

[選択項目] 年度：1991～2023 年 文中： sin

0.1 次の微分方程式を解け.

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = t \sin t$$

(北海道大 1997) (m19970101)

0.2 z は複素数である.

(1) $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 \geq 1$ を証明せよ.

(2) 方程式 $\sin z = 2$ を解け.

(北海道大 1997) (m19970104)

0.3 円柱座標 (r, θ, z) が直交座標 (x, y, z) によって定義されるとき (1) から (3) の問いに答えよ.

円柱座標 (r, θ, z) と直交座標 (x, y, z) の関係は以下の通りである.

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z \quad (r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

(1) 円柱座標 (r, θ, z) が直交曲線座標であることを示せ.

(2) 円柱座標 (r, θ, z) の基本ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ を求めよ.

(3) 曲面 $z = x^2 + y^2$ と $z = 18 - (x^2 + y^2)$ で囲まれた領域を V とするとき,

$$\text{積分} \int_V \sqrt{x^2 + y^2} dV \text{ の値を求めよ.}$$

(北海道大 2003) (m20030101)

0.4 $f(x) = |\sin x|$ をフーリエ級数展開せよ.

(北海道大 2003) (m20030104)

0.5 以下の問いに答えよ. ただし, j は虚数単位とする.

(1) 次の複素数を極形式 $re^{j\theta}$ (r, θ は実数) で表せ.

(a) $1 + j$ (b) j

(2) 次の複素数を $x + jy$ (x, y は実数) の形で表せ. また, 複素平面上に図示せよ.

(a) j の平方根 (b) $\frac{1+j}{1-j}$ の 3 乗根

(3) 複素数 $z_R = \cos \theta + j \sin \theta$ を 0 でない複素数 z_1 に乗ずると, 答えは z_1 が複素平面上で θ だけ回転したものになることを示せ.

(北海道大 2004) (m20040104)

0.6 z, w は複素数であり, $i = \sqrt{-1}$ である. また, x, y, r, θ は実数である.

(1) 複素数 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ が与えられたとき, $w^n = z$ (n は正の整数) の根は n 個であり,

$$w_k = r^{1/n} \left(\cos \frac{\theta + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1)$$

と表せることを示せ.

(2) 方程式 $w^5 = 1$ を満たす 1 つの解が, $w = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ$ と表せることを示せ. また, $\cos 72^\circ$ の値を求めよ.

(3) 複素数 $z = x + iy$ が与えられたとき, 関数 $w(z) = e^z$ が正則であることを証明せよ.

(北海道大 2009) (m20090101)

0.7 以下の設問に答えよ. 途中の計算手順を詳しく記述すること.

- (1) $w = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$,
 $\alpha_k = a_k + ib_k$ ($k = 0, 1, \dots, n$) とするとき, w の実部 $Re(w)$ および $Im(w)$ を求めよ.
- (2) $f(z) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$ ($z = x + iy$) が正則か否かを調べよ.
- (3) 次の式を証明せよ.

$$\frac{d}{dz} \sin^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

(北海道大 2011) (m20110103)

0.8 i, j, k をそれぞれ x, y, z 方面の単位ベクトルとして, 以下の設問に答えよ. 途中の計算手順を詳しく記述すること.

- (1) 積分経路 $C: \mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$ ($t = 0$ から $t = 2\pi$) に沿った, ベクトル関数 $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ の線積分 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ を求めよ.
- (2) $f(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + 1}}$ ($\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) とし, 原点を中心とする半径が 2 の球の表面を S と表す. このとき, S 上の点 $\mathbf{p} = x_p\mathbf{i} + y_p\mathbf{j} + z_p\mathbf{k}$ における $\nabla f \cdot \mathbf{n}$ を求めよ. ただし, \mathbf{n} は \mathbf{p} における S の外向き単位法線ベクトルであり, $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$ とする.

(北海道大 2012) (m20120102)

0.9 以下の設問に答えよ. 途中の計算手順を詳しく記述すること.

- (1) $f(x) = x$ を区間 $[-\pi, \pi]$ 上でフーリエ級数に展開した結果が

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(nx)}{n}$$
 となることを示せ.
- (2) $-\pi \leq a \leq \pi$ を満たす任意の定数 a に対して, x の区間 $[-\pi, \pi]$ において

$$x^2 = a^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx) - \cos(na)}{n^2}$$
 が成立することを示せ.
- (3) (2) の結果を用いて, x の区間 $[-\pi, \pi]$ において

$$x^3 - \pi^2 x = 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(nx)}{n^3}$$
 を導け.

(北海道大 2012) (m20120104)

0.10 f を周波数とするととき, 時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

で与えられる. ここで, $i = \sqrt{-1}$ である. ある関数 $m(t)$ のフーリエ変換を $M(f)$ とするとき, オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を利用して, $m(t) \cos(2\pi f_0 t)$ のフーリエ変換が $M(f - f_0)$ および $M(f + f_0)$ を用いて表せることを示せ.

(北海道大 2014) (m20140103)

0.11 デカルト座標系 (x, y) と極座標 (r, θ) の関係が次のように与えられている. このとき, 以下の設問に答えよ.

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

(1) 次の行列 J のすべての成分を r, θ の式で表せ.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

(2) 次の積分 A を求めよ. ただし $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ とする.

$$A = \int_D x^2 dx dy$$

(3) 次の行列 G のすべての成分を r, θ の式で表せ. ただし $r > 0$ とする.

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

(北海道大 2015) (m20150101)

0.12 次の各設問に答えなさい.

設問 1. 微分方程式 $\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = 10 \sin x$ の一般解を求めなさい.

設問 2. 微分方程式 $2xy\frac{dy}{dx} + x^2 - y^2 = 0$ の一般解を求め, xy 平面上でどのような図形となるかを説明しなさい.

(北海道大 2018) (m20180101)

0.13 次式の関数について, 次の各設問に答えなさい. ただし, $0 < D < 1$ とする.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < -D\pi) \\ 1 & (-D\pi \leq x < D\pi) \\ 0 & (D\pi \leq x < \pi) \end{cases}$$

設問 1. 次式で示されるフーリエ級数の各係数を求めなさい.

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

設問 2. 上式において, n が偶数の項の係数がすべて 0 となる D の条件を求めなさい.

(北海道大 2018) (m20180105)

0.14 次の微分方程式を解き, その一般解を求めなさい. ただし, 途中の計算手順についても詳しく記述すること.

$$(1) \frac{dy}{dx} = -\frac{2y^2 + 3}{3x^2 y}$$

$$(2) \frac{d^3 y}{dx^3} + 2\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 9e^{2x} = 4 \sin x$$

(北海道大 2019) (m20190101)

0.15 周期 2π の関数

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi \leq x < \pi)$$

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

について, 次式のようにフーリエ級数展開したとき, 各係数 a_0, a_n, b_n を求めなさい.

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

(北海道大 2020) (m20200105)

0.16 (1) 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

$$\frac{dy}{dx} + y \cos x = \sin x \cos x$$

(2) 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

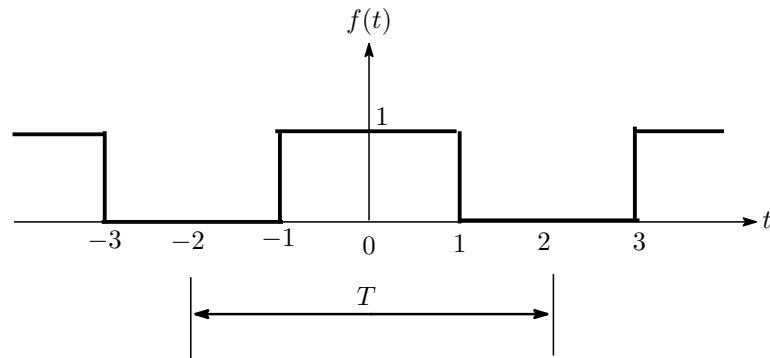
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \sin 2x$$

(北海道大 2022) (m20220101)

0.17 次の図のような矩形パルス (周期 $T = 4$) をフーリエ級数展開するとき,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \left(2\pi \frac{n}{T} t \right) + b_n \sin \left(2\pi \frac{n}{T} t \right) \right\}$$

で表すことができる. 以下の設問に答えなさい.



(1) a_0, a_n および b_n を T を用いた式で表しなさい.

(2) $T = 4$ のときの a_0, a_n および b_n を求めなさい.

(北海道大 2022) (m20220104)

0.18 次の関数の偏導関数 z_x, z_y を求めよ.

(1) $z = \sin(ax + by)$ (2) $z = x^y \quad (x > 0)$

(北見工業大 2004) (m20040203)

0.19 次の関数を微分せよ.

(1) $y = (3x + 2)^5$ (2) $y = x^2 \sin x$

(北見工業大 2005) (m20050201)

0.20 次の積分を求めよ.

(1) $\int \frac{1}{x^2 - 4} dx$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$

(北見工業大 2005) (m20050204)

0.21 (1) $y = x \sin 2x$ を微分せよ.

- (2) $z = xy^2 + e^x$ とする. 偏導関数 z_x, z_y を求めよ.
(北見工業大 2005) (m20050207)
- 0.22** (1) $\int x \log x dx$ を求めよ.
(2) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ を, $x = \sin \theta$ という置換積分によって求めよ.
(北見工業大 2005) (m20050208)
- 0.23** 次の関数を微分せよ.
(1) $y = x^3 \sin x$ (2) $y = \log(x^2 + 1)$
(北見工業大 2006) (m20060201)
- 0.24** 次の積分を求めよ.
(1) $\int_0^1 (1+x) dx$ (2) $\int \cos^3 x dx$ (ヒント: $t = \sin x$ という置換積分)
(北見工業大 2006) (m20060204)
- 0.25** 次の関数 z の偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.
(1) $z = xy^2 + y^3$ (2) $z = \sin(x^2 y)$
(北見工業大 2007) (m20070202)
- 0.26** 次の関数を微分せよ.
(1) $y = \sin(x^3 + 2)$ (2) $y = x \log x$
(北見工業大 2008) (m20080201)
- 0.27** 平面的直交座標 (x, y) と極座標 (r, θ) の間には $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ の関係がある. ただし, $r > 0$ とする. $z = f(x, y)$ を平面上で定義された 1 回連続微分可能関数とするとき, 以下の問いに答えよ.
(1) $\frac{\partial z}{\partial r}$ および $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ を $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 等を用いて表せ.
(2) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$ を示せ.
(北見工業大 2009) (m20090203)
- 0.28** 次の関数を微分せよ.
(1) $y = (2x - 3)^5$ (2) $y = \sin x^2$
(3) $y = (x^2 + 1) \log(x^2 + 1)$ (4) $y = e^{-2x} \cos x$
(北見工業大 2010) (m20100201)
- 0.29** 次の積分を計算せよ.
(1) $\int_0^1 (x^2 + 2x + 1) dx$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$
(北見工業大 2010) (m20100203)
- 0.30** 関数 $z = x \sin(x + 2y)$ の偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.
(北見工業大 2011) (m20110202)

- 0.31** $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, $D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ を求めよ.
 $\left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right. \quad \text{とおくとよい.} \end{array} \right)$
(北見工業大 2011) (m20110205)
- 0.32** 2変数関数 $z = x \sin y$ につき偏導関数 z_x, z_y を求めよ. (北見工業大 2013) (m20130202)
- 0.33** 次の不定積分を求めよ.
(1) $\int \sin^3 x \cos x dx$
(2) $\int x \log x dx$
(北見工業大 2013) (m20130204)
- 0.34** 次の積分を求めよ.
(1) $\int (3x - 1)^5 dx$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + 1) \sin x dx$
(北見工業大 2014) (m20140202)
- 0.35** 次の関数を微分せよ.
(1) $y = x^2 \sin x$ (1) $y = \sqrt{1 + e^x}$
(北見工業大 2015) (m20150201)
- 0.36** 次の積分を求めよ.
(1) $\int \tan x dx$ $\left(\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{である.} \right)$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx$
(北見工業大 2015) (m20150204)
- 0.37** $z = x \sin(xy^2)$ とする. 偏導関数 z_x, z_y を求めよ.
(北見工業大 2016) (m20160202)
- 0.38** 関数 $y = e^{-x} \sin x$ (ただし, $0 < x < 2\pi$ の範囲で考える) について次の問 (1), (2) に答えよ.
(1) y' および y'' を計算せよ.
(2) y', y'' の符号を調べ, 増減・凹凸がはっきりわかるようにグラフを描け.
(北見工業大 2017) (m20170204)
- 0.39** 次の積分の値を求めよ.
(1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$ (2) $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{(\log x)^2}{x} dx$
(北見工業大 2018) (m20180201)
- 0.40** 関数 $z = y \sin(x^2 + xy)$ の偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.
(北見工業大 2022) (m20220203)
- 0.41** $\sin \theta + \cos \theta = 1/3$ のとき, 次の値を求めよ.
(1) $\sin \theta \cos \theta$ (2) $\tan \theta + 1/\tan \theta$
(岩手大 1994) (m19940302)
- 0.42** 次の不定積分を求めよ.

$$(1) \int \sin^2 x \cos x dx \quad (2) \int (x+1) \log x dx \quad (3) \int e^{-3x} dx$$

(岩手大 1994) (m19940306)

0.43 次の極限值を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \sin x}{x^3}$$

(岩手大 1998) (m19980305)

0.44 範囲 $-\infty < x < \infty$ で連続な関数 $f(x)$ が次の関係式を満たすとす.

$$f(x) = \sin x + x \int_0^\infty f(t) e^{-t} dt + \int_0^\pi f(t) \cos t dt$$

次の問いに答えよ.

(1) 次の定積分 $I_1, I_2, I_3, J_1, J_2, J_3$ の値を求めよ.

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-t} dt, \quad I_2 = \int_0^\infty t e^{-t} dt, \quad I_3 = \int_0^\infty e^{-t} \sin t dt$$

$$J_1 = \int_0^\pi \cos t dt, \quad J_2 = \int_0^\pi \sin t \cos t dt, \quad J_3 = \int_0^\pi t \cos t dt$$

(2) 上記の関係式に含まれる2つの定積分を、次のように A, B とおく.

$$\int_0^\infty f(t) e^{-t} dt = A, \quad \int_0^\pi f(t) \cos t dt = B$$

A, B の値を求めよ.

(3) 関数 $f(x)$ を求めよ.

(岩手大 1998) (m19980306)

0.45 x - y 平面上の半楕円

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \quad (x \geq 0) \dots\dots\dots (i)$$

と x, y の関数

$$z = 2 + xy + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad \dots\dots\dots (ii)$$

を考える. ただし, 半楕円上の点 (x, y) に対し, 原点と点 $\left(\frac{x}{2}, y\right)$ を結ぶ線分が x 軸となす角を θ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) θ を媒介変数とする半楕円 (i) の媒介変数方程式を求めよ. θ のとる範囲も明示せよ.
- (2) 条件 (i) のもとでの関数 (ii) の極値を求めるために, 関数 (ii) を θ のみの関数として表せ.
- (3) 前問で得られた θ の関数 $z = f(\theta)$ が極値をとる $\cos \theta, \sin \theta$ の値を求めよ.
- (4) $z = f(\theta)$ の極値を求めよ.
- (5) $f(0), f\left(\pm \frac{\pi}{4}\right), f\left(\pm \frac{\pi}{2}\right)$ を求めよ.
- (6) $z = f(\theta)$ のおよそのグラフを描け.
- (7) 媒介変数 θ を用いずに, 条件 (i) のもとでの関数 (ii) の極値を, ラグランジュの乗数法で求めたい. 極値をとる (x, y) の値を求めるための条件式を書け.
- (8) 極値をとる (x, y) の値を求めよ.

(岩手大 1998) (m19980308)

0.46 次の問いに答えよ.

(1) $f(\theta) = \sin \theta$ を, 以下のマクローリンの定理を用いて無限級数へ展開せよ.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

(ただし $0 < \theta < 1$)

(2) $f(i\theta) = e^{i\theta}$ を無限級数へ展開せよ. ただし, i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ とする.

(3) $f(\theta) = \cos \theta$ を無限級数へ展開し, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を証明せよ.

(4) $f(t) = 5 + 0.4 \sin \omega t + 0.4 \sin 2\omega t + 0.3 \cos 2\omega t + 0.3 \sin 3\omega t$ を, 以下の形式に書き直した場合の係数 C_2 と C_{-2} を求めよ.

$$f(t) = \sum_{n=-3}^3 C_n e^{in\omega t}$$

(5) $f(t) = 0.4 \sin 2\omega t + 0.3 \cos 2\omega t$ を, 以下の形式に書き直した場合の係数 A を求めよ.

$$f(t) = A \sin(2\omega t + \phi)$$

(岩手大 2004) (m20040303)

0.47 球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ の内部と円柱 $x^2 + y^2 = ax$ の内部の共通部分を考える. ただし, a は正の定数とする. 次の問いに答えなさい.

(1) 球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ と円柱 $x^2 + y^2 = ax$ を図示しなさい.

(2) 極座標 (r, θ) を用い $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とおいて, 球および円柱の方程式を表しなさい.

(3) 共通部分の体積を求めなさい.

(岩手大 2008) (m20080304)

0.48 区間 $[a, b]$ 上の関数 $f(x)$, $g(x)$ は,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

が成り立つとき互いに直交しているという. 以下の問いに答えよ.

(1) 次の (a)~(e) に示した関数が区間 $[-\pi, \pi]$ 上で互いに直交していることをそれぞれ示せ. ただし, k, l はともに自然数である.

(a) $\frac{1}{2}$ と $\cos kx$

(b) $\frac{1}{2}$ と $\sin kx$

(c) $\cos kx$ と $\sin lx$

(d) $\cos kx$ と $\cos lx$ ($k \neq l$)

(e) $\sin kx$ と $\sin lx$ ($k \neq l$)

(2) 区間 $[-\pi, \pi]$ 上の任意の関数 $f(x)$ は, $\frac{1}{2}$, $\cos kx$, $\sin kx$ の線形和によって

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \end{aligned}$$

と表すことができる (これをフーリエ級数展開という). 係数 a_0 , a_k , b_k をそれぞれ $f(x)$ を用いて表せ.

(3) 次の関数 $f(x)$ を区間 $[-\pi, \pi]$ 上でフーリエ級数に展開せよ.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

0.49 関数 $z = \log(x^2 + 2y^2)$ について、次の問いに答えなさい。ただし、対数は自然対数である。

(1) $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ を求めなさい。

(2) 変数 x, y が変数 r, θ の関数

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

で与えられるとき、 $\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めなさい。

(3) (1) および (2) の結果を用いて、次の式が成り立つことを示しなさい。

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

0.50 2階微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \sin \Omega t$$

について、次の問いに答えなさい。ただし、初期条件

$$t = 0 \text{ のとき, } x = \frac{dx}{dt} = 0$$

とする。また、 ω と Ω は正の定数とする。

(1) $\omega \neq \Omega$ のとき、微分方程式の解を求めなさい。

(2) $\omega = \Omega$ のとき、微分方程式の解を求めなさい。

0.51 xy 平面上の曲線 C が極座標では

$$r = 1 + \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

と表されるとき、次の問いに答えなさい。

(1) 曲線 C の概形を図示しなさい。

(2) 曲線 C の囲む面積 S を求めなさい。

0.52 $a^2 + b^2 = 5, a > 0, b < 0$ であるとき、次の微分方程式について以下の問いに答えなさい。

$$(axy - e^x \cos y) dy = (e^x \sin y + by^2) dx$$

(1) この微分方程式が完全微分方程式であるときの a および b の値を求めなさい。

(2) (1) の結果を用いて、この微分方程式を解きなさい。

0.53 2階微分方程式 $y'' + 9y = 0$ について、次の問いに答えなさい。

(1) 関数 $y = A \sin 3x - B \cos 3x$ (A, B は任意定数) は一般解であることを証明しなさい。

(2) 初期条件「 $x = 0$ のとき $y = 1, y' = 3$ 」を満たす特殊解を求めなさい。

(3) 境界条件「 $x = \frac{\pi}{3}$ のとき $y = 1, x = \frac{\pi}{9}$ のとき $y = 1$ 」を満たす特殊解を求めなさい。

(岩手大 2012) (m20120304)

0.54 2階微分方程式 $y'' + 2y' + 2y = -85 \sin 3x$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) $y = 6 \cos 3x + 7 \sin 3x$ が上の微分方程式の1つの解であることを示しなさい。
- (2) (1)の結果を利用して上の微分方程式の一般解を求めなさい。
- (3) $x = 0$ のとき $y = 0$, $y' = 0$ を満たす上の微分方程式の解を求めなさい。

(岩手大 2013) (m20130304)

0.55 次の連立微分方程式について、以下の問いに答えなさい。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + \sin t \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y \end{cases}$$

- (1) $x(t)$ を消去し、 $y(t)$ に関する微分方程式を求めなさい。
- (2) $y = A \sin t + B \cos t$ が(1)で求めた微分方程式の解になるような、適当な定数 A, B を求めなさい。
- (3) (2)の結果を利用して、(1)で求めた微分方程式の一般解を求めなさい。

(岩手大 2014) (m20140304)

0.56 (1) 微分方程式 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$ の一般解を求めなさい。ただし、 $\omega \neq 0$ とする。

(2) $\omega = 1$ のとき、微分方程式 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 2 \sin 3t$ の一般解を求めなさい。

(3) (2)において、 $t = 0$ のとき $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$ を満たす解を求めなさい。

(岩手大 2015) (m20150304)

0.57 2つの曲線 $y = \cos 2x$ ($0 \leq x \leq \pi$), $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) とその曲線によって囲まれた図形 S について、次の問いに答えなさい。

- (1) 2つの曲線を図示し、また図形 S を斜線で図示しなさい。
- (2) 2つの曲線の交点の x 座標を求めなさい。
- (3) 図形 S を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めなさい。

(岩手大 2016) (m20160304)

0.58 関数 $f(x) = e^{-x} \sin x$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) $f(x)$ の第1次導関数と第2次導関数を求めなさい。
- (2) $0 \leq x \leq 2\pi$ における $f(x)$ の増減表を作成し、この範囲における $f(x)$ のグラフの概形をかきなさい。また、極値と変曲点の座標も示しなさい。
- (3) 不定積分 $\int f(x) dx$ を求めなさい。
- (4) 広義積分 $\int_0^\infty f(x) dx$ を求めなさい。

(岩手大 2020) (m20200303)

0.59 次の積分を計算しなさい。

$$(1) \int_a^\infty \frac{dx}{x^2} \quad (a > 0) \qquad (2) \int_0^\pi x \sin^2 x dx$$

(秋田大 2001) (m20010403)

0.60 次の \square 内に当てはまる整数を入れよ。注意：log は自然対数で， π は円周率である。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \square(p) \qquad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log |\cos x|}{x^2} = \frac{1}{\square(q)}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log |1 - x^2|}{\log |\cos x|} = \square(r) \qquad (4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2^{\sin x} - 2}{\log |\sin x|} = \log \square(s)$$

(秋田大 2002) (m20020402)

0.61 次の \square 内に当てはまる整数を入れよ。注意：log は自然対数で， π は円周率である。

$$(1) \int_2^3 \frac{4(3 + 3x - x^2)}{(x-1)^2(x+1)} dx = \log \frac{3}{\square(t)} + \square(u) \qquad (2) \int_0^1 \log x dx = \square(v)$$

$$(2) \int_0^\infty e^{-x} x^4 dx = \square(w) \qquad (4) \int_0^\infty e^{-4x} \sin x dx = \frac{1}{\square(x)}$$

$$(3) \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{\square(y)}$$

(秋田大 2002) (m20020403)

0.62 次の関数について，導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めなさい。

$$(1) y = x^3 e^{-2x} \qquad (2) y = \frac{2x + 1}{\sin x}$$

$$(2) \begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = 2 \sin t - 2t \cos t \end{cases} \qquad (4) x^3 y + 3y^2 + 2x^4 = 0$$

(秋田大 2003) (m20030401)

0.63 次の問いに答えなさい。

(1) 極座標変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ (ただし, $r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) によって, xy 平面上の領域 D が $r\theta$ 平面上の領域 D' に対応しているとする。このとき, 関数 f の重積分について, 次の式が成り立つことを示しなさい。

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

(2) xy 平面上の領域 D が $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ で与えられるとき, 次の重積分の値を求めなさい。

$$\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$$

(秋田大 2003) (m20030402)

0.64 次の関数について, 導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めなさい。

$$(1) y = \sin(\sin x)$$

$$(2) y = x^{\frac{1}{x}} \quad (\text{ただし, } x > 0)$$

(秋田大 2004) (m20040401)

0.65 (1) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ のとき, 行列 $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$ と, その行列式 (determinant) を計算せよ。

(2) 積分 $I = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$ を計算せよ。ただし, R は正の定数で, D は領域 $x^2 + y^2 \leq R^2$ を表す。必要ならば問題 (1) の変数変換を用いよ。

(3) 半径 R の球の体積 V を, 上の問題 (2) の積分 I を用いて表せ. 理由も簡潔に述べること.

(秋田大 2005) (m20050406)

0.66 次の積分を計算せよ. $\int (\cos x)^r \sin x dx$, r は実数

(秋田大 2006) (m20060405)

0.67 次の極限を求め, \square 内に当てはまる整数を入れよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x} = \square$ (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} = \square$ (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x^2}{\log |\sin x|} = \square$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\cos x} - 2}{\log |\cos x|} = \square$ (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log |1 - x^2|}{\log |\cos x|} = \square$

(秋田大 2007) (m20070403)

0.68 次の定積分を求め, \square 内に当てはまる整数を入れよ.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx = \frac{1}{\square} \left(\frac{\pi}{2} + \square \right)$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \cos x dx = \frac{\square}{12}$

(3) $\int_0^2 x \sqrt{4 - x^2} dx = \frac{\square}{3}$ (4) $\int_1^2 x \sqrt{x - 1} dx = \frac{\square}{15}$

(5) $\int_1^e \sqrt{x} \log x dx = \frac{2}{\square} \left(e^{\frac{3}{2}} + \square \right)$ (6) $\int_0^1 x e^{-x} dx = 1 + \frac{\square}{e}$ (7) $\int_1^{\infty} x^2 e^{-x} dx = \frac{\square}{e}$

(秋田大 2007) (m20070404)

0.69 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin x - x}$ を求めよ.

(秋田大 2008) (m20080403)

0.70 関数 $z = f(x, y)$ について, $\frac{\partial z}{\partial x} = x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = y$ が成り立っているとす. r を定数とし, $x = r \cos t$,

$y = r \sin t$ とおく. このとき, $\frac{dz}{dt}$ を求めよ.

(秋田大 2008) (m20080406)

0.71 関数 $f(x, y) = \sin(x^2 + y)$ の 2 次偏導関数をすべて求めよ.

(秋田大 2009) (m20090401)

0.72 次の極限を求め, カッコ内に当てはまる整数を記入せよ.

以下の \arcsin は逆正弦関数のこと, \sin^{-1} と表されることもある.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \square$ (キ) (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1} \right) = \frac{1}{\square}$ (ク)

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(2x)}{x} = \square$ (ケ)

(秋田大 2010) (m20100402)

0.73 次の定積分を求め, カッコ内に当てはまる整数を記入せよ.

以下の \arcsin は逆正弦関数, π は円周率, \log は底が e である自然対数を意味する.

(1) $\int_{-2}^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \square$ (コ) π (2) $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\log 2}{\square} \pi$ (カ)

$$(3) \int_0^1 x^2 \arcsin x \, dx = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{\boxed{(\text{シ})}}$$

(秋田大 2010) (m20100403)

0.74 以下の四角内に当てはまる式を計算し、解答欄の指定した箇所に記入せよ。ここで、 $\arcsin x$ は $\sin x$ の逆関数を表し、 $\sin^{-1} x$ と表されることもある。

$$(1) \frac{d}{dx} \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \boxed{(\text{エ})}$$

$$(2) 0 < x < 1 \text{ とするとき, } \frac{d}{dx} x^{\arcsin x} = \boxed{(\text{オ})}$$

(秋田大 2013) (m20130402)

0.75 $f(x) = \frac{2x - \sin 2x}{x^2}$ とするとき、 $0 < x < \pi$ の範囲での $f(x)$ の最大値と、最大値をとるときの x の値を求めよ。

(秋田大 2013) (m20130406)

0.76 次の不定形の極限を求めなさい。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

(秋田大 2014) (m20140402)

0.77 次の積分を求めよ。

$$(1) \int_0^\pi |\sin(x-a)| dx \quad (a \text{ は } 0 < a < \pi \text{ の定数})$$

$$(2) \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

(秋田大 2016) (m20160402)

0.78 次の積分を求めよ。

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos x \, dx$$

$$(2) \int_0^1 x e^x \, dx$$

(秋田大 2019) (m20190401)

0.79 次の積分を求めよ。

$$(1) \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx$$

$$(2) I = \int_0^{\sqrt{2}} x^2 \sqrt{2-x^2} dx \text{ について次に答えよ.}$$

$$(a) x = \sqrt{2} \sin \theta \text{ とおくととき } \frac{dx}{d\theta} \text{ を求めよ.}$$

$$(b) (a) \text{ を用いて } \theta \text{ で置換積分をして, } I \text{ を求めよ.}$$

(秋田大 2021) (m20210401)

0.80 $f(x)$ は x の多項式で、等式 $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) - f(x-1) = (2x-1)^3 \end{cases}$ を満たす。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) 次の級数の和を計算せよ。

$$(\sin x + 1)^3 + (\sin x + 3)^3 + (\sin x + 5)^3 + \cdots + (\sin x + 2n - 1)^3$$

(東北大 1993) (m19930501)

0.81 2行2列の行列 P と単位行列 E をそれぞれ

$$P = \begin{pmatrix} 1 + \cos x & \sin x \\ \sin x & 1 - \cos x \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。次の問いに答えよ。

- (1) P^2 を計算せよ。
- (2) 正整数 n に対して P^n を求めよ。
- (3) 正整数 n に対して $(P + E)^n$ を求めよ。

(東北大 1994) (m19940503)

0.82 次の問いに答えよ。

- (1) $\sin^4 \theta \cos^2 \theta = a_0 + a_2 \cos 2\theta + a_4 \cos 4\theta + a_6 \cos 6\theta$ とおくとき, a_0, a_2, a_4, a_6 を定めよ。
- (2) 変数変換 $x = a \sin^2 \theta$ ($a > 0$) を用いて, 次の積分の値を求めよ。

$$\int_0^a x \sqrt{ax - x^2} dx$$

- (3) 円柱 $(x - a)^2 + (y - a)^2 \leq a^2$ が, 2平面 $z = ax, z = -ax$ により切り取られる部分の体積を求めよ。ただし, $a > 0$ とする。

(東北大 1995) (m19950501)

0.83 次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $\frac{1}{1-x}$ を

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + R_n(x)$$

とおくとき, $|x| < 1$ の範囲で $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ となることを示せ。

- (2) (1) を利用して, 関数 $\frac{1}{(1-x)^2}$ の x に関するべき級数展開を $|x| < 1$ の範囲で求めよ。
- (3) (2) の結果を利用して, $\sin x$ に関するべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(\sin x)^{2n}$ の和を求めよ。ここに, $|x| < \frac{\pi}{2}$ とする。

(東北大 1996) (m19960501)

0.84 点 $X(x, y)$ を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる点を $X'(x', y')$ とする。

- (1) OX の長さは r であり, OX の方向は x 軸の正のむきを原点 O のまわりに α だけ回転した方向にあるとする。このとき, x, y, x', y' を r, α, θ により表わせ。ただし, 角 θ と角 α の回転の方向は同一であるとする。
- (2) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表わすとき, 2×2 行列 T は $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ となることを示せ。
- (3) 点 $A(x_1, y_1)$, 点 $B(x_2, y_2)$ と原点 O からなる三角形 OAB を考える。三角形 OAB を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる三角形を $OA'B'$ とする。三角形 OAB の面積 S と三角形 $OA'B'$ の面積 S' を与える公式

$$S = \frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|, \quad S' = \frac{1}{2}|x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1|$$

を用いて, $S = S'$ であることを示せ。

- (4) 上記 (3) で定義した三角形 $OA'B'$ の辺 $A'B'$ が直線 $y' = 1$ 上に位置し, $S' = \frac{1}{2}$ であるとする。この場合に, x_1, y_1, x_2, y_2 が満たすべき条件を示せ。

(5) 上記 (4) において, さらに, $x'_1 = 0, x'_2 > 0, \theta = \frac{\pi}{4}$ とする. 三角形 OAB を図示せよ.

(東北大 2001) (m20010503)

0.85 原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径が 1 の球 (単位球) に内接する正四面体を考える. 球の中心から各頂点 A, B, C, D に至る 4 本のベクトルを $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD}$ とし, \vec{OA} を z 軸に, \vec{OB} を xz 平面に置き, その 4 本の内, 任意の 2 本のベクトルのなす角度を θ とする. この時, 各ベクトルの成分は $\vec{OA} = (0, 0, 1), \vec{OB} = (-\sin \theta, 0, \cos \theta), \vec{OC} = (\sin \theta \cdot \cos 60^\circ, -\sin \theta \cdot \sin 60^\circ, \cos \theta), \vec{OD} = (\sin \theta \cdot \cos 60^\circ, \sin \theta \cdot \sin 60^\circ, \cos \theta)$ と表せる.

- (1) $\cos \theta, \sin \theta$ の値を求めよ.
- (2) 単位球と頂点 B で接する平面の方程式を求めよ.
- (3) 正四面体の 1 辺の長さを求めよ.
- (4) 正四面体の体積を求めよ.

(東北大 2004) (m20040503)

0.86 円柱面 $x^2 + y^2 = ax$ と球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ で囲まれ, 不等式 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ を満たす領域を R として, 次の問に答えよ.

- (1) 領域 R の概形を描け.
- (2) 変数変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ のヤコビアン $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.
- (3) 領域 R の体積 V を求めよ.

(東北大 2006) (m20060501)

0.87 x を実数とし, 関数 $f(x)$ を $f(x) = x - \sin x$ と定義する. このとき, 以下の問に答えよ.

- (1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.
- (2) $f'(x) = 0$ を満たすすべての実数 x および $f''(x) = 0$ を満たすすべての実数 x をそれぞれ求めよ.
- (3) 関数 $y = f(x)$ の区間 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ における増減, 極値, グラフの凹凸, 変曲点を調べ, 増減表を書き, グラフの概形を描け.
- (4) 任意の実数 x について不等式 $|x| \geq \sin |x|$ が成り立つことを証明せよ.

(東北大 2006) (m20060502)

0.88 関数 $f(x) = \frac{1}{1 + 2 \sin x}$ を $x = 0$ の近くで 3 次までテーラー展開せよ.

(東北大 2007) (m20070503)

0.89 x, y を実数とし, $0 < x < 2\pi, 0 < y < 2\pi$ の表す領域において, 関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$$

と定義する. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を求めよ.
- (2) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ を満足するすべての点 (x, y) を求めよ.
- (3) $f(x, y)$ の極大値, 極小値を求めよ.
- (4) 曲面 $z = f(x, y)$ 上の $x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2}$ に対応する点における接平面の方程式を求めよ.

(東北大 2007) (m20070505)

0.90 $f(x) = \sin^2 x$ を $x = 0$ の近くで 3 次までテーラー展開せよ.

(東北大 2008) (m20080506)

0.91 x を実数とし, 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sin(a \cos x)$$

と定義する. ただし, a は実数の定数である. $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $a = 1$ のとき $f(x) = 0$ を満たすすべての実数 x を求めよ.
- (2) $a = 1$ のとき $f'(x) = 0$ を満たすすべての実数 x を求めよ.
- (3) $a = \pi$ のとき $y = f(x)$ の区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ における増減, 極値を調べ, 増減表を書き, グラフの概形を描け. ただし, グラフには $y = 0$ となる点の x の値も記すこと.

(東北大 2009) (m20090502)

0.92 xy 平面上の点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる.

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{t}{\pi} \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

ここで, $0 \leq t \leq \frac{3}{2}\pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする. このとき, 以下の問に答えよ.

- (1) $t = \frac{m}{2}\pi$ (ただし $m = 0, 1, 2, 3$) における点 P の座標, およびそれらの点における曲線 C の接線の傾きを求めよ. さらに, 曲線 C の概形を描け.
- (2) 不定積分 $\int t \sin^2 t dt$ を求めよ.
- (3) 曲線 C と x 軸 ($x \geq 0$) および y 軸 ($y \geq 0$) によって囲まれる領域の面積を求めよ.

(東北大 2010) (m20100502)

0.93 z を正の実数とする. 実変数の関数 $f(x)$ に対し, 広義積分 $\int_0^\infty e^{-xz} f(x) dx$ が存在するとき, これを $I[f](z)$ と書くことにする.

- (1) f が区間 $[0, \infty)$ で連続かつ有界であれば, $I[f](z)$ が存在することを示せ.
- (2) a を実数とする. $I[\sin ax](z)$, $I[\cos ax](z)$ をそれぞれ求めよ.

(東北大 2012) (m20120509)

0.94 xy 平面上の点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる.

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$$

ここで, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする.

このとき, 以下の問に答えよ.

- (1) $t = \frac{\pi}{3}$ における点 P の座標, およびその点における曲線 C の接線の傾きを求めよ.
- (2) 曲線 C と x 軸によって囲まれる領域の面積 S を求めよ.
- (3) 曲線 C が x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ.

(東北大 2013) (m20130502)

0.95 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ の関係を用いて、以下の関係が成り立つことを示せ。ただし、 $i = \sqrt{-1}$ である。

(1) $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$

(2) $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$

(東北大 2015) (m20150501)

0.96 $\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) が成り立つことを示せ。

(東北大 2015) (m20150502)

0.97 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) で表される xy 平面上の曲線について、以下の問に答えよ。ただし、 a は正の実数とする。

(1) $\frac{dy}{dx}$ を t の関数として示せ。

(2) この曲線の概形を描き、曲線の全長を求めよ。

(3) この曲線が囲む面積を求めよ。

(東北大 2015) (m20150503)

0.98 x を実数とする。 $n \times n$ 正方行列である $\mathbf{A}_n(x)$ と \mathbf{B}_n を以下のように与える。

$$\mathbf{A}_n(x) = \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -x & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -x \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_n = \mathbf{A}_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

すなわち、 $\mathbf{A}_n(x)$ は対角要素がすべて $-x$ 、その両側の斜めの要素が 1、それ以外の要素がすべて 0 の 3 重対角行列である。 \mathbf{B}_n は $\mathbf{A}_n(x)$ において $x = 0$ としたときの行列である。

(1) \mathbf{B}_2 の固有値をすべて求めよ。

(2) \mathbf{B}_3 の固有値をすべて求めよ。

(3) \mathbf{B}_n の固有値のひとつを λ とする。この λ は $|\mathbf{A}_n(\lambda)| = 0$ を満たすことを示せ。

(4) λ が \mathbf{B}_n の固有値であるとき、 $|\mathbf{A}_n(\lambda)|$ は漸化式 $|\mathbf{A}_n(\lambda)| = -\lambda |\mathbf{A}_{n-1}(\lambda)| - |\mathbf{A}_{n-2}(\lambda)|$ を満たすことを示せ。ただし、 $|\mathbf{A}_0(\lambda)| = 1, |\mathbf{A}_1(\lambda)| = -\lambda$ とする。

(5) $\lambda = -2 \cos \theta, |\mathbf{A}_n(\lambda)| = \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin \theta}$ とおくと、これらが (4) の漸化式を満たすことを示せ。ただし、 $\sin \theta \neq 0$ である。

(6) $\frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin \theta} = 0$ を満たす θ を求めよ。これを使って、 \mathbf{B}_n の固有値 $\lambda = -2 \cos \theta$ を求めよ。また、求めた固有値は、 $n = 2, n = 3$ の場合、それぞれ (1) および (2) で求めた固有値と一致することを示せ。

(東北大 2015) (m20150505)

0.99 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ と定める。

- (1) f は $x = 0$ で連続であることを証明せよ.
 (2) f は $x = 0$ で何回微分可能か.

(東北大 2015) (m20150509)

- 0.100** (1) 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ を求めよ. ただし, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とする.

$$a_1 = 1, a_{n+1} = -a_n + S_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (2) 次の数列が収束するとき, 実数 x の範囲と数列の極限を求めよ.

$$\frac{(2x-1)^n}{3^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (3) ロピタルの定理を用いて, 以下の極限を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$$

(東北大 2016) (m20160503)

- 0.101** (1) 実正方行列が直交行列であることの定義を述べよ.
 (2) 2 次の直交行列は

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (\theta: \text{実数})$$

の形であることを示せ.

- (3) A を n 次直交行列とする. 2 つのベクトル $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $A\mathbf{v}$ と $A\mathbf{w}$ の間の距離は, \mathbf{v} と \mathbf{w} の間の距離に等しいことを示せ. ただし, 距離はユークリッド空間における標準的な距離とする.

(東北大 2016) (m20160506)

- 0.102** オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を用いて, 次の関係が成り立つことを示せ. ただし, $i = \sqrt{-1}$ である.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

(東北大 2018) (m20180501)

- 0.103** 関数 $f(x)$ を, 以下のように定義する. 次の問いに答えよ.

$$f(x) = e^{2x}(\cos^2 x - \sin^2 x) \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

- (1) $f(x) = 0$ となる x を求めよ.
 (2) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ. また, この関数の増減表を示せ.
 (3) k を実数とする. $f(x) = k$ の実数解の個数を求めよ.

(東北大 2018) (m20180502)

- 0.104** xyz 空間における点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる.

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = -a \sin t \end{cases}$$

ここで, a は正の実数である. $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $t = \frac{\pi}{2}$ と $t = \pi$ のそれぞれに対し、点 P の座標とその点における曲線 C の接線方向を表すベクトルを求めよ.
- (2) 曲線 C 上の任意の点 P における接線の方程式を求めよ.
- (3) 曲線 C が平面上の曲線であることを示し、その平面の方程式と単位法線ベクトルを求めよ.
- (4) 曲線 C が xz 平面に投影した曲線で囲まれる領域 D の面積を求めよ.

(東北大 2018) (m20180503)

0.105 \mathbb{R}^2 上の 2 変数関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) $f(x, y)$ は $(x, y) = (0, 0)$ において連続であることを示せ.
- (2) $f(x, y)$ は $(x, y) = (0, 0)$ において全微分可能であるか, 理由とともに答えよ.
 なお, \mathbb{R}^2 内の点 (a, b) の近傍で定義された実数値関数 $g(x, y)$ が $(x, y) = (a, b)$ において全微分可能であるとは, ある定数 α, β が存在して

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{g(a+h, b+k) - g(a, b) - (\alpha h + \beta k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

が成り立つことをいう.

(東北大 2018) (m20180510)

0.106 xy 平面上の点 P の座標 (x, y) が, 実数 t を媒介変数として次の式で与えられる.

$$\begin{cases} x(t) = (1 + \cos t) \cos t \\ y(t) = (1 + \cos t) \sin t \end{cases}$$

ここで, $0 \leq t \leq \pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $x(t)$ および $y(t)$ の増減表を作成し, 曲線 C の概形を図示せよ.
- (2) 曲線 C の長さを求めよ.
- (3) 曲線 C と直線 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ によって囲まれる領域の面積 A を求めよ.

(東北大 2019) (m20190501)

0.107 (1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は収束しないことを示せ.

(2) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right)$ は収束することを示せ.

(東北大 2019) (m20190508)

0.108 微分方程式

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + a^2 u(t) = F(t)$$

について, 以下の問いに答えよ. a は 0 でない実数とする.

- (1) $F(t) = 0$ のとき, 一般解を求めよ.

(2) $F(t) = \sin(at)$ のとき, 一般解を求めよ.

(東北大 2021) (m20210505)

0.109 次の関数 $f(x, y)$ について, 以下の問に答えよ. x, y の範囲はそれぞれ $0 < x < \pi/2, 0 < y < \pi/2$ とする.

$$f(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x - y)$$

(1) 次の偏導関数を求めよ.

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

(2) 次式を満足する (x, y) の値をすべて求めよ.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

(3) $f(x, y)$ の極値をすべて求めよ.

(東北大 2021) (m20210506)

0.110 次の極限值をそれぞれ求めよ

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x - 2} - x + 1)$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

(東北大 2022) (m20220503)

0.111 極座標変換を用いて次に示す重積分を計算する. 以下の問に答えよ.

$$I = \iint_D \frac{x - y}{(x^2 + y^2)^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\}$$

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) 次に示す極座標変換のヤコビ行列とその行列式 (ヤコビアン) を求めよ.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

(3) (2) の極座標変換によって, xy 平面内の領域 D は $r\theta$ 平面内の領域 \bar{D} に対応づけられる. 下図に示す点 $O(0, 0)$ を原点とする r と θ の直交座標を用いて, 領域 \bar{D} を図示せよ.



(4) 重積分 I を計算せよ.

(東北大 2022) (m20220505)

0.112 $D = \{(x, y); 0 \leq x + y \leq \pi, 0 \leq x - y \leq \pi\}$ としたとき,

$$\iint_D (x - y) \sin(x + y) dx dy$$

を求めよ.

(お茶の水女子大 1997) (m19970605)

0.113 m と n を整数として以下の定積分を考えましょう。

$$I(m, n) = \int_0^{2\pi} \sin(mx) \cdot \cos(nx) dx,$$

$$J(m, n) = \int_0^{2\pi} \sin(mx) \cdot \sin(nx) dx,$$

$$K(m, n) = \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cdot \cos(nx) dx,$$

- (1) 任意の m, n に対して $I(m, n)$ を求めてください。
- (2) m と n が異なるときに, $J(m, n), K(m, n)$ を求めてください。
- (3) 周期 2π の関数 $f(x)$ を三角関数で次のように展開します :

$$f(x) = c_0 + c_1 \cos(x) + c_2 \cos(2x) + c_3 \cos(3x) + \cdots + a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x) + \cdots$$

このとき, 係数 c_1, a_2 を求めてください。

(お茶の水女子大 1998) (m19980602)

0.114 次の計算をせよ。ただし, $\log x$ は自然対数であり, $\ln x$ と同じである。

$$(1) \frac{d}{dx} \sin^2 x \quad (2) \frac{d}{dx} \cos(x^3) \quad (3) \frac{d}{dx} \log(\sqrt{x^2+1} + x) \quad (4) \frac{d}{dx} 2^x \quad (5) \frac{d}{dx} x^x$$

(お茶の水女子大 1999) (m19990601)

0.115 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow +0} x^3 \log x \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^2} \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} (1+e^x)^{1/x} \quad (5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x + \sin x}{x}$$

(お茶の水女子大 1999) (m19990602)

0.116 次の計算をせよ。ただし, $\log x$ は自然対数であり, $\ln x$ と同じである。

$$(1) \int \sin 3x dx \quad (2) \int x \cos x dx \quad (3) \int \log x dx \quad (4) \int \frac{1}{x^2-1} dx \quad (5) \int_0^{\infty} e^{-2x} dx$$

(お茶の水女子大 1999) (m19990605)

0.117 (1) 次の級数の収束・発散を言え。

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$$

(2) 次の関数のマクローリン展開 ($x=0$ のまわりの Taylor 級数展開) とその収束半径 ρ を例に従ってかけ。

$$(例) \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots (\rho=0)$$

$$(i) \frac{1}{1+x^2} \quad (ii) e^x \quad (iii) \sin x$$

(お茶の水女子大 1999) (m19990607)

0.118 図の様に, x, y 平面上の座標が (x, y) で表される点 P を原点 O のまわりに角度 α だけ回転すると, 座標が (x', y') の点 P' に移った。以下の問に答えよ。

(1) 点 P の原点 O からの距離を r , O から P に到るベクトルが x 軸の正の方向となす角度を θ とすると, x と y は

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

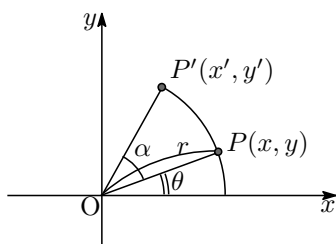
と表される。この時 x' と y' を r, θ, α で表わせ。

- (2) x' と y' を x と y と α で表す関係式をもとめよ.

但し, 必要があれば, 以下の三角関数に関する公式を用いてもよい.

$$\begin{aligned} \sin(\theta + \alpha) &= \sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha, & \sin(\theta - \alpha) &= \sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha \\ \cos(\theta - \alpha) &= \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha, & \cos(\theta + \alpha) &= \cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha \end{aligned}$$

- (3) 複素数 z は, 2乗すると-1となる i と称する虚数を導入して, 実数 x と y を用いて $z = x + iy$ と定義される. この時, x と y は複素数 z の実部と虚部と呼ばれる. 今, 上記の点 P の座標 x と y とを実部と虚部に持つ複素数を z , 点 P' の座標 x' と y' とを実部と虚部に持つ複素数を z' としよう. この時 z' を z で表すとどうなるか, 議論せよ. 但し, 必要ならばオイラーの有名な公式: $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$ を用いてもよい.
- (4) 上記のオイラーの有名な公式を知っていると, 上記の三角関数の公式は導出できるだろうか. 「YES, NO,あるいは分からない」で答えよ.



(お茶の水女子大 1999) (m19990610)

- 0.119** (1) 関数 $\sin x$, $\sin^2 x$ および $x^2 - \sin^2 x$ の原点における Taylor 展開を 4 次の項まで示せ. ただし, $\sin^2 x$ は $(\sin x)^2$ の意味である.

- (2) 必要なら上の計算を利用して, 不定形の極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$ を計算せよ.

(お茶の水女子大 2000) (m20000606)

- 0.120** 変数変換 $t = \tan(\theta/2)$ を用いて三角関数の積分を計算してみよう.

- (1) $\cos \theta$ と $\sin \theta$ は変数 t を用いて, 以下のように表せることを示せ.

$$\cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin \theta = \frac{2t}{1 + t^2}$$

- (2) 次の関数式を示せ.

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{2}(1 + t^2)$$

- (3) 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{d\theta}{\sin \theta}, \quad \int \frac{d\theta}{\cos \theta}$$

ただし, もし必要であれば以下の公式を用いて良い.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

(お茶の水女子大 2001) (m20010604)

- 0.121** 以下に与えられる 3 行 3 列の行列 A を考える.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

また, xyz 座標系の基底ベクトルを \vec{e}_x , \vec{e}_y , および \vec{e}_z と表す.

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (1) $A\vec{e}_x, A\vec{e}_y, A\vec{e}_z$ を計算せよ.
 (2) 行列式 $\det A$ を計算せよ.
 (3) 逆行列 A^{-1} を求めよ.
 (4) 基底ベクトル $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ を三辺とする立方体を考える. 変換 A によって, その体積は何倍に変換されるか.

(お茶の水女子大 2001) (m20010610)

0.122 次の極限が存在するように定数 a, b, c を定め, そのときの極限を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \cos x + a + bx + cx^2}{x^3}$$

(お茶の水女子大 2003) (m20030602)

0.123 次の計算をせよ.

$$(1) \int_0^x (x-t) \sin t dt \quad (2) \int_0^\infty x e^{-x} dx$$

(お茶の水女子大 2003) (m20030604)

0.124 (1) 2変数関数 $g(x, y)$ が2回連続微分可能であるとき, それと $x = f_1(r, \theta) = r \cos \theta, y = f_2(r, \theta) = r \sin \theta$ の合成関数 $h(r, \theta) = g(r \cos \theta, r \sin \theta)$ について次の等式が成立することを示せ. ただし, $r \neq 0, (x, y) \neq (0, 0)$ とする.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

(2) 2変数関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) の近傍 $V = \{(x, y) | \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r\}$ で2回連続微分可能であるとする. 次の条件

$$\frac{\partial}{\partial x} f(a, b) = \frac{\partial}{\partial y} f(a, b) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(a, b) > 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(a, b) \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(a, b) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(a, b) \right)^2 > 0$$

を満たすとき, $f(x, y)$ は (a, b) で極小であることを示せ. すなわち,

$$U = \{(x, y) | \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r'\} \quad (r' \leq r) \text{ があって, } (x, y) \in U - \{(a, b)\} \text{ ならば}$$

$f(x, y) > f(a, b)$ が成り立つことを示せ.

(お茶の水女子大 2003) (m20030607)

0.125 次の不定積分を求めなさい.

$$(1) \int x e^{x^2} \sin x^2 dx$$

$$(2) \int \frac{x^3 + 3}{x^2 - 2x + 2} dx$$

(お茶の水女子大 2009) (m20090604)

0.126 2次元のベクトル場 $\mathbf{A}(x, y) = (A_x(x, y), A_y(x, y))$, に対して, $\operatorname{div} \mathbf{A}$ は

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}$$

で与えられる. $\operatorname{div} \mathbf{A}$ を極座標 $(x = r \cos \theta, y = r \sin \theta)$ であらわすと

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}$$

となることを示せ. ここで, A_r は \mathbf{A} の r 方向 (動径方向) 成分, A_θ はそれに垂直な方向の成分である.

(お茶の水女子大 2009) (m20090610)

0.127 次の関数を微分せよ.

- (1) x^{x^x}
(2) $\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (主値でかんがえること)

(お茶の水女子大 2010) (m20100601)

0.128 二次元平面上で x, y 座標軸を反時計回りに θ だけ回転させた座標軸を x', y' とする. ある点 P の位置 (x, y) はこの新しい座標軸では (x', y') と表されるが, 両者の間には次のような関係がある:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \textcircled{1}$$

以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 A とその転置行列 A^T の積 AA^T を求めよ.
(2) 行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \textcircled{2}$$

とするとき, BB^T は前問の AA^T に等しいことを示せ. また, A が 2 次元平面上での座標軸の回転を表していたのに対し, B は何を表すかを説明せよ.

- (3) A, B のような行列は直交行列と呼ばれる. 前問で見たような行列 A と B の違いは直交行列のどのような性質によるのか, 答えよ.

(お茶の水女子大 2010) (m20100606)

0.129 次の関数 $f(x)$ について以下の問いに答えよ.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \leq 0 \\ x \cos x & x > 0 \end{cases}$$

- (1) 関数 $f(x)$ は $x = 0$ で連続か?
(2) 関数 $f(x)$ は微分可能か? 微分可能ならば導関数を記しなさい.
(3) 関数 $f(x)$ は $x = 0$ で何回まで微分可能か?

(お茶の水女子大 2010) (m20100609)

0.130 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\int \frac{1}{x^2-1} dx$ (2) $\int e^x \sin x dx$

(お茶の水女子大 2010) (m20100610)

0.131 すべての実数 x について, 不等式

$$\cos x + \sin x \geq 1 + x - \frac{2}{\pi} x^2$$

が成り立つことを示せ.

(お茶の水女子大 2011) (m20110610)

0.132 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ を次式で定義する.

$$\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

ここで e^x は指数関数を表す.

- (1) 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ の微分を求めよ.
 (2) 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ の無限級数展開の最初の 3 項目までを求めよ.
 (3) 次の関係式 (加法定理) を示せ.

$$\sinh(\alpha + \beta) = \sinh \alpha \cosh \beta + \cosh \alpha \sinh \beta$$

- (4) 上の関係式 (加法定理) から, 正弦関数 ($\sin \theta$) の加法定理を導け. ただし, 次のオイラーの関係式は仮定して良い.

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(お茶の水女子大 2012) (m20120603)

0.133 次の方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi(\mathbf{r}) = a\delta(\mathbf{r}), \quad (\text{a})$$

に関する以下の問いに答えなさい. ここで右辺の a は正の実数, $\delta(\mathbf{r})$ は 3 次元のデルタ関数

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{b})$$

である.

- (1) 関数 $\phi(\mathbf{r})$ のフーリエ変換を

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) \quad (\text{c})$$

とした時, これが方程式 (a) を満たすということから関数 $\tilde{\phi}(\mathbf{k})$ を求めなさい.

- (2) 積分要素 $d\mathbf{k}$ の直交座標系 (k_x, k_y, k_z) から極座標系 (k, θ, ϕ) への変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} = \int_0^{\infty} dk \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi |J| \quad (\text{d})$$

で与えられる. このときのヤコビアン J を書きなさい. ここで $k = |\mathbf{k}|$ である. また (d) の右辺が

$$\int_0^{\infty} k^2 dk \int_{-1}^1 d\cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi \quad (\text{e})$$

と書けることを示しなさい.

- (3) 問 (1) で求めた $\tilde{\phi}(\mathbf{k})$ を使って, (c) から $\phi(\mathbf{r})$ を求めなさい. 必要があれば, 公式

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{f})$$

を用いてもよい.

(お茶の水女子大 2013) (m20130606)

0.134 (1) $\sin x$ のマクローリン展開を求めよ.

- (2) $\sin 1$ の近似値を小数第 3 位を四捨五入して小数第 2 位まで求めよ.

(お茶の水女子大 2013) (m20130607)

0.135 次の関数を微分せよ.

- (1) $y = x^x$ (2) $y = \sin(\cos(x^2))$

(お茶の水女子大 2016) (m20160608)

0.136 逆三角関数 $f(x) = \sin^{-1} x$ (ただし, $-\pi/2 \leq f(x) \leq \pi/2$) について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $y = f(x)$ のグラフを描け.
 (2) $\cos(\sin^{-1} x)$ を求めよ.

- (3) $f(x)$ を x で微分せよ.
 (4) $f(x)$ の不定積分を求めよ.
 (5) $y = f(x)$ として $y''(1-x^2) = y'x$ がり立つことを示せ.
 (6) $f(x)$ をマクローリン展開せよ.

(お茶の水女子大 2017) (m20170605)

0.137 極限値を求めよ. (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \cos x}{x}$

(お茶の水女子大 2017) (m20170609)

0.138 $x = \sin x$ を満たす x の実数解はいくつあるか答えよ. またその根拠も示せ.

(お茶の水女子大 2017) (m20170610)

0.139 整数 n に対して, $x \neq 0$ のとき $f_n(x) = x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $f_n(0) = 0$ として \mathbb{R} を定義域とする関数 f_n を定める.

- (1) f_n の $x \neq 0$ における微分係数 $f'_n(x)$ を求めよ. また f_1 は $x = 0$ で微分可能でないことを確かめよ.
 (2) 自然数 m に対して $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上定義された f_n の m 階導関数 $f_n^{(m)}$ が存在する. 適当な多項式 P_m, Q_m に対して, $x \neq 0$ で

$$f_n^{(m)}(x) = x^{n-2m} \left(P_m(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) + Q_m(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

が成り立ち, $P_m(0), Q_m(0)$ のうち一方だけが 0 でないことを示せ. また $n > 1$ のとき, $f_n^{(m)}$ が \mathbb{R} 全体で定義されるための m の条件を求めよ.

- (3) $n \leq 0$ のとき, 広義積分

$$\int_0^1 f_n(x) dx$$

の収束, 発散を調べよ.

(お茶の水女子大 2018) (m20180601)

0.140 以下の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x - 7x^3}{x^3}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3 \sin 4x)}{x}$

(お茶の水女子大 2018) (m20180604)

0.141 以下の (1)~(3) に答えよ.

- (1) 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

$$x^2 \frac{dy}{dx} - xy - y^2 = 0$$

- (2) 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 2x + 3$$

- (3) 以下の微分方程式を () 内の初期条件のもとで解け.

(a) $\cos x \cos^2 y + \frac{dy}{dx} \sin^2 x \sin y = 0$ $\left(x = \frac{\pi}{2}, y = 0\right)$

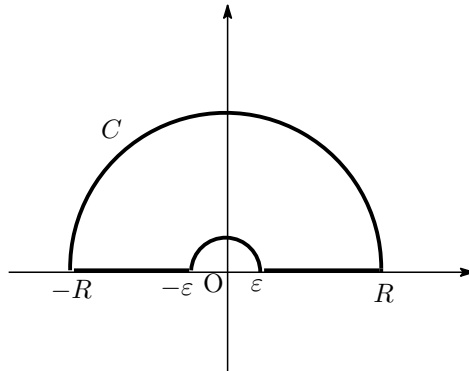
(b) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$ $\left(x = 0, y = 1 \text{ and } x = \frac{\pi}{4}, y = 0\right)$

(お茶の水女子大 2019) (m20190601)

0.142

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz$$

を下图のような複素平面上の経路 C で計算することにより, $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ の値を求めよ.



(お茶の水女子大 2019) (m20190610)

0.143 次の式で定義される実対称行列 A を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを全て求めよ.
- (2) 任意の 3 次元ベクトルが行列 A の固有ベクトルの線形結合で表されることを示せ.
- (3) 行列 $\sin\left(\frac{1}{2}\pi A\right)$ とその固有値を求めよ.

(お茶の水女子大 2020) (m20200605)

0.144 以下の極限值を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} \qquad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x}$$

(お茶の水女子大 2020) (m20200613)

0.145 $a \neq 0, b \neq 0$ のとき, 次の不定積分を求めよ.

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx$$

(お茶の水女子大 2021) (m20210610)

- 0.146
- (1) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nxdx$ を求めよ. なお計算過程も示せ. ただし, m, n は $m, n > 0$ の整数とする.
 - (2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nxdx$ を求めよ. なお計算過程も示せ. ただし, m, n は $m, n > 0$ の整数とする.
 - (3) フーリエ級数 $f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$ について,
 $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2 + b_n^2]$ を証明せよ.

(東京大 1998) (m19980704)

0.147 無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!} \sin\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi$ を求めたい.

$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} \sin\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi$ とするとき, 以下の間に答えよ.

(1) $f'(\theta)$ を無限級数の形を用いて表せ.

(2) $f''(\theta)$ を $f(\theta)$ を用いて表せ.

(3) $f(\theta)$ を求め, $f(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!} \sin\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi$ を計算せよ.

(東京大 1999) (m19990702)

0.148 曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ を S とする. S に $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ で内接する立方体を U とする. ただし, 符号はすべての組み合わせをとる. 曲面 S で囲まれた領域から立方体 U を除いた領域を V とする. 領域 V に対する積分

$$I = \int_V (x^2 + 2y^2 + 3z^2) dx dy dz$$

を求めたい. 以下の問いに答えよ.

(1) 立方体 U に対する積分

$$J = \int_U (x^2 + 2y^2 + 3z^2) dx dy dz$$

を求めよ.

(2) 球 $W : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ に対する積分

$$K = \int_W (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

を極座標 ($x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$) を用いて求めよ. 体積素片に対して, $dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ が成立することを利用してよい.

(3) 上の (1) と (2) を利用して, 積分 I を求めよ.

(東京大 2000) (m20000702)

0.149 (1) 複素変数の指数関数 e^z の級数展開は次式で表される.

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

上式を利用して, $\cos z$, $\sin z$ の級数展開を求めよ.

(2) 次の複素関数を特異点 $z = 0$ のまわりでローラン展開し $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ の形で表せ. また, 特異点の種類を答えよ.

$$f_1(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right), \quad f_2(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}, \quad f_3(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

(3) 次の積分を求めよ.

$$I = \oint_C f_3(z) dz$$

ただし, 積分路 C は複素平面上で原点を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円を反時計回りに一周するものとする.

(東京大 2001) (m20010703)

0.150 (1) $\cos t$, $\sin t$ を e^{it} , e^{-it} の関数として表せ.

(2) 関数

$$f(u) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(2nu) \quad (1)$$

が与えられたとき,

$$a_n = \frac{1}{2N+1} \quad (2)$$

(ただし $0 \leq n \leq N$) とすると,

$$f(u) = \frac{A}{B} \quad (3)$$

の形に変形することができる。A と B を求めよ。途中の計算式も示すこと。

(3) 関数

$$g(u) = 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos\{(2n-1)u\} \quad (4)$$

が与えられている。

$$a_n = \frac{1}{2N} \quad (5)$$

(ただし $0 \leq n \leq N$) としたとき、関数 $g(u)$ はどのような形に変形することができるか。できるだけ簡単な形で記せ。途中の計算も示すこと。

(東京大 2002) (m20020703)

0.151 (1) 変数 t に関して周期 2π の周期関数 $f(t)$ が

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \quad (1)$$

と書けたときの a_n, b_n が

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

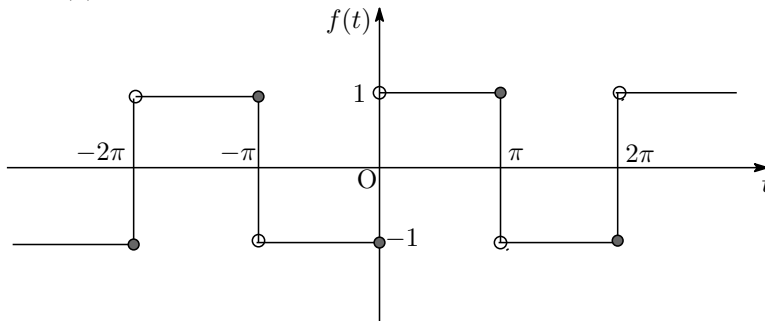
で与えられることを説明せよ。ただし、必要ならば三角関数の公式

$$\sin A \sin B = -\frac{1}{2} \{\cos(A+B) - \cos(A-B)\}, \quad \sin A \cos B = \frac{1}{2} \{\sin(A+B) + \sin(A-B)\}$$

$$\cos A \sin B = \frac{1}{2} \{\sin(A+B) - \sin(A-B)\}, \quad \cos A \cos B = \frac{1}{2} \{\cos(A+B) + \cos(A-B)\}$$

を用いよ。

(2) 下図は、値 1 と -1 をとる周期 2π の周期関数 $f(t)$ のグラフを示したものである。この関数 $f(t)$ を式 (1) の形に展開せよ。



(東京大 2003) (m20030704)

0.152 (1) 次の微分方程式を解け。

(a) $(2xy + x^2)y' = 2(xy + y^2)$

(b) $y' + 2y \cos x = \sin(2x)$

(2) 次の微分方程式を示した条件のもとで解け.

$$y'' + y' - 2y = 3e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

(東京大 2005) (m20050701)

0.153 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = f(x) \tag{a}$$

ただし, $x = 0$ のとき, $y = 1$ かつ $\frac{dy}{dx} = 0$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $f(x) = 0$ のときの解を求めよ.
- (2) $f(x) = \sin 2x$ のときの解を求めよ. ただし, (a) の特解が $y_p = x(A \cos 2x + B \sin 2x)$ の形となることを利用してよい. A, B は定数である.
- (3) $f(x) = \sum_{N=1}^{100} \sin Nx$ のときの解を y_s とする. x が十分大きいとき, $\frac{y_s}{x}$ を x の関数として表せ.

(東京大 2006) (m20060703)

0.154 2つの媒介変数 s, θ によって表される曲面 S

$$S : x(s, \theta) = (s \cos \theta, s \sin \theta, \alpha \theta), \quad (0 \leq s \leq 1), \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

について, 以下の設問に答えよ. α は 0 以上の定数とする.

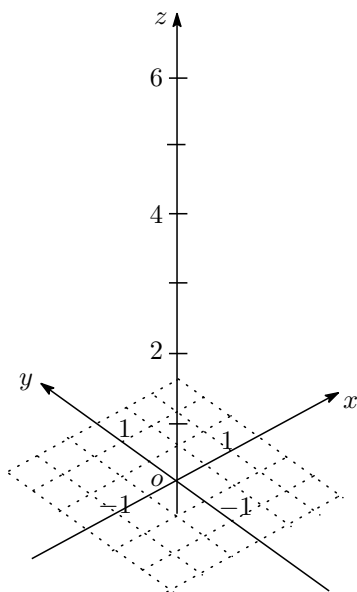
- (1) $x(s, \theta)$ の媒介変数 s を 1 と固定する事により, 曲線 C

$$C : y(\theta) = x(1, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, \alpha \theta), \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

を得る. $\alpha = 1$ の場合について, 下図の座標軸を参考にして曲線の概略を解答用紙に手描きせよ.

- (2) C 上の点を $P(=y(\theta))$ とする. P における接線の方程式を導出せよ.
- (3) (2) で求めた接線と xy 平面の交点を Q とする. θ が 0 から 2π まで連続的に変化するとき, Q が描く曲線の長さ l を求めよ.
- (4) $\alpha = 0$ のとき, 曲面 S は xy 平面上の単位円盤に一致する. $\alpha = 1$ としたとき, 曲面 S の面積は, 単位円盤の面積の何倍になるかを求めよ. ただし, 次の不定積分の公式を使ってよい.

