然対数の底 e を用いて表せ. ただし, $A^0=I$, $0!=1$ である.

(東京大 2010)　　(m20100701)

0.43　(1) N 個の同じボールを n_1 個, n_2 個, n_3 個 $(n_1+n_2+n_3=N)$ の組に分ける組み合わせの総数が以下の式で表されることを示せ.

$$\frac{N!}{n_1!n_2!n_3!}$$

(2) N 個の同じボールを n_1 個, n_2 個, $\cdots$, n_m 個 $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} n_i=N\right)$ の組に分ける組み合わせの総数 W はいくつになるか. 導出過程とともに示せ.

(3) (2) で得られた W を用いて, $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log_e W$ を計算することを考える.

(a) $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log_e N=0$ となることを示せ.

(b) $N\to\infty$ $\left(N=\displaystyle\sum_{i=1}^{m} n_i\right)$ としたとき, $\dfrac{n_i}{N}$ はそれぞれある値 p_i に収束する. すなわち
$p_i=\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{n_i}{N}$ $(i=1,2,\cdots m)$. このとき, $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log_e W$ を p_i のみで表せ.
ただし以下に示す $k!$ (k は正の整数) に関する不等式を用いてよい.

$$\sqrt{2\pi}k^{k+1/2}e^{-k+1/(12k+1)}<k!<\sqrt{2\pi}k^{k+1/2}e^{-k+1/12k}$$

(東京大 2010)　　(m20100705)

0.44　以下の問いに答えよ．ただし，解とともに導出過程も示せ．

(1) 複素数 A_n を係数とする複素多項式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n(z-a)^n$$

を考える．ただし，z は複素変数，a は複素数，n は整数とする．複素平面上で a の周りを反時計回りに一周する経路 C に沿った積分について，以下の式が成り立つことを示せ．ここでは i を虚数単位とする．

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i A_{-1}$$

必要であれば以下のコーシーの積分定理を用いて良い．

複素関数 $g(z)$ が複素平面上の閉曲線 C' とその内部 D' で正則あれば.

C' を一周する経路に沿って $g(z)$ を積分すると，その結果はゼロである．

(2) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

(3) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

(4) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx$$

(東京大 2012)　　(m20120704)

0.45 $f(x)$ を $-l \leqq x \leqq l$ で定義された関数とする．このとき，

$$a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\, dx \quad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\, dx \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

とすると，$f(x)$ は，

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\frac{m\pi}{l}x + b_m \sin\frac{m\pi}{l}x\right) \quad \cdots \quad ①$$

と展開できる．以下の問に答えよ．

(1) 次式で定義された関数 $f(x)$ の a_m，b_m を求め，① 式で $l = 1$ とした式に従い $f(x)$ を展開せよ．

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (-1 \leqq x \leqq 0) \\ 1-x & (0 < x \leqq 1) \end{cases}$$

(2) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で定義される関数 $f(x) = \cos x$ を ① 式で $l = \dfrac{\pi}{2}$ とした式に従い展開し，その展開式を利用し，以下の無限級数

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{15} + \frac{1}{35} - \frac{1}{63} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{4m^2-1} + \cdots$$

の値を求めよ．

(東京大 2013)　　(m20130701)

0.46 原点を出発点として数直線上の点 $(0, \pm1, \pm2, \cdots)$ を 1 ステップごとに確率 q で $+1$，確率 $r = 1-q$ で -1 だけ移動する点がある．n を自然数とするとき，$2n$ ステップ後の点の位置を x_n とする．たとえば $x_1 = 2$ となる確率は q^2，$x_1 = 0$ となる確率は $2qr$, $x_1 = -2$ となる確率は r^2 である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $x_2 = 0,\ x_3 = 0$ となる確率をそれぞれ求めよ.

(2) $x_n = 0$ となる確率を求めよ.

(3) $2n$ ステップ後に初めて原点に戻ってくる確率を考える．すなわち $x_n = 0$ かつ自然数 $m < n$ に対し $x_m \neq 0$ を満たす確率である．この確率は $z = qr$ の関数として $u_n(z) = 2a_n z^n$ として表現できる.

このとき $n \geqq 2$ で $a_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i}$ が成立することが示される．原点を出発し，いつかは原点に戻ってくる確率を $U(z)$ とする．$U(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ である．また，$\{U(z)\}^2$ は $U(z)$ および z を用いて簡潔に記述することができる．以上のことを用いて，$U(z)$ を求めよ.

(4) $U(z)$ をマクローリン展開し，a_n を n を使って表せ.

(東京大 2013)　　(m20130702)

0.47 3 次の正方行列 A の固有値を λ とし，λ は固有方程式 $\lambda^3 - (\alpha + \beta)\lambda^2 + \alpha\beta\lambda = 0$ を満たすとする．このとき，$A^3 - (\alpha + \beta)A^2 + \alpha\beta A = 0$ が成り立つ．ここで，α, β は互いに異なる 0 でない実数とし，行列 A は対角化可能であるとする，また，O を零行列，E を単位行列とする．以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A^n $(n \geqq 3)$ は次のような行列 A の 2 次式で表せることを示せ.

$$A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n E$$

ここで，a_n, b_n, c_n は実数である.

(2) 行列 A が対角行列 D に対角化されるとき，(1) の a_n, b_n, c_n を含む次の式

$$D^n = a_n D^2 + b_n D + c_n E \quad (n \geqq 3)$$

が成り立つことを示せ.

(3) (1) の a_n, b_n, c_n を求めよ.

(4) α, β の絶対値が 1 より小さければ，無限級数

$$\sum_{i=0}^{\infty} A^i = E + A + A^2 + \cdots$$

は $a'A^2 + b'A + c'E$ と表されることを示し，実数 a', b', c' を求めよ.

(5) (4) の a', b', c' に対し，$(E - A)(a'A^2 + b'A + c'E)$ を求めよ.

(東京大 2013)　　(m20130705)

0.48 ある定係数 2 階線形常微分方程式が，次のように与えられている.

$$f^{(2)}(x) - 2\alpha f^{(1)}(x) + \alpha^2 f(x) = 0 \qquad (*)$$

$f^{(n)}(x)$ は関数 $f(x)$ の第 n 次導関数であり（n は自然数），α は 0 でない実数定数とする.

以下の問いに答えよ.

(1) x を変数，k を実数定数とする関数 e^{kx} をマクローリン展開し，x の 3 次の項まで書け．ここで，e は自然対数の底である.

(2) 関数 $f(x)$ は連続で無限回微分可能であり，式 $(*)$ を n 回微分したとき，次の方程式が成り立っているとする.

$$f^{(n+2)}(x) - 2\alpha f^{(n+1)}(x) + \alpha^2 f^{(n)}(x) = 0$$

$f^{(n)}(x)$ を，$f^{(1)}(x)$ と $f(x)$ を用いて表せ.

(3) 関数 $f(x)$ のマクローリン展開式 $f(x)=\sum_{m=0}^{\infty} f^{(m)}(0)\dfrac{x^m}{m!}$ に対し，(2) で得られた $f^{(n)}(x)$ を適用して計算することにより，$f(x)=f(0)e^{\alpha x}+\left[f^{(1)}(0)-\alpha f(0)\right]xe^{\alpha x}$ と表されることを示せ．ここで，m は 0 以上の整数であり，$f^{(0)}(x)$ は $f(x)$ と見なし，$0!=1$ とする．

(4) 次の微分方程式を，条件 $f(0)=1$, $f^{(1)}(0)=p-2$ （p は実数定数）のもとで解け．

$$f^{(2)}(x)+4f^{(1)}(x)+4f(x)=e^{-2x}$$

(5) (4) で求めた $f(x)$ について，$f(x)=0$ が有限の実数解をひとつしか持たないときの p の値を求め，それぞれの p に対する $f(x)$ の極大値を求めよ．

(東京大 2014)　　(m20140701)

0.49 確率変数 X の累積分布関数 $F(x)$ が以下の微分方程式で表されるとする．

$$\frac{dF}{dx}=\frac{F(1-F)}{s}$$

今，$F(m)=1/2$ である．ただし，m, s は実数である．このとき，設問 (1)〜(5) について答えよ．

(1) 累積分布関数 F, および F の密度関数 f をそれぞれ求めよ．

(2) f が偶関数となる m を求めよ．ただし，その導出過程，または理由を示すこと．

(3) 期待値 $E=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f dx$ を求めよ．ただし，その導出過程を示すこと．

次に，入力信号の値 x に応じた確率で信号を出力したりしなかったりするシステムを考える．今，n 種類の入力信号の値 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ に対して，信号が出力された頻度を調べたところ $r_i(i=1,2,\cdots,n)$ を得た．以下の問いに答えよ．

(4) 関数 $\varphi\left(F(x)\right)=\log\left(\dfrac{F(x)}{1-F(x)}\right)$ を，x の一次式で表せ．

(5) $y_i=\varphi(r_i)$ としたとき，

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i-\varphi\left(F(x_i)\right)\right\}^2$$

を最小にする m と s を求め，それぞれ下記の統計量を用いて表せ．

平均：　$\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j$,　　$\overline{y}=\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}y_j$

分散：　$\mathrm{var}(x)=\overline{x^2}-\overline{x}^2$,　　$\mathrm{var}(y)=\overline{y^2}-\overline{y}^2$

共分散：　$\mathrm{cov}(x,y)=\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_jy_j-\overline{x}\cdot\overline{y}$

(東京大 2017)　　(m20170702)

0.50 袋の中に 3 色の玉が 8 個入っており，赤玉が 4 個，緑玉が 2 個，青玉が 2 個である．A さんが袋の中から無作為に玉を 3 個取り出し，5 個の玉が残る袋の中から B さんが無作為に玉を 3 個取り出し，色を確認した後に玉をすべて袋に戻す．この過程を 1 回の試行とし，A さんが赤，緑，青の 3 色の玉を 1 個ずつ取り出せたときを $X=1$, それ以外をX=0とし, Bさんが赤, 緑, 青の 3 色の玉を 1 個ずつ取り出せたときをY=1, それ以外を $Y=0$ とする．この試行を繰り返し行うとき，以下の問いに答えよ．

(1) この試行を 1 回行ったときの，次の統計量を求めよ．

(a) 期待値 $E(X)$ および $E(Y)$.

(b) 相関係数 $\rho(X,Y)$.

(2) A さんは n 回目の試行で初めて $X=1$ となったときに n 点もらえるとする．

(a) もらえる点数が 3 点である確率を求めよ．

(b) A さんのもらえる点数の期待値は，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha\sum_{k=1}^{n}k\beta^{k-1}$ という形で表せる．ただし，α と β は実数とする．α および β の値を求めた後，期待値を求めよ．

(3) B さんは n 回目の試行で初めて $Y=1$ となったときに r^n 点もらえるとする．ただし，r は正に実数とする．B さんがもらえる点数の期待値が有限な値をとるための，r の条件を求めよ．

(東京大 2018)　　(m20180702)

0.51　2 つの正方行列 A, B を

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \qquad B=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}+1&\frac{1}{\sqrt{2}}-1&1\\\frac{1}{\sqrt{2}}-1&\frac{1}{\sqrt{2}}+1&1\\-1&-1&\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

とし，行列 C を $C=BAB^{-1}$ とする．以下の問いに答えよ．なお，以下では任意のベクトル $\overrightarrow{x}$ に対し $\overrightarrow{x}^T$ はその転置を表すものとする． また，行列 I を単位行列とし， ある正方行列 X に対して $\exp(X)$ を

$$\exp(X)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{k!}=I+X+\frac{X^2}{2!}+\frac{X^3}{3!}+\cdots$$

と定義する．

(1) 行列 A の固有値を複素数の範囲で求めよ．

(2) 行列 C の固有値を複素数の範囲で求めよ．

(3) あるスカラー変数 t に対して $\exp(At)$ を求めよ．

(4) 3 次元ベクトル $\overrightarrow{x}$ に対してスカラー関数 $f(\overrightarrow{x})$ を

$$f(\overrightarrow{x})=\sum_{k=1}^{n}\left\{\exp\left(C\frac{2\pi k}{n}\right)\overrightarrow{a}-\overrightarrow{x}\right\}^T\left\{\exp\left(C\frac{2\pi k}{n}\right)\overrightarrow{a}-\overrightarrow{x}\right\}$$

とおく．ただし，n は $n>1$ を満たす整数，$\overrightarrow{a}$ は以下のような 3 次元ベクトルである．

$$\overrightarrow{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$$

関数 $f(\overrightarrow{x})$ を最小にする $\overrightarrow{x}$ は，ある単位ベクトル $\overrightarrow{b}$ を用いて以下のような形式で表せる．

$$\overrightarrow{x}=\boxed{\text{（ア）}}\left(\sum_{k=1}^{n}\boxed{\text{（イ）}}\right)\overrightarrow{b}$$

(a) (ア) と (イ) に入る数式を書け．必要であれば a_1, a_2, a_3, n, k を用いてよい．なお，行列を含まない形式で解答すること．

(b) $\overrightarrow{b}$ を求めよ．

(5) (4) で求めた $\overrightarrow{x}$ に対して，$n\to\infty$ としたときの $\overrightarrow{x}$ を a_1, a_2, a_3 を用いて表せ．

(東京大 2018)　　(m20180705)

0.52 実数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たすならば,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ となることを示せ.

(東京工業大 1997) (m19970802)

0.53 (1) 集合 $\{1,2,3\}$ の空でない部分集合をすべて書け. それらの部分集合を, 3 を含むものと含まないものに分けよ。

(2) $n=3$ のとき $\{1,2,3\}$ のすべての空でない部分集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, $1 \leq k \leq 3$ の和

$\displaystyle\sum_{\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}} \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_k}$ を計算せよ(計算過程も書け).

(3) $n(n \geq 1)$ に関する帰納法により $\displaystyle\sum_{\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}} \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_k} = n$

を示せ. ただし, 左辺は $\{1, 2, \cdots, n\}$ の空でないすべての部分集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, $1 \leq k \leq n$ に対して和を計算するものとする.

(電気通信大 2006) (m20061007)

0.54 (1) m, n を整数とするとき, 以下の式が成り立つことを示せなさい.

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

(2) 次の周期関数について解答しなさい.

$$f(x) = \begin{cases} -k & (-\pi < x < 0) \\ k & (0 < x < \pi) \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x) \qquad k > 0$$

この関数を以下のように無限級数で表すとき, その係数 a_0, a_n, b_n を求めなさい. さらに, 求められる無限級数を $n=7$ の項まで示しなさい.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

(横浜国立大 2008) (m20081105)

0.55 次の行列 A に対して, 多項式 $f(x)$ を $f(x) = \det(xE - A)$ で定義する. ただし, E は 3×3 の単位行列とする.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値を求めよ. (2) $f(A)$ を求めよ. (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ を求めよ.

(横浜国立大 2016) (m20161101)

0.56 次の関数をフーリエ級数 $y = a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ に展開せよ.

(1) 区間 $x = [-\pi,\ \pi]$ で定義される関数 $y = \begin{cases} a \ :\ x \geq 0, & a \text{ は実定数} \\ 0 \ :\ x < 0 \end{cases}$

(2) 区間 $x = [0,\ \pi]$ で定義される三角関数 $y = a\sin(nx)\cos(nx)$ ここで n は整数

(3) 区間 $x = [0,\ \pi]$ で定義される一次関数 $y = x$

(横浜国立大 2017)　　(m20171102)

0.57 (1) 次の等式を証明せよ．

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

ただし，n は自然数とする．

(2) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$$

(千葉大 1998)　　(m19981201)

0.58 2つの確率変数 X と Y の結合確率分布 $P\{X=m\,,\ Y=n\}$ $(m=0,1,2,3\,;\ n=0,1,2,3,4)$ が下の表のように与えられている．

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$
$Y=0$	c	0	0	0
$Y=1$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	0	0
$Y=2$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	0
$Y=3$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$
$Y=4$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	0

ただし, c は定数である. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 定数 c の値を決めよ.

(2) X だけの確率分布 $P\{X=m\}$ $(m=0,1,2,3)$ を求めよ.

(3) X の平均 $E[X]=\displaystyle\sum_{m=0}^{3}mP\{X=m\}$ を求めよ.

(4) Y の平均 $E[Y]$ を求めよ.

(5) XY の平均 $E[XY]$ を求めよ.

(6) X と Y が独立であるかどうかを, 理由を示して判定せよ.

(筑波大 2005)　　(m20051304)

0.59 $f(x)$ を $x\geq 0$ で定義された連続な単調増加関数とする. 以下の設問に答えよ.

(1) 任意の正整数 n に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\int_0^n f(x)dx\leq\sum_{i=1}^{n}f(i)\leq\int_0^n f(x+1)dx$$

(2) 実数 s に対して, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\frac{1}{n^s}\sum_{i=1}^{n}f(i)\,,\quad n=1,2,\cdots$$

と定義する. $f(x)=x^{\alpha}$（$\alpha>0$ は定数）のとき, 数列 $\{a_n\}$ が収束する s の範囲を定めよ.

(筑波大 2005)　　(m20051309)

0.60 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots$ の値を求めよ.

