[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　σ

0.1 (1) 一定面密度 σ，半径 r の球殻が作る重量ポテンシャルを求めてください．理由や計算を詳しく示してください．

(2) 地球がそのような中空の球殻構造になっていない根拠を自由に考えて，できるだけ定量的に 3 つ以上書いてください．

(お茶の水女子大 2014)　(m20140605)

0.2 ある道路で歩行者の歩行速度の調査を行ったところ，以下の表のような結果となった．調査対象者全体の，歩行速度の平均値 $\overline{z}$ および不偏分散 $\hat{\sigma}_z{}^2$ を求めよ．

	調査した人数	歩行速度の平均値	不偏分散
60 歳未満	9 人	$\overline{x} = 1.8 \quad (m/s)$	$\hat{\sigma}_x{}^2 = 0.2 \quad (m/s)^2$
60 歳以上	18 人	$\overline{y} = 0.8 \quad (m/s)$	$\hat{\sigma}_y{}^2 = 0.1 \quad (m/s)^2$
調査対象者全体	27 人	$\overline{z} \quad (m/s)$	$\hat{\sigma}_z{}^2 \quad (m/s)^2$

(お茶の水女子大 2017)　(m20170612)

0.3 ある工場において製造される製品 A の含水率 (%) の平均は 56.0 であったが，製法を変えたところ，この製品 A の含水率が変わったのではないかと思われた．これを検証するため，新しい製法による製品 A から無作為に 10 個を取り出して計測したところ，次のようなデータが得られた．

54.5　57.3　57.9　57.7　58.5

55.8　55.6　57.3　58.2　56.6

(1) 計測した 10 個の含水率の平均値を求めよ．

(2) 含水率が変わったか有意水準 5% で検定せよ．
なお母分散は製法変更の前後で $\sigma^2 = 1.6$ で変わらないものとし，$z_{0.025} = 1.96$ とせよ．

(お茶の水女子大 2018)　(m20180606)

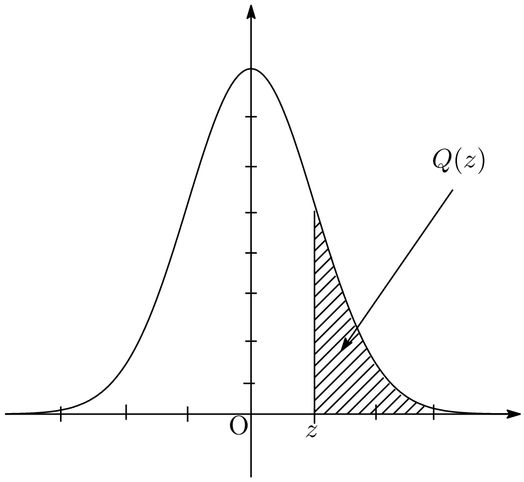
0.4 ある会社のペットボトル飲料水の容量表示が $500mL$ と印字されている．しかしながら，工場での注入の際に製品ごとに変動が生じる．含量は，平均 $\mu = 505.0mL$，標準偏差 $\sigma = 2.0mL$ の正規分布に従うことが分かっている．以下の問いに答えよ．ただし，必要に応じて付表 1 を利用せよ．

(1) 含量が表示である $500mL$ を下回る製品の割合を求めよ．

(2) $500mL$ を下回る製品の割合を 0.3% 以下にするためには注入機械の精度である標準偏差 σ をどれくらいにする必要があるか答えよ．

付表 1　正規分布 $N(0,1)$ の上側確率 $(z \to Q(z))$

z	$Q(z)$
0.50	0.3875
0.75	0.2266
1.00	0.1587
1.25	0.1057
1.50	0.0668
1.75	0.0401
2.00	0.0228
2.25	0.0122
2.50	0.0062
2.75	0.0030
3.00	0.0013



(お茶の水女子大 2019)　　(m20190603)

0.5　ある健康改善プログラムの参加者の最高血圧 (mmHg) は，実施前の測定において平均値 $\mu = 125.0$, 標準偏差 $\sigma = 10.0$ の正規分布に従うことがわかっている．このプログラムでは，最高血圧の目標値を 130.0 (mmHg) と設定している．以下の (a) と (b) に答えよ．必要であれば付表 1 を利用せよ．（※付表 1 は標準正規分布表）