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left\{ x\sqrt{1+x^2} + \log_e \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \right\} + c \quad (c \text{ は積分定数})$$



(東京大 2009) (m20090703)

0.155 (1) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = (y - k)y \quad (*)$$

について以下の問いに答えよ。ただし、 k は正の定数である。

- (a) y と k の関係に注意し、(*) の一般解を求めよ。
 (b) $x = 0$ のとき、 $y = y_0$ とする。この場合の(*) の解を求めよ。ただし、 $y_0 > 0$ とする。
 (c) (b) の解について、 y_0 を k により適切に場合分けし、 y と x の関係を図示せよ。

- (2) 次の微分方程式の一般解を求めよ。ただし、 e は自然対数の底である。

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x + e^{-5x}$$

(東京大 2012) (m20120701)

0.156 $f(x)$ を $-l \leq x \leq l$ で定義された関数とする。このとき、

$$a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx \quad (m = 1, 2, \dots)$$

とすると、 $f(x)$ は、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi}{l}x + b_m \sin \frac{m\pi}{l}x \right) \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

と展開できる。以下の問いに答えよ。

- (1) 次式で定義された関数 $f(x)$ の a_m, b_m を求め、 $\textcircled{1}$ 式で $l = 1$ とした式に従い $f(x)$ を展開せよ。

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & (-1 \leq x \leq 0) \\ 1 - x & (0 < x \leq 1) \end{cases}$$

- (2) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ で定義される関数 $f(x) = \cos x$ を $\textcircled{1}$ 式で $l = \frac{\pi}{2}$ とした式に従い展開し、その展開式を利用し、以下の無限級数

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{15} + \frac{1}{35} - \frac{1}{63} + \dots + \frac{(-1)^{m-1}}{4m^2 - 1} + \dots$$

の値を求めよ。

(東京大 2013) (m20130701)

0.157 半径 r の円周に内接する正 m 角形 ($m \geq 3$) を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) この正 m 角形の面積 A_m を求め、 m が無限大のときの極限を算出せよ。ただし、下記の関係を用いてよい。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- (2) この正 m 角形を底面とする高さ h の正 m 角柱を考える。図 1 は、 $M = 6$ の場合の例である。この側面は m 個の長方形 ($2m$ 個の直角三角形) で構成される。側面の総面積 B_m を求め、 m が無限大のときの極限を算出せよ。
- (3) この正 m 角柱の底面を面内で角 π/m だけ正 m 角形の中心で回転して得られる高さ h の多面体を考える。この多面体は、正反 m 角柱と呼ばれる。図 2 は、 $m = 6$ の場合の例である。この側面は $2m$ 個の二等辺三角形で構成される。側面の総面積 C_m を求め、 m が無限大のときの極限を算出せよ。

- (4) 正反 m 角柱の高さを h/n ($n \geq 2$) にして n 段積み重ねることを考える. 図 3 は $M = 6, n = 2$ の例である. この側面は $2mn$ 個の二等辺三角形で構成される. 側面の総面積 D_{mn} を求めよ. さらに, $n = m^2$ の場合を考え, m が無限大のときの D_{mn} の極限を算出せよ.

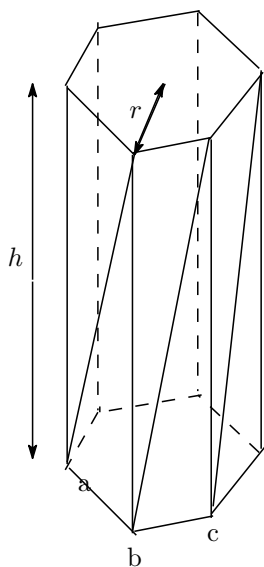


図 1

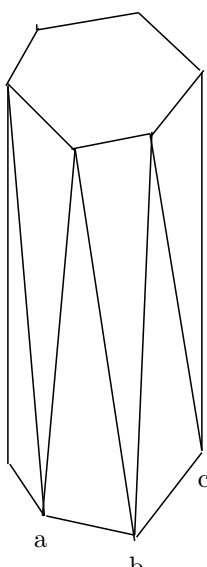


図 2

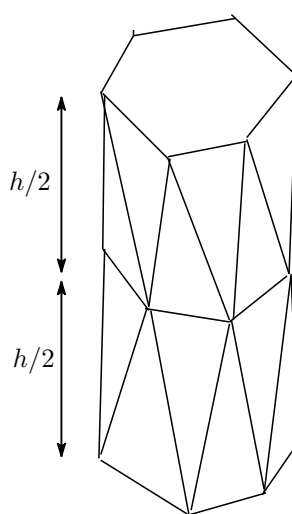


図 3

(東京大 2013) (m20130703)

0.158 xy 平面上において, 媒介変数 θ を用いて次式で表されるサイクロイド曲線 C を考える.

$$\begin{cases} x(\theta) = \theta - \sin \theta & (1) \\ y(\theta) = 1 - \cos \theta & (2) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ. ただし, 必要に応じて次の関係式を用いてよい.

$$\begin{cases} \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} & (3) \\ 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} & (4) \end{cases}$$

- (1) $0 \leq \theta \leq 2\pi$ における曲線 C の概形を, 根拠とともに示せ.
- (2) 曲線 C 上の任意の点に対して, x 方向に 2π だけ平行移動させた点を考える. その点もまた曲線 C 上にあることを示せ.
- (3) 原点 $O(0,0)$ から, 曲線 C 上の点 $P(x(\varphi), y(\varphi))$ (ただし $0 \leq \varphi \leq \pi$) までの曲線の長さを $l(\varphi)$ とする.
 - (a) $l(\varphi)$ を求めよ.
 - (b) 図 3.1 に示すように, 点 P における曲線 C の接線上の点 Q を考える. ただし, $\overline{PQ} = l(\pi) - l(\varphi)$ であり, また, $\overline{OQ} > \overline{OP}$ とする. 点 P を $0 < \varphi < \pi$ の間で動かしたときの点 Q の軌跡を求め, その概形を示せ.

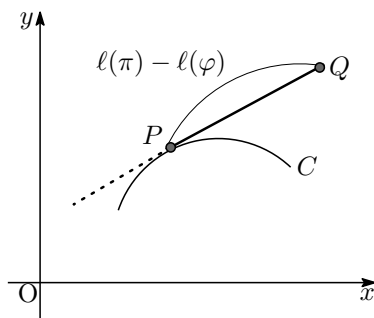


図 3.1

(東京大 2015) (m20150703)

0.159 複素積分を利用して実数積分を求めることを考える. 以下の問いに答えよ.

- (1) まず, ガウス積分と呼ばれる実数積分 $I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ を考える. α は正の定数であり; x は実数である. y を実数とすると, $\{I(\alpha)\}^2$ は以下の式で表される.

$$\begin{aligned} \{I(\alpha)\}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx dy \end{aligned}$$

この式を極座標 (r, θ) 表示に変換せよ.

- (2) $I(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ となることを導出過程とともに示せ.
- (3) 図 4.1 に示すように x 軸を実軸, y 軸を虚軸とする複素平面上において半径 R の扇形で C_1, C_2, C_3 からなる経路 C を反時計回りに一周することを考える. i を虚数単位とし, z を複素数とすると, 以下の積分を求めよ.

$$\oint_C e^{iz^2} dz$$

- (4) $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_2} e^{iz^2} dz = 0$ となることを示せ. ただし, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ において, $\sin \varphi \geq \frac{2\varphi}{\pi}$ を用いてよい.
- (5) 上記のガウス積分と複素積分を用いて, 実数積分 $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$ の値を求めよ.
- (6) 実数積分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ の値を求めよ.

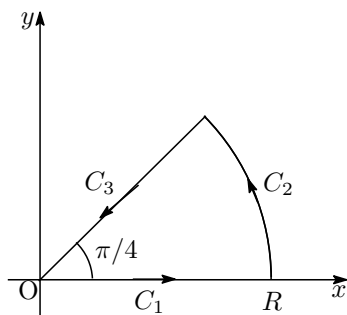


図 4.1

(東京大 2015) (m20150704)

0.160 以下の問いに答えよ. i は虚数単位とする. また, z は複素数とする.

- (1) $\sin z = 10$ を z について解け.

- (2) $i^i, 3^i$ それぞれについて実部と虚部を求めよ.
 (3) ある周回経路 C に沿った複素平面上的周回積分

$$\oint_C \frac{1}{z^2 + 1} dz$$

を考える. 経路 C の取り方によって積分値がどのように変化するか考えたい. 極の配置を図示し, 経路の例を1つずつ示しながらとりうる積分値を全て列挙せよ.

- (4) z に関する関数

$$\frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

の収束域 $1 < |z| < 2$, および $2 < |z|$ に対するローラン級数を求めよ.

- (5) 実積分

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4} dx$$

を, 留数の定理を用いて求めたい. 適切な複素平面での積分路を定めて図示し, 積分値を求めよ.

(東京大 2016) (m20160704)

0.161 以下の問いに答えよ. i は虚数単位はとする.

- (1) 実数 a は $|a| < 1$ 満たすとする. 留数定理を用いて, 複素積分

$$\int_C \frac{dz}{(z+ai)(az+i)}$$

を求めよ. ただし, 積分路 C は $|z| = 1$ であり, 反時計回りに回るものとする.

- (2) $0 < \gamma < \pi/2$ として, 積分値

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \cos \gamma \sin \theta}$$

を次の手順で求めよ.

- (a) $z = e^{i\theta}$ と変数変換を行うことにより複素積分に変形する. このとき,

$$I = \int_C f(z) dz$$

を満たす複素関数 $f(z)$ を求めよ. ただし, 積分路 C は $|z| = 1$ であり, 反時計回りに回るものとする.

- (b) 複素関数 $f(z)$ の極を全て求めよ.
 (c) 積分路 C 内に含まれる極を全て求めよ.
 (d) 留数定理を用いて, 積分値 I を求めよ.

(東京大 2017) (m20170704)

0.162 i を虚数単位とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $-i$ の 3 乗根

$$A = (-i)^{1/3}$$

を考える.

- (a) A を全て求めて $a+ib$ の形で答えよ. a と b は実数とする. ただし, 最終的な a と b の表式に三角関数を用いてはならない.
 (b) A の全ての点を複素平面に図示せよ.

- (2) x と y を実数として複素数 $z = x + iy$ を考える. 次の関数に関して以下の問いに答えよ.

$$u = \sin x \cosh y$$

- (a) u を実数部分として持つ正則関数 $w(z)$ を求めよ.
 (b) $\frac{dw(z)}{dz}$ を求めよ.
 (3) 次の複素関数積分 I を考える.

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^5 - 3iz^4/2 + z^3} dz$$

ただし, 積分路は複素平面上的の単位円周上を反時計回りに一周するものとする

- (a) 全ての極と対応する次数と留数を求めよ.
 (b) 積分 I を求めよ.

(東京大 2018) (m20180704)

0.163 i を虚数単位とし, z は複素数とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 次の複素数を $x + iy$ (x, y は実数) の形ですべて求めよ. ただし, x, y の表式に三角関数を含んではならない.

(a) $(1 - \sqrt{3}i)^3$ (b) $i^{1/2}$ (c) $\frac{(1-i)^6}{(1+i)^8}$

- (2) 関数 $z = \tan \omega = \frac{\sin \omega}{\cos \omega}$ の逆関数を $\omega = \tan^{-1} z$ で表す.

(a) 次の式が成り立つことを示せ. $\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \log \left(\frac{i+z}{i-z} \right)$

ただし, \log は複素対数関数である.

- (b) $\tan^{-1} z$ の z に関する微分を求めよ.
 (3) 複素平面において, 曲線 C を $z = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とする.

(a) 次の積分 $I(k)$ を求めよ. ここで, k は $0 < k < 1$ の定数とする. $I(k) = \int_C \frac{1}{k^2 z^2 + 1} dz$

- (b) $k = 2 - \sqrt{3}$ のとき, I の値を求めよ.

- (4) 実積分 J の値を留数定理により求めることを考える. $J = \int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx$

(a) J の積分範囲を $[-\infty, \infty]$ と変形して, 被積分関数に e^{ix} を用いて J を表せ.

(b) 関数 $f(z) = 1/(z^2 + 1)^2$ とする. 複素平面において, 図1の半径 Γ (円弧 ADB) の半径 R が十分に大きい時, 次のことが成り立つことを示せ. $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_\Gamma f(z) dz = 0$

(c) 図1の C に関する周回積分を考えることにより, J の値を求めよ.
 このとき, 複素平面の上半平面において,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_\Gamma f(z) e^{iz} dz = 0$$

であることを用いてよい.

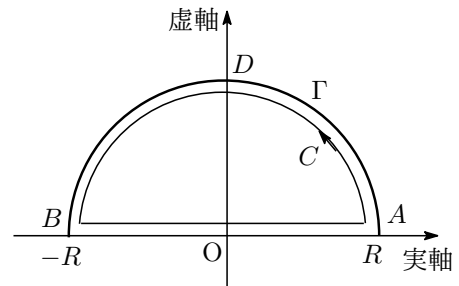


図1
 (東京大 2020) (m20200703)

0.164 以下の問いに答えよ。ただし、 x は実変数、 y は x に関する実関数であり、

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y' = \frac{dy}{dx} \text{ とする。また、} e \text{ は自然対数の底とする。}$$

(1) 次の微分方程式について考える。ただし、 y は、任意の x に対し $y > 0$ を満たすものとする。

$$y' - 2y \sin^2(x) = \frac{e^{2x} \cos(2x)}{y}$$

(a) 関数 $f(x)$ を次式により定義する。定積分を計算し、 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = \int_0^x [-2 \sin^2(t)] dt$$

(b) $z = ye^{f(x)}$ とするとき、 $\frac{dz}{dx}$ を x と z の関数として表せ。

(c) y の一般解を求めよ。

(2) 次の微分方程式について考える。ただし、 α および n は実定数であり、 α は $-1 \leq \alpha \leq 1$ を満たすものとする。

$$y'' - 2\alpha y' + y = 2e^x$$

(a) y の特解を求めよ。

(b) y の一般解を求めよ。

(c) $\alpha = 1$ とする。 $y(0) = 1$ および $y'(0) = 2$ を満たす y に関して、次の極限の収束・発散を調べよ。収束する場合にはその極限値を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow +0} y^{x^{-n}}$$

(東京大 2022) (m20220701)

0.165 $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $S_\theta = \cos \theta A + \sin \theta B$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(2) $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする。 θ を固定するとき、2次形式 ${}^t v S_\theta v = c$ (c は 0 でない定数、 ${}^t v$ は v の転置) の表わす図形は何か？

(東京工業大 1997) (m19970804)

0.166 極座標 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を考える。 $(x, y) = (0, 0)$ 以外で定義された C^2 級関数 $f(x, y)$ について $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を r, θ に関する偏微分を用いて表わせ。

(東京工業大 2002) (m20020803)

0.167 $f(x, y)$ を $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ 上の C^2 -級関数、 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を $(x, y) \in \mathbf{R}^2 - \{0\}$ の極座標とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 次の等式を示せ。 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$

(2) $f(x, y)$ は $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ のみの関数で、 θ にはよらないとする。さらに f は条件 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, および $r = 1$ のとき $f = 0, r = 2$ のとき $f = 1$ を満たすとする。このような f を求めよ。

(東京工業大 2006) (m20060801)

0.168 次を示せ.

(1) \mathbf{R} 上の実数値連続関数 f が周期 p を持つ周期関数ならば次式が成り立つ.

$$\int_x^{x+p} f(t)dt = \int_0^p f(t)dt \quad (x \in \mathbf{R}).$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |\sin nx| dx = \frac{2(b-a)}{\pi} \quad (b > a).$

(東京工業大 2006) (m20060802)

0.169 n を整数として以下の設問に答えよ.

(1) $\int_0^\pi \sin x \cos nx dx$ を計算せよ.

(2) $f(x)$ を $[0, \pi]$ 上の連続関数とする. $f(x)$ が微分可能で導関数 $f'(x)$ が連続であれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a f(x) \cos nx dx = 0$$

が成り立つことを示せ. (ここで a は任意の実定数とする.)

(東京工業大 2010) (m20100801)

0.170 (1) $\int \frac{1}{2 + \sin x} dx$ を求めよ.

(2) $\sqrt{x^2 + 1} = t - x$ において $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ を求めよ.

(東京農工大 1996) (m19960902)

0.171 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$ ($0 < t < 2\pi$) により定められる関数 $y = y(x)$ について, $\frac{dy}{dx}$ および $\frac{d^2y}{dx^2}$ を t を用いて表しなさい.

(東京農工大 2006) (m20060904)

0.172 $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) の表す xy 平面上の曲線を C とする. 次の問いに答えなさい.

(1) $0 < t < \frac{\pi}{2}$ のとき $\frac{dy}{dx}$ を求め, t の式で表しなさい.

(2) $0 < t < \frac{\pi}{2}$ のとき $\frac{d^2y}{dx^2}$ を求め, t の式で表しなさい.

(3) x の関数 $y = f(x)$ の極値を求めなさい. ただし, 極小値か極大値か, そのときの x の値も書きなさい.

(4) 曲線 C の全長 L を求めなさい.

(東京農工大 2009) (m20090902)

0.173 領域 $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq x \leq \sin y \right\}$ における次の重積分 A および B の値を求めなさい.

$$A = \iint_D \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} dx dy, \quad B = \iint_D \sqrt{1-x^2} dx dy$$

(東京農工大 2011) (m20110903)

0.174 A は 3 行 3 列の行列で, その (i, j) 成分が $\sin \left(\frac{7i + 5j - 1}{6} \pi \right)$ となるものとする.

(1) A の行列式を計算しなさい.

- (2) 連立1次方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解のうちで $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ を満たすものをすべて求めなさい.

(東京農工大 2014) (m20140904)

0.175 次の積分を求めよ.

(1) $\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2} dx \right) dy$

(2) $\iint_D (x-y) \sin(x+y) dx dy$, $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x-y \leq \pi, 0 \leq x+y \leq \pi\}$

(3) $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2}$, $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

(電気通信大 1998) (m19981002)

0.176 整関数 $f(z)$ ($z = x + iy$) は, $f(0) = 0$ を満たし, その実部が $u(x,y) = e^{-x}(x \cos y + ay \sin y)$ (a は実定数) という形をしているとする. このとき次の問いに答えよ.

- (1) $u(x,y)$ が調和関数である (すなわち $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ を満たす) ことから a の値を定めよ.
 (2) コーシー・リーマンの関係式に注意して $f(z)$ の虚部 $v(x,y)$ を求めよ.
 (3) $f(z)$ を z の関数として表せ.

(電気通信大 1999) (m19991005)

0.177 a を正の実数とするととき, 実数 x, y の関数 $u = e^{-ax} \sin(2y)$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) 関数 u が, すべての x, y について $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ を満たすように, 正数 a の値を定めよ.
 (2) a を (1) で定めた定数とし, u を実部にもつ $z = x + iy$ の正則関数 $f(z)$ を求めよ. (ひとつ求まればよいものとする. 答えは z の式で表すこと.)

(電気通信大 2000) (m20001007)

0.178 定義域を $0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 1$ とするベクトル関数

$$\vec{r}(u, v) = (\sqrt{1+v^2} \cos u, \sqrt{1+v^2} \sin u, v)$$

が表す曲面を S とする. 曲面 S 上の (u, v) に対応する点における法線単位ベクトルを求めよ. また, 曲面 S の面積を求めよ.

(電気通信大 2001) (m20011005)

0.179 $z = x + iy$ (z は複素数, x, y は実数, i は虚数単位) に対して, 指数関数 e^z と対数関数 $\log_e z$ を

$$e^z := e^x (\cos y + i \sin y),$$

$$\log_e z := \text{Log}_e |z| + i \arg z,$$

と定義する. ただし, e は自然対数の底, Log_e は, 実数に対して, 既に定義されている対数関数, $\arg z$ は z の偏角を表すものとする.

- (1) この指数関数を用いて, 三角関数 $\sin z, \cos z$ を定義せよ. また, これらの指数関数と対数関数を用いて, 一般の中乗関数 α^β (α, β は, 2つの複素数) を定義せよ.
 (2) $\cos z = -2$ を満たす複素数 z を, すべて求めよ.

- (3) $i^{(-i)}, (-i)^{\frac{1}{3}}$ の 2 つの値を計算せよ. (答えは, 複素数 $a + ib$ の形になるまで計算すること)
 (電気通信大 2001) (m20011010)

0.180 次の各複素積分の値を求めよ.

ただし, 積分路は原点を中心として半径 1 の円周上を反時計回りに一周するものとする.

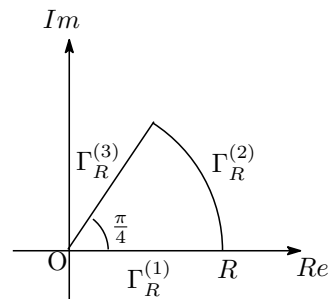
(1) $\int_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{z^2} dz$ (2) $\int_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{z(1+2z)} dz$
 (電気通信大 2005) (m20051006)

0.181 $f(x) = \text{Sin}^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}x}{x^2 + 1} \right)$ について, 次の間に答えよ.

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ の値を求めよ.
 (2) $f'(x)$ を計算せよ. (3) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ.

(電気通信大 2006) (m20061001)

0.182 右図に示すように, 複素平面上にある中心角 $\pi/4$, 半径 $R (> 0)$ の領域の周囲を反時計回りに 1 周する経路 Γ_R を考える. また, 図にあるように経路 Γ_R の各部分を $\Gamma_R^{(1)}, \Gamma_R^{(2)}, \Gamma_R^{(3)}$, と名付ける.



以下の 3 つの問いに順に答えよ.

- (1) 経路 Γ_R では式 ① が成立する.

$$\int_{\Gamma_R} e^{-z^2} dz = 0 \tag{①}$$

次式のように G_R, P_R, C_R, S_R を定義するとき, 式 ① をこれらを用いて表せ.

$$G_R = \int_0^R e^{-x^2} dx, \quad P_R = \int_{\Gamma_R^{(2)}} e^{-z^2} dz,$$

$$C_R = \int_0^R \cos r^2 dr, \quad S_R = \int_0^R \sin r^2 dr,$$

- (2) P_R について次の不等式 ② が成立することを示すとともに,

$$|P_R| \leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2\theta} R d\theta \tag{②}$$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ では $0 \leq 1 - \frac{4}{\pi}\theta \leq \cos 2\theta$ となることを使って, $\lim_{R \rightarrow \infty} P_R = 0$ を示せ.

- (3) 小問 (1), (2) で求めた結果を使って, 定積分 $\int_0^\infty \cos x^2 dx$ と $\int_0^\infty \sin x^2 dx$ を計算せよ. ただし, $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明なしに用いてよい.

(電気通信大 2006) (m20061008)

0.183 (1) 関数 $f(x) = x \cos x$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めよ.

- (2) 関数 $g(x) = \log(1+x)$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めよ.

- (3) 次の極限値を求めよ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \log(1+x)}{x \sin x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log(1+x)}{e^{x^2} - 1}$
 (電気通信大 2007) (m20071003)

0.184 関数 $y = f(x)$ のグラフ C が $(x, y) = (\sin t, t \cos t)$, $(0 \leq t \leq \pi/2)$ と表されるとする. $t = \pi/4$ のときの C 上の点を $P(x_0, y_0)$ とおく. 次の問いに答えよ.

- (1) $f'(x_0)$ を計算し, 点 P における C の接線の方程式を求めよ.
 (2) $f''(x_0)$ を計算せよ. (3) 曲線 C と x 軸とが囲む部分の面積を求めよ.

(電気通信大 2007) (m20071004)

0.185 (1) $u = \tan \frac{x}{2}$ とおく. $\sin x, \cos x$ を u を用いて表せ.

(2) $I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$, $I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx$ を求めよ.

(電気通信大 2008) (m20081003)

0.186 次の微分方程式を解け.

(1) $\sin x \cos^2 y - \frac{dy}{dx} \cos^2 x = 0$

(2) $\frac{dy}{dx} + y \tan x = \sin 2x$

(3) $\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 5y = \sin 2x$

(電気通信大 2009) (m20091004)

0.187 複素関数

$$f(z) = \frac{z^3 + 3}{z - 2i}, \quad g(z) = \sin(f(z))$$

について, 以下の問いに答えよ. ただし, $i = \sqrt{-1}$ とする.

- (1) $f(1), f'(1), g(0), g'(0)$ のそれぞれの値の実部と虚部を求めよ.
 (2) 次の積分値を求めよ.

$$\int_C \frac{f(z)}{z^2 - 1} dz$$

ただし, C は複素平面の原点を中心とし半径 $\frac{3}{2}$ の円を正の向きに 1 周する積分路である.

(電気通信大 2009) (m20091005)

0.188 定積分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 4 \sin \theta} d\theta$$

について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $z = e^{i\theta}$ とおくととき, $\sin \theta$ を z で表せ. ただし, i は虚数単位である.
 (2) $I = \int_C f(z) dz$ の形に表せ. ここで, 積分路 C は円 $|z| = 1$ を正の向きに一周するものとする.
 (3) I の値を求めよ.

(電気通信大 2011) (m20111005)

0.189 全微分可能な関数 $z = f(x, y)$ に対して, 極座標による変数変換

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

を考える. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $\left[\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right] = \left[\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right] A$ を満たす行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ を求めよ.
- (2) x, y の r, θ に関するヤコビアン (ヤコビの行列式) $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を計算せよ.
- (3) $\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2$ を $r, \frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta}$ を使って表せ.

(電気通信大 2012) (m20121003)

0.190 次の重積分を求めよ.

- (1) $\iint_D (x+2y) \sin^2(x-2y) dx dy$ $D = \left\{ (x, y) : 0 \leq x+2y \leq \pi, 0 \leq x-2y \leq \frac{\pi}{4} \right\}$
- (2) $\iint_D \log \sqrt{x^2+y^2} dx dy$ $D = \{ (x, y) : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x \}$

(電気通信大 2013) (m20131004)

0.191 関数 $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)$ について、以下の問いに答えよ.

- (1) 関数 $f(x, y)$ の極値を求めよ.
- (2) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とするとき、 $f(x, y) = 0$ を r, θ の式で表せ.
- (3) 領域 $D = \{ (x, y) : f(x, y) \leq 0, x \geq 0, y \geq 0 \}$ の面積 S を求めよ.

(電気通信大 2015) (m20151003)

0.192 以下の問いの答えよ. ただし、 $i = \sqrt{-1}$ とする.

- (1) $z = e^{i\theta}$ とおくとき、 $\sin \theta$ を z の式で表せ.
- (2) 複素関数 $f(z) = \frac{1}{z^2 + 4iz - 1}$ の極をすべて求め、各極における留数を計算せよ.
- (3) 定積分 $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin \theta}$ の値を求めよ.

(電気通信大 2015) (m20151005)

0.193 (1) $z = f(x, y)$ を C^2 級関数とし、 $x = u^2 - v^2, y = 2uv$ であるとする.

- (a) z_u を z_x, z_y, u, v を用いて表せ.
- (b) z_{uu} を $z_x, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, u, v$ を用いて表せ.

- (2) 関数 $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2}$) の極値を求めよ.

(電気通信大 2016) (m20161003)

0.194 (1) 積分順序を交換することにより、次の累次積分の値を求めよ.

$$\int_0^\pi dx \int_x^\pi \frac{x \sin y}{y} dy$$

- (2) 次の3重積分の値を求めよ.

$$\iiint_V x^2 dx dy dz, \quad V = \{ (x, y, z) : y \leq x, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$$

(電気通信大 2017) (m20171004)

0.195 C^1 級関数 $f(r)$ に対して、次の合成関数

$$u(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2})$$

を考える. 以下の問いに答えよ.

- (1) xyz 空間内の曲面 $S : z = u(x, y)$ を考える. このとき, S 上の点 $(\cos \alpha, \sin \alpha, f(1))$ における S の接平面と z 軸との交点の z 座標 z_0 を $f(1), f'(1)$ を用いて表せ. ただし, α は定数とする.
- (2) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ が r の関数として表されることを示せ.
- (3) $f(r) = r^2 e^{-r^2}$ のとき, 次の重積分 I の値を求めよ.

$$I = \iint_D u(x, y) \, dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

(電気通信大 2019) (m20191003)

0.196 $0 < a < 1$ を満たす実数 a に対して, 以下の問いに答えよ.

- (1) 次の複素関数 $f(z)$ の特異点をすべて求め, $f(z)$ の各特異点における留数を求めよ.

ただし, i は虚数単位とする.
$$f(z) = \frac{1}{az^2 - i(a^2 + 1)z - a}$$

- (2) 次の定積分 $I(a)$ を求めよ.
$$I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 - 2a \sin \theta + 1}$$

(電気通信大 2019) (m20191005)

0.197 次の重積分の値をそれぞれ計算せよ.

(1) $\iint_D xy \, dx dy, \quad D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}$

(2) $\iint_D \sin(x^2) \, dx dy, \quad D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x \leq \sqrt{\pi}\}$

(電気通信大 2020) (m20201004)

0.198 領域 $D : -\frac{\pi}{3} < x < \frac{2}{3}\pi, -\frac{\pi}{3} < y < \frac{2}{3}\pi$ で定義される関数

$$f(x, y) = 2 \sin^2 x - 2 \sin x \sin y - \sin^2 y$$

に関する以下の問いに答えよ.

- (1) $f(x, y)$ の偏導関数 $f_x(x, y)$ と $f_y(x, y)$ を求めよ.
- (2) $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ をみたす点 $(a, b) \in D$ をすべて求めよ.
- (3) $f(x, y)$ の極値をすべて求めよ.

(電気通信大 2021) (m20211003)

0.199 次の積分の値を求めよ.

(1) $\iint_D x^2 y \, dx dy, \quad D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y, x^2 + y^2 \leq 1\}$

(2) $\iint_D xy \sin(xy) \, dx dy, \quad D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, x|y| \leq \frac{\pi}{2}\}$

(電気通信大 2021) (m20211004)

0.200 次の微分方程式を解け.

(3) $y'' + 2y' + y = \sin 2x$

(電気通信大 2021) (m20211005)

0.201 xy 平面上の曲線 $C : \begin{cases} x = \sin t \\ y = t \cos t \end{cases} \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ について考える. C 上で y は x の関数となるが,

これを $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) と表す. このとき以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ ($0 < x < 1$) を t の関数として表せ.

(2) $f(x)$ の $x = \frac{1}{2}$ におけるテイラー展開

$$f(x) = a_0 + a_1 \left(x - \frac{1}{2}\right) + a_2 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \dots$$

の係数 a_0, a_1, a_2 を求めよ.

(3) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分を D とするとき, 重積分 $\iint_D x \, dx \, dy$ の値を求めよ.

(電気通信大 2022) (m20221003)

0.202 複素関数 $f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z-i)}$ に対して, 以下の問いに答えよ. ただし, i は虚数単位を表す.

(1) $\sin i$ の実部と虚部を求めよ.

(2) $f(z)$ のすべての極とそれぞれの極の位数を求めよ.

(3) 複素積分 $\int_{|z|=2} f(z) \, dz$ (積分路は正の向きに1周) の値を求めよ.

(電気通信大 2022) (m20221005)

0.203 次の微分方程式について答えよ.

$$\frac{dx}{dt} + \lambda x = f(t)$$

但し, $t = 0$ のとき $x = a$ であり, また λ は実の定数とする.

(1) この方程式の一般解を求めよ.

(2) 関数 $f(t)$ が $\sin t$ である時の解を求めよ.

(3) この解が周期関数となるための条件を求めよ.

(横浜国立大 1998) (m19981101)

0.204 (1) m, n を整数とするとき, 以下の式が成り立つことを示せなさい.

$$\int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx = 0$$

(2) 次の周期関数について解答しなさい.

$$f(x) = \begin{cases} -k & (-\pi < x < 0) \\ k & (0 < x < \pi) \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x) \quad k > 0$$

この関数を以下のように無限級数で表すとき, その係数 a_0, a_n, b_n を求めなさい. さらに, 求められる無限級数を $n = 7$ の項まで示しなさい.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

(横浜国立大 2008) (m20081105)

0.205 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\frac{dy}{dx} = y + e^x \sin x$

(2) $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} \frac{dy}{dx} = 0$

(横浜国立大 2016) (m20161102)

0.206 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan x}$$

(横浜国立大 2016) (m20161105)

0.207 次の定積分を計算しなさい.

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 2x dx$$

(横浜国立大 2016) (m20161106)

0.208 次の関数について, 0 でない最初の 4 項までマクローリン展開せよ.

$$x \sin 2x$$

(横浜国立大 2016) (m20161107)

0.209 次の関数をフーリエ級数 $y = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ に展開せよ.

- (1) 区間 $x = [-\pi, \pi]$ で定義される関数 $y = \begin{cases} a : x \geq 0, & a \text{ は実定数} \\ 0 : x < 0 \end{cases}$
- (2) 区間 $x = [0, \pi]$ で定義される三角関数 $y = a \sin(nx) \cos(nx)$ ここで n は整数
- (3) 区間 $x = [0, \pi]$ で定義される一次関数 $y = x$

(横浜国立大 2017) (m20171102)

0.210 行列 $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ および, $B = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ に関して以下の問いに答えよ.

- (1) A の固有値とその固有ベクトルを求めよ.
- (2) A^n を $\sin(n\theta)$, $\cos(n\theta)$ で表わせ. また, その求め方を説明せよ.
- (3) B^n を $\sin(n\theta)$, $\cos(n\theta)$ で表わせ. また, その求め方を説明せよ.

(横浜国立大 2017) (m20171103)

0.211 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1) \frac{dy}{dx} = (y-x)^2$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = (y + \cos x) \sin x$$

(横浜国立大 2017) (m20171104)

0.212 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1) (x^2 - 1)^2 \frac{dy}{dx} + 2xy(x^2 - 1) = 2$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{2 \sin y \cos y}{\cos x}$$

(横浜国立大 2021) (m20211102)

0.213 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1) 2 \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} = 0$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \cos y}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

(横浜国立大 2022) (m20221102)

0.214 極座標による曲線 $r = r(\theta)$ を x, y 座標に変換したとき, 次の関係が成り立つことを示せ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r' \sin \theta + r \cos \theta}{r' \cos \theta - r \sin \theta}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{r^2 - rr'' + 2r'^2}{(r' \cos \theta - r \sin \theta)^3}$$

ただし, $r' = \frac{d}{d\theta} r(\theta)$, $r'' = \frac{d^2}{d\theta^2} r(\theta)$

(千葉大 1996) (m19961201)

0.215 次の初期値問題を解け.

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + x = \sin 2t & (t > 0), \\ x(0) = 0, \\ \frac{dx}{dt}(0) = 0 \end{cases}$$

(千葉大 1997) (m19971202)

0.216 無限回微分可能な関数 $f(x)$ を, 定数 a の周りで Taylor 級数に展開すると,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

となる. ただし,

$$f^{(n)}(a) = \left[\frac{d^n f(x)}{dx^n} \right]_{x=a}$$

である. この関係を基に以下の設問に答えなさい.

- (1) (a) e^x を原点 0 の周りに Taylor 級数に展開しなさい.
 (b) $\cos x$ を原点 0 の周りに Taylor 級数に展開しなさい.
 (c) $\sin x$ を原点 0 の周りに Taylor 級数に展開しなさい.
- (2) (1) の結果を用いて, 次の Euler の公式が成り立つことを示しなさい. ただし, i は虚数単位で, $i^2 = -1$ である.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

- (3) (2) の結果を基に, 次の等式が成り立つことを示しなさい.

$$e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)}$$

(千葉大 2000) (m20001201)

0.217 次の極限值を求めなさい. ただし, 与えられた関数 $f(x)$ は, $x = a$ で微分可能とする.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} \qquad (2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a-3h^2)}{h}$$

(千葉大 2002) (m20021201)

0.218 次の極限值を求めなさい.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin 2x} \qquad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (\text{ただし, } a, b \text{ は定数.})$$

(千葉大 2005) (m20051201)

0.219 次の関数 y を x で微分しなさい.

$$(1) y = x^2 - 2x - 3 \qquad (2) y = \frac{1}{(x+4)^2} \qquad (3) y = x \sin x$$

(千葉大 2005) (m20051205)

0.220 次の極限值を求めなさい.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \qquad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

(千葉大 2007) (m20071206)

0.221 重積分に関する以下の問いに答えなさい.

- (1) 領域 $D = \{(x, y, z) \mid x, y, z \geq 0, x + y + z \leq \pi/2\}$ を図示しなさい.

(2) 次の不定積分を求めなさい。ただし、 a は定数である。

$$\int x \sin(a+x) dx$$

(3) D を積分領域として、次の 3 重積分の値を求めなさい。

$$\iiint_D z \sin(x+y+z) dx dy dz$$

(千葉大 2007) (m20071208)

0.222 次の極限值を求めなさい。

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

(千葉大 2008) (m20081201)

0.223 次の極限值を求めなさい。ただし、 a は定数である。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{1 + \sin x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}}$$

(千葉大 2010) (m20101201)

0.224 次の極限值を求めなさい。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x \sin x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad (3) \lim_{x \rightarrow \infty} (3x - \sqrt{9x^2 - 3x - 1})$$

(千葉大 2011) (m20111201)

0.225 次の関数の極限值を求めなさい。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1-x)}{x}$$

(千葉大 2014) (m20141201)

0.226 三次元空間の中にデカルト直交座標系 $O-XYZ$ 座標系が定義されている。

$y=0$ 平面 ($z-x$ 平面) 上の点 $A = (x_0, 0, z_0)$ を始点とし、一定方向で $y=0$ 平面から遠ざかる点 B がある。線分 AB の長さは λ で、線分 AB の方向ベクトルは、球座標系にならって、水平角 (緯度) θ 、方位角 (経度) φ とする。ただし、 $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ 、 $0^\circ < \varphi < 180^\circ$ 。点 B の座標は、 $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$ から、

$$B = (\lambda \cos \theta \cos \varphi + x_0, \lambda \cos \theta \sin \varphi, \lambda \sin \theta + z_0)$$

で与えられる。定点 E を $E = (0, -a, h)$ 、 $a > 0$ として、点 E と点 B を結ぶ直線が $y=0$ 平面 ($z-x$ 平面) と交わる点を P とする。 $\lambda \rightarrow \infty$ の時の P の座標を求めなさい。

(ヒント : $\lambda \rightarrow \infty$ の時の点 P を透視画法では消点 (Vanishing Point) と呼んでいる)

(千葉大 2015) (m20151205)

0.227 次の重積分に関して以下の問に答えなさい。

$$I = \iint_D \frac{x+y}{y^2} \sin(x+y) dx dy$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq y \right\}$$

(1) 積分領域 D を $u = x+y$ 、 $v = \frac{x}{y}$ の関係で (u, v) へ変数変換した場合の D に対応する積分領域を D' とする。 $O-xy$ 平面での D 、および、 $O-uv$ 平面での D' を図示しなさい。

(2) 関数行列式 (ヤコビアン) $J(x, y) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$ を求めなさい.

(3) 重積分 I の値を求めなさい.

(千葉大 2016) (m20161203)

0.228 次の微分方程式を解きなさい.

(1) $\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = \sin t$ 初期条件: $t = 0, y = 1, \frac{dy}{dt} = 1 + \sqrt{2}$

(2) $\frac{dy}{dx} + 2xy = 4xe^{x^2}$ の一般解を求めなさい.

(千葉大 2016) (m20161204)

0.229 実数 $t \geq 0$, 実数 $a > 0$ について定義された関数 $f(t) = \sinh at$ に対して, 以下の式で定義される関数 $F(s)$ を求めなさい.

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

(千葉大 2016) (m20161206)

0.230 次の問に答えなさい. ただし, $\log x$ の底は, 自然対数の底 (e) とする.

(1) (a) 関数 $\log(1+x)$ と $x \cos x$ を, それぞれ 3 次の項までマクローリン展開しなさい.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x \cos x} \right)$ を求めなさい.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n + 3^n}$ を求めなさい.

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\log x + \sqrt{\log x}} - \sqrt{\log x - \sqrt{\log x}} \right)$ を求めなさい.

(4) $\lim_{x \rightarrow 0+0} (1 - \tanh x)^{\frac{1}{\sin x}}$ を求めなさい.

(千葉大 2017) (m20171201)

0.231 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ただし, $a, b > 0$) が下に図示されている. 点 A の座標は $(a, 0)$, 点 B の座標は $(0, b)$ であり, 点 $P(x_0, y_0)$ は楕円の弧 AB (第一象限) 上の点 (ただし, 点 A と点 B を除く) である. 次の設問に答えなさい.

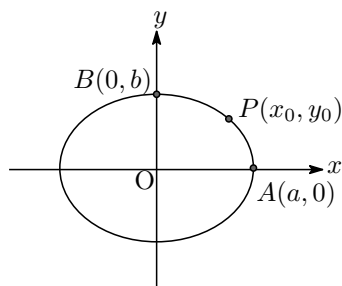
(1) 点 P で楕円に接する接線の方程式を x, y, a, b, x_0, y_0 を用いて表しなさい.

(2) $x_0 = a \cos \theta, y_0 = b \sin \theta$ (ただし, $0 < \theta < \pi/2$) とおいたとき, 設問 (1) で求めた接線の方程式を x, y, a, b, θ を用いて表しなさい.

(3) 設問 (2) で求めた接線の方程式と x 軸および y 軸との交点をそれぞれ点 C および点 D とするとき, 線分 CD の長さを a, b, θ を用いて表しなさい.

(4) 線分 CD の長さが最小となる θ の値を a, b を用いて表しなさい.

(5) 線分 CD の最小値を a, b を用いて表しなさい.



図

(千葉大 2017) (m20171207)

0.232 $\frac{1}{\cos x - \sin x}$ を積分せよ. (筑波大 1998) (m19981301)

0.233 テーラー展開を用い, $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ の関係があることを示せ. (筑波大 2000) (m20001302)

0.234 $f(x, y) = r^n$ とするとき, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を次の手順に従って求めよ.
ただし, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, n は整数とする.
変数の組 (x, y) を $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ により, (r, θ) の組に変数変換することを考える.

(1) $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}$ および $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta$ であることを示せ.

(2) $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$ であることに注意し,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial r}$$

であることを示せ.

同様に, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ についても求め, 整理することにより,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right)$$

となる.

(3) $f(x, y) = r^n$ のとき, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を具体的に計算せよ. (筑波大 2000) (m20001303)

0.235 $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ であることを利用して, その逆関数である $\arcsin z$ が

$$\arcsin z = -i \log(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

と表されることを示せ.

(筑波大 2000) (m20001311)

0.236 関数 $f(x) = a \sin x$ (ただし, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$) を考える.

(1) $y = f(x)$ の逆関数 $x = f^{-1}(y)$ を求めよ.

(2) 逆関数 $x = f^{-1}(y)$ の導関数 $\frac{dx}{dy}$ を求めよ.

(筑波大 2001) (m20011302)

0.237 x が限りなく正の無限大に近づくとき, 次の式の値を小さい順に並べよ.

$$\frac{x}{\log x}, \sqrt{x}, \frac{1}{\sin(1/x)}$$

(筑波大 2003) (m20031301)

0.238 次の問いに答えなさい.

(1) 三角関数 $y = \sin(x)$ を, 単位円を用いて定義しなさい.

(2) 関数 $f(x)$ の微分 (導関数) は $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ で定義される.
この定義に基づいて $y = \sin(x)$ の微分を, (1) の定義を用いて導きなさい.

(筑波大 2003) (m20031302)

0.239 定積分 $I(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \exp(-\alpha x) \frac{\sin \beta x}{x} dx$ ($\alpha \geq 0, \beta \neq 0$)

をパラメータ β について微分することにより $\int_0^{\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \text{sign}(\beta) \frac{\pi}{2}$ を導け.
ここで, $\text{sign}(\beta)$ は β の符号 (\pm) (β が正値の場合は $+$, 負値の場合は $-$) を意味する.

(筑波大 2003) (m20031303)

0.240 $\sin x$ のマクローリン多項式を利用して $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ を計算したい. 誤差を 0.002 以下にするには, 何次のマクローリン多項式を利用すればよいか示せ.

(筑波大 2003) (m20031308)

0.241 xy 平面上において原点を中心とする半径 b の円周上を等速度で運動する点の時刻 t における位置は $x = b \cos(\omega t + \phi)$, $y = b \sin(\omega t + \phi)$ で表すことができる. ここに, ω, ϕ は定数で, それぞれ, 角速度, 位相と呼ばれる.

- (1) 位置を時間に対して微分すると速度ベクトル \vec{v} が得られる. \vec{v} を求め成分表示しなさい.
- (2) 速度ベクトルをさらに時間に対して微分すると加速度ベクトル \vec{a} が得られる. \vec{a} を求め成分表示しなさい. また, \vec{a} と \vec{v} は互いに直交することを示しなさい.
- (3) ベクトル \vec{a} , \vec{v} の絶対値 $|\vec{a}|, |\vec{v}|$ を計算しなさい.

(筑波大 2003) (m20031312)

0.242 以下の設問 (1),(2) に答えなさい.

(1) $|x| < 1$ のとき, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x$ を証明しなさい. また, これを用いて $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ を計算しなさい.

(2) 次の不等式が成立することを証明しなさい. ただし, $n > 2$ とする.

$$\frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} < \frac{\pi}{6}$$

(筑波大 2004) (m20041307)

0.243 (1) 不定積分 $\int x e^{-x} dx$ を計算しなさい.

(2) 定積分 $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$ を計算しなさい.

(筑波大 2004) (m20041310)

0.244 $f(x) = e^{-x} \sin x$ について以下の問いに答えなさい.

(1) $f'(x)$ を求め, $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で $f'(x) = 0$ となる点をすべて挙げなさい.

(2) $y = f(x)$ の概略図をグラフで示しなさい. (3) 定積分 $\int_0^{\infty} f(x) dx$ を求めなさい.

(筑波大 2006) (m20061301)

0.245 $z = f(x, y)$ が全微分可能で, $x = r \cdot \cos \theta$, $y = r \cdot \sin \theta$ であるとする. このとき, 次式が成立することを証明せよ.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(筑波大 2006) (m20061309)

0.246 $x = \cos t$, $y = \sin t$ のとき, 次の関数を t で微分せよ. ただし, $f(x, y)$ は x, y に関して偏微分可能な関数である.

- (1) $\cos x + \cosh y$ (2) $f(x, y)$

(筑波大 2006) (m20061312)

0.247 関数 $f(x) = e^{\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$ について、以下の設問に答えよ。

- (1) 第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ。 (2) 関数 $f(x)$ の原始関数を 1 つ答えよ。
(3) $x \leq 0$ において、曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた全領域の面積が有限か否か、理由をつけて答えよ。

(筑波大 2006) (m20061314)

0.248 次の極限を求めなさい。

- (1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 1}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$
(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \log(x+1) + \log(\sqrt{3x+2} - \sqrt{3x}) \right\}$

(筑波大 2006) (m20061322)

0.249 (1) $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx$ を求めなさい。

- (2) $I(a) = \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \sin x + 1)^2 dx$ を最小にするような a の値を求めなさい。

(筑波大 2006) (m20061323)

0.250 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ を求めよ。 (2) $\frac{\cos x}{x}$ の導関数を求めよ。

- (3) 上記 (2) および $|\cos x| \leq 1$ を利用し、不等式 $\left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{x_1}$ が成り立つことを示せ。
ただし、 $0 < x_1 < x_2$ とする。

(筑波大 2007) (m20071301)

0.251 (1) 極限值 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x)$ を求めよ。

- (2) 関数 $f(x) = \sin^{-1} \sqrt{1-x^2}$ の導関数を求めよ。

(筑波大 2007) (m20071310)

0.252 すべての実数 x に対し $\sqrt{3} \sin x - \cos x = A \sin(x - \alpha)$ が成り立つとき、 A, α を求めよ。ただし $A > 0, 0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ とする。

(筑波大 2007) (m20071326)

0.253 いろいろな関数を、多項式で表現してみよう。ある関数 $f(x)$ が、

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

のように、定数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ を用いて x の多項式であらわされるとしよう。このとき、

- (1) $f(0) = a_0, f'(0) = a_1, f''(0) = 2a_2$ であることを示せ。
(2) 0 以上の任意の整数 n について、 $f^{(n)}(0) = n! a_n$ であることを示せ。ここで、 $f^{(n)}(x)$ は、 $f(x)$ を n 回、微分したものである ($f(x)$ の n 階導関数)。ゼロの階乗は 1 とする。

- (3) $f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ とできることを示せ。

- (4) 関数 $\sin x$ は、このような多項式で表現できることがわかっている。具体的に $\sin x$ をこのような多項式で表現せよ。
- (5) 関数 $\cos x$ や関数 e^x も、このような多項式で表現できることがわかっている。具体的に $\cos x$ と e^x をそれぞれ、このような多項式で表現せよ。
- (6) 任意の実数 θ について、 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ となることを示せ、ただし、 i は虚数単位とする。

(筑波大 2008) (m20081319)

0.254 $\sin 3\theta = \sin \theta$ となる正の θ で最小のものを求めよ。(解答は度, ラジアンいずれで書いてもよい.)

(筑波大 2008) (m20081330)

0.255 変数 x, y の関数 $z = f(x, y)$ を変数変換 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ により新しい変数 r, θ で表す。このとき、関数 $z = f(x(r, \theta), y(r, \theta))$ について以下の設問に答えよ。

(1) 1 階偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ を $r, \theta, \frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta}$ を用いて表せ。

(2) 2 階偏導関数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ は

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial z}{\partial \theta} - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

であることを示せ。

(筑波大 2009) (m20091308)

0.256 領域 $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$ 上での重積分 $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ を以下の設問に従って求めよ。ただし、 $a > 0, b > 0$ とする。

(1) $\begin{cases} x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta \end{cases}$ により変数変換を行う。積分領域 D を変数 r, θ で表せ。

(2) 前問 (1) の変数変換を行ったときのヤコビアンを求めよ。

(3) 以上の結果を用い重積分 I を求めよ。

(筑波大 2009) (m20091309)

0.257 整数 $n \geq 0$ に対して定義された不定積分を $I_n = \int \cos^n x dx$ とするとき、以下の漸化式を証明しなさい。

$$I_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

(筑波大 2009) (m20091316)

0.258 $-1 < x < 1, -1 < y < 1$ で定義された関数 $f(x, y) = \sin^{-1}(xy)$ の 1 次偏導関数 f_x, f_y と 2 次偏導関数 $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ を求め、この関数が極値をもたないことを証明しなさい。

(筑波大 2009) (m20091317)

0.259 $e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z$ (複号同順) という関係は、複素関数としての指数関数, 三角関数の間にも成り立つ。この関係を使って、逆余弦関数 $\arccos z$ ($\cos^{-1} z$ と書くこともある。) を対数関数を使って表せ。

(筑波大 2010) (m20101308)

0.260 $f(x, y) = \sin^{-1} \frac{y}{x}, x > 0$ のとき、 $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ を示しなさい。

(筑波大 2010) (m20101315)

- 0.261** 長方形の閉領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$ における次の関数 $f(x, y)$ の最大値, 最小値およびその時の x, y の値を求めなさい.

$$f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$$

(筑波大 2010) (m20101319)

- 0.262** 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} |\sin x| dx$$

必要があれば次の公式を用いてもよい.

$$\int e^{-x} \sin x dx = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(筑波大 2011) (m20111302)

- 0.263** 関数 $f(x) = \sin 2x$ の $x = \pi/2$ におけるテイラー展開について以下の問いに答えよ.

(1) $(x - \pi/2)^4$ の項までテイラー展開を求めよ. ただし, ここでは剰余項は求めなくてよい.

(2) $\pi/2 < x < \pi$ を満たす範囲の x に対して, 剰余項 R_5 は $|R_5| < \frac{\pi^5}{5!}$ を満たすことを示せ.

ただし, (1),(2) において $f(x)$ の $x = a$ におけるテイラー展開は, 正の整数 n に対して

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + R_{n+1}$$

と表される. ここで, 剰余項 R_{n+1} は, $a < p < x$ である p が存在して,

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(p)(x-a)^{n+1}$$

と表される.

(筑波大 2011) (m20111314)

- 0.264** 正弦関数 $\sin x$ の逆関数 $\text{Sin}^{-1}x$ を用いた関数の導関数について以下の問いに答えよ. ただし, $\text{Sin}^{-1}x$ は値域を閉区間 $[-\pi/2, \pi/2]$ に制限した主値を表す関数である.

(1) $\frac{d}{dx} (\text{Sin}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ であることを示せ.

(2) 定義域 $-1 < x < 0$ および $0 < x < 1$ において $\frac{d}{dx} (\text{Sin}^{-1}\sqrt{1-x^2})$ を求めよ.

(筑波大 2011) (m20111316)

- 0.265** 方程式 $\sin x = 0$ の解は $x = m\pi(0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$ であることから, 多項式

$$g_n(x) = Cx \left[\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \right] \left[\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \right] \cdots \left[\left(1 - \frac{x}{n\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{n\pi}\right) \right]$$

は, 定数 C を適切に選べば $x = 0$ のまわりで $\sin x$ の良い近似であることがわかっている.

ここで, n は正の大きな整数である. この多項式と $x = 0$ のまわりでのべき級数展開

$\sin x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ を比較する. ここで, $a_k(k = 0, 1, 2, \dots)$ は定数である.

(1) $\sin x$ のべき級数展開の 3 次の項まで, すなわち a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ.

(2) 多項式 $g_n(x)$ と (1) で求めたべき級数展開との 1 次の項の係数が一致するように C の値を決めよ

- (3) 多項式 $g_n(x)$ と (1) で求めたべき級数展開との 3 次の項の係数は $n \rightarrow \infty$ の極限で一致する.
このことを使って, 無限級数 $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$ の和 S を求めよ.

(筑波大 2012) (m20121310)

- 0.266** (1) 関数 $y = \sin^2 x$ のグラフを (x, y) 平面上に描きなさい.
(2) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ とは何か. 定義を述べなさい.
(3) ある畑の面積は $0.5ha$ である. この面積を km^2 の単位で表しなさい.

(筑波大 2012) (m20121313)

0.267 広義積分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

が収束するような実数 α の値の範囲を求めよ.

(筑波大 2012) (m20121326)

0.268 次の問いに答えよ.

- (1) $\sinh x$ と $\cosh x$ をマクローリン展開せよ.
(2) 次の積分を計算せよ.

$$\int_0^1 \cosh x dx$$

- (3) 次の積分を計算せよ.

$$\int_0^1 (1-x) \cosh x dx$$

- (4) $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\int_0^1 (1-x)^n \cosh x dx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n!}{(2m+n+1)!}$$

(筑波大 2013) (m20131304)

0.269 複素数 z についての方程式 $\sin z = 3i$ を考える. i は虚数単位である. 以下の問いに答えよ.

- (1) $\omega = e^{iz}$ とする. $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ の関係を使い, この方程式を ω に関する 2 次方程式に書き換えよ.
(2) (1) で求めた ω に関する 2 次方程式を解き, その解を極表示 $re^{i\theta}$ の形で表せ.
(3) $\sin z = 3i$ の解を $x + iy$ (x, y は実数) の形で求めよ.

(筑波大 2013) (m20131310)

0.270 デカルトの葉形と呼ばれる平面曲線 $C: x^3 - 3xy + y^3 = 0$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) C の特異点をすべて求めよ.
(2) C 上の点 (x, y) に関する xy の極値をすべて求めよ.
(3) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおき, C の極方程式を求めよ.
(4) C は第 1 象限で, ある図形を囲むがその図形の面積 S を求めよ.
(ヒント: 極方程式を用いて, $t = \tan \theta$ とおけ)

(筑波大 2015) (m20151303)

0.271 $f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \sin x$ (a_0, a_1, a_2 は実定数) の形の実関数全体が作る実線形空間 V に内積 $(g, h) = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)h(x)dx$ ($g, h \in V$) を導入する. 以下の問いに答えよ.

- (1) 3つの関数 $1, \cos x, \sin x$ は互いに直交することを示し, これらを正規化して正規直交基底を作れ.
- (2) 線形変換 $F: f(x) \mapsto f(x+c)$ について, (1) で得られた正規直交基底に関する表現行列を求めよ. ここで, c は実定数である.

(筑波大 2015) (m20151308)

0.272 f を実数全体で定義された実数値関数とする.

- (1) 「 f は至るところ連続ある」という定義を述べよ.
- (2) 「 f は一様連続ある」という定義を述べよ.
- (3) 関数 $f(x) = \sin x$ は一様連続であることを証明せよ.
- (4) 関数 $f(x) = x^2$ は一様連続でないことを証明せよ.

(筑波大 2016) (m20161305)

0.273 関数 $f(x)$ が次式で与えられているとする.

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $n = 2$ のとき, $x = 0$ において f は微分可能であることを示せ.
- (2) $n = 2$ のとき, $f'(x)$ は $x = 0$ で連続であるかどうかを示せ.
- (3) $n = 3$ のとき, $f'(x)$ は $x = 0$ で連続であるかどうかを示せ.

(筑波大 2016) (m20161311)

0.274 領域 $D = \{(x, y) \mid (x+y)^2 + 4(x-y)^2 \leq 1\}$ における重積分

$$I = \iint_D \frac{|x^2 - y^2|}{(x+y)^2 + 4(x-y)^2} dx dy$$
 の値を求めたい. 以下の問いに答えよ.

- (1) $x + y = r \cos \theta, x - y = \frac{r}{2} \sin \theta$ とするとき, x, y の r, θ に関するヤコビ行列式 (ヤコビアン) を計算せよ.
- (2) I を (1) で与えられた変数変換を用いて求めよ.

(筑波大 2017) (m20171301)

0.275 複素数 $z = x + iy$ の関数 $f(z) = \sinh 2z$ について, 以下の問いに答えよ. ただし, x, y は実数とする. なお, $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ と定義し, オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を用いてよい.

- (1) $f(z) = u + iv$ とするとき, u, v を x, y を用いて表せ. ただし, u, v は x, y の実関数とする.
- (2) $f(z) = 0$ となる z を求めよ.
- (3) $w = f(z)$ により z 平面上の直線 $x = \frac{1}{2}$ を w 平面上に移したとき, w 平面上の図形は楕円になる. w 平面上にその楕円を図示せよ.

0.276 関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

とする。このとき、以下の問に答えよ。

- (1) f は原点 $x = 0$ で連続である。その理由を答えよ。
- (2) f の原点 $x = 0$ 以外の導関数を求めよ。
- (3) f の原点 $x = 0$ での微分係数を定義に従って求めよ。
- (4) f の導関数 f' が原点 $x = 0$ で連続かどうかを、その理由とともに答えよ。

(筑波大 2018) (m20181310)

0.277 以下の関数を積分せよ。ただし、 k は整数であり、積分定数は省略してよい。

$$(1) \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \quad (2) \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (3) \frac{1}{\sin x} \quad (4) x^k \ln x$$

(筑波大 2018) (m20181311)

0.278 関数 $f(x, y)$ は、 x および y について偏微分可能で $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ なる関係を満足する。

関数 $f(x, y)$ を $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ($r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$) で変数変換したときの $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ は、変数 r を含まない関数となることを証明しなさい。

(筑波大 2018) (m20181315)

0.279 $f(x) = \log(1 + \sin x)$ とおく。以下の問に答えよ。

- (1) $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)$ ($x \rightarrow 0$) を満たす a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ。但し、 $o(\cdot)$ はランダウの記号 (スモール・オー) を表す。
- (2) 次の極限值を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x) - x}{3x^2}$$

- (3) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ の近似値を誤差 $\frac{1}{100}$ 未満で求めよ (求めた近似値の誤差が $\frac{1}{100}$ 未満であることの根拠も述べること)。

(筑波大 2018) (m20181319)

0.280 2つの実数 a, θ に対して、3次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

で定める。

- (1) A^2 の行列式を求めよ。
- (2) A^2 の階数を求めよ。
- (3) \mathbb{R}^3 の部分集合 V を

$$V = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A^2 \mathbf{x} = \mathbf{x} \}$$

で定める。このとき、 V の次元を求めよ。

- 0.281** (1) $f(x)$ は $x \geq 0$ において定義された実数値連続関数であって、任意の $\varepsilon > 0$ に対して広義積分 $\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ が収束すると仮定する。このとき、任意の正の実数 a, b ($a < b$) に対して、次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx$$

- (2) $f(x)$ は (1) の仮定を満たすとす。 (1) の等式を用いて、任意の正の実数 a, b ($a < b$) に対して、

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \log \frac{b}{a}$$

が成り立つことを示せ。

- (3) 次の広義積分の値を求めよ。 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^2} dx$

(筑波大 2019) (m20191317)

- 0.282** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < x < \pi \text{ かつ } 0 < y < \pi\}$ とする。

関数 $f(x, y) = \sin x - \sin y + \sin(x + y)$ の D における極値をすべて求めよ。

(筑波大 2020) (m20201315)

- 0.283** (1) 以下の広義積分の値を求めよ。

$$\int_0^{\pi} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx$$

- (2) 関数 $f(x)$ は閉区間 $[0, 1]$ で連続であり、 $f(x) > 0$ ($x \in [0, 1]$) とする。このとき、以下の広義積分が収束することを示せ。

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}f(x)} dx$$

(筑波大 2021) (m20211304)

- 0.284** 閉区間 $[0, 2\pi]$ 上の関数

$$f(x) = \sqrt{1 + a^2 + b^2 - 2a \cos x - 2b \sin x}$$

を考える。ただし、 a, b は正の定数とする。

- (1) $f(x)$ の最大値 M と最小値 m を求めよ。
 (2) 関係式

$$\begin{cases} a = 1 + \frac{\cos \theta}{\sqrt{2}} \\ b = 1 + \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

があるとき、積 Mm の最大値を求めよ。

(埼玉大 2000) (m20001401)

- 0.285** 次の関数の導関数を求めさない。

- (1) $y = \sin^{-1} x$ ($y = \arcsin x$ を意味する)
 (2) $y = x^{\sin x}$

(埼玉大 2001) (m20011401)

0.286 実数 θ に対して $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} x^n$ とおく.

(1) 右辺の級数は $|x| < 1$ で収束することを示せ.

(2) $f'(x) = \frac{\sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}$ を示せ. $\left[\text{ヒント : } \sin t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it}) \right]$
(埼玉大 2002) (m20021401)

0.287 実数 α に対し, $f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x^\alpha \sin \frac{1}{x} & (x > 0) \end{cases}$ とおく.

(1) $\alpha > 1$ のとき, $f(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で微分可能であることを示せ.

(2) $\alpha \leq 1$ のとき, $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能でないことを示せ.

(3) $\alpha > 1$ のとき, $f'(x)$ が $-\infty < x < \infty$ で連続となる α の範囲を求めよ.

(埼玉大 2003) (m20031402)

0.288 $a > 0$ とするとき, $\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin x dx$ を求めよ.

(埼玉大 2003) (m20031404)

0.289 (1) 次の関数を微分せよ.

$$[\sin^{-1}(2x)]^3 \quad \left(|x| < \frac{1}{2} \right)$$

ただし, $\sin^{-1}()$ は逆正弦関数の主値をとるものとする.

(2) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^{2x}}{(a+b)x} \quad (a > 0, b > 0, a \neq b)$$

(埼玉大 2004) (m20041401)

0.290 $f(x) = \frac{3e^{2x} + 4 \sin x}{2e^{2x} + e^{-x}}$ とおく.

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を求めよ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} f(x) dx$ を求めよ.

(埼玉大 2004) (m20041402)

0.291 (1) 次の行列 A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

(2) 行列 A を $P^{-1}AP$ により対角化せよ. 解答では, まず, 行列 P を求めてから A を対角化せよ.

(埼玉大 2005) (m20051402)

0.292 次の微分方程式の一般解を求めよ. ただし, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, $y' = \frac{dy}{dx}$ である.

(1) $2x^2y' = x^2 + y^2$

(2) $y'' + 2\varepsilon y' + \omega_0^2 y = F \sin \omega x$ (ただし, $\varepsilon \neq 0$, $\omega_0^2 > \varepsilon^2$)

(埼玉大 2005) (m20051403)

0.293 (1) $t = \tan \frac{x}{2}$ とするとき, $\sin x$, $\cos x$ および $\frac{dt}{dx}$ を t の式で表せ.

(2) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}$ を求めよ.

(埼玉大 2006) (m20061402)

0.294 次の微分方程式を解け.

(1) $x(x-y)\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$

(2) $\frac{dy}{dx} - xy = x$

(3) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 2 \sin x$

(埼玉大 2006) (m20061405)

0.295 n を自然数とし、 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ とおく.

(1) I_2 を求めよ.

(2) $n \geq 3$ のとき、 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ を示せ.

(埼玉大 2006) (m20061408)

0.296 $f(x, y) = x^2 - x \sin y - \cos^2 y$ とする.

(1) 偏導関数 $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ を求めよ.

(2) $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ を満たす点 (x, y) をすべて求めよ.

(3) f の極値を求めよ.

(埼玉大 2006) (m20061409)

0.297 \mathbf{R}^2 のベクトル \mathbf{x}, \mathbf{y} の内積を (\mathbf{x}, \mathbf{y}) で表す. $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^2$ を長さ 1 のベクトルとして、直線

$$l = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \mid (\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0\}$$

に関する折り返し写像を T とする. すなわち、 $T(\mathbf{x})$ は直線 l に関して \mathbf{x} と線対称の位置にあるベクトルである.

(1) $T(\mathbf{x})$ を \mathbf{x} と \mathbf{u} を用いて表せ.

(2) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ とするとき、 $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ となる行列 A を求めよ.

(埼玉大 2008) (m20081406)

0.298 (1) 関数 $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい.

(2) 関数 $f(x) = \frac{x^3}{1-x}$ の第 4 次導関数 $f^{(4)}(x)$ を求めなさい.

(3) 次の極限値を求めなさい.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos 2x)}{\log(\cos 3x)}$$

(4) xy 平面において $y = \frac{1}{\sin x}$ のグラフで与えられる曲線と直線 $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}$ および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい.

(埼玉大 2009) (m20091401)

0.299 (1) $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ とする. ただし、 θ は $0 < \theta < 2\pi, \theta \neq \pi$ を満たす実数とする.

次の条件 (a),(b),(c) をすべて満たすような $\alpha_1, \alpha_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ の組を 1 つ求めよ.

(a) α_1, α_2 は相異なる複素数である.

- (b) $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ は複素数を成分とする 2次元ベクトルで、どちらも零ベクトルではなく、さらに $\frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$ と $\frac{i}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ はともに実数を成分とするベクトルになる。
- (c) $A\mathbf{p}_1 = \alpha_1\mathbf{p}_1$ かつ $A\mathbf{p}_2 = \alpha_2\mathbf{p}_2$ を満たす。

(2) B を 2次の実正方行列とし、 B のどの固有値も実数でないと仮定する。

(i) 次の (d),(e),(f) をすべて満たすような $\beta_1, \beta_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ の組が存在することを示せ。

(d) 正の実数 r と、 $0 < \theta < 2\pi, \theta \neq \pi$ を満たす実数 θ を用いて、 $\beta_1 = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $\beta_2 = r(\cos \theta - i \sin \theta)$ と表される。

(e) $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ は複素数を成分とする 2次元ベクトルで、どちらも零ベクトルでなく、さらに $\frac{1}{2}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)$ と $\frac{i}{2}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$ はともに実数を成分とするベクトルになる。

(f) $B\mathbf{q}_1 = \beta_1\mathbf{q}_1$ かつ $B\mathbf{q}_2 = \beta_2\mathbf{q}_2$ を満たす。

(ii) 2次の実正則行列 M が存在して、

$$M^{-1}BM = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

となることを示せ。

(埼玉大 2009) (m20091405)

0.300 $x > 0$ に対して

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt} \sin t}{t} dt$$

とおく。次の問いに答えよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ を求めよ。

(2) $F'(x)$ を求めよ。ただし、等式

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt} \sin t}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{e^{-xt} \sin t}{t} \right\} dt$$

が成り立つことを用いてよい。

(3) $\lim_{x \rightarrow +0} F(x)$ を求めよ。

(埼玉大 2010) (m20101403)

0.301 (1) つぎの関数を微分せよ。

$$y = \tan^{-1} \left(\frac{1 - \cos x}{\sin x} \right)$$

(2) つぎの関数の第 n 次導関数を求めよ。

$$y = (x+1)^2 \log(x+1)$$

(埼玉大 2010) (m20101405)

0.302 (1) 以下の微分方程式を解け。

(a) $\frac{dy}{dx} = \tan x \cdot \tan y$

(b) $\cos x \frac{dy}{dx} - y \sin x = 2 \cos x \sin x$

(c) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = e^x$

(2) $y(t)$ が時刻 t における物体の位置を表すとすると, $f'(t)$ は速度, $f''(t)$ は加速度を表す.

(a) 下記の運動方程式を満たすこの物体の位置 $y(t)$ を求めよ.

$$y''(t) + k^2 y(t) = 0 \quad (k > 0 \text{ の定数})$$

(b) 初期条件 $y(0) = A_0, y'(0) = 0$ を満たす解を求めよ.