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$ の値を求めよ．

ただし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$ である（π は円周率）．

(筑波大 2007)　　(m20071335)

0.61 いろいろな関数を，多項式で表現してみよう．ある関数 $f(x)$ が，

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

のように，定数 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ を用いて x の多項式であらわされるとしよう．このとき，

(1) $f(0)=a_0,\ f'(0)=a_1,\ f''(0)=2a_2$ であることを示せ．

(2) 0 以上の任意の整数 n について，$f^{(n)}(0)=n!\,a_n$ であることを示せ．ここで，$f^{(n)}(x)$ は，$f(x)$ を n 回，微分したものである（$f(x)$ の n 階導関数）．ゼロの階乗は 1 とする．

(3) $\displaystyle f(x)=\frac{f(0)}{0!}+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ とできることを示せ．

(4) 関数 $\sin x$ は，このような多項式で表現できることがわかっている．具体的に $\sin x$ をこのような多項式で表現せよ．

(5) 関数 $\cos x$ や関数 e^x も，このような多項式で表現できることがわかっている．具体的に $\cos x$ と e^x をそれぞれ，このような多項式で表現せよ．

(6) 任意の実数 θ について，$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ となることを示せ，ただし，i は虚数単位とする．

(筑波大 2008)　　(m20081319)

0.62 指数関数 e^x の性質に関する以下の問いに答えなさい．

(1) 自然数 n を用いて定義された以下の極限値を考える．

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

(1a) 2 項展開の公式を用いて下の関係式を示しなさい．

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

(1b) さらに $\dfrac{1}{n!}<\dfrac{1}{2^{n-1}}$ を用いて $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ $(n=1,2,\cdots)$ が有界であることを示しなさい．

(2) 有界なる単調数列は収束するので (1) で与えられた極限は極限値をとり，これを e と書くことにする．この e が自然数の底である．　このとき以下を示しなさい．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

(3) 上記の (2) を使って

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

が成立することをまず示し，その上で微分の定義に基づいて $\{e^x\}'=e^x$ を示しなさい．

(4) $f(x)=e^x$ を n 次のマクローリン展開（$x=0$ のまわりでのテイラー展開）し，その剰余項を求めなさい．

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0$ を示し，これを用いて $\displaystyle e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ を示しなさい．

(筑波大 2009)　　(m20091302)

0.63 正しく作られたサイコロを用いて，“ 3 の倍数が出るまでサイコロを振り続ける ”というゲームを行う．このとき以下の問題に答えなさい．

(1) ちょうど n 回目に 3 の倍数が出る確率を P_n と表す．このとき，以下の極限値を求めなさい．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}P_n$$

(2) 3 の倍数が出たときに 100 円もらえるとすると，このゲームによる獲得金額の期待値を求めなさい．

(3) 3 の倍数が出たときにもらえる金額を，1 回目なら 100 円，2 回目なら $100(1+r)$ 円，3 回目なら $100(1+r)^2$ 円というように，サイコロを振る回数が増えるにしたがって $(1+r)$ 倍する．但し，$r>0$ とする．このとき，このゲームによる獲得金額の期待値が有限な値になるためには，正の数 r は，ある範囲内 $0<r<r_0$ にある必要がある．このような r_0 のうち，最も大きな値を求めなさい．

(筑波大 2011)　　(m20111312)

0.64 関数 $f(x)=\sin 2x$ の $x=\pi/2$ におけるテイラー展開について以下の問いに答えよ．

(1) $(x-\pi/2)^4$ の項までテイラー展開を求めよ．ただし，ここでは剰余項は求めなくてよい．

(2) $\pi/2<x<\pi$ を満たす範囲の x に対して，剰余項 R_5 は $|R_5|<\dfrac{\pi^5}{5!}$ を満たすことを示せ．

ただし，(1),(2) において $f(x)$ の $x=a$ におけるテイラー展開は，正の整数 n に対して

$$f(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k+R_{n+1}$$

と表される．ここで，剰余項 R_{n+1} は，$a<p<x$ である p が存在して，

$$R_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(p)(x-a)^{n+1}$$

と表される．

(筑波大 2011)　　(m20111314)

0.65 次の問いに答えよ．

(1) $\sinh x$ と $\cosh x$ をマクローリン展開せよ．

(2) 次の積分を計算せよ．

$$\int_0^1 \cosh x\,dx$$

(3) 次の積分を計算せよ．

$$\int_0^1 (1-x)\cosh x\,dx$$

(4) $n=0,1,2,\cdots$ に対して次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\int_0^1 (1-x)^n\cosh x\,dx=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n!}{(2m+n+1)!}$$

(筑波大 2013)　　(m20131304)

0.66 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=\begin{cases} x-[x] & 0\leq x-[x]<\frac{1}{2} \\ 1-(x-[x]) & \frac{1}{2}\leq x-[x]<1 \end{cases}$$

で定義する．ただし $[x]$ は x 以下の最大の整数を表す．$x\in\mathbb{R}$ に対して

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(2^k x)}{2^k}$$

とおく．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の，$-1\leq x\leq 1$ におけるグラフを描け．

(2) 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して，$g(x)\leq 1$ が成り立つことを示せ．

(3) 関数 $g(x)$ は連続であることを示せ．

(4) 自然数 n に対して，$g\left(\dfrac{1}{2^n}\right)=\dfrac{n}{2^n}$ を示せ．

(5) 関数 $g(x)$ は $x=0$ において微分不可能であることを示せ．

(筑波大 2014)　　(m20141315)

0.67 n は 1 以上の整数とする．2 変数関数

$$f(x,y)=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i-x)^2}{y}+n\log y \qquad (-\infty<x<\infty,\ y>0)$$

について，次の問いに答えよ．

(1) 等式

$$\sum_{i=1}^{n}(i-x)^2=n(\mu-x)^2+n\delta$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\mu=\dfrac{n+1}{2}$，$\delta=\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i-\mu)^2}{n}$ である．

(2) $f(x,y)$ の最小値を求めよ．

(筑波大 2016)　　(m20161303)

0.68 関数 $f(x)$ と f の定義域に含まれる区間 $[0,1]$ を考える．

$$x_i=\frac{i}{n} \qquad (i=0,1,\cdots,n)$$

で与えられる区間 $[0,1]$ の分割に対して，

$$I_k=(x_{k-1},x_k] \qquad (k=1,\cdots,n)$$

とし，次の和を定義する．

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sup_{x\in I_k}f(x)$$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\inf_{x\in I_k}f(x)$$

この S_n, s_n がそれぞれ $n\to\infty$ において極限を持つとき，

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n,$$

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

とする．$S = s$ ならば関数 f が区間 $[0, 1]$ で積分可能であるといい，

$$S = s = \int_0^1 f(x)dx$$

と書く．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $f(x) = x$ とするとき，(a) S_n, s_n を求め，(b) f が $[0, 1]$ 上で積分可能かどうかを示せ．

(2) 以下の関数 f が $[0, 1]$ 上で積分可能かどうかを示せ．

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \text{ が無理数}) \\ x & (x \text{ が有理数}) \end{cases}$$

ただし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ である．

(筑波大 2016)　　(m20161312)

0.69 $E = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}\right\}$ とする．$\mathbb{R}^2$ で定義された連続関数 $f(x, y)$ の E 上でのリーマン和は，それぞれの正整数 m に対して，

$$R_m(f) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-i} f\left(\frac{2i}{m},\ \frac{j}{m}\right)\frac{2}{m^2}$$

で与えられている．$f(x, y) = x + y$ であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x, y)$ の E 上でのリーマン和 $R_m(f)$ を求めよ．　ただし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$ である．

(2) (1) で得られたリーマン和を用いて，関数 $f(x, y)$ の E 上での二重積分を求めよ．

(3) 関数 $f(x, y)$ の E 上での累次積分を求めよ．

(筑波大 2017)　　(m20171309)

0.70 実ベクトル空間 W のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が次の 2 つの条件を満たしているものとする．

(A) $||\boldsymbol{v}_1|| = \cdots = ||\boldsymbol{v}_1|| = 1$

(B) 相異なる $j, k \in \{1, \cdots, n\}$ に対して $\langle \boldsymbol{v}_j,\ \boldsymbol{v}_k \rangle = 0$

ただし，$\langle\ ,\ \rangle$ は W の内積，$||\quad||$ はこの内積で定まる長さを表す．　また，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合によって表されるベクトル全体からなる集合を V とする．以下の (1)-(4) を証明しなさい．

(1) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立である．

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ が実数 $x_1,\ \cdots x_n$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{v}_j$$

と表されるとき，次の等式が成り立つ．

$$||\,\boldsymbol{x}\,||^2 = \sum_{j=1}^{n} {x_j}^2$$

(3) V は W の部分空間である．

(4) $V \neq W$ であれば，$\boldsymbol{w} \notin V$ かつ $\boldsymbol{w} \in W$ を満たす任意のベクトル $\boldsymbol{w}$ に対して $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{w}$ は1次独立である．

(筑波大 2017)　　(m20171313)

0.71 $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ を正の成分をもつ実ベクトルとし，

$$A_x = D_x - \frac{\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{x}}{\sum_{i=1}^m x_i}$$

とおく．ただし，D_x は $D_x = \mathrm{diag}\,(x_1, \cdots, x_m)$ なる対角行列，${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置とする．

(1) 0 が A_x の固有値になることを示し，対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) 任意の実ベクトル $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ に対して，${}^t\boldsymbol{y}\, A_x\, \boldsymbol{y} \geq 0$ を示せ．

(筑波大 2017)　　(m20171315)

0.72 (1) 数列

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が単調減少であることを示せ．

(2) 上の数列が，$C \geq \dfrac{1}{2}$ を満たすある定数 C に収束することを示せ．

(3) 広義積分

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right] \right) dx$$

の値を上の定数 C を用いて表せ．ただし，$[\alpha]$ は α を超えない最大の整数を表す．

(筑波大 2017)　　(m20171317)

0.73 $E_1, \cdots, E_n$ を互いに排反で網羅的な事象とし，各事象 E_k が生起する確率を θ_k とする．今，実験を m 回独立に試みたとき，事象 E_k が観測される度数を x_k とすると，$(x_1, \cdots, x_n)$ が実現する確率 $P(x_1, \cdots, x_n)$ は多項分布により求められる．ここで，$m = x_1 + \cdots + x_n$ である．$\theta_1, \cdots, \theta_n$ が既知であるとき，サンプル $(x_1, \cdots, x_n)$ が多項分布に従う母集団からとられたという帰無仮説は次の統計量

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - m\theta_k)^2}{m\theta_k}$$

で検定できる．m が十分大きいときは，統計量 S は自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布に従う．自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布の $100\alpha\%$ 有意水準点を $X^2(n-1,\ \alpha)$ により表すとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 上記の問題において，5% 有意水準で帰無仮説が棄却される条件を式で示せ．

(2) サイコロを 120 回投げ，出た目の度数を数えたとき，下記のようになったとする．

出た目	1	2	3	4	5	6	計
度　数	15	19	23	20	21	22	120

このとき，サイコロが偏っていないという帰無仮説が 5% 有意水準で棄却されないという条件を式で示せ．

(3) ランダムに選ばれた 800 個の材料のうち 400 個に処理 1（事象 A）を，残りの 400 個に処理 2（事象 $\overline{A}$）を行った．さらに，これらの材料の強度試験を行ったところ，もろい（事象 B）ともろくない（事象 $\overline{B}$）という 2 種類に下表のように分離された;

	もろい	もろくない
処理 1	77	323
処理 2	177	223

この問題では，$n=4$，$m=800$ となるが，各事象が生起する確率 $P(A)$，$P(B)$ は未知である．そこで，観測された度数の割合で求められる値を $P(A)$，$P(B)$ の推定量として置き換えて計算する．このとき，統計量 S は m が十分に大きいならば，自由度 1 のカイ 2 乗分布に従う．材料の処理と強度とは独立であるという帰無仮説が 5% 有意水準で棄却されるという条件を式で示せ．

(筑波大 2018)　　(m20181313)

0.74 確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ は互いに独立で，平均 μ，分散 σ^2 のある同一の確率分布に従うとする．ここで，2 つの μ の推定量

$$\hat{\mu}=\sum_{i=1}^{n} v_i X_i, \qquad \tilde{\mu}=\sum_{i=1}^{n} w_i X_i$$

を考える．ただし，

$$-\infty<\mu<\infty,\ 0<\sigma^2<\infty$$

,

$$v_i=\frac{2(n+1-i)}{n(n+1)}, \qquad w_i=\frac{2(n-i)}{n(n-1)}$$

で，n は 2 以上の整数である．なお，解答の際には，

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

を利用して良い．

(1) $\hat{\mu}$ が μ の不偏推定量であることを示せ．

(2) $\tilde{\mu}$ が μ の不偏推定量であることを示せ．

(3) $\hat{\mu}$ の分散を求めよ．

(4) $\tilde{\mu}$ の分散を求めよ．

(5) (1)〜(4) から，$\hat{\mu}$ と $\tilde{\mu}$ どちらの推定量がより μ の推定にに適していると言えるか．その理由とともに答えよ．

(筑波大 2019)　　(m20191312)

0.75 (1) 以下の命題を証明せよ．

(a) V，W を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，f は V から W への線形写像であるとする．V の有限個の元 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{v}_k$ について，$f(\boldsymbol{v}_1)$，$f(\boldsymbol{v}_2)$，$\cdots$，$f(\boldsymbol{v}_k)$ が線形独立ならば，$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{v}_k$ も線形独立である．

(b) α は 1 より大きい定数とする．このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}$ は収束する．

(2) 以下の命題に対する反例を与え，それが反例であることを示せ．

(a) $\mathbb{R}$ 上の数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 U_1，U_2，U_3 が $U_1\cap U_2=U_1\cap U_3=U_2\cap U_3=\{0\}$ を満たせば，部分空間の和 $U_1+U_2+U_3$ は直和である．

(b) $\mathbb{Z}$ の任意の部分集合 A，B に対して，$P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ が成り立つ．ただし，集合 X に対して，$P(X)$ は X のべき集合（X の部分集合全体の集合）を表す．

(c) 写像 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ に対して，写像 $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ であって合成写像 $g\circ f$ が $\mathbb{Z}$ 上の恒等写像に等しいものが存在すれば，f は全単射である．

(筑波大 2020)　　(m20201317)

0.76 (1) $x > 0$ に対して，次の関数を定義する．

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$$

任意の正の整数 n に対して，$\Gamma(n+1) = n!$ が成り立つことを示せ．

(2) 次の定積分を $u = -(n+1)\log x$ $(\Leftrightarrow x = e^{-\frac{u}{n+1}})$ とする置換積分により計算せよ．ただし，n は任意の正の整数を表す．

$$\int_0^1 x^n (\log x)^n dx$$

(3) 以下の恒等式を証明せよ．

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^\infty n^{-n} \quad \left\{ = \lim_{n\to\infty} (1 + 2^{-2} + 3^{-3} + \cdots + n^{-n}) \right\}$$

ただし，(2) の結果，および，次のマクローリン展開の結果を用いること．

$$x^{-x} = e^{(-x\log x)} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-x\log x)^n}{n!}$$

また，積分 $\int$ と和 $\sum$ の順序は交換してもよいとする．

(筑波大 2022)　　(m20221307)

0.77 実数 θ に対して　$f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin n\theta}{n} x^n$　とおく．

(1) 右辺の級数は　$|x| < 1$　で収束することを示せ．

(2) $f'(x) = \dfrac{\sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$ を示せ．　$\left[\text{ヒント：} \sin t = \dfrac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right) \right]$

(埼玉大 2002)　　(m20021401)

0.78 $\mathbb{R}^n$ のベクトル　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を次のように定義する．

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

さらに，$\boldsymbol{x}$ の長さを $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ と定義する．

次の (1),(2),(3) に答えよ．

(1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して不等式　$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq ||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}||$　が成り立つことを証明せよ．

(2) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して不等式　$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|| \leq ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||$　が成り立つことを証明せよ．

(3) 上の (1),(2) において等号が成立するための必要十分条件を求めよ．

(埼玉大 2002)　　(m20021403)

0.79 (1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は次を満たすとする．

$$\text{すべての自然数 } n \text{ に対して } a_n \geqq 0 \text{ であり，} \sum_{n=1}^\infty a_n < \infty \text{ である．}$$

このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ は成立するか. 成立するならば証明し, 成立しないならば反例をあげよ．

(2) 次の条件をすべて満たす関数 f の例を挙げよ.

- f は区間 $[0,\infty)$ で定義された連続関数である.
- すべての $x \in [0,\infty)$ に対し $f(x) \geqq 0$ である.
- $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx < \infty$ である.
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ が成立しない.

(埼玉大 2005)　　(m20051407)

0.80 (1) 関数 $f(x) = (1+x)^\alpha$ をマクローリン展開することにより，次式を導き出せ.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} {}_\alpha\mathrm{C}_i x^i \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

ただし，${}_\alpha\mathrm{C}_i$ は次式で表される.　　${}_\alpha\mathrm{C}_i = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!}$　　$(i \geq 1)$

(2) 式 ① を用いて次の関数 $g(x)$ のマクローリン展開式を x^3 の項まで求めよ.　　$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$

(埼玉大 2007)　　(m20071401)

0.81 $\alpha > 0$ とする．$x \geqq 1$ で定義された関数 $f_\alpha(x)$ は,

$$x \in [n, n+1) \text{ において } \quad f_\alpha(x) = \frac{1}{n^\alpha}$$

となるものとする．ただし，n は自然数とする．このとき

$$\int_1^{N+1} f_\alpha(x)dx = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$$

となることを利用して次の問いに答えよ.

(1) $\alpha > 1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ が収束することを示せ.

(2) $\alpha \leqq 1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ が発散することを示せ.

(埼玉大 2011)　　(m20111410)

0.82 10 進数を 2 進数に変換する方法として,「10 進数を次々に 2 で割り，その結果の余りを下から順に並べる」という方法がある.

（例）　10 進数　13　$\Downarrow$　　　　$\Uparrow$　1101　2 進数

2	13		1	1	0	1
2	6	$\cdots$ 1				
2	3	$\cdots$ 0				
2	1	$\cdots$ 1				
	0	$\cdots$ 1				

(1) n 桁の p 進数は

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, p^{i-1}, \quad 0 \leqq a_i < p, \quad a_i \text{ は 0 または自然数}$$

であることを利用して，上記の方法が正しいことを示せ.

(2) 10 進小数を 2 進小数に変換する，たとえば 10 進小数 0.625 を 2 進小数 0.101 に直す方法を示し，その方法が正しいことを示せ．

(図書館情報大 1994)　　(m19941602)

0.83 $f_0(x)$ を値 1 をとる定数関数とするとき，次の各問に答えよ．

(1) $f_1(x)=\displaystyle\int_0^x f_0(t)dt$，　$f_2(x)=\displaystyle\int_0^x f_1(t)dt$，　$f_3(x)=\displaystyle\int_0^x f_2(t)dt$ を求めよ．

(2) $f_n(x)=\displaystyle\int_0^x f_{n-1}(t)dt$　(ただし，$n=1,2,3,\cdots$) を求めよ．

(3) $E(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ とおくとき　$\dfrac{d}{dx}E(x)$ を求めよ．

(茨城大 1999)　　(m19991703)

0.84 複素数の数列 $z_n=\left(\dfrac{i}{2}\right)^n$　$(n=0,1,2,\cdots)$ について，次の各問に答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n$ を求めよ．　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ を求めよ．　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz_n$ を求めよ．

(茨城大 2007)　　(m20071704)

0.85 複素関数 $f(z)=(x^2-2x+3)e^{z-1}$ について，以下の各問に答えよ．

(1) $f(z)$ の $z=1$ を中心にするテイラー展開を

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-1)^k$$

と書くとき，a_1，a_2 をそれぞれ求めよ．

(2) C は複素平面上の円 $|z|=2$ を正の向きに一周する閉曲線とする．次の複素積分を計算せよ．

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-1)^n}\,dz$$

ただし，n は 3 以上の自然数とする．

(茨城大 2015)　　(m20151704)

0.86 数学的帰納法を用いて次の不等式を証明せよ．　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{-1/2}\geq\sqrt{n}$

(山梨大 2015)　　(m20151803)

0.87 (1) 関数 $f(x)$ が $x=0$ を含む区間で n 回微分可能であるとき，下式を満たす点 $\theta(0<\theta<1)$ が存在する．ただし，$f^{(n)}(x)$ は第 n 次導関数とする．

$$f(x)=f(0)+xf^{(1)}(0)+\frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0)+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)$$

上式の最終項を除いた n 項までの和の部分を関数 $f(x)$ の近似式と呼ぶ．

$f(x)=(1+x)^k$　(k は任意の実数) を 2 次式で近似し，$\sqrt{1.1}$ の近似値を求めなさい．

(2) n 回微分可能な関数 $f(x)$，$g(x)$ の積 $f(x)\cdot g(x)$ の第 n 次導関数 $\Big(f(x)\cdot g(x)\Big)^{(n)}$ が次の式で与えられることを数学的帰納法によって証明しなさい．

$$\Big(f(x)\cdot g(x)\Big)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n} {}_nC_i f^{(n-i)}(x)\cdot g^{(i)}(x)$$

(山梨大 2016)　　(m20161804)

0.88 $_nC_r \ (0 \leq r \leq n)$ は式 (1)-(3) で与えられる.

$$ {}_nC_0 = 1 \tag{1} $$

$$ {}_nC_n = 1 \tag{2} $$

$$ {}_{n+1}C_r = {}_nC_r + {}_nC_{r-1} \qquad (1 \leq r \leq n) \tag{3} $$

数学的帰納法を用いて式 (4) が成り立つことを証明せよ.

$$ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^k b^{n-k} \tag{4} $$

(山梨大 2020)　　(m20201804)

0.89 10 進表記の $m(m \geq 1)$ 桁の自然数 n の各位の数字を $d_i(1 \leq i \leq m,\ 0 \leq d_i \leq 9)$ と表すものとし, $r(n)$ を以下と定義する.

$$ r(n) = \sum_{i=1}^{m} d_i $$

このとき, $r(n+3)$ と $r(n)$ の差は 3 の倍数であることを証明せよ.

(山梨大 2021)　　(m20211801)

0.90 (1) $|x| \leq \dfrac{1}{2}$ ならば, $|\log(1+x) - x| \leq 2x^2$ が成立することを証明せよ.

(2) 次の等式を証明せよ.

$$ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{1}{n}\cos\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \cos x\, dx $$

(信州大 2012)　　(m20121903)

0.91 n を自然数とする. すべての成分が 1 であるような n 次元列ベクトルを $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ とする. A, B, C を実数成分の n 次正方行列とする.