(a) 参加者のうち，実施前に目標値を超過している人の割合を求めよ．

(b) プログラム実施後に最高血圧を測定したところ，目標値を超過する人の割合が 5% 以下になった．このとき，最高血圧の平均値はいくら未満であるか求めよ．ただし，プログラム実施後の最高血圧も正規分布に従い，標準偏差は変わらず $\sigma = 10.0$ とする．

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200618)

0.6　３つの部品 A, B, C からなる機械 M がある．C は絶対に壊れないが一定の確率で誤動作する．A, B は，C の誤動作のみを原因として一定の確率で C の誤動作と同時に壊れる．C が誤動作したことにより A, B が壊れる確率はそれぞれ 6 %, 5 % である．B が壊れたときに，同時に A も壊れる確率は 20 % である．A, B のいずれか，もしくは両方が壊れた場合に限り M は必ず故障し修理工員が修理する．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，解の導出過程を必ず書くこと．

(1)　(a) C が誤動作したときに M が故障する確率 P_r を求めよ．

　　(b) C が誤動作する確率が 10 % のとき M が故障する確率を求めよ．

(2)　C の 3 回の誤動作に対して，M の故障が 2 回以上となる確率を求めよ．

(3)　C の誤動作が n 回発生したとき M を修理した回数 X の平均を μ，標準偏差を σ とする．n が十分大きい場合について X が $\mu \pm 2\sigma$ の範囲に入る確率を，標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数 Z の累積分布関数 $\varphi(z) = P(Z \leqq z)$ を用いて示せ．ただし，二項分布に従う確率変数 Y は，試行回数が十分大きい場合，近似的に正規分布 N(Y の平均，Y の分散) に従うことを利用せよ．

(4)　M が故障するたびに，2 人の修理工員 F_1 と F_2 が交互に修理する．実際に修理を行った後，修理担当を交代する．最初の修理担当を F_1 としたとき，C が n 回誤動作した時点で修理担当が F_1 である確率を求めよ．ただし，$n \geqq 1$ とする．

(5)　M が故障しているか否かを判断するセンサー S_1 と S_2 を取り付けた．センサー S_1，S_2 が M の故障の有無を正しく判断する確率は独立であり，それぞれ 90 %, 80 % である．今，C が誤動作し，M について S_1 が故障していると判断し，S_2 が故障していないと判断した．このとき，M が故障している確率を求めよ．

(東京大 2011)　　(m20110702)

0.7 ある行列に並んでいる人の待ち時間 t は確率密度関数

$$\begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

に従うものとする．ただし，λ は正の実数である．以下の問いに答えよ．

(1) 待ち時間が t 以下である確率 $F(t)$ を求めよ．

(2) 待ち時間の平均 μ と分散 σ^2 を求めよ．

(3) 十分な数の観測の結果，待ち時間の平均が T であったとする．待ち始めてから時間 τ だけ経過したとき，残りの平均待ち時間を求めよ．

(東京大 2014)　　(m20140702)

0.8 確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ が独立で，いずれも正規分布 $N(n_1, {\sigma_1}^2)$ に従う．確率変数 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ も独立で，いずれも正規分布 $N(n_2, {\sigma_2}^2)$ に従う．また $\{X_i\}, \{Y_j\}$ も独立とする．$\{X_i\}, \{Y_j\}$ の標本平均および標本分散をそれぞれ $\overline{X}, \overline{Y}, {S_1}^2, {S_2}^2$ とする．

(1) $\overline{X} - \overline{Y}$ の分布を求めよ．

(2) $\dfrac{n_1 {S_1}^2}{{\sigma_1}^2} + \dfrac{n_2 {S_2}^2}{{\sigma_2}^2}$ の分布を求めよ．

(電気通信大 2000)　　(m20001008)

0.9 確率変数 X, Y, U が互いに独立で，各々正規分布 $N(\mu_1, {\sigma_1}^2), N(\mu_2, {\sigma_2}^2), N(\mu_3, {\sigma_3}^2)$ に従うとする．

(1) 任意の定数 a, b, c に対して，$W = aX + bY + cU$ の分布を求めよ．

(2) $V = \left(\dfrac{X - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 \Big/ \left(\dfrac{Y - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2$ の分布を求めよ．

(3) $P\left(-3 \leq \dfrac{X - \mu_1}{\sigma_1} \leq 3\right)$ を求めよ．

ただし，標準正規分布 $N(0,1)$ の分布関数を

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

とおくと，次表の値をとる．

z	0.0	1.0	2.0	3.0
$\Phi(z)$	0.5000	0.8413	0.9772	0.9987

(電気通信大 2001)　　(m20011011)