(埼玉大 2010) (m20101408)

0.303 (1) 次の関数を微分せよ.

$$y = \sin^{-1} \left(\frac{1}{2x^2 + 1} \right)$$

(2) 次の関数について $\frac{dz}{dt}$ を t の関数で表せ.

$$z = x^2 + 2y, \quad x = \sin t, \quad y = 5 \cos t$$

(埼玉大 2011) (m20111401)

0.304 以下の微分方程式を解け.

(1) $x \frac{dy}{dx} - 2x^2 y = y$

(2) $4y^2 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 4$

(3) $\frac{d^2 y}{dx^2} + 6 \frac{dy}{dx} + 8y = 0$

(4) $\frac{d^2 y}{dx^2} - 6 \frac{dy}{dx} + 9y = \sin 3x$

(埼玉大 2011) (m20111406)

0.305 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \cos(\sin x)$

(2) $y = x^{\sin^{-1} x} \quad (0 < x < 1)$

(埼玉大 2012) (m20121401)

0.306 次の定積分を求めよ.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx \quad (m, n \text{ は自然数})$$

(埼玉大 2012) (m20121402)

0.307 以下の微分方程式を解け.

(1) $x \frac{dy}{dx} = y - 1$ (2) $x + y \frac{dy}{dx} = 2y$ (3) $\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} = e^{3x}$ (4) $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = \sin x$

(埼玉大 2014) (m20141404)

0.308 次の関数の偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ および $\frac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

$$f(x, y) = \cos(xy) \sin y$$

(埼玉大 2015) (m20151402)

0.309 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$

(2) $x \left(\frac{dy}{dx} + \sin x \right) + y = 0$

(3) $3 \frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$

$$(4) \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y - x - 3 = 0$$

(埼玉大 2015) (m20151407)

0.310 次の関数を x について微分せよ.

$$(1) y = \frac{\sin 3x}{1 + \cos 3x}$$

$$(2) y = e^{\frac{x}{\tan x}}$$

(埼玉大 2017) (m20171401)

0.311 以下の微分方程式を解け.

$$(1) \frac{dy}{dx} = e^{2y-x}$$

$$(2) 2xy \frac{dy}{dx} = y^2 - 4x^2$$

$$(3) \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 4e^x$$

$$(4) \sin x \frac{dy}{dx} - 2y \cos x = 2x \sin^3 x$$

(埼玉大 2017) (m20171406)

0.312 次の不定積分を求めよ. $I = \int \frac{1}{\sin x} dx$

(埼玉大 2019) (m20191403)

0.313 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1) \frac{dy}{dx} = (2y + 1)^2 x e^{-x}$$

$$(2) \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} - 1 = 0$$

$$(3) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2 \sin x \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2} \cos 2x = 0$$

(埼玉大 2019) (m20191407)

0.314 $0 \leq x \leq 180$ のとき, 等式 $2 \cos^2 x = 3 \sin x$ を満たす x の値を求めよ.

(群馬大 2001) (m20011503)

0.315 $\tan \frac{\theta}{2} = x$ のとき, 以下の問いに答えよ.

$$(1) \sin \theta = \frac{2x}{1+x^2} \text{ を証明せよ.}$$

$$(2) \cos \theta = \frac{1-x^2}{1+x^2} \text{ を証明せよ.}$$

(群馬大 2007) (m20071504)

0.316 以下の式を簡単にせよ.

$$(1) (\sin 25^\circ - 3 \sin 65^\circ)^2 + (3 \cos 115^\circ + \cos 155^\circ)^2$$

$$(2) \tan(45^\circ + \theta) \tan(45^\circ - \theta) + \tan(135^\circ + \theta) \tan(135^\circ - \theta)$$

$$(3) (\sin x + \cos x)^2 + \frac{(1 - \tan x)^2}{1 + \tan^2 x} + \tan^2 x + \cos^2 x (1 - \tan^4 x)$$

(群馬大 2013) (m20131501)

0.317 次の微分方程式を解け.

$$y'' + 2y' + 10y = e^{-t} \sin t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

(茨城大 1998) (m19981702)

0.318 z を複素数とするとき, $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ である. 次の各問いに答えよ.

$$(1) \sin^2 z + \cos^2 z = 1 \text{ を示せ.}$$

(2) y を実数とするとき, $\cos(iy) \geq 1$ を示せ.

(3) $\cos z$ が実数となる z の条件を求めよ.

(茨城大 2001) (m20011707)

0.319 (1) 関数 $f(x) = \sin x$ に対して, $f^{(n)}(0)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ.

(2) $\sin x$ のマクローリン展開 (0 のまわりでのテイラー展開) をかけ.

(3) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^\alpha} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = 0$ となる正の定数 α の条件を求めよ.

(茨城大 2002) (m20021703)

0.320 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = \sin x$$

(茨城大 2004) (m20041702)

0.321 複素平面上の曲線 $z(t) = \cos t + i(1 + \sin t)$ ($0 \leq t \leq \pi$) を C とするとき,

(1) C を複素平面上に図示せよ.

(2) 複素積分 $\int_C z dz$ を求めよ.

(3) 複素積分 $\int_C \bar{z} dz$ を求めよ. ただし, \bar{z} は z の共役複素数を表す.

(茨城大 2004) (m20041704)

0.322 $t > 0$ とする. xy 平面内の領域 $D(t) : t^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4t^2, x \geq 0, y \geq 0$ 上の二重積分

$$F(t) = \iint_{D(t)} \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy \quad \text{について, 次の間に答えよ.}$$

(1) 極座標変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ のヤコビ行列式 (ヤコビアン) を計算し, $F(t)$ を $r\theta$ 平面内の領域上の二重積分に変換せよ.

(2) $F'(t)$ を計算せよ.

(茨城大 2006) (m20061702)

0.323 関数 $y = \sin x$ の定義域を $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ に制限すると, その逆関数 $y = \text{Arcsin } x$ を考えることができる. 次の各問に答えよ.

(1) $f(x) = (\text{Arcsin } x)^2$ は, どのような 2 つの関数の合成関数とみなすことができるか答えよ.

(2) 合成関数の微分公式に従い, $f(x) = (\text{Arcsin } x)^2$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた関数 $f'(x)$ に対して, 定積分 $\int_0^{\frac{1}{2}} f'(x) dx$ を求めよ.

(茨城大 2007) (m20071701)

0.324 (x, y) を平面上の直交座標, (r, θ) を極座標とする. 以下の間に答えよ.

$\rho > 0$ とする. 関数 $f(x, y) = r \sin 2\theta$ の正方形 $A = \{(x, y) \mid 0 < x < \rho, 0 < y < \rho\}$ 上の積分

$$I(\rho) = \iint_A f(x, y) dx dy$$

と扇形 $B = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \mid 0 < r < \rho, 0 < \theta < \pi/2\}$ 上の積分

$$J(\rho) = \iint_B f(x, y) dx dy$$

の大小関係を積分計算によらずに論ぜよ。次に積分計算を行って $I(\rho)$ と $J(\rho)$ を ρ の式で表し、大小関係を比較せよ。

(茨城大 2007) (m20071705)

0.325 (x, y) を平面上の直交座標, (r, θ) を極座標とする。以下の各問に答えよ。

関数 $f(x, y)$ の定義域内の点 \mathbf{p} およびベクトル $\mathbf{u} = (a, b)$ に対し, 極限 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{p} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{p})}{t}$ を点 \mathbf{p} での \mathbf{u} 方向の微分係数と呼び, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{p})$ で表す。

- (1) 関数 $f(x, y) = r \sin 3\theta$ の原点 \mathbf{o} での $\mathbf{u} = (\cos \phi, \sin \phi)$ 方向の微分係数 $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{o})$ を求めよ。また, 偏微分係数 $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{o}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{o})$ を求めよ。
- (2) 関数 $f(x, y)$ が点 \mathbf{p} の近傍で偏微分可能, かつ, 偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ と $\frac{\partial f}{\partial y}$ が点 \mathbf{p} で連続ならば等式

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{p}) = a \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) + b \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p})$$

が成立することを示せ。次に (1) の関数 f は原点 \mathbf{o} でこの等式を満たさない理由を説明せよ。

(茨城大 2007) (m20071706)

0.326 $f(t)$ を $[0, \infty)$ 上で連続かつ広義積分可能な関数とする。また a, b は $a, b > 0$ を満たす実数とし, $g(x, y) = f(a^2x^2 + b^2y^2)$ とおく。以下の各問いに答えよ。

- (1) $f(t)$ が $[0, \infty)$ 上で広義積分可能であることの定義を記述せよ。
- (2) 変数変換

$$\begin{cases} x = \frac{r}{a} \cos \theta \\ y = \frac{r}{b} \sin \theta \end{cases}$$

によって, $r\theta$ 平面内の集合 $[0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ は xy 平面内のどのような集合に写るか図示せよ。

- (3) 等式

$$\iint_{[0, \infty) \times [0, \infty)} g(x, y) dx dy = \frac{\pi}{4ab} \int_0^\infty f(t) dt$$

が成り立つことを示せ。

- (4)

$$I(a, b) = \iint_{[0, \infty) \times [0, \infty)} e^{-a^2(x^2+1) - b^2(y^2+1)} dx dy$$

とする。(3)の結果を用いて, 条件 $a^2 + b^2 = 1$ の下での $I(a, b)$ の最小値を求めよ。

(茨城大 2009) (m20091706)

0.327 次の連立不等式の表す領域を D とする。

$$y \geq x, y \geq -x, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$$

以下の各問に答えよ。

- (1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ。
- (2) 極座標変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ に対して, $J = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial r}$ とおく。 J を計算せよ。
- (3) 2重積分 $\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ を計算せよ。

0.328 複素平面において, 0 を始点, π を終点とする曲線 $C: z(t) = t + i \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$) を考える. 以下の各問に答えよ.

- (1) 曲線 C を複素平面上に図示せよ.
- (2) 導関数 $z'(t)$ を求めよ.
- (3) 複素積分 $\int_C \bar{z} dz$ を計算せよ. ただし, \bar{z} は z の共役複素数を表す.

(茨城大 2016) (m20161707)

0.329 次の関数を考える.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)^2$$

$0 \leq t$ に対して $D(t) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, f(x, y) \geq t\}$ とするとき, 次の小問 (1), (2) および (3) に答えよ.

- (1) 極座標変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ($r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) を用いて, 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_{D(0)} f(x, y) dx dy$$

- (2) 平面上の集合 $D(t)$ が表す領域の面積を $F(t)$ とするとき, $F(t)$ を求めよ.

ただし, 平面上の集合 $D(t)$ が表す領域が空集合である場合や正の面積を持たない場合の t では $F(t) = 0$ とする.

- (3) 次の等式を示せ.

$$\int_0^\infty F(t) dt = \iint_{D(0)} f(x, y) dx dy$$

(茨城大 2018) (m20181703)

0.330 $\frac{d \sin^{-1} x}{dx}$ を計算せよ.

(山梨大 2002) (m20021801)

0.331 $\int \frac{\sin^{-1} x}{x} dx$ を計算せよ.

(山梨大 2002) (m20021802)

0.332 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$ を求めよ.

(山梨大 2003) (m20031801)

0.333 $f(x, y) = x \arcsin y + y \arccos x$ の偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を求めよ. ただし, $\arcsin y, \arccos x$ は, 逆三角関数である.

(山梨大 2004) (m20041803)

0.334 (1) $f(x, y) = x^2 \sin y + y^3 \cos x$ の偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を求めよ.

- (2) 不定積分 $\int \sin^3 x dx$ を求めよ.

(山梨大 2005) (m20051804)

0.335 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3}$ を求めなさい.

(山梨大 2007) (m20071804)

0.336 定積分 $\int_{\alpha}^{\beta} \sin(\lambda x + \mu) dx$ を求め、定数 $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ の式で表しなさい。ただし、 $\lambda \neq 0$ とする。
(山梨大 2007) (m20071805)

0.337 座標平面上の領域 $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ を考えるとき、 D における二重積分 $\iint_D e^x \sin y \, dx dy$ の値を求めなさい。
(山梨大 2007) (m20071806)

0.338 座標平面上に曲線 $y = \cos x$ の $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の部分と x 軸とで囲まれた領域を D とし、関数 $f(x) = e^{\sin x}$ を考える。ここに、 e は自然対数の底とする。

(1) $\frac{df(x)}{dx}$ を求めなさい。

(2) α が定数のとき、定積分 $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) \cos x \, dx$ を α の式で表しなさい。

(3) D における二重積分 $\iint_D f(x) \, dx dy$ の値を求めなさい。

(山梨大 2008) (m20081804)

0.339 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ とベクトル $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ とを考える。

ただし、 θ は任意の実数とする。

(1) A の固有値をすべて求めなさい。

(2) \mathbf{V} は A の一つの固有ベクトルであることを示し、固有ベクトル \mathbf{V} に対する A の固有値を求めなさい。

(山梨大 2009) (m20091802)

0.340 α を正の定数として、座標平面上の領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y \leq \alpha\}$ を考える。このとき、 D における二重積分 $\iint_D \cos x \sin y \, dx dy$ を求め、 α の式で表しなさい。

(山梨大 2009) (m20091804)

0.341 以下の関数に対して、 $x = 0$ での 3 次までの Taylor 展開を求めなさい。

$$f(x) = \frac{\operatorname{Sin}^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(山梨大 2010) (m20101807)

0.342 関数 $f(x) = \log(1 + \sin x)$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めなさい。

(山梨大 2011) (m20111805)

0.343 偏微分 $\frac{\partial^2 \sin^2(x^2 y)}{\partial y \partial x}$ を求めなさい。

(山梨大 2012) (m20121802)

0.344 开区間 $(-\pi, \pi)$ において、実関数 $f(x)$ が微分可能であり、その導関数 $f'(x)$ が連続であるとする。このような $f(x)$ を用いて、 a_n (但し、 n は自然数) が次式で定義されているとき、以下の小問に答えよ。

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

(1) $f(x) = \sin x$ のとき、微分の定義に従って、導関数 $f'(x)$ を導け.

(2) $f(x) = \sin 3x$ のとき、 a_n を求めよ.

(3) $f(x) = x$ のとき、 a_n を求めよ.

(山梨大 2018) (m20181801)

0.345 θ と ϕ を実数とし、行列 $A = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix}$ を考える. 以下の小問に答えよ.

(1) 行列の積 AB を計算し、その結果を行列 A, B と同じ形に変形せよ.

(2) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ. なお、固有ベクトルは規格化しなくてもよい.

(3) 行列 A により xy 平面上の 4 点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が変換される点を求め、 θ を正として図示せよ. また変換後の点が囲む面積を求めよ.

(山梨大 2018) (m20181802)

0.346 整数 n , 正数 b に対して、 $I_n = \int_{-b}^b e^x \sin nx \, dx$, $R_n = \int_{-b}^b e^x \cos nx \, dx$ とおく. 次の小問に答えよ.

(1) $I_n + nR_n$ を求めよ.

(2) $R_n - nI_n$ を求めよ.

(3) I_n と R_n を求めよ.

(4) $b = \pi$ のとき、 I_n と R_n を求めよ.

(山梨大 2019) (m20191801)

0.347 関数 $f(x) = e^x \sin(x + \alpha)$ の第 n 階導関数は

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + \alpha + \frac{n\pi}{4}\right)$$

であることを証明せよ.

(信州大 1998) (m19981901)

0.348 (1) 単位円周 $x^2 + y^2 = 1$ 上で定義された関数 $f(x, y) = x^3 + y^2$ の値域を求めよ.

(2) 2変数関数 $f(x, y) = \sin x \cos y$ のマクローリン展開を 2 次項まで求めよ.

(信州大 2005) (m20051904)

0.349 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \pi\}$ とする. 次の積分の値を求めよ. $\iint_D x^2 \sin(x^2 + y^2) \, dx \, dy$

(信州大 2007) (m20071903)

0.350 xy -平面上の連続関数 $f(x, y)$ を考える. f の 1 階偏導関数 $f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ および $f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ はともに xy -平面上で連続であるとする. このとき、ある $\theta_0 \in (0, 2\pi)$ が存在し、
 $-f_x(\cos \theta_0, \sin \theta_0) \sin \theta_0 + f_y(\cos \theta_0, \sin \theta_0) \cos \theta_0 = 0$ となることを示せ.

(信州大 2008) (m20081903)

0.351 領域 $D = \left\{ (x, y) \mid 0 < x < \frac{5}{6}\pi, 0 < y < \frac{5}{6}\pi \right\}$ で定義された

2変数関数 $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$ について、次の問いに答えよ.

- (1) 関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $f_x(x, y)$ および $f_y(x, y)$ を求めよ. また, 第 2 次偏導関数 $f_{xx}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$ および $f_{yy}(x, y)$ を求めよ.
- (2) $f_x(x, y) = 0$ かつ $f_y(x, y) = 0$ を満たす領域 D 内の点 (x, y) をすべて求めよ.
- (3) 関数 $f(x, y)$ の領域 D における極値を求めよ.

(信州大 2013) (m20131901)

0.352 重積分 $I = \iint_D \sin(x^2) dx dy$ を求めよ. ただし, $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x \leq \sqrt{\pi}\}$ とする.

(信州大 2014) (m20141902)

0.353 (1) $t = \tan \theta$ のとき, $\sin 2\theta$ を t を用いて表せ.

(2) $t = \tan \theta$ と置換して, 不定積分 $\int \frac{d\theta}{1 + \sin 2\theta}$ を求めよ.

(信州大 2015) (m20151902)

0.354 平面内の領域 $D = \{(x, y) | (x, y) \neq (0, 0)\}$ で定義される 2 変数関数 $f(x, y)$ に対して, $\Delta f(x, y) = f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)$ と定める. また, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ($r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$) とし, $z = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ とする. このとき, 次の問いに答えよ. ただし, 領域 D で $f(x, y)$ の 2 階までのすべての偏導関数が存在して, それらはすべて連続である.

(1) z_r, z_θ を r, θ, f_x, f_y を用いて表せ.

(2) $z_{rr} + \frac{1}{r}z_r + \frac{1}{r^2}z_{\theta\theta} = \Delta f$ を示せ.

(3) $f(x, y) = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \log(x^2 + y^2)$ のとき, $\Delta f(x, y)$ を求めよ. ただし, 対数は自然対数とする;

(信州大 2016) (m20161901)

0.355 2 変数関数 $f(x, y) = -\sin^3 x + 2 \sin x \cos^2 y$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $D = \{(x, y) | 0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}$ における $f(x, y)$ の極値を求めよ.

(2) $E = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ における $f(x, y)$ の最大値, 最小値を求めよ.

(信州大 2018) (m20181901)

0.356 \mathbb{R} で定義された実数値関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続とは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し或る $\delta > 0$ が存在して $|x - a| < \delta$ なる任意の x に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つことである. いま ε, a が与えられたとして, 関数 $f(x) = \sin x$ について δ の 1 つを求めよ.

(信州大 2018) (m20181905)

0.357 $g(x) = x^2 \sin x$ の $x = 0$ の周りのテイラー展開を求めよ.

(信州大 2019) (m20191909)

0.358 (1) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right)$$

(2) 次の極限が存在しないことを示せ.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

(3) 2変数関数 $z = f(x, y)$ と $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ の合成関数 $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ に対し, 関係式

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

が成り立つことを示せ.

(信州大 2020) (m20201905)

0.359 広義積分 $I = \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2 + \sin x} dx$ の収束・発散を調べよ.

(信州大 2021) (m20211902)

0.360 関数 $f(x, y)$ は

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

で定義されているとする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $f_x(0, 0)$ と $f_y(0, 0)$ を求めよ.
- (2) $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ で全微分可能であることを示せ.
- (3) $f_x(x, y)$ を求めよ. また, $f_x(x, y)$ は点 $(0, 0)$ で不連続であることを示せ.

(信州大 2022) (m20221901)

0.361 閉区間 $[a, b]$ を含むある开区間上で定義された実数値関数 $f(x)$ が2回連続微分可能で, 任意の点 $x \in [a, b]$ において, $f''(x) \geq 0$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 任意の $c \in [a, b]$ に対して, 次の不等式が成立することを証明せよ.

$$(b - c)f(a) + (c - a)f(b) \geq (b - a)f(c)$$

- (2) (1) の不等式で, 真に不等号 $>$ が成立するのはどんな場合か.
- (3) 上の結果を用いて, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき, $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ となることを示せ.

(新潟大 1999) (m19992001)

0.362 次の問いに答えよ.

- (1) $t = \tan \frac{x}{2}$ とすると, $\sin x$, $\cos x$, dx は, それぞれ次のように t で表されることを示せ.

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

- (2) 不定積分 $\int \frac{1}{3 \sin x + 4 \cos x} dx$ を求めよ.

(新潟大 2000) (m20002002)

0.363 $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ (θ は実数) とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 行列 P の逆行列 P^{-1} 及び, 行列 A の固有値を求めよ.
- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように θ ($0 \leq \theta < \pi/2$) の値を定めよ.
- (3) 曲線 $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 2$ の概形を描け.

(新潟大 2000) (m20002004)

0.364 非負の整数 n に対して, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ とする. このとき, $n > 1$ に対して I_n と I_{n-2} の関係式を求めよ. さらに I_3, I_4 の値を求めよ.

(新潟大 2001) (m20012002)

0.365 $y = \sin^2 x$ を $x = 0$ のまわりでテーラー展開して, x の 4 次の項まで求めよ.

(新潟大 2001) (m20012003)

0.366 実変数の実数値関数 $f(x)$ を $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \text{ の場合} \\ 0 & , x = 0 \text{ の場合} \end{cases}$ によって定義する. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ となることを示せ. (2) $x \neq 0$ に対して, $f'(x)$ を求めよ.
- (2) $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ を求めよ. (4) $f'(x)$ は $x = 0$ で連続でないことを示せ.
- (3) $F(x, y) = f(xy)$ とおくと, $xy \neq 0$ に対して, x に関する偏導関数 $\frac{\partial F}{\partial x}$, および, y に関する偏導関数 $\frac{\partial F}{\partial y}$ を求めよ.

(新潟大 2001) (m20012004)

0.367 周期 2π の関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

と書かれた時, $f(x)$ はフーリエ級数展開されたという. 一般に, 係数 a_n, b_n は

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

として求められる. 今, $f(x)$ が, 区間 $-\pi < x \leq \pi$ で

$$f(x) = x$$

である時, フーリエ級数の係数 a_n, b_n を求めよ.

(新潟大 2001) (m20012010)

0.368 関数 $y = \sin(\sin(\sin x))$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ.

(新潟大 2004) (m20042001)

0.369 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ (θ は実数) について, 次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ.
- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるように θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) の値を求めよ.
- (3) 曲線 $5x^2 + 2xy + 5y^2 - 12 = 0$ の概形を描け.

(新潟大 2004) (m20042005)

0.370 自然数 n に対して, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$ とおく. 次の問いに答えよ.

- (1) 任意の実数 x に対して, $1 + x \leq e^x$ を示せ.
- (2) $(1 - x^2)^n \leq e^{-nx^2}$ ($-1 \leq x \leq 1$) および $e^{-nx^2} \leq (1 + x^2)^{-n}$ ($-\infty < x < \infty$) を示せ.
- (3) $x = \cos t$ とおくことにより, $\int_0^1 (1 - x^2)^n dx = I_{2n+1}$ を示せ.

(4) $x = \tan t$ とおくことにより, $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = I_{2n-2}$ ($n \geq 2$) を示せ.

(5) $\sqrt{n} I_{2n+1} \leq \int_0^\infty e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n} I_{2n-2}$ ($n \geq 2$) を示せ.

(新潟大 2005) (m20052003)

0.371 関数 $f(x) = x \sin 2x$ の第 2 次導関数を求めよ.

(新潟大 2006) (m20062002)

0.372 物理によく用いられるオイラーの公式 ($e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ここで, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位) は, 指数関数と三角関数を結びつける重要な公式である. この公式を使って, 次の関係式を証明せよ.

(1) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ (2) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

(新潟大 2007) (m20072003)

0.373 (1) 三角関数に対して次のような公式がある.

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx \quad (\text{a})$$

ここで, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする. 式 (a), または, 三角関数の加法定理, 倍角公式などを用いて, 次の式が成り立つことを証明せよ.

$$\cos 5x = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x \quad (\text{b})$$

(2) 式 (b) の両辺を x で微分することにより

$$\sin 5x = (16 \cos^4 x - 12 \cos^2 x + 1) \sin x \quad (\text{c})$$

となることを証明せよ.

(3) $\cos \frac{\pi}{5}$ を求めよ.

(新潟大 2008) (m20082002)

0.374 (1) $y = x^n$ を n 回微分せよ. なお, n は正の整数である.

(2) $y = \sin x$ を n 回微分せよ.

(3) α は任意の実数で $x > 0$ とする. $y = x^\alpha$ のとき, $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ であることを与式の両辺の対数を取って示せ.

(4) (3) と同様の方法を用いて $y = x^2 \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$ を微分せよ.

(新潟大 2010) (m20102001)

0.375 以下の極限值を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin x - \log(x+1)}$$

(新潟大 2010) (m20102004)

0.376 $\int_0^\infty e^{ax} |\sin x| dx$ (ただし $a < 0$) を求めたい.

(1) $I_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{ax} |\sin x| dx$ としたとき, I_n と I_{n+1} が満たす関係式を求めよ.

(2) $S_n = \sum_{i=1}^n I_i$ としたとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を I_1 を用いて表現せよ.

(3) $\int_0^\infty e^{ax} |\sin x| dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ となる理由を述べよ.

(4) I_1 を実際に計算し, $\int_0^\infty e^{ax} |\sin x| dx$ を求めよ.

(新潟大 2010) (m20102005)

0.377 次の微分方程式を解け.

- (1) $\frac{dy}{dx} = a \sin x$ ただし, $x = \frac{\pi}{2}$ のとき $y = a$ とする.
- (2) $y \frac{dy}{dx} + x = 0$ ただし, $x = 1$ のとき $y = 0$ とする.
- (3) $x^2 \frac{dy}{dx} + y = 0$ ただし, $x = 1$ のとき $y = 1$ とする.

(新潟大 2011) (m20112001)

0.378 以下の計算をせよ.

(1) $(xe^x \sin x)'$ (2) $\int xe^x \sin x dx$

(新潟大 2011) (m20112007)

0.379 $\begin{cases} x = 3 \cos \theta \\ y = 5 \sin \theta \end{cases}$ で表される点 $P(x, y)$ はどのような曲線を描くか求めなさい.

また, 概略形も示すこと. (フリーハンドでよい)

(新潟大 2011) (m20112011)

0.380 次の各問いに答えよ.

- (1) $0 < a < 1$ を満たす任意の実数 a に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} na^n = 0$ を示せ.
- (2) $0 < a < 1$ を満たす任意の実数 a に対して, 次の級数の収束・発散を調べよ. 収束するときはその和も求めよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}$$

- (3) 次の関数の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{x^3}$$

- (4) 次の関数の極限値を求めよ.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

(新潟大 2012) (m20122014)

0.381 座標平面において, 曲線 $C: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ で囲まれた図形を F とする. このとき, 次の各問いに答えよ.

- (1) F の概形をかけ.
- (2) 媒介変数表示 $x = \cos^3 \theta, y = \sin^3 \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を用いて, F の面積を求めよ.
- (3) 媒介変数表示 $x = \cos^3 \theta, y = \sin^3 \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を用いて, F の周りの長さを求めよ.

(新潟大 2012) (m20122016)

0.382 関数 $f(x)$ を

$$\begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{2x}\right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

により定める. このとき, $f(x)$ は区間 $(-1, 1)$ で微分可能かどうかを答えよ. すなわち微分可能ならば導関数を求め, 微分可能でないなら, そのことを証明せよ.

(新潟大 2013) (m20132001)

0.383 次の2変数関数 $f(x, y)$ について, 偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ求めよ.

$$f(x, y) = \sin^2(x + y) \cos(x + y)$$

(新潟大 2014) (m20142001)

0.384 次の関数を微分せよ.

$$y = \sin^{-1} x^2$$

(新潟大 2014) (m20142006)

0.385 以下の極限值は存在するか, 存在すればその値を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\log(1 - x)}$$

(新潟大 2014) (m20142011)

0.386 3次元空間上のベクトル \vec{V} を x 軸のまわりで角度 θ だけ回転するとベクトル \vec{V}' へ変換される. この関係を 3×3 行列 $U(\theta)$ を用いて

$$\vec{V}' = U(\theta)\vec{V}$$

と書く. ここで, $U(\theta)$ は

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

で与えられる. 以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 $U(\theta)$ の行列式 $\det U(\theta)$ を求めよ.
- (2) 行列 $U(\theta)$ の逆行列 $U(\theta)^{-1}$ を求めよ.
- (3) 行列 K を

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

としたとき, K^2, K^3 , および K^4 を求めよ. さらに, 正の整数 m に対して, K^{2m} と K^{2m-1} を求めよ.

- (4) 一般に, 正方行列 X の指数関数は無限級数

$$e^X = E + X + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}X^n$$

で定義される. ここで, E は単位行列を表し, $X^0 = E$ である. 問 (3) の結果を利用して,

$$e^{\theta K} = U(\theta)$$

となることを示せ.

(新潟大 2014) (m20142017)

0.387 右の極限は存在するか, 存在すればその値を求めよ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^{\sin x} - 1}{xe^{-x^2}}$

(新潟大 2015) (m20152005)

0.388 以下の極限は存在するか、存在すればその値を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{(1 + \cos x) \log(1 + x)}$$

(新潟大 2016) (m20162005)

0.389 三角関数に関する以下の問いに答えよ.

(1) e^x , $\cos x$, $\sin x$ を $x = 0$ のまわりでテイラー展開せよ.

(2) オイラーの関係式,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

が成り立つことを、問 (1) のテイラー展開の結果を用いて示せ.

(3) 任意の正の整数 n について、次の恒等式が成り立つことを示せ.

$$\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

(4) 問 (3) の恒等式を用いて、以下の式を証明せよ.

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$\sin(3\theta) = 3 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta$$

(新潟大 2016) (m20162010)

0.390 自然数 n に対して,

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x} dx, \quad J_n = \int_0^\pi \left(\frac{\sin nx}{\sin x} \right)^2 dx$$

とするとき、次の各問いに答えよ.

(1) 次の公式を利用して、 $I_{n+2} = I_n$ を示せ.

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

(2) I_n を求めよ.

(3) 数列 $\{J_n\}$ が等差数列になることを示せ.

(4) J_n を求めよ.

(新潟大 2016) (m20162011)

0.391 座標平面上の 3 点 $A(-2, 0)$, $B(2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$, $C(2 \cos 2\theta, 2 \sin 2\theta)$ の線分 AC の長さ \overline{AC} と線分 BC の長さ \overline{BC} の和 $\overline{AC} + \overline{BC}$ の最大値を $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ の範囲で求めよ.

(新潟大 2017) (m20172015)

0.392 以下のように行列 A , B , C を定義する.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

また、 I を 3×3 の単位行列とする. ここで、 i は虚数単位で $i = \sqrt{-1}$ である.

(1) $A^2 + B^2 + C^2 = kI$ となることを示し、定数 k を求めよ.

(2) A の固有値を求めよ.

(3) 一般に, 正方行列 M の指数関数 e^M は, 無限級数 $e^M \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M^n$ で定義される. α を実定数としたとき,

$$e^{i\alpha C} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{問題ではこうなっていま} \\ \text{したが, (2,2) 成分は 1 に} \\ \text{なるものと思われま} \end{array} \right)$$

となることを示せ.

(4) ベクトル $\vec{v}(\phi)$ を $\vec{v}(\phi) = \frac{\sin \phi}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{i \cos \phi}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と定義する.

このとき, $e^{i\alpha C} \vec{v}(\phi) = \vec{v}(\phi')$ と書けることを示し, ϕ' を求めよ. ただし, ϕ と ϕ' は実定数である.

(新潟大 2017) (m20172017)

0.393 次の (1)~(3) の関数を x で微分せよ. ただし, e は自然対数の底とする.

(1) $y = \sqrt{1 + \sin x}$ (2) $y = x e^{1/x}$ (3) $y = -\log_e(\cos x)$

(新潟大 2018) (m20182001)

0.394 次の (1)~(3) の不定積分を求めよ.

(1) $\int \left(\frac{x+3}{x}\right)^2 dx$ (2) $\int \frac{x+1}{(2x-1)^3} dx$ (3) $\int \sin^2 x \cos x dx$

(新潟大 2018) (m20182002)

0.395 $f(x) = \sin x$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ を $x=0$ の周りでテイラー展開せよ. 解答は x の 5 次の項まで示せ.

(2) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - f(x)}{x^3}$ を求めよ.

(新潟大 2019) (m20192001)

0.396 不定積分 $\int \sin^2 x \cos x dx$ を求めよ (積分定数は C とせよ).

(新潟大 2019) (m20192002)

0.397 $0 \leq x < 2\pi$ のとき, 次の不等式を解け. $\sqrt{2} \sin 2x - \sqrt{2} \sin x - 2 \cos x + 1 < 0$

(新潟大 2019) (m20192009)

0.398 整数 $n \geq 0$ に対して, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ とする. 次の各問いに答えよ.

(1) 自然数 n に対して $I_{2n-1} = \frac{(2^n \cdot n!)^2}{2n \cdot (2n)!}$, $I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$ であることを示せ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$ を求めよ. (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{\sqrt{n} \cdot (2n)!}$ を求めよ.

(新潟大 2019) (m20192014)

0.399 $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 2\pi$ における実数値関数 $f(x, y) = \sin^2 x - 3 \sin(x + y)$ の最大値と最小値を求めよ. また, その時の (x, y) のすべての組を求めよ.

(新潟大 2019) (m20192016)

0.400 $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲における, 関数 $f(x) = e^{-x} \sin x$ の最小値を求めよ.

(新潟大 2020) (m20202001)

0.401 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$ のとき, 次の重積分の値を求めよ. 積分順序を変更してもよい.

$$\iint_D \sin(\pi y^2) dx dy$$

(新潟大 2020) (m20202005)

0.402 2つの行列 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

- (1) A の行列式 $\det A$ と逆行列 A^{-1} を求めよ.
- (2) 2つの行列の積 AB を求めよ.
- (3) 4つの行列 A, B, A^{-1} および AB は, いずれも二次元 XY 座標平面上における任意の点 $P(x, y)$ をそれぞれ異なる $P'(x', y')$ に移動させる. A, B, A^{-1} および AB が, それぞれどのように点 P を点 P' に移動させるか, 幾何学的意味を述べよ.

(新潟大 2020) (m20202007)

0.403 虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を含む指数関数 $e^{i\theta}$ を三角関数で表す公式はオイラーの公式と呼ばれる. 物理の問題を扱うには, よく似た行列の関係式を用いると便利なが多い. このことに関連した以下の問に答えよ.

- (1) オイラーの公式を書け. つまり, 実数 θ に対して $e^{i\theta}$ を三角関数を用いて表せ.
- (2) 二次正方行列 I および J を

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する. J^2 を計算し, J^2 と I の間に成り立つ関係式を求めよ.

- (3) 一般に二次正方行列 X に対し, そのゼロ乗 X^0 および指数関数 e^X は次式で定義される:

$$X^0 = I, \quad e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n = I + X + \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{3!} X^3 + \dots$$

(2) の関係式に着目すると, 行列 $e^{\theta J}$ は I に比例する部分と J に比例する部分の和

$$e^{\theta J} = f(\theta)I + g(\theta)J$$

で表すことができる. このとき, 関数 $f(\theta)$ および $g(\theta)$ を求めよ.

なお, 必要ならば, 三角関数のベキ展開 (テイラー・マクローリン展開) が次式で与えられることを用いてもよい.

$$\cos \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} = 1 - \frac{1}{2!} \theta^2 + \dots$$

$$\sin \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} = \theta - \frac{1}{3!} \theta^3 + \dots$$

- (4) (3) で求めた行列 $e^{\theta J}$ に対して, その行列式の値を答えよ.

次に, これまでの結果の応用として, 調和振動子の運動を表す微分方程式

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

の解 $x(t)$ を求めたい. ここで ω は正の定数である. 以下の問いに答えよ.

(5) 変数 $p(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ および $q(t) = \omega x(t)$ を用いると、この微分方程式は、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$$

の形に表すことができる。ここで K は t に依らない二次正方行列である。行列 K を答えよ。

(6) (5) の微分方程式の解は次式で与えられる：

$$\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = e^{Kt} \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$$

以上のことから、初期条件 $p(0) = p_0, q(0) = q_0$ に対応する解 $x(t)$ を求めよ。

(新潟大 2022) (m20222006)

0.404 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ とする。以下の問いに答えよ。計算過程を示すこと。

(1) $\frac{df(x)}{dx}$ を求めよ。 (2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ を求めよ。

(新潟大 2022) (m20222007)

0.405 $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲において x 軸に垂直な平面による切口が半径 $1 + \sin x$ の円で与えられる回転体の体積 V を求めよ。回転体は x 軸を中心に回転しているとする。

(新潟大 2022) (m20222008)

0.406 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ。

(2) A を対角化する行列 P のうち、 $P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ となるものを求めよ。

ただし、 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ とする。また、 θ を求めよ。さらに、 P を用いて A を対角化せよ。

(3) 前問 (2) の条件において、 P^6 を求めよ。

(新潟大 2022) (m20222009)

0.407 x がすべての実数の範囲を動くとき、次の関数の最大値、最小値を求めよ。

$$f(x) = \int_0^\pi \{\sin t - \sin(x-t)\} dt$$

(長岡技科大 1991) (m19912102)

0.408 $z = \sin \frac{y}{x}$ とするとき、 $\frac{\partial z}{\partial x}$ および $\frac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ。

(長岡技科大 1992) (m19922103)

0.409 $f(t) = e^{-t} \cos t, g(t) = e^{-t} \sin t$ とするとき、

(1) $\begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ となる、定数を成分とする 2×2 行列 A を求めよ。

(2) 4 階の導関数 $f^{(4)}(t), g^{(4)}(t)$ を求めよ。

(長岡技科大 1994) (m19942106)

0.410 次の2つの微分方程式について、以下の問いに答えよ。

$$y'' - y = 0 \quad (*)$$

$$y'' - y = e^{2x} \cos x \quad (**)$$

- (1) 微分方程式(*)の一般解を求めよ。
- (2) $y = e^{2x}(a \cos x + b \sin x)$ が(**)の解となるような定数 a, b を求めよ。
- (3) 微分方程式(**)の一般解を求めよ。

(長岡技科大 1996) (m19962103)

0.411 $y = e^{-2x} \sin 3x$ とする。

- (1) 導関数 $\frac{dy}{dx}$ および2階導関数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。
- (2) y が微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$ の解となるような定数 a, b の値を求めよ。また、そのときの一般解を求めよ。

(長岡技科大 2001) (m20012105)

0.412 (1) 1周期が T である関数 $f(t)$ は、以下のようにフーリエ級数展開される。

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$ として C_n および θ_n を、 a_n および b_n で表せ。但し、 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ とする。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \end{aligned}$$

- (2) 上式におけるフーリエ係数 a_n および b_n は、 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ として、

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

により計算できる。1周期において、次式で定義される関数 $f(t)$ をフーリエ級数展開せよ。

$$f(t) = \begin{cases} -1 & , \quad -\frac{T}{2} \leq t < 0 \\ 1 & , \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

- (3) $\sin^2 t$ および $\sin^3 t$ を、それぞれフーリエ級数展開せよ。
- (4) $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ となることを証明せよ。

(長岡技科大 2005) (m20052106)

0.413 実数 θ に対して $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ 、 $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とおく。以下の問いに答えなさい。

- (1) $R(\theta)K = KR(-\theta)$ を示しなさい。
- (2) 原点を通る傾き $\tan \theta$ の直線に関する対称移動を表す行列を $A(\theta)$ とすると、 $A(\theta) = R(2\theta)K$ を示しなさい。
- (3) $A\left(\frac{7\pi}{12}\right)A(\theta) = R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ となる $A(\theta)$ を求めなさい。

(長岡技研大 2007) (m20072102)

0.414 (1) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ の値を求めなさい。

- (2) 区間 $[a, b]$ における連続関数 $f(x)$ の定積分 $S = \int_a^b f(x)dx$ の値を求めたい. $[a, b]$ を幅 $\frac{b-a}{n}$ の小区間に n 等分し, その分点を $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$ とする. 各小区間上に作られる台形の面積の和 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{f(a_{k-1}) + f(a_k)}{2} \cdot \frac{b-a}{n}$ を S の近似値とする. この近似法を台形公式という. 区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ を 3 等分して, 台形公式による $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ の近似値 S_3 を求めなさい.

(長岡技科大 2007) (m20072104)

- 0.415** 関数 $y = \sin x$ のグラフの $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の部分と x 軸と直線 $x = \frac{\pi}{2}$ とで囲まれる図形を S とする. 下の問いに答えなさい.

- (1) 図形 S を図示し, 面積を求めなさい.
- (2) 図形 S を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい.
- (3) 図形 S を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい.

(長岡技科大 2015) (m20152103)

- 0.416** x の関数 y についての微分方程式

$$(*) \quad y'' - y = e^x \sin x$$

を考える. 下の問いに答えなさい.

- (1) 微分方程式 $y'' - y = 0$ の一般解を求めなさい.
- (2) a, b を定数として, $y = ae^x \cos x + be^x \sin x$ が微分方程式 $(*)$ を満たすような a, b の値を求めなさい.
- (3) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めなさい.

(長岡技科大 2017) (m20172102)

- 0.417** x の関数 $y = y(x)$ に関する微分方程式

$$(*) \quad y'' + y = \sin x$$

を考える.

$$u = u(x) = -y \cos x + y' \sin x, \quad v = v(x) = y \sin x + y' \cos x$$

とおくとき, 下の問いに答えなさい.

- (1) $-u \cos x + v \sin x = y$ が成り立つことを示しなさい.
- (2) u', v' を x の関数として表しなさい.
- (3) u, v を x の関数として表しなさい.
- (4) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めなさい.

(長岡技科大 2020) (m20202102)

- 0.418** (1) 極座標変換 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ に対して, ヤコビ行列式 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

- (2) 重積分

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{x^2+y^2} \exp\left(-(\sqrt{x^2+y^2})^3\right) dx dy$$

を求めよ. ただし, $\exp(t) = e^t$ である.

(金沢大 1999) (m19992204)

0.419 関数 $f(t)$ は2回連続的微分可能で, $f(t), f'(t), f''(t)$ は有界とする.

$s > 0$ に対して $g(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ とするとき, 次の問に答えよ.

(1) $\int_0^{\infty} e^{-st} f''(t) dt = s^2 g(s) - sf'(0) - f''(0)$ を示せ.

(2) ω は定数とする. $f(t) = \sin \omega t$ のとき, $g(s)$ を求めよ.

(金沢大 1999) (m19992212)

0.420 (1) マクローリンの展開

$$\sqrt{1-x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

の係数 a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ.

(2) $\sqrt{1-x} = a_0 + a_1 x$ を用いて, 積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-c \sin^2 \theta} d\theta \quad (0 < c < 1)$$

の値がおおよそ $\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{c}{4}\right)$ であることを示せ.

(金沢大 2000) (m20002201)

0.421 変数変換 $\begin{cases} x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta \end{cases}$ (a, b は正定数) に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, (x, y) の動く領域 D を図示せよ.

(2) ヤコビ行列式 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

(3) 重積分 $\iint_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} dx dy$ を求めよ.

(金沢大 2000) (m20002202)

0.422 (1) 関数 $\sin \frac{1}{x}$ を微分せよ. (2) 関数 $\sin^{-1} x$ を微分せよ.

(2) 極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin^{-1} \frac{1}{x}$ を求めよ.

(金沢大 2001) (m20012201)

0.423 重積分 $I = \iint_D \frac{x}{y\sqrt{1+x^2+y^2}} dx dy$ について次の問に答えよ.

ここに $D = \left\{ (x, y) : y \geq x \geq 0, \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$ とする.

(1) D の形を図示せよ.

(2) 極座標変換 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ を用いて重積分 I の値を求めよ.

(金沢大 2001) (m20012202)

0.424 $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) n 階導関数 $\sinh^{(n)} t, \cosh^{(n)} t$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ.

(2) $\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sinh t \end{cases}$ とおく. t を消去し, x と y の関係を求めよ.

また, $-\infty < t < \infty$ のとき, 点 (x, y) の描く曲線の概形を示せ.

0.425 $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ とするとき、次の間に答えよ.

- (1) $1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} < f(x) < 1 + x - \frac{x^2}{2!}$ ($0 < x < \frac{\pi}{4}$) を示せ.
 (2) (1) を利用して $\cos(0.1) + \sin(0.1)$ の近似値を小数点以下第 2 位まで求めよ.

(金沢大 2005) (m20052202)

0.426 a, b は正の実数とする.

- (1) $\frac{x}{a} = r \cos \theta, \frac{y}{b} = r \sin \theta$ ($0 < r, 0 < \theta < 2\pi$) とおくと、ヤコビアン

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \text{ を求めよ.}$$

- (2) 積分 $\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx dy$ を計算せよ. ただし, $D = \left\{(x, y) \mid y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$ とする.

(金沢大 2005) (m20052207)

- 0.427** (1) 関数 $\sin x$ を $x = 0$ でテーラー展開したときのテーラー級数の最初の 3 項を求めなさい.
 (2) (1) の結果を使い、次の関数 $f(x)$ の $x = 0$ における導関数の値 $f'(0)$ を求めなさい.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

- (3) 次の関数 $g(x)$ を $x = -\pi/2$ から $x = 1$ まで定積分しなさい.

$$g(x) = \begin{cases} \cos^2 x & (x < 0) \\ \frac{1}{2x+1} & (x \geq 0) \end{cases}$$

(金沢大 2005) (m20052208)

0.428 関数 $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ($(x, y) \neq (0, 0)$) について、次の間に答えよ.

- (1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を計算せよ.
 (2) $0 < \varepsilon < 1$ とする. 積分 $I(\varepsilon) = \iint_{\varepsilon \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dx dy$ を求めよ.
 (3) $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\sin \varepsilon) I(\varepsilon)$ を求めよ.

(金沢大 2006) (m20062203)

0.429 次を示せ.

- (1) $0 < a < b < \pi$ ならば, $\frac{\sin b}{b} < \frac{\sin a}{a}$ である.
 (2) $0 < c < 1$ ならば, $\frac{\sin d}{d} = c$ となる d が開区間 $(0, \pi)$ のなかにただ一つ存在する.

(金沢大 2007) (m20072206)

0.430 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ とする. このとき、次の問いに答えよ.

- (1) $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$, $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$ を示せ.
 (2) $\cosh(\alpha + \beta) = \cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta$ を示せ.
 (3) $f(x) = e^{x \cosh \alpha} \cosh(x \sinh \alpha)$ とする. ただし, α は定数とする.

$$\frac{d^n f}{dx^n} = e^{x \cosh \alpha} \cosh(n\alpha + x \sinh \alpha), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

を示せ.

(金沢大 2009) (m20092202)

0.431 次の問に答えよ.

- (1) 変数変換 $x = ar \cos \theta$, $y = br \sin \theta$ のヤコビ行列式 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ. ただし, a, b は正の定数とする.
 (2) 重積分 $\iint_D \frac{1}{(1 + 2x^2 + y^2)^2} dx dy$, $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ を求めよ.

(金沢大 2009) (m20092203)

0.432 (1) $x = u \cosh v$, $y = u \sinh v$ とおく.

$$1 \leq u \leq 2, -\infty < v < \infty \text{ のとき } x \geq 1, 1 \leq x^2 - y^2 \leq 4$$

となることを示せ. ただし, $\cosh v = \frac{e^v + e^{-v}}{2}$, $\sinh v = \frac{e^v - e^{-v}}{2}$ である.

- (2) 変数変換 $x = u \cosh v$, $y = u \sinh v$ のヤコビ行列式 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ を求めよ.
 (3) 重積分

$$\iint_D \frac{\log(x^2 - y^2)}{x} dx dy$$

を計算せよ. ただし $D = \{(x, y) | x \geq 1, 1 \leq x^2 - y^2 \leq 4\}$ とする.

(金沢大 2010) (m20102203)

0.433 $0 < x < \pi$ のとき

$$x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

となることを示せ.

(金沢大 2010) (m20102206)

0.434 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

と定義するとき, $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示し, 微分係数 $f'(0)$ を求めよ.

(金沢大 2011) (m20112207)

0.435 関数 $\sin x$ のマクローリン展開を求めよ. ただし, 求めた無限級数の収束性については議論しなくてよい.

(金沢大 2011) (m20112209)

0.436 (1) 変換 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ ($r \geq 0$) のヤコビ行列式 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

(2) 重積分

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 2} \log(1+x^2+y^2) dx dy$$

を計算せよ.

(金沢大 2012) (m20122203)

0.437 関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

で定める. 次の問い (1)~(3) に答えよ.

- (1) x に関する偏導関数 $f_x(x, y)$ を求めよ.
- (2) 偏導関数 $f_x(x, y)$ は原点 $(0, 0)$ で不連続であることを示せ.
- (3) $f(x, y)$ は原点 $(0, 0)$ で全微分可能であることを示せ.

(金沢大 2013) (m20132204)

0.438 実数 ℓ に対して, 連続関数 $f_\ell : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$f_\ell(\theta) = \begin{cases} \frac{\sin \ell \theta}{\sin \theta} & (\theta \neq 0), \\ a & (\theta = 0) \end{cases}$$

と定める. 次の問いに答えよ.

- (1) a を求めよ.
- (2) f_ℓ は $\theta = 0$ で微分可能であることを示せ.
- (3) 積分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_\ell(\theta) d\theta$ の値を $\ell = 2, 3$ の場合に求めよ.

(金沢大 2014) (m20142208)

0.439 (1) $(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($-1 < x < 1$) を示せ. ここで, $\sin^{-1} x$ は逆正弦関数を表す.

(2) 座標変換

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (r > 0, 0 < \theta < 2\pi)$$

に対するヤコビ行列式 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

(3) 重積分

$$\iint_D \frac{y}{(x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy$$

を求めよ. ただし, $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}, 0 \leq y \leq x \right\}$ とする.

(金沢大 2015) (m20152203)

0.440 有界閉領域 D, E を

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq x \right\},$$

$$E = \left\{ (r, \theta) \in \mathbf{R}^2 \mid -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}} \leq r \leq \cos \theta \right\}$$

とする. 次の問いに答えよ.

(1) D を図示せよ.

(2) 写像 $T: R^2 \rightarrow R^2$ を

$$T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

とする. $(r, \theta) \in E$ のとき $T(r, \theta) \in D$ であることを示せ.

(3) 重積分 $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$ の値を求めよ.

(金沢大 2015) (m20152208)

0.441 次の微分, 積分を計算しなさい.

(1) $\frac{d}{dx} (x^{\sin x})$ (2) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

(金沢大 2015) (m20152209)

0.442 行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値と規格化された固有ベクトルを求めなさい.

(2) ある行列 P を用いて, 行列 $A' = P^{-1}AP$ を対角行列にすることができる. P と A' を求めなさい.

(金沢大 2015) (m20152211)

0.443 函数 $y = \sin^{-1} x$, $x \in [-1, 1]$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $y = \sin^{-1} x$ の導関数を求めよ.

(2) $y = \sin^{-1} x$ のグラフの概形をかけ.

(3) $\int_0^1 \sin^{-1} x dx$ を求めよ.

(金沢大 2016) (m20162219)

0.444 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ($n \geq 2$) を示せ.

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx$ を求めよ.

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cos^5 x dx$ を求めよ.

(金沢大 2016) (m20162221)

0.445 x は $0 < x < 1$ を満たす実数とし, n は $n > 2$ を満たす整数とする.

(1) $f(x) = \sin^{-1} x$ の導関数を求めよ. ここで, $\sin^{-1} x$ は $\sin x$ の逆関数である.

(2) $\sqrt{1-x^2} < \sqrt{1-x^n} < 1$ を示せ.

(3) $\frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^n}} dx < \frac{\pi}{6}$ を示せ.

(金沢大 2016) (m20162222)

0.446 a, b, c は正の定数とし, x, y は次で定義される R^2 の領域 D の点とする.

$$D = \left\{ (x, y) \in R^2 \mid 0 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq c^2 \right\}$$

(1) 変数 r, θ を用いて $x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta$ と変数変換を行う. この時, 関数行列式 (ヤコビアン) $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right|$ を求めよ.

(2) (1) の変数変換を用いて重積分 $\iint_D \sqrt{c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$ を求めよ.

(金沢大 2016) (m20162223)

0.447 $f(x, y)$ を C^2 級の実数値関数とする. 極座標変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を行ったとき $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ が r だけの関数 ($g(r)$ とする) になるならば, 以下が成り立つことを示せ.

(1) $f_{xy} = f_{yx}$.

(2) $f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \frac{1}{r}g_r$.

(金沢大 2017) (m20172204)

0.448 定数 $a > 0$ を与えて, 开区間 $(0, \frac{\pi}{a})$ 上で関数 $f(x) = \frac{\cos(ax)}{\sin(ax)}$ を考える. 次の問いに答えよ.

(1) $x = 0$ での右側極限 $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x)$ と $x = \frac{\pi}{a}$ での左側極限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{a}-0} f(x)$ をそれぞれ調べよ.

(2) $f(x)$ は $(0, \frac{\pi}{a})$ 上で, $f'(x) = -a(1 + f(x)^2)$ を満たすことを示せ.

(3) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在することを示し, その導関数 $(f^{-1})'(x)$ を求めよ.

(4) (3) の関数 $f^{-1}(x)$ と $f(b) = b$ を満たす定数 b ($0 < b < \frac{\pi}{a}$) に対して, 広義積分

$$\int_b^\infty \frac{1}{(1+x^2)\{1+(f^{-1}(x))^2\}} dx$$

を a と b を用いて表せ.

(金沢大 2018) (m20182207)

0.449 関数 $f : R \rightarrow R$ を次式で定義する.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{x^2}{4} \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ.

(2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求め, $f'(x)$ が $x = 0$ で連続でないことを示せ.

(3) $f(x)$ は $x = 0$ のとき最小値をとり, かつ $f(x)$ が最小値をとるのは $x = 0$ のときに限ることを示せ.

(金沢大 2019) (m20192206)

0.450 定積分

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin |x| - \sin x) dx$$

の値を求めよ.

(金沢大 2021) (m20212202)

0.451 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (\cos t, \sin t, t)$ で表される曲線を考える.

(a) $\mathbf{r}(t)$ での単位接線ベクトルを求めなさい.

(b) $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲で, この曲線に沿って線積分 $\int_C xy^2 ds$ を求めなさい. ただし ds は曲線の線素とする.

(金沢大 2021) (m20212213)

0.452 (1) $\alpha > 1$ のとき, 関数 $f(x) = (x + |x|)^\alpha$ は \mathbf{R} 上の C^1 級関数であることを証明せよ.

(2) 集合 $\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{1}{4}(x + |x|)^2 + y^2 \leq 1, x \geq -2 \right\}$ の面積を求めよ.

(3) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin(x^2)}$$

(金沢大 2022) (m20222201)

0.453 C^1 級関数 $z = f(x, y)$ に対して, $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とするとき

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \quad (r \neq 0)$$

が成り立つことを示せ.

(金沢大 2022) (m20222208)

0.454 $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi, a, b$ は正の定数) によって描かれる $x-y$ 平面上の図形 S について, 以下の問いに答えよ.

(1) θ を消去して x, y のみたす関係式を導け.

(2) S の概形を描け.

(3) S 上の点 $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$ における S の接線 l の方程式を求めよ.

(4) l が x 軸, y 軸の両方に交わるとき, その交点をそれぞれ A, B とする. 線分 AB の長さを求めよ.

(5) 線分 AB の長さの最小値を求めよ.

(富山大 2001) (m20012302)

0.455 次の計算をせよ.

$$(1) \frac{d}{dx} \left(\frac{2x+3}{\sqrt{2x+1}} \right)$$

$$(2) \frac{d}{dx} (x^{\sin x}) \quad (x > 0)$$

(富山大 2003) (m20032301)

0.456 次の計算をせよ.

$$(1) \int x^2 \log x^2 dx$$

$$(2) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{1 + \sin x} dx$$

(富山大 2003) (m20032302)

0.457 $x = a \cos \theta, y = b(1 + \sin \theta)$ ($\pi \leq \theta \leq 2\pi, a, b$ は正の定数) によって描かれる $x-y$ 平面上の曲線 S について, 次の問いに答えよ.

(1) θ を消去して, x, y の関係式を導け.

(2) S のおおよその形を描け.

(3) y 軸 (鉛直方向) を回転軸としてできる曲線 S の回転面を内壁とする容器 A に水を注ぐ, 水位が $b/2$ のときの水量 V を求めよ. ここで, 水位とは x 軸からの水面の高さをいう.

- (4) 関数 $y = cx^2$ ($c > 0$) の y 軸を回転軸としてできる回転体 B を、容器 A 内に入れたとき、(3) で注がれた水があふれないための c の条件を求めよ。

(富山大 2003) (m20032303)

0.458 次の計算をせよ.

(1) $\int_0^\pi e^x \sin x dx$ (2) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)}$

(富山大 2004) (m20042302)

0.459 次の関数の導関数を求めよ.

(1) $x \cos x$ (2) $\sqrt{1+x^2}$ (3) $\frac{1}{1+\sin^2 x}$ (4) $\text{Tan}^{-1} x$

(富山大 2005) (m20052301)

0.460 以下の問に答えよ.

- (1) 変数変換

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (r \geq 0)$$

により, $(x, y) = (2, 2)$ に対応付けられる (r, θ) 平面の点の座標を求めよ. また, この変数変換のヤコビ行列式を求めよ.

- (2) xy 平面の領域 D を

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

と定める. 定積分

$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$$

を求めよ.

(富山大 2005) (m20052305)

0.461 次の微分方程式 3 問のうち, 2 問を選択し, それぞれ一般解を求めよ.

(1) $\frac{dy}{dx} = y + y^2$
 (2) $(\sin x) \frac{dy}{dx} + (\cos x)y = 0$
 (3) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0$

(富山大 2005) (m20052306)

0.462 次の計算をせよ.

(1) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx$ (2) $\int_0^\pi e^x \sin x dx$

(富山大 2006) (m20062303)

0.463 関数 $y = \sin x + \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) がある. 以下の問いに答えよ.

- (1) y の導関数を求め, 関数 y の増減と極大値, 極小値を調べよ.
 (2) 関数 y のグラフを描け, 関数 y と x 軸との交点の座標も明らかにせよ.
 (3) x が 0 から $\frac{3\pi}{4}$ の範囲で, 関数 y と x 軸で囲まれる面積を求めよ.

(富山大 2006) (m20062306)

0.464 次の常微分方程式3問のうち、2問を選択し、それぞれ一般項を求めよ。ただし、(3)については、 $y = \dots$ の形で表現する必要はない。また y' , y'' は、それぞれ dy/dx , d^2y/dx^2 を意味する。

(1) $y'' + 6y' + 9y = 0$ (2) $xy' + y^2 = 4$ (3) $y' = \frac{2x - 2y + \cos x}{2x - 4y - \sin y}$
 (富山大 2006) (m20062307)

0.465 次の計算をせよ。

(1) $\int x \sin x dx$ (2) $\int \frac{x+1}{x^2-2x+5} dx$
 (富山大 2007) (m20072302)

0.466 (1) $f(\theta(t)) = \sqrt{1 + \sin^2 \theta(t)} + 3 \cos \theta(t) + 2$ において、 $\frac{df}{dt}$ を求めよ。

(2) $f(\theta_1(t), \theta_2(t)) = 5 + \cos \theta_1(t) + 2 \sin(\theta_1(t) + \theta_2(t))$ において、 $\frac{df}{dt}$ を求めよ。
 (富山大 2007) (m20072305)

0.467 次の計算をせよ。

(1) $\frac{d}{dx} \log_e(x + \sqrt{x^2 + 1})$ (2) $\frac{d}{dx} x^{\frac{1}{x}}$
 (3) $\int \sin^{-1} x dx$ (4) $\int \frac{dx}{x^2 - 2x}$
 (富山大 2008) (m20082301)

0.468 θ を任意の実数、 I を単位行列、 $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ として、行列 A が
 $A = (\cos \theta)I + (i \sin \theta)\sigma_1$ で与えられるとき、以下の問いに答えよ。ここで i は虚数単位とする。

- (1) σ_1^2 を計算せよ。
 (2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ。
 (3) σ_2 の固有値 λ と固有ベクトル ν を求めよ。
 (4) $A\sigma_2 A^{-1}$ を計算して σ_2 を対角化するように θ を決定せよ。ただし、 θ の範囲を $0 < \theta < \pi/2$ とする。また、このときの θ の値を用いた行列 A により、 σ_2 の固有ベクトル ν を変換したベクトル $u = A\nu$ を求めよ。
 (富山大 2008) (m20082303)

0.469 次の計算をせよ。

(1) $\frac{d}{dx} e^{2 \log x}$ (2) $\frac{d}{dx} x^x$ (3) $\frac{d^2}{dx^2} \sin(e^x)$
 (4) $\int \frac{dx}{4x^2 + 1}$ (5) $\int x \log |x| dx$
 (富山大 2009) (m20092301)

0.470 半径 a の球の体積 V を求める。以下の問いに答えよ。

- (1) 直交座標 (x, y, z) を用いて、 V を積分表示せよ。
 (2) (x, y, z) の極座標 (r, θ, φ) への変換

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

を用いて、 $\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \varphi}$ を求めよ。

$$(3) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \text{を求めよ.}$$

(4) (1) および (3) の結果を用いて, V を (r, θ, φ) で積分表示せよ.

(5) (4) の積分を実行し, V を求めよ.

(富山大 2009) (m20092304)

0.471 (1) 直交座標の二重積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy$ を変数変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ によって, 極座標 (r, θ) の二重積分に変換せよ.

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ の値を求めよ.

(富山大 2010) (m20102305)

0.472 次の微分方程式 4 問中から 3 問を選択し, それぞれの一般解を求めよ.

ただし, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ である.

(1) $y^2 + 1 - 2y \frac{dy}{dx} = 0$

(2) $x^2 + y^2 - 2xy \frac{dy}{dx} = 0$

(3) $(\cosh x) \frac{dy}{dx} + (y - x) \sinh x = 0$

(4) $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - 4y = 0$

(富山大 2010) (m20102306)

0.473 次の計算をせよ.

(1) $\int \sin^5(2x) dx$

(2) $\int \log(3x - 1) dx \quad (3x > 1)$

(富山大 2012) (m20122302)

0.474 懸垂曲線 $y = a \cosh \frac{x}{a}$ ($a > 0$) と直線 $y = b$ ($b > a$) で囲まれた図形を考える.

(1) 直線と懸垂曲線は $x = \pm \ell$ で交差する. 逆双曲線関数を用いて, 定数 a と b で ℓ を表せ.

(2) 曲線の長さは曲線の線素 $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ を積分することによって与えられる. この図形の周囲の長さを a と b を用いて表せ.

双曲線関数 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, 逆双曲線関数 $\cosh^{-1} x = \pm \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$

($x > 1$), $\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ を用いても良い.

(富山大 2012) (m20122305)

0.475 次の計算をせよ.

(1) $\frac{d}{dx} \frac{\sin(1 - x^{-1})}{(1 - x)^3}$

(2) $\frac{d}{dx} x^{x-2} \quad (x > 0)$

(3) $\frac{d}{dx} \left(3^x \exp\left(\frac{1}{3-x}\right) \right)$

(富山大 2014) (m20142301)

0.476 次の計算をせよ. ただし, (1) を解くにあたっては, $x + \sqrt{x^2 + 5} = t$ なる変数変換を用い, 積分計算結果は x の式で表すこと.

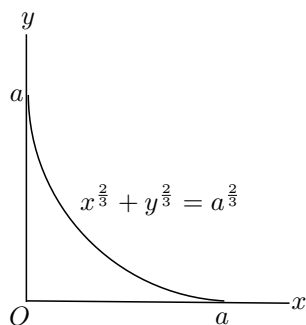
(1) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5}} dx$

(2) $\int \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

(富山大 2014) (m20142302)

0.477 曲線 : $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($x \geq 0, y \geq 0, a > 0$) に関する次の問いに答えよ.

- (1) この曲線は $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす t を用いて, $x = a \sin^3 t$ と表すことができる. 同様に y を t で表せ.
- (2) 曲線と x 軸, y 軸が囲む領域の面積を π と a を用いて表せ.



(富山大 2014) (m20142305)

0.478 次の問いに答えよ.

- (1) $1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}$ を循環小数で表せ.
- (2) マクローリンの定理を用いて, $\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) \right| \leq \frac{|x|^7}{7!}$ ($x \in R$) を示せ.
- (3) $\frac{n}{1000} \leq \sin 1 < \frac{n+1}{1000}$ を満たす自然数 n を求めよ.

(富山大 2014) (m20142310)

0.479 次の計算をせよ. ただし, 計算の概略も示すこと.

$$(1) \frac{d}{dx} x^{\sin x} \quad (x > 0) \qquad (2) \frac{d^5}{dx^5} \left(\frac{1}{1-x} \right) \quad (x \neq 1)$$

(富山大 2017) (m20172301)

0.480 次の各問いに答えよ. ただし, 計算の概略も示すこと.

- (1) 次の微分方程式が, 一般解 $y = A \sin(nx + \alpha)$ をもつとき, $p(x)$ と $q(x)$ を求めよ. ただし, A, α は任意定数, $n \neq 0$ とする.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

- (2) xy 平面上の点 (a, b) を中心とする直径 $R (> 0)$ の円が満たす微分方程式を求めよ. ただし, 微分方程式に a, b および R を含んではならない.
- (3) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$x^{-1} \frac{dy}{dx} + 2y = 2$$

(富山大 2017) (m20172306)

0.481 $y = a \arcsin \left(\sqrt{\frac{x}{a}} \right) + \sqrt{ax - x^2}$ (a : 定数, $0 < x \leq a$) の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ.

(富山大 2018) (m20182301)

0.482 不定積分 $\int e^x \sin x dx$ を求めよ.

(富山大 2018) (m20182303)

0.483 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \sin y, 0 \leq y \leq \pi\}$ のとき, 二重積分 $\iint_D x dx dy$ の値を求めよ.

(富山大 2018) (m20182304)

- 0.484** 半径 $a(a > 0)$ の円が x 軸に接して滑らずに転がるとき、円周上の定点が描く曲線をサイクロイドといい、パラメータを t として

$$x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

で与えられる。このとき次の各問いに答えよ。

- (1) 導関数 $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ を計算せよ。
- (2) $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ を求めよ。
- (3) 一般に、パラメータ t が α から β まで変化したとき、点 $(x(t), y(t))$ が描く曲線の長さ l は次式で表される。

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

サイクロイドにおいて、 $t = t_0$ ($0 < t_0 < 2\pi$) を初期値として円が一回転したとき ($t = t_0 + 2\pi$) の曲線の長さを求めよ。

(富山大 2018) (m20182307)

- 0.485** 次の計算をせよ。ただし、計算の概略も示すこと。

$$(1) \frac{d}{dx} (xe^{\sin x})$$

$$(2) \frac{d}{dx} (x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)$$

(富山大 2019) (m20192301)

- 0.486** 2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ が次の様に定義され、

$$f(x) = \int_0^x e^t (\sin t + \cos t) dt$$

$$g(x) = \int_0^x e^t (\cos t - \sin t) dt$$

また、 $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ を、それぞれ、 $f(x)$, $g(x)$ の n 次導関数とするとき、次の各問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。
- (2) $f^{(1)}(x)$ と $g^{(1)}(x)$ を求めよ。
- (3) $f^{(2)}(x)$ と $g^{(2)}(x)$, および、 $f^{(3)}(x)$ と $g^{(3)}(x)$ を求めよ。
- (4) $n \geq 2$ として、 $f^{(n)}(x)$ と $g^{(n)}(x)$ それぞれを $f^{(n-1)}(x)$ および $g^{(n-1)}(x)$ を用いた漸化式で表せ。

(富山大 2019) (m20192305)

- 0.487** θ の範囲が $0 \leq \theta \leq 2\pi$ のとき、次の式で定義される xy 平面上の曲線に囲まれる領域の面積を求めよ。

$$\begin{cases} x = 2 \sin \theta \\ y = 2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \end{cases}$$

(富山大 2020) (m20202303)

- 0.488** ベクトル場 $\vec{A}(x, y, z) = xye^z \vec{i} + x \log_e(z) \vec{j} + yz^4 \sin(2x) \vec{k}$, スカラー場 $\phi(x, y, z) = xyz$ について、次の問いに答えよ。ただし、 \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} はそれぞれ直角座標系の x , y , z 軸方向の単位ベクトルとする。

- (1) 回転 $\text{rot} \vec{A}$ を求めよ。
- (2) 勾配 $\text{grad} \phi$ を求めよ。

- (3) 点 $P(1, 1, 2)$ における, 単位ベクトル $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$ の方向への ϕ の方向微分係数 $\frac{d\phi}{du}$ を求めよ.