(1) 行列 A が逆行列を持つとする. このとき, $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ が存在することを証明せよ.

(2) $B\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ がただ一つだけ存在するとする. このとき B は逆行列を持つことを証明せよ.

(3) $C\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ および ${}^t C\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ が存在するとする. ここで, ${}^tC$ は C の転置行列である. このとき $\boldsymbol{v}$ および $\boldsymbol{w}$ の成分の和が一致すること, すなわち $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} w_i$ であること, を証明せよ.

(信州大 2019)　　(m20191911)

0.92 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ をベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の標準内積とする. つまり,

$$ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} $$

に対して

$$\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

である．また，ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ はそれぞれ長さが 1 で，かつ内積 $\langle\ \cdot, \cdot\ \rangle$ に関して互いに直交しているとする（k は 1 以上 n 以下の整数）．写像 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1 - \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_2 \rangle \boldsymbol{v}_2 - \cdots - \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_k \rangle \boldsymbol{v}_k \\ &= \boldsymbol{v} - \sum_{i=1}^{k} \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_i \rangle \boldsymbol{v}_i \end{aligned}$$

(1) F は線形写像であることを示せ.

(2) $F(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k$ のそれぞれと直交していることを示せ.

(3) $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k\}$ によって生成される $\mathbb{R}^n$ の部分空間を V とする．$\boldsymbol{v} \in V$ ならば，$F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ となることを示せ（ただし，ここで $\boldsymbol{0}$ は零ベクトルである）.

(4) $F^2 = F$ を満たすことを示せ.

(5) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\langle F(\boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v},\ F(\boldsymbol{w}) \rangle$ が成り立つことを示せ.

(信州大 2021)　　(m20211905)

0.93 (1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ は収束することを示せ.

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k}$ は $a \in [0, 1)$ のとき収束することを示せ.

(新潟大 1998)　　(m19982004)

0.94 周期 2π の関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

と書かれた時，$f(x)$ はフーリエ級数展開されたという．一般に，係数 a_n, b_n は

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

として求められる．今，$f(x)$ が，区間 $-\pi < x \leq \pi$ で

$$f(x) = x$$

である時，フーリエ級数の係数 a_n, b_n を求めよ.

(新潟大 2001)　　(m20012010)

0.95 次の問いに答えよ.

(1) 定積分を用いて，極限値 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$ を求めよ.

(2) $\beta > 2$ に対して，定積分 $\displaystyle\int_2^{\beta} \frac{dx}{x(\log x)^{\alpha}}$ を求めよ．ただし，$\alpha > 0$ とする.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^{\alpha}}$ は存在するかどうかを調べ，存在する場合はその値を求めよ．ただし，$\alpha > 0$ とする.

（新潟大 2004）　　(m20042002)

0.96 次の級数の和を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{a+1}\right)^n \quad (a>0)$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{3^n}$

(新潟大 2005) (m20052001)

0.97 次の級数が収束するときはその和を求めよ．発散するときはその理由を述べよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$

(新潟大 2006) (m20062001)

0.98 n を 2 以上の自然数とする．閉区間 $[0,1]$ で定義された関数 $f_n(x)$ と $g_n(x)$ を

$$f_n(x)=e^{-nx}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}\,, \qquad g_n(x)=e^{-(n-1)x}-e^{-nx}$$

により定める．このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $0\leqq x\leqq 1$ なる任意の実数 x に対して，不等式 $f_n(x)\leqq g_n(x)$ が成立することを示せ．

(2) $0\leqq x\leqq 1$ なる任意の実数 x に対して，不等式 $g_n(x)\leqq\dfrac{1}{n}$ が成立することを示せ．

(3) 不等式 $\displaystyle\int_0^1 f_n(x^2)dx\leqq\frac{1}{n}$ が成立することを示せ．

(新潟大 2006) (m20062005)

0.99 (1) 次の行列式の値を求めよ． $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(2) 行列 A の行列式の定義は，例えば，

$$|A|=\sum_{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{smallmatrix}\right]\in S_n}\operatorname{sgn}\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

で与えられる．ここで，S_n は n 次の置換のすべての集合であり，sgn は置換の符号である．このとき次式を証明せよ．

$$\begin{vmatrix} a & 0\ \cdots\ 0 \\ * & \\ \vdots & B \\ * & \end{vmatrix}=a|B|$$

ただし，B は $(n-1)$ 次の正方行列とする．

(新潟大 2006) (m20062011)

0.100 $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{ax}|\sin x|\,dx$（ただし $a<0$）を求めたい．

(1) $I_n=\displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}e^{ax}|\sin x|\,dx$ としたとき，I_n と I_{n+1} が満たす関係式を求めよ．

(2) $S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}I_i$ としたとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を I_1 を用いて表現せよ．

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{ax}|\sin x|\,dx=\lim_{n\to\infty}S_n$ となる理由を述べよ．

(4) I_1 を実際に計算し，$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{ax}|\sin x|\,dx$ を求めよ．

(新潟大 2010)　　(m20102005)

0.101 等比数列 $\{a_n\}$ が $a_3 = \dfrac{4}{3}$ および $a_5 = \dfrac{16}{27}$ であるとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ．

(新潟大 2012)　　(m20122004)

0.102 次の各問いに答えよ．

(1) $0 < a < 1$ を満たす任意の実数 a に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} na^n = 0$ を示せ．

(2) $0 < a < 1$ を満たす任意の実数 a に対して，次の級数の収束・発散を調べよ．収束するときはその和も求めよ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}$$

(3) 次の関数の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{x^3}$$

(4) 次の関数の極限値を求めよ．

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$

(新潟大 2012)　　(m20122014)

0.103 3 次元空間上のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ を x 軸のまわりで角度 θ だけ回転するとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{V}}'$ へ変換される．この関係を 3 × 3 行列 $U(\theta)$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{V}}' = U(\theta)\overrightarrow{\mathrm{V}}$$

と書く．ここで，$U(\theta)$ は

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

で与えられる．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $U(\theta)$ の行列式 $\det U(\theta)$ を求めよ．

(2) 行列 $U(\theta)$ の逆行列 $U(\theta)^{-1}$ を求めよ．

(3) 行列 K を

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

としたとき，K^2，K^3，および K^4 を求めよ．さらに，正の整数 m に対して，K^{2m} と K^{2m-1} を求めよ．

(4) 一般に，正方行列 X の指数関数は無限級数

$$e^X = E + X + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}X^n$$

で定義される．ここで，E は単位行列を表し，$X^0 = E$ である．問 (3) の結果を利用して，

$$e^{\theta K} = U(\theta)$$

となることを示せ．

(新潟大 2014)　　(m20142017)

0.104 $a_1 = e,\ a_{n+1} = \dfrac{e}{n+1} a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定義される数列 a_n について，以下の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

(1) a_n を n の式で表せ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ.

(新潟大 2015)　　(m20152009)

0.105 等式 $\tan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ で成り立つような定数 a_n のうち a_0 から a_5 までを求めよ.

(新潟大 2015)　　(m20152017)

0.106 関数 $f(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{N} (a_n - x)^2$ を最大にする x を求めよ．ただし，N は正の整数，$a_n,\ n = 1, 2, 3, \cdots, N$ は任意の実数とする.

(新潟大 2016)　　(m20162001)

0.107 以下のように行列 $A,\ B,\ C$ を定義する.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

また，I を 3×3 の単位行列とする．ここで，i は虚数単位で $i = \sqrt{-1}$ である.

(1) $A^2 + B^2 + C^2 = kI$ となることを示し，定数 k を求めよ.

(2) A の固有値を求めよ.

(3) 一般に，正方行列 M の指数関数 e^M は，無限級数 $e^M \equiv \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M^n$ で定義される．α を実定数としたとき，

$$e^{i\alpha C} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$$

（問題ではこうなっていましたが，$(2, 2)$ 成分は 1 になるものと思われます）

となることを示せ.

(4) ベクトル $\vec{v}(\phi)$ を $\vec{v}(\phi) = \dfrac{\sin\phi}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{i\cos\phi}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と定義する.

このとき，$e^{i\alpha C} \vec{v}(\phi) = \vec{v}(\phi')$ と書けることを示し，ϕ' を求めよ．ただし，ϕ と ϕ' は実定数である.

(新潟大 2017)　　(m20172017)

0.108 虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を含む指数関数 $e^{i\theta}$ を三角関数で表す公式はオイラーの公式と呼ばれる．物理の問題を扱うには，よく似た行列の関係式を用いると便利なことが多い．このことに関連した以下の問いに答えよ.

(1) オイラーの公式を書け．つまり，実数 θ に対して $e^{i\theta}$ を三角関数を用いて表せ.

(2) 二次正方行列 I および J を

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する．J^2 を計算し，J^2 と I の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3) 一般に二次正方行列 X に対し，そのゼロ乗 X^0 および指数関数 e^X は次式で定義される：

$$X^0 = I, \quad e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n = I + X + \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{3!} X^3 + \cdots$$

(2) の関係式に着目すると，行列 $e^{\theta J}$ は I に比例する部分と J に比例する部分の和

$$e^{\theta J} = f(\theta) I + g(\theta) J$$

で表すことができる．このとき，関数 $f(\theta)$ および $g(\theta)$ を求めよ．

なお，必要ならば，三角関数のベキ展開（テイラー・マクローリン展開）が次式で与えられることを用いてもよい．

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} \qquad = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \cdots$$

$$\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots$$

(4) (3) で求めた行列 $e^{\theta J}$ に対して，その行列式の値を答えよ．

次に，これまでの結果の応用として，調和振動子の運動を表す微分方程式

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

の解 $x(t)$ を求めたい．ここで ω は正の定数である．以下の問いに答えよ．

(5) 変数 $p(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ および $q(t) = \omega x(t)$ を用いると，この微分方程式は,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$$

の形に表すことができる．ここで K は t に依らない二次正方行列である．行列 K を答えよ．

(6) (5) の微分方程式の解は次式で与えられる：

$$\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = e^{Kt} \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$$

以上のことから，初期条件 $p(0) = p_0$, $q(0) = q_0$ に対応する解 $x(t)$ を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222006)

0.109 和 $\displaystyle\sum_{n=10}^{100} \log a^n$ は $\log a$ の何倍か．ただし，$a > 0$ とする．

(長岡技科大 1991)　　(m19912101)

0.110 次の無限級数の和を求めよ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots\cdots$$

(長岡技科大 1992)　　(m19922102)

0.111 $a_n = \sum_{k=1}^{n} k$ とおく．$a_n > 1000$ となる自然数 n の中で最小のものを求めよ．

(長岡技科大 1994)　　(m19942101)

0.112 実数 x の関数 $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |x-k|$ を考える．

(1) $f_3(x)$ の最小値とそれを与える x をすべて求めよ．

(2) $f_4(x)$ の最小値とそれを与える x をすべて求めよ．

(長岡技科大 1994)　　(m19942103)

0.113 自然数 n の各位の数の和を $f(n)$ とする．たとえば $f(2053) = 2+0+5+3 = 10$ である．次の各問いに答えよ．

(1) $\sum_{n=1}^{10} f(n)$ を求めよ．

(2) $\sum_{n=1}^{100} f(n)$ を求めよ．

(3) k を自然数とするとき，$\sum_{n=1}^{10^k} f(n)$ を求めよ．

(長岡技科大 1998)　　(m19982101)

0.114 自然数 n に対して，数列の和 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ を n の式で表す公式を以下の手順で求める．下記の $\boxed{}$ にあてはまる数を記入せよ．

数列 a_k, b_k, c_k $(k = 1, 2, \cdots)$ を $a_k = k$, $b_k = k(k-1)$, $c_k = k(k-1)(k-2)$ と定義すると

$$b_{k+1} - b_k = \boxed{\text{ア}}\, a_k\ , \qquad c_{k+1} - c_k = \boxed{\text{イ}}\, b_k$$

である．これらの両辺を $k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について和を取り整理すると

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \boxed{\text{ウ}}\, b_{n+1}\ , \qquad \sum_{k=1}^{n} b_k = \boxed{\text{エ}}\, c_{n+1}$$

が得られる．一方，$k^2 = \boxed{\text{オ}}\, a_k + \boxed{\text{カ}}\, b_k$ と表せるので

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \boxed{\text{キ}}\, b_{n+1} + \boxed{\text{ク}}\, c_{n+1} = \boxed{\text{ケ}}\, n^3 + \boxed{\text{コ}}\, n^2 + \boxed{\text{サ}}\, n$$

である．

(長岡技科大 2000)　　(m20002101)

0.115 (1) 1 周期が T である関数 $f(t)$ は, 以下のようにフーリエ級数展開される．
$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ として C_n および θ_n を, a_n および b_n で表せ. 但し, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ とする．

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t\Big) \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\big(n\omega_0 t - \theta_n\big) \end{aligned}$$

(2) 上式におけるフーリエ係数 a_n および b_n は, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ として,

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt \quad , \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により計算できる. 1 周期において, 次式で定義される関数 $f(t)$ をフーリエ級数展開せよ.

$$f(t) = \begin{cases} -1 & , \quad -\dfrac{T}{2} \leq t < 0 \\ 1 & , \quad 0 \leq t \leq \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

(3) $\sin^2 t$ および $\sin^3 t$ を, それぞれフーリエ級数展開せよ.

(4) $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$ となることを証明せよ.

(長岡技科大 2005) (m20052106)

0.116 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ の値を求めなさい.

(2) 区間 $[a, b]$ における連続関数 $f(x)$ の定積分 $S = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の値を求めたい．$[a, b]$ を幅 $\dfrac{b-a}{n}$ の小区間に n 等分し，その分点を $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ とする．各小区間上に作られる台形の面積の和 $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(a_{k-1}) + f(a_k)}{2} \cdot \frac{b-a}{n}$ を S の近似値とする．この近似法を台形公式という．区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ を 3 等分して，台形公式による $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ の近似値 S_3 を求めなさい.

(長岡技科大 2007) (m20072104)

0.117 (1) 関数 $f(x) = \log(1+x)$ に対して，$f^{(n)}(x)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ を求めよ.

(2) 関数 $g(x) = \log\dfrac{1+x}{1-x}$ に対して，$g(x)$ のマクローリン展開を書け．すなわち $g(x)$ をべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の形で表せ.

(金沢大 1999) (m19992203)

0.118 (1) ある定数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ と正の定数 M が存在して

$$\left| \log(1+x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right| \leqq Mx^{n+1} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

が成り立つとき，$a_0, a_1, \cdots, a_n$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2$ を示せ.

(金沢大 2007) (m20072208)

0.119 n を自然数とし，I_n を次の広義積分で定める．$I_n = \displaystyle\int_1^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx$ このとき，次の問いに答えよ.

(1) I_1 の値を求めよ.

(2) $n \geq 2$ のとき，次の漸化式が成り立つことを示せ． $I_n = \dfrac{1}{e} + (n-1)I_{n-1}$

(3) 次式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ． $I_n = \dfrac{(n-1)!}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$

(4) 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{(n-1)!}$

(金沢大 2007) (m20072210)

0.120 1 変数 x の実数を係数とする 2 次以下の多項式全体のなすベクトル空間 V を考える.

(1) $i = 0, 1, 2$ について, $x^i = \sum_{j=0}^{2} a_{ij}(1 + jx)^2$ を満たす a_{ij} を求めよ.

(2) $\{1,\ (1 + x)^2,\ (1 + 2x)^2\}$ は V の基底であることを示せ.

(金沢大 2009) (m20092205)

0.121 $x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $f'(x) < 0$ となる x の範囲を求めよ.

(2) $N \geqq 3$ に対して,

$$\sum_{n=3}^{N} f(n) < \int_2^N f(x)dx$$

が成り立つことを示せ. ただし必要ならば, $e < 3$ であることは証明なしで用いてよい.

(3) $f(x)$ の不定積分を求めよ.

(4) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ が収束することを示せ.

(金沢大 2012) (m20122206)

0.122 任意の x, y, z について

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x + y + 4z \\ -4x + 3y + 2z \\ -x + y + z \end{pmatrix}$$

となる $3 \times\ 3$ 行列 A を考える. 次の問いに答えよ.

(1) A を求めよ.

(2) A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\ \ (\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ と, それぞれに対応する長さ 1 の固有ベクトル p_1, p_2, p_3 を求めよ.

(3) B を A の逆行列, n を自然数とするとき, B^n の固有値を $\mu_1^{(n)},\ \mu_2^{(n)},\ \mu_3^{(n)}\ \ (\mu_1^{(n)} < \mu_2^{(n)} < \mu_3^{(n)})$ とおく. 数列 $a_n = \dfrac{\mu_1^{(n)}\mu_3^{(n)}}{\mu_2^{(n)}}\ \ (n = 1, 2, \cdots)$ に対して, 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束発散を調べよ. 収束する場合はその値を求めよ.

(金沢大 2015) (m20152201)

0.123 n を自然数とし, I_n を次の広義積分で定める. $I_n = \displaystyle\int_1^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx$

(1) I_1 の値を求めよ.

(2) $n \geq 2$ のとき, 次の漸化式が成り立つことを示せ. $I_n = \dfrac{1}{e} + (n - 1)I_{n-1}$

(3) 次式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ. $I_n = \dfrac{(n - 1)!}{e} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{k!}$

(4) 次の極限値を求めよ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \dfrac{I_n}{(n - 1)!}$

(金沢大 2016) (m20162214)

0.124 (1) 不等式 $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^3}} < \dfrac{\pi}{6}$ を示せ.

(2) n を自然数とする．広義積分

$$I_n = \int_1^\infty e^{1-t}\frac{1}{t^n}dt$$

は関係式

$$I_1 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k! + (-1)^{n+1}(n+1)!\, I_{n+2}$$

を満たすことを示せ.

(金沢大 2017)　　(m20172205)

0.125 $\{p_k\}_{k=1}^\infty$ を収束する単調増加数列とし，その極限値を p とする．自然数 $n=1,2,\cdots$ に対して，$\boldsymbol{R}$ 上の関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n}|x-p_k|$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ.

(1) $f_1(x)$，$f_3(x)$ の最小値を与える x を求めよ.

(2) $f_{2n+1}(x)$ の最小値を与える点を q_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n$ を求めよ.

(金沢大 2018)　　(m20182204)

0.126 n 次実正方行列全体の集合 $M(n,\boldsymbol{R})$ は, 行列の通常の和とスカラー倍のもとで実ベクトル空間になる. $T_r : M(n,\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$ を $A=(a_{ij}) \in M(n,\boldsymbol{R})$ に対して, $T_r(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ と定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) T_r は線形写像であることを示せ.

(2) T_r の核 $\mathrm{Ker}(T_r) = \{A \in M(n,\boldsymbol{R})\,|\,T_r(A)=0\}$ は $M(n,\boldsymbol{R})$ の部分空間になることを示せ.

(3) $\mathrm{Ker}(T_r)$ の次元を求めよ.

(富山大 2010)　　(m20102309)

0.127 $-1<a<1$ のとき，次の問いに答えよ.

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{inx}$ $(x \in R)$ は R 上一様に絶対収束することを示せ．ただし，i は虚数単位を表す.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx$ $(x \in R)$ の和を求めよ.

(富山大 2011)　　(m20112303)

0.128 次の級数の収束に関する主張は正しいか; 正しければ証明を与え，正しくなければ反例をあげよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束する $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束する $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ が絶対収束する.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ が絶対収束する $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束する.

(富山大 2012)　　(m20122309)

0.129 $\mathbb{N}$ を自然数全体の集合とする．$a_n \geq 0\ (n \in \mathbb{N})$ とし，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が実数 α に収束するとする．

このとき，全単射 $f\ :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対し $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = \alpha$ となることを示せ.