0.10 今Ａ社とＢ社の株式 1 株を今から 1 ヶ月保有したときに得られる収益率をそれぞれ R_A, R_B とする．R_A は平均 μ_A%，標準偏差 σ_A% の正規分布に，R_B は平均 μ_B%，標準偏差 σ_B% の正規分布に従い，R_A と R_B の相関係数を ρ とする．h を $1 \geq h \geq 0$ の実数として，Ａ社の株式を h，Ｂ社の株式を $(1-h)$ の比率で保有したときに得る収益率 $(R_A h + R_B(1-h))$ の平均と標準偏差を求めよ．(単位はパーセントとする．)

(筑波大 2001)　　(m20011312)

0.11 定員 11 名のエレベータがある．このエレベータは，総重量が制限荷重の 748kg を超えるとブザーが鳴って動かなくなる．平均 μ，分散 σ^2 の正規分布を $N(\mu, \sigma^2)$ という記号で表すと，男性の体重 (kg) は $N(65, 99)$，女性の体重は $N(55, 88)$ に従うという．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，乗り合わせる人の体重は互いに独立とする．

(1) エレベータに男性 n_1 人，女性 n_2 人乗るとすると，計 (n_1+n_2) 人の体重の合計 X が従う分布を記号で表せ.

(2) 男性 11 人が乗ったときにブザーが鳴る確率 $P(X>748)$ を求めよ.

(3) 男女計 12 人が乗っても，そのときにブザーが鳴る確率が 1/2 未満になるような女性の人数 n_2 の最小値を求めよ.

注) Z が標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき，Z がある範囲にある確率は以下の通りである.

$$P(0\le Z\le 0.5)=0.1915\,,\ P(0\le Z\le 1)=0.3413\,,\ P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$$
$$P(0\le Z\le 2)=0.4772\,,\ P(0\le Z\le 2.5)=0.4938\,,\ P(0\le Z\le 3)=0.4987$$

(筑波大 2013)　　(m20131317)

0.12 確率 p で成功し，確率 $1-p$ で失敗する独立な実験を n 回繰り返す． X_i は i 回目の実験が成功したときに $X_i=1$，失敗したときに $X_i=0$ となる確率変数とする．このとき，以下の問に答えよ.

(1) 「確率変数 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ が独立である」ことの定義を述べよ.

(2) 確率変数 Y が確率 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ で値 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ をとるとき，その期待値を μ，分散を σ^2 とする．このとき任意の実数 λ に対して，「$|Y-\mu|>\lambda\sigma$ となる」確率 $P(|Y-\mu|>\lambda\sigma)$ は以下の不等式を満たすことを，分散 σ^2 の定義を変形することにより示せ.

$$P(|Y-\mu|>\lambda\sigma)\le\frac{1}{\lambda^2}$$

(3) (2) で得られた不等式を用いて，成功確率が 0.5 の独立な試行を n 回行った時，「成功割合が 40% 以上で，かつ 60% 以下となる」確率が 0.99 以上となるような n の下限（すなわち最低限必要な実験回数）を示せ.

(筑波大 2016)　　(m20161313)

0.13 確率変数 Z が x 以上になる確率を $P(Z\ge x)$ と書くとき，$0\le\alpha\le 1$ を満たす α に対して Z の $100(1-\alpha)$ パーセント点 z_α は

$$P(Z\ge z_\alpha)=\alpha$$

で定義される．特に Z が標準正規分布に従うとき，z_α の具体的な値は次表で与えられる.

α	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
z_α	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

また，期待値 μ，分散 σ^2 が正規分布を $N(\mu,\sigma)$ で表すとする．このとき，以下の問に答えよ.

(1) 期待値 μ，分散 σ^2 が未知の $N(\mu,\sigma)$ に従う母集団からとった n 個の標本に対して，標本平均と標本分散をそれぞれ $\overline{x}$ と s^2 とする．このとき，$\sqrt{n}\dfrac{(\overline{x}-\mu)}{s}$ は t 分布に従う．t 分布の $100(1-\alpha)$ パーセント点を $t_{n-1;\alpha}$ とするとき，μ の $100(1-\alpha)$ パーセント信頼区間を示せ.