(富山大 2020) (m20202304)

0.489 以下の微分方程式の一般解を求めよ. また, 特異解がある場合は特異解も求めよ.

(1) $\alpha \frac{dy}{dx} = \beta - \gamma y$ (α, β, γ は全て正の定数とする.)

(2) $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 3 \sin 3x$ (3) $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{2x^2 + y^2}$

(富山大 2020) (m20202305)

0.490 次の式で定義される xy 平面上の曲線 y_1 と y_2 および $x = 0$ と $x = 2\pi$ で囲まれる面積を求めよ

$$\begin{cases} y_1 = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ y_2 = \sin(x) \end{cases}$$

(富山大 2021) (m20212304)

0.491 マクローリン展開を用いて 次の式の値を求めよ. ただし, 計算の概略も示すこと.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 6(x - \sin x)}{x^5}$$

(富山大 2022) (m20222302)

0.492 区間 $0 \leq x \leq \pi/2$ において, 以下の不等式が成り立つことを示せ.

$$\sin x \leq x$$

(福井大 2000) (m20002403)

0.493 次の関数の不定積分を求めなさい.

(1) $\int \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}} dx$

(2) $\int \log(x^2 - 1) dx$

(3) $\int e^x \sin x dx$

(4) $\int \sqrt{x} \log x dx$

(福井大 2000) (m20002404)

0.494 関数 $f(X) = \sqrt{3} \sin X + \cos X$ について, 次の問いに答えなさい.

(1) 関数 $f(X)$ の導関数 $f'(X)$ を求めなさい.

(2) 関数 $f(X)$ の区間 $0 \leq X \leq \pi$ における最大値 f_M と最小値 f_m を求めなさい.

(3) 関数 $f(X)$ の定積分 $\int_0^{\pi/2} f(X) dX$ を求めなさい.

(4) 関数 $f(X)$ の区間 $0 \leq X \leq \pi$ でのグラフの概略を示しなさい.

(福井大 2000) (m20002406)

0.495 以下の関数の 1 次導関数を求めなさい.

(1) $x^n e^{-x}$ (2) x^x (3) $\cos^{-1} x^3$ (4) $\sqrt{\frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}}$ (5) $\sin^{-1}(n \sin x)$
 (福井大 2001) (m20012402)

0.496 次の不定積分を求めよ.

(1) $\int \frac{1}{x^3 - x} dx$ (2) $\int e^{kx} x^3 dx$ (3) $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx$
 (福井大 2001) (m20012405)

0.497 以下に二つの線型変換がある.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

- (1) これらの行列による変換は平面上でどのような幾何学的意味を持つか説明せよ.
 (2) A, B による合成変換の行列を求めよ.
 (3) (2) で求めた合成変換の行列の逆変換行列を求めよ.
 (4) (2) で求めた合成変換によって、直線 $y = 3x + 2$ はどのような図形に変換されるか.
 (福井大 2001) (m20012418)

0.498 下記の関数 $y = f(x)$ の導関数を求めよ. ただし, a, b は定数とする.

(1) $f(x) = e^{ax}(\cos bx + \sin bx)$ (2) $f(x) = x^{a+b}$
 (福井大 2003) (m20032403)

0.499 次の関数を微分しなさい.

(1) $y = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$ (2) $y = \sin(3x+2)$ (3) $y = \log(\sin x^2)$
 (福井大 2003) (m20032405)

0.500 次の関数を積分しなさい.

(1) $y = \frac{\sqrt{\log x}}{x}$ (2) $y = x \sin x^2$ (3) $y = \frac{1}{\cos x}$
 (福井大 2003) (m20032409)

0.501 次の行列 \mathbf{B} , ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ がある. 3次元の空間でベクトル \mathbf{a} は (x_1, y_1, z_1) の点を表し, ベクトル \mathbf{b} は $(1, 0, 0)$ の点を表し, ベクトル \mathbf{c} は直線を表す.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \text{ここで } t \text{ は任意の実数, } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & 0 & \sin \frac{\pi}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \frac{\pi}{6} & 0 & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

- (1) 線形変換 (一次変換) $\mathbf{y}_1 = \mathbf{B}\mathbf{b}$ によって, ベクトル \mathbf{b} は 3次元座標でどこに移されるかわかるように図に描きなさい.
 (2) 線形変換 (一次変換) $\mathbf{y}_2 = \mathbf{B}\mathbf{c}$ によって, ベクトル \mathbf{c} は 3次元座標でどこに移されるか. ベクトル $\mathbf{y}_2 = \mathbf{B}\mathbf{c}$ を図に描き, どのような形か説明しなさい.
 (福井大 2003) (m20032415)

0.502 (1) 次の定積分を示せ. m と n は整数とする.

(a) $\int_0^{2\pi} \sin mx dx = 0, \int_0^{2\pi} \cos nx dx = 0$
 (b) $\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$

$$(c) \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nxdx = \begin{cases} 0 (m \neq n) \\ \pi (m = n) \end{cases}$$

$$(d) \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nxdx = \begin{cases} 0 (m \neq n) \\ \pi (m = n) \end{cases}$$

(2) $x(t)$ を周期 T の周期関数とするとき, $x(t)$ を次のように書くことができる.

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T} t \right)$$

このとき, (1) の知見を活用し, $a_k (k \geq 0)$, $b_k (k \geq 1)$ を $x(t)$ を用いて表せ.

(福井大 2003) (m20032417)

0.503 次の関数の導関数を求めよ.

$$(1) y = x^x \quad (x > 0)$$

$$(2) y = \frac{2x+3}{x^2+2}$$

$$(2) y = x^5 \log x$$

$$(4) y = \arcsin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right)$$

(福井大 2004) (m20042403)

0.504 次の関数の導関数を求めなさい.

$$(1) y = x^2 e^{3x} \sin x$$

$$(2) y = e^{\sqrt{x}}$$

(福井大 2004) (m20042406)

0.505 x, y がパラメータ表示により

$$x = a \cos^3 t$$

$$y = b \sin^3 t$$

で与えられているとき, dy/dx を求めなさい. ただし, $a \neq 0$, $b \neq 0$ とする.

(福井大 2004) (m20042407)

0.506 以下の積分 $I_1 \sim I_4$ を求めなさい.

$$I_1 = \int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x} dx$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nxdx \quad (m, n \text{ は正の整数})$$

$$I_3 = \int x^2 \sin ax dx \quad (a \neq 0)$$

$$I_4 = \int_0^{\pi/2} x^2 \sin 2x dx \quad (I_4 \text{ は有効数字 2 桁で求めなさい.})$$

(福井大 2004) (m20042408)

0.507 次の関数の n 階導関数を求めよ.

$$(1) x^2 e^x$$

$$(2) \sin x$$

$$(3) x^2 \sin x$$

(福井大 2005) (m20052401)

0.508 次の不定積分を求めよ.

$$\int x^2 \sin x dx$$

(福井大 2005) (m20052403)

0.509 次の曲線の長さを求めよ.

$$x = e^{-t} \cos t, \quad y = e^{-t} \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(福井大 2005) (m20052404)

0.510 次のような微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\frac{dx}{dt} = ax - b \quad (a, b > 0)$

(2) $\frac{dx}{dt} = x^2 - a^2 \quad (a > 0)$

(3) $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 5 \sin 4t$

(福井大 2005) (m20052409)

0.511 2行2列の行列

$$\mathbf{A}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

に対して、次の等式が成り立つことを示せ.

(1) $\mathbf{A}(x)\mathbf{A}(y) = \mathbf{A}(x+y)$

(2) $\mathbf{B}(x)\mathbf{B}(y) = \mathbf{A}(x-y)$

(3) $\mathbf{A}(x)\mathbf{B}(y) = \mathbf{B}(x+y)$

(4) $(\mathbf{A}(x))^n = \mathbf{A}(nx)$

(福井大 2005) (m20052411)

0.512 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ であつて、 $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \beta = -\frac{8}{17}$ のとき、次の値を求めよ.

(1) $\sin(\alpha + \beta)$ (2) $\cos(\alpha - \beta)$

(福井大 2005) (m20052415)

0.513 次の極限值を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$

(福井大 2005) (m20052417)

0.514 $\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \cot \frac{\theta}{2}$ が成り立つ.

この式の両辺を微分し、微分した左辺と右辺が等しくなることを示せ.

ただし、必要に応じて三角関数の2倍角の公式“ $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ ”を使え.

(福井大 2006) (m20062401)

0.515 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ のとき、 $t = t_0$ に対応する点 (x_0, y_0) における接線と法線の方程式を求めよ.

(福井大 2006) (m20062402)

0.516 次の不定積分を求めよ. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad a > 0, |x| \leq a$

ただし、必要に応じて三角関数の2倍角の公式

“ $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ および $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ”を使え.

(福井大 2006) (m20062403)

0.517 以下の問に答えよ. なお、 i は虚数単位である.

(1) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ を極形式 ($\cos \theta + i \sin \theta$ の形式) で表せ.

(2) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ の3乗根を複素平面上に図示せよ.

0.518 $y = a \sin x + b \cos x$ について次の問いに答えよ.

- (1) 上の関数が, $y = A \sin(x + \theta)$ の形に変換できることを示しなさい.
- (2) $a = 1, b = \sqrt{3}$ の時, A および θ の値を求めよ.
- (3) $0 \leq x \leq \pi$ とする時, 関数の最大値と最小値, ならびにその時の x の値を示せ.

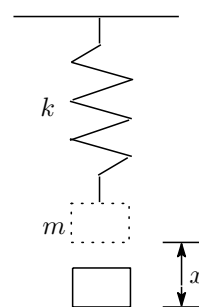
(福井大 2006) (m20062415)

0.519 次の関数を微分しなさい.

- (1) $y = \sqrt{x}$
- (2) $y = \frac{1}{x+1}$
- (3) $y = \cos x \sin^2 x$
- (4) $y = e^{x^2}$
- (5) $y = x^{3x}$

(福井大 2006) (m20062416)

0.520 図のように, バネ定数が k で, 質量を無視できるバネに, 質量 m のおもりを吊り下げる. つりあった位置から, 上下方向に振動させる時の変位を x とする. このとき, 時間 t に対するおもりの運動は, 次の運動方程式によって表現できる.



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

- (1) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とおくとき, $x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ は, 上の運動方程式の一般解であることを示しなさい.
- (2) $m = 0.16(\text{kg}), k = 4(\text{kg}/\text{sec}^2)$ とするとき, おもりの運動の周期を求めなさい.
- (3) $t = 0$ において, $x = 2(\text{cm}), \frac{dx}{dt} = 0(\text{cm}/\text{sec})$ とするとき, 定数 A, B の値を求め, 3 秒間の変位のグラフのおよその形を示せ.

(福井大 2006) (m20062418)

0.521 点 $P(x, y)$ は, 時間 t の時, $x = a \cos(2\pi t), y = a \sin(2\pi t)$ の位置にあるものとする.

- (1) $a = e^{-t}$ とする時, $-1 \leq t \leq 1$ の範囲で, 時間 t に対する a および x の描く図形のおよその形を示せ.
- (2) $-1 \leq t \leq 1$ の範囲で, 点 P の描く図形のおよその形を示せ.
- (3) $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ をそれぞれ求めよ.
- (4) 点 P の時刻 t における速度を求めよ.

(福井大 2006) (m20062419)

0.522 次のベクトルと行列の演算を行え.

- (1) $(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
- (2) $2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
- (3) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
- (4) $\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(福井大 2006) (m20062421)

0.523 次の計算を行え（途中経過も書くこと）.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{e^{2x^2} - 1} =$$

$$(2) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\tan x} \right) =$$

(福井大 2007) (m20072401)

0.524 二次元直交座標 (x, y) を, 以下の式に従い極座標 (r, θ) に変換するものとする.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{ただし, } r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi \text{ として, 以下の設問に答えよ.}$$

(1) r および θ を, x および y を用いて表せ (答のみでよい).

(2) $\frac{\partial r}{\partial x}$ および $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ を計算せよ (途中経過も書くこと).

(3) (2) の結果を用いて, $\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}$ を計算せよ (途中経過も書くこと).

(福井大 2007) (m20072403)

0.525 次の関数を微分しなさい.

$$(1) y = \sin^{-1} x$$

$$(2) y = x^x$$

$$(3) y = \log \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$(4) y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$$

$$(5) y = a^x$$

(福井大 2008) (m20082414)

0.526 定積分 $I = \int_0^{2\pi} \sin mt \cos nt dt$ を以下の手順で求めよ. ただし, m, n 自然数とする.

(1) $\sin mt \cos nt$ を三角関数の和または差の形に変形せよ.

(2) $m = n$ の時の定積分を求めよ.

(3) $m \neq n$ の時の定積分を求めよ.

(福井大 2008) (m20082417)

0.527 関数 $y = e^{-x} \sin x, x \geq 0$ について以下の問いに答えよ.

(1) $0 \leq x \leq 4\pi$ の範囲で, この関数の概形を示せ. このとき $y = e^{-x}$ の概形も示せ.

(2) $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で, この関数のグラフと x 軸とに囲まれた部分の面積を求めよ.

(3) k を整数とする時, $k\pi \leq x \leq (k+1)\pi$ の範囲で, この関数のグラフと x 軸とに囲まれた部分の面積を求めよ.

(4) $x \geq 0$ の範囲で, グラフと x 軸との間に囲まれた面積の総和を求めよ.

(福井大 2008) (m20082418)

0.528 (1) 次の関数を微分せよ.

$$(a) y = \sin^3 4x$$

$$(b) y = a^x$$

(2) 極座標系 (r, θ) についての方程式 $r = 2a \cos \theta$ の $\theta = \alpha$ における接線の方程式を求める. 以下の各問に従って解答せよ.

なお, 必要に応じて右下の公式を利用せよ.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 2A = 2 \sin A \cos A \\ \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \sin^2 A \\ \cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \end{array} \right.$$

(a) 極座標系 (r, θ) と直角座標系 (x, y) との関係を求めよ.

$$x =$$

$$y =$$

(b) $\theta = \alpha$ における接線の傾き dy/dx を求めよ.

$$\frac{dy}{dx(\theta=\alpha)} =$$

(c) $\theta = \alpha$ における接線の方程式を求めよ. ただし, 解答は途中の計算を示すとともに,

内に記号または数字を入れて方程式を完成せよ.

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos\left(\frac{\square}{\square} - \frac{\square}{\square}\right)}{\square a \cos^2 \frac{\square}{\square}}$$

(福井大 2009) (m20092401)

0.529 (1) 内径が a , 外径が b である球殻の体積を, 極座標系での 3 重積分を使って表し, その値を求めよ. ただし, 極座標 (r, θ, ϕ) は, 直角座標 (x, y, z) を使って,

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi)$$

で定義される.

(2) 楕円 $x^2 - xy + y^2 = 4$ の面積を求めよ.

(福井大 2009) (m20092402)

0.530 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $x^2 dy - (y^2 - 1)dx = 0$

(2) $\frac{dy}{dx} \cos x = -y \sin x$

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2}$ (変数変換を用いよ)

(福井大 2009) (m20092404)

0.531 x は鋭角, y は鈍角であり, $\sin x = \frac{1}{2}$, $\sin y = \frac{1}{3}$ とする. このとき, $\sin(x+y)$, $\cos(x+y)$ の値を求めよ.

(福井大 2009) (m20092406)

0.532 次の極限值を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{1-x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{x}$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}$ (n は正の整数)

(福井大 2009) (m20092407)

0.533 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \sin^3(4x)$

(2) $y = x^{\frac{1}{x}}$

(福井大 2010) (m20102401)

0.534 次の関数の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を計算せよ.

(1) $x^3 y^5 + y^6 + 2x - 1 = 0$

(2) $xy = \sin(x+y)$

(福井大 2010) (m20102402)

0.535 次の極限值を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin x - x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} \right) \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n + 2}{3n^2 + 4}$$
$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{9n^2 + 2n} - 3n \right) \quad (5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

(福井大 2010) (m20102413)

0.536 次の関数を微分せよ.

$$(1) \frac{b}{ax+b} + \log |ax+b| \quad (2) \sin^{-1} x \quad (3) a^x$$

(福井大 2010) (m20102415)

0.537 次の関数を積分せよ.

$$(1) \frac{1}{\sin^2 x} \quad (2) \frac{1}{x^2 - a^2} \quad (3) \frac{1}{x^2 + a^2}$$
$$(4) x^2 \log x \quad (5) \frac{1}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$$

(福井大 2010) (m20102416)

0.538 次の極限值を求めよ.

なお, 必要に応じて, 公式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を使ってもよい.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x}$$

(福井大 2011) (m20112401)

0.539 不定積分を求めよ.

$$\int x \sin x \, dx$$

(福井大 2011) (m20112403)

0.540 つぎの微分方程式の一般解を導出して, 初期条件を満たす解を求めよ.

$$(1) \frac{dy}{dx} - xy = x \quad (\text{初期条件: } x=0 \text{ のとき, } y=0)$$
$$(2) \frac{dy}{dx} + e^x y = 2e^x \quad (\text{初期条件: } x=0 \text{ のとき, } y=1)$$
$$(3) \frac{dy}{dx} + y \cos x = \sin x \cos x \quad (\text{初期条件: } x=0 \text{ のとき, } y=0)$$

(福井大 2011) (m20112408)

0.541 次に示す微分方程式について以下の問いに答えよ.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2a \frac{dy}{dx} + 5y = f(x)$$

(1) $f(x) = 5$ として, 以下の問いに答えよ.

(a) この微分方程式の特解 y_s を求めよ.

(b) この微分方程式の余関数 (斉次方程式の一般解) が $C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$ (ただし α, β は異なる実数) の形となり, $x \rightarrow \infty$ で 0 に収束するための a の条件を求めよ.

(2) $a = 1, f(x) = 10 \sin x, y(0) = -1, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$ として, この微分方程式を解け.

(福井大 2011) (m20112410)

0.542 次の値を求めよ.

- (1) $(x^3y^2)^{-\frac{2}{3}} \times x^2y^{\frac{4}{3}}$
 (2) $5^{\log_5 7}$
 (3) $4 \log_2 \sqrt{2} + \frac{1}{2} \log_2 3 + \log_2 \frac{4}{\sqrt{3}}$
 (4) $(\sin 40^\circ + \sin 50^\circ)^2 + (\cos 50^\circ - \cos 40^\circ)^2$
 (5) $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ のとき, $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$ の値

(福井大 2011) (m20112413)

0.543 次の関数を微分せよ.

- (1) $y = \sin x^2$ (2) $y = \cos x \sin^2 x$ (3) $y = 2^{3x}$ (4) $y = x^x$

(福井大 2011) (m20112414)

0.544 曲線 $A: y = \sin 2x$ と曲線 $B: y = a \sin x$ がある.

$0 < a < 2$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で以下の問いに答えよ.

- (1) 右の枠内に曲線 A と B の概形を描け.
 (2) 曲線 A と x 軸で囲まれた面積を求めよ.



- (3) 曲線 A と B で囲まれる面積が, (2) で求めた面積の 2 分の 1 のときの定数 a を求めよ.

(福井大 2011) (m20112416)

0.545 次のベクトルと行列の演算を行え.

(1) $(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) $3 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$

(4) $t \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ (t は転置を表す)

(福井大 2011) (m20112418)

0.546 次の公式を使って極限值を求めよ.

〈公式〉 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

(1) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_e(1+2x)}{x}$

(福井大 2012) (m20122403)

0.547 つぎの微分方程式の一般解を導出して, 初期条件を満たす解を求めよ.

(1) $\frac{dy}{dx} + 2xy = x$ (初期条件: $x = 0$ のとき, $y = 0$)

(2) $\frac{dy}{dx} - y \sin x = \sin x$ (初期条件: $x = 0$ のとき, $y = 0$)

(3) $x \frac{dy}{dx} + y = x(1 - x^2)$ (初期条件: $x = 1$ のとき, $y = 0$)

(福井大 2012) (m20122411)

0.548 次の方程式を解け.

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$$

(福井大 2012) (m20122415)

0.549 次の関数の最大値及び最小値を求めよ.

$$\cos 2x + \sin x$$

(福井大 2012) (m20122416)

0.550 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \sqrt{4 \sin x + 6}$

(2) $y = \log \sqrt{\frac{x+5}{x-5}}$

(3) $y = -\tan^5 x$

(4) $y = \sin^5 x + \cos^5 x$

(福井大 2012) (m20122417)

0.551 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $8x^3 - 6x^2 - 2 + 2e^{3x} + 4 \sin x$

(2) $\cos x \sin^6 x$

(3) $\frac{1}{5e^x + 1}$

(4) $\frac{6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$

(福井大 2012) (m20122418)

0.552 次のベクトルと行列の演算を行え.

(1) $(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) $3 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

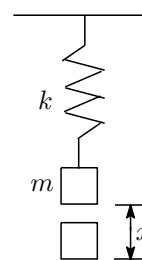
(3) $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

(福井大 2012) (m20122419)

0.553 図のように、バネ定数が k で、質量を無視できるバネに、質量 m のおもりを吊り下げる。つりあった位置から、上下方向に振動させる時の変位を x とする。このとき、時間 t に対するおもりの運動は、次の運動方程式によって表現できる。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$



(1) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とおくとき、 $x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ は、上式の一般解であることを示せ.

(2) $m = 2.25(kg)$, $k = 4\pi^2(kg \cdot m/s^2/m)$ とするとき、おもりの振動の周期を求めなさい.

(3) $t = 0$ において、 $x = 2(cm)$, $\frac{dx}{dt} = 0 (cm/s)$ とするとき、定数 A, B の値を求め、3秒間の変位と時間の関係のおよその形を示せ.

(福井大 2012) (m20122423)

0.554 次式はマクローリン展開の一般式である.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \text{ただし, } f^{(n)} \text{ は } n \text{ 次導関数を示す.}$$

- (1) $f(x) = e^x$ の $n = 4$ までのマクローリン展開を示すとともに, e の近似値を求めよ.
- (2) $f(x) = \sin x$ および $f(x) = \cos x$ について, $n = 5$ までのマクローリン展開を示せ.
- (3) 上の結果を利用して $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を示せ; ただし, $i^2 = -1$ である.

(福井大 2012) (m20122424)

0.555 極限値を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$$

(福井大 2013) (m20132405)

0.556 次の関数を微分せよ.

$$(1) y = \sin^3(4(2x+1)^2)$$

$$(2) y = a^{2x} \quad (a > 0)$$

(福井大 2013) (m20132406)

0.557 不定積分を求めよ.

<公式> 必要に応じて次の公式を使ってもよい.

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (a, C \text{ は定数})$$

$$(1) \int \sin^2 x \cos x dx$$

$$(2) \int \frac{dx}{x^2(2+x^2)}$$

(福井大 2013) (m20132407)

0.558 累次積分 $\int_0^{\pi/2} \left\{ \int_x^{2x} \sin(x+y) dy \right\} dx$ の積分順序を変更して, 積分の値を求めよ.
また積分領域も図示せよ.

(福井大 2013) (m20132410)

0.559 次の微分方程式の一般項を導出して, 初期条件を満たす解を求めよ.

$$(1) \frac{dy}{dx} + x^2 y = x^2 \quad (\text{初期条件: } x=0 \text{ のとき } y=2)$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = y^2 + y \quad (\text{初期条件: } x=0 \text{ のとき } y=1)$$

なお, 必要であれば, $\frac{1}{y^2 + y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}$ の関係を用いること.

$$(3) \frac{dy}{dx} + 2y \tan x = \sin x \quad (\text{初期条件: } x=0 \text{ のとき } y=0)$$

(福井大 2013) (m20132414)

0.560 以下の設問に答えよ. ただし以下で i は虚数単位である.

- (1) $\frac{5-i}{5+i}$ を $a+bi$ の形で表せ.
- (2) $\left| \frac{1+i}{2+i} \right|$ の値を求めよ.
- (3) 次の複素数を極形式で表せ.
 1) $2+2\sqrt{3}i$ 2) $\frac{2}{1-i}$
- (4) $x = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $y = \cos \beta + i \sin \beta$ とするとき, $xy = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$ であることを確かめよ.
- (5) 上記 (4) の x について, $x^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)$ が成り立つことを示せ. ただし n は自然数とする.

(福井大 2013) (m20132417)

0.561 次の設問に答えなさい.

- (1) プールの水面の高さ h が, 時間 t に関し $k \frac{h}{b} A dt = -a dh$ を満足するように変化している. ただし k, a, b, A は定数である. $t = 0$ のとき $h = h_0$, $t = t_1$ のとき $h = h_1$ として, 定数 k を求めなさい.
- (2) 時間 t での位置 (x, y) が $(e^t \cos t, e^t \sin t)$ で与えられる動点 P がある. ただし $0 \leq t \leq 2\pi$ とする.
 (a) $t = 0$ における位置を示せ.
 (b) 座標 x の時間 t に関するグラフの概形を示せ.
 (c) $\frac{dx}{dt}$ および $\frac{dy}{dt}$ を求めよ.
 (d) $0 \leq t \leq 2\pi$ での動点 P の移動距離を求めよ.

(福井大 2013) (m20132419)

0.562 次のベクトルと行列の演算を行え.

(1) $(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2) $3 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $t \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

(福井大 2013) (m20132421)

0.563 次の極限を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{3x^2 - 2x - 8}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

(福井大 2014) (m20142401)

0.564 $\sin(ax)$ をマクローリン級数展開せよ.

(福井大 2014) (m20142403)

0.565 関数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ の原点における微分可能性を調べよ.

(福井大 2014) (m20142404)

0.566 次の (1), (2) および (3) の関数の不定積分を求めよ.

$$(1) \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}} \quad (2) \frac{\sin x}{1 + \cos x} \quad (3) \frac{e^{3x}}{e^x - 1}$$

(福井大 2014) (m20142421)

0.567 以下の関数 $f(x, y)$ に関して, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ 及び $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$ を求めよ.

$$(1) f(x, y) = x^2 y^5 \quad (2) f(x, y) = e^{-2y} \sin 3x$$

(福井大 2014) (m20142424)

0.568 次の極限值を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 3x^2 + 2}{e^x}$$

(福井大 2015) (m20152401)

0.569 次の関数の導関数を求めよ.

$$(1) y = x^{\sin x} \quad (x > 0) \quad (2) y = \log(\sin^2 x)$$

(福井大 2015) (m20152402)

0.570 次の関数を微分せよ.

$$(1) y = (x^2 + 2)^4 \quad (2) y = \sin(3x + \pi) \quad (3) y = \sin x \cdot \cos^2 x \quad (4) y = x^{2x}$$

(福井大 2015) (m20152415)

0.571 時間 t での位置が $(x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t)$ で与えられる動点 P がある.

- (1) $t = 0$ における位置を求めよ.
- (2) $0 \leq t \leq 2\pi$ での動点の軌跡の概形を示せ.
- (3) $\frac{dx}{dt}$ および $\frac{dy}{dt}$ を求めよ.
- (4) $0 \leq t \leq 2\pi$ での動点 P の移動距離を求めよ.

(福井大 2015) (m20152418)

0.572 次のベクトルと行列の演算を行え.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は転置記号})$$

$$(2) 3 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ -\sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}$$

(福井大 2015) (m20152420)

0.573 行列 A, B, C に関して, 行列式を計算しなさい. また, 逆行列を, それぞれ求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(福井大 2015) (m20152423)

0.574 次の積分を求めよ.

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

(2) $\int_0^\pi |\sin 3x| dx$ (必要であれば, 変数変換 $3x = t$ を使用せよ.)
 (福井大 2016) (m20162403)

0.575 テイラーの定理を使って, $f(x, y) = \sin xy$ を $(x - \pi/2)$ と $(y - 1)$ の 2 次のべきまで展開せよ.
 (福井大 2016) (m20162404)

0.576 次の微分方程式の一般解を導出せよ.
 (1) $\frac{dy}{dx} + y \sin x = 0$ (2) $\sqrt{x} \frac{dy}{dx} + 2xy = x$ (3) $(x + y) \frac{dy}{dx} = -y$
 (福井大 2016) (m20162408)

0.577 次の関数を微分せよ.
 (1) $y = (x^2 - 2x + 3)^5$ (2) $y = \cot x$ (3) $y = \sin^{-1} x$ (4) $y = xe^{2x}$
 (福井大 2016) (m20162411)

0.578 次の関数の不定積分を求めよ.
 (1) $y = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3$ (2) $y = \sin^3 x \cos^3 x$ (3) $y = \frac{1}{e^x + 1}$ (4) $y = \frac{1}{(1 - x^2)^{3/2}}$
 (福井大 2016) (m20162412)

0.579 次の関数を微分せよ.
 (1) $y = \frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$ (2) $y = xe^{-x^2}$
 (3) $y = (2^x + 1)^3$ (4) $y = \sqrt{\sin x}$
 (福井大 2018) (m20182424)

0.580 次の不定積分を求めよ.
 (1) $\int (\sin 3x + \cos x)^2 dx$ (2) $\int \frac{1}{e^{5x-5}} dx$
 (福井大 2018) (m20182425)

0.581 次の定積分を求めよ.
 (1) $\int_0^2 (x^3 + x^2 + 5x + 3 + 4\pi \sin \pi x + e^{2x}) dx$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^3 \cos x dx$
 (福井大 2018) (m20182426)

0.582 次のベクトルと行列の演算を行え.
 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2) $4 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
 (3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ (t : 転置を表す)
 (5) $\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
 (福井大 2018) (m20182428)

0.583 次の関数 $f(x)$ について $x = 0$ における微分可能性を調べよ.

ただし, 必要であれば $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ の関係を用いてもよいこととする.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & (x < 0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases}$$

(福井大 2020) (m20202401)

0.584 次の関数を x で微分せよ.

(1) $y = \sin^3 e^x$ (2) $y = \sqrt[3]{x\sqrt{x-1}}$ (ただし, $x > 1$)

(福井大 2020) (m20202402)

0.585 次の定積分を求めよ.

(1) $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$ (2) $I = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx$

(福井大 2020) (m20202403)

0.586 関数 $u = f(x, y)$ が以下の式で表せるとき, 導関数 $\frac{\partial u}{\partial t}$ を求めよ.

$$u = x \cos y - y \cos x, \quad x = \cos 2t, \quad y = \sin 2t$$

(福井大 2020) (m20202404)

0.587 関数 $f(t)$ ($t \geq 0$) のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (s > 0)$$

について考える. 以下の問いに答えよ.

(1) $f(t) = \cos^2 t$ ($t \geq 0$) のラプラス変換を求めよ. $\mathcal{L}[\cos^2 t]$

(2) $f(t) = t \sin at$ ($t \geq 0$, 定数 $a \neq 0$) のラプラス変換を求めよ. $\mathcal{L}[t \sin at]$

(福井大 2020) (m20202414)

0.588 非負の整数 n , および $-1 \leq x \leq 1$ を満たす任意の実数 x に対して,

$$T_n(x) = \cos nz, \quad \text{ただし, } \cos z = x \tag{1}$$

と定義する. 式 (1) において, $n = 0$ とおくと

$$T_0(x) = \cos 0 = 1 \tag{2}$$

となり, $n = 1$ とおくと

$$T_1(x) = \cos z = x \tag{3}$$

となる. 以下の問いに答えよ.

(a) 加法定理

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \tag{4}$$

を利用し, $T_2(x)$ を x の多項式として表せ.

(b) $T_n(x)$ は, $T_{n+1}(x)$ と $T_{n-1}(x)$ によって

$$T_n(x) = \frac{T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)}{2x} \tag{5}$$

と表される. これを次のようにして証明したい. 以下の下線部 (A)~(C) を適当に埋めよ.

【証明】式 (1) の定義と式 (4) の加法定理を用いると

$$T_{n+1}(x) = \cos(nz + z) = \cos nz \cos z - \text{_____} \quad (\text{A}) \quad (6)$$

$$T_{n-1}(x) = \cos(nz - z) = \text{_____} \quad (\text{B}) \quad (7)$$

と書ける. 式 (6) と式 (7) の各辺を加えると

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = \text{_____} \quad (\text{C}) \quad (8)$$

が得られる. 式 (8) の右辺を変形すると

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \quad (9)$$

となり, これより式 (5) が導きられる.

(c) 式 (5) に基づいて, $T_3(x)$ を x の多項式として表せ.

(d) $T_3(x)$ を用いて, $\cos 3\theta$ を $\cos \theta$ の多項式として表せ.

(e) (d) の結果を利用して, 次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta \quad (10)$$

ちなみに, $T_n(x)$ は第一種チェビシェフ多項式と呼ばれ, \cos の n 倍角の公式の導出やチェビシェフ展開に基づく関数の近似表現等に利用される有名な多項式である.

(福井大 2020) (m20202422)

0.589 次の関数を微分せよ.

$$(1) y = \left(\frac{4x+3}{x^2-3x+4} \right) \quad (2) y = \sin^5 x \cos 5x$$

$$(3) y = \log(1+x^2) \quad (4) y = e^{\sqrt{x}}$$

(福井大 2020) (m20202423)

0.590 次の不定積分を求めよ.

$$(1) \int \frac{2x^4 - 3x^2 + 4}{x^3} dx \quad (2) \int x \sin(x^2 + 1) dx$$

(福井大 2020) (m20202424)

0.591 次のベクトルと行列の演算を行え.

$$(1) 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (2) 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} \quad (6) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

(福井大 2020) (m20202427)

0.592 次の積分を計算せよ.

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx \quad (2) \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

ただし, m および n は正の整数とする.

(福井大 2021) (m20212402)

0.593 非負の実数 θ [rad] を媒介変数とする曲線

$$\begin{cases} x = \theta \cos \theta \\ y = \theta \sin \theta \end{cases} \quad (1)$$

は「アルキメデスのらせん」と呼ばれ、その概形は図1に示す「蚊取り線香」に近い、図2のような渦巻状の曲線となる。

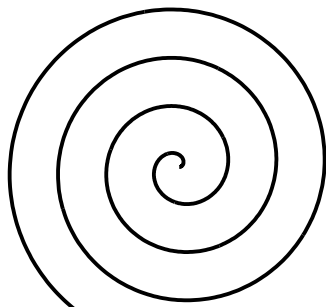


図1：蚊取り線香

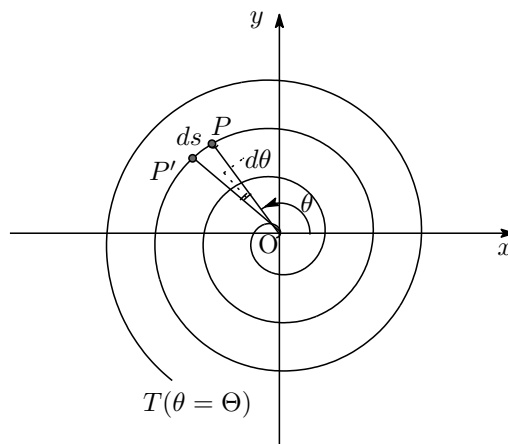


図2：「アルキメデスのらせん」

図2に示すように、曲線上の点 P に対して θ を微小角度 $d\theta$ だけ増加させ、点 P が P' に移動したとする。このときの $P - P'$ 間の微小な長さを ds と表すと、 $\frac{ds}{d\theta}$ は、

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \quad (2)$$

で与えられる。以下の問いに答えよ。

- (1) 式(1)の x, y に対し、 $\frac{dx}{d\theta}$, $\frac{dy}{d\theta}$ を各々求めよ。
- (2) 式(2)を利用して、 $\frac{d\theta}{ds}$ を θ によって表せ、 $\frac{ds}{d\theta}$ ではなく $\frac{d\theta}{ds}$ を求めることに注意。
- (3) (2)で求めた θ の関数 $\frac{d\theta}{ds}$ について、グラフの概形を描きたい。 $\frac{d\theta}{ds}$ の θ に関する1階導関数を用いて増減を調べ、 $\frac{d\theta}{ds}$ を縦軸に、 θ を横軸に取ったグラフの概形を示せ。
- (4) 図2に示すように、「らせん」の内側の端点は原点 O に一致し、外側の端点 T に対する θ を $\theta = \Theta$ とおく。このとき、 O から T までの曲線の長さ L を Θ によって表せ。【ヒント】 L の計算過程で現れる定積分には複数の計算方法が知られており、そのひとつに $\theta = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ と置換する方法がある ($\frac{e^t - e^{-t}}{2}$ は双曲正弦関数 $\sinh t$ であるので、双曲線関数を用いてもよい)。

(福井大 2021) (m20212419)

0.594 次の関数を微分せよ。

- (1) $y = \log x(5 - x)$
- (2) $y = \frac{4x - 1}{e^x}$
- (3) $y = \frac{\sin x}{\cos x + 1}$
- (4) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2} + 2x}$

(福井大 2021) (m20212420)

0.595 次式で表される曲線（サイクロイド）と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ.

$$\begin{aligned}x &= 2(t - \sin t) \\y &= 2(1 - \cos t)\end{aligned}$$

ここで, $0 \leq t \leq 2\pi$

(福井大 2021) (m20212422)

0.596 $f(x) = 4 \sin x \cdot \cos 2x + \cos x \cdot \sin 2x$ ($0 \leq x \leq \pi$) の最大値を求めよ.

(福井大 2022) (m20222404)

0.597 以下に示す行列の演算を行いなさい. ただし, 三角関数は数値に置き換えて算出すること. また, 式中の t は転置を意味する.

$$4 \begin{pmatrix} \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \\ \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \\ \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \end{pmatrix}^t$$

(福井大 2022) (m20222406)

0.598 次式は, 単振動の運動方程式である. なお, m : 質量, k : バネ定数, x : 変位, t : 時間である.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

(1) 角速度 ω (rad/s) を m および k を用いて表しなさい.

なお, 上に示した運動方程式の解は $x = A \cos(\omega \cdot t) + B \sin(\omega \cdot t)$ になる.

ここに, A, B は初期値によって決まる定数である.

(2) $m = 1$ (kg), $k = 1$ (N/m) の場合について, $t = 0$ 秒における初期値を $x = 1$ (m), $\frac{dx}{dt} = 0$ (m/s) として 単振動の運動方程式を解きなさい.

(福井大 2022) (m20222411)

0.599 次の関数 $f(x)$ について $x = 0$ における微分可能性を調べよ.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x < 0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases}$$

(福井大 2022) (m20222412)

0.600 次の定積分を求めよ,

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3 - \cos 2x} dx$$

$$(2) \int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx$$

(福井大 2022) (m20222414)

0.601 次の積分の値を計算せよ.

$$\iint_D \sin(x+y) \cos(x-y) dx dy, \quad D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x+y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x-y \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

(福井大 2022) (m20222416)

0.602 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1) \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

$$(2) \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 5x = -20 \sin t$$

(福井大 2022) (m20222422)

0.603 基本周期が 2π である関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開を考える. 以下の問いに答えよ.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x \leq \frac{\pi}{2}) \\ 0 & (\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{2}) \\ 1 & (\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi) \end{cases}$$

(1) 以下の積分を計算せよ.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n \neq 0)$$

(2) 以下の積分を計算せよ.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n \neq 0)$$

(3) 基本周期が 2π である関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開を求めよ.

(福井大 2022) (m20222423)

0.604 半径 a の球面の xyz 座標を媒介変数 (θ, ϕ) で

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = (a \sin \theta \cos \phi, a \sin \theta \sin \phi, a \cos \theta)$$

と表す. ただし, $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ である. 以下の問いに答えよ.

(1) 以下のベクトル積

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}$$

を求めよ. また, これは何を表すか答えよ.

(2) 次の積分を求め, 何を表すか答えよ.

$$\iint_D \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right\| d\theta d\phi$$

ただし, $\|\cdot\|$ はベクトルの長さを表し, 領域 D は θ, ϕ の動く範囲, すなわち $D = \{(\theta, \phi) \mid 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$ である.

(3) 球面の x 座標 $x = a \sin \theta \cos \phi$ に対して, 次の積分を求めよ.

$$\iint_D x \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right\| d\theta d\phi$$

(福井大 2022) (m20222427)

0.605 2変数関数 $f(x, y) = \sin^{-1} \frac{y}{x}$ の第2次偏導関数 $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$ を求めよ. ここで \sin^{-1} は逆正弦関数であり, $x > 0$ とする.

(静岡大 2004) (m20042503)

0.606 (1) 関数 $f(x) = x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}$ を微分せよ.

(2) 2変数関数 $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ に対して, $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$ を計算せよ.

(3) 2変数関数 $f(x, y) = e^x(x^2 + y^2)$ の極値を求めよ.

(静岡大 2005) (m20052501)

0.607 複素積分 $\int_C \frac{\sin z}{(z-i)^3} dz$ の値を求めよ. ここで i は虚数単位, C は複素平面上の原点を中心とする半径2の円周で向きは反時計回りとする.

(静岡大 2005) (m20052505)

- 0.608 (1) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x} \sin 2x dx$ を求めよ. (2) 広義積分 $\int_1^{\infty} \frac{2}{x(x+2)} dx$ を求めよ.
(静岡大 2006) (m20062504)

- 0.609 次の不定積分を求めなさい. $I = \int e^{2x} \sin 2x dx$
(静岡大 2006) (m20062510)

- 0.610 定積分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^{-1} 2x dx$ を求めよ.
(静岡大 2007) (m20072504)

- 0.611 次の各微分方程式の一般解を求めよ.

- (1) $\frac{dy}{dx} = -2y$ (2) $\frac{dy}{dx} = y(1-2y)$
(3) $\frac{dy}{dx} = -2y + \sin x$ (4) $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 10y = 0$
(静岡大 2007) (m20072508)

- 0.612 (1) 関数 $f(x) = \sin x \cos x$ の原点を中心とするテイラー級数を求めよ.

- (2) 複素数 $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{14}$ を $x+iy$ の形に改めよ. (i は虚数単位)

- (3) 2変数関数 $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2$ の極値を求めよ.

(静岡大 2008) (m20082501)

- 0.613 (1) 常微分方程式 $\frac{dy}{dx} = xe^{x+y}$ の一般解を求めよ.

- (2) 常微分方程式 $\frac{dy}{dx} + \frac{\cos x}{\sin x}y = \frac{1}{\cos^2 x}$ の初期条件 $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ を満たす解を求めよ.

(静岡大 2008) (m20082503)

- 0.614 $y = x^{x \cos(x)}$ とするとき, $y' = x^{x \cos(x)} \{(\cos(x) - x \sin(x)) \log(x) + \cos(x)\}$ が成り立つことを証明しなさい.

(静岡大 2009) (m20092509)

- 0.615 $f(x) = e^{\sin x}$ のマクローリン展開を $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とするとき, 定数 a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ.

(静岡大 2010) (m20102505)

- 0.616 次の微分方程式の初期値問題の解 $y = y(x)$ を求めよ.

- (1) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y^2 \sin 2x \cos 3x & (x \geq 0) \\ y(0) = \frac{5}{3} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{x} & (x \geq 1) \\ y(1) = 1 \end{cases}$

(静岡大 2011) (m20112507)

- 0.617 次の各微分方程式の一般解を求めよ.

- (1) $\frac{dy}{dx} = y \sin x$ (2) $\frac{dy}{dx} = y(1-y)(2-y)$ (3) $\frac{dy}{dx} = y + \sin x$

(静岡大 2011) (m20112508)

- 0.618 3つの複素数を $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$, $\gamma = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ とする. ここで, i は虚数単位をあらわす. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) α, β, γ を複素平面上に図示せよ.
 (2) α^{2011} を $x + yi$ (x, y は実数) という形にあらわせ.
 (3) $\alpha^m = \beta, \alpha^n = \gamma$ をみたす整数 m, n があれば求めよ.
 (4) 複素平面上で α, β, γ を結んでできる三角形の内角をそれぞれ a, b, c とするとき,

$$(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)(\cos c + i \sin c)$$

を求めよ.

(静岡大 2012) (m20122507)

0.619 次の各微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $x \frac{dy}{dx} = 2y$ (2) $\frac{dy}{dx} \sin x + y \cos x = x$ (3) $(2x^2y + y^2) dx + (x^3 + xy) dy = 0$

(静岡大 2012) (m20122508)

0.620 次の関数の偏導関数を求めよ.

(1) $f(x, y) = \arctan \frac{y^2}{x} - \arctan \frac{x + y^2}{x - y^2}$ (2) $f(x, y) = x\sqrt{y^2 - x^2} + y^2 \arcsin \frac{x}{y}$

(静岡大 2013) (m20132503)

0.621 次の積分を計算せよ. 積分領域 D を図示せよ.

(1) $\iint_D \frac{y}{x} \sin(x^2 + y^2) dx dy, \quad D = \left\{ (x, y) \mid \frac{\pi}{3} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq x \right\}$

(静岡大 2013) (m20132505)

0.622 次の極限值を求めなさい.

(i) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x \sin(x) - \frac{\pi}{2}}{\cos(x)} \right)$ (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2} \right)$

(静岡大 2015) (m20152501)

0.623 変数 (r, θ) ($r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$) から変数 (x, y) への変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

を考える. また領域 D を

$$D = \{(x, y) \mid -x \leq y \leq x\}$$

によって定義する.

- (1) (x, y) が領域 D を動くとき (r, θ) が動く範囲を求めよ. また, その対応が 1 対 1 であることを示せ.
 (2) 次の積分の値を上記の変数変換を用いて求めよ.

$$\iint_D \exp(-x^2 - y^2 - xy) dx dy$$

ここで積分の範囲は領域 D である.

(岐阜大 1997) (m19972601)

0.624 (1) 関数を $x = a \sin t, y = b \cos t$ とするとき, $\frac{dy}{dx}$ を求めよ.

(2) 次の関数の概略図を描け.

(a) $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (b) $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (c) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(3) ある曲線 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$) で囲まれる部分の面積を求めよ.

(岐阜大 2001) (m20012603)

0.625 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $9y \frac{dy}{dx} + 4x = 0$

(2) $x \frac{dy}{dx} + y = \sin x$

(岐阜大 2001) (m20012608)

0.626 ベクトル解析に関して以下の問いに答えよ.

(1) $f = e^x \sin y$ に対する勾配 ($\text{grad } f$) を求めよ.

(2) ベクトル $\mathbf{v} = 3xz\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} - yz^2\mathbf{k}$ の発散 ($\text{div } \mathbf{v}$) を求めよ.

(ただし, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ はそれぞれ x -, y -, z - 方向の単位方向成分を表すものとする.)

(岐阜大 2001) (m20012613)

0.627 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ によって極座標 (r, θ) を導入するとき, x, y の関数 $f(x, y)$ の x についての偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ を r および θ についての偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \theta}$ を用いて表せ.

(岐阜大 2003) (m20032603)

0.628 関数 $y = \sin x$ の n 次導関数を求めよ.

[ヒント 1 : 関数 y を次々に微分していき (y', y'', \dots), n 次導関数の検討をつける.]

[ヒント 2 : $\sin x = \sin(x + 2\pi)$]

(岐阜大 2005) (m20052616)

0.629 関数 $y = \sin 3x \cos 2x$ の不定積分を求めよ.

(岐阜大 2005) (m20052617)

0.630 次の不定積分を求めよ.

(1) $\int \frac{9x^2 + 6}{x^3 + 2x + 1} dx$

(2) $\int \sin 7x \cos x dx$

(岐阜大 2006) (m20062604)

0.631 $y = 2x + \sin x$ 上の点 $(0, 0)$ における接線の方程式を求めよ.

(岐阜大 2006) (m20062616)

0.632 次の関数について, $\frac{dz}{dt}$ を求めよ. $z = \sin(2x) \cos(y), x = e^{-2t}, y = \log_e 3t$

(岐阜大 2007) (m20072609)

0.633 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ であることを証明せよ.

(岐阜大 2007) (m20072614)

0.634 関数 $\log(\sin^2 t + 1)$ を t に関して微分せよ.

(岐阜大 2007) (m20072615)

0.635 次の不定積分を以下の指示に従い計算せよ. ただし, 積分定数は C とする. $\int \sin x \sin 3x dx$

- (1) 被積分関数 $(\sin x \sin 3x)$ を加法定理を用い、積を含まない \cos 関数のみの式に書き換え、不定積分を計算せよ.
- (2) 部分積分をすることで不定積分を計算せよ.

(岐阜大 2007) (m20072621)

0.636 2変数関数 $f(x, y)$ がラプラス方程式 $\Delta f = 0$ を満たすとき、 $f(x, y)$ を調和関数という. 次の関数 $f(x, y)$ は調和関数か否か調べよ. ここで、2変数 (x, y) の偏微分作用素 (ラプラシアン) Δ は、 $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ で定義する.

(1) $f = \frac{1}{x^2 + y^2}$ (2) $f = e^x \sin y$

(岐阜大 2008) (m20082602)

0.637 $X = \{x : |x| \leq \pi, x \in \mathbf{R}\}$, $Y = \{y : |y| \leq 1, y \in \mathbf{R}\}$ とする. 以下で定義する写像 f について (1),(2) に答えなさい. ただし、 \mathbf{R} は実数全体の集合を表すものとする.

$$f : X \rightarrow Y, \quad x \mapsto \sin x.$$

- (1) f が単射であるか否かを理由と共に答えなさい.
- (2) f が全射であるか否かを理由と共に答えなさい.

(岐阜大 2008) (m20082609)

0.638 次の関数 $f(x)$ を x について微分せよ.

(1) $f(x) = \sqrt{e^{2x} + 1}$ (2) $f(x) = \frac{x}{1 + \sin 3x}$

(岐阜大 2008) (m20082612)

0.639 y は x の関数であるとする. 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + y \cos x = \sin x \cos x$$

について、以下の問いに答えよ.

- (1) 初期条件 $y(0) = 0$ を満たす解を求めよ.
- (2) 上で求めた解 $y(x)$ の $0 \leq x \leq \pi$ における最大値を求めよ.

(岐阜大 2009) (m20092606)

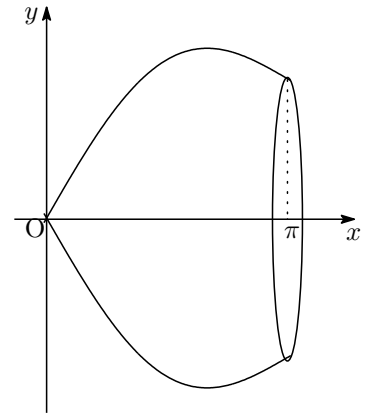
0.640 次の式の値を求めよ.

- (1) $\tan \theta = 1/3$ のとき、 $(\sin \theta + \cos \theta)^2$ の値を求めよ.
- (2) $(1 + \tan \alpha)/(1 - \tan \alpha) = 2 + \sqrt{3}$ のとき、 $\cos \alpha$ の値を求めよ.

(岐阜大 2009) (m20092614)

0.641 $y = \frac{x}{2} + \sin x$ の $0 \leq x \leq \pi$ の部分の曲線を x 軸のまわりに回転

してできる右図のような回転体の体積 V を求めよ.



(岐阜大 2009) (m20092617)

0.642 (1) $f(x) = \frac{1}{e^x - 4}$ とするとき, 不定積分 $\int f(x)dx$ を求めよ.

(2) x - y 平面において, $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, ($a > 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$) (サイクロイド曲線) が描く曲線の長さを求めよ.

(岐阜大 2009) (m20092619)

0.643 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ を求めよ.

(岐阜大 2009) (m20092620)

0.644 次のパラメータ表示で与えられる xyz 空間内の曲線 C と直線 l について, 以下の問いに答えよ. ただし, 空間内の二点 P, Q に対して, 二点間の距離を \overline{PQ} で表す.

$$C : \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \\ z = \cos \theta + \sin \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad l : \begin{cases} x = t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

(1) P を曲線 C 上の点, Q を直線 l 上の点とすると, \overline{PQ}^2 を θ と t の式で表せ.

(2) P を曲線 C 上の点, Q を直線 l 上の点とすると, \overline{PQ} の最小値, および, そのときの P と Q の座標を求めよ.

(岐阜大 2010) (m20102604)

0.645 $y(x)$ を未知関数とする, 次の常微分方程式 (A) について, 以下の問いに答えよ.

$$y'(x) - \tan(x) y(x) = 2e^{2\sin(x)}, \quad -\pi/2 < x < \pi/2 \quad (A)$$

(1) $y(x; y_0)$ を初期条件 $y(0) = y_0$ を満たす微分方程式 (A) の解とすると, $y(x; y_0)$ を求めよ. ただし, y_0 は実数とする.

(2) (1) の解 $y(x; y_0)$ について, 極限 $\lim_{x \rightarrow -\pi/2} y(x; y_0)$ が有限な値となるような初期値 y_0 はあるか. もしもあるなら, そのときの初期値 y_0 と $\lim_{x \rightarrow -\pi/2} y(x; y_0)$ を求めよ. また, もしもないのであれば, その理由を述べよ.

(岐阜大 2010) (m20102605)

0.646 以下の式でガンマ関数 $\Gamma(t)$ を定義する.

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx, \quad t > 0.$$

次の問いに答えよ. ただし, $t > 0$ のとき $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^t = 0$ となることは証明しなくても使ってよい.

- (1) $t > 0$ に対して $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ となることを示せ.
 (2) 自然数 n に対して $\Gamma(n+1) = n!$ となることを示せ.
 (3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2$, すなわち

$$\left(\int_0^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}dy\right)$$

を x, y の 2 変数関数の重積分で表せ.

- (4) 変数 (x, y) から (r, θ) への変数変換

$$\begin{cases} \sqrt{x} = r \cos \theta, \\ \sqrt{y} = r \sin \theta \end{cases}$$

に対してヤコビアン $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

- (5) 前問 (4) の変数変換を用いて (3) の重積分を計算し $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ を求めよ.

(岐阜大 2014) (m20142601)

0.647 $a, b > 0$ とする. xy 平面の第 1 象限において $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ が表す曲線を C とする.

また, x 軸, y 軸および C で囲まれる閉領域を A とする. 以下の問に答えよ.

- (1) $x = a \cos^4 t, y = b \sin^4 t$ とする. このとき, $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}$ の値を求めよ. また, $\frac{dx}{dt}$ を t を用いて表せ.
 (2) 曲線 C を $y = y(x)$ と表し, $y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$ とする. このとき, $\lim_{x \rightarrow a-0} y'(x)$ および $\lim_{x \rightarrow 0+0} y'(x)$ を求めよ.
 (3) A の概形を描け.
 (4) A の面積を求めよ.

(岐阜大 2016) (m20162601)

0.648 $y = y(x), y' = \frac{dy(x)}{dx}$ とする. 微分方程式

$$(E) \quad y' + y \cos x = \sin x \cos x$$

を考える. 以下の問に答えよ.

- (1) 同次方程式 $y' + y \cos x = 0$ の一般解を求めよ.
 (2) (E) の一般解を求めよ.
 (3) (E) の解で, 条件 $y(0) = 0$ を満たすものを求めよ.
 (4) (3) で求めた y について, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)}{x^2}$ を求めよ.

(岐阜大 2016) (m20162604)

0.649 $a = \log 2$ とし, 関数 f と g を

$$f(x) = ax - a - \log x$$

$$g(x) = x^2 - ae^x$$

で定義する. ただし, \log は e を底とする自然対数である. 以下の問に答えよ.

- (1) 関数 $f(x)$ と $g(x)$ の導関数を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の閉区間 $[1, 2]$ における最大値と最小値, およびそのときの x の値を求めよ.

(3) 次の累次積分 I の積分順序を変更せよ:

$$I = \int_1^2 \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \sin(g(y)) dy \right) dx,$$

ただし,

$$\alpha(x) = ax$$

$$\beta(x) = a + \log x$$

とする.

(4) I の値を求めよ.

(岐阜大 2018) (m20182602)

0.650 微分方程式

$$(E) \quad y' + yx = 1 + x + x^2$$

を考える. 以下の問に答えよ.

(1) 同次方程式 $y' + yx = 0$ の一般解を求めよ.

(2) (E) の一般解を求めよ.

(3) (E) の解で, 条件 $y(0) = 0$ を満たすものを求めよ.

(4) (3) で求めた y について, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{2x + \sin x}$ を求めよ.

(岐阜大 2020) (m20202606)

0.651 $\sin 2\alpha$ を $\sin \alpha$ と $\cos \alpha$ を用いて表せ.

(豊橋技科大 1997) (m19972701)

0.652 $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ のとき, $\frac{dy}{dx}$ を求めよ.

(豊橋技科大 1997) (m19972702)

0.653 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は次の式で表される.

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{1}{2!}f^{(2)}(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \cdots$$

ただし, $f^{(n)}(0)$ は $x = 0$ での n 階微分である. このとき, 次の関数のマクローリン展開を, $n = 2$ まで表せ.

(1) $f(x) = \sin x$

(2) $f(x) = \cos x$

(豊橋技科大 1997) (m19972706)

0.654 $\sin A + \cos A = \sqrt{2}$ のとき, $\sin A \cos A$ および $\sin^4 A + \cos^4 A$ の値を求めよ.

(豊橋技科大 1998) (m19982702)

0.655 次の極限值を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

(豊橋技科大 1998) (m19982706)

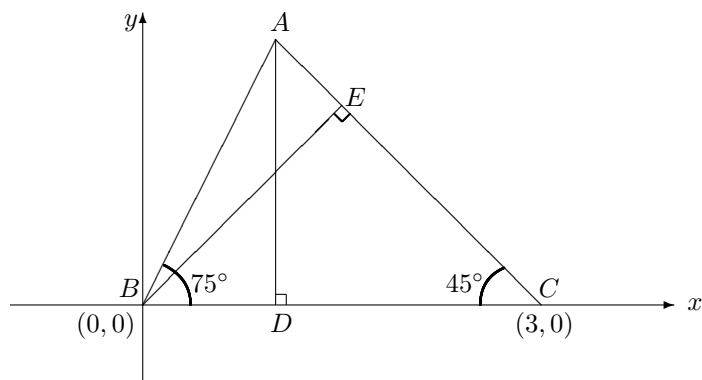
0.656 以下の問いに答えよ.

- (1) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$ とする. この式の右辺に部分積分の公式を適用することにより, n が2以上の整数ならば $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ なる関係が成立することを示せ.
- (2) 解答用紙中に記したア~エのうち, 次の媒介変数表示で与えられる曲線 $x = a \cos^3 \theta, y = a \sin^3 \theta$ (ただし, $a > 0$) の概略を描いた図として最も適当なものを選び, 図の記号ア, イ, ウ, エのいずれかに○を付けよ. (図略)
- (3) また, この曲線によって囲まれる図形の面積 S を求めよ. なお, 問(1)で求めた関係を利用すると計算が容易になる.

(豊橋技科大 1998) (m19982707)

0.657 図に示す三角形 ABC に関して次の各問に答えよ.

- (1) $\sin 75^\circ, \cos 75^\circ$ を加法定理を用いて求めよ.
- (2) 点 C の座標を $(3, 0)$, 点 A, B より辺 BC, AC に下ろした垂線を AD, BE とする. このとき, 辺 AE, EC の長さを求めよ.

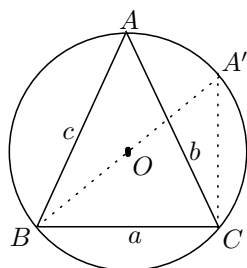


- (3) 三角形 ABC の外接円の中心の座標を求めよ.

(豊橋技科大 1999) (m19992702)

0.658 図に示す三角形 ABC の外接円の中心を O , 半径を r , 各辺の長さを a, b, c , 各頂点の内角 $\angle BAC, \angle CBA, \angle ACB$ の大きさを A, B, C で表す. このとき次の問いに答えよ.

- (1) 外接円の点 B を通る直径を $BA' = 2r$ とするとき, $\angle BA'C = \angle BAC, 2\angle BAC = \angle BOC$ であることを示せ.
- (2) 三角形 ABC の面積 S は, $S = \frac{r^2}{2}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$ と表せる. このことを, 外接円の中心 O が三角形 ABC の内部にある場合について示せ.



(豊橋技科大 2000) (m20002701)

0.659 α, β が共に鋭角であり, $\sin \alpha = \frac{1}{3}, \sin \beta = \frac{2}{3}$ のとき, $\tan(\alpha + \beta)$ を求めよ.

(豊橋技科大 2001) (m20012705)

0.660 以下に示す関数について次の各問に答えよ.

$$f(x) = \cos x + x \sin x$$

- (1) 関数 $f(x)$ を微分せよ.
- (2) $[-2\pi, 2\pi]$ の区間における関数 $f(x)$ の極値を求め, 増減表を作成せよ. また, この関数の概形を描け.
- (3) $[-2\pi, 0]$ および $[0, 2\pi]$ の区間における関数 $f(x)$ のそれぞれの最小点を結ぶ, 直線の式 $g(x)$ を求めよ. そして, この直線 $g(x)$ と関数 $f(x)$ で囲まれる領域の面積を求めよ.

(豊橋技科大 2001) (m20012706)

0.661 関数 $f(t) = ae^{-bt} \sin(\omega t + c)$ について, 次の問いに答えよ. ただし, a, b, c, ω は正の定数とする.

- (1) $t \geq 0$ での関数 $f(t)$ の概略図を描け.
- (2) 関数 $f(t)$ の極大, 極小が $\tan(\omega t + c) = \frac{\omega}{b}$ を満たす t のときに生ずることを示せ.

(豊橋技科大 2003) (m20032705)

0.662 方程式 $\cos^2 x + \sin x + a = 0$ について x の範囲を $0 \leq x < 2\pi$ とする.

- (1) この方程式を満たす実数 a の範囲を求めよ.
- (2) 実数 a の値に対する方程式の解の個数を調べよ.

(豊橋技科大 2004) (m20042704)

0.663 xy 直交座標系の点列 $(x_i, y_i), i = 1, \dots, N$ に対し, 各点からの垂直距離の 2 乗和が最小となるような直線を求めたい. 次の各問いに答えよ.

- (1) 次の文章中の空欄 ~ に適当な数式を入れよ.

各点に単位質量を置いたときの重心を G とすると, その座標は

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ア} \\ \text{イ} \end{pmatrix} \quad (1)$$

となる. xy 座標系に対し, この重心 G を原点として, 角度 θ で回転させた uv 座標系を考える. このとき

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad (2)$$

とおけば, (x_i, y_i) と (u_i, v_i) との関係は θ を用いて

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ウ} & \text{エ} \\ -\text{エ} & \text{ウ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} \quad (3)$$

で与えられる. もし求めたい直線を u 軸にとれば, 問題は

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^N v_i^2 \quad (4)$$

で定義される $J(\theta)$ を最小にする角度 θ を求めることに等しい.

式 (3) の v_i を θ で微分し, u_i を用いて表すと

$$\frac{\partial v_i}{\partial \theta} = \text{オ} \quad (5)$$

となるから, 式 (4) を θ で微分して 0 とおけば

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = -2 \sum_{i=1}^N u_i v_i = 0 \quad (6)$$

を得る. この式 (6) に, 式 (3) を代入することにより,

$$\text{カ} \sum_{i=1}^N x'_i y'_i = \text{キ} \sum_{i=1}^N (x_i'^2 - y_i'^2) \quad (7)$$

となり、次式を得る.

$$\frac{2 \boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}} = \frac{2 \sum_{i=1}^N x'_i y'_i}{\sum_{i=1}^N (x_i'^2 - y_i'^2)} \quad (8)$$

式(8)の左辺は、倍角の公式により

$$\frac{2 \boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}} = \boxed{\text{ク}} \quad (9)$$

と書けるから、式(8)は

$$\boxed{\text{ク}} = \frac{2 \sum_{i=1}^N x'_i y'_i}{\sum_{i=1}^N (x_i'^2 - y_i'^2)} \quad (10)$$

となる. よって、式(10)の右辺を計算して、式(4)を最小化する θ を求めればよい.

式(4)を最小化する θ を $\hat{\theta}$ とし、求めたい直線が重心 G を通ることを用いれば、直線の式は

$$y = \tan \hat{\theta} \left(x - \boxed{\text{ケ}} \right) + \boxed{\text{コ}} \quad (11)$$

として与えられる.

- (2) 4点 $(-1, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$ があるとする.

(a) これらの4点に単位質量を置いたときの重心 G の座標を求めよ.

(b) これらの4点に関し、 $\sum_{i=1}^N x'_i y'_i$, $\sum_{i=1}^N x_i'^2$ および $\sum_{i=1}^N y_i'^2$ を求めよ.

(c) これらの4点からの垂直距離の2乗和が最小となる直線の傾き θ を求めよ. ただし、分数は既約分数とし、三角関数およびその逆関数はそのままよい (例: $\cos \frac{7}{4}\pi$ や $\sin^{-1} \frac{1}{3}$ など).

(豊橋技科大 2006) (m20062710)

0.664 不定積分 $I_n = \int \cos^n t dt$ ($n = 0, 2, 4, \dots$) とする. 以下の問いに答えよ. ただし、積分定数は省略すること.

(1) I_0 と I_2 を求めよ.

(2) $I_4 = \frac{1}{4} (\sin t \cos^3 t + 3I_2)$ であることを示せ.

(3) $n \geq 2$ のとき、 I_n を I_{n-2} を用いた式として求めよ.

(4) 定積分 $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$ ($n = 0, 2, 4, \dots$) を求めよ.

(豊橋技科大 2008) (m20082703)

0.665 (1) 次の関数の極限值を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$$

(2) 次の関数を微分せよ. ただし、 $x \neq 0$ とする.

$$\exp \left(-\sin \frac{1}{x} \right)$$

(3) 次の関数を微分せよ. ただし、 $x \pm a \neq 0$ とする.

$$\log \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$$

(豊橋技科大 2009) (m20092701)

0.666 媒介変数 t を用いて表される次の曲線について、以下の問いに答えよ.

$$x = \sqrt{3} \sin t$$

$$y = \sqrt{3} \cos \left(t + \frac{\pi}{6} \right)$$

ただし、 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ である.

- (1) $t = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ のそれぞれに対応する x, y 座標上の点 A, B および C の座標を示せ.
- (2) この曲線は点 A, B および C を通る楕円の一部を表している. この曲線と x 軸, y 軸の正の部分で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

(豊橋技科大 2010) (m20102704)

- 0.667** (1) 次の不定積分を解け.

$$\int \frac{3x}{\sqrt{2x+1}} dx$$

- (2) $x = 2(\theta - \sin \theta), y = 1 - 2 \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) で表される曲線について以下の問いに答えよ.
- (a) $y \geq 0$ となる θ の範囲を求めよ.
- (b) $y \geq 0$ の範囲の曲線と x 軸とで囲まれた部分の面積 S を求めよ.

(豊橋技科大 2011) (m20112706)

- 0.668** 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin 3x)}{2x(3-x)}$$

(豊橋技科大 2013) (m20132701)

- 0.669** $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 逆行列 A^{-1} を求めよ.
- (2) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を満足するベクトル \mathbf{x} の大きさ (長さ) $|\mathbf{x}|$ を求めよ.
- (3) A の固有値 λ_1 と λ_2 を求めよ. ただし, $\lambda_1 \leq \lambda_2$ とする.
- (4) n を正の整数 ($n = 1, 2, 3, \dots$) とするとき, A^n を求めよ.

(豊橋技科大 2013) (m20132705)

- 0.670** $x-y$ 平面上の 2 つの曲線 $y = f(x) = a - \cos 2x$ と $y = g(x) = 2\sqrt{2} \sin x$ に関する以下の問いに答えよ. ただし, a は定数である.

- (1) $f(x)$ と $g(x)$ の導関数 $f'(x)$ と $g'(x)$ を求めよ.
- (2) $f'(x) = g'(x)$ となる x を求めよ. ただし, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ とする.
- (3) 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において接するとき, a の値を求めよ.
- (4) (3) のように 2 つの曲線が接するとき, $x \geq 0$ かつ (3) の接点までの範囲で y 軸と 2 つの曲線が囲む面積を求めよ.

(豊橋技科大 2015) (m20152701)

- 0.671** 以下に示した不定積分を求めよ. ただし, e は自然対数の底とする.

(1) $\int \sin^3 x dx$ (2) $\int x^2 e^x dx$ (3) $\int x e^{-x^2} dx$

(豊橋技科大 2018) (m20182702)

- 0.672** xy 平面上の二つの曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) と $y = -\sin 2x$ ($0 \leq x \leq \pi$) とで囲まれる領域 R がある. 以下の問いに答えよ.

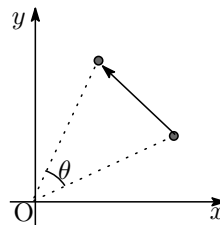
- (1) 曲線 $y = \sin x$ と曲線 $y = -\sin 2x$ の交点を $0 < x < \pi$ の範囲で求めよ.
- (2) 領域 R を図示せよ.