(富山大 2016)　　(m20162304)

0.130 (1) 次の定積分を示せ．m と n は整数とする．

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx dx = 0\ ,\quad \int_0^{2\pi} \cos nx dx = 0$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0\,(m \neq n) \\ \pi\,(m = n) \end{cases}$

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0\,(m \neq n) \\ \pi\,(m = n) \end{cases}$

(2) $x(t)$ を周期 T の周期関数とするとき，$x(t)$ を次のように書くことができる．

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2\pi k}{T}t + b_k \sin\frac{2\pi k}{T}t\right)$$

このとき，(1) の知見を活用し，$a_k\,(k \geq 0)$，$b_k\,(k \geq 1)$ を $x(t)$ を用いて表せ．

(福井大 2003)　　(m20032417)

0.131 極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x - x^2}{2 - 6x + 3x^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} i}{n^2 - 1}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{x^2}$

（福井大 2004）　　(m20042405)

0.132 表に示すように，xy 直交座標平面上に (x_i, y_i) $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ で表される 5 個の点がある．

$$\sum_{i=1}^{5}\{y_i - (ax_i + b)\}^2$$

を最小にする条件で，a と b を求め，5 個の点に対する近似直線を求めなさい.

i	x_i	y_i
1	2	3
2	3	4
3	6	5
4	9	5
5	10	8

(福井大 2004)　　(m20042421)

0.133 (1) 関数 $f(x) = \log(1 + x)$（ただし $x > -1$）の 1〜4 階の導関数（つまり $f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$，および $f^{(4)}(x)$ ）をそれぞれ求めよ．

(2) (1) の結果にもとづき, 上で定義された関数 $f(x)$ の n 階の導関数を推測し，$f^{(n)}(x)$ が実際に推測された関数で表現されることを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) (2) の結果を使い，関数 $f(x)$ のマクローリン展開（$x = 0$ でのテーラー展開）を，無限級数の和の形 $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\text{の形}\right)$ で求めよ，

(4) (3) の結果を用いて，関数 $g(x) = \log\left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)$（ただし $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$）のマクローリン展開を，無限級数の和の形で求めよ（経過を書く必要はあるが，証明の必要はなし）．

(福井大 2008)　　(m20082401)

0.134 数列の和の公式で (　　) の中に入る式を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(\qquad\Big) = n^3$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(\qquad\Big) = n \times 2^{n+1}$

(福井大 2010)　　(m20102412)

0.135 次式はマクローリン展開の一般式である.

$$f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad \text{ただし, } f^{(n)} \text{は } n \text{ 次導関数を示す.}$$

(1) $f(x) = e^x$ の $n = 4$ までのマクローリン展開を示すとともに, e の近似値を求めよ.

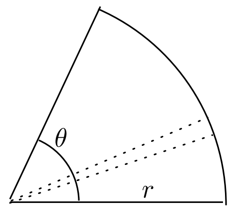
(2) $f(x) = \sin x$ および $f(x) = \cos x$ について, $n = 5$ までのマクローリン展開を示せ.

(3) 上の結果を利用して $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を示せ; ただし, $i^2 = -1$ である.

(福井大 2012)　　(m20122424)

0.136 右の扇形の半径 r と角度 θ を 3 回ずつ計測して表の結果を得た.
ただし, 角度の単位の 1 分 ($'$) は 1 度 ($^\circ$) の 1/60, 1 秒 ($''$) は
1 分 ($'$) の 1/60 を表すものとする.

r	$10.52m$	$10.54m$	$10.56m$
θ	$48^\circ\ 27'\ 21''$	$48^\circ\ 27'\ 28''$	$48^\circ\ 27'\ 23''$



(1) ある量の i 回目の観測値を x_i, n 回計測したときの最確値を $\overline{x}$ とするとき,
$\overline{x}$ は関数 $f(\overline{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ を最少化する値として算出されるとする. 最確値 $\overline{x}$ を求める式を誘導しなさい.

(2) (1) の結果を用いて半径と角度の最確値を求めよ.

(3) 角度の最確値を度 ($^\circ$) の単位で小数第 4 位までの小数で示せ. また, 同じ角度をラジアン単位で示せ. ただし, 円周率は π とする.

(4) (3) で求めた度の単位の角度の値から, もとの度分秒の単位で角度を表す方法の手順を説明しなさい.

(5) この扇形の面積を, 図に点線で示す微小な中心角を持つ扇形の集まりと考えた積分によって求めなさい.

(福井大 2013)　　(m20132418)

0.137 以下の行列 $\mathbf{S}$ に関する問いに答えよ. ただし, θ は実数である.

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\mathbf{S}$ を対角化せよ.

(2) n を自然数とし, $\mathbf{S}^n$ を求めよ.

(3) 行列 $\mathbf{S}$ 及び実数 x を用いた指数関数はそれぞれ以下の式で定義される.
$\exp(\mathbf{S})$ を計算せよ.

$$\exp(\mathbf{S}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{S}^n}{n!} \qquad\qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(福井大 2022)　　(m20222418)

0.138　$f(x) = e^{\sin x}$ のマクローリン展開を $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とするとき, 定数 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$ を求めよ.

(静岡大 2010)　　(m20102505)

0.139　次の関数 f のマクローリン (Maclaurin) 展開 $\left(f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)$ を求めよ.

(1) $f(x) = e^{x^2}$　　(2) $f(x) = \log(2+x) \quad (-2 < x < 2)$

(静岡大 2012)　　(m20122504)

0.140　下表のデータに対する最小 2 乗近似 1 次式を求めよ.

K	1	2	3	4	5
x_k	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
f_k	0.25	1.2	2.0	3.1	4.4

近似 1 次式は, $p(x) = a + bx$ とする.　誤差 $G \left(= \sum_{k=1}^{k=5} |f_k - p(x_k)|^2 \right)$ を最小にするように, 係数 a , 係数 b を決定せよ.

(岐阜大 2004)　　(m20042607)

0.141　自然数 m に対して

$$I(m) = \int_0^1 \frac{1}{x^m + 1}\,dx$$

と定める. 以下の問に答えよ.

(1)　定積分 $I(1)$, $I(2)$ の値を求めよ.

(2)　実数 $r \neq -1$, 自然数 N に対し,

$$\frac{1}{r+1} = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n r^n + \frac{(-1)^{N+1} r^{N+1}}{r+1}$$

となることを示せ.

(3)　級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

の値を求めよ.

(岐阜大 2015)　　(m20152601)

0.142　次の各問いに答えよ.

(1)　次の無限数列の一般項を示し，収束・発散を調べ，収束する場合にはその極限値を求めよ.

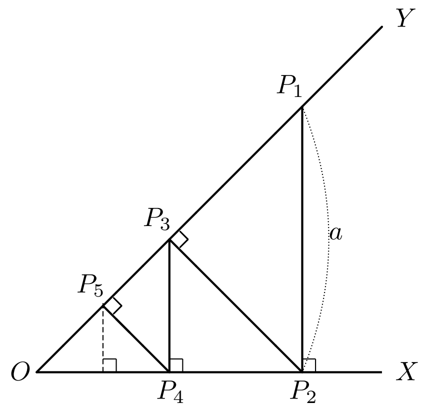
(a) $\frac{3}{1}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{11}{13}$, $\cdots\cdots$

(b) $\sqrt{2} - \sqrt{1}$, $\sqrt{4} - \sqrt{2}$, $\sqrt{6} - \sqrt{3}$, $\cdots\cdots$

(2)　図において，$\angle XOY = \pi/4$, P_1P_2 の長さを a とする．OY 線上の点 P_1 から，OX 線上に垂線を下ろした点を P_2 とする．さらに点 P_2 から OY 線上に垂線を下ろし，その点を P_3 とする．同様に順次 , P_4 , P_5 , $\cdots\cdots$ を無限にとるものとする．このとき，次の問いに答えよ.

(a) 垂線（線分）の和を級数で示せ.

(b) 垂線（線分）の和を求めよ.



(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$ を求めよ．

(豊橋技科大 1999)　　(m19992704)

0.143 xy 直交座標系の点列 (x_i, y_i) , $i = 1, \cdots, N$ に対し，各点からの垂直距離の 2 乗和が最小となるような直線を求めたい．次の各問いに答えよ．

(1) 次の文章中の空欄 $\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{コ}}$ に適当な数式を入れよ．
各点に単位質量を置いたときの重心を G とすると，その座標は

$$\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boxed{\text{ア}}\\ \boxed{\text{イ}}\end{pmatrix} \tag{1}$$

となる．xy 座標系に対し，この重心 G を原点として，角度 θ で回転させた uv 座標系を考える．
このとき

$$\begin{pmatrix}x'_i\\ y'_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_i\\ y_i\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} \tag{2}$$

とおけば，(x_i, y_i) と (u_i, v_i) との関係は θ を用いて

$$\begin{pmatrix}u_i\\ v_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}}\\ -\boxed{\text{エ}} & \boxed{\text{ウ}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_i\\ y'_i\end{pmatrix} \tag{3}$$

で与えられる．もし求めたい直線を u 軸にとれば，問題は

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^{N} v_i^2 \tag{4}$$

で定義される $J(\theta)$ を最小にする角度 θ を求めることに等しい．
式 (3) の v_i を θ で微分し，u_i を用いて表すと

$$\frac{\partial v_i}{\partial \theta} = \boxed{\text{オ}} \tag{5}$$

となるから，式 (4) を θ で微分して 0 とおけば

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = -2\sum_{i=1}^{N} u_i v_i = 0 \tag{6}$$

を得る．この式 (6) に，式 (3) を代入することにより，

$$\boxed{\text{カ}}\sum_{i=1}^{N} x'_i y'_i = \boxed{\text{キ}}\sum_{i=1}^{N}({x'_i}^2 - {y'_i}^2) \tag{7}$$

となり，次式を得る．

$$\frac{2\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}} = \frac{2\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x'_i y'_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N}({x'_i}^2 - {y'_i}^2)} \tag{8}$$

式 (8) の左辺は，倍角の公式により

$$\frac{2\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}} = \boxed{\text{ク}} \tag{9}$$

と書けるから，式 (8) は

$$\boxed{\text{ク}} = \frac{2\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x'_i y'_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} ({x'_i}^2 - {y'_i}^2)} \tag{10}$$

となる．よって，式 (10) の右辺を計算して，式 (4) を最小化する θ を求めればよい．

式 (4) を最小化する θ を $\hat{\theta}$ とし，求めたい直線が重心 G を通ることを用いれば，直線の式は

$$y = \tan\hat{\theta}\left(x - \boxed{\text{ケ}}\right) + \boxed{\text{コ}} \tag{11}$$

として与えられる．

(2) 4 点 $(-1,0)$, $(3,1)$, $(4,3)$, $(6,2)$ があるとする．

(a) これらの 4 点に単位質量を置いたときの重心 G の座標を求めよ．

(b) これらの 4 点に関し，$\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x'_i y'_i$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} {x'_i}^2$および$\displaystyle\sum_{i=1}^{N} {y'_i}^2$ を求めよ．

(c) これらの 4 点からの垂直距離の 2 乗和が最小となる直線の傾き θ を求めよ．ただし，分数は既約分数とし，三角関数およびその逆関数はそのままでよい（例：$\cos\frac{7}{4}\pi$や　$\sin^{-1}\frac{1}{3}$ など）．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062710)

0.144 確率変数 X が値 x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ をとり，$X = x_i$ となる確率を　$P(X = x_i) = p_i$　と表記するとき，以下の問いに答えよ．ただし，$P(X \geqq a)$ は X が a 以上の値である確率を表すとする．

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i$ の値を示せ．

(2) X の期待値 $E[X]$ と分散 $V[X]$ を x と p を用いて表せ．

(3) X の期待値を $E[X] = \mu$，分散を $V[X] = \sigma^2$ とする．任意の正数 k に対して次の式が成り立つことを示せ．　$\sigma^2 \geqq k^2 P(|X - \mu| \geqq k)$

(4) 確率変数 X の平均と分散がそれぞれ 50 と 9 であるとき，$P(40 < X < 60)$ に関してわかる事を述べよ．

(名古屋大 2004)　　(m20042804)

0.145 3 人がジャンケンを行い，一人だけが勝ったときに終了するものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 1 回で終了する確率を求めよ．

(2) ちょうど n 回目のジャンケンで，終了する確率 $P(n)$ を求めよ．

(3) n 回以内に終了する確率を求めよ．

(4) n 回以内に終了する確率が 50% 以上となる回数 n を求めよ．
ただし，$\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$, $\log_{10} 5 = 0.699$ とする．

(5) (2) の確率 $P(n)$ に回数を乗じ，これの N 回目までの和，すなわち，$\displaystyle\sum_{n=1}^{N} nP(n)$ を求めよ．

(6) (5) の N を無限大としたときの値を求めよ．

(名古屋大 2007)　　(m20072803)

0.146 (1) 級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n + 3}$ を求めよ．

(2) $\log(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{n} + \cdots$ ， $-1 < t \leq 1$ を利用して，
関数 $f(x) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+x}{3-x}\right)$ を $x-1$ のべき級数に展開せよ．

(名古屋工業大 2006)　　(m20062905)

0.147 無限級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+4}$ を求めよ。

(名古屋工業大 2011)　　(m20112906)

0.148 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ を $|x-1| < 1$ に対して

$$f(x) = \sum_{n=0}^{4} a_n (x-1)^n + R(x), \qquad \lim_{x\to 1}\frac{R(x)}{(x-1)^4} = 0$$

と表すとき，係数 a_n $(0 \leqq n \leqq 4)$ をすべて求めよ．

(名古屋工業大 2018)　　(m20182901)

0.149 (1) 表が出る確率が p の硬貨を n 回投げたとき，x 回表が出る確率 $f(x;p)$ を求めよ．

(2) $f(x;p)$ が最大となる p の値 p_0 を求めよ．

(3) p_0 の x に関する期待値を $E[p_0]$ と書くとき，$E[p_0] = p$ となることを示せ．
ただし，　$E[p_0] = \displaystyle\sum_{x=0}^{n} p_0 f(x;p)$　である．

(三重大 2003)　　(m20033116)

0.150 (1) 複素行列 $\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1，λ_2 を求めよ．
ここで，a，b，c，d は実数であり (ただし，$c \neq 0$)，$i^2 = -1$ である．

(2) λ_1，λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ を求め，エルミート内積 $(\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2) = \displaystyle\sum_{j=1}^{2} x_{1j}{}^{*} x_{2j}$ を計算せよ．ただし，x_{ij} は $\boldsymbol{x}_i$ の j 成分であり $(i,j=1,2)$，α^* は α の複素共役を表す．

(三重大 2005)　　(m20053110)

0.151 (1) 複素行列 $\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1，λ_2 を求めよ．ここで，a, b, c, d は実数であり（ただし，$c \neq 0$），$i^2 = -1$ である．

(2) λ_1，λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ を求め，エルミート内積 $(\boldsymbol{x}_1\ \ \boldsymbol{x}_2) = \displaystyle\sum_{j=1}^{2} x_{1j}^{*}\, x_{2j}$ を計算せよ．ただし，x_{ij} は $\boldsymbol{x}_i$ の j 成分であり $(i,j=1,2)$，α^* は α の複素共役を表す．

(三重大 2006)　　(m20063118)

0.152 次の極限および級数を求めよ．（ただし，答だけでなく，なぜそうなるのかの説明も必要である．）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-an}$　（ただし，$a > 0$）

(三重大 2008)　　(m20083103)

0.153 (1) $y = f(x)$ と 2 直線 $x = a$, $x = b$ と x 軸で囲まれる面積は，次式の定積分の定義により求めることができる．

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\triangle x$$

ただし，$f(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続とし，$\triangle x = (b-a)/n$, $x_k = a + k\triangle x$ とする．上記の積分の定義を用いて，$\displaystyle\int_0^1 xdx$ を求めなさい．ただし，導出過程も示すこと．

(2) 問 (1) の定積分の定義を用いて，

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ を求めなさい．

(三重大 2015)　　(m20153101)

0.154 以下の極限値を求めなさい．

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^5}\sum_{n=1}^{m} n^4$$

(三重大 2022)　　(m20223108)

0.155 n を 2 以上の自然数とし, 多項式 $f(x) = (x+1)^n$ と $g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ を考える.（ただし, c_k は定数）

(1) $f'(x)$, $g'(x)$, $f''(x)$ および $g''(x)$ を求めよ.

(2) $f'(0) - g'(0)$ および $f''(0) - g''(0)$ を求めよ.

（奈良女子大 2004）　　(m20043202)

0.156 以下の級数の収束，発散を判定せよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

(奈良女子大 2014)　　(m20143206)

0.157 関数 $f(z)$ を次のように定義する．

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{e^z - 1} & (z \neq 0) \\ 1 & (z = 0) \end{cases}$$

この関数は $|z| < 2\pi$ において解析的である．テイラー展開を

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n$$

のように表し，ベルヌーイ数 B_n，$n = 0, 1, 2, \cdots$ を定義する．$B_0 = 1$，$B_1 = -\frac{1}{2}$ を示せ．さらに，$(e^z - 1)f(z) = z$ のべき級数展開から，B_n が次の漸化式を満たすことを示せ．

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k = 0$$

ただし，$\displaystyle\binom{n}{k}$ は 2 項係数を表す．

(京都大 2002)　　(m20023305)

0.158 N を 0 または正の整数をとる確率変数とする．ポアソン分布では $N = n$ となる確率が次の分布関数で与えられる．

$$p(N = n) = a^n e^{-a}/n!$$

(1) ポアソン分布の平均値 $< n >= \sum_0^\infty np(N=n)$ が a となることを示せ.

(2) 面積 S の運動場に全部で M 粒の雨滴が落ちたとする．運動場の微少な部分（面積 A）に落ちた雨滴の数を L とするとき，その確率分布 $p(L=l)$ は $p=A/S$ として次の 2 項分布で与えられる．

$$p(L=l) = [M!/l!(M-l)!]p^l(1-p)^{M-l}$$

$a=(M/S)A$ を導入し，適切な極限を考えることにより 2 項分布からポアソン分布を導け．

(京都大 2002)　　(m20023307)

0.159 有限のシンボル集合 $A=\{a_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$, $B=\{b_j \mid j=1,2,\cdots,m\}$ を考え, 各シンボルの生起確率を $P(a_i)$, $P(b_j)$ とする. これらのシンボル集合に対して条件付き確率 $P(a_i/b_j)$, $P(b_j/a_i)$, 同時生起確率 $P(a_i,b_j)$ をもとにして, $H(A), H(B), H(A/B), H(A,B), I(A,B)$ を以下のように定義する.

$$H(A) = \sum_i^n P(a_i)\log\frac{1}{P(a_i)}$$

$$H(B) = \sum_j^m P(b_j)\log\frac{1}{P(b_j)}$$

$$H(A/B) = \sum_j^m\sum_i^n P(a_i,b_j)\log\frac{1}{P(a_i/b_j)}$$

$$H(A,B) = \sum_j^m\sum_i^n P(a_i,b_j)\log\frac{1}{P(a_i,b_j)}$$

$$I(A,B) = H(A) - H(A/B)$$

この時, 次の問に答えよ.

(1) $I(A,B) = \displaystyle\sum_j^m\sum_i^n P(a_i,b_j)\log\frac{P(a_i,b_j)}{P(a_i)P(b_j)}$ となることを示せ.

(2) $H(A,B) = H(A) + H(B) - I(A,B)$ となることを示せ.

(3) $I(A,B) \geq 0$ となることを示せ.