(2) $N(\mu,\sigma)$ に従う母集団から大きさ 4 の標本を選んだところ，観測値は 12.7, 13.0, 13.3, 13.0 であったとする．以下の (a),(b) の場合に μ の 95% 信頼区間を求めよ.

(a) $\sigma^2=0.16$ であることがわかっている場合

(b) σ^2 が未知である場合（ただし，$t_{n-1;\alpha}$ は z_α に等しいと仮定する）

(筑波大 2016)　　(m20161314)

0.14 確率変数 $X_1,\cdots,X_n$ は互いに独立で，平均 μ，分散 σ^2 のある同一の確率分布に従うとする．ここで，2 つの μ の推定量

$$\hat{\mu}=\sum_{i=1}^{n}v_iX_i,\qquad \tilde{\mu}=\sum_{i=1}^{n}w_iX_i$$

を考える．ただし，

$$-\infty < \mu < \infty,\ 0 < \sigma^2 < \infty$$

，

$$v_i = \frac{2(n+1-i)}{n(n+1)}, \qquad w_i = \frac{2(n-i)}{n(n-1)}$$

で，n は 2 以上の整数である．なお，解答の際には，

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

を利用して良い．

(1) $\hat{\mu}$ が μ の不偏推定量であることを示せ．

(2) $\tilde{\mu}$ が μ の不偏推定量であることを示せ．

(3) $\hat{\mu}$ の分散を求めよ．

(4) $\tilde{\mu}$ の分散を求めよ．

(5) (1)〜(4) から，$\hat{\mu}$ と $\tilde{\mu}$ どちらの推定量がより μ の推定にに適していると言えるか．その理由とともに答えよ．

(筑波大 2019)　　(m20191312)

0.15 確率変数 X について，その平均 $\mu = E(X)$，分散 $\sigma^2 = V(X)$ とする．以下の問に答えよ．

(1) X は確率密度関数 $f(x)$ を持つ連続型の確率変数とした場合，定数 $k > 0$ に対して $|X - \mu| \geq k$ を満たす確率の上限を求めよ．

(2) $E(X) = 2$，$E(X^2) = 9$ のとき，(1) の結果を用いて，$-1 < X < 5$ を満たす確率の下限を求めよ．

(3) X_1，X_2，$\cdots$，X_{16} が正規分布 $N(2, 4)$ からの無作為標本であるとき，標本平均 $\overline{X}$ に対して $|\overline{X} - 2| < 0.75$ を満たす確率を求めよ．さらに，(1) を用いて $|\overline{X} - 2| < 0.75$ を満たす確率を上限もしくは下限で評価し，両者を比較せよ．

付表 1　標準正規分布表：$Q = \int_0^z \phi(t)dt$，　但し，$\phi(\cdot)$ は標準正規分布の確率密度関数　（省略）

付表 2

$\sqrt{2} = 1.414$	$\sqrt{3} = 1.732$	$\sqrt{5} = 2.236$	$\sqrt{7} = 2.646$	$\sqrt{11} = 3.317$

(筑波大 2021)　　(m20211313)

0.16 A 大学と B 大学において，1 年生の数学の学力に差があるかどうかを調べるために，A 大学から 9 人，B 大学から 7 人をそれぞれ無作為に選んで，実力テストを行ったところ，次のような結果を得た．

A 大学	72	73	84	65	75	92	81	74	59
B 大学	45	48	89	50	44	57	87		

A 大学，B 大学のテストの点数はそれぞれ正規分布 $N(\mu_A,\ \sigma_A^2)$，$N(\mu_B,\ \sigma_B^2)$ に従うと仮定する．以下の問に答えよ．

(1) テストの点数のばらつきは A 大学，B 大学 で等しいと見なしてよいか．有意水準 5% で等分散検定せよ．

(2) A 大学と B 大学で数学の学力に差があると言えるか．有意水準 5% で検定せよ．

付表３ F 分布表：分子の自由度 m_1，分母の自由度 m_2 の F 分布の上側 5% 点 $F_{0.05}(m_1, m_2)$（上段）と上側 2.5% 点 $F_{0.025}(m_1, m_2)$（下段）

m_1 \ m_2	6	7	8	9
6	4.28	3.87	3.58	3.37
	5.82	5.12	4.65	4.32
7	4.21	3.79	3.50	3.29
	5.70	4.99	4.53	4.20
8	4.15	3.73	3.44	3.23
	5.60	4.90	4.43	4.10
9	4.10	3.68	3.39	3.18
	5.52	4.82	4.36	4.03