- (3) 領域 R の面積 S を求めよ. .
 (4) 曲線 $y = \sin x$ と 曲線 $y = |\sin 2x|$ の交点を $0 < x < \pi$ の範囲で求めよ.
 (5) 領域 R を x 軸を中心として 1 回転させて得られる回転体の体積 V を求めよ.

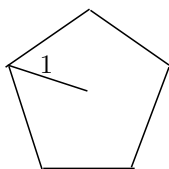
(豊橋技科大 2018) (m20182704)

0.673 xy 平面上において, 原点 O を中心に反時計回りに θ の回転を行う一次変換は下図の行列 A_θ で表される. この行列を利用して三角関数の計算を行うとともに, 図形の面積の値を求めたい. 以下の問いに答えよ.

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$



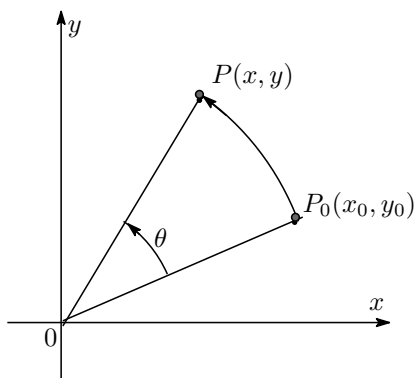
- (1) A_θ^2, A_θ^3 を計算し, $\cos \theta, \sin \theta$ で表せ. また, $A_{n\theta} = (A_\theta)^n$ であることを利用して $\cos 2\theta, \sin 2\theta, \cos 3\theta, \sin 3\theta$ を $\cos \theta, \sin \theta$ で表せ.
 (2) $\sin \frac{2\pi}{5}$ の値を α とおく. 半径 1 の円に内接する正五角形の面積を α を用いて表せ.



- (3) (1) の結果を用いて $\sin \frac{\pi}{10}, \cos \frac{\pi}{10}$ の値をそれぞれ求めよ.
 (4) 半径 1 の円に内接する正五角形の面積の値を求めよ.

(豊橋技科大 2019) (m20192703)

0.674 図のように, xy 平面上の点 $P_0(x_0, y_0)$ を原点 O のまわりに θ だけ回転した点 $P(x, y)$ に移す座標変換は次の線形変換により表される. また, このときの変換行列を $A(\theta)$ と定義する. 以下の設問に答えよ.



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- (1) xy 平面上の点を x 軸方向に a 倍, y 軸方向に b 倍する変換行列 B を a と b を用いて表せ.

- (2) xy 平面上の点を原点 O のまわりに $(-\theta)$ 回転し、その後 x 軸方向に a 倍、 y 軸方向に b 倍し、最後に原点 O のまわりに θ 回転する線形変換を考える。このときの変換行列 C を $a, b, \cos \theta$ および $\sin \theta$ を用いて表せ。
- (3) 次に示す変換行列 D の固有値を求め、それぞれの固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルをすべて求めよ。

$$D = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

- (4) 変換行列 C が変換行列 D に等しいとき、 a, b および θ の値を求めよ。ただし、 θ は $0 \leq \theta \leq \pi/2$ の範囲にあるとする。

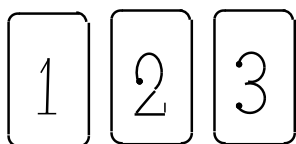
(豊橋技科大 2021) (m20212701)

0.675 $n = 1, 2, 3$ に対して、次のように定める関数 $A_n(x)$ と定積分 B_n がある。以下の設問に答えよ。

$$A_1(x) = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad A_2(x) = \sin x, \quad A_3(x) = \sin^3 x \quad (\pi/3 \leq x \leq \pi/2)$$

$$B_n = \int_{\pi/3}^{\pi/2} A_n(x) dx$$

- (1) $\pi/3 < x_0 < \pi/2$ のとき、 $A_1(x_0), A_2(x_0), A_3(x_0)$ を値の小さい方から順に並べよ。
- (2) 定積分 B_1, B_2, B_3 をそれぞれ求めよ。
- (3) 図のように、3枚のカードに1から3までの数字が1つずつ書かれている。この3枚のカードの中から無作為にカードを1枚選び、そのカードに書かれている数字を n とする。この操作を2度行うとき、少なくとも1度は $B_n > 1/2$ となる数字 n が書かれているカードを選ぶ確率を求めよ。ただし、1度目の操作後に選んだカードは元に戻し、2度目でも1度目と同じ操作を行うものとする。



(豊橋技科大 2021) (m20212705)

0.676 関数 $f(x, y) = (2y^2 + 3y - 2) \sin((2x + y)\pi)$ について答えよ。

- (1) 偏導関数 f_x, f_y をそれぞれ求めよ。
- (2) $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ において、 $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ をみたす点 (x, y) をすべて求めよ。

(豊橋技科大 2023) (m20232702)

0.677 次の重積分の値を求めよ。

(1) $\iint_D y \sin(x + y) dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x + y \leq \pi, x \geq 0, y \geq 0\}$

(2) $\iint_D xy dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid |x - \frac{1}{\sqrt{3}}y| \leq 1, |x + \frac{1}{\sqrt{3}}y| \leq 2\}$

(豊橋技科大 2023) (m20232703)

0.678 $\tan x = t$ とするとき、 $\sin 2x, \cos 2x$ を t で表わせ。次に、 dx を t 及び dt で表わせ。

(名古屋大 2000) (m20002801)

0.679 関数 $y = e^{\sqrt{3}x}(\sin x + 1)$ の第 n 次導関数が $y^{(n)} = e^{\sqrt{3}x} \left\{ 2^n \sin \left(x + \frac{\pi}{6}n \right) + (\sqrt{3})^n \right\}$ となることを証明せよ.

(名古屋大 2005) (m20052802)

0.680 次のサイクロイド曲線に対して、以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (a > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

- (1) 曲線の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ.
- (2) $\theta = \pi$ における接線の方程式を求めよ.
- (3) 曲線を x 軸のまわりに回転させるときにできる立体の体積を求めよ. なお、次の公式を用いてもよい.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2} & (n: \text{偶数}) \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$

$$\text{ただし, } n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots 2 & (n: \text{偶数}) \\ n(n-2)(n-4)\cdots 1 & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$

(名古屋大 2008) (m20082802)

0.681 以下の定積分を計算せよ.

$$(1) \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx \quad (m, n \text{ は負でない整数})$$

$$(2) \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} \, dx \quad (\text{ヒント: } x = \tan \theta \text{ とおけ. また, } \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) \text{ である.})$$

(名古屋大 2011) (m20112803)

0.682 次の関数の 2 階の偏導関数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を, それぞれ求めよ.

$$z = \sin(x^2y)$$

(名古屋大 2017) (m20172803)

0.683 三次元ユークリッド空間において、点 O を原点とし正規直交ベクトルの組 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 (= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)$ を基底とする座標系 E がある. また、点 P があって、点 O から点 P までの位置は実変数 t に関するベクトル関数 $\mathbf{r}_{PO}(t)$ で表される. 座標系 E を用いて表した $\mathbf{r}_{PO}(t)$ を変数 t に関して 2 階微分すると $\sin(t)\mathbf{e}_1 - \cos(t)\mathbf{e}_2$ となった. なお、 $t = 0$ のとき、座標系 E を用いて表した $\mathbf{r}_{PO}(t)$ の変数 t に関する 1 階微分の値は $-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3$ であり、また、 $t = 0$ のとき $\mathbf{r}_{PO}(0)$ の値は $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ である. このとき、以下の設問に答えよ.

- (1) ベクトル関数 $\mathbf{r}_{PO}(t)$ を求めよ.
- (2) 正規直交ベクトルの組 $\mathbf{b}_1 = \cos(t)\mathbf{e}_1 + \sin(t)\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_2 = -\sin(t)\mathbf{e}_1 + \cos(t)\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_3$ がある. また、ある点 Q があって、点 P から点 Q までの位置を表すベクトル関数 $\mathbf{r}_{QP}(t)$ は $\mathbf{r}_{QP}(t) = 5t\mathbf{b}_1 + 7t\mathbf{b}_2$ である.
 - (a) 座標系 E を用いて表したベクトル \mathbf{b}_1 と \mathbf{b}_2 について、変数 t に関する 2 階微分をそれぞれ求めよ. 得られたベクトルは基底としてベクトル $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ を用いて表せ.
 - (b) 点 O から点 Q までの位置を表すベクトル関数を $\mathbf{r}_{QO}(t)$ とおく. 座標系 E を用いて表した $\mathbf{r}_{QO}(t)$ の変数 t に関する 2 階微分を求めよ. 得られたベクトルは基底としてベクトル $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ を用いて表せ.

0.684 互いに直交する三つの単位ベクトル \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} による正規直交座標系において、
 曲線 C を $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$ ($0 \leq t \leq \pi$) とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $\mathbf{r}(t)$ および \mathbf{k} に直交する単位ベクトル $\mathbf{u}(t)$ を求めよ。
- (2) $\mathbf{r}(t)$, \mathbf{k} および設問 (1) で求めた $\mathbf{u}(t)$ の三つのベクトルに囲まれる 4 面体の体積を求めよ。
- (3) ベクトル場 $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \cos z \mathbf{k}$ を考える。ベクトル場 $\mathbf{F}(x, y, z)$ の曲線 C 上の線積分を求めよ。

(名古屋大 2022) (m20222802)

0.685 関数 $f(x) = \frac{x^2}{\sin x}$ に対し、 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ を求めよ。

(名古屋工業大 1998) (m19982901)

0.686 $\sin^2 x$ の n 次導関数を求めよ。

(名古屋工業大 1998) (m19982902)

0.687 (1) 二次元平面上の第一象限において $0 \leq x^2 + y^2 \leq R$ によって定められる部分を A とする。次の A 上での重積分を求めよ。 $a > 0$ とする。

$$\iint_A e^{-(ax)^2 - (ay)^2} dx dy$$

ただし、次の変数変換を用いて計算を行うこと。

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

(2) (1) で求めたことを用いて次の積分を求めよ。

$$\int_0^{+\infty} e^{-(ax)^2} dx$$

(名古屋工業大 1999) (m19992904)

0.688 (1) 逆三角関数 $y = \arcsin x$ (ただし、 $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$) の導関数は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

であることを示せ。

(2) 次の定積分の値を部分積分法を用いて求めよ。

$$\int_0^1 (\arcsin x)^2 dx$$

(名古屋工業大 2000) (m20002902)

0.689 (1) 次の 2 つの逆三角関数の導関数を求めよ。

(i) $\tan^{-1} \frac{1}{x}$

(ii) $\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(2) (1) を参考にして、原点以外で定義される関数 $f(x) = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \tan^{-1} \frac{1}{x}$ を簡単な形にせよ。

(名古屋工業大 2006) (m20062903)

0.690 次の積分の値を求めよ。

(1) $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+y} (2x - y - z) dz dy dx$

(2) $\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dy dx$

0.691 関数 $f(x) = e^{\sin x}$ のマクローリン展開を次の指示に従って計算しなさい.

- (1) $f'(x)$ と $f(x)$ との関係を導きなさい. その関係式に対してライプニッツの公式を適用し, $f^{(n+1)}(x)$ を $f^{(k)}(x)$ ($0 \leq k \leq n$) を用いて表しなさい. ただし, n は任意の自然数とし, 等式 $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ を用いてもよい.
- (2) $f(x)$ のマクローリン展開を x^5 の項まで求めなさい. ただし剰余項を求める必要はない.

(名古屋工業大 2010) (m20102903)

0.692 次の積分の値を求めよ.

$$I_1 = \int_0^1 (\sin^{-1} x)^2 dx$$

(名古屋工業大 2011) (m20112904)

0.693 定積分 $\int_0^\pi \sqrt{1 - \sin x} dx$ を計算せよ.

(名古屋工業大 2011) (m20112907)

0.694 微分方程式 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ は, 条件 $\frac{\partial}{\partial y}P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y)$ を満たすとき, 完全形という. 関数 $f(x)$ は $(0, \infty)$ で微分可能 かつ $f(\pi) = 1$ である. 微分方程式

$$\left(\sin x - f(x)\right) \frac{y}{x} dx + f(x) dy = 0, \quad x > 0$$

は完全形とするととき, 次の間に答えよ.

- (1) 関数 $f(x)$ を求めよ.
- (2) 微分方程式の一般解を求めよ.

(名古屋工業大 2012) (m20122908)

0.695 次の定積分と 2 重積分を求めよ.

$$(1) I_1 = \int_0^2 \sqrt{|x^2 - 1|} dx$$

$$(2) I_2 = \iint_D \frac{\sin y}{1 + \sin^2 x} dx dy, \quad D \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

(名古屋工業大 2017) (m20172902)

0.696 関数 $y = \sin x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) と $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$) に対して, その逆関数をそれぞれ $\text{Sin}^{-1}x$, $\text{Cos}^{-1}x$ と書く. そのとき次の方程式を解け.

$$\text{Sin}^{-1} \frac{\sqrt{15}}{4} + \text{Cos}^{-1} \frac{\sqrt{5}}{3} = \text{Cos}^{-1} x$$

(名古屋工業大 2019) (m20192901)

0.697 関数 $f(x) = \sin(\text{Cos}^{-1}x)$ の増減を調べ, 極値を求めよ. ただし, $y = \text{Cos}^{-1}x$ の値域は $0 \leq y \leq \pi$ である.

(名古屋工業大 2022) (m20222901)

0.698 2 回偏微分可能な関数 $f(x, y)$ に対して, $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ と定義する.

- (1) $\frac{\partial g}{\partial r}$ 及び $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ を求めよ.
- (2) $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ 及び $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ を求めよ.
- (3) $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ が成り立つことを示せ.

尚, 導出の過程で次の公式を用いて良い.

【公式】 $z = f(x, y)$ として, 関数 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ がいずれも偏微分可能ならば,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

が成り立つ.

(愛知県立大 2000) (m20003001)

0.699 区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ で定義された 2 つの関数 $s_1(x), s_2(x)$ が次の性質をもつとしよう.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{s_1(x)\}^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \{s_2(x)\}^2 dx = 1, \quad \int_{-\pi}^{\pi} s_1(x)s_2(x) dx = 0$$

- (1) 定積分 $f(a, b) = \int_{-\pi}^{\pi} \{x - as_1(x) - bs_2(x)\}^2 dx$ を最小にする a, b を与える表式を求めなさい. (定積分の形になる.)
- (2) 定積分 $\int_{-\pi}^{\pi} \{x - a \sin x - b \sin 2x\}^2 dx$ を最小にする a, b の値を求めなさい.

(三重大 2002) (m20023112)

0.700 以下の (1)~(3) の設問に答えよ.

- (1) $\int_1^e \frac{\log_e x}{x^2} dx$ の値を求めよ.
- (2) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta + \cos \theta} d\theta$ の値を求めよ.
- (3) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.
- $$f(x) = 2 \cdot x - \int_0^{\pi} f(t) \cdot \cos t \cdot dt$$

(三重大 2005) (m20053112)

0.701 $f(x) = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x + x$ が $x = \pi/3$ で極大値をとる. このとき, 以下の問に答えよ.

- (1) 係数 a, b の満足する条件を求めよ.
- (2) この極大値のとりうる範囲を求めよ.

(三重大 2005) (m20053114)

0.702 次の不定積分を計算せよ.

- (1) $\int \left(x^2 + 2x + 3 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} \right) dx$
- (2) $\int \{ \sin(\omega t + a) + \cos(\omega t + b) \} dt$ ただし, ω, a, b は定数である.
- (3) $\int \sin^3 \theta d\theta$

(三重大 2006) (m20063101)

0.703 以下の関数を x で微分せよ.

- (1) a^x (2) xa^x (3) $\frac{x^3}{x^2 - 1}$ (4) $\int_0^x (x \cos t - \sin t) dt$

(三重大 2007) (m20073107)

0.704 以下の定積分の値を求めよ.

$$(1) \int_1^e \log_e x dx \quad (2) \int_0^\pi e^x \sin x dx$$

(三重大 2007) (m20073108)

0.705 以下の関数を微分せよ.

$$(1) y = \sin^2 x \quad (2) y = \frac{1}{(2x-3)^3} \quad (3) y = \log 3x$$

(三重大 2010) (m20103113)

0.706 以下の不定積分を求めよ. 積分定数は C とする.

$$(1) \int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{\sqrt{x}} dx \quad (2) \int \sin(\log x) dx$$

(三重大 2010) (m20103114)

0.707 指示に従って導関数を求めなさい.

$$(1) y = (e^x + e^{-x})^2 \text{ を } x \text{ で微分せよ. } e \text{ は自然対数の底を表す.}$$

$$(2) y = x \cdot \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \text{ を } x \text{ で微分せよ. } a \text{ は定数を示す.}$$

$$(3) x = \sin t, y = \cos 2t \text{ のとき, } \frac{dy}{dx} \text{ を求めよ.}$$

(三重大 2011) (m20113101)

0.708 次の極限值を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$$

(三重大 2011) (m20113102)

0.709 定積分の値を求めよ. 自然対数は \log で表す.

$$(1) \int_0^\pi x \sin x dx \quad (2) \int_1^2 \frac{2x^2-1}{x} dx$$

(三重大 2011) (m20113103)

0.710 次の関数を微分せよ.

$$(1) y = \sqrt{x^2+1} \quad (2) y = (x+1)(x+2)(x+3) \quad (3) y = \sin \sqrt{x^2+x+1}$$
$$(4) \log \frac{1+x}{1-x} \quad (5) y = \log_a(x^2-1) \quad (a > 0, a \neq 1)$$

(三重大 2012) (m20123111)

0.711 地上から角度 α の方向に初速度 v_0 で投げ上げた物体の t 秒後の位置は, 投げ上げた地点を原点にとり, 物体の運動する曲線を含む平面上で, 地面上に x 軸, 鉛直方向に y 軸をとると,

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha$$

$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

で与えられる. この時の以下の設問に答えよ. ただし, g は重力の加速度である.

(1) この物体は, どのような曲線を描いて運動するか, 軌跡の式を示して説明せよ.

(2) この物体が最高点に達した時点と地面に着いた時点について, 両者の速度と方向を求め, 両者の関係を説明せよ.

(三重大 2012) (m20123115)

0.712 以下の関数を微分せよ.

(1) $y = \frac{3x-2}{x^2+1}$

(2) $y = \sqrt{2x^2-3}$

(3) $y = e^x \sin x$

(4) $y = \frac{1}{\tan x}$

(5) $y = \log(x^2+1)$

(三重大 2012) (m20123116)

0.713 以下の不定積分を求めよ.

(1) $\int \sqrt{2x-3} dx$

(2) $\int x^2 \sin x dx$

(3) $\int (\log x)^2 dx$

(三重大 2012) (m20123117)

0.714 変数 x に関する関数を微分せよ.

(1) $y = \frac{x^2}{1-x}$

(2) $y = x \log_e x$

(3) $y = x^2 \sin 2x$

(三重大 2013) (m20133110)

0.715 変数 x に関する関数の不定積分を求めよ.

(1) $\int \sin^3 x dx$

(2) $\int \frac{1}{3x+2} dx$

(三重大 2013) (m20133111)

0.716 微分可能な関数 $f(x)$ が, $f(x) = \cos^2(x) + \int_0^x f(t) \{\sin(x) \cos(t) - \sin(t) \cos(x)\} dt$ を満たすとき, 以下の問に答えなさい.

(1) 与式の両辺を微分して $f'(x)$ を求めなさい.

(2) $f''(x)$ を求めなさい.

(3) $f(0), f'(0), f''(0)$ をそれぞれ求めなさい.

(4) 問(1)~(3)の結果を用いて, $\int_0^\pi f(x) dx$ を求めなさい.

(三重大 2014) (m20143101)

0.717 次の関数を微分せよ.

(1) $y = (3x-1)^3$

(2) $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

(3) $y = \log_e(x + \sqrt{x^2+1})$

(4) $y = \frac{2e^x + 1}{e^x + 1}$

(三重大 2014) (m20143106)

0.718 以下の不定積分を求めなさい.

(1) $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3} dx$

(2) $\int x^2 \cos x dx$

(3) $\int \sqrt{a^2-x^2} dx$ ただし $|x| < a, a > 0$

(4) $\int \sinh x dx$

(三重大 2015) (m20153104)

0.719 次の関数の x に関する導関数 y' を求めよ.

(1) $y = x^3 e^{-2x}$

(2) $y = x \log_e \frac{1}{x}$

(3) $y = x^{\sin x}$

(三重大 2015) (m20153105)

0.720 3次元直交座標系の xyz 空間に点 $A(0, 1, 1)$, 点 $B(-a, 0, 1)$, 点 $C(a \cos t, a \sin t, 0)$ がある. ただし, a は正の実数で, $0 \leq t < 2\pi$ である. このとき, 以下の問いに答えなさい.

- (1) $\angle ACB = \theta$, $t = \pi$ とした場合, $\cos \theta = \frac{1}{2}$ となる a を求めなさい.
 (2) (1) の条件において, $\triangle ABC$ の面積を求めなさい.
 (3) $\triangle ABC$ の重心を G とする. 点 C について t を変化させたとすると, \overrightarrow{AG} と \overrightarrow{AC} が垂直となるような a がただ一つ決まる場合の $\cos t$ と $\sin t$ を求めよ.

(三重大 2016) (m20163102)

0.721 $\int \frac{1}{\sin x} dx = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$ (C は定数) を証明せよ.

(三重大 2016) (m20163104)

0.722 次の関数 $f(x)$ の第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めなさい.

$$f(x) = e^x \sin x$$

(三重大 2016) (m20163106)

0.723 関数 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ に関して, 次の問いに答えなさい.

(1) 範囲 $0 \leq x \leq a$ (a は 1 未満の正の定数) で $y = f(x)$ の描く曲線を xy 平面上に図示し,

$$\int_0^a f(x) dx$$

の示す意味を説明しなさい.

(2) 次の式が成り立つことを, 問 (1) を利用して図形を用いて説明しなさい.

$$\int_0^a \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} (a\sqrt{1-a^2} + \sin^{-1} a)$$

(三重大 2016) (m20163107)

0.724 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x + \cos x}$

(2) $y = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$

(3) $y = x^{\log_e x}$

(三重大 2016) (m20163109)

0.725 次の不定積分を求めよ.

(1) $\int \frac{1}{e^x + 1} dx$

(2) $\int x^2 \sin x dx$

(三重大 2016) (m20163110)

0.726 xy 平面上のサイクロイドは, θ をパラメータとして

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

で与えられる. ただし, a は正の定数である. この曲線の $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 部分の長さを求めよ.

(三重大 2016) (m20163114)

0.727 (1) 次の関数の不定積分を求めなさい.

$$\sin 3x \cos 2x$$

(2) 次の曲線と y 軸とで囲まれた部分を y 軸周りに回転してできる回転体の体積を求めなさい.

$$y = -3x^2 + 12 \quad (0 \leq x \leq 2)$$

(三重大 2017) (m20173103)

0.728 三角関数について, 以下の問いに答えよ. ただし, n は自然数である.

この際, オイラーの公式 ($e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$) を用いても良い. ただし, i は虚数単位である.

(1) $\sin(2\theta)$ および $\cos(2\theta)$ を $\sin \theta$ および $\cos \theta$ を用いて表現せよ.

- (2) $\sin(3\theta)$ および $\cos(3\theta)$ を $\sin \theta$ および $\cos \theta$ を用いて表現せよ.
 (3) $\sin(4\theta)$ および $\cos(4\theta)$ を $\sin \theta$ および $\cos \theta$ を用いて表現せよ.
 (4) $\cos(10\theta)$ を $\sin \theta$ および $\cos \theta$ を用いて表現せよ.
 (5) $\cos(n\theta)$ は, $\sin \theta$ および $\cos \theta$ を用いてどのように表現されるか推定せよ.

(三重大 2018) (m20183102)

0.729 次の関数を微分せよ.

- (1) $y = 5^{-2x}$ (2) $y = \sin^4 x \cos^4 x$ (3) $y = x^{\log x}$
 (4) $y = \frac{(x-1) \cdot \sqrt[3]{3x+1}}{\sqrt{(2x+5)^3}}$ (5) $y = \log_a(2x^2 - 4)$ ($a > 0, a \neq 1$)

(三重大 2018) (m20183106)

0.730 以下の設問 (1) から (3) に答えよ.

- (1) $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$, $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ とすると, $A = B$ であることを示せ.
 (2) (1)の結果を利用して A の値を求めよ.
 (3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx$ の値を計算せよ.

(三重大 2018) (m20183110)

0.731 (1) 次の行列 A の行列式 $|A|$ を求めよ. また行列 A と次のベクトル \vec{v} の積 $A\vec{v}$ を計算し, $A\vec{v} = \vec{v}$ となることを示せ. ただし θ, ϕ は実数, i は虚数単位とする.

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)e^{-i\phi} \\ \sin(\theta)e^{i\phi} & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

- (2) (1)の行列 A について, $\phi = 0$ としたときの 2 つの固有値および固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルの大きさは 1 とせよ.
 (3) 次の行列 B の 2 つの固有値を求めよ. ただし k は実数とする. また $|k| \leq 1$ として, 大きさ 1 とした 2 つの固有ベクトルを求めよ. また 2 つの固有値を k の関数として, $|k| \leq 1$ の範囲でグラフに描け.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$$

(三重大 2018) (m20183112)

0.732 次の関数を微分せよ.

- (1) $y = x^{2x}$ ($x > 0$) (2) $y = e^{-2x} \sin 3x$
 (3) $y = \left(\tan x + \frac{1}{\tan x} \right)^2$ (4) $y = (3x-1)\sqrt{x^3+1}$

(三重大 2022) (m20223109)

0.733 次の定積分を求めよ.

- (1) $\int_0^2 5^{2x} dx$ (2) $\int_0^\pi x^3 \sin x dx$

(三重大 2022) (m20223110)

0.734 次の関数を微分せよ.

- (1) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(2) $y = \sinh^{-1}(x)$ (ただし, $\sinh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ である) (奈良女子大 2001) (m20013201)

0.735 次の積分を求めよ.

(1) $\int_0^{2\pi} \sin^2(nx) dx$ (n は正の整数) (2) $\int_0^1 \log x dx$ (奈良女子大 2001) (m20013204)

0.736 次の定積分を求めよ.

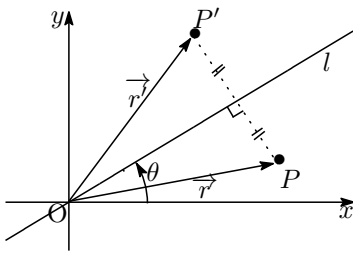
(1) $\int_0^1 (1+x)\sqrt{1-x} dx$ (2) $\int_0^{\pi/2} x \sin x dx$ (奈良女子大 2002) (m20023203)

0.737 原点 O を通る角度 θ 方向の直線 l に関して, 空間の点 P (位置ベクトルを \vec{r}) を点 P' (位置ベクトルを \vec{r}') へ反転させる作用 (R_θ と記す) を考える.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\theta \vec{r}$$

このとき, 反転の作用は次のように表わせることを示せ.

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$



(奈良女子大 2002) (m20023208)

0.738 次の関数 $y = e^x \sin x$ について以下の間に答えよ.

(1) 第1次導関数 $y^{(1)}$ が $y^{(1)} = \sqrt{2}e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ となることを示せ.
 (2) 第 n 次導関数 $y^{(n)}$ が $y^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$ となることを, 数学的帰納法を用いて証明せよ.

(奈良女子大 2003) (m20033202)

0.739 次の各数列は収束するか. 収束する場合はその極限值を求めよ. 収束しない場合はそのことを証明せよ.

(1) $\frac{2n^3 + n + 2}{n^3 - n^2 + n + 1}$, (2) $\frac{\sin n}{n}$, (3) $\frac{(-1)^n n + 1}{n}$ (奈良女子大 2003) (m20033204)

0.740 m と n が整数のとき, 次の式を証明せよ.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta(m-n)} d\theta = \delta_{m,n}$$

ただし, $i = \sqrt{-1}$ である. また, $\delta_{m,n}$ はクロネッカーのデルタで,

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad \text{と定義されている.}$$

また, 必要なら公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用いよ.

(奈良女子大 2003) (m20033210)

0.741 次の 2 行 2 列の行列 $F(\theta)$ について以下の間に答えよ.

$$F(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

(1) $F(\theta)$ について次の関係が成立することを示せ.

$$F(\theta_1)F(\theta_2) = F(\theta_1 + \theta_2)$$

(2) 行列 A を次の 2 行 2 列の行列であるとする.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき, $F(-\theta)AF(\theta)$ が対角行列 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ の形になる θ の値と, そのときの対角要素 λ_1, λ_2 を求めよ.

(奈良女子大 2005) (m20053204)

0.742 (1) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x^2 + 1}$ および $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x}$ を求めよ.

(2) 関数 e^{-x^2} を微分せよ.

(奈良女子大 2006) (m20063202)

0.743 実数 θ に対して $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ とおく. また, 2 次の単位行列を E とおく. 次の間に答えよ.

(1) ${}^t A(\theta)A(\theta) = E$ となることを示せ. ただしここで, ${}^t A(\theta)$ は $A(\theta)$ の転置行列である.

(2) $A(-\theta)$ が $A(\theta)$ の逆行列であることを示せ.

(3) 実数 θ, θ' に対し, $A(\theta)A(\theta') = A(\theta + \theta')$ が成り立つことを示せ.

(奈良女子大 2006) (m20063204)

0.744 2 次元平面の直交座標を (x, y) , また, 極座標を (r, θ) とする. このとき,

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

の関係が成り立つ. x, y および r, θ が時間 t の関数であるとき, $\frac{dx}{dt}$ と $\frac{dy}{dt}$ を $\frac{dr}{dt}$ と $\frac{d\theta}{dt}$ を用いて表せ.

(奈良女子大 2007) (m20073206)

0.745 xy - 平面上の 2 つの曲線

$$C_1 : y = \sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

$$C_2 : y = \sin(x - a) \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

について考える. ただし, a は正の定数で, $0 < a \leq \pi$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) $a = \frac{\pi}{2}$ のとき, C_1, C_2 のグラフの概形を描け.

(2) $0 < x \leq 2\pi$ の範囲において, C_1 と C_2 の二つの交点の x 座標を, それぞれ t_1, t_2 ($t_1 < t_2$) とする. t_1, t_2 を a で表わせ.

(3) $t_1 \leq x \leq t_2$ の範囲で, C_1 と C_2 によって囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ.

(奈良女子大 2008) (m20083203)

0.746 次の不定積分と定積分を求めよ.

- (1) $\int x e^{-ax} dx$ (a は定数)
(2) $\int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{1-2a \cos \theta + a^2}}$ ($a > 0$)

(奈良女子大 2009) (m20093205)

0.747 次のような2つの行列 A と B があるとき, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

- (1) 積 AB を求めよ.
(2) 行列 A の逆行列を求めよ.
(3) 2次元ベクトル X に行列 A をかけて, $Y = AX$ を作った. このとき, 2つのベクトル X と Y はどのような関係になるか述べよ.

(奈良女子大 2009) (m20093207)

0.748 次の定積分 I に関する以下の問いに答えよ.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

- (1) 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

- (2) 変数を変えることで, I^2 は次のように書けることを示せ.

$$I^2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

- (3) この2次元積分は直交座標 (x, y) から極座標 (r, θ) に変換することで求めることができる. 積分を実行して I^2 を求め, $I = \sqrt{\pi}$ であることを示せ.

ただし, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ であり, $dx dy = r dr d\theta$ である.

(奈良女子大 2010) (m20103204)

0.749 次の微分方程式について以下の問いに答えよ.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

- (1) 次の $x(t)$ はこの微分方程式の解であることを示せ.

$$x(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$$

ここで, C_1, C_2 は定数である.

- (2) この $x(t)$ は次のように表すこともできる.

$$x(t) = B_1 e^{+i\omega t} + B_2 e^{-i\omega t}$$

このとき, B_1, B_2 と C_1, C_2 の関係を求めよ.

(奈良女子大 2010) (m20103205)

0.750 次の定積分を求めよ. ただし, a, b は正の定数であるとする.

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin(bx) dx$$

(奈良女子大 2010) (m20103207)

0.751 次の積分を求めよ. ただし, a は実定数である.

(1) $\int_0^{\infty} \exp(-ax) dx \quad (a \neq 0)$

(2) $\int_{-\pi+a}^{\pi+a} \sin(mx) \sin(nx) dx \quad (m, n \text{ は正の整数})$

(奈良女子大 2012) (m20123202)

0.752 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = A \cos(\omega t) \quad \dots (\text{ア})$$

の一般解 $x(t)$ は, $A = 0$ の場合の一般解 $x_0(t)$ と $A \neq 0$ の特解 $x_1(t)$ の和 $x_0(t) + x_1(t)$ で表される. 以下の問いに答えよ. ただし, A, ω, ω_0 は実定数である.

(1) $x_0(t)$ を求めよ.

(2) $x_1(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$ とおいて式 (ア) に代入し, 未知定数 α と β を決定することにより $x_1(t)$ を求めよ. ただし, $\omega \neq \omega_0$ とする.

(3) 初期条件が $x(0) = x_0, \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0$ の場合, 式 (ア) の解を求めよ. また, $\omega \rightarrow \omega_0$ とした時, その解はどうなるか.

(奈良女子大 2012) (m20123203)

0.753 次の関数を微分せよ. ただし, a は $a > 0, \text{かつ } a \neq 1$ の実定数である.

(1) $y = a^{-x}$ (2) $y = \sin(\tan x)$

(奈良女子大 2013) (m20133204)

0.754 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y+2}{x+1}$ (2) $\frac{dy}{dx} + y = \sin x$ (3) $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$

(奈良女子大 2013) (m20133206)

0.755 次の行列 $A(\theta)$ について以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) $A(\theta_1 + \theta_2) = A(\theta_1)A(\theta_2)$ であることを示せ.

(3) $A(\theta)A(-\theta) = I$ を示せ. ここで I は単位行列である.

(4) 行列 $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$ の固有値をすべて求めよ.

(奈良女子大 2013) (m20133208)

0.756 次の積分を求めよ. ただし, a は正の定数, n は正の整数である.

(1) $\int_0^{\infty} r^3 \exp(-ar^2) dr$ (2) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^n x \cos x dx$

(奈良女子大 2015) (m20153202)

0.757 (1) 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{5x-4}{2x^2+x-6} dx$$

(2) 自然数 m, n に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

(奈良女子大 2016) (m20163202)

0.758 微分方程式に関する以下の問題に答えよ.

(1) 微分方程式 $\frac{dx}{dt} = -x + \sin t$ を解いて, $t = 0$ で $x = 0$ となる解 $x(t)$ を求めよ.

(2) 微分方程式 $\frac{d^2x}{dt^2} = 1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ を考える.

(a) $v = \frac{dx}{dt}$ とおく. $t = 0$ で $v = 0$ となる解 $v(t)$ を求めよ.

(b) $t = 0$ で $x = 0$ かつ $v = 0$ となる解 $x(t)$ を求めよ.

(奈良女子大 2016) (m20163207)

0.759 $x \geq 0$ 定義された関数 $f(x) = e^{-x} \sin x$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) f の増減および凹凸を調べ, $y = f(x)$ のグラフの概形を書け.

(2) f の最大値を求めよ.

(3) $\int_0^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ であることを示せ.

(4) $\int_0^{\infty} f(x) dx$ を求めよ.

(奈良女子大 2017) (m20173203)

0.760 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ として, $\mathbf{r}' = A\mathbf{r}$ を求めよ.

(2) 行列式 A を求めよ.

(3) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(奈良女子大 2017) (m20173208)

0.761 与えられた条件の下で, 以下の関数を微分せよ.

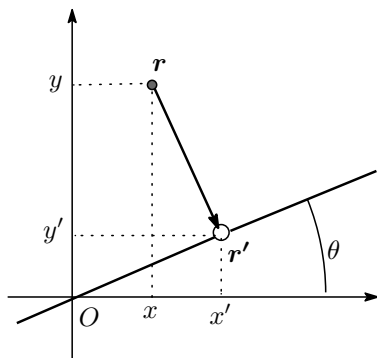
(1) $y = xe^x$

(2) $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$, (σ および m は正の定数)

(3) $y = \sin^{-1} x$ (x のとりうる値は $[-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}]$ を満たす範囲のみとする)

(奈良女子大 2018) (m20183204)

- 0.762 下図のように xy 平面上の任意の点 $r = (x, y)$ を, x 軸から角度 θ 傾いた直線に垂直に射影した点 $r' = (x', y')$ を求める変換を考える. 以下の問いに答えよ.



- (1) ベクトル r と単位ベクトル $e = (\cos \theta, \sin \theta)$ を使って, ベクトル r' を表せ.
- (2) (x, y) と (x', y') の関係は 2×2 行列 A を使って一次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
 として表すことができる. 行列 A を求めよ.
- (3) 行列 A の 2 つの固有値を計算し, それぞれの固有値に属する固有ベクトルの方向を求めよ.

(奈良女子大 2022) (m20223209)

- 0.763 (1) 関数 $f(x)$ および $g(x)$ は $x = a$ において, $f(a) = g(a) = 0$ であり, $f'(a)$ および $g'(a)$ が存在する. このとき, $g'(a) \neq 0$ であれば, 次の式が成り立つことを示せ.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

- (2) 次の極限值を求めよ.
- $$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x}$$

(京都大 2002) (m20023301)

- 0.764 xy 平面上の曲線 C が媒介変数 t を用いて $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) で与えられている. ここで, r は正の定数とする. このとき, 次の (1)~(3) に答えよ.

- (1) 曲線 C の長さ l を求めよ.
- (2) 曲線 C と x 軸とで囲まれる図形の面積 S を求めよ.
- (3) 曲線 C 上の両端以外の点 P に対して, P における C の法線と x 軸との交点を考え, その座標を $(a, 0)$ とする. P を動かすとき, P における C の接線と直線 $x = a$ との交点は, どのような図形を描くか.

(京都大 2012) (m20123303)

- 0.765 滑らかな曲線 C 上を動く点 P について, 次の問 (1)~(2) に答えよ. なお, 図 4-1 に示すように, P における曲線の単位接線ベクトルを m , 単位主法線ベクトルを n と表すものとする.

- (1) C 上の点 P とそれに非常に近い点 P_1, P_2 の 3 点を通る円を C_0 とし, C_0 の中心を点 O , 半径を ρ , 線分 P_1P の中点と線分 PP_2 の中点の間の距離を ds , 直線 P_1P と直線 PP_2 のなす角を $d\varphi$, とする (図 4-1, 4-2). 点 P_1, P_2 間の C に変曲点はないものとする.

- (a) 直線 P_1P , 直線 PP_2 上の単位ベクトル m_1, m_2 は近接する 2 つの単位接線ベクトルとみる

ことができ $m_2 - m_1 = dm$ である. このとき $\left| \frac{dm}{ds} \right| = \frac{1}{\rho}$ となることを示せ.

(b) $\frac{d\mathbf{m}}{ds}$ は \mathbf{m} と垂直であり, $\frac{d\mathbf{m}}{ds} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n}$ となることを示せ.

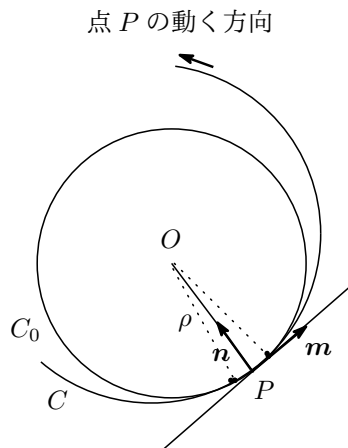


図 4-1

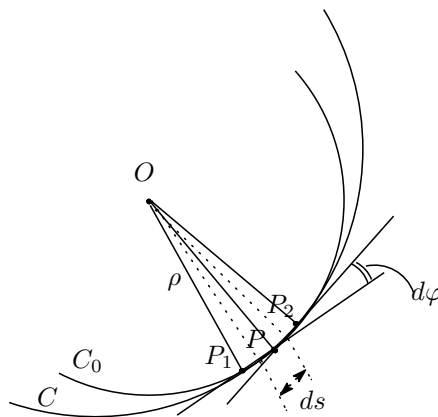


図 4-2

- (2) 点 P の時刻 t における位置ベクトル $\mathbf{r}(t)$ が,
 $\mathbf{r}(t) = [b \cos t \quad b \sin t \quad ct]$ (b, c は正の定数)
 で表されるとき, P の速度 $\mathbf{v}(t)$, および, 加速度 $\mathbf{a}(t)$ を, P の軌跡における, 単位接線ベクトル \mathbf{m} と単位主法線ベクトル \mathbf{n} で表せ.

(京都大 2013) (m20133304)

0.766 R^2 に直交座標系 $O-xy$ をとり, 次式で定義される曲線 C を考える.

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta + b \cos 2\theta \\ y &= a \sin \theta + b \sin 2\theta \end{aligned} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

ここに, a, b は正の数であり, $a \neq b$ を満たすものとする. このとき問 (1)~(3) に答えよ.

- (1) $\Phi(\theta)$ は, 次式を満たす連続関数であるとする.

$$(a \cos \theta + b \cos 2\theta) \tan \Phi(\theta) = a \sin \theta + b \sin 2\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

このとき, $\frac{d\Phi}{d\theta}$ を θ の関数として求めよ.

- (2) $a = 2, b = 1$ のとき, C の概形を描け. また $\Phi(0) = 0$ であるとき, $\Phi(2\pi)$ を求めよ.
 (3) $a = 2, b = 1$ のとき, 次の積分を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$$

(京都大 2014) (m20143306)

0.767 実数のパラメータ θ に依存する行列 $A(\theta)$ が

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{3} \cos^2 \theta & -\frac{2}{3} \cos \theta \sin \theta \\ -\frac{2}{3} \cos \theta \sin \theta & 1 - \frac{2}{3} \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

で与えられている. R^2 の点 \mathbf{x} をデカルト座標系 $O-x_1x_2$ を用いて $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ と表す. これらを用いて, 集合 $\Omega(\theta)$ を

$$\Omega(\theta) = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \cdot A(\theta)\mathbf{x} \leq 1\}$$

と定義する. ここに, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^2$ に対して

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^2 x_i y_i$$

である. このとき, 次の (1)~(4) に答えよ.

- (1) $A(\theta)$ のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルは正規化して単位ベクトルとせよ.
- (2) $\Omega(\theta)$ の概形を描け.
- (3) $\Omega(0) \cap \Omega(\pi/2)$ の面積を求めよ.
- (4) $\bigcup_{0 \leq \theta \leq \pi/2} \Omega(\theta)$ を図示し, その面積を求めよ. ここに, $\mathbf{x} \in \bigcup_{0 \leq \theta \leq \pi/2} \Omega(\theta)$ とは, $0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$ なる θ_0 があって, $\mathbf{x} \in \Omega(\theta_0)$ となることである.

(京都大 2015) (m20153305)

0.768 次の定積分の値を求めよ. (ただし, e は自然対数の底)

$$(1) \int_1^e \frac{3x^2 - 1}{x} dx \qquad (2) \int_0^\pi \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)^2 dx$$

(京都大 2017) (m20173305)

0.769 次の三角関数または指数関数を含む定積分の値を求めよ. (ただし, e は自然対数の底)

$$(イ) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \cos^3 x}{1 + \sin x} dx \qquad (ロ) \int_0^1 \frac{7e^x}{e^x + 1} dx$$

(京都大 2018) (m20183302)

0.770 e_1, e_2 を, n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n の単位ベクトルとし, 両者がなす角 θ は $0 < \theta < \pi/2$ をみたすものとする. e_1 によって張られる \mathbb{R}^n の 1 次元部分空間を L_1 , e_2 によって張られる \mathbb{R}^n の 1 次元部分空間を L_2 とし, \mathbb{R}^n から L_1, L_2 への正射影をあらわす線形変換をそれぞれ P_1, P_2 とする. 問 1 ~ 問 4 に答えよ.

問 1 P_1 の固有値を, 重複度を含めてすべて答えよ. また, 0 でない固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

問 2 $P_1 + P_2$ の固有値を, 重複度を含めてすべて答えよ. また, 0 でない固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

問 3 $P_1 - P_2$ は, $\pm \sin \theta$ を固有値としてもつことを示せ.

問 4 $P_1 - P_2$ の固有値 $\sin \theta$ に対応する固有ベクトルを, e_1 とのなす角 α が $\pi/2$ より小さくなるようにとったとき, $\alpha = \pi/4 - \theta/2$ であることを示せ.

(京都大 2018) (m20183303)

0.771 次の指数関数を含む微分方程式の一般解を, 定数 C を用いて求めよ.

$$(イ) \frac{dy}{dx} + e^x y = 7e^x \qquad (ロ) (y + e^x \sin y) dx + (x + e^x \cos y) dy = 0$$

(京都大 2018) (m20183305)

0.772 (1) 次の微分方程式の一般解を, 定数 C を用いて求めよ.

$$(イ) \frac{dy}{dx} = y^2 + y - 6$$

$$(ロ) \frac{dy}{dx} = 2 + \frac{y}{x} + e^{-\frac{y}{x}}$$

$$(ハ) \left(\frac{3}{x} + \frac{y}{x^2} \right) dx + \left(3y - \frac{1}{x} \right) dy = 0$$

(2) 次の微分方程式の一般解を, 定数 C を用いて求めよ.

なお, 積分因子は $\sin x$ である.

$$(2 \sin y \cos x - 2) dx + \cos y \sin x dy = 0 \quad (0 < x < \pi)$$

(京都大 2022) (m20223301)

- 0.773** 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$ の値を求めよ.
(京都工芸繊維大 1998) (m19983404)
- 0.774** 自然数 $n \geq 2$ に対して, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$
とおく. 次の (1),(2) を証明せよ.
(1) $I_n = J_n$ (2) $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$
(京都工芸繊維大 2001) (m20013403)
- 0.775** 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right)$ の値を求めよ.
(京都工芸繊維大 2002) (m20023402)
- 0.776** 媒介変数表示された曲線 $C : x = 3 \cos t, y = 2 \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) を図示し, この曲線で囲まれた図形 D 上の重積分 $\iint_D (xy + 1) dx dy$ の値を求めよ.
(京都工芸繊維大 2002) (m20023406)
- 0.777** 次の極限值を求めよ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x - \sin x}{x^2}$
(京都工芸繊維大 2003) (m20033403)
- 0.778** 2変数関数 $\varphi(x, y) = x - y + e^y \sin x$ と全微分可能な関数 $\psi(x, y)$ に対して, 次の各問いに答えよ.
(1) 偏導関数 $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ を求めよ.
(2) $x = 0$ の近傍で定義された微分可能な関数 $f(x)$ が $\varphi(x, f(x)) = 0$ を満たすとし, $g(x) = \psi(x, f(x))$ とおく. 微分係数 $f'(0)$ を求めよ. また, $a = \frac{\partial \psi}{\partial x}(0, 0)$, $b = \frac{\partial \psi}{\partial y}(0, 0)$ とおくと, $g'(0)$ を a, b を用いて表せ.
(京都工芸繊維大 2003) (m20033406)
- 0.779** (1) $\tan \frac{x}{2} = t$ とおく. $\sin x$ と $\frac{dx}{dt}$ を t を用いて表せ.
(2) 不定積分 $\int \frac{dx}{2 + \sin x}$ を求めよ.
(京都工芸繊維大 2004) (m20043409)
- 0.780** $0 \leq x < 1$ のとき, 不等式 $\sin^{-1} x \geq x + \frac{x^3}{6}$ が成り立つことを示せ.
ただし, \sin^{-1} は \sin の逆関数の主値である.
(京都工芸繊維大 2005) (m20053408)
- 0.781** 微分方程式 $y'' + 2y' + 5y = 10 \sin x$ を考える.
(1) $a \cos x + b \sin x$ がこの微分方程式の解になるように定数 a, b を定めよ.
(2) 初期条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ を満たす解を求めよ.
(京都工芸繊維大 2005) (m20053410)
- 0.782** $-1 \leq x \leq 1$ のとき, 不等式 $\sin^{-1} x + \sqrt{2(1-x)} \leq \frac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ.
ただし \sin^{-1} は \sin の逆関数の主値である.
(京都工芸繊維大 2006) (m20063403)

0.783 実数 x が $0 < x < \frac{\pi}{2}$ を満たすとする. 行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin x & \cos x & \tan x \\ -\sin x & 0 & 0 & \cos x \\ -\cos x & 0 & 0 & \sin x \\ -\tan x & -\cos x & -\sin x & 0 \end{vmatrix}$$

の値が $\frac{1}{4}$ となるような x をすべて求めよ.

(京都工芸繊維大 2009) (m20093401)

0.784 (1) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x - e^x}{x \sin x}$ を求めよ.

(2) 定積分 $\int_1^3 \frac{x^3 - 3x + 1}{\sqrt{x-1}} dx$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2009) (m20093402)

0.785 xy 平面の領域

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq x^2 \right\}$$

に対して, 重積分 $\iint_D \sin\left(\frac{y}{x}\right) dx dy$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2010) (m20103404)

0.786 (1) 極限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\cos x) \log(\cos x)$ を求めよ.

(2) 広義積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x) \log(\cos x) dx$ を求めよ.

(京都工芸繊維大 2012) (m20123403)

0.787 xy 平面上の関数 $f(x, y) = x^3 + 2xy - x + 2y$ を考える. 実数 a, b は $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ を満たしている. 実数 t の関数

$$g(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h \cos t, b + h \sin t) - f(a, b)}{h^2}$$

を考える.

(1) a, b の値を求めよ.

(2) 次の等式を証明せよ.

$$g(t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \cos^2 t + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \sin t \cos t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \sin^2 t$$

(3) t が実数全体を動くとき, $g(t)$ の最大値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2013) (m20133402)

0.788 xy 平面上の図形 $D : \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} (0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq e^\theta)$ に対して,

重積分 $\iint_D 1 dx dy$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2013) (m20133404)

0.789 (1) 2回微分可能な関数 $F(x)$ に対し、不定積分に関する関係式

$$\int (F''(x) + F(x)) \sin x dx = F'(x) \sin x - F(x) \cos x + C$$

を示せ。ただし、 C は任意定数とする。

(2) n を3以上の自然数とする。微分方程式

$$y' + y = e^{-x} \{x^n + n(n-1)x^{n-2}\} \sin x$$

の解 $y = y(x)$ で条件 $y(0) = 0$ を満たすものを求めよ。

(京都工芸繊維大 2017) (m20173405)

0.790 (1) 積分 $\int_0^T \frac{\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}} dx$ ($0 \leq T < \frac{\pi}{2}$) を求めよ。

(2) a を正の実数とする。広義積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\sin x}}{(1-\sin x)^a} dx$ が収束するような a の範囲、および a がその範囲にあるときの、この広義積分を求めよ。

(京都工芸繊維大 2019) (m20193402)

0.791 関数 $z = f(x, y)$ は C^2 級であるとする。 x, y が別の2変数 s, t の関数であり、

$$x = 2 \cos s + 3 \sin t, \quad y = 4 \sin s + 5 \cos t$$

と表されているとする。 $(s, t) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ のときの x, y の値をそれぞれ p, q とする。ただし、関数 $f(x, y)$ が C^2 級であるとは、 $f(x, y)$ の2階までのすべての偏導関数が存在して、それらが連続であることである。

(1) x, y の s, t に関する1階偏導関数をすべて求めよ。

(2) z を s, t の関数と見なしたとき、 $\frac{\partial z}{\partial s} \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ を $f_x(p, q)$ および $f_y(p, q)$ を用いて表せ。

(3) z を s, t の関数と見なしたとき、 $\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s} \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ を $f_{xx}(p, q)$, $f_{xy}(p, q)$ および $f_{yy}(p, q)$ を用いて表せ。

(京都工芸繊維大 2019) (m20193403)

0.792 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x^3}$ を求めよ。

(京都工芸繊維大 2021) (m20213402)

0.793 実数値関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^\pi \frac{\sin y}{\sqrt{1 - 2x \cos y + x^2}} dy$$

とするとき、次の問に答えよ。

(1) $f(0)$ の値を求めよ。

(2) 積分を用いずに $f(x)$ を表せ。

(3) $f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(4) 広義積分 $\int_1^\infty x^{-\frac{1}{2}} f(x) dx$ を求めよ。

(大阪大 1999) (m19993502)

0.794 区間 $(0, \infty)$ 上で定義された実数値関数 $x(t)$ が次の積分方程式

$$x(t) = \int_0^t \sin(2(t-u)) \cdot x(u) du + t$$

を満たすとする。このとき、 $x(t)$ を求めよ。

(大阪大 2001) (m20013504)

0.795 X, Y は独立で、いずれも平均 0、分散 σ^2 を持つ確率変数であり、 s, t, λ は実定数とする。2つの確率変数

$$S = X \cos \lambda s + Y \sin \lambda s, \quad T = X \cos \lambda(s+t) + Y \sin \lambda(s+t)$$

を考えると、次の問に答えよ。

- (1) S, T の平均、分散、共分散を求めよ。
- (2) S, T の相関係数を求めよ。

(大阪大 2001) (m20013509)

0.796 (1) 関数 $f(x) = x^2$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

とフーリエ級数展開したとき、 $a_n (n \geq 0), b_n (n \geq 1)$ を求めよ。

- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ を示せ。

(大阪大 2002) (m20023506)

0.797 $a > 0, 0 \leq x \leq \pi$ のとき、関数 $y = \sin 2x + 2a(\sin x + \cos x) + 2$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $t = \sin x + \cos x$ とおいて、 y を t の関数として表せ。
- (2) y の最大値および最小値を求めよ。

(大阪大 2004) (m20043502)

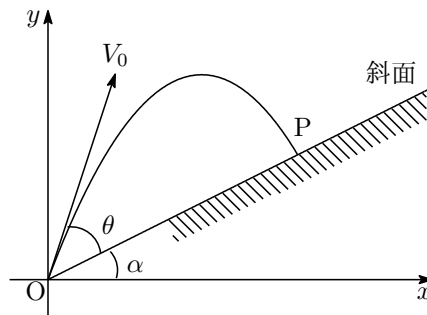
0.798 右図のように水平面と α ($0 < \alpha < \pi/2$) の角をなす斜面において、初速度 V_0 で斜面に対して θ ($\theta > 0, 0 < \alpha + \theta < \pi/2$) の方向に物体を投げる。以下の問いに答えよ。

- (1) 物体の軌跡の x および y 座標は時間 t を媒介変数とするとき、

$$\begin{aligned} x &= V_0 t \cos(\alpha + \theta) \\ y &= -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 t \sin(\alpha + \theta) \end{aligned}$$

で与えられる。ただし、 g は重力加速度である。斜面上の到達距離 OP を求めよ。

- (2) 到達距離が最大となる投射角度 θ およびその時の到達距離 OP を求めよ。



(大阪大 2004) (m20043503)

0.799 xy 平面上で、曲線 C は媒介変数 θ を用いて、

$$\begin{aligned} x &= 2a \cos \theta + a \cos 2\theta \\ y &= 2a \sin \theta - a \sin 2\theta \end{aligned}$$

で表される。ただし、 $a > 0$ とする。

この曲線 C によって表される図形について、次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C の概略図を示せ.

(2) 曲線 C に囲まれる図形の面積を求めよ.

(大阪大 2005) (m20053502)

0.800 関数 $f(x)$ を近似する三角多項式

$$P_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

の中で誤差

$$E_N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (P_N(x) - f(x))^2 dx$$

を最小にする

$$\{a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N\}$$

は $f(x)$ のフーリエ係数であることを示せ.

(大阪大 2005) (m20053510)

0.801 閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上で定義された, 1階連続微分可能 (1階導関数が存在して連続) な奇関数 $f(t)$ が与えられている.

(1) 実数列 $\{a_k\}$ を次のように定める: $a_k := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt$, $k = 1, 2, \dots$.

このとき $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ を示しなさい. また $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$ であることを示しなさい.

(2) 上記 (1) で定めた実数列 $\{a_k\}$ に対して, $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ が成立したとすると,

$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) - \sum_{k=1}^N a_k \sin kt \right|^2 dt = 0$ となることを示しなさい. また, この逆も成立することを示しなさい.

(大阪大 2006) (m20063510)

0.802 (1) 空間上の直交座標 (x, y, z) を極座標 (r, θ, φ) :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (r > 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

に変換するとき, そのヤコビアン (関数行列式) を計算しなさい.

(2) 広義積分 $I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} dx dy dz$

について, $\alpha = \frac{1}{2}$ のときの値 $I\left(\frac{1}{2}\right)$ を求めなさい.

(3) $I(\alpha)$ が収束する α の範囲を求めなさい.

(4) 広義積分 $J(\alpha, \beta) = \iiint_B \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha |\log(x^2+y^2+z^2)|^\beta} dx dy dz$

が収束するような α, β の満たすべき条件を求めなさい.

ただし, $B = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < \frac{1}{4} \right\}$.

(大阪大 2007) (m20073506)

0.803 微分方程式

$$x''(t) + ax(t) = \sin t \quad (*)$$

に関する次の問いに答えよ. ただし, 定数 a は実数である.

(1) 微分方程式 $x''(t) + ax(t) = 0$ の一般解を求めよ.

(2) (*) の一般解を求めよ.

(3) $a > 0$ とする. (*) の解 $x(t)$ で条件 $x(0) = \alpha$, $x(1) = \beta$ をみたすものをすべて求めよ. ただし, α, β は実数である.

(大阪大 2007) (m20073509)

0.804 次の積分の値を留数定理を用いて求めよ. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx$

(大阪大 2007) (m20073510)

0.805 (1) 関数 $f(x) = \frac{x^2}{4}$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) を $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ とフーリエ級数に展開したとき, a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), b_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ を示せ.

(大阪大 2007) (m20073511)

0.806 閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x \sin x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

と定義する.

(1) $f(x)$ のフーリエ係数

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を求めよ.

(2) (1) で求めた a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) に対して,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ.

(大阪大 2009) (m20093507)

0.807 微分方程式に関する以下の問いに答えよ.

(1) 微分方程式 $\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 4y = 0$ の一般解を求めよ.

(2) 微分方程式 $\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 4y = \cos \omega t$ の特殊解を $y = P \cos \omega t + Q \sin \omega t$ と表すとき, 係数 P と Q を求めよ. ただし, ω は実数で $\omega > 0$ である.

(大阪大 2010) (m20103503)

0.808 $g(x)$ を周期 2π の連続関数とする. 以下を示せ.

(1) $\lim_{m \rightarrow -\infty} \int_0^{2\pi} g(x) \sin mx \, dx = 0$

(2) 有限三角級数

$$p_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) . \quad n = 1, 2, \dots$$

に対して

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} \int_0^{2\pi} g(x) p_n(mx) dx = a_0 \int_0^{2\pi} g(x) dx$$

(3) 上の $p_n(x)$ が $n \rightarrow +\infty$ で $p(x)$ に $[0, 2\pi]$ 上一様収束するとき

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} \int_0^{2\pi} g(x) p_n(mx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(x) dx \cdot \int_0^{2\pi} g(x) dx$$

(大阪大 2011) (m20113510)

0.809 C は複素平面上の円周 $\{z; |z| = 4\}$, D は $\{z; |z| < 4\}$ とする.

(1) D に円周 C を付け加えた集合 $\bar{D} = C \cup D$ で正則な関数に対するコーシーの積分表示を書け.

(2) 次の複素積分を求めよ.

$$\int_C \frac{ze^z \cos z}{(z - \pi)^2(z + \pi)^2} dz$$

なおコーシーの積分表示では微分と積分が交換可能であることを用いてよい.

(3) 次の複素積分を求めよ.

$$\int_C \frac{ze^z \sin z}{(z - \pi)^2(z + \pi)^2} dz$$

(大阪大 2012) (m20123509)

0.810 (1)

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{\pi} - \cos(x) \right), \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

で定義された周期 2π を持つ関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\}$$

とフーリエ級数に展開したとき,

$$a_n, (n = 0, 1, 2, \dots), b_n, (n = 1, 2, \dots)$$

を求めよ.

(2) (1) の結果を利用して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

の値を求めよ.

(大阪大 2012) (m20123510)

0.811 (1) 以下を示せ.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z}{z^2 + 1} e^{iz} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z}{z^2 - 1} e^{iz} dz = 0$$

ただし, 正の実数 R に対し

$$\Gamma_R = \{Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

であり, 積分の向きは反時計回りにとるものとする.

(2) 積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} \sin x \, dx$$

の値を求めよ.

(3) 積分

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 - 1} \sin x \, dx$$

の値を求めよ.

(大阪大 2013) (m20133506)

0.812 自然数 m, k に対して,

$$A_{m,k} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^m x \cos kx \, dx, \quad A_{0,0} = 2\pi$$

とおく.

(1) 任意の自然数 m, k に対して, 以下の等式を示せ.

$$A_{m,k} = \frac{1}{1 + \frac{k}{m}} A_{m-1, k-1}$$

ただし, $\cos(k-1)x = \cos kx \cos x + \sin kx \sin x$ を用いてもよい.

(2) 自然数 m が与えられたとき, $\cos^{2m-1} x$ のフーリエ級数が

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m a_{2k-1} \cos(2k-1)x$$

の形で表されることを示し, フーリエ級数 a_{2m-1} を求めよ.

ただし, $\cos^{2m-1} x = (\cos x)^{2m-1}$ とする.

(大阪大 2013) (m20133507)

0.813 曲線 C が媒介変数表示 $x = f(s), y = g(s), s \geq 0$ で表される. ただし, $\cosh s = (e^s + e^{-s})/2$, $\sinh s = (e^s - e^{-s})/2$ を用いて

$$f(s) = s - \frac{\sinh s}{\cosh s}$$
$$g(s) = \frac{1}{\cosh s}$$

と定義する. 以下の設問に答えよ.

(1) 定数 $b > 0$ に対して曲線 $C(b)$ が $x = f(s), y = g(s), 0 \leq s \leq b$ で表される. $C(b)$ の長さ $\ell(b)$ を求めよ.

(2) 点 P は時刻 0 で $x = f(0), y = g(0)$ を出発して s が増える方向へ一定の速さで C 上を移動する. 時刻 $t > 0$ までに移動した経路の長さを t とする. 時刻 t における P の位置を $x = f(\varphi(t)), y = g(\varphi(t))$ と表すための関数 $\varphi(t)$ を求めよ

(大阪大 2014) (m20143501)

0.814 $\{f_k(x)\}_{k=1,2,\dots}$ を閉区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義された実数値連続関数の列とする. 二つの条件を考える.

$$\text{条件 1 : } \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < \infty, \quad x \in I$$

$$\text{条件 2 : } \max_{x \in I} \left| \sum_{k=1}^m f_k(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$$

条件1が満たされるとき、関数項級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は I において絶対収束するという。条件2が満たされるとき、関数項級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は I において一様収束するという。以下の問いに答えよ。

(1) $f(x) = |x|$ ($x \in [-\pi, \pi]$) のフーリエ級数

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

を求めよ。

(2) (1) で求めた級数 $s(x)$ が $[-\pi, \pi]$ において絶対収束することを示せ。

(3) (1) で求めた級数 $s(x)$ が $[-\pi, \pi]$ において一様収束することを示せ。

(大阪大 2014) (m20143506)

0.815 ベクトル $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$, $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ に対して, \mathbf{p} , \mathbf{q} の内積, 外積をそれぞれ $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$, $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ と表す。以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$, $\mathbf{C} = (C_x, C_y, C_z)$ に対して, 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

(2) 3つのベクトル $\mathbf{a} = (4, 3, 5)$, $\mathbf{b} = (3, 1, 4)$, $\mathbf{c} = (8, 3, 2)$ が作る平行六面体の体積を求めよ。

(3) 空間内に直交座標系をとる。 \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} をそれぞれ x 軸, y 軸, z 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルとする。

$$\mathbf{e}_r = \cos u \cos v \mathbf{i} + \sin u \cos v \mathbf{j} + \sin v \mathbf{k}$$

とおく。正の定数 R に対して, 原点を中心とした半径 R の球面 S は, 次の位置ベクトル \mathbf{r} で表せる。

$$\mathbf{r} = R\mathbf{e}_r, \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$$

球面 S 上の各点 P における外向き法線ベクトルが, 点 P の位置ベクトルと同じ向きをもつように S の向きを定める。このとき, ベクトル $\mathbf{F} = \frac{u}{R}\mathbf{e}_r$ に対して, S における次の面積分を求めよ。

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

(大阪大 2015) (m20153503)

0.816 以下の問いに答えよ。ただし, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位であり, a, b は $a > b > 0$ を満たす定数とする。

(1) 次の式で表される曲線 C を複素平面上に図示せよ。

$$C: z = z(t) = a \cos t + i b \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(2) (1) で与えられた曲線 C に沿う次の積分の値を求めよ。

$$\int_C \frac{1}{z} dz$$

(3) 次の積分の値を求めよ。

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt$$

(大阪大 2015) (m20153504)

0.817 実数 x に対し $y = \sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ と定義すると $\sinh x$ は逆関数をもつ. そこで逆関数を $\text{sh}^{-1}(x)$ と表す. 以下の設問に答えよ.

- (1) $\text{sh}^{-1}(x)$ を求めよ.
- (2) 正の実数 a について $S(a) = \frac{1}{a} \int_0^a \text{sh}^{-1}(x) dx$ と定義する. $S(a)$ を求めよ.
- (3) $\lim_{a \rightarrow 0} S(a)$ を求めよ.
- (4) $\lim_{a \rightarrow \infty} \{S(a) - \log a\}$ を求めよ.

(大阪大 2015) (m20153505)

0.818 (1) α は整数でない実数とする. $\cos(\alpha x)$ ($-\pi < x < \pi$) をフーリエ級数展開せよ. すなわち

$$\cos(\alpha x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\}, \quad -\pi < x < \pi$$

を満たす

$$a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

を求めよ.

(2) y は $\sin y \neq 0$ を満たす実数とする. (1) の結果を利用して

$$\frac{1}{\sin y} = \frac{1}{y} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{y + n\pi} + \frac{1}{y - n\pi} \right\}$$

が成立することを示せ.

(大阪大 2016) (m20163506)

0.819 θ が $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で変化するとき, $x = 2 \cos \theta$, $y = 2 \sin 2\theta$ で表される点 (x, y) は 1 つの曲線を描く. この曲線の方程式を $y = f(x)$ とする. $y = f(x)$ の 1 点 (a, b) における接線の方程式が $y = -2(x - c)$ となるとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) a, b, c の値をそれぞれ求めよ.
- (2) 区間 $0 \leq x \leq a$ における曲線 $y = f(x)$ と区間 $a \leq x \leq c$ における直線 $y = -2(x - c)$ と x 軸で囲まれる領域を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ.

(大阪大 2017) (m20173501)

0.820 (1) 実 2 変数の実数値関数 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ に対して, 複素変数 z の関数 f を

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (z = x + iy)$$

で定める. $f(0) = 0$ かつ

$$v(x, y) = ye^x \cos y + (x + 1)e^x \sin y$$

であるとき, f が複素平面上で正則となる $u(x, y)$ を求めよ.

(2) $0 < a < 1$ とする. 積分 $\int_0^{2\pi} \frac{1 - a \cos \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} d\theta$ の値を求めよ.

(大阪大 2019) (m20193509)

0.821 (1) 次の (1-1), (1-2) で与えられる, 周期 2π の関数のフーリエ級数をそれぞれ求めよ. すなわち, $f(x)$ が連続な点で

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\}$$

が成り立つような

$$a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

をそれぞれ求めよ.

$$(1-1) \quad f(x) = \cos^2 x + \cos x$$

$$(1-2) \quad f(x) = x \quad (-\pi < x \leq \pi), \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

(2) (1) の結果を利用して, 等式

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

を示せ.

(大阪大 2019) (m20193510)

0.822 原点を中心とした半径 r ($r \neq 0$) の球面 S は媒介変数 u, v (ラジアン単位) を用いて,

$$\mathbf{r}(= \mathbf{r}(u, v)) = r \mathbf{i}_r = r \cos u \cos v \mathbf{i}_x + r \sin u \cos v \mathbf{i}_y + r \sin v \mathbf{i}_z$$

$$(0 \leq u \leq 2\pi, -\pi/2 \leq v \leq \pi/2)$$

と表すことができる. ここで, $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$ は x, y, z 座標のそれぞれの基本ベクトルであり, \mathbf{i}_r は \mathbf{r} 方向の単位ベクトルである.

(1) $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ を r, \mathbf{i}_r, v で表せ.

(2) ベクトル場 $\mathbf{R} = \frac{u^2}{r} \mathbf{i}_r$ とするとき, \mathbf{R} の球面 S に沿う面積分,

$$\iint_S \mathbf{R} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

を求めよ. ただし, \mathbf{n} は S の外向きの単位法線ベクトルとする.