(京都大 2004)　　(m20043304)

0.160 ある事象の起こる確率 p が与えられているとき，n 回の独立試行を行って事象が k 回起こる確率を b_k とする（これをパラメータ n,p の二項分布という）．なお，以下の問いでは，$q=1-p$ として，次の二項定理を利用してよい．　$(px+q)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^n {}_nC_k p^k q^{n-k} x^k$

ここで，${}_nC_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ は二項係数である．

(1) 確率 b_k を記し，$\displaystyle\sum_{k=0}^n b_k = 1$ となることを示せ．

(2) 二項分布の平均値 μ と分散 σ^2 を求めよ．

(3) 事象が起こる回数を確率変数 r として，r に関するチェビシェフの不等式を次式で表す．

$$P(|r-\mu| \leq a\sigma) \geq 1 - \frac{1}{a^2}$$

ここで，a は適当な正の数である．試行回数を増やせば，事象の起こる割合は一定の値 p に近づくことを示せ．

(京都大 2006)　　(m20063303)

0.161 (1) 複素数 w に対して，級数

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=1}^{\infty}(-w)^{n-1}\ , \quad (|w|<1)\ \cdots ①$$

の両辺を $w=0$ から $w=z$ まで積分することで，複素関数 $\mathrm{Log}(1+z)$ を $z=0$ において，テイラー展開せよ．ただし，$\mathrm{Log}(1+z)$ は $-\pi < \mathrm{Im}\log(1+z) \leq \pi$ なる $\log(1+z)$ の主値を表す．級数 ① の項別積分可能性は明らかとしてよい．

(2) 任意の複素数 z について

$$\lim_{n\to\infty} n\mathrm{Log}\left(1+\frac{z}{n}\right) = z\ \cdots ②$$

を示せ．

(3) ② を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$ を示せ．

(京都大 2006) (m20063307)

0.162 複素関数

$$g(z) = \frac{1}{e^{iz}-1}$$

について, 以下の各問に答えよ.

(1) $g(z)$ の全ての極とその位数, 及び留数を求めよ.

(2) 適切に正の実数 a を選ぶと, $g(z)$ は $0<|z|<a$ において

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n z^n\ , \qquad c_n \in \mathbb{C} \qquad (n = m,\ m+1,\ m+2,\ \cdots)\ , \qquad c_m \neq 0\ , \qquad m \in \mathbb{Z}$$

の形にローラン展開できる. このような実数 a のうち, 最大のものを求めよ.

(3) (2) における整数 m と, 係数 $c_m,\ c_{m+1},\ c_{m+2}$ を求めよ.

(4) 次の積分を求めよ. ただし, 積分の向きは反時計まわりにとるものとする.

$$\int_{|z|=100} g(z)\,dz$$

(京都大 2010) (m20103308)

0.163 実数のパラメータ θ に依存する行列 $A(\theta)$ が

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{2}{3}\cos^2\theta & -\dfrac{2}{3}\cos\theta\sin\theta \\ -\dfrac{2}{3}\cos\theta\sin\theta & 1-\dfrac{2}{3}\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

で与えられている．$\mathbb{R}^2$ の点 $\boldsymbol{x}$ をデカルト座標系 $O-x_1x_2$ を用いて $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2)$ と表す．これらを用いて，集合 $\Omega(\theta)$ を

$$\Omega(\theta) = \{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\cdot A(\theta)\}\boldsymbol{x} \leq 1\}$$

と定義する．ここに，$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{2} x_i y_i$$

である．このとき，次の (1)〜(4) に答えよ．

(1) $A(\theta)$ のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化して単位ベクトルとせよ．

(2) $\Omega(\theta)$ の概形を描け．

(3) $\Omega(0) \cap \Omega(\pi/2)$ の面積を求めよ．

(4) $\displaystyle\bigcup_{0 \leq \theta \leq \pi/2} \Omega(\theta)$ を図示し，その面積を求めよ．ここに，$\boldsymbol{x} \in \displaystyle\bigcup_{0 \leq \theta \leq \pi/2} \Omega(\theta)$ とは，$0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$ なる θ_0 があって，$\boldsymbol{x} \in \Omega(\theta_0)$ となることである．

(京都大 2015)　　(m20153305)

0.164 次の (1)〜(6) に答えよ．ただし，log は自然対数を表す．

(1) k を自然数とし，$f(x)$ を $k \leq x \leq k+1$ で連続な狭義単調減少関数とする．このとき，不等式

$$\int_k^{k+1} f(x)dx < f(k)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n = 1, 2, \cdots$ に対して，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ とおく．$S_n > \log(n+1)$ が成り立つことを示せ．

(3) (2) で定義した S_n に対し，極限 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n$ を求めよ．

(4) $x > 1$ において関数 $g(x) = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は狭義単調減少であることを示せ．

(5) k を 3 以上の自然数とする．(4) で定義した関数 $g(x)$ に対し，不等式

$$g(k) < \frac{1}{\log(k-1)} - \frac{1}{\log k}$$

が成り立つことを示せ．

(6) $n = 2, 3, \cdots$ に対して，$T_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\log k)^2}$ とおく．極限値 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} T_n$ が存在することを示せ．

(京都大 2019)　　(m20193304)

0.165 (1) 自然数 $n = 1, 2, ...$ に対して $n! \geqq 2^{n-1}$ が成り立つことを示せ．

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ は収束して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leqq 2$ を満たすことを示せ．

(京都工芸繊維大 2001)　　(m20013404)

0.166 区間 $I = [-\pi, \pi]$ で連続な関数 $f(x)$ に対して

$$R(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \ , \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

とするとき，次の問に答えよ．

(1) $|a| < 1$ なる実数 a に対して

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a^j \cos jx$$

としたとき

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} R(k)$$

を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ が I で非負であるとき

$$|R(k)| \leq R(0)\ , \quad k=0,1,2,\cdots$$

が成り立つことを示せ.

(大阪大 1996)　(m19963502)

0.167 $I_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{(\sqrt{x})^{n-1}}{1+\sqrt{x}}dx$ に対し，

(1) I_0 , I_1 を求めよ.

(2) $I_n + I_{n-1}$ を求めて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ を示せ.

(3) (1),(2) より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2$ を証明せよ.

(大阪大 1997)　(m19973502)

0.168 (1) 関数 $f(x) = x^2$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\big)$$

とフーリェ級数展開したとき，$a_n(n \geqq 0)$, $b_n(n \geqq 1)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ を示せ.

(大阪大 2002)　(m20023506)

0.169 以下の設問に答えよ.

(1) $x>0$ の範囲で 3 つの関数 $f(x)=x-1$, $g(x)=\log x$, $h(x) = -\dfrac{1}{ex}$ を考える. ただし, $\log x$ は自然対数, e は自然対数の底である. すべての $x>0$ について, $f(x) \geqq g(x) \geqq h(x)$ を示せ.
また, $f(x) \geqq g(x)$, $g(x) \geqq h(x)$ の二つの不等式それぞれについて, 等式の成立する x の値を求めよ.

(2) $a_i > -1$ $(i=1,2,3,\cdots)$ をみたす任意の数列 $\{a_i\}$ と任意の n に対して,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) > -\frac{1}{e}$$

を示せ. ただし, $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)$ は n 個の実数 $1+a_1, \cdots, 1+a_n$ をかけた数を表す.

(3) $a_i = t$ $(i=1,\cdots,n,\ t>-1)$ のとき, $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)$ を最小にする t の値と最小値を n を用いて表せ.

(4) 設問 (2) の不等式で, 右辺の $-\dfrac{1}{e}$ をより大きな数（n によらない）に変えても, $a_i > -1$ $(i=1,2,3,\cdots)$ をみたす任意の数列 $\{a_i\}$ と任意の n に対して, この不等式が成立するか. 理由を付けて答えよ.

（大阪大 2004）　(m20043505)

0.170 関数 $f(x)$ を近似する三角多項式

$$P_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

の中で誤差

$$E_N = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (P_N(x) - f(x))^2\, dx$$

を最小にする

$$\{a_0\,,\ a_1\,, \cdots\,,\ a_N\,,\ b_1\,, \cdots\,,\ b_N\}$$

は $f(x)$ のフーリエ係数であることを示せ.

(大阪大 2005)　　(m20053510)

0.171　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{3^n}$ について，次の問に答えよ.

(1) 無限級数の第 N 部分和 $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{3^n}$ を求めよ.

(2) (1) で求めた第 N 部分和を用いて，S_N が収束するかどうか判定せよ．収束する場合は，収束値を求めよ.

必要があれば，$(1+a)^N = \displaystyle\sum_{j=0}^{N} {}_N C_j a^j \geq 1 + Na + \frac{N(N-1)}{2}a^2$ の関係を用いよ．但し，N は自然数，a は正の実数であるとする.

(大阪大 2006)　　(m20063502)

0.172　閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上で定義された，1 階連続微分可能（1 階導関数が存在して連続）な奇関数 $f(t)$ が与えられている.

(1) 実数列 $\{a_k\}$ を次のように定める：　$a_k := \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\ dt\,,\quad k = 1, 2, \cdots.$

このとき　$\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = 0$　を示しなさい．また　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2 < \infty$　であることを示しなさい.

(2) 上記 (1) で定めた実数列 $\{a_k\}$ に対して，　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt\ =\ \sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2$　が成立したとすると，

$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left| f(t) - \sum_{k=1}^{N} a_k \sin kt\right|^2 dt = 0$　となることを示しなさい．また，この逆も成立することを示しなさい.

(大阪大 2006)　　(m20063510)

0.173　次の無限級数の第 N 項までの部分和 $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n$ を求めよ．また，$\displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N = S$ として無限級数の和 S を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+3)} = \frac{1}{1\cdot2\cdot4} + \frac{1}{2\cdot3\cdot5} + \frac{1}{3\cdot4\cdot6} + \frac{1}{4\cdot5\cdot7} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+3)} + \cdots$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)r^n = 3r + 4r^2 + 5r^3 + 6r^4 + \cdots + (n+2)r^n + \cdots$

ただし，$|\,r\,| < 1$ とする．必要ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ なる関係を用いてもよい.

(大阪大 2007)　　(m20073505)

0.174　あるパーティで，n 人の参加者が 1 つずつプレゼントを持ち寄り，主催者がこれを集めて，帰りに n 人の参加者に 1 つずつランダムに配るものとする．このとき，自分が持ってきたプレゼントを持って帰る人が少なくとも 1 人出る確率を $Q(1, n)$ とする．参加者に 1 番から n 番までの番号をつける．i 番の参加者が自分のプレゼントを持ち帰るという事象を M_i とする.

(1) M_i が起こる確率を n の式で表せ.

(2) $i_1, i_2, \cdots, i_m$ をそれぞれ1以上 n 以下の相異なる m 個の整数とする. 事象 M_{i_1}, M_{i_2}, $\cdots$ M_{i_m} が同時に起こる確率を n と m の式で表せ.

(3) 事象 E が起こる確率を $P(E)$ と書く. 2つの事象 A_1 と A_2 が同時に起こる確率を $P(A_1 \cap A_2)$, A_1 と A_2 のうち少なくとも1つが起こる確率を $P(A_1 \cup A_2)$ と書く.

このとき $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ である. 一般に $N(\geqq 1)$ 個の事象 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ のうち少なくとも1つが起こる確率 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N)$ は

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N) = \sum_{l=1}^{N} (-1)^{l-1} S_l \tag{i}$$

$$\text{ここで } S_l = \sum_{k_1 < k_2 < \cdots < k_l} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \cdots \cap A_{k_l}) \tag{ii}$$

である. ただし, 式 (ii) の右辺の $\sum$ は, N 個の整数 $1, 2, \cdots, N$ の中から相異なる l 個の整数 $k_1, k_2, \cdots, k_l$ を選ぶあらゆる組み合わせについて和をとることを意味する. 特に $l = 1$ のときは $S_1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} P(A_j)$ である. 式 (i) を数学的帰納法で示せ.

(4) $Q(1, n) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{1}{j!}$ を示せ. (5) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} Q(1, n)$ を求めよ.

(大阪大 2007) (m20073508)

0.175 (1) 関数 $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ を $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ とフーリエ級数に展開したとき, a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, b_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ を示せ.

(大阪大 2007) (m20073511)

0.176 $|a| < 1$ とする. 以下の式を示せ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a^n \cos nx + a^2 \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx = 2a \cos x \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx$

ただし $\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2 \cos nx \cos x$ を用いよ.

(2) $1 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos x + a^2}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{1 - 2a \cos x + a^2}\, dx = \frac{\pi a^n}{1 - a^2}$

(大阪大 2008) (m20083506)

0.177 常微分方程式

$$4y''(x) + y(x)(4e^{2x} - 1) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{$*$}$$

を考える.

(1) $t = e^x$ と変換することによって $z(t) = y(\log t)$ に関する常微分方程式を導け.

(2) $z(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+\rho}$ $(\rho \in \mathbb{R},\ c_0 \neq 0)$ とおく. この級数を (1) で得られた常微分方程式に代入し係数比較することにより ρ と c_k $(k = 1, 2, \cdots)$ の間に成立する関係式を導け. また, $\rho = \pm 1/2$ を導け.

(3) $c_1 = 0$ とする. (2) で得られた関係式から c_k を定め, 基本解 $z_1(t)$, $z_2(t)$ を求めよ.

(4) $(*)$ の常微分方程式の基本解 $y_1(x),\ y_2(x)$ で

$$e^x(y_1(x)^2 + y_2(x)^2) = 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

を満たすものを一組求めよ.

(大阪大 2009)　　(m20093505)

0.178 自然数 n に対して

$$I_n(t) = \frac{1}{\pi^n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\left(\dfrac{t}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k\right)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+{x_k}^2\right)}\,dx_1\cdots dx_n \quad (t\in\mathbb{R})$$

とおく.

(1) 留数定理を用いて $I_1(t)$ を求めよ.

(2) $I_n(t)$ を求めよ.

(大阪大 2009)　　(m20093506)

0.179 閉区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x\sin x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

と定義する.

(1) $f(x)$ のフーリエ係数

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を求めよ.

(2) (1) で求めた a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ に対して,

$$\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2 = \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ.

(大阪大 2009)　　(m20093507)

0.180 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ の指数関数 $\exp(A)$ を求める. ただし, a, b および c は実数ある. また, E を単位行列として, 行列 A の指数関数 $\exp(A)$ を

$$\exp(A) = E + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n$$

のように定義する.

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.

(2) 行列 A は対称行列であるので, 適当な直交行列によって対角化される. 行列 A を対角化する直交行列の中で対称行列となる直交行列 P を 1 つ求めよ.

(3) 行列 A の指数関数 $\exp(A)$ を求めよ.

(4) $\exp(A)$ の行列式 $|\exp(A)|$ を求めよ.

(大阪大 2010) (m20103501)

0.181 自然数 n に対し, 以下のように定義される数列 $\{a_n\}$ について, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ.

ただし, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ ($|r| < 1$) を用いてもよい.

(1) $\displaystyle a_n = \sum_{k=n}^{2n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$　　(2) $\displaystyle a_n = \sum_{k=1}^{n+1} (k-2)\left(\frac{1}{2}\right)^k$

(大阪大 2010) (m20103502)

0.182 部品 A および部品 B 一つずつで構成される製品を製造する工場がある. 部品 A は確率 p $(0 < p < 1)$ で不良品であり, 部品 B は確率 q $(0 < q < 1)$ で不良品である. 部品 A および部品 B が不良品であるかどうかは独立である. また, 不良品は工場から出荷できないものとする. 工場で n 個の製品を製造したとする. 以下の設問に答えよ. なお, 必ず導出の過程を示すこと.

(1) n 個すべての製品を出荷できる確率を求めよ.

(2) n 個のうち m 個の製品を出荷できる確率 $P(m)$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\sum_{m=0}^{n} P(m)$ を求めよ.

(4) 出荷できる製品の個数の期待値 E を求めよ.

(5) $n = 1000$, $p = 0.01$, $q = 0.02$ として, 確率 $P(m)$ を最大化する m を求めよ.

(大阪大 2010) (m20103507)

0.183 関数 f を, 実軸上で定義された周期 1 の連続微分可能な実数値関数とする. この f に対して $\hat{f}(k)$ を

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 e^{-2\pi ikt} f(t)\,dt$$

と定義する. このとき, 複素数 z に対して

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} \hat{f}(k) \bar{z}^{|k|}$$

とおく.

(1) 任意の $r \in (0,1)$ に対して, $u(z)$ は $|z| \leq r$ で絶対かつ一様収束することを示せ.

(2) $u = u(z)$ は実数値関数で, $z = x + iy$ とするとき,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

となることを示せ.

(3) 任意の $r \in (0,1)$ に対して, $z = re^{2\pi i\theta}$ とするとき,

$$u(z) = \int_0^1 f(t) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(2\pi(\theta - t)) + r^2}\,dt$$

となることを示せ.

(大阪大 2010)　　(m20103509)

0.184 n が整数全体を動くとして, 級数が絶対収束する数列 $\{\alpha_n\}$ と $\{\beta_n\}$ を考える.
すなわち $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|$ と $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\beta_n|$ が収束するとする. これらの数列を用いて関数 $f,\ g$ を

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{2\pi inx}$$

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{2\pi inx}$$

とフーリエ展開する.

(1) $p(x) = f(x)g(x)$ を $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi inx}$ の形にフーリエ展開したときのフーリエ係数 c_n を求めよ.

(2) $q(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x-s)g(s)\,ds$ を $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{2\pi inx}$ の形にフーリエ展開したときのフーリエ係数 d_n を求めよ.

(大阪大 2010)　　(m20103510)

0.185 実数を成分に持つ, 対称かつ正定値な n 次正方行列を B とする. その (i,j) 成分を B_{ij} と書くことにする. n 次元実ベクトルを $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$, $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$ と表し, その内積を $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$ と定める（ ^{t} は転置を表す）. 行列 B の行列式を $\det B$, 逆行列を B^{-1} と表すことにする.

(1) 任意の実数 s と $b > 0$ に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ts} e^{-\frac{t^2}{2b}}\, dt = e^{\frac{bs^2}{2}}$$

(2) 任意の n 次元実ベクトル $\boldsymbol{y}$ に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det B}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\ dx_1\, dx_2\, \cdots\, dx_n = e^{\frac{1}{2}(B\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}$$

(3) $1 \leqq\ j, k \leqq\ n$ に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det B}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} x_j x_k e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\ dx_1\, dx_2\, \cdots\, dx_n = B_{jk}$$

(4) n 次正方行列 A に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det B}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} (A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\ dx_1\, dx_2\, \cdots\, dx_n = \mathrm{Tr}(AB)$$

ここで, $\mathrm{Tr}(AB)$ は行列 AB の対角成分の和を表す.

(大阪大 2010)　　(m20103511)

0.186 次に示す漸化式により帰納的に定められた数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，n は自然数を表す.

$$a_1 = 2\ ,\quad a_2 = 6\ ,\quad a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2$$

(1) 第 n 項が $b_n = a_{n+1} - a_n$ で与えられる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ

(3) 次の式で定義される和 S_n を求めよ.

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{a_m}$$

(4) $n \to \infty$ における S_n の極限値を求めよ.

(大阪大 2011)　　(m20113501)

0.187 $g(x)$ を周期 2π の連続関数とする．以下を示せ.

(1) $\displaystyle \lim_{m\to-\infty} \int_0^{2\pi} g(x) \sin mx \, dx = 0$

(2) 有限三角級数

$$p_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \ . \quad n = 1, 2, \cdots$$

に対して

$$\lim_{m\to-\infty} \int_0^{2\pi} g(x) p_n(mx) dx = a_0 \int_0^{2\pi} g(x) dx$$

(3) 上の $p_n(x)$ が $n \to +\infty$ で $p(x)$ に $[0, 2\pi]$ 上一様収束するとき

$$\lim_{m\to-\infty} \int_0^{2\pi} g(x) p(mx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(x) dx \cdot \int_0^{2\pi} g(x) dx$$

(大阪大 2011)　　(m20113510)

0.188 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ が，行列 $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$,　$A = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -11 & 4 \\ -30 & 11 \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \frac{1}{3^n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

と定義される．ここで n は自然数とする．以下の問いに答えよ.