付表４ t 分布表：自由度 m の両側 100α% 点 $t_\alpha(m)$

α \ m	6	7	8	9	14	15	16
0.1	1.943	1.895	1.860	1.833	1.761	1.753	1.746
0.05	2.447	2.365	2.306	2.262	2.145	2.131	2.120

(筑波大 2021)　　(m20211314)

0.17 次は，あるクラスのテストの点数である．

77 74 75 85 90 67 62 60 58

このデータの標本平均は 72.0，標本不偏分散は 124.5 である．テストの点数は，正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う母集団から無作為に抽出した標本とみなせるものとする．このとき，以下の各問に答えよ．なお，計算の過程で適宜，有効数字 3 桁に丸めてよい．

(1) 母分散 σ^2 の 95 % 信頼区間を求めよ．

(2) 母平均 μ の 95 % 信頼区間を求めよ．

(3) $\sigma^2 = 121$ と判明したとき，μ の 95 % 信頼区間を求めよ．

(筑波大 2022)　　(m20221309)

付表１

$\sqrt{2} = 1.414$	$\sqrt{3} = 1.732$	$\sqrt{5} = 2.236$	$\sqrt{7} = 2.646$	$\sqrt{11} = 3.317$

付表２

$e^1 = 2.718$	$e^2 = 7.389$	$e^3 = 20.09$	$e^4 = 54.60$	$e^5 = 148.4$

付表３ 標準正規分布表：$Q(z) = \int_0^z \phi(t)dt$，ただし，$\phi(\cdot)$ は標準正規分布の確率密度関数 （省略）

付表４ χ^2 分布表：自由度 m の χ^2 分布の上側 100α% 点 $\chi^2_\alpha(m)$

α \ m	6	7	8	9	10
0.975	1.237	1.690	2.180	2.700	3.247
0.950	1.635	2.167	2.733	3.325	3.940
0.050	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31
0.025	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48

付表５ t 分布表：自由度 m の両側 100α% 点 $t_\alpha(m)$

m \ α	6	7	8	9	10
0.10	1.943	1.895	1.860	1.833	1.812
0.05	2.447	2.365	2.306	2.262	2.228

0.18 連続な確率変数 X の確率密度関数 $p(x)$ が次の式で与えられている.

$$p(x) = \begin{cases} 0 & for \;\; x \leq -1 \\ 2(1+x)/3 & for \;\; -1 \leq x \leq 0 \\ (2-x)/3 & for \;\; 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & for \;\; 2 \leq x \end{cases}$$

(1) この確率分布に対して，平均値 m と分散 σ^2 を求めよ.

(2) 不等式 $P(|X-m| \geq 1) \leq \sigma^2$ がこの確率密度関数に対して成立することを示せ.
なお $P(|X-m| \geq 1)$ は確率変数 X が平均値より 1 以上離れている事象の確率である.

(山梨大 2018)　　(m20181808)

0.19 (1) 複素数 z に対する二項方程式 $z^5 = 1$ の解を全て求めよ．また，$z \neq 1$ の解の一つを ω として，1 以外の全ての解を ω を用いて表し，1 を含む全ての解を複素平面上に図示せよ.

(2) 複素数 z に対する二項方程式 $z^5 = 5$ の全ての解を，前問 (1) の ω を用いて表せ.

(3) 複素数 α をそれ自身に変換する写像を ε，α を $\omega\alpha$ に変換する写像を σ とするとき，合成写像 σ^2, σ^3, σ^4 によって，α はどのように変換されるか答えよ.

(4) 前問 (3) の写像 σ の合成写像 σ^{n+4} $(n = 1, 2, 3, 4, 5)$ により α を変換せよ.

(山梨大 2019)　　(m20191803)

0.20 2× 2 行列 σ_1 が $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられるとき，次の問いに答えよ.

(1) σ_1 の固有値と大きさが 1 の直交固有ベクトルを求めよ.

(2) σ_1 を対角化する変換行列 P を求め，σ_1 を対角化せよ.

(3) 対角化した行列を σ_3 とするとき，$\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 = 2i\sigma_3$ および $\sigma_2\sigma_2 = I$ を満たす行列 σ_2 を求めよ．ここで，i は虚数単位，I は 2× 2 の単位行列である.