(大阪大 2021) (m20213502)

0.823 $0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \phi < 2\pi$ とする. 3 次の正方行列 A, B を次式で定義し, $C = AB$ とする.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix}$$

なお, 虚数単位は $i (= \sqrt{-1})$ とする. 以下の設問に答えよ.

(1) 行列 C の行列式の値を求めよ.

(2) 行列 C のすべての固有値およびそれらの絶対値を求めよ.

(大阪大 2022) (m20223506)

0.824 $x > 0$ のとき $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ が成り立つことを示せ.

(大阪府立大 2001) (m20013601)

0.825 (1) $z = (1+i)^n - (1-i)^n$ とするとき, $|z|$ を求めよ. ただし, i を虚数単位 ($i^2 = -1$), n は自然数とする.

(2) i を虚数単位 ($i^2 = -1$), $z_m = e^{-imx}$ とするとき $\left| \sum_{m=0}^{n-1} z_m \right|^2 = \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}$ となることを示せ.

ただし, m, n は整数, x は実数である.

(大阪府立大 2005) (m20053603)

0.826 n を 0 以上の整数とし,

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2)^{n/2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

とおく. このとき, 次の問いに答えよ. ただし, 任意の自然数 ℓ に対して, $\lim_{t \rightarrow \infty} t^\ell e^{-t^2} = 0$ となることは証明なしに用いてもよい.

- (1) 極座標への変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を用いて, J_n を r に関する積分のみで表示せよ.
- (2) J_0 の値を求めよ.
- (3) n を 2 以上の自然数とするとき, J_n と J_{n-2} の関係式を求め, さらに J_{10} の値を求めよ.

(大阪府立大 2010) (m20103602)

0.827 x, y は次のような変数 θ の関数である.

$$x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta) \quad (a > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

2次元直交座標系 (x, y) において, x, y が表す曲線 (サイクロイド) と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めなさい.

(大阪府立大 2010) (m20103613)

0.828 関数 $X(r, \theta) = r \cos \theta, Y(r, \theta) = r \sin \theta$ の定義域はいずれも $D = (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 2つの集合

$$A = \{(X(r, \theta_0), Y(r, \theta_0)) \mid r \in (0, \infty)\}, B = \{(X(r_0, \theta), Y(r_0, \theta)) \mid \theta \in (-\pi, \pi)\}$$

を1つの座標平面上に図示せよ. ただし, $\theta_0 \in (-\pi, \pi), r_0 \in (0, \infty)$ は定数である.

- (2) 行列 $J(r, \theta) = \begin{pmatrix} X_r(r, \theta) & Y_r(r, \theta) \\ X_\theta(r, \theta) & Y_\theta(r, \theta) \end{pmatrix}$ とその行列式 $|J(r, \theta)|$ を求めよ. ただし,

$$X_r = \frac{\partial X}{\partial r}, Y_r = \frac{\partial Y}{\partial r}, X_\theta = \frac{\partial X}{\partial \theta}, Y_\theta = \frac{\partial Y}{\partial \theta}$$

である.

- (3) 2つのベクトル $(X_r(r, \theta), Y_r(r, \theta)), (X_\theta(r, \theta), Y_\theta(r, \theta))$ が直交することを示せ.

(大阪府立大 2011) (m20113602)

0.829 次の微分方程式の一般解を求めよ.

- (1) $\frac{dy}{dx} = y^2 - y$
- (2) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = \sin x$

(大阪府立大 2013) (m20133607)

0.830 (1) z を複素数とする. 複素平面上において, 原点を中心として半径 a の円 L を積分路とするとき,

$$\int_L \frac{dz}{z}$$

を計算せよ.

- (2) 複素積分を用いて, 次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{3}{4 - \sin \theta} d\theta$$

(大阪府立大 2017) (m20173603)

0.831 留数を用いて、次の定積分の値を求めよ. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-3\sin\theta} d\theta$
(大阪府立大 2019) (m20193603)

0.832 3次元空間内の単位球を B とおく. すなわち,

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

とする. このとき、次の問いに答えよ.

(1) $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$ とおく. この変数変換のヤコビ行列式を計算せよ.

(2) 定積分

$$\iiint_B (x^2 + y^2) e^{-(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} dx dy dz$$

の値を求めよ.

(大阪府立大 2019) (m20193607)

0.833 パラメータ表示の曲線 $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ の長さを求めよ.
(関西大 2003) (m20033702)

0.834 $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 0$ という関係がある. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ として, $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$ に変数変換せよ. ただし, $f(x, y) = g(r, \theta)$
(神戸大 1994) (m19943801)

0.835 次の微分計算をせよ.

$$(1) \frac{d}{dx}(x \log x - x) \quad (2) \frac{d}{dx}(e^{\sin x}) \quad (3) \frac{d^2}{dx^2}(e^{-x^2})$$

(神戸大 1997) (m19973802)

0.836 公式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を使って、次の (1)~(3) を示せ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{x} = 1$$

$$(3) \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

(神戸大 1998) (m19983801)

0.837 $y = \sin^{-1} x$ のとき、等式 $(1 - x^2)y'' - xy' = 0$ が成り立つかどうか調べよ.

(神戸大 1998) (m19983802)

0.838 次の関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $\partial f / \partial x$, $\partial f / \partial y$ を求め、それらが原点で連続かどうか調べよ.

$$f(x, y) = xy \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$$

(神戸大 2001) (m20013804)

0.839 $f(x, y)$ は何回でも微分できる関数とする. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $g(r, \theta) = f(x, y)$ とするとき、以下の等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

(神戸大 2001) (m20013805)

0.840 $f(x) = \sin^{-1} x$ とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $f'(x), f''(x)$ を求めよ。
- (2) f の n 階微分を $f^{(n)}$ と書くとき、

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2f^{(n)}(x) = 0$$
 となることを示せ。
- (3) $f^{(n+2)}(0) = n^2f^{(n)}(0)$ を示せ。
- (4) $f^{(n)}(0)$ を求めよ。

(神戸大 2003) (m20033801)

0.841 $x = u \cos \alpha - v \sin \alpha, y = u \sin \alpha + v \cos \alpha$ (α は定数) のとき、 x, y に関して 2 階偏微分可能な $z = z(x, y)$ について

- (1) $z_u^2 + z_v^2$ を z の x, y に関する偏導関数を用いて表せ。
- (2) $z_{uu} + z_{vv}$ を z の x, y に関する第 2 次偏導関数を用いて表せ。

ただし、 z_u, z_{uu} は z の u に関する第 1 次および第 2 次偏導関数を表す。

(神戸大 2003) (m20033804)

0.842 次の重積分を計算せよ。

- (1) $\iint_D x dx dy, \quad D: \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, \text{ ただし, } a, b > 0$
- (2) $\iint_D \sin(x+y) dx dy, \quad D$ は 3 直線 $x=0, y=0, x+y=\pi/2$ で囲まれる三角形の内部
- (3) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq a^2$

(神戸大 2003) (m20033806)

0.843 x を 0 でない実数とする。このとき、次の等式を示せ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ 1 + \cos\left(\frac{1}{n}x\right) + \cos\left(\frac{2}{n}x\right) + \cdots + \cos\left(\frac{n-1}{n}x\right) \right\} = \frac{\sin x}{x}$$

(神戸大 2004) (m20043802)

0.844 次の各問に答えよ。

- (1) 積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta d\theta$ の値を求めよ。
- (2) 次の D 上の重積分を、 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ と変数変換することにより求めよ。

$$\iint_D x^2 dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq x\}$$

(神戸大 2004) (m20043805)

0.845 次の計算をなさい。

- (1) $\sin^{-1} x$ を \sin の逆関数とするとき

$$\frac{d}{dx} (\sin^{-1})^2$$
- (2) $\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx \quad (m, n \in Z)$
- (3) $\iint_{x, y \geq 0, x+y \leq 1} xy dx dy$

$$(4) \iint_V e^{-x^2-y^2} dx dy$$

ここで V は第 1 象限 $V = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ を表す.

(神戸大 2005) (m20053802)

- 0.846** $r : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^+$ を連続微分可能な関数とし, (x, y) -平面上の曲線 $x = r(\theta) \cos \theta, y = r(\theta) \sin \theta,$
 $a \leq \theta \leq b$ を α とする. ここで $0 \leq a \leq b \leq \pi/2$. 曲線 α 上の各点と原点を結ぶ線分から出来る扇形
領域の面積を \mathcal{A} , α の長さを \mathcal{L} とするとき

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(r) d\theta, \quad \mathcal{L} = \int_a^b g(r, r') d\theta$$

となる $f(r)$ と $g(r, r')$ を与えよ. さらに $r(\theta) = 1/\cos \theta$ の場合の \mathcal{A} または \mathcal{L} の上記公式を用いて

$$\int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \sqrt{3}$$

を説明せよ.

(神戸大 2006) (m20063804)

- 0.847** (1) 次の関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y$ を計算せよ. \sin^{-1} は \sin の逆関数.

$$(i) f(x, y) = e^{3x} \cos 2y, \quad (ii) f(x, y) = \sin^{-1} \frac{x}{y}$$

- (2) 関数 $f(y_1, y_2)$ が 2 階連続微分可能であるとき, $f(ax_{11} + bx_{12}, ax_{21} + bx_{22})$ (a, b は定数) につ
いて $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{22} \partial x_{11}} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_{21} \partial x_{12}}$ を計算せよ

(神戸大 2006) (m20063805)

- 0.848** 以下の積分の値を求めよ.

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx \quad (m, n \text{ は自然数}) \quad (2) \int_1^e x(\log x)^2 dx \quad (3) \int_0^1 \text{Sin}^{-1} x dx$$

(神戸大 2008) (m20083801)

- 0.849** 微分方程式の初期値問題

$$f''(x) + f(x) = \sin x, \quad f(0) = f'(0) = 0$$

において,

$$F(x) = f(x) \cos x - f'(x) \sin x, \quad G(x) = f(x) \sin x + f'(x) \cos x$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

- (1) $F'(x), G'(x)$ を求めよ. (f を含まない形で表せ.)
- (2) $F(x), G(x)$ を求めよ.
- (3) $f(x)$ を求めよ.

(神戸大 2009) (m20093812)

- 0.850** 次の重積分を計算せよ.

$$(1) \iint_D (x+y)^2 \sin(\pi|x-y|) dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; |x+y| \leq 1, |x-y| \leq 1\}.$$

$$(2) \iint_D \log(1+x^2+y^2) dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x+y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}.$$

(神戸大 2011) (m20113806)

0.851

$$f(x) = \tan x - \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

- (1) $f'(x)$ を求めよ.
- (2) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき, $f(x) > 0$ を示せ.
- (3) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき, $\sin x < \tanh(\tan x)$ を証明せよ.

(ただし, 任意の実数 t に対して, $\tanh t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ である.)

(神戸大 2011) (m20113807)

0.852 $f(u, v) = u^3 - 3uv^2$, $g(u, v) = 3u^2v - v^3$, $u = (e^y + e^{-y}) \cos x$, $v = (e^{-y} - e^y) \sin x$ のとき, 偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}$ を計算せよ.

(神戸大 2012) (m20123802)

0.853 $g(x)$ を \mathbb{R} 上定義された 2 回微分可能な関数とし, \mathbb{R} 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} g(x) + x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ g(0) & x = 0 \end{cases}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) $x \neq 0$ として $f'(x)$ を求めよ.
- (2) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示し, $f'(0)$ を求めよ.
- (3) $f'(x)$ は $x = 0$ で微分可能でないことを示せ.

(神戸大 2013) (m20133806)

0.854 $f(x, y) = \frac{\sin x}{\cos x + \cosh y}$ に対して, $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(x, y) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x, y)$ を計算せよ.

ただし, $\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$ である.

(神戸大 2016) (m20163803)

0.855 $D_0(x) \equiv 1$, $D_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n 2 \cos kx$ ($n \geq 1$), $F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x)$ ($n \geq 0$) で \mathbb{R} 上の関数列 $\{D_n\}$ と $\{F_n\}$ を定義する. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $D_n(x) \sin \frac{x}{2} = \sin \left(n + \frac{1}{2}\right)x$ となることを示せ.
- (2) $F_n(x) \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2(n+1)} \{1 - \cos(n+1)x\} = \frac{1}{n+1} \sin^2 \frac{n+1}{2}x$ となることを示せ.
- (3) $\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y) dy = 2\pi$ となることを示せ.
- (4) $0 < \delta < \pi$ なる δ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} F_n(y) dy = 0$ となることを示せ.

(神戸大 2016) (m20163805)

0.856 xy 平面上に 4 点 $P = (0, \pi)$, $Q = (\pi, 0)$, $R = (2\pi, \pi)$, $S = (\pi, 2\pi)$ をとり, 四辺形 $PQRS$ で囲まれた領域 (周上の点も含む) を D とする. 関数 $f(x, y) = \cos x + \sin y$ について以下の各問に答えよ.

- (1) D の内部における $f(x, y)$ の極値を調べよ.
 (ここで, D の内部とは D から周上の点を除いた領域である.)
- (2) D における $f(x, y)$ の最大値と最小値を求めよ.

(神戸大 2016) (m20163808)

- 0.857** (1) $x = \sin^2 \theta$ と変数変換して, 次の積分の値を求めよ. $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$
- (2) 次の xy 平面上の領域 D を図示せよ. $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x + y \leq 4, 0 \leq x, 0 \leq y\}$
- (3) 変数変換 $x = st, y = s(1-t)$ により, 次の st 平面上の領域 E が (2) の領域 D に 1 対 1 に写されることを示せ. $E = \{(s, t) \mid 1 \leq s \leq 4, 0 \leq t \leq 1\}$
- (4) 次の重積分の値を求めよ. ただし, D は (2) で定義した領域とする. $\iint_D \sqrt{\frac{x}{y(x+y)}} dx dy$

(神戸大 2016) (m20163809)

0.858 $f(x, y) = \sin(xy)$ とする. 以下の各問いに答えよ.

- (1) f の 1 階と 2 階の偏導関数を全て求めよ.
- (2) f のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ.
- (3) f の極値を調べよ.

(神戸大 2017) (m20173809)

- 0.859** (1) \mathbb{R}^2 で定義された関数 $g(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy$ の臨界点を全て求め, それぞれの点で関数が極値をとるかどうか判定せよ.
- (2) \mathbb{R}^2 で定義された関数 $f(x, y)$ が回転対称であるとき, $x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ を満たすことを示せ. ただし, $f(x, y)$ が回転対称であるとは, 任意の $x, y, \theta \in \mathbb{R}$ に対し

$$f(x, y) = f(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)$$

を満たすことをいう.

(神戸大 2018) (m20183803)

0.860 xy 平面上の 4 点 $P = (1, 0), Q = (3, 0), R = (1, 2\pi), S = (3, 2\pi)$ を頂点とする長方形で囲まれた (境界以上の点も含む) 領域を D とする. 関数 $f(x, y) = (4x - x^2)(\sin y + 2)$ を考える. 以下の各問いに答えよ.

- (1) D の内部における $f(x, y)$ の極値を求めよ. ただし, D の内部とは D から D の境界上の点を除いた領域である.
- (2) D における $f(x, y)$ の最大値と最小値を求めよ.

(神戸大 2019) (m20193803)

0.861 (1) xy 平面上の領域

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$$

が極座標変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) によって対応する θr 平面上の領域を E とする. D と E を図示せよ.

(2) xyz 空間内の領域 A, B を次のように定める.

$$A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, 0 \leq z\}$$

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$$

A と B の共通部分の体積を求めよ.

(神戸大 2020) (m20203804)

0.862 (1) a を実数の定数とする. x, y の関数

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} + axy + \frac{y^4}{4}$$

の停留点 $\left(\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ かつ } \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ となる点} \right)$ を求め, それらが f の極大値を与える, 極小値を与える, 極値を与えないのどれであるか判定せよ.

(2) x, y の関数 u, v を

$$u = xy$$

$$v = e^{x^2+y^2}$$

で定める. x, y の関数

$$g(x, y) = \sin(uv)$$

に対して, $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$ を x, y で表せ.

(神戸大 2022) (m20223805)

0.863 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ がべき級数展開可能であるとき, $f(x)$ を点 a のまわりでテイラー級数に展開せよ.

(2) (1) で求めた結果を利用して, $f(x)$ が $x = a$ で極値をとるための必要条件と十分条件を示し, その理由を説明せよ. ただし, $f''(a) \neq 0$ とする.

(3) $f(x) = \sin x$ を $x = 0$ のまわりでテイラー級数展開せよ.

(鳥取大 2000) (m20003903)

0.864 $z = f(x, y), x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, f$ は C^1 級なるとき, 次式を証明せよ.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2$$

(鳥取大 2000) (m20003904)

0.865 (1) $x > 0$ において, 不等式 $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ を証明せよ.

(2) $\sin x$ をマクローリン展開し, はじめの 4 項を書け.

(3) 前問 (2) の結果をも使って, 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ を求めよ.

(鳥取大 2001) (m20013903)

0.866 飛行している物体の時刻 t での位置座標 (x, y, z) が次式で与えられる.

$$x = a \sin t$$

$$y = a \cos t$$

$$z = bt$$

ただし, a, b は定数である. 次の問いに答えなさい.

- (1) この物体の速度の大きさを求めなさい.
 (2) この物体が $1 \leq t \leq 3$ の間に飛行した軌跡の長さを求めなさい.

(鳥取大 2004) (m20043905)

0.867 次の計算をせよ.

(1) $\frac{d}{dx}(2x+3)^n$ (2) $\frac{d}{dx}\sin^2(x/3)$ (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

(鳥取大 2005) (m20053901)

0.868 微分可能な関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義式 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ を用いて、以下の微分公式を証明せよ.

- (1) $y(x) = u(x)v(x)$ の微分 : $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
 (2) $y(x) = \sin(x)$ の微分 : $y'(x) = \cos(x)$ ただし、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を利用してもよい.

(鳥取大 2006) (m20063901)

0.869 (1) $Z = f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$, $x = e^t$, $y = \log_e(t)$ のとき、 dZ/dt を t の関数として求めよ.
 (2) xy 平面上の点 (x, y) が $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ で表される曲線上を動くとき、関数 $Z = f(x, y) = x + 2y + 5$ が極値をとる点 (x, y) とその極値を求めよ (偏微分の手法を用いて解答すること).

(鳥取大 2006) (m20063902)

0.870 次の関数の導関数を求めよ. (注 : 対数の底は e (自然対数) とする.)

(1) $y = (2 - x^2)^3$ (2) $y = \log \sin x$ (3) $y = x^x$

(鳥取大 2007) (m20073901)

0.871 次の関数の極限值を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin bx}{\sin ax}$ ($a \neq 0, b \neq 0$) (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{x}$

(鳥取大 2007) (m20073902)

0.872 次の定積分の値を求めよ. (注 : 対数の底は e (自然対数) とする.)

(1) $\int_1^e \frac{\log x}{x} dx$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$

(鳥取大 2007) (m20073904)

0.873 $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ とおくとき、次の式が成り立つことを示せ.

(1) $R(\alpha)R(\beta) = R(\beta)R(\alpha) = R(\alpha + \beta)$ (2) $R(-\alpha) = R(\alpha)^{-1}$

(鳥取大 2007) (m20073914)

0.874 次の関数の与えられた領域における最大値と対応する座標を求めよ.

(1) $f(x) = \frac{1}{\sin x + 1} + \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$.
 (2) $g(x, y) = -x^2 - x - y^2$, $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$.

(鳥取大 2008) (m20083903)

0.875 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1) \frac{dy}{dx} + 3xy = 0 \qquad (2) \frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = \sin 2x$$

(鳥取大 2008) (m20083907)

0.876 以下の (1)(2)(3) の関数について、それぞれ x で微分せよ。ただし a, b は正の定数とする。

$$(1) \sin(ax + b), \quad (2) \sin^{-1}(ax), \quad (3) x^x \quad (x > 0),$$

(鳥取大 2010) (m20103901)

0.877 2次元において直交座標 (x, y) と極座標 (r, θ) には、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

の関係式がある ($r > 0, 0 < \theta \leq 2\pi$) ; これについて、以下の問に答えよ。

(1) r を x, y のみの関数として表せ。また、 θ を x, y のみの関数として表せ。

(2) 以下の偏微分をそれぞれ計算せよ。

$$(2a) \frac{\partial x}{\partial r} \qquad (2b) \frac{\partial r}{\partial x} \qquad (2c) \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

(鳥取大 2010) (m20103902)

0.878 サイクロイド : $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ ($a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi$) の長さ L を求めよ。

(鳥取大 2010) (m20103905)

0.879 次の問に答えよ。

(1) サイクロイド : $x = \theta - \sin \theta, y = 1 - \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。

(2) 曲線 $y = 2x^2$ と直線 $y = x$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに回転したときに得られる立体の体積を求めよ。

(鳥取大 2011) (m20113904)

0.880 不定積分 $\int e^x \sin x dx$ を求めよ。

(鳥取大 2011) (m20113906)

0.881 (1) n を正の整数とする。このとき、

$$\sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x \quad (0 \leq x \leq \pi/2)$$

が成り立つことを示せ。

(2) $\sin^0 x = 1$ ($0 \leq x \leq \pi/2$) と定め、 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ とおく。

このとき、 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ($n \geq 2$) が成り立つことを示せ。

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \right)^2$ を求めよ。

(岡山大 2003) (m20034001)

0.882 関数 $a_{m,n}(x)$ ($m, n \in \mathbb{N}$) を

$$a_{m,n}(x) = \cos^{2n}(m!\pi x)$$

とし、関数 $g_m(x)$ ($m \in \mathbb{N}$) および $f(x)$ を

$$g_m(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{1 + a_{m,n}(x)}$$

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(x)$$

で定める。以下の問に答えよ。

- (1) x が無理数のとき $g_m(x)$ を求めよ.
- (2) x が有理数のとき $f(x)$ を求めよ.
- (3) $f(x)$ は $x = 0$ で連続であることを示せ.
- (4) $f(x)$ は $x = 0$ で微分不可能であることを示せ.

(岡山大 2013) (m20134001)

0.883 関数 $f_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}$) を

$$f_n(x) = c_n \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right)^n$$

で定める. ただし, c_n は正の定数で

$$\int_0^\pi f_n(x) dx = 1$$

となるように選ぶ. 以下の問いに答えよ.

- (1) $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right)^n \sin x dx$$

を求めよ.

- (2) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $c_n < \frac{n+1}{2}$ が成り立つことを示せ.
- (3) $0 < x \leq \pi$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ を求めよ.

(岡山大 2016) (m20164001)

0.884 (1) 次の積分を計算せよ. ただし, n, m は自然数である.

$$\int_{-1}^1 x \sin n\pi x dx \quad \int_{-1}^1 \sin n\pi x \sin m\pi x dx$$

- (2) 次の等式を示せ.

$$\int_{-1}^1 \left\{ x - \sum_{k=1}^n \frac{2(-1)^{k-1}}{k\pi} \sin k\pi x \right\}^2 dx = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

(広島大 2001) (m20014102)

0.885 $p > 0$ を定数とし, \mathbb{R} 上の関数 f を, $f(x) = \begin{cases} x^p \sin \frac{1}{x^2} & (x > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ で定義する.

- (1) f は \mathbb{R} 上で連続であることを示せ.
- (2) f が \mathbb{R} 上で微分可能となるような p の値の範囲を求めよ.
- (3) f が \mathbb{R} 上で微分可能で, さらにその導関数が連続となるような p の値の範囲を求めよ.

(広島大 2006) (m20064101)

0.886 a, b は実定数で $a \neq 0$ とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 不定積分 $\int e^{ax} \sin bx dx$, $\int e^{ax} \cos bx dx$ を求めよ.

- (2) 1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + ay = \cos bx \quad (*) \tag{*}$$

の一般解を求めよ.

- (3) 初期値 $y(0)$ がどのような値であっても, $x \rightarrow \infty$ のとき微分方程式 (*) の解 $y(x)$ が収束するための必要十分条件を a と b を用いて表せ.

(広島大 2006) (m20064105)

- 0.887** (1) 実数 t に対して, $t = \tan \theta$ かつ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$
 を満たす θ として, 関数 $\theta = \arctan t$ を定める. このとき, $\frac{d}{dt}(\arctan t)$ を求めよ.
- (2) 不定積分 $\int (x + \sqrt{x^2 + 1})^n dx$ を $x = \sinh t$ と変数変換することにより求めよ.
 ただし, n は 2 以上の自然数とし, $\sinh t$ は $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ とする.
- (3) α と R を実数とし, $R \geq 1$ と仮定する. 領域 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$ における
 重積分 $\iint_D x^2(x^2 + y^2)^\alpha dx dy$ の値を求めよ.
- (広島大 2008) (m20084101)

0.888 次の微分方程式を解け.

- (1) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$, 初期条件 $\left(t = 0 \text{ のとき, } x = 1 \text{ かつ } \frac{dx}{dt} = 0\right)$
- (2) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = \sin 3t$, 初期条件 $\left(t = 0 \text{ のとき, } x = 0 \text{ かつ } \frac{dx}{dt} = 0\right)$
- (広島大 2008) (m20084107)

0.889 2 次の実正方行列全体のなすベクトル空間を V とし, その任意の元 A, B に対して

$$(A, B) = \text{tr}({}^tAB),$$

とおく. ただし, tA は A の転置行列とし, $\text{tr} C$ は行列 C のトレースとする. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) (A, B) は内積であることを示せ.
- (2) A と B が
- $$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$
- で与えられているとき, (A, B) を求め, さらに A と B のなす角 θ を求めよ.
 ただし, $0 \leq \alpha - \beta \leq \pi$ とする.
- (3) (2) で定義した A に対して, 線形写像 $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(X) = (A, X)$ ($X \in V$) で定義する. このとき $\text{Ker} f$ の次元を求め, $\text{Ker} f$ の正規直交基底を 1 組求めよ.
- (広島大 2009) (m20094104)

- 0.890** (1) 関数 $e^x, \sin x, \log(1+x)$ をそれぞれ $x=0$ のまわりでテイラー展開せよ.
- (2) 積分 $\int_0^\infty xe^{-x^2} dx$ を求めよ.
- (3) 関数 $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ の極値を求めよ.
- (広島大 2010) (m20104101)

0.891 以下の問いに答えよ.

- (1) 無限級数 $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ が発散することを示せ.
- (2) 無限級数 $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\log(n+1)}$ の収束・発散を調べよ.
- (3) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log(1+x)} \right)$ を求めよ.

(4) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ を求めよ.

(広島大 2012) (m20124102)

0.892 $\sin ax$ のテーラー展開を x^5 の項まで求めよ. a は 0 でない実定数とする.

(広島大 2013) (m20134101)

0.893 以下の各命題について, 正しければ証明し, 正しくなければ反例を用いてそのことを説明せよ.

- (1) 区間 $(0, \infty)$ 上で微分可能な関数 $f(x)$ が $x = a$ で最大値を取るならば, $f'(a) = 0$ を満たす.
- (2) 区間 $[0, \infty)$ 上で微分可能な関数 $f(x)$ が $x = a$ で最大値を取るならば, $f'(a) = 0$ を満たす.
- (3) 区間 $I = [0, 1]$ 上の非負値連続関数 $f(x)$ が $\int_0^1 f(x)dx = 0$ を満たすならば, 任意の $x \in I$ に対し $f(x) = 0$ となる.
- (4) 区間 $I = [0, 1]$ 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ と I 上の関数 $f(x)$ に対し, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ が任意の $x \in I$ で成り立つとする. このとき, $f(x)$ も I 上の連続関数である.
- (5) \mathbb{R}^2 上の関数

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

は, 原点 $(0, 0)$ において連続である.

(広島大 2013) (m20134106)

0.894 実数 ℓ に対して \mathbb{R}^2 上の関数 $f(x, y)$ を次で定める.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^4 + y^4)}{(x^2 + y^2)^\ell}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

以下の問いに答えよ.

- (1) f が原点 $(0, 0)$ において連続であるための ℓ の条件を求めよ.
- (2) f が原点 $(0, 0)$ で x について偏微分可能であるための ℓ の条件を求めよ.
- (3) $\ell = 1$ のとき, 極限

$$J = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} f(x, y) dx dy$$

を考える. 変数変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ により, J は

$$J = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \frac{\sin(r^4 \varphi(\theta))}{r} dr \right) d\theta$$

となることを示せ. ここで, $\varphi(\theta) = \cos^4 \theta + \sin^4 \theta$ である.

- (4) $\ell = 1$ のとき (3) の極限 J が存在することを示し, その値を求めよ.
その際, 広義積分 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ は収束し, その値が $\frac{\pi}{2}$ であることを用いても良い.

(広島大 2014) (m20144110)

0.895 (1) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0), \end{cases}$ とする.

(a) $f(x)$ が \mathbb{R} で微分可能であることを示せ.

- (b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が $x = 0$ で連続であるか否か理由もつけて答えよ.
- (2) $g(x)$ は開区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の微分可能な関数とし, $a, b \in I$ は $a < b$ を満たすとする.
- (a) $g'(a) < 0 < g'(b)$ とする. $g(x)$ は $a < \xi < b$ を満たすある $\xi \in \mathbb{R}$ で閉区間 $[a, b]$ での最小値をとることを示せ. また $g'(\xi)$ を求めよ.
- (b) $g'(a) < k < g'(b)$ を満たす任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して, $g'(\eta) = k$, $a < \eta < b$ を満たす $\eta \in \mathbb{R}$ が存在することを示せ.
- (c) $g'(x)$ が I で狭義単調増加であるならば, $g'(x)$ は I で連続であることを示せ.

(広島大 2015) (m20154105)

- 0.896** (1) 2 以上の自然数 n に対して,

$$\int \cos^n \frac{x}{3} dx = \frac{3}{n} \cos^{n-1} \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} \frac{x}{3} dx$$

が成り立つことを示せ.

- (2) $f(\theta) = \cos^3 \frac{\theta}{3}$ とし, xy 平面上の曲線

$$C : \begin{cases} x = f(\theta) \cos \theta \\ y = f(\theta) \sin \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

を考える. 次の (i), (ii), (iii) に答えよ.

- (i) C の概形を図示せよ (x 軸, y 軸との交点の座標も記すこと).
- (ii) C の長さを求めよ.
- (iii) C で囲まれた部分の面積を求めよ.

(広島大 2016) (m20164102)

- 0.897** 逆正弦関数 $f(x) = \sin^{-1} x$ を考える. ただし, f の値域は閉区間 $[-\pi/2, \pi/2]$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 開区間 $(-1, 1)$ において f の導関数 f' を求めよ.
- (2) $n = 0, 1, 2, \dots$ と $-1 < x < 1$ に対して,

$$(1 - x^2)f^{(n+2)}(x) = (2n + 1)xf^{(n+1)}(x) + n^2f^{(n)}(x)$$

が成り立つことを示せ. ただし, $f^{(n)}$ は f の n 次導関数を表す.

- (3) $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して, $\frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n)!} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ であることを示せ. ただし, $0! = 1$ とする.
- (4) F は開区間 $(-1, 1)$ 上の C^∞ 級関数とする. 自然数 N と $N + 1$ 個の実数 a_0, a_1, \dots, a_N に対して, $g_N(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k$ と定める. ただし, $x^0 = 1$ とする. このとき,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - g_N(x)}{x^N} = 0$$

となるための必要十分条件は, $a_k = \frac{F^{(k)}(0)}{k!}$ ($k = 0, 1, \dots, N$) であることを示せ.

- (5) 自然数 N に対して, $S_N = \sum_{k=0}^N \frac{(2k)!(2N - 2k)!}{(k!)^2((N - k)!)^2}$ を求めよ.

(広島大 2016) (m20164104)

- 0.898** (1) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ ($a > 0$) のとき, $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ. ただし, 途中の計算式も解答用紙に明記すること.
- (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$ の値を求めよ. ただし, 途中の計算式も解答用紙に明記すること.
- (広島大 2016) (m20164109)

- 0.899** $\int \frac{1}{\sin x} dx$ について, $t = \tan \frac{x}{2}$ と置換することによって計算せよ.
- (広島大 2016) (m20164110)

0.900 実数 x に対し,

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

と定義する. 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x) = \tanh x$ のグラフを描け. 増減表を書き, 変曲点があればすべて求めること.

(2) $|f(x)| \leq \frac{4}{5}$ を満たす x からなる区間を求めよ.

(3) $f''(x) + 2f(x)(1 - f(x)^2) = 0$ が成り立つことを示せ.

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)^2 dx$ を求めよ.

(広島大 2017) (m20174102)

0.901 (1) n を自然数として, $\sin x$ の n 次導関数が $\sin(x + a_n)$ となるような実数 a_n を一つ求めよ.

(2) 数列 $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ が存在して, 任意の実数 x と任意の自然数 n に対して

$$\left| \sin x - \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k \right| \leq \frac{|x|^n}{n!} \quad \text{が成り立つ. } b_k \text{ を求めよ.}$$

(3) $0.841 < \sin 1 < 0.842$ であることを示せ.

(4) $\sin 1$ は無理数であることを示せ.

(広島大 2017) (m20174104)

0.902 xy 平面上において, θ を変数として, 座標 x, y が, $x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$ で与えられる曲線を, サイクロイドと呼ぶ. ここで, a は定数である. $\theta \geq 0$ におけるこの曲線上で, x 軸に対する曲線の傾きが 0 となる点 (x, y) のうち, 原点 $(x = 0, y = 0)$ に最も近い点を (x_1, y_1) , 2 番目に近い点を $(x_2, y_2), \dots, n$ 番目に近い点を (x_n, y_n) とする. x_n, y_n を求めよ.

(広島大 2018) (m20184109)

0.903 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x(1 - \cos x)}$ を求めよ.

(2) x の関数 $x^2 e^x$ の n 次導関数を求めよ. ただし, n は 2 以上の整数とする.

(3) $z = f(x, y), x = g(t), y = h(t)$ がそれぞれ C^2 級の関数であるとき, $\frac{d^2 z}{dt^2}$ を求めよ.

(広島市立大 2007) (m20074201)

0.904 $I_n(x)$ が次の式で定義されるとき, 以下の問いに答えよ. ただし, n は 0 以上の整数とする.

$$I_n(x) = \int_0^x \sin^n t dt$$

(1) $I_0(x), I_1(x), I_2(x), I_3(x)$ をそれぞれ求めよ.

(2) 等式 $\sin^n t = \sin^{n-1} t \cdot \sin t$ を用いて, n が 2 以上のとき, $I_n(x)$ の漸化式を求めよ.

0.905 2重積分 $S = \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$, $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ を求めることによって,

$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ を求めたい. このとき以下の問いに答えよ.

(1) $S = I^2$ を示せ.

(2) $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ と変数変換して S を求めよ. また, I を求めよ.

(広島市立大 2008) (m20084201)

0.906 (1) $h(x) = x^2 \sin^2 x$ の1次導関数 $h'(x)$, 2次導関数 $h''(x)$, 3次導関数 $h'''(x)$ を求めよ.

(2) x の関数 $\log(1+x)$ の n 次導関数を求めよ. ただし, $x > -1$ とする.

(3) $\log \frac{1-x}{1+x}$ のマクローリン展開を求めよ. ただし, $|x| < 1$ とする.

(広島市立大 2009) (m20094201)

0.907 関数 $z = e^x(\cos x + \sin y)$ の偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.

(広島市立大 2010) (m20104201)

0.908 $\int_0^{2\pi} e^{-x} |\sin x| dx$ を求めよ.

(広島市立大 2010) (m20104202)

0.909 変数変換 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を用いて, 2重積分

$$S = \iint_D e^{x^2+y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

の値を求めよ.

(広島市立大 2010) (m20104203)

0.910 $x = 1 - 2t$, $y = e^{2t} \sin t$ とする.

(1) $\frac{dx}{dt}$ と $\frac{dy}{dt}$ を求めよ.

(2) $\frac{dy}{dx}$ を求めよ.

(3) $\frac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ.

(広島市立大 2011) (m20114201)

0.911 2変数関数 $f(x, y) = \sin(x + 2y)$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) f の勾配ベクトル $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ を求めよ.

また, 勾配ベクトルの具体的な値を $(0, 0)$, $(0, \pi/4)$, $(0, \pi/2)$ において求めよ.

(2) 座標平面上の4点 $(0, 0)$, $(0, \pi/2)$, $(\pi, 0)$, $(\pi, -\pi/2)$ を頂点とする平行四辺形が定める領域を D

とする (図1). 2重積分 $\iint_D |f(x, y)| dx dy$ の値を求めよ.

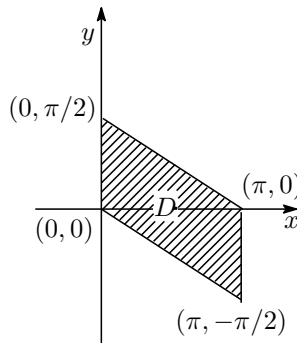


図 1

(広島市立大 2012)

(m20124204)

0.912 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \leq \sqrt{3}y\}$ とおく.

変数変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を用いて,

$$\iint_D xy^2 dx dy$$

を求めよ.

(広島市立大 2013)

(m20134202)

0.913 $\sqrt{3} \sin x + \cos x$ を $r \sin(x + \alpha), r > 0$ の形に表せ.

(山口大 2001)

(m20014302)

0.914 次の式を $r \sin(x + \alpha), -\pi < \alpha \leq \pi$ の形に表せ.

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x$$

(山口大 2001)

(m20014306)

0.915 双曲線関数 $\sinh(x), \cosh(x)$ および $\tanh(x)$ は次のように定義される.

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

(1) $\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$ を証明しなさい.

(2) $y = \tanh(x)$ のグラフを描きなさい.

(山口大 2001)

(m20014308)

0.916 (1) 不定積分 $\int x \log x dx$ を求めなさい.

(2) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^3 x dx$ を求めなさい.

(山口大 2001)

(m20014310)

0.917 x が非常に小さいとき, x の 3 次の項までの展開式で次の関数を近似しなさい.

(1) $\sin x$

(2) e^x

(山口大 2001)

(m20014311)

0.918 積分 $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx$ を求めなさい.

(山口大 2002)

(m20024301)

0.919 行列 $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ について

(1) 逆行列 $A(\theta)^{-1}$ を求めなさい.

(2) $A(\theta_1 + \theta_2) = A(\theta_1)A(\theta_2)$ を示しなさい.

(3) $A(\theta)A(-\theta) = I$ (I は単位行列) を示しなさい.

(山口大 2002) (m20024303)

0.920 θ の範囲が $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, θ の関数 $y = 2 \cos 2\theta + 4 \sin \theta + 1$

の最大値と最小値を求めなさい. また, そのときの θ の値を求めなさい.

(山口大 2003) (m20034301)

0.921 ド・モアブルの法則 $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ を数学的帰納法で証明しなさい.

(山口大 2003) (m20034304)

0.922 (1) $y = e^x \sin x$ の dy/dx を求めなさい.

(2) $y = (x + \log x)^2$ の dy/dx を求めなさい.

(山口大 2003) (m20034305)

0.923 次の等式を満たす $f(x)$ を求めよ.

$$f(x) = \sin x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cos t dt$$

(山口大 2004) (m20044304)

0.924 $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ の逆行列を求めなさい.

(山口大 2004) (m20044308)

0.925 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\int \sin^3 x \cos x dx$

(2) $\int x \cos ax dx$

(3) $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$

(山口大 2005) (m20054306)

0.926 定積分

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を求めなさい.

(山口大 2005) (m20054309)

0.927 $f(x) = \tan^{-1} x$ のとき, 次の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の導関数を求めよ.

(2) 次の等式を数学的帰納法により証明せよ. ただし, $y = f(x)$ とする.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (n-1)! \cos^n y \sin \left(ny + \frac{n\pi}{2} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(3) $f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$ とすると, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$f^{(2m)}(0) = 0, \quad f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m (2m)! \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

(4) 関数 $f(x)$ をマクローリン展開せよ.

(5) 次の等式を証明せよ.

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1}$$

(山口大 2005) (m20054311)

0.928 (1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx$ (n : 整数) をそれぞれ求めなさい.

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx$ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx$ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx$ (n, m : 正整数) をそれぞれ求めなさい.

(3) 周期 2π をもち, $f(x) = \begin{cases} -\pi/4 & (-\pi < x < 0 \text{ のとき}) \\ \pi/4 & (0 < x < \pi \text{ のとき}) \end{cases}$ で定義される関数をフーリエ級数に展開しなさい.

(山口大 2007) (m20074301)

0.929 次の定積分の値を求めなさい.

(1) $\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt{x}} dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$

(山口大 2009) (m20094305)

0.930 方程式 $x^2 = 2 \sin x$ の $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲における実数解の個数を, 関数 $f(x) = x^2 - 2 \sin x$ の増減表と概略図を作成することにより示しなさい.

(山口大 2010) (m20104304)

0.931 θ の範囲が $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, 次の θ の関数

$$y = \frac{1}{4}(\cos 2\theta)^2 - \frac{7}{3}(\sin \theta)^3 + \frac{3}{4}$$

の増減表を作成し, グラフの概形を描きなさい.

(山口大 2014) (m20144304)

0.932 下に示す関数 y の最大値および最小値を求めなさい. また, そのときの θ の値を求めなさい.

$$y = \cos^2 \theta + \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

(山口大 2015) (m20154303)

0.933 $0 \leq x \leq \pi$ のとき, 2つの曲線 $y = -\sin x$ と $y = \sin 2x$ で囲まれた図形の面積を求めなさい.

(山口大 2018) (m20184304)

0.934 $f(x) = \sin(\sin(\sin x))$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(徳島大 1998) (m19984401)

0.935 次の極限值を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x)^{\frac{1}{x}}$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} \quad (n \text{ は正の整数}) \qquad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin^{-1} x}{x^3}$$

(徳島大 1999) (m19994401)

0.936 次の問に答えよ.

(1) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とする. このとき, 行列式 $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を r, θ で表せ.

(2) (1) で求めた J に対して, $I = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty f(r \cos \theta, r \sin \theta) J dr$ であることを用いて, $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ のとき I の値を求めよ.

(徳島大 1999) (m19994402)

0.937 (1) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^2}$ を求めよ.

(2) 自然数 n と 0 でない定数 c に対して $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^n} = c$ となるとき, 自然数 n と 0 でない定数 c の値を求めよ.

(徳島大 2000) (m20004401)

0.938 $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 1 - \cos \theta & 1 & \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$ とする.

(1) $A(\theta)$ が正則であることを示せ.

(2) 1 が $A(\theta)$ の固有値であることを示せ.

(3) $A^2(\theta) (= A(\theta)A(\theta))$ に対して, $A^2(\theta) = A(m\theta)$ となる自然数 m を求めよ.

(徳島大 2003) (m20034404)

0.939 $y = y(x)$ が微分方程式 $y'' + 2y' + 5y = 0$ を満たす. 次の問に答えよ.

(1) 微分方程式の一般解を求めよ. ただし, 最終結果に複素数が現れてはならない. (必要ならオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を用いてもよい.)

(2) 初期条件 $y(0) = y'(0) = -e^{\frac{3}{4}\pi}$ を満たす微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた $y(x)$ に対し, $y\left(\frac{3}{4}\pi\right)$ と $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$ を求めよ.

(徳島大 2005) (m20054404)

0.940 $x \neq 0$ として, $f(x) = \frac{\sin(2x)}{x}$ を考える.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ を求めよ.

(2) $f'(x)$ を求めよ.

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ を求めよ.

(徳島大 2007) (m20074402)

0.941 次の連立微分方程式の一般解 $x = x(t), y = y(t)$ を求めよ.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \sin t \\ \frac{dy}{dt} = x \cos t + y \sin t \end{cases}$$

(徳島大 2008) (m20084404)

0.942 (1) $f(x)$ は微分可能で $f'(x)$ は連続とする. このとき, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 f(x) - x^2 f(a)}{x - a}$ を求めよ.

- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x+1}$ を求める次の計算の誤りを指摘せよ.

$$\text{ロピタルの定理を用いて } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)'}{(x+1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{1} = 0$$

(徳島大 2009) (m20094402)

- 0.943** (1) $f(x, y) = x + y + \sin(x^2 + y^2)$ に対して偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ を求めよ.

- (2) $a > 0$ に対して $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq a^2\}$ とするとき, 2重積分 $\iint_D f_y(x, y) dx dy$ を求めよ.

(徳島大 2009) (m20094403)

- 0.944** (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + \sin x - 3^x + 5x}{x}$ を求めよ.

- (2) $f(x) = \sin^3(4x + 3)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(徳島大 2010) (m20104402)

- 0.945** 変数変換 $t = \tan \frac{\theta}{2}$ を利用して, $\int_0^\pi \frac{1}{1 + \sin \theta} d\theta$ を求めよ.

(徳島大 2010) (m20104403)

- 0.946** $0 < a < 1$, $D_a = \left\{ (x, y); a^2 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{a^2} \right\}$ とする.

- (1) $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とする. 行列式 $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を r, θ で表せ.

- (2) $I(a) = \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ を求めよ.

- (3) $\lim_{a \rightarrow 0} I(a)$ を求めよ.

(徳島大 2010) (m20104404)

- 0.947** 次の極限值を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{x^2 - \pi^2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 - e^{-x})}{\sin x - x \cos x}$

(徳島大 2012) (m20124406)

- 0.948** n は自然数とする.

- (1) $\sin(n+1)x - \sin(n-1)x = 2 \cos nx \sin x$ を示せ.

(2) $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin(n+1)x - \sin(n-1)x}{\sin x} dx$ を求めよ.

(3) $J_n = \int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x} dx$ を求めよ.

(徳島大 2013) (m20134403)

- 0.949** $D = \{(x, y); x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq 1\}$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) $u = x + y$, $v = \frac{y}{x+y}$ とおく. x, y を u, v の式で表せ. また, 行列式 $J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(2) $\int_0^1 v \sin(\pi v) dv$ を求めよ.

(3) $f(x, y) = \frac{y}{x+y} e^{-(x+y)} \sin\left(\frac{\pi y}{x+y}\right)$ に対して, $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ を求めよ. ここで, (1) の変換により $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dv \int_1^\infty f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du$ となることを用いてよい.

(徳島大 2015) (m20154403)

0.950 関数 $f(x)$ は, $\sin f(x) = \cos^2 x$, $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす.

(1) $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ をそれぞれ求めよ.

(2) $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)$ をそれぞれ求めよ.

(3) $\lim_{x \rightarrow +0} f'(x)$ を求めよ.

(徳島大 2018) (m20184402)

0.951 xy 平面上の領域を $D = \left\{ (x, y); x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}} \right\}$ とする.

(1) D の概形を図示せよ.

(2) 変数変換 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ($r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$) により, D に対応する $r\theta$ 平面上の領域を E とする. E は, 定数 α , β および関数 $f(\theta)$ を用いて $\{(r, \theta); \alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq r \leq f(\theta)\}$ と表される. α , β , $f(\theta)$ を求めよ.

(3) $\iint_D xy dx dy$ を求めよ.

(徳島大 2018) (m20184403)

0.952 微分可能な関数 $f(x)$ の $x = a$ での微分係数 $f'(a)$ は次で定義される.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

次の問いに答えよ.

(1) $f(x) = \sin x$ の $x = a$ での微分係数を上の定義に基づいて求めよ.

(2) 同様に, $f(x) = x^n$ の $x = a$ での微分係数を上の定義に基づいて求めよ. ただし, n は正の整数である.

(高知大 2008) (m20084501)

0.953 次は, ロピタルの定理の使用例である.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \text{ は } \frac{0}{0} \text{ の不定形であるから, ロピタルの定理より}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

これらにならって極限值 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x} \right)$ を求めてみる. 以下の問いに答えよ.

(1) ロピタルの定理が使える様に, $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x} \right)$ を式変形せよ.

(2) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x} \right)$ を求めよ.

(高知大 2008) (m20084505)

0.954 関数 $y = \sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $y = \sin^{-1} x$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 開区間 $(-1, 1)$ 上で関数 $y = \sin^{-1} x$ を微分せよ.
- (2) $y = \sin^{-1} x$ $(-1 < x < 1)$ の接線の傾きは 1 以上であることを示せ.
- (3) 直線 $y = 2x$ と平行な, 曲線 $y = \sin^{-1} x$ の接線の方程式をすべて求めよ.

(高知大 2009) (m20094501)

0.955 関数 $f(x), g(x)$ が条件 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ を満たしているとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{x^2+3}$ を求めよ.
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\log(1+x)}$ を求めよ.
- (3) $f(x) = x$ のとき, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(2x)}$ を求めよ.
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$ のとき, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(2x)}$ を求めよ.

(高知大 2011) (m20114501)

0.956 実数直線 \mathbb{R} 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定義する. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ が $x = 0$ で連続であることを示せ.
- (2) $x \neq 0$ のとき, $f(x)$ の 1 階導関数 $f'(x)$ を求めよ.
- (3) $f(x)$ が $x = 0$ で微分可能であることを示せ. また, $f'(0)$ を求めよ.
- (4) $f'(x)$ が $x = 0$ で連続でないことを示せ.

(高知大 2012) (m20124501)

0.957 $f(x) = \int_0^x \sin t^2 dt$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) $f'(x)$ を求めよ.
- (2) 実数 a に対して, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{e^x - e^a}$ を求めよ.
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$ を求めよ.
- (4) 任意の実数 x に対して, $|f(x)| \leq |x|$ を示せ.

(高知大 2012) (m20124502)

0.958 $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ とする. 関数

$$f_n(x) = \frac{x^n(x-\pi)^n}{n!}$$

に対し,

$$a_n = \int_0^\pi f_n(x) \sin x dx$$

とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 次の式を示せ.

$$f_{n+1}(x) = \frac{x(x-\pi)}{n+1} f_n(x)$$

(2) 次の式を示せ.

$$f''_{n+2}(x) = 2f_{n+1}(x) + (2x-\pi)^2 f_n(x)$$

(3) 次の式を示せ.

$$a_{n+2} = (-4n-6)a_{n+1} - \pi^2 a_n$$

(4) a_3 を求めよ.

(高知大 2013)

0.959 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^{x^2} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $x \neq 0$ のとき, $f'(x)$ を求めよ.
- (2) 任意の実数 x に対して, $|f(x)| \leq x^2$ であることを示せ.
- (3) $f(x)$ は $x=0$ で微分可能かどうかを理由を挙げて答えよ.
- (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} x f'(x)$ を求めよ.

(高知大 2014) (m20144501)

0.960 不定積分 $\int \sin^3 \theta d\theta$ を求めよ.

(高知大 2015) (m20154505)

0.961 次の媒介変数で表された曲線

$$x = f(t) = \cos^3 t, \quad y = g(t) = \sin^3 t$$

について以下の問いに答えよ.

- (1) この曲線は通常何と呼ばれているか答えよ.
- (2) $f'(t)$ と $g'(t)$ を求めよ.
- (3) t の範囲を $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ とした時の曲線の長さ L を求めよ.

(高知大 2018) (m20184505)

0.962 \mathbb{R}^2 上の C^1 級関数 $f(x, y)$ が与えられているとする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 1変数関数 $a(t)$ を用いて $f(x, y) = a(y - \sin x)$ と表されたとする. このとき, $\frac{\partial f}{\partial x}$ と $\frac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ求め,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + (\cos x) \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \dots \dots \dots (*)$$

が成り立つことを確かめよ.

- (2) $u = y - \sin x, v = x$ とおく. この変換のもとで, u, v の関数 $g(u, v)$ を $g(u, v) = f(x, y)$ で定義する. このとき, $\frac{\partial g}{\partial u}$ および $\frac{\partial g}{\partial v}$ を $\frac{\partial f}{\partial x}$ と $\frac{\partial f}{\partial y}$ を用いて表せ.
- (3) $f(x, y)$ が \mathbb{R}^2 上 (*) をみたすとする. このとき, $f(x, y)$ は $y - \sin x$ のみの関数であること, つまりある 1変数関数 $a(t)$ を用いて $f(x, y) = a(y - \sin x)$ と表されることを示せ.

- (4) $f(x, y)$ が \mathbb{R}^2 上 (*) をみたし, かつ $f(0, y) = y^2$ がすべての実数 y について成り立つとき, $f(x, y)$ を求めよ.

(高知大 2019) (m20194502)

0.963 α と β について連立方程式

$$\begin{cases} \sin \beta = 2 \sin \alpha + 2 \\ \sin \beta = -\sin \alpha + h \end{cases}$$

について (但し, $0 \leq \alpha \leq 2\pi, 0 \leq \beta \leq 2\pi$ とする.), 以下の問いに答えよ.

- (1) 連立方程式が解を持つ為の h の範囲を求めよ.
 (2) (1) の範囲の各 h について, 解の個数を求めよ.
 (3) h が (1) の範囲にある時, $h^3 - h$ が最小となる h の値と最小値を求めよ.

(高知大 2020) (m20204501)

0.964 次の積分を求めよ.

(1) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$ (2) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{4 - \cos^2 x} dx$

(愛媛大 2004) (m20044602)

0.965 $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq \pi^2\}$ とするとき, 次の重積分を求めよ.

$$\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

(愛媛大 2004) (m20044606)

0.966 (1) 次の関数を微分せよ.

(a) $\log(1+x^4)$ (b) $\sin^{-1} x^2$

(2) α, β を定数とし,

$$f(x) = \begin{cases} \tan^{-1} x & (x > 1) \\ \beta & (x = 1) \\ \alpha x - \alpha + \beta & (x < 1) \end{cases}$$

とおく. ただし $\tan^{-1} x$ の値域は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ とする. 次の問いに答えよ.

- (a) $f(x)$ が $x = 1$ で連続になるように β を定めよ.
 (b) $\lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x)$ となるように α を定めよ.

(愛媛大 2005) (m20054601)

0.967 定数 a, b が $a > b > 0$ を満たすとき, パラメータ表示された曲線

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

を考える.

- (1) この曲線の概形を描け.
 (2) $t = \frac{\pi}{4}$ に対応する点におけるこの曲線の接線の方程式を求め, (1) で描いた図に書き入れよ.
 (3) もとの曲線を y 軸を中心に回転したときにできる図形の体積を求めよ.

(愛媛大 2005) (m20054605)

0.968 次の積分 I の値を求めよ.

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x}$$

(愛媛大 2005) (m20054610)

0.969 (1) 次の極限値を求めよ.

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1})$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$

(2) 次の関数を微分せよ.

(a) $x \sin^{-1} x$ (b) $\log \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ (c) $a^{x \log x}$ (ただし, a は $a \neq 1$ である正の定数)

(愛媛大 2006) (m20064601)

0.970 C^2 級の 2 変数関数 $z = f(x, y)$ と 2 次元の極座標変換 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ の合成は, r と θ の関数 $z = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ になる.

(1) 次の等式を示せ. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$

(2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を z の r と θ についての偏導関数および r と θ のみを用いて表せ.

(愛媛大 2006) (m20064615)

0.971 (1) 次の極限値を求めよ.

(a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{10} - a^{10}}{x - a}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x^2}{x \sin 2x}$

(2) 次の関数を微分せよ.

(a) $e^{-2x} \cos \frac{x}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (c) $x^{\frac{1}{x}}$ ($x > 0$)

(愛媛大 2007) (m20074601)

0.972 (1) 定積分 $\int_0^{\pi} x \sin x dx$ を求めよ.

(2) 不定積分 $\int \frac{1}{x - x^3} dx$ を求めよ.

(愛媛大 2007) (m20074602)

0.973 次の定積分を計算せよ. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta$

(愛媛大 2007) (m20074616)

0.974 (1) 次の不定積分を計算せよ. ただし, $x > 0$ で n は自然数とする. $\int x^n \log x dx$

(2) 次の定積分を計算せよ. $\int_0^{\pi} x \sin x dx$

(3) 3 点 $A = (-x_1, x_2, 0)$, $B = (0, x_2, x_3)$, $C = (x_1, 0, x_3)$ を頂点とする三角形の面積を求めよ.

(4) 次の極限値を求めよ. ただし, a は定数とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k+a}$

(愛媛大 2008) (m20084607)

0.975 (1) (a) 次の極限値を求めよ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{\cos x} - 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ を示せ. ただし, n は自然数とする.

(2) 次の関数の導関数を求めよ.

(a) $\log |2x + 1|$ (b) $\sin^{-1} \sqrt{1 - x^2}$ (c) $(\sin x)^{\sin x}$

(愛媛大 2008) (m20084608)

0.976 (1) $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ が偏微分可能であるとき, $J(u, v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u}$ とおく. 次の φ , ψ に対して $J(u, v)$ を求めよ.

(a) $\varphi(u, v) = e^u \cos v$, $\psi(u, v) = e^u \sin v$

(b) $\varphi(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$, $\psi(u, v) = \tan^{-1} \frac{v}{u}$

(2) $D = \{(x, y) ; x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ とするとき, 次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D x\sqrt{y} \, dx dy$$

(愛媛大 2008) (m20084610)

0.977 (1) 関数 $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$ の極値を求めよ.

(2) $D = \{(x, y) \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq 1\}$ とするとき, 次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D x \sin(xy) \, dx dy$$

(愛媛大 2009) (m20094603)

0.978 (1) $x = \sin t$ ($-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$) とおいて, 次の不定積分を求めよ. ただし, 最終的な答えは x の関数で表わすこと.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

(2) $S(x) = \int_1^x \log t \, dt$ とする. 次の値を求めよ.

(a) $S'(e)$ (b) $S(e)$ (c) $\int_1^e e^{S(x)} \log x \, dx$ (d) $\int_1^\infty \frac{e^{S(x)}}{x^x} \, dx$

(愛媛大 2010) (m20104602)

0.979 関数 $z = f(x, y)$ は偏微分可能であるとする. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ と極座標変換するとき, 次の 2 つの式が成立することを示せ.

(a) $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = r \cos 2\theta \frac{\partial z}{\partial r} - \sin 2\theta \frac{\partial z}{\partial \theta}$ (b) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$

(愛媛大 2010) (m20104603)

0.980 (1) $f(x) = \tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x}$ ($x > 0$) とおく. ただし, $\tan^{-1} x$ の値域は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ とする.

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ. (b) $f(2)$ の値を求めよ.

(2) 次の極限値を求めよ.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-4x}}{\sin 5x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{\log x}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \right)$

(愛媛大 2011) (m20114607)

0.981 (1) 次の極限値を求めよ.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$

- (2) x の関数 $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ を微分せよ.
- (3) $f(x) = \cos^{-1}(\sin x)$ とおく. ただし, $\cos^{-1} x$ の値域は $[0, \pi]$ とする.
- (a) $f(\frac{\pi}{2})$ を求めよ.
- (b) $f(x)$ を微分せよ.
- (c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} f'(x)$ と $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f'(x)$ を求めよ.

(愛媛大 2013) (m20134601)

- 0.982** (1) 次の極限値を求めよ.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2} \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{4}{x} \right)^{x^2}$$

- (2) x の関数 $x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x$ を微分せよ.
- (3) 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi$$

ただし, $\cos^{-1} x$ の値域は $[0, \pi]$ とする.

(愛媛大 2015) (m20154601)

- 0.983** (1) C^1 級の関数 $z = f(x, y)$ と $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ の合成関数 $z = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ に対して

$$z_x^2 + z_y^2 = z_r^2 + \frac{1}{r^2} z_\theta^2$$

が成り立つことを示せ.

- (2) $f(x, y) = 2x^4 - 8xy^3 + y^4 + 5$ とする. 関数 $f(x, y) = 0$ で定まる陰関数 y の極値を求めよ.

(愛媛大 2015) (m20154606)

- 0.984** (1) 次で定義される関数 $f(x, y)$ の原点 $(0, 0)$ での連続性を調べよ.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (2) C^1 級の関数 $f(x, y)$ は

$$x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

を満たすとす. このとき, $z = f(x, y)$ と $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ の合成関数 $z = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ は r だけの関数であることを示せ.

- (3) 連続関数 $f(x)$ について, 次の等式を示せ.

$$\int_0^x dy \int_0^y dz \int_0^z f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt$$

(愛媛大 2016) (m20164603)

- 0.985** (1) 次の極限値を求めよ.

$$(a) \lim_{x \rightarrow +0} x \log \sin x \quad (b) \lim_{x \rightarrow +0} (\sin x)^x$$

- (2) 次の関数の導関数を求めよ.

$$(a) \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} \quad (b) \tan^{-1}(2x + 3)$$

(愛媛大 2017) (m20174601)

- 0.986** (1) 次の不定積分を求めよ. $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$
- (2) 次の定積分を求めよ. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^{-1} 2x dx$
- (3) 曲線 $y = \sin^{-1} 2x$ ($0 \leq x \leq \frac{1}{2}$), 直線 $y = \frac{\pi}{2}$ および y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ.
ただし, $\sin^{-1} x$ の値域は $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ とする.
- (愛媛大 2017) (m20174602)

- 0.987** (1) $\tan^{-1} x = \sin^{-1} \frac{3}{5}$ を満たす x の値を求めよ. ただし, $\tan^{-1} x$ は逆正接関数とし $\sin^{-1} x$ は逆正弦関数とする.
- (2) $y = (x^2 + 1)e^{-3x}$ の n 次導関数をライプニッツの公式を用いて求めよ.
- (3) 自然数 n に対して $I_n = \int \sin^n x dx$ と定める. このとき次の漸化式を示せ.
- $$I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geq 3)$$
- (愛媛大 2017) (m20174614)

- 0.988** (1) 次の関数の導関数を求めよ. ただし, a は正の定数とする.
- (a) $\sin^{-1}(x^2)$ (b) $x^{\sin x}$ ($x > 0$) (c) $\log(x + \sqrt{x^2 + a})$
- (2) 次の極限値を求めよ.
- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$ (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x}$
- (愛媛大 2018) (m20184601)

- 0.989** (1) 次の不定積分を求めよ.
- (a) $\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$ (b) $\int e^{\cos x} \sin 2x dx$
- (2) 次の広義積分を求めよ.
- $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}$$
- (愛媛大 2018) (m20184602)

- 0.990** $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x \leq \frac{\pi}{3}\}$ とする.
- (1) D を図示せよ.
- (2) 次の 2 重積分を求めよ.
- $$\iint_D \sin(x+y) dx dy$$
- (愛媛大 2018) (m20184604)

- 0.991** (1) 次の極限値を求めよ.
- (a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2x \tan x - \frac{\pi}{2}}{\sin x - \cos x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left(\frac{x+2}{x+4} \right)$
- (2) $f(x) = \sqrt{x+2}$ とする.
- (a) 3 階までの導関数 $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ を求めよ.
- (b) 次の式
- $$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2}{x^2} = 0$$
- が成り立つように定数 a_0, a_1, a_2 を定めよ.

0.992 次の不定積分を求めよ.

$$(a) \int \frac{1}{(1 + \sin^2 x) \tan x} dx \quad (b) \int x^9 e^{-x^{10}} dx$$

0.993 次の広義積分が収束するように定数 a を定め, そのときの広義積分の値を求めよ.

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1} - \frac{a}{\sqrt{x}} \right) dx$$

(愛媛大 2021) (m20214602)

0.994 (1) 次の極限値を求めよ. ただし, $[x]$ は, 実数 x を超えない最大の整数とする.

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + 3x^2)}{\log(5 + 7x)} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 - [3x]x + 2}{x - 1} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{x/2} \frac{dt}{(\sin x) \sqrt{1 - t^2}}$$

(2) 次の関数の導関数を求めよ.

$$(a) \sqrt{1 + \cos^2 x} \quad (b) \sin^{-1}(\log x)$$

(愛媛大 2022) (m20224606)

0.995 (1) 次の不定積分と定積分を求めよ.

$$(a) \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx \quad (b) \int_0^{\pi/2} x \sin^2 x dx$$

(2) 次の広義積分を求めよ.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2 + 3}$$

(愛媛大 2022) (m20224607)

$$0.996 \quad f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(2) 導関数 $f'(x)$ は連続であるか調べ, また, 導関数 $f'(x)$ が微分可能な関数か調べよ.

(九州大 1999) (m19994701)

$$0.997 \quad \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, r \geq 0) \quad \text{とする.}$$

(1) ヤコビヤンが $r^2 \sin \theta$ になることを示せ.

(2) $D : \{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

D は半径 R の球の $\frac{1}{8}$ である. このときの

$$\iiint_D xy \, dx \, dy \, dz$$

を求めよ.

(九州大 1999) (m19994703)

0.998 xy 平面上の点 (x, y) と, uv 平面上の点 (u, v) との間に

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$$

という対応関係がある. このとき, xy 平面上の 3 点 $A(0, 0), B(1, 0), C(1, \frac{\pi}{2})$ を頂点とする三角形 ABC を, 上の対応関係によって uv 平面上に移した図形を P として, 次の問いに答えよ.

(1) 図形 P がどのような図形であることを示せ.

(2) 図形 P の面積を求めよ.

(九州大 2000) (m20004701)

0.999 次の積分の計算をなさい.

(1) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin x} \log(1 + \sin x) dx$

(2) $\int_0^{\infty} t^2 e^{-t} dt$

(九州大 2001) (m20014701)

0.1000 次の問いに答えよ.

(1) $\cos \omega t$ のラプラス変換を求めよ.

(2) $e^{at} \sin \omega t$ のラプラス変換を求めよ.

(3) 上記の結果を利用して, 方程式

$$\int_0^t f(t - \tau) \cos \omega \tau d\tau = e^{at} \sin \omega t$$

を満たす関数 $f(t)$ を求めよ.

(九州大 2001) (m20014709)

0.1001 $f = x^2 + y^2 + \frac{1}{4}z^2 - 1$ とする. 座標系の原点を O , x, y, z 軸上で正の向きをもつ単位ベクトルをそれぞれ i, j, k とし, 以下の問いに答えよ.

(1) スカラー場 f の勾配を計算せよ.

(2) 曲面 $f = 0$ 上の点 $P(x_0, y_0, z_0)$ における勾配ベクトル a とベクトル \overrightarrow{OP} とのなす角を, z_0 を用いて表せ.

(3) $x = \sin \theta \cos \varphi$, $y = \sin \theta \sin \varphi$, $z = 2 \cos \theta$ とおく. ただし, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ である. 曲面 $f = 0$ 上の点 $Q(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, 2 \cos \theta)$ における接平面を張る二つのベクトルの組を示し, 法線ベクトルを計算せよ.

(4) (3) と同じ表記の下で, $0 \leq \theta \leq \theta_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ により囲まれる曲面の面積を $S(\theta_0)$ とする. $\frac{dS}{d\theta_0}$ を求めよ. ただし, $0 \leq \theta_0 \leq \pi$ である.

(九州大 2004) (m20044707)

0.1002 複素平面上の中心 a , 半径 r の半円 $C_r(a)$ を $C_r(a) = \{z = a + re^{i\theta}; 0 \leq \theta \leq \pi\}$ で定める. ただし, $i = \sqrt{-1}$ である.

(1) 正則関数 $f(z)$ に対して次式を示せ. $z = a + \varepsilon e^{i\theta}$ において考えよ.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{z - a} dz = i\pi f(a)$$

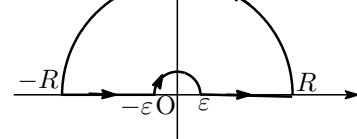
(2) 不等式 $\frac{2}{\pi}\theta \leq \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) が成立つことを示せ.

(3) (2) の結果を用いて次式を証明せよ.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

(4) 関数 $\frac{e^{iz}}{z}$ の積分を図の矢印に示す道に沿って考えること

により, 定積分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ の値を計算せよ.



(九州大 2004) (m20044708)

0.1003 関数 $f(x, y, z)$ を $f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z$ とし, $u = (u_1, u_2, u_3)$ を方向ベクトル (単位ベクトル) とする. 次の問に答えよ.

- (1) 原点における f の u 方向の方向微分を u_1, u_2, u_3 を用いて表せ.
- (2) 原点の於いて関数 $f(x, y, z)$ がもっとも急速に増加する方向と, もっとも急速に減少する方向をそれぞれ求めよ.

(九州大 2004) (m20044709)

0.1004 (1) 微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} - ay = 0$ を解け.

- (2) 区間 $[0, \ell]$ での $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0$ の解で $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\ell) = 0 \end{cases}$ を満たす恒等的に 0 でない解を求めよ.

また, a がどのような値のときにそのような解が存在するか答えよ.

- (3) 微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = f(x)$ (ただし, $f(x)$ は既知関数) の一般解を定数変化法により求めることを考える.

同次形 $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0$ の一般解は, $y = c_1 \sin ax + c_2 \cos ax \cdots \textcircled{1}$

であるとし, c_1 および c_2 を x の関数と考えて方程式の特殊解を求めた結果, 一般解が

$$y = \frac{1}{a} \left\{ \sin ax \int f(x) \cos ax dx - \cos ax \int f(x) \sin ax dx \right\} + c_1 \sin ax + c_2 \cos ax$$

となることを示せ.