(1) PAP^{-1} を求めよ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(3) 第 n 項が $c_n = 2^n b_n$ で与えられる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ.

(4) $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ならびに $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ を求めよ.

(大阪大 2012)　　(m20123501)

0.189 (1)

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{\pi} - \cos(x) \right) , \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

で定義された周期 2π を持つ関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\}$$

とフーリエ級数に展開したとき,

$$a_n, \ (n = 0, 1, 2, \cdots) , \ b_n, \ (n = 1, 2, \cdots)$$

を求めよ.

(2) (1) の結果を利用して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

の値を求めよ.

(大阪大 2012)　　(m20123510)

0.190 自然数 m, k に対して,

$$A_{m,k} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^m x \, \cos kx \, dx\,, \quad A_{0,0} = 2\pi$$

とおく.

(1) 任意の自然数 m, k に対して, 以下の等式を示せ.

$$A_{m,k} = \frac{1}{1+\frac{k}{m}} A_{m-1,k-1}$$

ただし, $\cos(k-1)x = \cos kx \cos x + \sin kx \sin x$ を用いてもよい.

(2) 自然数 m が与えられたとき, $\cos^{2m-1} x$ のフーリエ級数が

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_{2k-1} \cos(2k-1)x$$

の形で表されることを示し, フーリエ級数 a_{2m-1} を求めよ.
ただし, $\cos^{2m-1} x = (\cos x)^{2m-1}$ とする.

(大阪大 2013)　　(m20133507)

0.191 $\{f_k(x)\}_{k=1.2.\cdots}$ を閉区間 $I(\subset \mathbb{R})$ で定義された実数値連続関数の列とする. 二つの条件を考える.

条件 1 ： $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \Big| f_k(x) \Big| < \infty, \qquad x \in I$

条件 2 ： $\displaystyle\max_{x\in I} \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \to 0 \qquad (m, n \to \infty)$

条件 1 が満たされるとき, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は I において絶対収束するという. 条件 2 が満たされるとき, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は I において一様収束するという. 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x) = |x| \quad (x \in [-\pi,\ \pi])$ のフーリエ級数

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

を求めよ.

(2) (1) で求めた級数 $s(x)$ が $[-\pi, \pi]$ において絶対収束することを示せ.

(3) (1) で求めた級数 $s(x)$ が $[-\pi, \pi]$ において一様収束することを示せ.

(大阪大 2014)　　(m20143506)

0.192 N を自然数とする. ボタンを押下すると 1 から N までの整数の中から一つの数字をランダムに表示する機械がある. ボタンを離すと表示された数字は消える. それぞれの数字は等確率で表示される. ボタンの押下を n 回行い表示された数字を $X_1, \cdots, X_n$ とし, これらは互いに独立な確率変数とする. $T = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$ とおき, T を用いて N を推定したい. 事象 A の生起確率を $P(A)$ と書く. 以下の問いに答えよ.

(1) $P(T \leq t) = \left\{P(X_1 \leq t)\right\}^n \quad (t = 1, \cdots, N)$ を示せ.

(2) $P(T = t) \quad (t = 1, \cdots, N)$ を求めよ.

(3) 期待値 $E(T)$ が次式で与えられることを示せ.

$$E(T) = N - \sum_{t=1}^{N} \left(\frac{t-1}{N}\right)^n$$

(4) 次式を示せ.

$$\lim_{N \to \infty} \frac{E(T)}{N} = \frac{n}{n+1}$$

(大阪大 2014)　　(m20143507)

0.193 (1) α は整数でない実数とする．$\cos(\alpha x)$ $(-\pi < x < \pi)$ をフーリエ級数展開せよ．すなわち

$$\cos(\alpha x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\Big\}\,, \qquad -\pi < x < \pi$$

を満たす

$a_n\,,\quad n = 0, 1, 2, \cdots$

$b_n\,,\quad n = 1, 2, \cdots$

を求めよ.

(2) y は $\sin y \neq 0$ を満たす実数とする．(1) の結果を利用して

$$\frac{1}{\sin y} = \frac{1}{y} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left\{\frac{1}{y+n\pi} + \frac{1}{y-n\pi}\right\}$$

が成立することを示せ.

(大阪大 2016)　　(m20163506)

0.194 2 次元平面において，4 点 $(\sqrt{2}, 0)$, $(0, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(0, -\sqrt{2})$ で囲まれた菱形を考える．その内部において，ランダムに点 P をとる．P から最も近い菱形の周上の点を Q とし，PQ の長さを X とする．PQ の長さを求める操作を独立に n 回繰り返し，X_1, X_2, $\cdots$, X_n を得た．ただし n は自然数とする．以下の設問に答えよ.

(1) X の分布関数，すなわち，$F(x) = P(X \leq x)$ を求めよ.
また，$F(x) = \displaystyle\int_0^x f(y)dy$ を満たす確率密度関数 $f(x)$ も求めよ.

(2) PQ の長さの平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ の期待値 $E(\overline{X})$ を求めよ.

(3) 平均 $\overline{X}$ の分散 $V(\overline{X})$ を求めよ.

(大阪大 2016)　　(m20163507)

0.195 複素数 $z = x + iy$ について以下の問いに答えよ．ただし，x, y は実数，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする.

(1) 複素数 $1 + \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{99}$ の絶対値と偏角を求めよ.

(2) 曲線 C を放物線 $y = x^2 - 1$ の $z = -1$ から $z = 1$ に向かう曲線とする．このとき，複素関数 $f(z) = \overline{z} + z^2$ を C 上で積分せよ（$\overline{z}$ は z の共役複素数）.

(3) 複素数 $g(z) = \dfrac{1}{(z-1)(3-z)}$ において，中心が $z = 0$ のべき級数展開を求めよ．ただし，$|z| < 3$ とし，この範囲で収束するものをすべて求めること．なお，以下の幾何級数を用いてもよい.

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}\,, \qquad |z| < 1$$

(大阪大 2018)　　(m20183503)

0.196 (1) 次の (1-1),(1-2) で与えられる，周期 2π の関数のフーリエ級数をそれぞれ求めよ．すなわち，$f(x)$ が連続な点で

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\}$$

が成り立つような

$$\begin{aligned} &a_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots), \\ &b_n \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{aligned}$$

をそれぞれ求めよ．

(1-1)　$f(x) = \cos^2 x + \cos x$

(1-2)　$f(x) = x \quad (-\pi < x \leqq \pi)\,, \quad f(x + 2\pi) = f(x)$

(2) (1) の結果を利用して，等式

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

を示せ．

(大阪大 2019)　　(m20193510)

0.197 以下 n を与えられた自然数とする．

(1) 変量 z のデータ $z_1, \cdots, z_n$ の平均が 1，分散が 1 であるとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {z_i}^2$ の値を求めよ．

(2) 2 つの変量 x, y のデータ $x_1, \cdots, x_n$ および $y_1, \cdots, y_n$ がある．これらのデータの平均はともに 0，分散はともに 1 であり，$\gamma = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ に対して $\gamma > 0$ が成り立つとする．

与えられた実数 α, β に対し，　$d_i = \dfrac{|\alpha x_i + \beta - y_i|}{\sqrt{1+\alpha^2}}$　$(i = 1,\ \cdots,\ n)$　とおく．

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$ を α, β, γ, n で表せ．

(b) α を固定し β を変化させるときの $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$ の最小値を $m(\alpha)$ とする．$m(\alpha)$ を与える β を求めよ．

(c) α, β を変化させるときの $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$ の最小値を m とする．m を求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193511)

0.198 3 次の正方行列 $M = (m_{ij})$ に対して，対角成分の和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} m_{ii}$ を $\mathrm{tr}(M)$ で表すとする．

また，行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) (1) で求めた行列 A の 3 つの固有値を，それぞれ λ_1, λ_2, λ_3 とする．このとき，
$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$　　が成り立つことを示せ．

(3) 実数を成分とする 3 次の正方行列 B, C に対して，　$\mathrm{tr}(BC) = \mathrm{tr}(CB)$　が成り立つことを示せ．

(4) 実数を成分とする 3 次の正方行列 D は，互いに異なる実数の固有値 μ_1, μ_2, μ_3 を持つとする．このとき，　$\mathrm{tr}(D) = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$　が成り立つことを示せ．

(大阪大 2020)　　(m20203506)

0.199 (1) $z = (1+i)^n - (1-i)^n$ とするとき, $|z|$ を求めよ. ただし, i を虚数単位 $(i^2 = -1)$, n は自然数とする.

(2) i を虚数単位 $(i^2 = -1)$, $z_m = e^{-imx}$ とするとき $\displaystyle \left| \sum_{m=0}^{n-1} z_m \right|^2 = \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}$ となることを示せ.

ただし, m, n は整数, x は実数である.

(大阪府立大 2005)　　(m20053603)

0.200 $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ であることを証明せよ.

(神戸大 2000)　　(m20003801)

0.201 $f(x), g(x)$ を何回でも微分可能な関数とする．このとき

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

を証明せよ．ここで，$h^{(l)}(x)$ は関数 $h(x)$ の l 階導関数を表す.

(神戸大 2003)　　(m20033802)

0.202 (1) n を自然数とするとき， $\displaystyle \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n} > \frac{1}{2}$ が成り立つことを示せ.

(2) 上のことを使って， $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ が成り立つことを示せ.

(神戸大 2004)　　(m20043801)

0.203 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく．このとき，次の各問に答えよ.

(1) $n = 1, 2, \cdots$ に対して，A^n を求めよ．（答えのみでよい）.

(2) $\displaystyle S_n = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^k A^k}{k!}$ とおくとき，$\displaystyle \lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ.

(神戸大 2009)　　(m20093806)

0.204 $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=0,1,\cdots}$ を次式によって帰納的に定義する:

$$\begin{cases} f_0(x) = 1\,, \\ f_{n+1}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x t\, f_n(t)\, dt\,, \quad n = 0, 1, \cdots \end{cases}$$

このとき，$\displaystyle f_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{2^k\, k!}$ 　$n = 1, 2, \cdots$ となることを数学的帰納法によって示せ.

(神戸大 2009)　　(m20093807)

0.205 x_1, x_2, x_3 を未知変数とする連立方程式 (A)

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j + a_{i4} = 0\,, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

を考える. ここで $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

(1) $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ の時, この連立方程式 (A) の解をすべて求めよ.

(2) $a_{i1} = 1$, $a_{i2} = (-1)^i$, $a_{i3} = u^{i-1}$ $(1 \le i \le 4)$ および $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 1$, $a_{44} = u$ の時, この連立方程式 (A) が解をもつような実数 u の値をすべて決定せよ.

(3)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

の時, 連立方程式 (A) が解をもつ必要十分条件を a_{ij} を用いて表せ.

(神戸大 2010)　　(m20103802)

0.206　$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を正数からなる数列で，不等式

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成立するものとする．この時，以下の問いに答えよ．

(1)　全ての自然数 n について $a_n \leq \dfrac{a_1}{n^2}$ となることを示せ.

(2)　級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することを示せ.

(神戸大 2011)　　(m20113803)

0.207　以下の問に答えよ．

(1)　級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散することを示せ.

(2)　m 桁の自然数のうちで，0 の文字が入らないものの個数を答えよ．例えば $m = 3$ のときなら，$111, 112, 113, \cdots, 119, 121, \cdots, 999$ の個数で，9^3 である．

(3)　(1) の和から n に 0 の文字が入った項，例えば，$\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{20}, \cdots, \dfrac{1}{100}, \dfrac{1}{101}, \cdots$ などを抜いた級数を $\boldsymbol{S}$ とする．すなわち，

$$\boldsymbol{S} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \cdots$$

このとき，$\boldsymbol{S}$ は収束することを示せ.

(神戸大 2012)　　(m20123806)

0.208　正の整数 n と実数 $c, y_1, y_2, \cdots, y_n$ に対し，$D_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ を

$$D_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n) = \det \begin{bmatrix} y_1y_1 + c & y_2y_1 & \cdots & y_ny_1 \\ y_1y_2 & y_2y_2 + c & \cdots & y_ny_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1y_n & y_2y_n & \cdots & y_ny_n + c \end{bmatrix}$$

で定義し，また $n \geq 2$ のとき $d_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ を

$$d_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n) = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2y_1 & \cdots & y_ny_1 \\ y_2 & y_2y_2 + c & \cdots & y_ny_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & y_2y_n & \cdots & y_ny_n + c \end{bmatrix}$$

で定義する．ただし，$\det A$ は行列 A の行列式を表す．このとき以下の問いに答えよ．

(1)　$n \geq 2$ のとき次の等式が成り立つことを示せ.

$$D_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n) = cD_{n-1}(c, y_2, \cdots, y_n) + y_1 d_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

(2) $n \geq 2$ のとき $d_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n) = c^{n-1}y_1$ であることを示せ.

(3) n についての数学的帰納法により次の等式が成り立つことを示せ. (ただし $0^0 = 1$ とする.)

$$D_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n) = c^n + c^{n-1}\sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

(神戸大 2014) (m20143806)

0.209 z は $|z| = 1$, $z \neq 1$ を満たす複素数とする. このとき, 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n} + \cdots \qquad (*)$$

が(ある複素数に)収束することを示したい. 以下の問いに答えよ. 非負整数 n に対し $S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k$ とおく.

(1) 非負整数 n に対し $|S_n| \leq \dfrac{2}{|1-z|}$ であることを示せ.

(2) $m > n$ であるような正の整数 m, n に対し次が成り立つことを示せ.

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{z^k}{k} = \sum_{k=n}^{m-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{S_m}{m} - \frac{S_{n-1}}{n}$$

(3) (1),(2) を用いて, 以下の条件 (C) が成り立つことを示せ.

任意の正の実数 ε に対し, 正の整数 N が存在して,
$m > n \geq N$ であるような任意の整数 m, n に対して
$\left|\sum_{k=n}^{m-1} \dfrac{z^k}{k}\right| < \varepsilon$ が成り立つ. (C)

(コーシーの収束条件定理によれば, 条件 (C) は級数 $(*)$ の収束と同値であるため, (3) より級数 $(*)$ の収束が証明できることになる.)

(神戸大 2014) (m20143810)

0.210 実係数行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+t^2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

について, 次の問に答えよ.

(1) A^2, A^3, A^4 を求めよ.

(2)

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$$

を $B_n = x_nE + y_nA$ とするとき,

$$B = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)E + \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)A$$

を求めよ. ここで E は単位行列を表す.

(3) $B = E$ を満たすような t を求めよ.

(神戸大 2015) (m20153803)

0.211 実数 $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$f_n(x) = \min_{k\in\mathbb{Z}} \left| x - \frac{k}{2^n} \right|$$

と定義する．$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合である．次の問に答えよ．

(1) 関数 f_0，f_1，f_2 のグラフの概形を書け．

(2) 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して級数

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \qquad (*)$$

は収束することを示せ．

(3) $(*)$ で与えられる $x \in \mathbb{R}$ の関数 $S(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを示せ．

(神戸大 2015)　　(m20153807)

0.212 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ に対して，$B = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} kA^{k-1}$ とする．ただし，A^0 は単位行列 E を表すものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) B を求めよ．

(2) $(E-A)^2B$ を計算せよ．

(神戸大 2016)　　(m20163802)

0.213 $D_0(x) \equiv 1,\ D_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2\cos kx\ (n \geq 1)$，$F_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x)\ (n \geq 0)$ で $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{D_n\}$ と $\{F_n\}$ を定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $D_n(x)\sin\frac{x}{2} = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x$ となることを示せ．

(2) $F_n(x)\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2(n+1)}\Big\{1-\cos(n+1)x\Big\} = \frac{1}{n+1}\sin^2\frac{n+1}{2}x$ となることを示せ．

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)dy = 2\pi$ となることを示せ．

(4) $0 < \delta < \pi$ なる δ に対して $\lim_{n\to\infty}\int_{\delta\leq|y|\leq\pi} F_n(y)dy = 0$ となることを示せ．

(神戸大 2016)　　(m20163805)

0.214 x, y の 2 変数関数 $f(x,y)$ に対し，

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

と定める．$f(x,y)$ が次の関数のときに $\triangle f$ を求めよ．ただし，以下において，i は虚数単位である．

(1) $f(x,y)$ は $(x^2 - iy^2)(1+i) + e^{x+iy}$ の実部．

(2) $f(x,y)$ は $\frac{1}{x+iy}$ の虚部．

(3) $f(x,y) = 7x^6y - 35x^4y^3 + 21x^2y^5 - y^7$

(4) $f(x,y) = \sum_{k=0}^{20}(-1)^k \begin{pmatrix} 40 \\ 2k \end{pmatrix} x^{40-2k}y^{2k}$

(神戸大 2023)　　(m20233803)

0.215 n 回連続微分可能な関数 $f(x)$ は x が 0 に近い範囲では

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

で近似することができる（ $f^{(n)}(0)$ は $f(x)$ を n 回微分し $x=0$ としたもの ） これを利用して, 以下の関数の 5 次の近似式の $a_0, \cdots, a_5$ と $b_0, \cdots, b_5$ を求めよ.

$$e^x \text{ の近似式} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$$

$$\cos x \text{ の近似式} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5$$

(鳥取大 2005)　　(m20053905)

0.216 確率変数 N はポアソン分布　$P(N=n) = \dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

に従うとする. このとき, N の期待値を求めなさい（ 注意 ： $e^{\lambda} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$ が成り立つ ）

(鳥取大 2007)　　(m20073922)

0.217 $f(x) = \cos(x)$ は x が十分小さい範囲で,

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{4} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{1}$$

と 4 次式近似できる. ただし $f^{(n)}(x)$ は n 次導関数とする. これについて, 以下の問に答えよ

(1) $f(x)$, $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$ を計算し, 式 (1) 右辺の具体的関数形を書け.

(2) 関数 $g(x)$

$$g(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2} \tag{2}$$

について, (1) で求めた $\cos(x)$ の近似式を用いることで, $g(x)$ の近似式を求めよ.

(3) (2) で得られた近似式より, $g(0.1)$ の近似値を計算せよ. 必要なら $1/24 \approx 0.042$ を用いて良い.

(鳥取大 2010)　　(m20103903)

0.218 区間 $[0, \infty)$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対する広義積分

$$\int_0^{\infty} f(x)e^{-sx}dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^{M} f(x)e^{-sx}dx \quad (s > 0)$$

を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) 自然数 n に対して,

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-sx}dx = \frac{n}{s}\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-sx}dx$$

が成り立つことを示せ.

(2) 非負の整数 n に対して, $\displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-sx}dx$ の値を求めよ.

(3) $s > 1$ のとき,

$$\int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}e^{-sx}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}e^{-sx}dx$$

が成り立つことを示せ.

(岡山大 2009)　　(m20094002)

0.219 ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n$ について以下の問いに答えよ.

(1) 収束半径 r を求めよ.

(2) $|x| < r$ に対して

$$f(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n$$

とする．第 2 次導関数 $f''(x)$ を x の有理式で表せ.

(3) $f(x) = (1-x)\log(1-x) + x - \dfrac{x^2}{2}$ を示せ.

(岡山大 2014)　　(m20144001)

0.220 (1) 不等式 $0 \leqq \ t - \log(1+t) \leqq \dfrac{t^2}{2} \quad (t \geqq \ 0)$ が成り立つことを示せ.

(2) 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

は $K = 1$ のときに発散し，$k = 2$ のとき収束することを示せ.

(3) 全ての $x > 0$ に対して，級数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

は発散することを示せ.

(4) 全ての $x \geqq \ 0$ に対して，級数

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\log\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right\}^2$$

は収束することを示せ.

(岡山大 2015)　　(m20154002)

0.221 関数 $f(x)$ を　$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$　で定める．以下の問いに答えよ.

(1) e^x のマクローリン展開を書け.

(2) $a_k \ (k = 0, 1, 2, \cdots)$ を　$f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$　により定める．$a_k \ (k = 0, 1, 2, \cdots)$ の値を求めよ.