(富山大 2003)　　(m20032306)

0.21 θ を任意の実数，I を単位行列，$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ として，行列 A が
$A = (\cos\theta)I + (i\sin\theta)\sigma_1$ で与えられるとき，以下の問いに答えよ．ここで i は虚数単位とする.

(1) ${\sigma_1}^2$ を計算せよ.

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) σ_2 の固有値 λ と固有ベクトル ν を求めよ.

(4) $A\sigma_2 A^{-1}$ を計算して σ_2 を対角化するように θ を決定せよ．ただし，θ の範囲を $0 < \theta < \pi/2$ とする．また，このときの θ の値を用いた行列 A により，σ_2 の固有ベクトル ν を変換したベクトル $u = A\nu$ を求めよ.

(富山大 2008)　　(m20082303)

0.22 以下の与える行列 A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値及び固有ベクトルを求めよ.

(2) 行列 A の対角行列を $\Sigma = U^{-1}AU$ とする．行列 A を対角化する行列 U を求めよ.

(3) 行列 U を用いて対角化した行列 A の対角行列 Σ を求めよ.

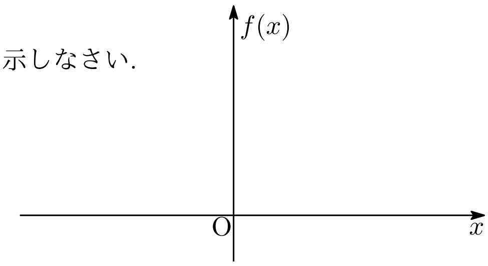
(福井大 2014)　　(m20142427)

0.23 平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ は, 確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

をもつ.

(1) $N(10, 4)$ に従う確率変数 X の確率密度関数を図示しなさい.



(2) 確率変数 X が正規分布 $N(10, 4)$ に従うとき, 次の確率を求めなさい.
必要に応じて, 別紙の標準正規分布表を用いなさい.

(i) $P[X > 13]$　　(ii) $P[8 < X < 12]$

(福井大 2015)　　(m20152426)

0.24 確率変数 X が値 x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ をとり，$X = x_i$ となる確率を　$P(X = x_i) = p_i$　と表記するとき，以下の問いに答えよ．ただし，$P(X \geqq a)$ は X が a 以上の値である確率を表すとする.

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i$ の値を示せ.

(2) X の期待値 $E[X]$ と分散 $V[X]$ を x と p を用いて表せ.

(3) X の期待値を $E[X] = \mu$，分散を $V[X] = \sigma^2$ とする．任意の正数 k に対して次の式が成り立つことを示せ.　$\sigma^2 \geqq k^2 P(|X - \mu| \geqq k)$

(4) 確率変数 X の平均と分散がそれぞれ 50 と 9 であるとき，$P(40 < X < 60)$ に関してわかる事を述べよ.

(名古屋大 2004)　　(m20042804)

0.25 (1) 平均 0, 分散 1 の正規分布 $f(x)$ に関する以下の問に答えよ.

(a) $f(x)$ の極大点における x と $f(x)$ の値を求めよ. また, $f(x)$ の変曲点 ($f''(x) = 0$) における x と $f(x)$ の値を求めよ.

(b) $f(x)$ のグラフを図示せよ.

(2) 確率変数 X と Y に関する以下の問に答えよ.

(a) 任意の実数 λ に対して次の関係が成り立つことを示せ.

$$E[\{\lambda(X - \mu_x) + (Y - \mu_y)\}^2] = \lambda^2\sigma_x^2 + 2\lambda\sigma_{xy} + \sigma_y^2$$

ここで, $E[X]$ は X の期待値を表し,

$$\begin{aligned}
\mu_x &= E[X] \\
\mu_y &= E[Y] \\
\sigma_x^2 &= E[(X - \mu_x)^2] \\
\sigma_y^2 &= E[(X - \mu_y)^2] \\
\sigma_{xy} &= E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]
\end{aligned}$$

とする.

(b) $E[\{\lambda(X-\mu_x)+(Y-\mu_y)\}^2] \geq 0$ となることを示せ.

(c) (a), (b) の関係を利用して相関係数 ρ_{xy} が -1 から 1 の間の値を取ることをとる示せ. ただし, $\sigma_x^2\sigma_y^2 \neq 0$ とする.