(九州大 2006) (m20064702)

0.1005 (1) 2つの任意の自然数 m, n について, 次をそれぞれ示せ.

$$(a) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nxdx = 0 \quad (b) \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nxdx = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ \pi; & m = n \end{cases}$$

$$(c) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nxdx = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ \pi; & m = n \end{cases}$$

- (2) 周期 2π の関数 $f(x)$ がフーリエ級数に展開できる, つまり $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

と表現できるとき,

$$(a) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (b) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos pxdx \quad (c) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin pxdx \quad (p = 1, 2, \dots)$$

をそれぞれ計算せよ.

- (3) 周期 2π の関数 $f(x) = |x|$; $-\pi < x \leq \pi$ をフーリエ級数に展開せよ.

- (4) (3) の結果を用いて,

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \quad \text{をそれぞれ計算せよ.}$$

(九州大 2006) (m20064704)

0.1006 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ で定義された二つの関数

$$f(x) = -\log(\cos x), \quad g(x) = \log \left(\frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} \right)$$

に対して, 以下の問に答えよ.

- (1) $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を $\cos x$ を用いて表せ.
 (2) 曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$) の長さを求めよ.

(九州大 2006) (m20064712)

- 0.1007** 連続型の確率変数を X とする. X が a 以下の値をとる確率を $P_X(a)$ とし, $P_X(a)$ が以下で与えられているものとする. 以下の設問に答えよ.

$$P_X(a) = \begin{cases} 0 & (-\infty \leq a < -T) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi a}{2T}\right) & (-T \leq a \leq T) \\ 1 & (T \leq a \leq \infty) \end{cases}$$

- (1) X が値 $X_0 \sim X_1$ (ただし, $X_0 < X_1$ とする) のいずれかをとる確率を求めよ.
 (2) X が任意の定数 B となる確率を求めよ. (3) X の確率密度関数 $p(X)$ を求めよ.
 (4) X の平均を求めよ. (5) X の標準偏差を求めよ.

(九州大 2007) (m20074704)

- 0.1008** ω を実数として, $y(x)$, $-\infty < x < \infty$ に関する二階常微分方程式 $y'' + 2y' + y = \sin \omega x$ を考える.

- (1) $\omega = 0$ のとき, この微分方程式の一般解を求めよ.
 (2) $\omega \neq 0$ のとき, この微分方程式の一般解を求めよ.
 (3) 各 ω に対して, $x \rightarrow -\infty$ のとき $y(x)$ が有界にとどまる解はただ一つ存在することを示せ.

(九州大 2007) (m20074706)

- 0.1009** $A = (a_{ij})$ ($i, j = 1, 2$) を 2×2 実行列とする. A^T で A の転置行列を表すとする. ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ に対して内積を $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ で定める.

- (1) 任意のベクトル \mathbf{x} に対して, $(A\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$ が成立する時, $A^T A = A A^T = E$ が成り立つことを示せ. ただし, E は単位行列とする.
 (2) (1) の行列 A の行列式は 1 もしくは -1 であることを示せ. さらに行列 A の固有値は絶対値が 1 であることを示せ.
 (3) (2) において A の行列式が -1 であるとき, ある実数 θ が存在して

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{と書けることを示せ.}$$

(九州大 2007) (m20074708)

- 0.1010** 複素数 z を変数とする偶関数 $f(z)$, 奇関数 $g(z)$ が次の関係式を満たすとき, 以下の問いに答えよ.

$$e^{iz} = f(z) + i \cdot g(z)$$

なお, i は虚数単位であり, e は自然対数の底である.

- (1) $f(z)$ ならびに $g(z)$ を用いて, e^{-iz} を表せ.
 ヒント: 題意より, $f(z) = f(-z)$, $g(z) = -g(-z)$ が成立する.
 (2) e^{iz} ならびに e^{-iz} を用いて, $f(z)$ と $g(z)$ をそれぞれ表せ.
 (3) $g(x + iy) = u + iv$ と表すとき, 以下の関係式が成立することを示せ.

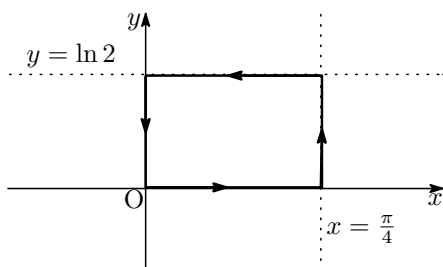
$$u = \sin x \cdot \cosh y$$

$$v = \cos x \cdot \sinh y$$

ただし, x, y, u, v は実数であり, $\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$, $\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ である.

- (4) $g(x + iy) = i$ を満たす $x + iy$ を全て求めよ.
- (5) $g(x + iy) = u + iv$ とし, 点 (x, y) が下図の太線で示す xy 平面上の長方形に沿って, 原点 O を出発して反時計回りに一周したとき, uv 平面上の点 (u, v) はどのような軌跡を描くか. その軌跡の概略図を示せ.

ヒント: 任意の実数 x, y で, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ が成立する.



(九州大 2008) (m20084707)

- 0.1011** (1) 実数 $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq 1$ に対して, 等式 $\frac{1+t^2}{t(1+t-t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{b+ct}{1+t-t^2}$ が成り立つように a, b, c を定めよ.
- (2) $t = \tan \frac{x}{2}$ とおくと, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ と表せることを示せ.
- (3) 変数変換 $t = \tan \frac{x}{2}$ を行い, 次の定積分 $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{(\sin x + 2 \cos x) \sin x}$ の値を求めよ.

(九州大 2008) (m20084718)

- 0.1012** $f(x) = \sin \frac{x}{2}$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$,
 $g(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ とおく. ただし, n を自然数とする.

- (1) フーリエ係数 a_n, b_n を計算せよ.
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ は発散することを示せ.
- (3) フーリエ級数 $g(x)$ は $x = \frac{\pi}{2}$ で収束することを示せ.
- (4) $x = \pm\pi$ で $f(x)$ と $g(x)$ がどのような関係にあるか述べよ.

(九州大 2009) (m20094703)

- 0.1013** (1) n が整数であるとき, 複素数 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ について以下の式が成り立つことを示せ.

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad \dots\dots (i)$$

- (2) (i) 式を用い, $\cos 3\theta$ を $\cos \theta$ を用いて表せ.
- (3) (i) 式を用い, 複素数 $1 - i$ の三乗根をすべて求めよ.
- (4) (i) 式を用い, 1 の N 乗根をすべて求めよ. ただし, N は正の整数とする. また, $N = 4$ の場合の解を複素平面上に図示せよ.

(九州大 2009) (m20094704)

- 0.1014** 次の定積分を計算せよ.

(1) $2^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos^4 x dx$

$$(2) \quad 2^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x \, dx$$

(九州大 2009) (m20094705)

0.1015 3次元空間内で

$$V = \{(x, y, z); x = t \cos \theta, y = t \sin \theta, z = r, 0 \leq t \leq r, 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

で表される集合 V を考える.

(1) V の体積を求めよ.

(2) L を平面

$$z = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + 1$$

とし, $S = V \cap L$ とおく.

$$\min\{z; (x, y, z) \in S\} \quad \max\{z; (x, y, z) \in S\}$$

を求めよ.

(九州大 2010) (m20104705)

0.1016 (1) 次の周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \left(-\pi \leq x < -\frac{\pi}{4}\right) \\ 1 & \left(-\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{4}\right) \\ -1 & \left(\frac{3\pi}{4} \leq x < \pi\right) \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

(2) 関数 $f(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$ で定義する. 次式で定義される関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ. また, 関数 $y = F(\omega)$ のグラフの概形を描け. なお, T は正の実数とする.

$$f(t) = \begin{cases} a & (|t| \leq T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

(3) 関数 $f(t)$ は $t > 0$ で定義されているものとし, $f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ で定義するとき, 以下の問いに答えよ.

(a) $f(t) = \sin \omega t$ のラプラス変換が $F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ であることを示せ.

(b) $f(t) = \cos \omega t$ のラプラス変換が $F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$ であることを示せ.

(c) $f(t) = a + bt$ のラプラス変換が $F(s) = \frac{as + b}{s^2}$ であることを示せ.

(九州大 2012) (m20124704)

0.1017 関数 $f(x) = \sin(\log x)$ ($x > 0$) を考える. $f'(x)$, $f''(x)$ をそれぞれ $f(x)$ の1次および2次の導関数とする. また, π は円周率, e は自然対数の底とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $1 \leq x \leq e^\pi$ において $f'(x) = 0$ となる x を求めよ.

(2) $1 \leq x \leq e^\pi$ において $f''(x) < 0$ となる x の範囲を求めよ.

(3) 2点 $(1, f(1))$, $(e^{\pi/2}, f(e^{\pi/2}))$ を通る直線の方程式を求めよ.

(4) $\frac{e^{\pi/4} - 1}{e^{\pi/2} - 1} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ が成り立つことを示せ.

(九州大 2012) (m20124705)

0.1018 (1) 周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を次のように定める. 以下の問いに答えよ.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, \dots), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(a) 任意の実数 α に対して $\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \cos nx dx = a_n$ が成立することを示せ.

(b) 整数 n と実数 x に対して $\cos n(x + \pi) = \begin{cases} \cos nx & (n \text{ が偶数}) \\ -\cos nx & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$ が成立する.

このことを踏まえ, 関数 $g(x) = f(x + \pi)$ のフーリエ係数 $a'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx dx$,

$b'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx dx$ を a_n, b_n を用いて表せ.

(2) 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$ とおく. 以下の問いに答えよ.

(a) $f(x) = e^{-|x|}$ のフーリエ変換を求めよ.

(b) フーリエの積分定理 (逆フーリエ変換) を利用して, 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos u}{1+u^2} du$$

(九州大 2013) (m20134703)

0.1019 (1) $u = f(x, y)$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ($r > 0$) とするとき, 以下の問いに答えよ.

(a) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ を r, θ および, u の r, θ に関する偏導関数を用いて表せ.

(b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を r, θ および, u の r, θ に関する偏導関数を用いて表せ.

(2) 領域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ において, 関数 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ を考える. 以下の問いに答えよ.

(a) 領域 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ における $f(x, y)$ の極値とそれを与える (x, y) を求めよ. 極大か極小かも述べよ.

(b) 単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上での $f(x, y)$ の最大値, 最小値とそれらを与える (x, y) を求めよ.

(c) 領域 D における $f(x, y)$ の最大値, 最小値とそれらを与える (x, y) を求めよ.

(九州大 2014) (m20144704)

0.1020 定積分 $I = \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx$ の値を求めよ.

(九州大 2014) (m20144706)

0.1021 C を区間 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ で定義された媒介変数方程式 $x(t) = e^t \sin t$, $y(t) = e^t \cos t$ で表される xy 平面上の曲面とする.

(1) 導関数 $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dy}{dx}$ をそれぞれ求めよ.

(2) 曲線 C の増減を調べ, xy 平面上にグラフをかけ. ただし, $e^{\frac{\pi}{4}} \doteq 2.19$ である.

(3) 曲線 C の x 軸, y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

0.1022 (1) 次の $y(x)$ に関する微分方程式について、以下の問いに答えよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 3y = f(x)$$

- (a) $f(x) = 0$ のときの一般解を求めよ.
 (b) $f(x) = \sin x$ のときの一般解を求めよ.

(2) 次の $y(x)$ に関する微分方程式を、 $y(1) = 1$ のもとで解け.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{2y+x}$$

0.1023 (1) (a) 周期 $2L$ の区分的に連続な関数 $f(x)$ をフーリエ級数で表現した式を示し、そのフーリエ係数を求める式を示せ.
 (b) 次の関数 $f(x)$ ($-2 \leq x \leq 2$) のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 4 & (-2 \leq x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 4 - 2x & (0 < x \leq 2) \end{cases}$$

(2) $t > 0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \mathfrak{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$ とする. 必要ならば下記の表にある関係式を用いて、次の関数の逆ラプラス変換を求めよ. また (b) については、 $f(t)$ ($t > 0$) のグラフをかけ.

(a) $F(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$

(b) $F(s) = \frac{-s+2}{s^2+2s+4}$

表:	$\mathfrak{L}[1] = \frac{1}{s}, \quad \mathfrak{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \mathfrak{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}, \quad \mathfrak{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},$ $\mathfrak{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad \mathfrak{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), \quad \mathfrak{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a), \quad \mathfrak{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau}F(s)$
----	---

0.1024 直交座標系の x, y, z 軸の基本ベクトルを $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ とし、位置ベクトルを $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ とする. 閉曲線 $C: \mathbf{r} = 2 \cos \theta \mathbf{i} + 2 \sin \theta \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) について、以下の問いに答えよ.

- (1) 閉曲線 C 上の点における大きさ 1 の接ベクトルを求めよ.
 (2) スカラー場 $\varphi = \frac{1}{4}x^2y$ の閉曲線 C に沿う線積分を求めよ.
 (3) 閉曲線 C で囲まれた円板を S とし、ベクトル場 \mathbf{A} を

$$\mathbf{A} = -\frac{1+z}{x^2}\mathbf{i} + \frac{z^2}{xy}\mathbf{j} + (x^2z - y)\mathbf{k}$$

とする. $(\nabla\varphi) \times \mathbf{A} + \varphi(\nabla \times \mathbf{A})$ の S 上の面積分を求めよ.

0.1025 次の微分方程式を解け.

(1) $x^2y' = (2x + y)(x + y)$

(2) $y'' \sin x + y' \cos x = 0$

(3) $y'' + y = \sin x$

(九州大 2017) (m20174706)

0.1026 (1) 次の $y(x)$ に関する微分方程式を初期条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ のもとで解け.

$$y'' + 4y' + 20y = 0$$

(2) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ.

$$y'' + 2y' + y = 50 \sin x \cos x$$

(3) 次の完全微分形の方程式について, 一般解を求めよ.

$$(4x^3 - 6xy)dx + (8y - 3x^2)dy = 0$$

(九州大 2018) (m20184701)

0.1027 確率変数 X が次の形の確率密度関数を持つ.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} & (|x| \leq 2) \\ 0 & (|x| > 2) \end{cases}$$

(1) 確率 $P(-1 \leq X \leq 1)$ を求めよ.

(2) $I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$ は次の漸化式 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ($n \geq 2$) を満たすことを示せ.

(3) 期待値 $E[X^4]$ を求めよ.

(九州大 2018) (m20184703)

0.1028 z を複素数とし, $a > 2$ とする. 次の問いに答えよ.

(1)

$$\int_C \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2(z^2 - az + 1)} dz$$

を求めよ. ただし, C は原点を中心とする半径 1 の円周を反時計回りに進む積分路とする.

(2)

$$\int_0^{2\pi} \frac{4 \sin^2 \theta}{a - 2 \cos \theta} d\theta$$

を求めよ.

(九州大 2018) (m20184704)

0.1029 $x \geq 1$ において, 関数 $f(x)$ を次の式で定義する.

$$f(x) = \sin(\log x)$$

このとき, 以下の各問いに答えよ.

(1) $y \geq 1$ なる y を固定するとき, 次の積分を求めよ.

$$g(y) = \int_1^y f(x) dx$$

- (2) $1 \leq y \leq e^{2\pi}$ における $g(y)$ の最大値および最小値を求めよ. ただし, e は自然対数の底, π は円周率である.

(九州大 2018) (m20184707)

- 0.1030** t の関数 y に対して, $y''' = \frac{d^3y}{dt^3}$, $y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$, $y' = \frac{dy}{dt}$ とおく. 以下の問いに答えよ.

- (1) A, B を実定数とする. $y = A \cos t + B \sin t$ が次の微分方程式

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = \cos t \quad \cdots (Q1)$$

を満たすように A, B を定めよ.

- (2) 微分方程式 (Q1) の一般解を求めよ.
 (3) 次の微分方程式に対して $z = \frac{1}{y}$ とおいて z に関する微分方程式を導出せよ.

$$y' - \frac{1}{2}y = -y^2 \quad \cdots (Q2)$$

- (4) 微分方程式 (Q2) の一般解を求めよ.

(九州大 2019) (m20194702)

- 0.1031** 直交座標系において, x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ とする. ベクトル場

$$\mathbf{A} = \nabla(e^{xy} - yz^2) + \nabla \times (z^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + \sin(2x - y)\mathbf{k})$$

について以下の問いに答えよ.

- (1) $\nabla \mathbf{A}$ を求めよ. (2) $\nabla \times \mathbf{A}$ を求めよ.
 (3) $\nabla \mathbf{A} = 0$ かつ $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ を満たす点を求めよ.

(九州大 2020) (m20204707)

- 0.1032** (1) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ.

$$y'' - 2y' + 5y = \sin 2x$$

- (2) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ.

$$y'' + 2y' - 3y = e^{-3x}$$

- (3) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ.

$$\left(\frac{y'}{y^3}\right)' - \frac{4y'}{y^3} - \frac{2}{y^2} = 0$$

(九州大 2021) (m20214702)

- 0.1033** 直交座標系において, x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ とする. ベクトル場 $\mathbf{a} = (1 - 2x^2)e^{-x^2 - y^2}\mathbf{i} - 2xye^{-x^2 - y^2}\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $\nabla \times \mathbf{a}$ を求めよ.
 (2) $\mathbf{a} = \nabla \phi$ となるようなスカラー関数 ϕ が存在するか否かを答えよ. 存在する場合は, ϕ を求めよ. ただし, 原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ において $\phi = 0$ とする.

- (3) 位置ベクトル $\mathbf{r} = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) で与えられる曲線 C 上で、線積分 $\int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$ の値を求めよ.

(九州大 2021) (m20214703)

0.1034 周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

で表される. 以下の問いに答えよ.

- (1) 区間 $[-\pi, \pi]$ において次のように定義される周期 2π の関数 $g(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$g(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$$

- (2) 区間 $[-\pi, \pi]$ において次のように定義される周期 2π の関数 $h(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- (3) 次の無限級数の和を求めよ.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

(九州大 2021) (m20214704)

0.1035 $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$ とする. 点 $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$ は円 $C_1 = \{(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + y_1^2 = 1\}$ 上を動き, 点 $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2)$ は円 $C_2 = \{(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_2 - a)^2 + y_2^2 = r^2\}$ 上を動くものとする.

2点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 間のユークリッド距離に関する極値問題について, 以下の問いに答えよ. ただし, \mathbb{R} は実数全体を表すとする.

- (1) 関数

$$f(\theta_1, \theta_2) = (r \cos \theta_2 + a - \cos \theta_1)^2 + (r \sin \theta_2 - \sin \theta_1)^2, \quad (\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R})$$

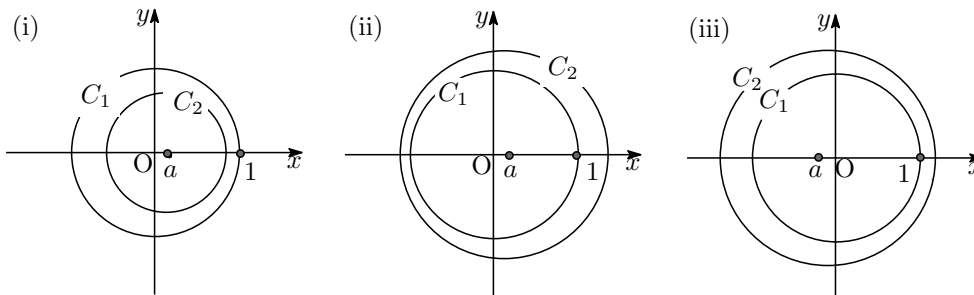
の $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ におけるヘッセ行列

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} f_{\theta_1 \theta_1}(0, 0) & f_{\theta_1 \theta_2}(0, 0) \\ f_{\theta_2 \theta_1}(0, 0) & f_{\theta_2 \theta_2}(0, 0) \end{pmatrix}$$

を求めよ.

- (2) (1) で求めたヘッセ行列が正定値になるための条件を a と r で表せ.

- (3) 図 (i)(ii)(iii) それぞれについて, 点 $\mathbf{x}_1^* = (1, 0)$, $\mathbf{x}_2^* = (a+r, 0)$ が極値問題の極小解であるかどうか判定せよ.



(九州大 2021) (m20214712)

0.1036 互いに異なる正の定数 a, b, c を考える. 空間内の点 $O(0,0,0), A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c)$ を頂点とする 4 面体を V とする. また V 内部にある点を $P(x,y,z)$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 点 A, B, C, P を頂点とする 4 面体を V_1 , 点 O, B, C, P を頂点とする 4 面体を V_2 , 点 O, C, A, P を頂点とする 4 面体を V_3 , 点 O, A, B, P を頂点とする 4 面体を V_4 とする. 4 面体 V_1, V_2, V_3, V_4 の体積比 $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$ を a, b, c, x, y, z を用いて表せ. ただし, $\lambda_j (j = 1, 2, 3, 4)$ は $0 \leq \lambda_j \leq 1$ および $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$ を満たす実数とする.
- (2) 関数 $\phi = \phi(x, y, z), \psi = \psi(x, y, z)$ をそれぞれ

$$\phi = \lambda_1 \nabla \lambda_2 - \lambda_2 \nabla \lambda_1 \quad \psi = \lambda_2 \nabla \lambda_3 - \lambda_3 \nabla \lambda_2$$

で定める. 関数 $\phi = \phi(x, y, z), \psi = \psi(x, y, z)$ を, a, b, c, x, y, z を用いて表せ.

- (3) 関数 $f = f(x, y, z)$ を $f(x, y, z) = e^{x+y+z} \sin(x-z)\phi(x, y, z) + x^2 \sin(-x+y)\psi(x, y, z)$ で定める. このとき, 積分

$$\int_{\ell_{AB}} f \cdot d\mathbf{r}$$

を求めよ. ただし, ℓ_{AB} は点 A から B に進む方向を正とする線分, \mathbf{r} は線分 ℓ_{AB} 上にある点の位置ベクトルである.

- (4) 関数 f を前問で定めた関数とする. このとき, 積分

$$\int_S (\nabla \times f) \cdot \mathbf{n} \, dS$$

を求めよ. ただし, S は点 O, B, A を頂点とする 3 角形, \mathbf{n} は z 成分が負となる S の単位法線である.

(九州大 2022) (m20224702)

0.1037 次の行列 A について, 以下の問いに答えよ. a, b は実数である.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の固有値が 2 つの異なる実数で得られることを示せ.
- (2) 以下に示す行列 P を用いると $P^{-1}AP$ は対角行列となった. このとき, a, b の満たすべき条件を示せ.

$$P = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

(九州大 2022) (m20224708)

0.1038 以下に答えよ.

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を示し, これを使って $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$ を求めよ.
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a^2 + x} - \sqrt{a^2 - x}}{x}$ を求めよ.
- (3) $\frac{1}{1 + \sqrt{x}}$ を微分せよ.

(九州芸術工科大 2000) (m20004801)

0.1039 以下の問いに答えよ.

- (1) $\int_{-1}^2 |2 - x - x^2| dx$ を求めよ.

(2) $\int x \log x dx$ を求めよ.

(3) $\int_0^\pi f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$ を証明せよ.

(4) $F(x) = \int_a^{-x^2} f(t) dt$ のとき, $F'(x)$ を求めよ.

(九州芸術工科大 2000) (m20004803)

0.1040 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ を求めよ.

(2) 以下に順に答えよ.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を示せ.

(b) $1 + \cos x = 2 \left(\sin \frac{\pi-x}{2} \right)^2$ を示せ.

(c) 上の (a) と (b) を使って, $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x}$ を求めよ.

(3) $\frac{d}{dx} e^{x^x}$ を求めよ.

(九州芸術工科大 2001) (m20014801)

0.1041 (1) $x^n \log x$ を積分せよ. ただし, \log は自然対数.

(2) $I_1 = \int e^{ax} \sin bxdx$, $I_2 = \int e^{ax} \cos bxdx$ を求めよ.

(3) 次を証明せよ. $\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x)dx$

(九州芸術工科大 2001) (m20014803)

0.1042 (1) 関数 $f(x) = \sin x$ の n 次導関数を求めよ.

(2) 関数 $g(x) = x^3 \sin x$ の n 次導関数を求めよ.

(九州芸術工科大 2005) (m20054801)

0.1043 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ を求めよ.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cos x}{1 - \cos x}$ を求めよ.

(九州芸術工科大 2005) (m20054805)

0.1044 (1) $F(x) = \int_a^x (x-t)^2 f(t) dt$ のとき $\frac{dF}{dx}$ を求めよ.

(2) $\sin(\pi-x) = \sin x$ を利用して

$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x)dx$ を証明せよ.

(九州芸術工科大 2005) (m20054807)

0.1045 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\int \frac{dx}{1-4x^2}$ (2) $\int e^x \sin 2xdx$ (3) $\int \sin^2 x dx$

(佐賀大 1999) (m19994903)

0.1046 以下の関数の 1 次微分を求めなさい.

(1) $y = e^x \sin x$ (2) $y = \frac{\sin x}{e^x}$ (3) $y = \frac{\log x}{x}$ (4) $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

(佐賀大 2000) (m20004902)

0.1047 次の関数の増減の状態を調べて、 $0 \leq x \leq 180^\circ$ の範囲でグラフを書きなさい。

$$f(x) = \sin x(1 + \cos x)$$

(佐賀大 2000) (m20004903)

0.1048 以下の不定積分を求めなさい。

$$(1) \int \sin(3x+3)dx \quad (2) \int \frac{dx}{3x+3} \quad (3) \int \frac{dx}{4+x^2}$$

$$(4) \int x \log x dx \quad (5) \int e^x \sin 2x dx$$

(佐賀大 2000) (m20004904)

0.1049 以下の関数の1次常微分を求めなさい。

$$(1) y = (2-x^2)^3 \quad (2) y = \frac{x}{\sqrt{x+1}} \quad (3) y = \frac{1}{\log x} \quad (4) y = \log |\sin x|$$

(佐賀大 2001) (m20014902)

0.1050 以下の不定積分を求めなさい。

$$(1) \int \sin(2x+1)dx \quad (2) \int e^{2x} \sin(3x)dx \quad (3) \int \frac{dx}{x^2-5x+6}$$

$$(4) \iint e^{(3x+2)} dx dx \quad (5) \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx \quad (6) \int \frac{\log x}{x} dx$$

(佐賀大 2001) (m20014903)

0.1051 曲線 $y = 2 \sin x$ において、

- (1) $x = \pi/3$ [rad] の点における接線の傾きを求め、この接線と直交する直線が曲線 y と接する点 (x, y) の値を求めなさい。ただし、 $0 \leq x \leq 2\pi$ とする。
- (2) 接線と直交する直線が曲線と接点を持たない x の範囲を式および図で示しなさい。

(佐賀大 2003) (m20034902)

0.1052 以下の関数の1次微分を求めなさい。

$$(1) y = (x^2 - 1)/(3x^2 + 1) \quad (2) y = (2x + 3/x)^2$$

$$(3) y = e^{3x-2} \sin(3x-2) \quad (4) y = x/(x^2 + 1)^{1/2}$$

(佐賀大 2003) (m20034905)

0.1053 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 3}) \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 5 \sin 2x}{x \cos x}$$

(佐賀大 2003) (m20034906)

0.1054 次の関数の2次導関数を求めよ。

$$(1) x^3 e^x \quad (2) e^{-x} \sin x$$

(佐賀大 2003) (m20034907)

0.1055 以下の関数の不定積分を求めなさい。

$$(1) 1/(9x^2 - 4) \quad (2) 1/(4x^2 + 1)$$

$$(3) x \cos(3x - 1) \quad (4) \sin^2(3x + 2)$$

(佐賀大 2003) (m20034914)

0.1056 直線上を時刻 t における速度が $v = \sin 2\pi t$ で与えられる点 P が動く. $t = 0$ から $t = 5$ までに点 P が移動する距離を求めよ. また実際に動いた道のりを求めよ.

(佐賀大 2003) (m20034915)

0.1057 以下に示す x と y の関数である z の偏微分を求めなさい.

(1) $z = y/x + x/y$ であるとき, $\partial z/\partial x$

(2) $z = y \sin(2x + 3y)$ であるとき, $\partial z/\partial y$

(佐賀大 2003) (m20034917)

0.1058 次の関数の 1 次微分を求めなさい.

(1) $y = (2x^3 + 5x^2)^2$

(2) $y = e^{2x} \sin(x)$

(3) $y = (x^2 - 3x^3)/(1 - x)$

(佐賀大 2004) (m20044903)

0.1059 次の各問に答えよ.

(1) $x > 0$ のとき次の不等式が成り立つことを示せ.

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

(2) $y = \log |x + \sqrt{x^2 + a}|$ ($a \neq 0$) を微分せよ.

(3) $y = x \sin x$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) のグラフの概形を描け.

(佐賀大 2004) (m20044907)

0.1060 $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx$ を計算せよ.

(佐賀大 2004) (m20044909)

0.1061 次の積分を計算せよ.

(1) $\int \frac{1}{\sin x} dx$ (ヒント : $\tan \frac{x}{2} = t$ とおく)

(2) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ($a > 0$)

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx$ (m, n : 0 以上の整数)

(佐賀大 2004) (m20044911)

0.1062 $z = f(x, y)$ は全微分可能とし, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とするとき, $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ならば, $f(x, y)$ は θ だけの関数であることを示せ.

(佐賀大 2004) (m20044916)

0.1063 次の定積分を求めよ, a は正の定数である.

(1) $\int_1^2 dx \log x$ (2) $\int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (3) $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2}$ (4) $\int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{x}$

(佐賀大 2005) (m20054910)

0.1064 次の問に答えよ.

- (1) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x}{x^3 - x}$ を求めよ.
 (2) 逆三角関数 $\cos^{-1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ ($x > 0$) の導関数を求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054913)

0.1065 次の関数の 1 次微分を求めなさい.

(1) $y = \sqrt{2x^2 + 3}$ (2) $y = \frac{1}{\cos x}$ (3) $y = e^{-x} \sin(5x + 2)$ (4) $y = \log \frac{x-1}{x+1}$

(佐賀大 2005) (m20054920)

0.1066 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\int (3x^2 + \frac{1}{x}) dx$ (2) $\int x \cos(x^2 + 1) dx$ (3) $\int 10^x dx$
 (4) $\int \log x dx$ (5) $\int x \sin(2x + 1) dx$ (6) $\int \frac{1}{1 + e^x} dx$

(佐賀大 2005) (m20054922)

0.1067 次の問に答えよ.

- (1) 三角関数の加法定理より

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$$

を導出せよ.

- (2) 導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を利用して $(\sin x)' = \cos x$ であることを示せ.

(佐賀大 2005) (m20054924)

0.1068 (1) 関数 $f(x) = \sin^2 x$ を微分せよ.

- (2) $y = e^{-t}$, $t = x^2$ のとき, $\frac{dy}{dx}$ を求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054930)

0.1069 (1) 不定積分 $\int \sin^2 x dx$ を求めよ.

- (2) 定積分 $\int_0^1 x e^x dx$ を計算せよ.

(佐賀大 2005) (m20054931)

0.1070 以下の各問に答えよ.

- (1) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$ を求めよ.

- (2) $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ($a > 0$) を計算せよ.

- (3) 微分方程式 $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = -30 \sin 4x$ の一般解を求めよ.

- (4) $y = 2Cx - C^2$ が解となるような微分方程式を作れ. ただし, C は任意の定数とする.

(佐賀大 2005) (m20054933)

0.1071 次の極限值を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin^{-1} x}{x^3}$$

(佐賀大 2006) (m20064907)

0.1072 $x = \cos^4 t, y = \sin^4 t$ とするとき, 導関数 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ. ただし, 結果は t の関数のままでよい.
(佐賀大 2006) (m20064913)

0.1073 次の関数の導関数 dy/dx を求めなさい.

(1) $y = 3x^2 + 4x$ (2) $y = 1/x$ (3) $y = x^2 \ln x$ (4) $y = \sin(3x)$ (5) $y = x/e^{2x}$
(佐賀大 2006) (m20064924)

0.1074 次の微分方程式を解け. ただし, $y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ である.

(1) $y'' - 4y' - 12y = 0$ (2) $y'' - 4y' - 12y = 12x - 8$ (3) $\frac{dy}{dx} + y = y^2(\cos x - \sin x)$
(佐賀大 2006) (m20064931)

0.1075 次の関数を微分せよ.

(1) $y = (x^2 - 3x + 1)^3$ (2) $y = (\sin 4x) \log(x - 3)$
(佐賀大 2006) (m20064936)

0.1076 次の不定積分を求めよ. ただし積分定数は C とする.

(1) $\int (3x + 2) \sin x \, dx$ (2) $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$ ($t = \sin x$ と置いて考えよ)
(佐賀大 2006) (m20064937)

0.1077 次の関数の一次導関数 dy/dx を求めなさい.

(1) $y = 2x^3 + 3x + 5$ (2) $y = \sin^2 x$ (3) $y = (2x + 1)^3$
(4) $y = x \cdot \log x$ (5) $y = \exp(x)/x$
(佐賀大 2007) (m20074901)

0.1078 (1) 関数 $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ を $x = 0$ の周りでテイラー展開し, x^3 の項まで書け.

(2) 微分方程式 $y''(x) + 9y(x) = 0$ の一般解を求めよ.

(3) 関数 $f(x) = x$ (定義域を $-\pi \leq x \leq \pi$ とする) を $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$ と書くとき, a_0, a_n, b_n を求めよ.
(佐賀大 2007) (m20074906)

0.1079 次の積分を求めよ.

(1) $\int x \log x \, dx$ (不定積分. 積分定数を C とせよ.)
(2) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3x^2} \, dx$ (3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$
(4) $\iint_D x^2 y \, dx dy$ (但し, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq \sqrt{x}\}$)
(佐賀大 2007) (m20074907)

0.1080 次の関数の極限を求めよ. ただし, \log は自然対数とする.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
(佐賀大 2007) (m20074909)

0.1081 $f(x) = e^{-x} \sin x$ について、次の問いに答えよ.

(1) 定数 $a > 0$ に対して、定積分 $I_a = \int_0^a f(x) dx$ を部分積分法で求めよ.

(2) 広義積分 $\int_0^\infty f(x) dx$ を求めよ.

(佐賀大 2007) (m20074911)

0.1082 次の関数の極限值を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x}$ (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$

(佐賀大 2007) (m20074915)

0.1083 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $x \frac{dy}{dx} + y = x^3 y^3$ (2) $y'' - 2y' + 10y = 0$ (3) $y'' - 2y' + 10y = 2 \cos 2x + 10 \sin 2x$

(佐賀大 2007) (m20074918)

0.1084 次の関数を x について、微分せよ. 但し、 \log の底は e とする.

(1) $y = \sin 3x \cos 3x$ (2) $y = (x \sin x)^3$ (3) $y = (\log x)^2$ (4) $y = 10^x$

(佐賀大 2007) (m20074922)

0.1085 次の関数の第 n 次導関数 $y^{(n)}$ を求めよ.

(1) $y = \sin ax$ (2) $y = e^{-ax} \sin bx$

(佐賀大 2007) (m20074923)

0.1086 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\frac{dy}{dx} = 2x(1-y)$ (2) $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 3t = 5 \sin t$

(佐賀大 2007) (m20074927)

0.1087 a, b を実数とし、次の問いに答えよ.

(1) 次の等式を証明せよ.

$$\int_0^{2\pi} f(a \sin x + b \cos x) dx = \int_0^{2\pi} f(\sqrt{a^2 + b^2} \sin x) dx$$

(2) 前問の結果を用いて、次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} (a \sin x + b \cos x)^2 dx$$

(佐賀大 2009) (m20094901)

0.1088 全微分可能な 2 変数関数 $z = f(x, y)$ が、 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ を満たすとする.

$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ のとき、 $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めよ.

(佐賀大 2009) (m20094906)

0.1089 (1) 導関数の定義 $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ を利用して $(\sqrt{2x})' = \frac{1}{\sqrt{2x}}$ であることを示せ.

(2) $x = 3 \sin t$ として $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$ を計算せよ.

(佐賀大 2009) (m20094910)

- 0.1090** 天井からバネが吊り下げられ（バネの一方の先は天井に固定されている）、質量 m のおもりがバネのもう一方の先についている。おもりがつり合った位置から距離 y （下の方向が正）にあるとき、 $-ky$ の力をうけ、さらに摩擦の力 $-c\frac{dy}{dt}$ をうけて運動の方程式

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - c\frac{dy}{dt}$$

が成り立っている（ただし、 $4mk - c^2 > 0$ ）。このとき y は t の関数として

$$y = e^{At}(\cos Bt + \sin Bt)$$

のかたちに見える。ただし、 A, B は定数で $B > 0$ 。このときの A と B を求めよ。

(佐賀大 2009) (m20094913)

- 0.1091** 次の関数の x に対する導関数を求めよ。

(1) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-2x}}$

(2) $f(x) = \cos(2x + 3\sin(3x))$

(佐賀大 2009) (m20094914)

- 0.1092** 次の関数の x に関する偏微分を求めよ。

(1) $f(x, y) = x \cos(2y) + y \sin(2x) + x \cos(3x) + y \sin(2y)$

(2) $f(x, y) = (\ln(xy))^2$ ($x > 0, y > 0$) (ただし $\ln(x)$ は底を e とする自然対数)

(佐賀大 2009) (m20094915)

- 0.1093** 次の定積分を計算せよ。

(1) $\int_0^\pi \sin^2(2x) dx$

(2) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$

(佐賀大 2009) (m20094916)

- 0.1094** (1) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x}$ を求めよ。

(2) $y = \sqrt{1 + 2 \log x}$ の導関数を求めよ。

(佐賀大 2009) (m20094921)

- 0.1095** (1) 次の関数を微分しなさい。

$$y = \frac{2x+1}{x^2+1}$$

- (2) 次の関数を合成関数の微分法で微分しなさい。

(a) $y = \sqrt{x^2 + 4}$

(b) $y = e^{2x+1}$

- (3) 不定形の極限値を求めなさい。

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \cos x}{x^3}$ ($x \cong 0$ のとき $x = \sin x$ となる関係を利用して解答しなさい)

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{x^2}$

(佐賀大 2009) (m20094929)

- 0.1096** (1) 次の関数を積分しなさい。

(a) $\frac{1}{16x^2 - 9}$

(b) $\frac{1}{(5x + 7)^5}$

(2) 次の関数を置換積分法で積分しなさい.

$$-\tan x$$

(3) 次の定積分を求めなさい.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$$

(佐賀大 2009) (m20094931)

0.1097 次の関数の極限を求めよ. ただし, $a > 0$ とし, \log は自然対数とする.

(1) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{\sin x}$ (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left(1 + \frac{2}{x}\right)$

(佐賀大 2010) (m20104908)

0.1098 積分に関する, 以下の問いに答えよ. ただし, $\sin^{-1} x$ は $\sin x$ の逆関数とする.

(1) $(x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x)' = 2\sqrt{1-x^2}$ を示せ.

(2) $f(x) = x^2 \sin^{-1} x$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(3) 不定積分 $\int x \sin^{-1} x \, dx$ を求めよ.

(4) 定積分 $\int_0^{1/2} x \sin^{-1} x \, dx$ を計算せよ.

(佐賀大 2010) (m20104910)

0.1099 (1) 次の極限を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

(2) (1) の結果を利用して次の極限を求めよ.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(\theta + h) - \cos(\theta)}{h}$$

(佐賀大 2010) (m20104913)

0.1100 次の不定積分を求めよ. ただし積分定数は C とする.

(1) $\int (x + 4) \cos x \, dx$

(2) $\int \cos^5 x \, dx$ ($t = \sin x$ と置いて考えよ)

(佐賀大 2010) (m20104920)

0.1101 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\int (x + 1/x) \, dx$ (2) $\int \sin x \, dx$ (3) $\int x e^x \, dx$ (4) $\int x \log x \, dx$

(佐賀大 2010) (m20104924)

0.1102 次の関数の導関数 dy/dx を求めなさい.

(1) $y = x \sin x$

(2) $y = (ax + b)^n$

(3) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(4) $y = \log \frac{2x}{1 + \sin x}$

(佐賀大 2011) (m20114901)

0.1103 下式で表される Leibniz の公式を使って, $y = x^3 \sin x$ の第 n 次導関数を求めなさい.

$$\text{Leibniz の公式 : } (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)}v'' + \cdots + \binom{n}{n} uv^{(n)}$$

ここで, $(uv)^{(n)}$: 関数 uv の第 n 次導関数, $\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$

(佐賀大 2011) (m20114902)

0.1104 $\int 2x \sin x \cos x dx$ を求めよ.

(佐賀大 2011) (m20114906)

0.1105 次の関数を微分せよ.

(1) 10^x (2) $\frac{1}{\sin^2 x}$ (3) $\cosh^{-1} x$

(佐賀大 2011) (m20114910)

0.1106 次の不定積分を計算せよ.

(1) $\int \left(\frac{3x+5}{x^2+4x+3} \right) dx$ (2) $\int (x^3 e^{-x^2}) dx$ (3) $\int (\sin 2x \cos 3x) dx$

(佐賀大 2011) (m20114911)

0.1107 (1) $t = \sin^{-1} x$ とおいて, 置換積分法で不定積分 $\int \frac{1}{(\sin^{-1} x)^2 \sqrt{1-x^2}} dx$ を求めよ.

(2) 定積分 $\int_{1/2}^1 \frac{1}{(\sin^{-1} x)^2 \sqrt{1-x^2}} dx$ を求めよ.

(佐賀大 2012) (m20124902)

0.1108 次の関数 y の導関数 dy/dx を求めなさい.

(1) $y = x^2 + \sqrt{x}$ (2) $y = e^{2x^2}$
 (3) $y = \sin(3x) \cos x$ (4) $y = x \log x$

(佐賀大 2012) (m20124907)

0.1109 次の関数 $f(x)$ の微分 $f'(x)$ を計算せよ.

(1) $f(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x + 1}$ (2) $f(x) = e^{\sin x} \cos(2x)$

(佐賀大 2012) (m20124911)

0.1110 次の定積分を計算せよ.

(1) $\int_0^1 \frac{x^3 + x^2 - 1}{x + 1} dx$ (2) $\int_0^1 e^{-x} \sin(\pi x) dx$

(佐賀大 2012) (m20124912)

0.1111 $f(x, y) = \sin(3xy)$ について, 偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を計算せよ.

(佐賀大 2012) (m20124913)

0.1112 $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ のとき, 次の等式が成り立つことを示しなさい.

(1) $A(\theta)^{-1} = A(-\theta)$ (2) $A(\alpha + \beta) = A(\alpha)A(\beta)$

(佐賀大 2012) (m20124915)

0.1113 次の関数の極限を求めよ。ただし、 $a > 0$ とする。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x}{x^3} \quad (3) \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{|x-a|}{x^2 - a^2}$$

(佐賀大 2013) (m20134910)

0.1114 次の2変数関数 $f(x, y)$ について、 $f_{xx} + f_{yy} = 0$ が成り立つかどうか確かめよ。ただし、 \log は自然対数とする。

$$(1) f(x, y) = e^{-x} \sin y \quad (2) f(x, y) = \log(x^2 + y^2) \quad (3) f(x, y) = \log(e^x + e^y)$$

(佐賀大 2013) (m20134911)

0.1115 次の定積分を求めよ；ただし、 $\sin^{-1} x$ は $\sin x$ の逆関数である。また、(2) は $t = \cos x$ とする置換積分法を用いよ。

$$(1) \int_{1/2}^1 \sin^{-1} x \, dx \quad (2) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin}{2 - \sin^2 x} \, dx$$

(佐賀大 2013) (m20134912)

0.1116 $y = \sqrt{1 + \sin x}$ の導関数を求めよ。

(佐賀大 2013) (m20134917)

0.1117 微分方程式 $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = -3 \sin x$ の一般解を求めよ。

(佐賀大 2013) (m20134923)

0.1118 次の関数 y の導関数 dy/dx を求めなさい。

$$(1) y = x \log_e x - x \quad (2) y = \frac{1}{3}(x^2 + 1)^{3/2} \quad (3) y = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax}$$

$$(4) y = 3^{-x} \quad (5) y = \log_e \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

(佐賀大 2013) (m20134924)

0.1119 次の不定積分を求めなさい。

$$(1) \int (3x + 1)^{1/3} \, dx \quad (2) \int x^2 \sqrt{1-x} \, dx \quad (3) \int \frac{x^3}{x^4 + 2} \, dx$$

$$(4) \int x^2 \sin x \, dx \quad (5) \int x e^{3x} \, dx$$

(佐賀大 2013) (m20134925)

0.1120 $f(t) = Ae^{-\lambda t} \sin(\omega t + \theta)$ が解となるような、 t を独立変数とする f の2階微分方程式を一つ書け。ここで $A, \lambda, \omega, \theta$ は定数とする。

(佐賀大 2014) (m20144902)

0.1121 次の $\nu(t)$ で表される正弦波交流

$$\nu(t) = V_m \sin \omega t$$

の実効値 $|V|$

$$|V| = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \nu(t)^2 \, dt}$$

を求めよ。ここで $\omega T = 2\pi$ とする。

(佐賀大 2014) (m20144904)

0.1122 全微分可能な 2 変数関数 $z = f(x, y)$ が $\frac{\partial z}{\partial x} = x\sqrt{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = y\sqrt{x^2 + y^2}$ を満たすとする.
 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ のとき, $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めよ.
 (佐賀大 2014) (m20144913)

0.1123 次の関数 y の導関数 dy/dx を求めなさい.

(1) $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($ad - bc \neq 0$) (2) $y = \log_e(x + \sqrt{x^2 + 1})$
 (3) $y = e^x(x^2 + 1)$ (4) $y = 2^{\sin x}$

(佐賀大 2015) (m20154904)

0.1124 次の関数 z の偏導関数 $\partial z / \partial x$ を求めなさい.

(1) $z = \sin xy$ (2) $z = x^y + y^x$

(佐賀大 2015) (m20154905)

0.1125 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$ (2) $\int x \log_e x dx$ (3) $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$ (4) $\int \sin^3 x dx$

(佐賀大 2015) (m20154906)

0.1126 2 次元 xy 平面を考える. 以下の問いに答えよ.

- (1) 点 $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ を原点の回りに角 ϕ だけ回転して $(x', y') = (r \cos(\theta + \phi), r \sin(\theta + \phi))$ に移すときの回転行列 $R(\phi)$ を求めよ.
 (2) $\Delta\phi$ が十分小さいとき, $R(\phi)$ が次のように表されることを示せ.

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\phi \\ \Delta\phi & 1 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2015) (m20154913)

0.1127 次の不定積分を求めよ.

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{1-3x}} dx$ (2) $\int \frac{1}{1 + \sin x} dx$

(佐賀大 2015) (m20154919)

0.1128 次の関数の n 次導関数を求めなさい.

(1) $\sin x$ (2) $\frac{1}{x^2 - 1}$

(佐賀大 2016) (m20164907)

0.1129 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\int (x^5 - 3x^2 + 2x) dx$ (2) $\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$ (3) $\int \sin^3 x dx$ (4) $\int \frac{\log x}{x} dx$

(佐賀大 2016) (m20164908)

0.1130 次の微分を求めよ. ただし, e は自然対数の底である.

(1) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ (2) $y = e^{-x} \sin x$ (3) $y = \frac{\log x}{x}$

(佐賀大 2016) (m20164911)

0.1131 次の積分を求めよ.

$$(1) \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$$

$$(2) \int \frac{2x^2-6}{(x-1)^2(x+1)} dx$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

(佐賀大 2016) (m20164912)

0.1132 次の関数の極限を求めよ. ただし, $a > 0$ とする.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

(佐賀大 2016) (m20164925)

0.1133 (1) 不定積分 $\int \frac{dx}{x^2(x^2+4)}$ を求めよ. (2) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$ を求めよ.

(3) $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$ として, 2重積分 $\iint_D xy dx dy$ を求めよ.

(佐賀大 2016) (m20164927)

0.1134 次の関数 y の導関数 dy/dx を求めなさい.

$$(1) y = \sqrt[3]{x^2+1}$$

$$(2) y = \{1 - (1-x^2)^2\}^2$$

$$(3) y = \tan 4x$$

$$(4) y = x^{\sin x}$$

(佐賀大 2016) (m20164930)

0.1135 次の関数 z の偏導関数 $\partial z/\partial x, \partial z/\partial y$ を求めなさい.

$$(1) z = \frac{x-y}{x+y}$$

$$(2) z = \sin x \cos y$$

(佐賀大 2016) (m20164931)

0.1136 次の不定積分を求めなさい.

$$(1) \int \frac{x^3+x^2+3x+1}{x^2+1} dx$$

$$(2) \int \log(x + \sqrt{x^2+1}) dx$$

$$(3) \int \cos^4 x \sin x dx$$

$$(4) \int x e^{x^2} dx$$

(佐賀大 2016) (m20164932)

0.1137 次の定積分の値を求めよ. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \sin^2 x) \cos x dx$

(佐賀大 2017) (m20174901)

0.1138 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1) \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \sin 2x$$

$$(2) \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = e^{-3x}$$

(佐賀大 2017) (m20174903)

0.1139 次の微分方程式を解け.

$$(1) \frac{dy}{dx} + y \tan x = \sin 2x$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = x(1+y^2)$$

(佐賀大 2017) (m20174910)

0.1140 次の関数を微分しなさい.

$$(1) y = \frac{4}{3}x^6$$

$$(2) y = (x^2+1)^3$$

$$(3) y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$(4) y = 2e^{5x}$$

$$(5) y = \sin^2 x$$

$$(6) y = \ln(x^2+x)$$

(佐賀大 2017) (m20174911)

0.1141 広義積分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx$ について, 次の問いに答えよ. ただし, \log は自然対数である.

(1) この広義積分が収束することを示せ.

(2) $I = -\frac{\pi}{2} \log 2$ であることを示せ.

(佐賀大 2017) (m20174918)

0.1142 次の極限值を求めなさい..

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x^2 - 1}{x^2(x^2 - 1)} - \frac{x}{x^2 - 1} \right)$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \arcsin \frac{x}{5}}{x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \{ \log(3x + 1) - \log 3x \}$

(佐賀大 2018) (m20184901)

0.1143 次の関数 z の偏導関数 $\partial z / \partial x$, $\partial z / \partial y$ を求めなさい.

(1) $z = x \log \frac{y}{x}$ (2) $z = e^{3x} \sin 2y$

(佐賀大 2018) (m20184923)

0.1144 次の関数を x^3 の項までマクローリン展開しなさい.

(1) e^x (2) $\sin x$

(佐賀大 2018) (m20184924)

0.1145 つぎの関数の 3 階導関数を求めよ.

(1) $x^3 \log x$ (2) $e^{ax} \sin bx$

(佐賀大 2018) (m20184926)

0.1146 つぎの関係を示せ.

(1) n が正の奇数 $n = 1, 3, 5, \dots$ のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}$$

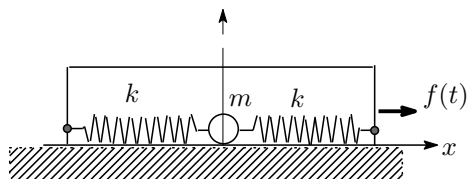
(2) n が正の偶数 $n = 2, 4, 6, \dots$ のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{\pi}{2} \frac{(n-1)!!}{n!!}$$

ここで!! は 1 つ飛ばしの階乗を表す. たとえば $4!! = 4 \cdot 2 = 8$, $5!! = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$ である.

(佐賀大 2018) (m20184927)

0.1147 図に示すように、滑らかな台の上のせた、軽い容器の中にバネ定数 k の軽いバネで両側から支えられた質量 m のおもりの運動を考える. なお、「軽い」とは質量ゼロを意味し、おもりと容器、容器と台の間の摩擦は無いものとする. いま、容器に対して $f(t) = \sin \omega t$ の外力が加えられたときの、おもりの中心位置 $x(t)$ を導出せよ. ただし、 $t = 0$ において $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 1$ とする.



(佐賀大 2018) (m20184929)

0.1148 次の積分をせよ.

$$(1) \int_0^{\infty} \sin 2xe^{-x} dx \quad (2) \int_0^{\infty} \cos 2xe^{-x} dx \quad (3) \int_0^1 x(x^2+1)^5 dx$$

(佐賀大 2021) (m20214912)

0.1149 $f(x, y) = \sin^2(x) - \cos(y)$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \pi$) の極値を求めよ.

(佐賀大 2021) (m20214917)

0.1150 重積分 $\iint_D (x+y)^2 dx dy$ $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ について $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ として計算せよ.

(佐賀大 2021) (m20214926)

0.1151 次の関数を微分せよ.

$$(1) e^{5x} \sin 2x \quad (2) \log_e(\log_e x)$$

(佐賀大 2022) (m20224905)

0.1152 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x + \tan^{-1}(2x)}{x}$ を求めよ.

ただし, $\sin^{-1} x$ および $\tan^{-1} x$ は, それぞれ $\sin x$ および $\tan x$ の逆関数である.

(佐賀大 2022) (m20224913)

0.1153 次の関数 y の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めなさい.

$$(1) y = (x+3)^8 \quad (2) y = \sin(2x) \quad (3) y = e^{\cos x}$$

$$(4) y = \sqrt{x^3 + x^2 + 1} \quad (5) y = \log(x^3 + 1) \quad (6) y = \frac{\log(x)}{x^2 + 3}$$

(佐賀大 2022) (m20224919)

0.1154 次の不定積分を求めなさい. 積分定数を C とする. 必要な計算過程も記すこと.

$$(1) \int (\cos x + 3x^3) dx \quad (2) \int \sin^2(x) dx$$

$$(3) \int \frac{1}{(x-3)(x+2)} dx \quad (4) \int x^3 \log(x) dx$$

(佐賀大 2022) (m20224921)

0.1155 $\sin 12^\circ$ の近似値を小数 3 桁まで求めなさい. 答えだけでなく途中経過 も記載すること.

(佐賀大 2022) (m20224925)

0.1156 重積分 $\iint_D \sin 2x dx dy$ $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x+y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x-y \leq \frac{\pi}{2}\}$ を求めなさい.

答えだけでなく途中経過 も記載すること.

(佐賀大 2022) (m20224929)

0.1157 $f(x) = e^{-x} \sin x$ について以下の問いに答えなさい. ただし, $0 \leq x \leq 2\pi$ とする.

(1) 曲線 $y = f(x)$ の増減, 凹凸を調べ, その概形を描きなさい.

(2) f の最大値を f_{\max} とし, そのときの x を x_{\max} とする. また, f の最小値を f_{\min} とし, そのときの x を x_{\min} とする. このとき, x_{\max} , x_{\min} および $\left| \frac{f_{\max}}{f_{\min}} \right|$ を求めなさい. ただし, $\left| \frac{f_{\max}}{f_{\min}} \right|$ は $\frac{f_{\max}}{f_{\min}}$ の絶対値を表す.

(長崎大 2004) (m20045001)

0.1158 次の導関数を示せ.

- (1) x^n (2) e^x (3) $\log x$ (4) $\sin x$ (5) $\tan x$

(長崎大 2004) (m20045003)

0.1159 次の設問(1),(2)に答えよ.

(1) 次の不定積分を求めよ.

$$\int e^{2x} \sin 3x dx$$

(2) 次の曲線で囲まれた図形を x 軸に関して回転してできる回転体の体積を求めよ.

$$y = \frac{1}{x+1}, \quad x \text{ 軸}, \quad y \text{ 軸}, \quad \text{直線 } x = 2$$

(長崎大 2004) (m20045004)

0.1160 x を $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ の実数とする. このとき, 以下の間に答えよ.

(1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ を用いて, 次の公式

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

を導きなさい.

(2) $y = \tan^{-1} x$ に対して, 逆関数の微分の公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$$

を用いて, $\frac{dy}{dx}$ を x を用いて表しなさい.

(3) n を自然数とし,

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx$$

とおく. この I_n に対して, $n = 1$ のときの I_1 を求めなさい.

(4) (3) で与えられた I_n を

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx = \int 1 \times \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx$$

と考え, 部分積分法を用いて

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2 + 1)^n} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) I_n$$

が成り立つことを示しなさい.

(5) (3) で与えられた I_n に対して, $n = 3$ のときの I_3 を求めなさい.

(長崎大 2005) (m20055001)

0.1161 図1に示すように, xy 平面上に原点 $O(0,0)$ および点 $A(1,1)$, 点 $B(x,y)$ を考える. また, 2×2 行列を $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{bmatrix}$ とする. また, ベクトル \vec{OA} , \vec{OB} の長さを $|\vec{OA}|$, $|\vec{OB}|$ で表し, ベクトル \vec{OA} と \vec{OB} の内積を $\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle$ で表す.

(1) $\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle$ を $|\vec{OA}|$, $|\vec{OB}|$ および図中の θ を用いて表しなさい.

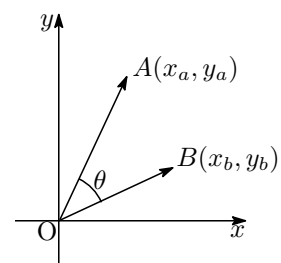


図1

- (2) $|\vec{OB}|$ と $\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle$ を x, y で表しなさい。
 (3) $\triangle OAB$ の面積を S とすると, $S = \frac{1}{2} |\vec{OA}| |\vec{OB}| \sin \theta$ で表される.
 このことを用いて,

$$4S^2 = |M|^2$$

が成り立つことを示しなさい. ただし $|M|$ は, 行列 M の行列式の値を表す.

- (4) $\triangle OAB$ が正三角形となるとき, 点 B の座標を求めよ.

(長崎大 2005) (m20055004)

0.1162 次の関数が与えられている.

$$f(x) = 1 - \cos x$$

$$g(x) = x \sin x$$

- (1) これらの関数をそれぞれ x の 4 乗までの多項式に展開せよ.
 (2) これらの関数を次式に代入し, その極限を求めよ. また, その結果がロピタルの定理を用いた結果と一致することを示せ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

(長崎大 2005) (m20055010)

0.1163 次の行列 A について以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の固有値を求めよ.
 (2) 固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.
 (3) 大きさを 1 に規格化した固有ベクトルを列ベクトルとして並べてできる行列 P の逆行列 P^{-1} を求めよ.
 (4) $P^{-1}AP$ を計算せよ.

(長崎大 2005) (m20055013)

0.1164 次の関数を x について (不定) 積分せよ.

$$\sin x + x^2$$

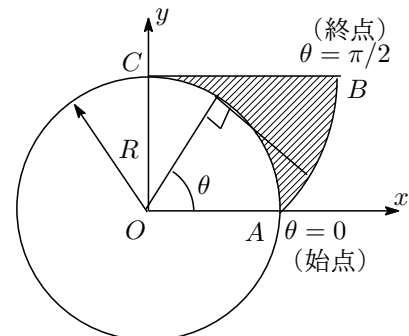
(長崎大 2005) (m20055022)

0.1165 太さを無視できる糸を巻き付けた半径 R の円柱がある. 糸を張りながら円柱から外すとき以下の問いに答えよ.

- (1) 図のように $\theta = 0$ の位置からはじめて $\theta = \pi/2$ まで糸が外れた. 円柱から外れた糸の長さ BC はいくらか.
 (2) θ の位置まで糸が外れたとき, 糸の先端の x および y 座標を R と θ を用いて表せ.
 (3) $\theta = \pi/2$ まで糸を外す間に, 糸の先端が描く曲線の長さ AB は次式で計算できる.

$$AB = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

上式を計算して曲線 AB の長さを求めよ.



(4) 図中の斜線部分の面積 A は

$$A = R^2 \left\{ \int_0^{\pi/2} (\theta \sin \theta \cos \theta + \theta^2 \sin^2 \theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \right\}$$

で与えられる. 右辺に含まれる定積分 $I = \int_0^{\pi/2} \theta \sin \theta \cos \theta d\theta$ の値を求めよ.

(長崎大 2007) (m20075002)

0.1166 (1) 定積分 $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin x dx$ を求めよ.

(2) 定積分 $\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$ を求めよ.

(3) 2重積分 $\iint_D x^2 y dx dy$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\}$ を計算せよ.

(4) 平面曲線が $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$, $(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$ で与えられるとき, 曲線の長さ L を求めよ.

(長崎大 2007) (m20075004)

0.1167 (1) 次の不定積分を求めよ. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$

(2) 次の方程式で囲まれる面積を求めよ. ただし, a, b は定数である. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(長崎大 2007) (m20075011)

0.1168 関数

$$f(x) = 1 - e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

について, 以下の問いに答えなさい. ただし, $0 \leq x \leq 2\sqrt{3}\pi$ とする.

(1) $\frac{df}{dx} = 0$ を満足する x の値をすべて求めなさい.

(2) (1) で求めた x に対して, $f(x)$ の値および $\frac{d^2 f}{dx^2}$ の値を求めなさい.

(3) $0 \leq x \leq 2\sqrt{3}\pi$ における, 最初の極大値を y_1 , 2 番目の極大値を y_2 とし,

$$p_1 = y_1 - 1, \quad p_2 = y_2 - 1$$

と定義する. このとき, $\ln(p_2/p_1)$ を求めなさい. \ln は自然対数 (底が e の対数) を表す.

(長崎大 2008) (m20085001)

0.1169 次の (a),(b) の行列式の値をそれぞれ求めよ.

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} \sin \alpha & -\sin \beta \\ \cos \alpha & \cos \beta \end{vmatrix} \quad \text{ただし, } \alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$$

(長崎大 2008) (m20085017)

0.1170 (1) 定積分 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ を求めよ.

(2) $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$ とするとき, 領域 D を図示し, 2重積分 $\iint_D x\sqrt{y} dx dy$ を求めよ.

- (3) xy 平面上での曲線が 3 次式で与えられるとき、曲線を図示し、その長さを求めよ。

$$\begin{cases} x = t \cos t \\ y = t \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(長崎大 2009) (m20095008)

- 0.1171** 次の微分方程式を解け。ここで、 $y' = \frac{dy}{dx}$ とする。

(1) $y'' + 4y = 0$

(2) $y'' + 4y = \sin 3x$

- (3) 初期条件 $y(0) = 0$, $y'(0) = 1.4$ ($x = 0$ のとき $y = 0$, $y' = 1.4$) を満たす $y'' + 4y = \sin 3x$ の解を求めよ。

(長崎大 2009) (m20095009)

- 0.1172** (1) 次の関数を微分せよ。

(a) $\sin^{-1} \frac{x}{3}$

(b) $e^{-x^2} + \tan x$

- (2) 次の極限値を求めよ。

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$

(b) $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$

(長崎大 2009) (m20095011)

- 0.1173** (1) 不定積分 $\int (1+x)\sqrt{1-x} dx$ を求めよ。

- (2) $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$ とするとき、領域 D を図示し、次の 2 重積分を求めよ。

$$I = \iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

- (3) xy 平面上での曲線が 3 次式で与えられるとき、その長さを求めよ。

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$$

(長崎大 2009) (m20095012)

- 0.1174** (1) 微分方程式 $y'' + 2y' - 35y = 0$ の一般解を求めよ。

なお、 $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ とする。

- (2) 微分方程式 $y'' + 2y' - 35y = 12e^{5x} + 37 \sin 5x$ の特殊解を求めよ。

- (3) 微分方程式 $y'' + 2y' - 35y = 12e^{5x} + 37 \sin 5x$ の一般解を求めよ。

(長崎大 2009) (m20095013)

- 0.1175** 下記の極限値を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

(長崎大 2010) (m20105002)

- 0.1176** (1) $e^{a\sqrt{x}}$ の微分を求めよ。ただし、 a は実定数である。

- (2) $x^k \sin ax$ の微分を求めよ。ただし、 k は整数、 a は実定数である。

- (3) 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(a^x + b^x) - \log 2}{x}$ を計算せよ. ただし, a, b は正定数である.
(長崎大 2010) (m20105011)

0.1177 つぎの微分方程式を解け. ここで, $y' = \frac{dy}{dx}$ とする.

(1) $y' + 3y = 0$

(2) $y' + 3y = \sin x$

(長崎大 2010) (m20105015)

0.1178 $\sinh(1 - 2x)$ を不定積分せよ.

(長崎大 2011) (m20115002)

0.1179 以下の問いに答えよ.

(1) $e^{2x} \sin(ax)$ の微分を求めよ. ただし a は定数である.

(2) $x^{\sin x}$ の微分を求めよ.

(3) 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin x - x}$ を計算せよ.

(長崎大 2011) (m20115008)

0.1180 次の積分を計算せよ.

(1) $\int \frac{\cos x}{2 + \sin x} dx$

(2) $\int_1^2 x \log x dx$

(3) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$

(長崎大 2011) (m20115010)

0.1181 以下の問いに答えよ.

(1) 微分方程式 $y'' + y = 0$ の一般解を求めよ, なお, $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ とする.

(2) 微分方程式 $y'' + y = 6 \sin x$ の特殊解を求めよ,

(3) 微分方程式 $y'' + y = 6 \sin x$ の一般解を求めよ,

(長崎大 2011) (m20115012)

0.1182 関数 $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ ($0 \leq x < 2\pi$, $0 \leq y < 2\pi$) の極値を求めよ. 求める過程も記述すること.

(長崎大 2011) (m20115015)

0.1183 次の積分を計算せよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$$

(長崎大 2011) (m20115019)

0.1184 座標平面上の助変数表示をもつ曲線

$$C : \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = -1 + \cos t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

について次の問いに答えよ.

(1) 曲線 C の概形を示せ.

(2) 曲線 C の長さを求めよ.

(大分大 2009) (m20095104)

0.1185 座標平面上を動く点 P の時刻 t における位置が

$$\begin{cases} x = e^{-t} \cos t \\ y = e^{-t} \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t < +\infty)$$

で与えられている.

- (1) $t = \frac{\pi}{6}$ のときの点 P の位置を求めよ.
- (2) $t = \frac{\pi}{3}$ のときの点 P の速度ベクトルを求めよ.
- (3) $0 \leq t \leq 4\pi$ の間に点 P の進む距離を求めよ.

(大分大 2010) (m20105101)

0.1186 $\sin^2 t$ のラプラス変換を求めよ.

(大分大 2011) (m20115102)

0.1187 次の微分方程式を解きなさい.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 9y = \sin(3x + 5)$$

(大分大 2011) (m20115105)

0.1188 次の不定積分を求めよ.

$$\int \sin(2x + 1) dx$$

(大分大 2012) (m20125101)

0.1189 $f(t) = \sin \omega t$ ($\omega \neq 0$ の実数) とするとき, $t \sin \omega t$ のラプラス変換を求めよ.

(大分大 2012) (m20125105)

0.1190 次の不定積分を求めよ.

$$(1) \int \frac{x+4}{x(x+1)} dx \quad (2) \int \sin^2 x dx \quad (3) \int x e^{2x} dx$$

(大分大 2014) (m20145103)

0.1191 $\int_0^1 \sin^{-1} x dx$ の値を求めよ.

(熊本大 2001) (m20015203)

0.1192 n 次の実正方行列 A について, ${}^t A A = E$ が成り立つとき, A は n 次の直交行列であるという. ここで, ${}^t A$ は A の転置行列, E は n 次の単位行列である. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) A, B が共に n 次の直交行列であれば, AB, A^{-1} も n 次の直交行列であることを示せ.
- (2) 2 次の直交行列 A は次の 2 つの行列のいずれかの形をしていることを示せ.

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

(熊本大 2004) (m20045203)

0.1193 $x = r \cos \theta, y = 2r \sin \theta$ のとき, 行列式 $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(熊本大 2006) (m20065201)

0.1194 関数 $f(x) = e^{-x} \sin x$ ($x \geq 0$) において, 次の問いに答えなさい.

- (1) a と b を実数とし, $\int_a^b f(x)dx$ を求めなさい.
- (2) n を自然数とし, 区間 $(n-1)\pi \leq x \leq n\pi$ において, 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めなさい.
- (3) $f(x)$ の極大値を与える x を小さい順に $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ とするとき, $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ の値を求めなさい.

(熊本大 2011) (m20115202)

0.1195 次の重積分の値を求めるために, 以下の小問 (1) と (2) について答えなさい.

$$\iint_{4 \leq x^2 + y^2 \leq 9} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \quad \text{①}$$

- (1) 変数 x, y を $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ のように変数 r, θ を用いて変数変換をする, この変数変換のヤコビアン $J = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix}$ を求めなさい.
- (2) 変数 r, θ とヤコビアン J を用いて, 式 ① の重積分の値を求めなさい.

(熊本大 2014) (m20145203)

0.1196 以下の関数を全微分せよ.

$$z = e^{-x} \sin 2y$$

(熊本大 2018) (m20185201)

0.1197 $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, f(x, y) = x^2 y + 2y$ のとき, $f(x(t), y(t))$ を t で微分せよ.