(3) $f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ で表す．$f^{(99)}(0)$ を求めよ.

(4) 広義積分　$\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$　が収束するか発散するかを判定せよ.

(岡山大 2016)　　(m20164002)

0.222 (1) 関数 $g(x) = \sqrt{1+x}$ のマクローリン展開は

$$g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1} n} \begin{pmatrix} 2n-2 \\ n-1 \end{pmatrix} x^n$$

であることを示せ．ただし，$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ とする．また，右辺の無限級数の収束半径は 1 であることを示せ.

(2) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

で定めるとき，$f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} x^n$$

であることを示せ.

(3) 上の問い (2) の $f(x)$ のマクローリン展開について，その収束半径を求めよ.

(岡山大 2017)　　(m20174001)

0.223 (1) 次の積分を計算せよ．ただし，n, m は自然数である．

$$\int_{-1}^{1} x \sin n\pi x dx \qquad \int_{-1}^{1} \sin n\pi x \sin m\pi x dx$$

(2) 次の等式を示せ.

$$\int_{-1}^{1} \left\{ x - \sum_{k=1}^{n} \frac{2(-1)^{k-1}}{k\pi} \sin k\pi x \right\}^2 dx = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

(広島大 2001)　　(m20014102)

0.224 (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqq 1 + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$ を示せ.

(2) 正の実数 x に対し，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right)$ が収束することを示せ.

(3) 正の実数 x に対し $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right)$ とおく．r を正の整数とするとき $\displaystyle f(r) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{r-1} + \frac{1}{r}$ を示せ.

(広島大 2003)　　(m20034105)

0.225 (1) P は $P^2 = P$ を満たす $n \times n$ 実行列とする. $Q = I - P$ とおくと, 次を満たすことを示せ.

$$PQ = QP = O \qquad Q^2 = Q$$

(2) (1) の P, Q に対して $V = \{P\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$, $W = \{Q\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$ とおく. このとき, $\mathbb{R}^n$ は V と W の直和に分解される, すなわち, 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \qquad \boldsymbol{v} \in V\,, \quad \boldsymbol{w} \in W$$

と一意的に表されることを示せ.

(3) (2) における V と W の任意の元は $\mathbb{R}^n$ の内積

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

に関して互いに直交しているとする. このとき, P は対称行列であることを示せ.

(広島大 2005)　　(m20054106)

0.226 $\mathbb{R}^n$ に属する m 個のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ に対して，次の命題 $(*)$ が真であるとき $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ は 1 次独立であるといい，偽であるとき $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ は 1 次従属であるという。

$(*)$「 $c_1, \cdots, c_m \in \mathbb{R}$ が $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{0}$ を満たせば $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ となる」

(1) 命題 $(*)$ の否定命題を述べよ．

(2) 次で与えられるベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ が 1 次独立であるか，1 次従属であるかを判定せよ．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(3) A は相異なる実数の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ をもつ 3 次の実正方行列で，$\boldsymbol{e}_j \neq \boldsymbol{0}$ $(j = 1, 2, 3)$ は λ_j に対応する固有ベクトルとする．このとき，$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ．

(広島大 2006)　　(m20064102)

0.227 次の問に答えよ．ただし，log は自然対数を表す．

(1) 2 以上の自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \log n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ が成り立つことを示せ．

(2) 実数 $x > -1$ に対して不等式 $\log(1+x) \leqq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ が成り立つことを示せ．

(3) 自然数 n に対して $\gamma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$ と定めると，$\gamma_n > 0$ であり，$\{\gamma_n\}$ は単調減少数列になることを示せ．

(広島大 2006)　　(m20064103)

0.228 以下の問いに答えよ.

(1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ が発散することを示せ.

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$ の収束・発散を調べよ.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log(1+x)} \right)$ を求めよ.

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ を求めよ.

(広島大 2012)　　(m20124102)

0.229 以下の問いに答えよ.

(1) e^x の $x = 0$ のまわりでのテイラー展開

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

の係数 a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を書け,（答だけでよい）

(2) k を自然数とするとき，$\displaystyle\lim_{t\to +0} t(\log t)^k = 0$ であることを示せ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \log x\, dx$ の値を求めよ.

(4) 自然数 k に対して，広義積分 $I_k = \displaystyle\int_0^1 (\log x)^k \, dx$ の値を求めよ.

(広島大 2013)　　(m20134110)

0.230 実数列 $\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体のなす実ベクトル空間を V とし，級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} {a_i}^2$ が収束するような実数列 $\{a_n\}$ 全体の集合を W とする．以下の問いに答えよ.

(1) W が V の部分ベクトル空間をなすことを示せ.

(2) $\{a_n\}$, $\{b_n\} \in W$ に対して，級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ が絶対収束することを示せ.

(3) $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ は W 上の内積であることを示せ.

(4) $a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, $b_n = \left(\dfrac{5}{7}\right)^n$ のとき，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の交角 θ を求めよ．ただし，内積空間の元 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対してノルムを $||\boldsymbol{a}|| := \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$ と書くとき，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の交角とは $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ||\boldsymbol{a}|| \, ||\boldsymbol{b}|| \cos\theta$ を満たす実数 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ のことである.

(広島大 2014)　　(m20144109)

0.231 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{4}{a_n + 4}$ で定義される数列について，以下の問いに答えよ.

(1) 任意の自然数 n に対して，$\dfrac{4}{5} \leq a_n \leq 1$ を示せ.

(2) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とする．級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ が収束することを示せ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示し，極限値を求めよ.

(広島大 2015)　　(m20154104)

0.232 逆正弦関数 $f(x) = \sin^{-1} x$ を考える．ただし，f の値域は閉区間 $[-\pi/2, \pi/2]$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) 開区間 $(-1, 1)$ において f の導関数 f' を求めよ.

(2) $n = 0, 1, 2, \cdots$ と $-1 < x < 1$ に対して，

$$(1 - x^2) f^{(n+2)}(x) = (2n+1) x f^{(n+1)}(x) + n^2 f^{(n)}(x)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$f^{(n)}$ は f の n 次導関数を表す.

(3) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，$\dfrac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n)!} = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ であることを示せ．ただし，$0! = 1$ とする.

(4) F は開区間 $(-1, 1)$ 上の C^{∞} 級関数とする．自然数 N と $N+1$ 個の実数 a_0, a_1, $\cdots$, a_N に対して，$g_N(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k x^k$ と定める．ただし，$x^0 = 1$ とする．このとき，

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - g_N(x)}{x^N} = 0$$

となるための必要十分条件は，$a_k = \dfrac{F^{(k)}(0)}{k!}$ $(k = 0, 1, \cdots, N)$ であることを示せ.

(5) 自然数 N に対して，$S_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(2k)! \, (2N-2k)!}{(k!)^2 \big((N-k)!\big)^2}$ を求めよ.

(広島大 2016)　　(m20164104)

0.233 (1) n を自然数として，$\sin x$ の n 次導関数が $\sin(x+a_n)$ となるような実数 a_n を一つ求めよ.

(2) 数列 $\left\{b_k\right\}_{k=0}^{\infty}$ が存在して，任意の実数 x と任意の自然数 n に対して

$\left|\sin x - \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k\right| \leqq \dfrac{|x|^n}{n!}$　が成り立つ．b_k を求めよ.

(3) $0.841 < \sin 1 < 0.842$ であることを示せ.

(4) $\sin 1$ は無理数であることを示せ.

(広島大 2017)　　(m20174104)

0.234 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots$ を零ベクトルでない k 次元実列ベクトルとし，k 次実対称行列 M_n $(n=1,2,\cdots)$ を

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i {}^t\boldsymbol{a}_i$$

で定義する．ここで，^{t} は転置を表す記号である．以下の問いに答えよ．ただし，任意の実対称行列は直交行列により対角化可能であることは用いてよい.

(1) α_n を行列 M_n の $(1,1)$ 成分とする．数列 $\{\alpha_n\}$ が広義の単調増加列，すなわち，$\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_n \leqq \cdots$ となることを示せ.

(2) M_n の固有値はすべて非負の実数であることを示せ.

(3) λ_n を M_n の最小固有値とする．$S = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k \mid {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} = 1\right\}$ に対し,

$$\min_{x \in S} {}^t\boldsymbol{x} M_n \boldsymbol{x} = \lambda_n$$

を示せ.

(4) (3) で定義した λ_n に対して，数列 $\{\lambda_n\}$ が広義の単調増加列となることを示せ.

(5) (1) で定義した α_n と (3) で定義した λ_n に対して，$\{\alpha_n\}$ が上に有界であれば，$\{\lambda_n\}$ は収束することを示せ.

(広島大 2017)　　(m20174105)

0.235 非負整数 n に対し,

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

と定める．ただし，$0! = 1$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) x を実数とする．級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

は $4|x| < 1$ のとき絶対収束し，$4|x| > 1$ のとき発散することを示せ.

(2) $4|x| < 1$ 満たす実数 x に対し,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

と定める．このとき,

$$(1-4x)f'(x) = 2f(x)$$

が成り立つことを示せ．ここで，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す.

(3) $4|x| < 1$ 満たす実数 x に対し,

$$\sqrt{1-4x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$$

が成り立つことを示せ.

(4) 級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}$$

は ∞ に発散することを示せ.

(広島大 2021)　　(m20214105)

0.236 $f(x) = \tan^{-1} x$ のとき, 次の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の導関数を求めよ.

(2) 次の等式を数学的帰納法により証明せよ. ただし, $y = f(x)$ とする.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (n-1)!\cos^n y \sin\left(ny + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(3) $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ とすると, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$f^{(2m)}(0) = 0\,, \quad f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m (2m)! \qquad (m = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

(4) 関数 $f(x)$ をマクローリン展開せよ.

(5) 次の等式を証明せよ.

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1}$$

(山口大 2005)　　(m20054311)

0.237 一般項が $a_n \geqq 0$ の級数（正項級数）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して, 次を示せ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ および $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ は収束する.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ が収束するとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ が収束しても $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しないことがある. その具体的な例を示せ.

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束, 発散に関係なく $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$ は収束する.

（徳島大 2004）　　(m20044401)

0.238 実数 x の関数 $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ について，次の各問いに答えなさい.

(1) 等式 $S_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ が成り立つことを示しなさい.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ が収束する x の範囲を求めなさい.

(3) $S_n(x)$ の導関数 $S_n'(x)$ を求めなさい.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n'(x)$ が収束する x の範囲を求めなさい.

（高知大 2001）　　(m20014503)

0.239 $f(x)$ を閉区間 $I=[a,b]$ 上の連続関数とする. I 上に $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n$ を

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

となるように選び, I の分割と呼び Δ で表す. また

$$|\Delta|=\max_{1\leq i\leq n}(x_i-x_{i-1})$$

とする. さらに $x_{i-1}\leq\xi_i\leq x_i$ を満たす ξ_i をとり, $\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$ をこの分割の代表系と呼び, $\xi(\Delta)$ で表す. このとき

$$S(f,\xi(\Delta))=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

を分割 Δ とその代表系 $\xi(\Delta)$ に関するリーマン和と呼ぶ. 任意の分割の列と任意の代表系に対して

$$\lim_{|\Delta|\to 0}S(f,\xi(\Delta))$$

が一意に存在する. その極限 S を $f(x)$ の I における積分といい

$$\int_a^b f(x)dx=S$$

とかく. この定義を用いて次の問に答えよ. ただし, 以下において $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で正値連続な関数とし

$$f_{in}=f(a+i\delta_n), \qquad \delta_n=\frac{b-a}{n}$$

とする.

(1) 次の式を示せ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{1n}+f_{2n}+\cdots f_{nn}}{n}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

(2) 次の式を示せ.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f_{1n}f_{2n}\cdots f_{nn}}=\boldsymbol{e}^{\frac{1}{b-a}\int_a^b\log f(x)dx}$$

(3) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)}$$

(高知大 2005) (m20054501)

0.240 べき級数 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ を考える. 次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の項別微分を求めよ.

(2) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ は収束することを示せ.

(3) $f(x)$ は開区間 $(-1,1)$ で収束することを示せ.

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}f(x)dx$ の値を求めよ.

(高知大 2011) (m20114502)

0.241 線形写像 $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i=\begin{pmatrix}\delta_{i,1}\\ \delta_{i,2}\\ \delta_{i,3}\\ \delta_{i,4}\end{pmatrix}$ に対して $f(\boldsymbol{e}_i)=\displaystyle\sum_{k=1}^{i}i\boldsymbol{e}_k$ となっている. ただし, $\delta_{i,j}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$ である. このとき次の問いに答えよ.

(1) $f(\boldsymbol{e}_4)$ はどんなベクトルか，成分表示せよ．

(2) $f(\boldsymbol{e}_1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)$, $f(\boldsymbol{e}_3)$, $f(\boldsymbol{e}_4)$ は 1 次独立であることを示せ．

(3) $\mathbb{R}^4$ の基底を $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_4$, $\boldsymbol{e}_4$ とするとき．f の表現行列 A を求めよ．

(4) A は正則であることを示せ．

(5) f の逆写像はあるか．あれば求め，無ければその理由を述べよ．

(高知大 2011)　　(m20114504)

0.242 次の問いに答えよ．

(1) 実数 s に対して，不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{s+x}dx$ を求めよ．

(2) 正の整数 n と正の実数 t に対して　$f_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{t+\frac{k}{n}}$　とおく．
t を固定したとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(t)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた極限を $f(t)$ とおく．$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{f(t)}{\log(1-e^{-t})}$ を求めよ．

(高知大 2015)　　(m20154501)

0.243 正の整数 n と実数 $x<1$ に対して，$\displaystyle R_{n+1}(x) = \log(1-x) + \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}$ とおく．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{R_{n+1}(x)}{x^{n+1}}$ の値を求めよ．

(2) $|x|<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{R_4(x)}{\dfrac{1}{1-x^2}-1-x^2}$ の値を求めよ．

(高知大 2019)　　(m20194501)

0.244 $0<a<1$ とする．

(1) $\displaystyle\int_a^1 \log x dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_a^1 \log x dx$ を求めよ．ただし，計算途中で不定形の極限ができた場合，その計算過程も明記すること．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log k - \log n\right)$ を求めよ．

(愛媛大 2000)　　(m20004602)

0.245 $a>0$ とし，$\displaystyle x_n = \left(\frac{a}{1+a}\right)^n$, $n=1,2,\cdots$ とする．

(1) $\{x_n\}$ は有界な単調減少数列であることを示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ の値を求めよ．　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x_n$ の値を求めよ．

(愛媛大 2006)　　(m20064608)

0.246 (1) 次の不定積分を計算せよ．ただし，$x>0$ で n は自然数とする．　$\displaystyle\int x^n \log x\, dx$

(2) 次の定積分を計算せよ．　$\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\, dx$

(3) 3 点 $A=(-x_1, x_2, 0),\ B=(0, x_2, x_3),\ C=(x_1, 0, x_3)$ を頂点とする三角形の面積を求めよ．

(4) 次の極限値を求めよ．ただし，a は定数とする． $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k+a}$

(愛媛大 2008)　　(m20084607)

0.247 2 つの 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{a}$ の転置により得られる 3 次実行ベクトル ${}^t\boldsymbol{a}=[a_1\ \ a_2\ \ a_3]$ と $\boldsymbol{b}$ の（行列としての）積 ${}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ により得られる実数を $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ とおく．

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})={}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i$$

また，$\boldsymbol{o}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とおく．

(1) (a) 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対し，$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a})=0$ であることは $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$ であるための必要十分条件であることを示せ.

(b) $\boldsymbol{o}$ でない 2 つの 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ に対し，$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=0$ ならば $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ は 1 次独立であることを示せ.

(c) $\boldsymbol{o}$ でない 3 つの 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ に対し，$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})=0$ ならば $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ は 1 次独立であることを示せ.

(2) 3 つの 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ を用いて表される 3 次正方行列 $A=[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}]$ に対し，${}^tA=\begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{a} \\ {}^t\boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{c} \end{bmatrix}$ を 3 つの 3 次実行ベクルトル ${}^t\boldsymbol{a},\ {}^t\boldsymbol{b},\ {}^t\boldsymbol{c}$ を用いて表される A の転置行列とする．A が

$${}^tAA=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

を満たすとき，$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ は 1 次独立であることを示せ.

(愛媛大 2022)　　(m20224601)

0.248 $\{a_n\}$ を数列とする．

(1) $\lim_{n\to+\infty}a_n=a$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=a$ となることを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=a$ であっても $\lim_{n\to+\infty}a_n$ が存在するとは限らないことを反例によって示せ．

(九州大 1997)　　(m19974702)

0.249 つぶれていない四面体には 4 個の頂点がある．各頂点の座標を (x_i, y_i, z_i) $(1\leqq i\leqq 4)$ とする．四面体内（表面を含む）の任意の点 P の座標を (x,y,z) で表すとき，

$$u(x,y,z)=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3y+\alpha_4z \qquad (*)$$

で表せる関数 $u(x,y,z)$ を考える．ただし，α_i $(1\leqq i\leqq 4)$ は定数である．このとき次の各問いに答えよ．

(1) 4個に頂点における関数値 u_i $(1 \leqq i \leqq 4)$ を既知とするとき，α_i $(1 \leqq i \leqq 4)$ を決定する連立1次方程式を求めよ．

(2) 直前に求めた連立1次方程式で α_i $(1 \leqq i \leqq 4)$ を求め，それを $(*)$ 式に代入した結果を

$$u(x,y,z) = \sum L_i(x,y,z)u_i \qquad (**)$$

と表す．ただし，$\sum$ は $i=1$ から 4 までの総和を表し，$L_i(x,y,z)$ は次式で与えられる．

$$L_i(x,y,z) = a_i + b_i x + c_i y + d_i z \qquad (***)$$

(a) $L_i(x,y,z)$ $(1 \leqq i \leqq 4)$ の各頂点における関数値を求めよ．

(b) $L_i(x,y,z)$ $(1 \leqq i \leqq 4)$ の四面体の6個の辺の各中点における関数値を求めよ．

(c) $(***)$ 式の a_i, b_i, c_i, d_i を以下の5個の行列式 (A,B,C,D,E) を用いて表現せよ．その際，i が1から4まで動いたときの j,k,l のとる値を明示せよ．

$$A = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix}, \quad E = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

(九州大 1999)　　(m19994705)

0.250 1つのさいころを続けて振るとき，以下の問いに答えよ．

(1) k 回目に初めて1の目が出る確率 p_k $(k=1,2,\cdots)$ を求めよ．また $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kp_k$ を求めよ．

(2) k 回目に2度目の1の目が出る確率 q_k $(k=2,3,\cdots)$ を求めよ．

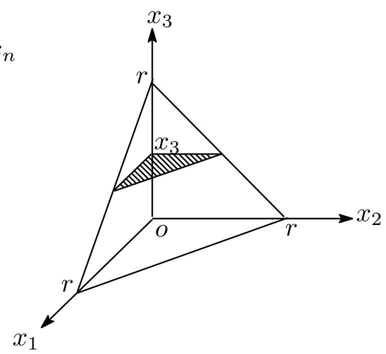
(九州大 2000)　　(m20004704)

0.251 正の数 r と整数 $n \geq 1$ に対して

$$K_n(r) = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \geq 0 \ \ (1 \leq i \leq n)\,,\ \sum_{i=1}^{n} x_i \leq r\}$$

とおくと, $K_n(r)$ の体積 $|K_n(r)|$（ただし, $n=1$ のときは長さであり, $n=2$ のときは面積）は次で与えられる.

$$|K_n(r)| = \int \cdots \int_{K_n(r)} 1\ dx_1 \cdots dx_n$$



次の問に答えよ.

(1) $|K_1(r)|$, $|K_2(r)|$ を求めよ.