(三重大 2004) (m20043115)

0.26 ある選挙区において, 国政選挙の有権者全員の中で A 党の支持率が 20% であるという. この選挙区の有権者の中から無作為に n 人を抽出するとき, k 番目の抽出された人が A 党支持なら 1, 不支持なら 0 の値を対応させる確率変数を X_k とする.

(1) 標本平均 $\overline{X} = \dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ について期待値 $E(\overline{X})$ を求めよ.

(2) 標本平均 $\overline{X}$ の標準偏差 $\sigma(\overline{X})$ を 0.02 以下にするためには, 抽出される標本の大きさは, 少なくとも何人以上必要であるか?

(三重大 2020) (m20203106)

0.27 以下の関数を微分せよ. ただし, m, σ は正の定数である.

(1) $y = \exp\left[-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$ (2) $y = \tan^{-1} x^2$

(奈良女子大 2015) (m20153201)

0.28 与えられた条件の下で, 以下の関数を微分せよ.

(1) $y = xe^x$

(2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$, ($\sigma$および m は正の定数)

(3) $y = \sin^{-1} x$ (x のとりうる値は $\left[-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right]$ を満たす範囲のみとする)

(奈良女子大 2018) (m20183204)

0.29 ある事象の起こる確率 p が与えられているとき，n 回の独立試行を行って事象が k 回起こる確率を b_k とする（これをパラメータ n, p の二項分布という）. なお，以下の問いでは，$q = 1-p$ として，次の二項定理を利用してよい. $(px+q)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k p^k q^{n-k} x^k$

ここで，${}_nC_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ は二項係数である.

(1) 確率 b_k を記し，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k = 1$ となることを示せ.

(2) 二項分布の平均値 μ と分散 σ^2 を求めよ.

(3) 事象が起こる回数を確率変数 r として，r に関するチェビシェフの不等式を次式で表す.

$$P(|r-\mu| \leq a\sigma) \geq 1 - \frac{1}{a^2}$$

ここで，a は適当な正の数である. 試行回数を増やせば，事象の起こる割合は一定の値 p に近づくことを示せ.

(京都大 2006) (m20063303)

0.30 確率密度 X の確率密度関数が $f(x)$ で与えられているとき, 積率母関数 $M_X(t)$ を $M_X(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$ で定義する. また, 2 つの関数 $p(x)$, $q(x)$ の合成積 $p*q(x)$ を $p*q(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p(u)q(x-u)du$ で定義する. 以下の (1)〜(3) に答えよ. ただし, 計算に必要となる確率密度関数の積分に関する仮定は適宜用いてよい.

(1) 確率変数 X, Y は互いに独立で, 同時確率密度関数が $f(x)g(y)$ で与えられているとする. このとき, 確率変数 $Z = X + Y$ の確率密度関数 $h(z)$ が $h(z) = f * g(z)$ で与えられることを示せ.

(2) 独立な確率変数 X, Y に対し, $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$ がなりたつことを示せ.

(3) 確率変数 X の平均 m_X と分散 σ_X^2 は, それぞれ次のように与えられることを示せ.

$$m_X = \left.\frac{dM_X}{dt}\right|_{t=0}, \ \sigma_X^2 = \left.\frac{d^2M_X}{dt^2}\right|_{t=0} - \left(\left.\frac{dM_X}{dt}\right|_{t=0}\right)^2$$

(京都大 2010) (m20103303)

0.31 X, Y は独立で，いずれも平均 0，分散 σ^2 を持つ確率変数であり，s, t, λ は実定数とする．2 つの確率変数

$$S = X\cos\lambda s + Y\sin\lambda s, \quad T = X\cos\lambda(s+t) + Y\sin\lambda(s+t)$$

を考えるとき，次の問に答えよ．

(1) S, T の平均，分散，共分散を求めよ．

(2) S, T の相関係数を求めよ．

(大阪大 2001) (m20013509)

0.32 正の値をとる確率変数 X が確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}x^{-1}\exp\left\{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (x > 0\,,\ \mu \in \mathbb{R}\,,\ \sigma^2 > 0)$$

をもつとし，$Y = \log X$ とする．

(1) $n = 1, 2, \cdots$ に対して，Y^n の期待値を $g_n = E[Y^n]$ とする．このとき，

$$g_{n+2} = \mu g_{n+1} + (n+1)\sigma^2 g_n$$

が成り立つことを示せ.

(2) $n = 1, 2, \cdots$ のとき，$E[(Y-\mu)^n]$ を求めよ.