(2) 右図を参考にして $|K_3(r)|$ を求めよ.

(3) $|K_n(r)|$ を求めよ.

(九州大 2004)　　(m20044701)

0.252 (1) 2つの任意の自然数 m, n について，次をそれぞれ示せ．

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$　　(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0\,;\ m \neq n \\ \pi\,;\ m = n \end{cases}$

(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0\ ;\ m \neq n \\ \pi\ ;\ m = n \end{cases}$

(2) 周期 2π の関数 $f(x)$ がフーリエ級数に展開できる，つまり　$f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

と表現できるとき，

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$　　(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos px dx$　　(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin px dx$　　$(\ p = 1, 2, \cdots)$

をそれぞれ計算せよ．

(3) 周期 2π の関数 $f(x) = |x|\ ;\ -\pi < x \leq \pi$ をフーリエ級数に展開せよ．

(4) (3) の結果を用いて，

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$　　(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$　　(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$　　をそれぞれ計算せよ．

(九州大 2006)　　(m20064704)

0.253 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ を n 個のベクトル，$A = [a_{ij}]$ を n 次正方行列とする

(1) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が一次独立（線形独立）であるということの定義を書きなさい．

(2) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が一次独立であると仮定し，$\boldsymbol{y}_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{x}_i$　$(j = 1, 2, \cdots, n)$ とおく，このとき，$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ が一次独立であるための必要十分条件は A が正則行列であることを示しなさい．

(3) 4 つの一次独立なベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ と 4 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

を用い (2) のように $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3, \boldsymbol{y}_4$ を定める．これらが一次従属となる a の値を求めなさい．

(九州大 2006)　　(m20064707)

0.254 a を正の定数，e を自然対数の底とし，$f(x) = e^{ax}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して，$f(x)$ の n 次（n 階）導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ のマクローリン展開（x の巾 (べき) 級数の形での展開）を求めよ．

(3) N を自然数とするとき，次の級数の和を求めよ．　$\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \frac{x^n}{(n-N)!}$

(九州大 2007)　　(m20074710)

0.255 $f(x) = \sin \dfrac{x}{2}$，　$a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$，　$b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$，

$g(x) = \dfrac{1}{2}a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ とおく．ただし，n を自然数とする．

(1) フーリエ係数 a_n，b_n を計算せよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ は発散することを示せ．

(3) フーリエ級数 $g(x)$ は $x = \dfrac{\pi}{2}$ で収束することを示せ．

(4) $x = \pm\pi$ で $f(x)$ と $g(x)$ がどのような関係にあるか述べよ．

(九州大 2009)　　(m20094703)

0.256　一般に, n 次正方行列 A の (i,j) 成分を $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n\ ;\ j=1,2,\cdots,n)$ とするとき, A のトレース : $tr[A]$ を, $tr[A]=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{kk}$ によって定義する. また, ${}^tA$ は A の転置行列を表すとする. このとき, 次の各問いに答えよ.

(1) 3 次正方行列 B の (i,j) 成分を $b_{ij}(i=1,2,3\ ;\ j=1,2,3)$ とする. このとき, ${}^tB$ と B の積 : ${}^tBB$ の (i,j) 成分を, B の成分で表せ.

(2) 成分がすべて実数である 3 次正方行列 B に対して, $tr[{}^tBB]=0$ ならば $B=O$ であることを示せ. ただし, O は零行列を表す.

(3) 成分がすべて実数である 3 次正方行列 C に対して,「${}^tC=C$ かつ $tr[C^4]=0$」ならば $C=O$ であることを示せ.

(九州大 2010)　　(m20104712)

0.257　n 次実正方行列 $A=(a_{ij})$ は, どの行についても $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=1$ とする, 以下の問いに答えよ.

(1) 1 は A の固有値であることを示せ.

(2) 2 は $2A$ の固有値であることを示せ.

(3) 行列 $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(4) B が対角化可能かどうか判定せよ.

(九州大 2013)　　(m20134701)

0.258　(1) 次の周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x)=|x| \quad (-\pi \leqq x<\pi), \qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ であることを示せ.

(3) $t>0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)=\mathcal{L}[f(t)](s)=\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ とする. 以下の問いに答えよ.

(a) a を定数とするとき, $\mathcal{L}[e^{at}](s)$ を求めよ. また, $\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s)=F(s-a)$ を示せ.

(b) $\dfrac{dF(s)}{ds}=\mathcal{L}[-tf(t)](s)$ が成り立つことを示せ. また, これを用いて $F(s)=\log\left(\dfrac{s+1}{s}\right)$ のラプラス逆変換を求めよ.

(九州大 2014)　　(m20144703)

0.259　(1) $f(x)=\begin{cases} 1\,, & (0\leq x\leq 1) \\ 0\,, & (\text{上記以外}) \end{cases}$ とする. 以下の設問に答えよ.

(a) $f(x)$ 自身の畳み込み積分 $g(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)dy$ を求めよ.

(b) $f(x)$ のフーリエ変換 $F(u)$ を求めよ.

(c) $g(x)$ のフーリエ変換 $G(u)$ が $F(u)^2$ で与えられることを示せ.

(2) $f(x)$ が $f(x)=x\,,\quad (-\pi \leq x \leq \pi)$ で与えられる周期関数とする．ここで周期 T は 2π である．$f(x)$ を $f(x)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$ によりフーリエ級数展開し，$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$ であることを示せ．なお，i は虚数単位を表す．また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ である．

(九州大 2017)　　(m20174708)

0.260 周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数は

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

で表される．以下の問いに答えよ．

(1) 区間 $[-\pi,\pi)$ において次のように定義される周期 2π の関数 $g(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$g(x)=\frac{\pi}{2}-|x|$$

(2) 区間 $[-\pi,\pi)$ において次のように定義される周期 2π の関数 $h(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$h(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

(3) 次の無限級数の和を求めよ．

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

(九州大 2021)　　(m20214704)

0.261 n は 2 以上の自然数とし，k は 1 以上 n 未満の自然数とする．n 個の相異なる自然数 $1,\cdots,n$ の順列すべての中から等確率で選んだものを $(X_1,\cdots,X_n)$ とする．いま，k 番目までの自然数 $X_1,\cdots,X_k$ の中の最小のものを Y で表す．次に，$k+1$ 番目以降の自然数 $X_{k+1},\cdots,X_n$ の中で Y より小さいもののうち添え字が最小のものを X_j として，$Z=X_j$ とする．そのような X_j が存在しない場合は $Z=X_n$ とする．このとき，$Z=1$ の確率 $P_n(k)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $i\in\{1,\cdots,n\}$ について，$X_i=1$ の確率を求めよ．

(2) $i\in\{k+1,\cdots,n\}$ について，$X_i=1$ の条件の下で，$X_1,\cdots,X_{i-1}$ の中の最小値の自然数が Y である条件つき確率を求めよ．

(3) $P_n(k)$ を求めよ．解答には関数 $H(m)=\displaystyle\sum_{\ell=1}^{m}\frac{1}{\ell}$ を用いてよい．

(4) $P_{10}(k)$ を最大にする k と，その k に対する $P_{10}(k)$ の概数を求めよ．$H(9)=2.829$ を用いてよい．

(九州大 2022)　　(m20224703)

0.262 $f(x)$, $g(x)$ がいずれも n 回微分可能とするとき，

$\{f(x)g(x)\}^{(n)}=\displaystyle\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x)$ を証明せよ．

（佐賀大 2004）　　(m20044906)

0.263 何回でも微分できる関数 $f(x),g(x)$ をそれぞれ f,g と書く. 次の等式がすべての自然数 n に対して成り立つことを証明せよ.

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}f^{(k)}g^{(n-k)}$$

ただし, 一般に, 関数 h の第 n 次導関数を $h^{(n)}$ と書き,$h^{(0)}=h$ とする.

(佐賀大 2005)　　(m20054901)

0.264 (1) 関数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ を $x=0$ の周りでテイラー展開し，x^3 の項まで書け．

(2) 微分方程式 $y''(x)+9y(x)=0$ の一般解を求めよ．

(3) 関数 $f(x)=x$（定義域を $-\pi \leq x \leq \pi$ とする）を $\quad f(x)=a_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}[\,a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\,]$

と書くとき，a_0，a_n，b_n を求めよ．

(佐賀大 2007) (m20074906)

0.265 連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad + 2x_3 - 6x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

の解 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$ の全体を W で表す. 以下の問いに答えよ.

(1) W の次元と W の一組の正規直交基 $\{\boldsymbol{u}_1\,,\,\boldsymbol{u}_2\}$ を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は，W に含まれないことを示せ.

(3) $\boldsymbol{a}$ との距離 $||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}||$ がもっとも近い W のベクトル $\boldsymbol{x}$ は,

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2$$

で与えられることを示せ．ただし，一般に 4 次ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix}$ に対して

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{4}x_iy_i \qquad ||\boldsymbol{x}||=\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$$

である.

(佐賀大 2009) (m20094920)

0.266 次の無限級数の和を求めなさい.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+3^n}{5^n}$

(佐賀大 2015) (m20154907)

0.267 次の関数をマクローリン展開して係数 a_n を求めよ.

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

(佐賀大 2015) (m20154909)

0.268 関数 $f(x)=\log x$ の $x=1$ におけるテイラー級数を $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x-b)^k$ の形で求めよ.

(佐賀大 2022) (m20224914)

0.269 次の式について偏微分 $\partial S/\partial a$ と $\partial S/\partial b$ を求めよ.

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - a - bx_i \Big)^2$$

(長崎大 2005)　　(m20055019)

0.270 2 行 2 列の行列 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ とする. 0 以上の整数 n に対して, A のべき乗 A^n を考える. このとき以下の問いに答えなさい. ただし, a は $0 < a < 1$ の実数とする. また, $n = 0$ に対して, $A^0 = I$ とする.

(1) $n = 2, 3, 4$ のそれぞれについて A^n を求めなさい.

(2) 行列 $I - A$ の逆行列を求めなさい.

(3) 行列 T_n を次式で定義する. このとき, $(I - A)T_n = I - A^n$ が成り立つことを示しなさい.

$$T_n = I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} A^k$$

(4) (3) の行列 T_n の各要素を a, n を用いて表しなさい.

(長崎大 2009)　　(m20095002)

0.271 離散型確率変数 X が m 個の値 x_1, x_2, $\cdots$ x_m を取り, それぞれの値を取る確率を p_1, p_2, $\cdots$, p_m とする $\left(\sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \right)$. 確率変数 X の期待値を $E(X) = \mu$ とすると, 確率変数 X の分散 $V(X) = \sum_{i=1}^{m} (x_i - \mu)^2 p_i$ を $V(X) = E(X^2) - \mu^2$ と記すことができることを示せ.

(長崎大 2011)　　(m20115018)

0.272 周期関数 $f(x) = |x|$ $(-\pi \leq x < \pi)$, $f(x + 2\pi) = f(x)$ の $(-\pi,\ \pi)$ におけるフーリエ級数は次のようになる.

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

これを用いて, 次の公式を証明せよ.

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

(大分大 2013)　　(m20135104)

0.273 関数 $f(x) = e^{-x} \sin x$ $(x \geqq 0)$ において, 次の問に答えなさい.

(1) a と b を実数とし, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ を求めなさい.

(2) n を自然数とし, 区間 $(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ において, 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めなさい.

(3) $f(x)$ の極大値を与える x を小さい順に x_1, x_2, $\cdots$, x_n, $\cdots$ とするとき, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ の値を求めなさい.

(熊本大 2011)　　(m20115202)

0.274 $[A]$, $[B]$, $[C]$ を n 次正方行列とし,

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix},\ [B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix},\ [C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

とする．次の問いに答えなさい.

(1) n を 3 とするとき，$[A]$ と $[B]$ の積 $[A][B]$ の 1 行 1 列の成分を計算しなさい.

(2) n を任意の自然数とするとき，$[A]$ と $[B]$ の積 $[A][B]$ の i 行 j 列の成分を $\sum$ 記号で表しなさい. ただし，i, j は，n 以下の自然数とする.

(3) n を任意の自然数とするとき，$[A]\big([B]+[C]\big) = [A][B]+[A][C]$ が成り立つことを証明しなさい.

(鹿児島大 2014) (m20145419)

0.275 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は， $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ で与えられる．ただし，$f^{(n)}(0)$ は $x=0$ における $f(x)$ の n 階導関数である．$x \to 0$ のとき，$e^x \sin x$ の漸近展開を x^3 の項まで求めよ.

(室蘭工業大 2007) (m20075507)

0.276 (1) $a > 0$ のとき，$\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \pi$ を満たす a の値を求めよ.

(2) 関数 $g(x)$ は，関数 $f(x)$ に対して， $g(x) = f(0) + \displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad , \quad (m = 1, 2, 3, \cdots)$ と定義される．ここで，$f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の n 階の導関数を表す．$f(x) = e^{2x}$ とするとき，$g(x)$ を，$m = 3$ として求めなさい.

(室蘭工業大 2008) (m20085508)

0.277 逆正弦関数 $\sin^{-1} x$ と逆余弦関数 $\cos^{-1} x$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 次の値を求めよ.

(i) $\sin^{-1}(-1)$, (ii) $\cos^{-1} 0$, (iii) $\sin^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (iv) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

(2) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ.

(3) $y = \sin^{-1} x$ の微分と不定積分を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}$ の値を求めよ.

(島根大 2005) (m20055806)

0.278 (1) 関数 $\dfrac{\log x}{x}$ の不定積分を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_n^{2n} \frac{\log x}{x} dx$ は正の無限大に発散することを示せ.

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$ が収束するならば，その極限値を求めよ．もし発散するならば，その理由を述べよ.

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ をみたす数列 a_n に対して　$b_n = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n}$　とおくとき，$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ は正しいだろうか？ 正しければその理由を述べよ．もし正しくなければ反例を一つ与えよ．

(島根大 2007)　　(m20075805)

0.279 一般に，関数 $f(x)$ が周期 2π の周期関数で，区間 $[-\pi, \pi]$ でいくつか（有限個）の点を除いて連続であるとき，次のように三角関数の級数に展開できる．これを $f(x)$ のフーリエ級数という．

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ \ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ \ b_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

周期 2π の周期関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} -2x & (-\pi \leqq x \leqq 0) \\ 2x & (0 < x \leqq \pi) \end{cases}$$ のとき，$f(x)$ のフーリエ級数を求めよ

(島根大 2007)　　(m20075814)

0.280 (1) 次の関数の第 3 次導関数を求めよ．　$x^2 \sin x$

(2) 次の級数が収束することを示せ．　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$

(3) 次の積分を求めよ．　$\displaystyle\int_0^1 \sin^{-1} x\, dx$

(島根大 2008)　　(m20085802)

0.281 (1) 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ は正則行列であることを示し，逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) $\overrightarrow{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\overrightarrow{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\overrightarrow{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ とする．

$\overrightarrow{b} = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} w_j \overrightarrow{a}_j$ と定めたとき，$w_j \geq 0$　$(j = 1, 2, 3)$ となるための必要十分条件を x, y, z を用いて表せ．

(東京都立大 2021)　　(m20215901)

0.282 $a < 1$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n(1-a)a^n = \frac{a}{1-a}$ となることを証明せよ．

(工学院大 2005)　　(m20056203)

0.283 $x_n = r^{n-1}$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で与えられる数列 $\{x_n\}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，$0 < |r| < 1$ とする．

(1) 第 N 項までの和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} x_n$ を求めよ．

(2) (1) で求めた和について，$N \to \infty$ としたときの極限 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ を求めよ．

(3) 和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n x_n$ を求めよ．

(4) (3) で求めた和について，$N \to \infty$ としたときの極限 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx_n$ を求めよ．

ただし，$\displaystyle\lim_{N\to\infty} Nr^N = 0$ $(|r| < 1)$ であることを用いてよい．

(はこだて未来大 2011)　　(m20116305)

0.284 周期 X の周期関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (\ |x| \leqq\ d/2\ ) \\ 0 & (\ d/2 < |x| \leqq\ X/2) \end{cases}$$

について次の問いに答えなさい. ただし, $0 < d < X$ である.

(1) $f(x)$ をフーリエ級数に展開しなさい.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\alpha}{n}$ の値を求めなさい. ただし, $0 < \alpha < 1$ とする.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi\alpha}{2n-1}$ の値を求めなさい. ただし, $0 < \alpha < 1$ とする.

(和歌山大 2010)　　(m20106504)

0.285 次の各問いに答えなさい.

(1) サイコロを 3 回振るとき 1 の目が出る回数を X とする．X の確率分布表を示しなさい.

(2) 確率変数 X が $P(X = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$　（ $\lambda > 0,\ k$ は 0 以上の整数 ）で与えられる確率分布に従うとき，次の各問いに答えなさい.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1$ を示しなさい.

(b) 確率変数 X の平均が λ であることを示しなさい.

(和歌山大 2011)　　(m20116503)

0.286 次の各問いに答えなさい.

(1) $\displaystyle\int e^x \cos nx\, dx$ を求めなさい．ただし n は正の整数とする.

(2) $\displaystyle\int e^x \sin nx\, dx$ を求めなさい．ただし n は正の整数とする.

(3) 関数 $f(x) = e^x$　$(-\pi \leq x \leq \pi)$ をフーリエ級数展開 $f(x) \approx \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_n \cos nx + b_n \sin nx\Big]$

したとき，係数 $a_n (n \geq 0),\ b_n (n \geq 1)$ を求めなさい.

(和歌山大 2012)　　(m20126507)

0.287 関数 $f(t) = |t|$　$(-1 < t < 1)$ について，次の各問いに答えなさい.

(1) $f(t)$ をフーリエ級数に展開しなさい.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ の値を求めなさい.

(和歌山大 2013)　　(m20136506)

0.288 (1) 正数 L に対し $\omega = \dfrac{2\pi}{L}$ と置く．整数 k に対し，次式が成り立つことを示しなさい.

$$\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{ik\omega t} dt = \begin{cases} 1 & (k = 0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

(2) (1) の条件のもと，自然数 n に対し，$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega t}$ とおく．このとき，以下の式が成立することを示しなさい．

(a) $\frac{1}{L}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} D_n(t)dt = 1$

(b) $\frac{1}{L}\int_{-\frac{l}{2}}^{0} D_n(t)dt = \frac{1}{L}\int_{0}^{\frac{l}{2}} D_n(t)dt = \frac{1}{2}$

(c) $D_n(t+L) = D_n(t)$

(d) $D_n(t) = \dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})\omega t)}{\sin(\frac{\omega}{2}t)}$

(和歌山大 2015)　　(m20156507)

0.289 (1) $f(x) = |\sin x|$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$ で定められる周期関数をフーリエ級数に展開しなさい．

(2) $\sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2m-1)^2(2m+1)^2}$ の値を求めなさい．

(和歌山大 2016)　　(m20166507)

0.290 関数 $f(x)$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ x & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

のフーリエ級数展開を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

とするとき，次の (1)～(3) に答えなさい．

(1) a_0 を求めなさい．

(2) a_n，$n = 1, 2, 3, \cdots$ を求めなさい．

(3) b_n，$n = 1, 2, 3, \cdots$ を求めなさい．

(和歌山大 2018)　　(m20186506)

0.291 関数 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ のマクローリン展開を $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とするとき，係数 a_n を求めよ．

(和歌山大 2022)　　(m20226502)

0.292 (1) 級数の和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k!(k+2)}{(k+3)!}$ を求めよ．また，$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

(2) $f(x) = e^{2x^2}$ のマクローリン級数を x^3 の項まで求めよ．また，$\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-1}{x^2}$ を求めよ．

(3) 初期値問題 (a) と微分方程式 (b) の解が一致するよう α を定め，(b) の一般解を求めよ．

(a) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}$ ，$y(0) = e^{-1}$　　(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + \alpha y = 8e^{-x}$

(京都府立大 2008)　　(m20086701)