(大阪大 2009) (m20093508)

0.33 以下の問題に対して全て有効数字 3 桁で答えよ.

(1) 次の問いに答えよ.

(1-1) 区間 [1, 6] 上の一様分布の平均を求めよ.

(1-2) ある企業の工場 A, B, C が不良液晶ディスプレイを製造する確率はそれぞれ 5%, 4%, 2% である．その企業で生産される全液晶ディスプレイの 40% が工場 A で，40% が工場 B で，20% が工場 C で製造されている．もしその企業の液晶ディスプレイの中から取り出した一台が不良品だったとき，その不良液晶ディスプレイが工場 A で製造されたものである確率を求めよ.

(2) 200 人が受験した試験において無作為に 5 名の受験生を抽出した所，以下の標本を得た．次の問いに答えよ.

	学生 A	学生 B	学生 C	学生 D	学生 E
数学の得点	50	50	50	50	60
電磁気学の得点	90	60	70	75	80

(2-1) 数学の得点の標本平均 $\bar{x}$，標本分散 s_x^2，不偏分散 u_x^2 を求めよ.

(2-2) 数学の得点の母分散が $\sigma_x^2 = 45$ の場合，母平均 μ_x の 95% 信頼区間を求めよ．数値計算に際して，必要ならば標準正規分布表を用いよ.

(2-3) 数学と電磁気学の得点の相関係数 ρ を求めよ．

(大阪大 2018)　　(m20183504)

0.34 ある製品の切断寸法は，正規分布に従っているという．いま，9 個の切断寸法を測定して，次のデータを得た（単位は cm）．

$$\{4.8 \quad 5.3 \quad 4.7 \quad 5.5 \quad 5.6 \quad 4.9 \quad 5.8 \quad 5.1 \quad 4.5\}$$

(1) 平均値を計算しなさい．　(2) 分散を計算しなさい．

(3) 切断寸法のねらい値は 5.0(cm) である．また，切断寸法の分散 σ^2 は従来から $\sigma^2 = 0.4^2$ であるという．切断寸法の平均値がねらい値どおりと言えるかどうか，危険率 5%で検定しなさい．ただし，危険率 5%のときの標準正規分布における検定の棄却域 z は，$|z| > 1.96$ である．

(鳥取大 2008)　　(m20083910)

0.35 xyz 空間において，　$z = e^{-(x^2+y^2)}$　で表される曲面 Σ がある．以下の問いに答えよ．

(1) 曲面 Σ と　$z = 0,\ x^2 + y^2 = na^2$　によって囲まれる部分の体積 V_n を求めよ．ただし，n は自然数である．

(2) 曲面 Σ と　$z = 0,\ x = a,\ x = -a,\ y = a,\ y = -a$　によって囲まれる部分の体積を V とする．xy 平面において，　$y = e^{-x^2},\ y = 0,\ x = a,\ x = -a$　で囲まれる部分の面積を S とした時，V と S の関係を示せ．

(3) V を $V_1,\ V_2$ と比較することによって，　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$　を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084708)

0.36 W を荷重, ρ を密度, g を重力の加速度, $A(x)$ を面積とするとき, ある工学の問題において次式を満足する $A(x)$ を求めることが必要になる. 次の問に答えなさい. ただし, W , ρ および g は一定とする.

$$\sigma_0 A(x) = W + \int_0^x \rho g A(t) dt\ ,\ \ A_0 = A(0) > 0\ ,\ \ \sigma_0 = \frac{W}{A(0)}$$

(1) 上式の両辺を x で微分した式を求めなさい.

(2) (1) で得られた式を解いて, $A(x)$ を求めなさい.

(大分大 2004)　　(m20045103)

0.37 ある工場で製造される製品の重さ（単位 kg）が正規分布 $N(2,\ 0.0016)$ に従っているとする．ある日，100 個の製品を抜き取り，重さを測定したところ平均が 2.011kg であった．この日の製品が，平常と比べて重くなっているといえるか．危険率（有意水準）1% で検定しなさい．なお，解答にあたっては，次の定理および正規分布表を用いてよい．

定理 $X_1,\ X_2,\ \cdots X_n$ が，正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ に従う独立な確率変数であるとき，

$\overline{X} = \dfrac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ は正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$ に従う．

よって，$\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ は正規分布 $N(0, 1)$ に従う．

(和歌山大 2008)　　(m20086503)