(熊本大 2019) (m20195201)

0.1198 xy 平面上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を同じ平面上の点 $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ に移す写像

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

- (1) この写像の表す固有値 λ_1, λ_2 と固有ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ の組を求めなさい. なお, 固有ベクトルの大きさは $\sqrt{2}$ とすること.
- (2) xy 平面上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ により以下のように表せる.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2$$

α, β を x, y を用いて表しなさい.

- (3) $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ を $\alpha, \beta, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ を用いて表しなさい.

(熊本大 2019) (m20195203)

0.1199 2変数関数 $z = f(x, y) = e^{-x} \sin y$ について, 次の各問に答えよ.

- (1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を求めよ.

- (2) 曲面 $z = f(x, y)$ の上の点 $P\left(0, \frac{\pi}{2}, 1\right)$ における接平面の方程式を求めよ.
(宮崎大 2004) (m20045301)

0.1200 変数 x, y, z から, 変数 u, v, w への変数変換を

$$u = x \cos z - y \sin z, \quad v = x \sin z + y \cos z, \quad w = z$$

と定めたとき, 以下の各問に答えよ.

- (1) 次の恒等式が成立することを示せ.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 1$$

- (2) 関数 $f = e^{-\sqrt{u^2+v^2}} \cos w$ に対して, $\frac{\partial f}{\partial z}$ を x, y, z の関数として求めよ.
(宮崎大 2005) (m20055303)

- 0.1201** (1) 次の微分方程式の一般解を求めよ. $(x+1)\frac{dy}{dx} + y = 0$

- (2) 次の微分方程式の一般解を求めよ. $(x+1)\frac{dy}{dx} + y = (x+1)\sin x$
(宮崎大 2006) (m20065305)

0.1202 2変数関数 $f(x, y) = \log(1+x^2+2y^2)$ について, 次の各問いに答えよ.

- (1) $f(x, y)$ の偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

- (2) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ($r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) とおくととき, 関数 f の r, θ に関する偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \theta}$ を x, y のみを用いて表せ.

(宮崎大 2007) (m20075302)

- 0.1203** 次の微分方程式を解け. $\frac{dx}{dt} + x + \sin t = 0$ (宮崎大 2007) (m20075305)

- 0.1204** (1) 平面内の領域 $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$

を xy 平面上に図示せよ. ただし, a, b は正の定数とする.

- (2) $x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta$ ($r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) と変換したとき, 領域 D に対応する $r\theta$ 平面上の領域 E を不等式で表し, またそれを図示せよ.

- (3) ヤコビアン $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

- (4) (3) で求めたヤコビアンを用いて, 重積分 $\iint_D x dx dy$ の値を求めよ.

(宮崎大 2008) (m20085303)

0.1205 重積分

$$I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

について, 次の各問いに答えよ.

- (1) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおいたときのヤコビアン $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を求めよ.

- (2) 重積分 I の値を求めよ.

0.1206 変数 t の関数 $x = x(t)$, $y = y(t)$ が次の連立微分方程式の初期値問題を満たしているとする.

$$(*) \cdots \cdots \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0 \end{cases}$$

このとき, 次の各問に答えよ.

- (1) 新しい関数 $r = r(t)$ と $\theta = \theta(t)$ を用いて, 関数 x, y を $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, とおく (ただし, $r > 0$). このとき, r, θ はそれぞれ

$$\frac{dr}{dt} = 2r, \quad \frac{d\theta}{dt} = 1$$

を満たすことを示せ.

- (2) 連立微分方程式の初期値問題 (*) を解け.

(宮崎大 2011) (m20115305)

0.1207 次の各問に答えよ. ただし, i は虚数単位とする.

- (1) オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を用いて, $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ を導け.

- (2) (1) の結果を用いて, 以下の等式がすべての実数 θ に対して成立するように, 定数 a と b を定めよ.

$$\sin^3 \theta = a \sin \theta + b \sin 3\theta$$

(宮崎大 2012) (m20125301)

0.1208 x と y について何回でも偏微分可能な 2 変数関数 $f(x, y)$ に対し,

$$x = x(u, v) = u \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad y = y(u, v) = u \sin \alpha + v \cos \alpha$$

を代入して, 合成関数 $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ を作る. ここで, α は実数の定数とする. これについて, 次の各問に答えよ. ただし, 以下では関数の引数を省略しており, 例えば $\frac{\partial g}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ は, それぞれ $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v))$ の意味である.

- (1) 等式 $\frac{\partial g}{\partial u} = a_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 \frac{\partial f}{\partial y}$ を満たす定数 a_1, a_2 を求めよ.
- (2) 等式 $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = b_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + b_3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を満たす定数 b_1, b_2, b_3 を求めよ.
- (3) 等式 $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = c_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c_3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を満たす定数 c_1, c_2, c_3 を求めよ.

(宮崎大 2014) (m20145305)

0.1209 重積分

$$I = \iint_D \sin \frac{2x+y}{9} dx dy, \quad D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq x, x + \frac{y}{2} \leq 3\pi \right\}$$

について, 次の各問に答えよ.

- (1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ.

- (2) 等式 $I = \int_{\text{ア}}^{\text{イ}} \left(\int_{\text{ウ}}^{\text{エ}} \sin \frac{2x+y}{9} dx \right) dy$ の空欄 $\text{ア} \sim \text{エ}$ に当てはまる数値あるいは数式を答えよ.

(3) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2016) (m20165305)

0.1210 (1) 微分方程式 $\frac{dy}{dx} + y \sin x = 0$ の一般解 $y = y(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $y = a \cos x + b$ が微分方程式 $\frac{dy}{dx} + y \sin x = \sin 2x$ の特殊解となるように, 定数 a, b の値を定めよ.

(3) 微分方程式 $\frac{dy}{dx} + y \sin x = \sin 2x$ を, $y(0) = 5$ という条件の下で解け.

(宮崎大 2019) (m20195305)

0.1211 2変数関数 $f(x, y) = \sin(x^2 y)$ の2階までの偏導関数 $f_x(x, y), f_y(x, y), f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y), f_{yy}(x, y)$ をすべて求めよ.

(宮崎大 2022) (m20225302)

0.1212 次の極限值を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$

(鹿児島大 2001) (m20015402)

0.1213 次の関数を微分せよ.

(1) $y = (3x + 2)(3x^2 + 6x + 1)$

(2) $y = 2x/(x^2 + 5)$

(3) $y = \sin^2 5x$

(鹿児島大 2001) (m20015404)

0.1214 置換積分法を用いて, 次の不定積分を求めよ. ただし, $a \neq 0$

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$ ($x = a \sin \theta$ とおく)

(2) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ($x = a \sin \theta$ とおく)

(2) $\int \frac{1}{1 + \cos x} dx$ ($t = \tan \frac{x}{2}$ とおく)

(鹿児島大 2001) (m20015407)

0.1215 次の不定積分を求めよ.

(1) $\int (ax + b)^n dx$ ($n \neq -1$)

(2) $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$ ($a \neq b$)

(3) $\int \sin^2 dx$

(4) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$

(鹿児島大 2005) (m20055401)

0.1216 微分方程式に関する以下の問に答えよ.

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(a) $ydy = 3(x^2 y^2 + xy^2)dx$

(b) $ye^{y-x} dy = dx$

(2) 次の微分方程式が, 右に示す解をもつことを示せ. ただし, a, b は任意の定数とする.

$$y'' + 4y' + 8y = 0 \quad : \quad y = ae^{-2x} \cos 2x + be^{-2x} \sin 2x$$

(鹿児島大 2005) (m20055402)

0.1217 次の微分, 積分を求めなさい.

(1) $\frac{d}{dx} \left(\frac{\log x}{\sqrt{x^2 + 2}} \right)$

(2) $\frac{d^2}{dx^2} (\sin^3 x)$

(3) $\int_0^\pi (x^4 - 2 \sin x) dx$

(4) $\int x e^{-x} dx$

(鹿児島大 2005) (m20055405)

0.1218 次の x に関する関数において, 1 階の導関数を求めなさい.

(1) $\frac{1}{1-x}$

(2) $\sin 2x + \cos x$

(3) $e^x \log x$

(鹿児島大 2005) (m20055409)

0.1219 平面内にある直交直線座標系で規定したベクトルの変換行列 \mathbf{A} において, 次の間に答えなさい.

(1) 原点の周りに反時計回りに $\frac{\pi}{6}$ ラジアン回転させるベクトルの変換行列 \mathbf{A} (直交行列) は次のように与えられる.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

行列 \mathbf{A} を用いてベクトル $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を回転変換させるには, $\mathbf{A}\mathbf{r}$ の演算をすればよい. 回転変換によって得られるベクトルを求めよ.

(2) ベクトル $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ をベクトル $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$ に変換する 2 行 2 列の変換行列 \mathbf{A} を求めよ. ただし, a, b は実数とする.

(鹿児島大 2005) (m20055411)

0.1220 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき, $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x}$ であることを証明せよ.

(鹿児島大 2005) (m20055413)

0.1221 微分方程式に関する以下の間に答えよ.

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(a) $2x dx - dy = x(x dy - 2y dx)$

(b) $(y^2 + \cos x) dx + (2xy - \sin y) dy = 0$

(2) 次の微分方程式の完全解を求めよ.

$$y'' + 4y' + 4y = x e^{-2x}$$

(鹿児島大 2006) (m20065402)

0.1222 次の関数を微分せよ.

(1) $y = (8 - x)^2 + 3x$

(2) $y = \log x \cdot e^{-x}$

(3) $y = \sin x \cdot (1 + \cos x)$

(鹿児島大 2006) (m20065411)

0.1223 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \sin x \cos 2x$ (2) $y = \sin^{-1} x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$

(鹿児島大 2006) (m20065413)

0.1224 次の定積分を求めよ.

(1) $\int_0^\pi \sin^2 x dx$ (2) $\int_0^\pi x \cos x dx$

(鹿児島大 2006) (m20065414)

0.1225 ベクトル $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ は互いに直交していることを示せ.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2006) (m20065415)

0.1226 次の不定積分を求めよ.

(1) $\int x e^{-2x} dx$ (2) $\int \frac{(x+1)}{x^2+2x+3} dx$ (3) $\int \sin x \cos x dx$

(4) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} \quad (a > 0)$

(鹿児島大 2007) (m20075401)

0.1227 (1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(a) $(x^2 + 2xy) dx + xy dy = 0$ (b) $(xy^2 + \sin x) dx + (x^2 y + \cos y) dy = 0$

(2) 次の微分方程式の完全解を求めよ.

$$y'' + 4y' + 3y = 3e^{-x}$$

(鹿児島大 2007) (m20075402)

0.1228 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)$ (2) $y = \tan(x) \cdot \log(x)$

(鹿児島大 2007) (m20075409)

0.1229 次の関数を積分せよ.

(1) $\int \frac{1}{3(x+2)^3} dx$ (2) $\int \sin^2(\theta) d\theta$

(鹿児島大 2007) (m20075410)

0.1230 次の関数のグラフを図示せよ. 特徴的な点は値とともに図示せよ. 範囲は $\{-\pi \leq \theta \leq \pi\}$ とする. グラフは可能な範囲で丁寧に描くこと.

$$y = 3 \sin 2(\theta + \pi/3)$$

(鹿児島大 2007) (m20075412)

0.1231 $f'(0) = a$ のとき $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(\sin x)}{x}$ を求めよ.

(鹿児島大 2007) (m20075413)

0.1232 次の不定積分を求めよ.

$$(1) \int x^2 e^x dx \quad (2) \int \frac{1}{x^2 + 4x + 3} dx \quad (3) \int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$

$$(4) \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0, -a < x < a)$$

(鹿児島大 2008) (m20085401)

0.1233 (1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

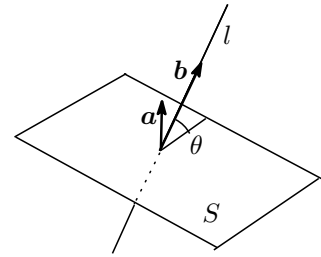
$$(a) (xy + 2x - 3y - 6)dx + dy = 0 \quad (b) (x^2 y + \cos x)dx + (x^3/3 + \sin y)dy = 0$$

(2) 次の微分方程式の完全解を求めよ. $y'' + 2y' + 2y = 4 \sin x$

(鹿児島大 2008) (m20085402)

0.1234 次のベクトルに関する問いに答えよ.

(1) 右図のように, \mathbf{a} は平面 S と直交する法線ベクトルであり, \mathbf{b} は平面 S と角 θ ($\leq 90^\circ$) で交わる直線 l の上に存在するベクトルである. \mathbf{a} , \mathbf{b} を用いて $\sin \theta$ を表せ.



(2) 次の式で表される二つの平面 S_1 と S_2 の交角 α を求めよ.

$$S_1 : x + 2y + 2z = 3 \quad S_2 : 3x + 3y = 1$$

(鹿児島大 2008) (m20085403)

0.1235 次の微分・積分を求めなさい.

$$(1) \frac{d}{dx} \left(\log \left| x + \sqrt{x^2 + 2} \right| \right) \quad (2) \int e^x \cdot \sin x dx$$

(鹿児島大 2008) (m20085405)

0.1236 次の関数の微分を求めよ.

$$(1) f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \quad (2) f(x) = \sin^{-1}(x)$$

(鹿児島大 2008) (m20085409)

0.1237 (1) $\frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right)$ を x で微分せよ.

(2) x^x を x で微分せよ.

(3) 不定積分 $\int \frac{3x}{x^2 - x - 2} dx$ を求めよ.

(4) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$ を求めよ.

(鹿児島大 2008) (m20085414)

0.1238 微積分に関する以下の問いに答えよ.

(1) 次の微分を計算し, 簡単な式で表せ.

$$(a) \frac{d}{dx} \sin(\tan(x)) \quad (b) \frac{d}{dx} (\sin 2x \cdot \tan 2x)$$

(2) 次の不定積分を求めよ.

$$(a) \int \frac{1}{2x^2 - x - 3} dx \quad (b) \int \frac{dx}{x^2 + 1}$$

(鹿児島大 2009) (m20095401)

0.1239 曲線: $y = a \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) (a : 定数) と x 軸によって囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めなさい.

(鹿児島大 2009) (m20095408)

0.1240 $y = \sin^{-1} x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$ の導関数を求め、 $y = \sin^{-1} \frac{1}{x}$ を微分せよ ($x > 1$) .
(鹿児島大 2009) (m20095409)

0.1241 (1) x^x を x で微分せよ.

(2) 不定積分 $\int \frac{3x}{x^2 - x - 2} dx$ を求めよ.

(3) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$ を求めよ.

(鹿児島大 2009) (m20095410)

0.1242 (1) $\int (2x^2 - 1/x)^2 dx$ を求めなさい.

(2) $\int \cos^3 x dx$ を求めなさい.

(3) 楕円 (長軸 a , 短軸 b , $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$) の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2009) (m20095412)

0.1243 微積分に関する以下の問に答えよ.

(1) 次の微分を計算し、簡単な式で表せ.

(a) $\frac{d}{dx} \sin(\tan x)$

(b) $\frac{d}{dx} (\log 2x \cdot \tan x^2)$

(2) 次の不定積分を求めよ. ただし, a, b は任意定数とする.

(c) $\int \frac{1}{x^2 + (a-b)x - ab} dx$

(d) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$

(鹿児島大 2009) (m20095413)

0.1244 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $5xy^2 dy + 2(x^3 - 3x)y dx = 0$

(2) $(xy + \sin x \cdot \cos y) dx + (x^2/2 + \cos x \cdot \sin y) dy = 0$

(3) $y'' + 2y' + y = 0$

(鹿児島大 2009) (m20095414)

0.1245 原点 $O(0,0)$, 点 $A(4,-1)$, 点 $B(2,2)$ がある時, 以下の問いに答えなさい.

(1) ベクトル \vec{OA} と \vec{OB} の長さと内積 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ を求めなさい.

(2) 角 AOB を θ とする時, $\cos \theta$ と $\sin \theta$ を求めなさい.

(3) 三角形 OAB の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2009) (m20095419)

0.1246 次の微分を計算し, 簡単な式で表せ.

(1) $\frac{d}{dx} \log(\cos x)$

(2) $\frac{d}{dx} \left(\frac{\cos 2x}{\sin 2x} \right)$

(鹿児島大 2010) (m20105401)

0.1247 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $2xy dx + xy dy + y dx + 2x dy = 0$

(2) $(2xy^2 + \sin x) dx + (2x^2 y + \cos y) dy = 0$

(3) $y'' + y' - 2y = e^{-2x} + 3e^{2x}$

(鹿児島大 2010) (m20105403)

0.1248 次の定積分を求めなさい.

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$$

(鹿児島大 2010) (m20105407)

0.1249 原点 $O(0,0)$, 点 $A(2,1)$ がある時, 以下の問いに答えなさい.

- (1) 点 A に対して x 軸に関して線対称な点 B を求めなさい.
- (2) $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$, $|\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}|$ を求めなさい. それらを使い $\angle AOB = \theta$ とした時の $\cos \theta$ と $\sin \theta$ の値を求めなさい.
- (3) 点 A を原点の周りに反時計回りに 45回転させた点 C の座標を求めなさい.

(鹿児島大 2010) (m20105409)

0.1250 以下の問いに答えよ.

(1) x の関数 $f(x)$, $g(x)$ について, 以下の部分積分法の公式

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

が成り立つことを示せ.

(2) 上記の公式を利用して, 不定積分 $\int \log x \, dx$ を求めよ.

(3) $t = \tan \frac{x}{2}$ とする. このとき, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ であることを示せ.

(4) 前問の結果を利用して, 不定積分 $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ を求めよ.

(鹿児島大 2011) (m20115401)

0.1251 次の微分を計算し, 簡単な式で表せ.

(1) $\frac{d}{dx} \{ \sin(x^3) \}$

(2) $\frac{d}{dx} (\log x \cdot \cos x)$

(鹿児島大 2012) (m20125401)

0.1252 行列 $A = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, 行列 $B = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ がある. このとき, 以下の各問に答えよ.

(1) AB ならびに BA を求めよ.

(2) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = 2BA - C$ とするとき, D を求めよ.

(3) n を正の整数, $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$ とするとき, $D^n \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \cos(-n\pi/2 + 2n\theta + \phi) \\ \sin(-n\pi/2 + 2n\theta + \phi) \end{pmatrix}$ であることを証明せよ.

(4) $R = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$ とするとき $D^n = R$ の形に書けることを示し, β を求めよ. また, このことを利用して逆行列 $(D^n)^{-1}$ を求めよ.

(鹿児島大 2012) (m20125404)

0.1253 直交座標系 $O - XYZ$ におけるベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ に対して, 次の問いに答えよ.

- (1) ベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} とは互いに直交になり, $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$ であるとき, $|(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})|$ を求めよ. ただし, “ \times ” はベクトルの外積を表し, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$ である. $|\mathbf{a}|$ と $|\mathbf{b}|$ はそれぞれ \mathbf{a} と \mathbf{b} の大きさを表す. また, θ は \mathbf{a} から \mathbf{b} へのなす角である.
- (2) $\mathbf{a} = (2, -3, 1)$, $\mathbf{b} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{c} = (1, 2, -7)$ であるとき, $\mathbf{A} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{A} \perp \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = 10$ を満たすベクトル \mathbf{A} を求めよ. ただし, “ \cdot ” はベクトルの内積を表し, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ である. また, 外積について $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$ にもなる.

(鹿児島大 2012) (m20125409)

0.1254 次の微分を求めなさい.

$$\frac{d}{dx} (\sin^{-1} x) \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

(鹿児島大 2012) (m20125416)

0.1255 以下の問題に答えなさい.

- (1) $(x^2 + 1)^2$ を微分しなさい.
- (2) 関数 $y = \cos^2 x - \sin^2 x$ の最大値, 最小値, そのときの x の値を求めなさい.

(鹿児島大 2012) (m20125421)

0.1256 以下の問いに答えなさい.

- (1) 関数 $y = \cos x$ ($-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$) と x 軸で囲まれた面積を求めなさい.
- (2) t の関数 $F(t) = \int_0^{10} z(x) \cos(t-x) dx$ の最大値が $\sqrt{\left\{ \int_0^{10} z(x) \cos x dx \right\}^2 + \left\{ \int_0^{10} z(x) \sin x dx \right\}^2}$ となることを示しなさい. ただし, $z(x)$ は, x に関する任意の関数である.

(鹿児島大 2012) (m20125422)

0.1257 以下の問題に答えなさい.

- (1) 加法定理 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ を用いて $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$ が成立することを示しなさい.
- (2) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ を, $x = a \sin t$ とおくことにより計算しなさい. ただし, $a > 0$ とする.

(鹿児島大 2012) (m20125426)

0.1258 x の関数 y に関する微分方程式 $\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0$ について次の問に答えなさい.

- (1) この微分方程式の一般解は, $y = A \sin kx + B \cos kx$ で与えられる (A, B は未定係数). $x = 0$ のとき $y = 0$ とすると, 未定係数 B の値はいくらか.
- (2) さらに, $x = 10$ のとき, $y = 0$ とする. 未定係数 A が 0 以外の値を取り得るための k の値を求めなさい.

(鹿児島大 2012) (m20125428)

0.1259 次の関数 y を x で微分し, 三角関数 1 つを用いた式に整理しなさい.

$$y = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(鹿児島大 2012) (m20125432)

0.1260 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$ を求めなさい. (鹿児島大 2012) (m20125435)

0.1261 以下の微分を計算せよ.

(1) $\frac{d}{dx} \left\{ \log \left(\tan \frac{x}{2} \right) \right\}$ (ただし, $0 < x < \pi$)

(2) $\frac{d}{dx} (\sin^{-1} x)$ (ただし, $-1 < x < 1$)

(鹿児島大 2013) (m20135401)

0.1262 以下の定積分を計算せよ.

(1) $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx$ (2) $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx$

(鹿児島大 2013) (m20135402)

0.1263 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y' = \frac{1}{x+y}$

(2) $(x+y^2)dx + (2xy - e^y)dy = 0$

(3) $y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x$

(鹿児島大 2013) (m20135403)

0.1264 関数 $(\sin ax)(\sin bx)$ を x で積分しなさい. ただし, a, b は $a \neq b$ で, 0 でない定数とする.

(鹿児島大 2014) (m20145405)

0.1265 曲線 $y = \sin^{-1} x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$) と直線 $y = \frac{\pi}{2}x$ について, 以下の問いに答えなさい. ただし, \sin^{-1} はアークサインとする.

(1) 上の曲線と直線が囲む領域を図示しなさい.

(2) 曲線と直線の囲む領域の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2014) (m20145415)

0.1266 次の関数の, 付記の区間での, 最大値, 最小値を求めなさい.

$f(x) = \cos x + \sin^2 x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$)

(鹿児島大 2014) (m20145416)

0.1267 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ が, 逆行列と転置行列の等しい直交行列 ($A^T = A^{-1}$) であることを示せ.

(鹿児島大 2015) (m20155415)

0.1268 次の関数を x で微分しなさい. $y = x^{\sin(x)}$

(鹿児島大 2015) (m20155417)

0.1269 以下の微分を計算せよ.

(1) $\frac{d}{dx} \log(x^2 + 4x + 4)$ (ただし, $x > 0$) (2) $\frac{d}{dx} \left(\frac{\cos x}{1 + \sin x} \right)$ (ただし, $0 < x < \pi$)

(鹿児島大 2016) (m20165401)

0.1270 以下の定積分を計算せよ.

$$(1) \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (2) \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$$

(鹿児島大 2016) (m20165402)

0.1271 三角形の加法定理を用いて,

$$\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta = 2 \sin(\theta - a)$$

の式における a を決定したい. どのように決定するか解法の過程を説明せよ. また a の値を答えよ.

(鹿児島大 2016) (m20165411)

0.1272 以下の微分を計算せよ.

$$(1) \frac{d}{dx} (x^2 + 1)(x^3 + 2) \quad (2) \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\sin x}{x} \right\}$$

(鹿児島大 2017) (m20175401)

0.1273 以下の不定積分, 定積分を計算せよ.

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} \quad (2) \int_0^{\pi} x \sin x dx$$

(鹿児島大 2017) (m20175402)

0.1274 次の不定積分を求めなさい. $\int x \sin x dx$

(鹿児島大 2017) (m20175407)

0.1275 以下の微分を計算せよ.

$$(1) \frac{d}{dx} \{(x^2 + 3x - 1)(5 - 2x - 3x^2)\} \quad (2) \frac{d}{dx} (\sin^{-1} x)^2$$

(鹿児島大 2018) (m20185401)

0.1276 次の定積分を計算せよ.

$$(1) \int_0^{\pi/3} \sin 3x dx \quad (2) \int_1^3 (9x^2 + 4x) \log x dx$$

(鹿児島大 2018) (m20185402)

0.1277 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1) x(x+1) \frac{dy}{dx} = -y \quad (2) \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + y = \sin x \quad (3) (2xy + x)dx + (x^2 + y)dy = 0$$

(鹿児島大 2018) (m20185403)

0.1278 曲線 $y = \sin^2 x$ について以下の問いに答えなさい.

(1) 曲線のグラフを $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で描きなさい.

(2) $0 \leq x \leq \pi$ の範囲において, 曲線と直線 $y = \frac{1}{2}$ で囲まれた部分の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2018) (m20185411)

0.1279 $x^{\sin x}$ ($x > 0$) の導関数を求めなさい.

(鹿児島大 2018) (m20185412)

0.1280 (1) $f(x, y) = x^2 + xy + y^3$, $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ のとき, $\frac{d}{dt} f(x(t), y(t))$ を計算しなさい.

(2) $g(x) = e^x$, $x = r \cos t$ のとき, $\frac{\partial}{\partial t} g(r \cos t)$, $\frac{\partial}{\partial r} g(r \cos t)$ を計算しなさい.

(鹿児島大 2018) (m20185414)

0.1281 次の微分を計算しなさい.

(1) $\frac{d}{dx} \left(\frac{2x}{1+2x^2} \right)$

(2) $\frac{d}{dx} (\sin 2x \cos^2 x)$

(鹿児島大 2018) (m20185420)

0.1282 曲線 $y = \sin x \cos x$ について, 以下の問いに答えなさい.

(1) 曲線のグラフを $0 \leq x \leq \pi$ の範囲でかきなさい.

(2) $0 \leq x \leq \pi$ の範囲において, 曲線と直線 $y = \frac{1}{4}$ で囲まれた部分の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2018) (m20185429)

0.1283 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 1$ (ただし, $x > 0$)

(2) $(x + \sin y)dx + x \cos y dy = 0$

(3) $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = x^2$

(鹿児島大 2021) (m20215403)

0.1284 $\frac{d(\log(x^2+3) + \sin^2 3x)}{dx}$ を求めなさい. ただし, \log は自然対数である.

(鹿児島大 2021) (m20215406)

0.1285 不定積分 $\int x \sin 2x \cos 2x dx$ を求めなさい.

(鹿児島大 2021) (m20215407)

0.1286 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ のとき, $\sin \theta \cos \theta$ を求めたい. 解法の指針を最初に述べた後に解答せよ.

(鹿児島大 2021) (m20215417)

0.1287 曲線 $C : x = \cos(t), y = \sin(t), z = \sqrt{3} \cdot t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) のとき, 次式を求めなさい.
ただし, s は曲線の長さを表す.

$$\int_C (xy + z) ds$$

(鹿児島大 2021) (m20215420)

0.1288 以下の微分を計算せよ.

(1) $\frac{d}{dx} \left(\frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - x - 1} \right)$

(2) $\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{1 - \cos x} \right)$

(鹿児島大 2022) (m20225401)

0.1289 以下の不定積分, 定積分を計算せよ.

(1) $\int \sin x \sin 3x dx$

(2) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

(鹿児島大 2022) (m20225402)

0.1290 $\frac{d}{dx} \left(\cos(\sin x^2) + \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \right)$ を求めなさい.

(鹿児島大 2022) (m20225406)

0.1291 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ のとき, $\sin \theta \cos \theta$ を求めたい. 解法の指針を最初に述べた後に解答せよ.

(鹿児島大 2022) (m20225411)

0.1292 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ.

(室蘭工業大 2005) (m20055501)

0.1293 次の関数を微分せよ.

$$y = \sin^4 3x$$

(室蘭工業大 2005) (m20055503)

0.1294 次の不定積分を求めよ.

$$\int x \sin x dx$$

(室蘭工業大 2005) (m20055504)

0.1295 次式で定義される双曲線関数 :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

について, 以下を示しなさい.

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(2) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

(室蘭工業大 2005) (m20055506)

0.1296 次の式が与えられている. $f(x) = \frac{\sin 2x - \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x}$ 導関数 $\frac{df}{dx}$ を求めなさい.

(室蘭工業大 2006) (m20065505)

0.1297 オイラーの公式: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ に関する以下の間に答えよ.

(1) オイラーの公式を用いて, つぎの公式を証明せよ.

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

(2) $e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta} e^{i\varphi}$ という式に, オイラーの公式を適用し, 両辺の実部と虚部を比較して, 余弦関数および正弦関数の加法公式

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi$$

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi$$

を導出せよ.

(室蘭工業大 2006) (m20065508)

0.1298 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ が直交行列であることを示しなさい.

(室蘭工業大 2007) (m20075506)

0.1299 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ で与えられる. ただし, $f^{(n)}(0)$ は $x = 0$ における $f(x)$ の n 階導関数である. $x \rightarrow 0$ のとき, $e^x \sin x$ の漸近展開を x^3 の項まで求めよ.

(室蘭工業大 2007) (m20075507)

0.1300 (1) $\cos^2 \theta \sin(2\theta) - \cos \theta \sin(3\theta) = A \sin(4\theta)$ と表したとき, 係数 A を求めよ.

(2) $\cos^5 \theta = B \cos \theta + C \cos(3\theta) + D \cos(5\theta)$ と表したとき, 係数 B, C, D を求めよ.

(室蘭工業大 2007) (m20075511)

0.1301 次の関数の導関数を求めなさい.

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

(室蘭工業大 2008) (m20085503)

0.1302 次の定積分の値 I を求めなさい. $I = \int_0^t e^x \sin \omega x dx \quad (t > 0)$
 (室蘭工業大 2008) (m20085505)

0.1303 (1) 次の微分を計算せよ.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$$

(2) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(3) $f(x) = 3x^3 + 1$, $g(x) = x^4 - 5$ に対する合成関数 $h(x) = f(g(x))$ および $k(x) = g(f(x))$ の導関数 $h'(x)$, $k'(x)$ をそれぞれ求めよ.

(室蘭工業大 2010) (m20105501)

0.1304 行列 A を $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ としたとき, 次の問いに答えよ.

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(2) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) 行列 A の 2 乗 A^2 を求めよ.

(4) 行列 A の N 乗 A^N を求めよ.

(室蘭工業大 2010) (m20105502)

0.1305 次の関数を x で微分せよ.

(1) $x^2 \sin x$ (2) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3$

(室蘭工業大 2010) (m20105508)

0.1306 次の微分を計算しなさい.

$$\frac{d}{dx} \left(\sin^{-1} x - x\sqrt{1-x^2} \right) \quad \left(\text{ただし, } -\frac{\pi}{2} < \sin^{-1} x < \frac{\pi}{2} \text{ とする} \right)$$

(室蘭工業大 2011) (m20115507)

0.1307 2 変数関数 $z = z(x, y)$, $x(r, \theta) = r \cos \theta$, $y(r, \theta) = r \sin \theta$ の偏微分に関する以下の問いに答えよ.

ただし, 以下では, $r = 0$ の場合は除いて考える.

(1) 偏微分 $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ を, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ を用いて表せ.

(2) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$ となることを示せ.

(室蘭工業大 2015) (m20155512)

0.1308 次の関数を微分せよ.

(1) $y = x^3 \cos 3x$ (2) $y = \log \left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)$ (3) $y = \left(\frac{x}{x-1} \right)^3$

(室蘭工業大 2015) (m20155514)

0.1309 定積分 $\int_0^\infty e^{-x} \sin x dx$ を計算しなさい.

(室蘭工業大 2016) (m20165501)

- 0.1310** 関数 $f(x) = \sin 2x - \cos 3x$ について、 x^3 までのマクローリン展開を求めなさい。
(室蘭工業大 2016) (m20165502)
- 0.1311** 以下の微分を計算せよ。
$$\frac{d \sin^3 x}{dx}$$

(室蘭工業大 2016) (m20165509)
- 0.1312** 次の微分方程式の一般解を求めよ。
(1) $(x^2 - 4) \frac{dy}{dx} = y$ (2) $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 4y = 8 \sin(2x)$
(室蘭工業大 2017) (m20175505)
- 0.1313** 以下の微分を計算せよ。
$$\frac{d}{dx} \{ \sin^{-1}(x^2 - 1) \} \quad (0 < x < \sqrt{2})$$

(室蘭工業大 2017) (m20175507)
- 0.1314** 積分に関する以下の問いに答えよ。ただし、不定積分では積分定数は省略してよい。
(1) 不定積分 $\int \frac{x}{x^2 - 2x - 8} dx$ を計算せよ。
(2) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 4x dx$ を計算せよ。
(室蘭工業大 2018) (m20185508)
- 0.1315** 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に関する以下の問いに答えよ。
(1) $A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ。
(2) 行列式 $|A|$ を計算せよ。
(室蘭工業大 2018) (m20185509)
- 0.1316** 常微分方程式 $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 3y = 13 \sin 2x$ に関する以下の問いに答えよ。
(1) この方程式の右辺がゼロの場合の解（同次解） y_0 を求めよ。
(2) 特解 y_1 を $y_1 = A \sin 2x + B \cos 2x$ の形を仮定して求めよ。ただし、 A, B は定数とする。
(3) 初期条件を、 $x = 0$ で、 $y = 0, \frac{dy}{dx} = 2$ として、解 y を求めよ。
(室蘭工業大 2018) (m20185510)
- 0.1317** 関数 $e^x \sin x$ に関するマクローリン展開について、 x^3 の項まで書きなさい。 e は自然対数の底とする。
(室蘭工業大 2018) (m20185515)
- 0.1318** (1) 関数 $f(x) = \cos 2x + \sin(-3x)$ に対して、1 次から 3 次までの導関数を求めなさい。
(2) (1) で求めた導関数を用いて、関数 $f(x) = \cos 2x + \sin(-3x)$ について x^3 までのマクローリン展開を求めなさい。
(室蘭工業大 2022) (m20225504)
- 0.1319** つぎの積分を計算せよ。なお、不定積分では積分定数を省略してよい。

$$(1) \int \sin^3 x \, dx$$

$$(2) \int_0^1 x\sqrt{1-x} \, dx$$

(室蘭工業大 2022) (m20225509)

0.1320 次の各問に答えよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +0} x \log x \text{ を求めよ.}$$

$$(2) f(x) = \sin^{-1} \sqrt{1-x^2} \text{ を微分せよ.}$$

$$(3) \int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx \text{ を求めよ.}$$

(岡山県立大 2005) (m20055601)

0.1321 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x \right)$ を求めよ.

(3) $\int \log(1+x^2) dx$ を求めよ.

(2) $f(x) = e^{\sin^{-1} x}$ を微分せよ.

(岡山県立大 2006) (m20065601)

0.1322 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$ を求めよ.

(2) $f(x) = \log |\sin^{-1} x|$ を微分せよ.

(岡山県立大 2007) (m20075601)

0.1323 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1-x^2)}{\sin x}$ を求めよ. (2) $f(x) = \log \left| \frac{x}{x+1} \right|$ を微分せよ. (3) $\int x \log x \, dx$ を求めよ.

(岡山県立大 2008) (m20085601)

0.1324 以下の不定積分を求めよ.

$$(1) \int \sin^2 x \, dx \quad (2) \int \sin^3 x \, dx \quad (3) \int e^x \sin x \, dx$$

(香川大 2010) (m20105701)

0.1325 以下の不定積分を求めよ.

$$(1) \int \sin^2 x \, dx \quad (2) \int \sin^3 x \, dx \quad (3) \int e^x \sin x \, dx$$

(香川大 2011) (m20115701)

0.1326 以下の問いに答えよ.

(1) $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$ を示せ.

(2) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ とおくと、 $n > 1$ に対して I_n と I_{n-2} の関係式を求めよ.

(香川大 2012) (m20125701)

0.1327 $z = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = \sqrt{2} t$, $y = 1 - t^2$ のとき $\frac{dz}{dt}$ を t を用いて表せ.

(香川大 2019) (m20195702)

0.1328 次の極限を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x}$$

(香川大 2022) (m20225701)

0.1329 逆正弦関数 $\sin^{-1} x$ と逆余弦関数 $\cos^{-1} x$ について、次の問いに答えよ.

(1) 次の値を求めよ.

(i) $\sin^{-1}(-1)$, (ii) $\cos^{-1}0$, (iii) $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$ (iv) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

(2) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ であることを示せ.

(3) $y = \sin^{-1}x$ の微分と不定積分を求めよ.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}$ の値を求めよ.

(島根大 2005) (m20055806)

0.1330 逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ について、次の問いに答えよ.

(1) 極限值 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^{-1}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ を求めよ.

(2) $z = \sin^{-1}(xy)$, $x = \sin(u+v)$, $y = \sin(u-v)$ とするとき、合成関数の偏微分 $\frac{\partial z}{\partial u}$ と $\frac{\partial z}{\partial v}$ を変数 u と v を用いて表せ.

(島根大 2005) (m20055807)

0.1331 関数

$$f(x) = a^2x^2 - b(x+1) + \sin ax + \cos ax$$

について、以下の設問に答えよ. ただし、 a, b は実数である.

(1) 第1次導関数 $f'(x)$ および第2次導関数 $f''(x)$ を導け.

(2) 全ての実数 x に対し、 $f''(x) > 0$ であることを示せ.

(3) 設問(2)の結果から、 $f'(x)$ は増加関数であることがわかる. このとき、領域 $x > 0$ において、 $f'(x) > 0$ が成立するためには a と b の間にどのような関係があればよいか. 関係式を導け.

(4) 設問(3)の条件のもとで、領域 $x > 0$ において $f(x) > 0$ が成立するためには、さらにどのような条件が必要か.

(島根大 2005) (m20055808)

0.1332 次の問いに答えよ.

(1) 次の関数の2次偏導関数を求めよ.

(a) $z = 2x^3 - 3x^2y + 4xy^2$

(b) $z = \sin(2x + 3y)$

(2) $z = f(x, y)$, $y = g(x)$ のとき、次の式を証明せよ.

$$\frac{dz}{dx} = f_x + f_y \frac{dy}{dx}$$

(島根大 2005) (m20055812)

0.1333 以下の設問に答えよ.

(1) 次の定積分の値を求めよ.

(a) $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$ (b) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$

(2) $n \geq 3$ の整数 n に対し、 $\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$ の関係を用いて、部分積分を行うことにより、次の等式が成立することを示せ.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = (n-1) \int_0^{\pi/2} (\sin^{n-2} x - \sin^n x) dx$$

(3) 設問 (1) および (2) の結果を用いて, 次の定積分の値を求めよ.

$$(a) \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx \qquad (b) \int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$$

(島根大 2005) (m20055814)

0.1334 $z = \sin xy$ について, 次の問に答えよ.

$$(1) \frac{\partial z}{\partial x} \text{ を求めよ.} \qquad (2) \frac{\partial z}{\partial y} \text{ を求めよ.} \qquad (3) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ を求めよ.} \qquad (4) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ を求めよ.}$$

(島根大 2006) (m20065801)

0.1335 関数 $f(x) = e^{-x}(\sin x + \cos x)$ の極値を調べよ.

(島根大 2006) (m20065806)

0.1336 $f(x, y)$ を C^2 級の関数とし, θ を定数として $x = u \cos \theta - v \sin \theta$, $y = u \sin \theta + v \cos \theta$ とする.

$$(1) \frac{\partial f}{\partial u} \text{ と } \frac{\partial f}{\partial v} \text{ を求めよ.} \qquad (2) \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \text{ を } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ と } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ を用いて表せ.}$$

(島根大 2006) (m20065810)

0.1337 関数 $f(x) = \frac{1 + 2 \sin x}{2 - \sin x}$ の最小値と最大値を求めよ. また, $f(x)$ は $0 \leq x \leq 2\pi$ において 2 つの変曲点をもつことを示せ.

(島根大 2007) (m20075804)

0.1338 一般に, 関数 $f(x)$ が周期 2π の周期関数で, 区間 $[-\pi, \pi]$ でいくつか (有限個) の点を除いて連続であるとき, 次のように三角関数の級数に展開できる. これを $f(x)$ のフーリエ級数という.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

周期 2π の周期関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} -2x & (-\pi \leq x \leq 0) \\ 2x & (0 < x \leq \pi) \end{cases} \text{ のとき, } f(x) \text{ のフーリエ級数を求めよ}$$

(島根大 2007) (m20075814)

0.1339 (1) 次の関数の第 3 次導関数を求めよ. $x^2 \sin x$

(2) 次の級数が収束することを示せ. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

(3) 次の積分を求めよ. $\int_0^1 \sin^{-1} x dx$

(島根大 2008) (m20085802)

0.1340 2 つのベクトル $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ がある. 以下の設問に答えよ. ただし, 互いに直交する x 軸, y 軸, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} とする.

(1) 内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ を求めよ.

(2) ベクトル \mathbf{a} とベクトル $\mathbf{b} - m\mathbf{a}$ が垂直となる m の値を求めよ.

(3) ベクトル \mathbf{b} のベクトル \mathbf{a} への射影を求めよ.

(4) 外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を求めよ.

(5) ベクトル \mathbf{a} とベクトル \mathbf{b} のなす角 θ の正弦, すなわち $\sin \theta$ を求めよ.

- (6) ベクトル \mathbf{c} , ベクトル \mathbf{d} を 2 辺とする平行四辺形の面積を S とすると,

$$S^2 = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})^2$$

となることを示せ. 次に, ベクトル \mathbf{a} , ベクトル \mathbf{b} を 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ.

(島根大 2008) (m20085810)

- 0.1341** (1) 関数 $f(x) = (x+1)e^{-2x}$ について, $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ. また, 3 以上の整数 n に対して第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

- (2) 関数 $y = x^x$ ($x > 0$) の極値を求めよ.

- (3) 広義積分 $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x \, dx$ の値を求めよ.

- (4) 曲線 $y = x \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$) と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ.

(島根大 2009) (m20095802)

- 0.1342** (1) 次の極限値は存在するかどうか調べよ.

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{x^2 + y^2}$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

- (2) $f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ とするとき, 次の問いに答えよ.

- (a) f の 2 次偏導関数をすべて求めよ.

- (b) $x = \sin(u+v)$, $y = \cos(u-v)$ とするとき, 偏導関数 f_u と f_v を求めよ.

(島根大 2009) (m20095803)

- 0.1343** (1) $f(x) = \sin^{-1} x$ ($-1 < x < 1$) とするとき, $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$ を求めよ.

- (2) 設問 (1) の結果を用いて $f(x)$ を x^3 の項まで $x=0$ のまわりにおいてべき級数展開せよ.

- (3) 設問 (2) の結果を用いて $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{x}$ および $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x - x}{x^3}$ の値を求めよ.

(島根大 2010) (m20105808)

- 0.1344** 以下の各設問に答えよ. ただし, x は実数とする.

- (1) 関数 $f(x)$, $g(x)$ を $f(x) = x - \tan^{-1} x$, $g(x) = x - x \sin x$ と定義する. 以下の問いに答えよ.

- (a) 導関数 $f'(x)$, 第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

- (b) 導関数 $g'(x)$, 第 2 次導関数 $g''(x)$ を求めよ.

- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ の値を求めよ.

- (2) 関数 $y(x)$ を $y(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$ と定義する. 以下の問いに答えよ.

- (a) 導関数 $y'(x)$, 第 2 次導関数 $y''(x)$ を求めよ.

- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ であることを示せ.

- (c) $y'(x)$, および $y''(x)$ の符号を用いて, 関数 $y(x)$ の増減表を作成せよ. また, 関数 $y(x)$ のグラフの概形をかけ.

(島根大 2012) (m20125801)

- 0.1345** 次の問いに答えよ.

- (1) $I_n = \int_0^1 (\arcsin x)^n \, dx$ ($n \geq 0$) とおく. $t = \arcsin x$ とおいて I_n を t の積分で表わせ.

(2) $n \geq 2$ のとき, I_n と I_{n-2} の関係を求めよ. さらに, I_2 を求めよ.

(島根大 2014) (m20145804)

0.1346 関数 $f(x) = \arcsin x$ ($-1, x < 1, -\pi/2 < y < \pi/2$) に関する次の問いに答えよ.

(1) 逆関数の微分法を用いて $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を証明せよ.

(2) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ.

(3) $f^{(n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次導関数とする. ただし $f^{(0)}(x) = f(x)$ である. このとき, 0 以上の整数 n に対し,

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (1+2n)xf^{(n+1)}(x) - n^2f^{(n)}(x) = 0$$

が成り立つことを証明せよ.

(4) $f(x) = \arcsin x$ のマクローリン展開を 5 次の項まで求めよ.

(島根大 2015) (m20155806)

0.1347 以下の設問に答えよ. ただし, T ($T > 0$) および ϕ は定数である.

(1) 次の定積分を計算せよ. $\frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt$

(2) 次の定積分を計算せよ. $\frac{1}{T} \int_0^T \left[\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right) \right]^2 dt$

(3) 次式が成り立つことを示せ. $\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right) dt = 0$

(4) 次の定積分を計算せよ. $\frac{1}{T} \int_0^T \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{3}\right) \right]^2 dt$

(島根大 2017) (m20175801)

0.1348 $\text{Sin}^{-1}x$ ($-1 < x < 1$) を $\sin x$ の逆関数とし, $f(x) = \sin(2\text{Sin}^{-1}x)$ とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $y = f(x)$ は次の微分方程式をみたすことを示せ.

$$(1-x^2)y'' - xy' + 4y = 0$$

(2) $y = f(x)$ に対して, $(1-x^2)^2y''' + p(x)y' + q(x)y = 0$ が成り立つような x の多項式 $p(x)$, $q(x)$ を 1 組求めよ.

(3) $f(x)$ の増減を調べ, $f(x)$ が最大値をとる x の値と最小値をとる x の値をそれぞれ求めよ.

(4) 次の定積分を計算せよ.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{Sin}^{-1}x dx$$

(島根大 2020) (m20205806)

0.1349 次の関数を積分せよ.

(1) $x(x^2+1)^\alpha$

(2) $(\cos x)^\alpha \sin x$

(首都大 2003) (m20035905)

0.1350 次の関数の不定積分を求めよ.

$$\frac{1}{\sin^2 x}$$

(首都大 2005) (m20055906)

0.1351 次の微分方程式を解け. $\frac{dy}{dx} - y = \cos x - \sin x$

(首都大 2008) (m20085904)

0.1352 次の関数を微分せよ.

(1) $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$ (2) $y = 2^{3x}$

(首都大 2010) (m20105904)

0.1353 次の不定積分を求めよ.

(1) $\int \sin 2x \sin 4x dx$ (2) $\int x^3 e^{2x} dx$

(首都大 2010) (m20105907)

0.1354 次の関数を微分しなさい.

(1) $f(x) = xe^{-x^2}$ (2) $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$

(首都大 2011) (m20115904)

0.1355 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\int \frac{1}{x \log x} dx$ (2) $\int e^x \sin x dx$

(首都大 2011) (m20115907)

0.1356 次の関数を微分しなさい.

(1) $f(x) = (2x - x^2)^6$ (2) $f(x) = \sin^{-1} x^2$

(首都大 2012) (m20125904)

0.1357 行列 A を $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ とするとき, 以下の問いに答えなさい.

(1) A の行列式 $|A|$ を求めなさい.

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(3) $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき, ベクトル $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ とベクトル $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ には $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ の関係があった. このときの, x_1 と x_2 を求めなさい.

(首都大 2013) (m20135901)

0.1358 次の関数を微分しなさい.

(1) $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$ (2) $f(x) = \sin^4 x \cos 3x$

(首都大 2013) (m20135904)

0.1359 関数 $f(x) = e^x \sin x$ について, 以下の問いに答えなさい.

(1) $f(x)$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めなさい.

(2) (1) の結果を利用して $f(0.03)$ の近似値を求めなさい.

(首都大 2013) (m20135906)

0.1360 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\int \sin^{-1} x \, dx$

(2) $\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \, dx$

(首都大 2013) (m20135907)

0.1361 次の関数を微分しなさい.

(1) $f(x) = (2x - 1)e^x$

(2) $f(x) = \log |\sin x| \quad (x \neq n\pi, n \text{ は整数})$

(3) $f(x) = x^x \quad (x > 0)$

(首都大 2014) (m20145904)

0.1362 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx$

(2) $\int x(\log x)^2 \, dx$

(首都大 2014) (m20145907)

0.1363 次の関数を微分しなさい.

(1) $f(x) = \frac{e^x}{x}$

(2) $f(x) = \sin^2(x^2 + 1)$

(首都大 2015) (m20155904)

0.1364 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\int x \log x \, dx$

(2) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$

(首都大 2015) (m20155908)

0.1365 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1}$ を求めなさい.

(首都大 2016) (m20165907)

0.1366 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\int 8x(4x^2 - 1)^{10} \, dx$

(2) $\int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} \, dx$

(首都大 2016) (m20165908)

0.1367 $t(0 < t < 2\pi)$ の関数 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ について, 以下の問いに答えよ. ただし, a は 0 でない定数とする.

(1) $\frac{dy}{dx}$ を求めよ. (2) (1) の結果を用いて, $\frac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ.

(首都大 2016) (m20165911)

0.1368 ベクトル場 $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j}$ と曲線 $C: \vec{r} = (\cos^2 t)\vec{i} + (\sin^2 t)\vec{j} \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $d\vec{r}$ を計算せよ.

(2) 内積 $\vec{a} \cdot d\vec{r}$ を計算せよ.

(3) (2) の結果を用いて, C に沿う線積分 $I = \int_C \vec{a} \cdot d\vec{r}$ の値を求めよ.

(首都大 2016) (m20165913)

0.1369 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\int x^2 e^{2x} \, dx$

(2) $\int \sin^5 x \, dx$

(首都大 2018) (m20185908)

0.1370 次の関数を微分しなさい.

(1) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$

(2) $f(x) = \sin^{-1} \frac{x}{2}$ (ただし, $-2 < x < 2$)

(首都大 2019) (m20195903)

0.1371 次の極限值を求めなさい.

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow +0} x \log(\sin x)$

(首都大 2019) (m20195906)

0.1372 次の関数を微分しなさい.

(1) $f(x) = \frac{x^3}{(1-x^2)^{\frac{2}{3}}}$

(2) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$

(東京都立大 2020) (m20205903)

0.1373 (1) 次の関数について $\frac{dy}{dx}$ を求めよ. $x = \frac{a}{\cos \theta}$, $y = b \tan \theta$ (a, b は定数, ただし, $a \neq 0$)

(2) 次の関数について $\frac{dy}{dx}$ を求めよ. $y = \frac{1}{2} (x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x)$

(3) 次の極限值を求めよ. $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$

(東京都立大 2020) (m20205910)

0.1374 (1) 関数 $z = e^x \sin xy$ について, 偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.

(2) 関数 $z = f(ax + by)$ について, $b \frac{\partial z}{\partial x} = a \frac{\partial z}{\partial y}$ であることを証明せよ. (a, b は定数)

(3) 関数 $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ について,

$$(\Delta u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

であることを示せ. ここで, Δ はラプラシアンである.

(東京都立大 2021) (m20215903)

0.1375 0以上の整数 n に対し, C_n, S_n を

$$C_n = \int_0^\pi x^n \cos x dx$$

$$S_n = \int_0^\pi x^n \sin x dx$$

のように定義するとき, 以下の問いに答えよ.

(1) C_0, S_0 を求めよ.

(2) C_n を S_{n-1} を用いて表せ.

(3) S_n を C_{n-1} を用いて表せ.

(4) 前問 (1)~(3) の答えを用いて S_3 を求めよ.

(東京都立大 2021) (m20215904)

0.1376 (1) (x, y) が $(0, 0)$ に近づくととき, $f(x, y) = \frac{\sin(xy^2)}{xy}$ の極限を求めよ.

(2) $f(x, y) = xy^2 - x^2y - 2 = 0$ のとき, 極値を求めよ.

(東京都立大 2022) (m20225904)

0.1377 不定積分

$$I = \int \frac{1}{4 \sin x + 3 \cos x} dx$$

について 以下の問いに答えよ.

(1) $t = \tan \frac{x}{2}$ として置換し, 上記の不定積分を $I = \int g(t) dt$ の形で表せ.

(2) 前問 (1) で得られた式を用いて不定積分 I を求めよ. なお, 解は $\tan \frac{x}{2}$ を含む式でよい.

(東京都立大 2022) (m20225905)

0.1378 $y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ の逆関数 $y = \sinh^{-1} x$ について, 次の式を示せ.

$$y = \sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad y' = \frac{d}{dx} \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

(滋賀県立大 2005) (m20056001)

0.1379 (1) 未知関数 $y = f(x)$ に対する 2 階同次線形常微分方程式

$$y'' - 2\sqrt{3}y' + 3y = 0$$

の一般解を求めよ.

(2) 2 階非同次線形常微分方程式

$$y'' - 2\sqrt{3}y' + 3y = \sin x$$

の特殊解を求めよ. その結果を使って, 一般解を書き下せ.

(滋賀県立大 2005) (m20056002)

0.1380 関数 $f(x)$ の導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

にしたがって, $f(x) = \sin x$ の導関数が $f'(x) = \cos x$ であることを示せ.

(滋賀県立大 2008) (m20086001)

0.1381 (1) 未知関数 $y = y(x)$ に対する 2 階定数係数同次線形常微分方程式 $y'' + y' - 6y = 0$ の一般解を求めよ.

(2) 2 階定数係数非同次線形常微分方程式 $y'' + y' - 6y = \sin x$ の特殊解を求めよ.

(特殊解を $y = A \sin x + B \cos x$ と仮定してよい. A, B は定数である.)

(3) 上記 (2) の非同次線形常微分方程式の一般解を書き下せ.

[注; (1) における「同次」および (2) における「非同次」は, それぞれ「斉次」および「非斉次」といわれることもある.]

(滋賀県立大 2008) (m20086002)

0.1382 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

で与えられる, $f(x) = \sin x$ のマクローリン展開を求めよ. ただし, x の 7 次の項までを具体的に記述して, それ以上の高次の項は... で省略してよい.

(滋賀県立大 2009) (m20096001)

0.1383 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は次で与えられる.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

(1) 関数 $f(x) = (1+x)\sin x - x\cos x$ のマクローリン展開を書き下せ. ただし, x^4 の項までを明確に求め, それよりも高次の項は... と略してよい.

(2) (1) の結果を使って, 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)\sin x - x\cos x}{x^2}$$

(滋賀県立大 2010) (m20106002)

0.1384 逆三角関数に関する次の方程式を解け.

$$\cos^{-1} x = 2 \sin^{-1} \frac{3}{5}$$

(滋賀県立大 2012) (m20126001)

0.1385 (1) 未知関数 $y = y(x)$ に対する 2 階定数係数同次線形常微分方程式

$$y'' + y' - 12y = 0$$

の一般解を求めよ.

(2) 2 階定数係数非同次線形常微分方程式

$$y'' + y' - 12y = 2 \cos x$$

の特殊解を求めよ. (特殊解を $y = A \sin x + B \cos x$ と仮定してよい.)

(3) 上記 (2) の非同次線形常微分方程式の一般解を書き下せ.

(滋賀県立大 2013) (m20136002)

0.1386 (1) 未知関数 $y = y(x)$ に対する 2 階定数係数同次線形常微分方程式

$$y'' - 8y' + 16y = 0$$

の一般解を求めよ.

(2) 2 階定数係数非同次線形常微分方程式

$$y'' - 8y' + 16y = 2 \cos x$$

の特殊解を求めよ.

(特殊解を $y(x) = A \sin x + B \cos x$ と仮定してよい.)

(3) 上記 (2) の非同次線形常微分方程式の一般解を書き下せ.

(滋賀県立大 2014) (m20146002)

0.1387 D を $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ (a, b は正の実数) で与えられる領域とするとき, $x = ar \cos \theta$, $y = br \sin \theta$ とおくことにより,

$$\iint_D x^2 dx dy \text{ を求めよ.}$$

(滋賀県立大 2015) (m20156004)

0.1388 $f(x) = \text{Sin}^{-1}x$ について, 次のことを求めよ. ただし, $\text{Sin}^{-1}x$ の値域は $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ とする.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^3} \quad (2) \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$$

(滋賀県立大 2016) (m20166001)

0.1389 以下の問に答えよ.

(1) $x > 0$ における次の関数の極値とそのときの x の値を求めよ.

$$f(x) = e^{-ax} - e^{-bx} \quad \text{ただし, } b > a > 0 \text{ とする.}$$

(2) 次の定積分の大きさを求めよ.

$$\int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta$$

(宇都宮大 2004) (m20046103)

0.1390 関数 $f(x) = e^{-x} \sin \pi x (x \geq 0)$ があるとき, 以下の問に答えよ.

- (1) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け.
- (2) $y = f(x)$ のグラフと x 軸とで囲まれる部分の面積を原点に近い方から $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ とするとき, 1 番目の面積 S_1 を求めよ.
- (3) n 番目の面積 S_n を求めよ.
- (4) $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ の面積の総和を求めよ.

(宇都宮大 2004) (m20046104)

0.1391 以下の定積分および不定積分を計算せよ.

$$(1) \int_1^2 (x+2)(x-1)dx \quad (2) \int \frac{1}{(x-q)(x-q-1)} dx \quad (3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x + 1}} dx$$

(宇都宮大 2007) (m20076101)

0.1392 $\int \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} dx$ を求めよ.

(宇都宮大 2007) (m20076109)

0.1393 (1) 関数 $y = e^{\sin x}$ を微分せよ.

(2) x, y の関係が次のように媒介変数 t を用いて表されるとき, $\frac{dy}{dx}$ を t の式で表せ.

$$\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = 3t^2 - t - 2 \end{cases}$$

(宇都宮大 2010) (m20106105)

0.1394 関数 $z = f(x, y)$ の x と y が r と θ の関数で $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ の関係にあるとき, $\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めよ.

(宇都宮大 2014) (m20146107)

0.1395 図 1 のように, 点 A, B, C, D が xy 軸平面上にある. 原点 O とし,

各座標を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と示すとき, $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である.

また, \vec{OB} は \vec{OA} を原点を中心として, 反時計方向に角度 θ 回転させたものである. \vec{OD} は \vec{OC} を同様に角度 θ 回転させた点である.

以下の問に答えよ.

- (1) 点 B, D の座標を求めよ.
- (2) $\vec{OB} \cdot \vec{OD}$ を計算せよ.

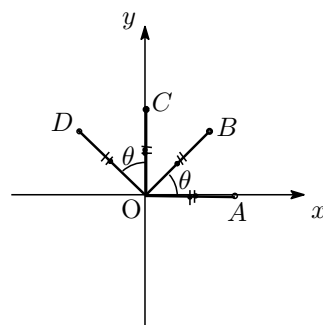


図 1: xy 軸平面

- (3) 原点を中心とした長さ 1 である任意のベクトル $\vec{OE} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ は,
 \vec{OA} を角度 α 回転させることによって得られる. 角度 α 回転させる一次変換を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \dots\dots \textcircled{1}$$

と表すとき, a, b, c, d を求めよ.

- (4) $\cos(\alpha + \beta)$ を $\sin \alpha, \cos \alpha, \sin \beta, \cos \beta$ を用いて表せ.

(工学院大 2003) (m20036206)

- 0.1396** $y = \sin^2 x + \cos x$ ($0 \leq x < 360^\circ$) の最小値を求めよ.

(工学院大 2004) (m20046202)

- 0.1397** (1) 行列 $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ の固有値が実数となることを証明せよ.

- (2) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求め, $AA^{-1} = E$ となることを証明せよ. ただし, E は単位行列である.

(工学院大 2004) (m20046205)

- 0.1398** 曲線 $y = 2 \sin^2 x$ 上の点 $x = \frac{\pi}{4}$ における接線の傾きと, 接線の方程式を求めよ.

(工学院大 2004) (m20046210)

- 0.1399** $y = \sin^2 \theta + \sin 2\theta + 3 \cos^2 \theta$ ($0 \leq \theta < 90^\circ$) の最大値とそのときの θ の値を求めよ.

(工学院大 2005) (m20056202)

- 0.1400** 微分方程式 $y'' - 3y' + 2y = -e^{2x} \sin x$ について以下の間に答えよ.

- (1) 基本解をすべて求め, それらの 1 次独立性を確かめよ. (2) 特殊解を求めよ.

(はこだて未来大 2007) (m20076308)

- 0.1401** n を自然数とし, 関数 $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$ を考える. 以下の問いに答えよ.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ を求めよ.

- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{df_n}{dx}(x) = \frac{d}{dx} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)$ が成立する x の値を, 区間 $[0, \pi]$ から求めよ.

(はこだて未来大 2008) (m20086303)

- 0.1402** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ が成り立つことを利用して, 以下の問いに答えよ.

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 5x}{x}$ を求めよ.

- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2 \sin 2x)}{x}$ を求めよ.

(はこだて未来大 2010) (m20106303)

- 0.1403** $f(x) = e^x \sin x$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ の $0 \leq x \leq \pi$ における最大値を求めよ.

- (2) $\int_0^\pi f(x) dx$ を求めよ.

(はこだて未来大 2014) (m20146303)

0.1404 t を媒介変数として, 方程式

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

で表される座標平面上の曲線を D とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ をそれぞれ求めよ.
- (2) 曲線 D の接線のうち, 接点の x 座標が $\frac{27}{125}$ であるものを求めよ.
- (3) 曲線 D の長さを求めよ.

(はこだて未来大 2014) (m20146304)

0.1405 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} x \left(\frac{e^{1/x} - 1}{e^{1/x} + 1} \right)$ を求めよ.

(2) $0 < x < \pi$ のおいて, $\frac{d}{dx} \log \left(\tan \frac{x}{2} \right)$ を求めよ.

(3) $\sin^{-1} \frac{3}{5} + \sin^{-1} \frac{4}{5}$ を求めよ.

ただし, $\sin x$ の逆関数 $\sin^{-1} x$ の値域は, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ とする.

(はこだて未来大 2015) (m20156302)

0.1406 (1) $0 < x < \pi$ において, $\int (\sin x) \log(\sin x) dx$ を求めよ.

(はこだて未来大 2015) (m20156303)

0.1407 (1) 広義積分 $\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx$ を求めよ.

(2) $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ を求めよ.

(はこだて未来大 2018) (m20186302)

0.1408 (1) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)^2}{1 - \sin \frac{x}{2}}$ を求めよ.

(2) $x^2 e^x$ の n 次導関数を n を用いて表わせ. ただし, n は自然数とする.

(はこだて未来大 2022) (m20226302)

0.1409 次の積分を計算せよ.

(1) $\int \frac{3x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1} dx$

(2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x \sin x}$ ($\tan x = t$ とおく)

(東京海洋大 2007) (m20076404)

0.1410 (1) 不定積分 $\int \frac{x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1} dx$ を計算せよ.

(2) 定積分 $\int_0^{2\pi} e^x \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2009) (m20096403)

0.1411 (1) 不定積分 $\int \frac{3x^2 + x}{x^3 + x^2 + x + 1} dx$ を計算せよ.

(2) 定積分 $\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^2 x dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2011) (m20116403)

0.1412 次の関数の不定積分を求めなさい.

(1) $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 1}{x}$

(2) $f(x) = x^3 \sin x$

(東京海洋大 2012) (m20126408)

0.1413 以下の関数を x で微分しなさい.

(1) $y = 2x^3 - 5x^2$

(2) $y = \sin^2 x$

(3) $y = \{\log(\sqrt{x} + 1)\}^2$

(4) $y = \int_x^{2x} \sin \theta d\theta$

(東京海洋大 2013) (m20136401)

0.1414 下記の定積分, または不定積分を求めなさい.

(1) $\int_0^1 (3x^3 + 4x^2 - 2)dx$

(2) $\int (\cos 2x + \sin 3x)dx$

(3) $\int \frac{(\sqrt{x} + 1)^3}{x^2} dx$

(4) $\int x \cos(1 + x^2)dx$

(5) $\int_0^1 xe^x dx$

(東京海洋大 2013) (m20136402)

0.1415 下記の関数を x で微分しなさい.

(1) $y = (\cos x + \sin x)^2$

(2) $y = (x - 2)(x + 3)^2$

(3) $y = x^x$

(4) $y = e^{1+x^2}$

(東京海洋大 2014) (m20146401)

0.1416 次の関数を x で微分しなさい.

(1) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x + 1$

(2) $y = \frac{1}{4x + 3}$

(3) $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$

(4) $y = \sqrt{1 - x^2}$

(東京海洋大 2015) (m20156401)

0.1417 次の不定積分, または定積分を求めなさい.

(1) $\int 2 \sin x \cos x dx$

(2) $\int x\sqrt{x^2 + 1} dx$

(3) $\int_0^1 (x^3 + 3x^2 - x + 1) dx$

(東京海洋大 2015) (m20156402)

0.1418 次の関数を x で微分しなさい.

(1) $x^2(x^3 - x^2)$

(2) $(x^2 - 2x + 5)^4$

(3) $e^{2x}\sqrt{x}$

(4) $\frac{\sin x}{x}$

(5) $x \log_e x$

(東京海洋大 2016) (m20166401)

0.1419 次の定積分, または不定積分を求めなさい.

(1) $\int_1^e \frac{dx}{x}$

(2) $\int_0^\pi \sin x dx$

(3) $\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx$

(4) $\int x(2x + 1)^2 dx$

(5) $\int e^x \sin x dx$

(東京海洋大 2016) (m20166402)

0.1420 次の関数を x で微分しなさい.

(1) $\frac{1}{2x + 5}$

(2) $(x^2 + x + 5)(x^2 - x + 2)$

(3) $\frac{(x + 1)^2}{(x + 2)^2(x + 3)^3}$

(4) $x^2 \sin \frac{1}{x}$

(東京海洋大 2017) (m20176401)

0.1421 (1) 不定積分 $\int \frac{x + 2}{x^3 - 1} dx$ を計算せよ.

(2) 定積分 $\int_1^{e^5} \frac{\sin(\pi \log x)}{x} dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2021) (m20216408)

0.1422 次の不定積分, または定積分を求めなさい.

1) $\int x\sqrt{x^2+1}dx$ 2) $\int 2\sin x \cos x dx$

3) $\int_1^4 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx$ 4) $\int_1^2 x^2 \log x dx$

(東京海洋大 2022) (m20226407)

0.1423 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - e^{-x}}$ を求めなさい.

(和歌山大 2007) (m20076504)

0.1424 複素平面上において, $z = \pm 1$ および $z = \pm i$ を内部に含み, 正の向きに一周する単一閉曲線を C とする. このとき, 次の積分を求めなさい.

(1) $\int_C \frac{\sin \pi z}{(z-1)^2} dz$ (2) $\int_C \frac{z^2}{z^4-1} dz$

(和歌山大 2007) (m20076510)

0.1425 (1) $f(t) = e^{-|t|}$ のフーリエ変換を求めなさい.

(2) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega}{1+\omega^2} d\omega$ と $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega}{1+\omega^2} d\omega$ の値を求めなさい.

(和歌山大 2009) (m20096504)

0.1426 周期 X の周期関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq d/2) \\ 0 & (d/2 < |x| \leq X/2) \end{cases}$$

について次の問いに答えなさい. ただし, $0 < d < X$ である.

(1) $f(x)$ をフーリエ級数に展開しなさい.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\alpha}{n}$ の値を求めなさい. ただし, $0 < \alpha < 1$ とする.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi\alpha}{2n-1}$ の値を求めなさい. ただし, $0 < \alpha < 1$ とする.

(和歌山大 2010) (m20106504)

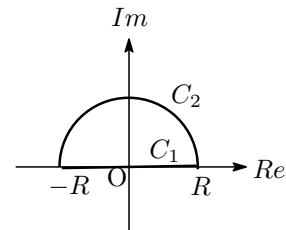
0.1427 R を 1 より大きい実数として, 図のように複素平面上で線分 C_1 と上半円周 C_2 からなる曲線 $C = C_1 + C_2$ が与えられている. ただし, 曲線 C の向きは反時計まわりとする.

複素関数 $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$ について, 次の問いに答えなさい.

(1) C_2 上で $|f(z)| \leq \frac{1}{R^2-1}$ が成り立つことを示しなさい.

(2) 複素積分 $\int_C f(z) dz$ の値を求めなさい.

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i \sin x}{x^2+1} dx$ の値を求めなさい.



(和歌山大 2010) (m20106505)

0.1428 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin 5x \sin 7x}$ の値を求めなさい.

(和歌山大 2010) (m20106506)

0.1429 次の2重積分の値を求めなさい。

$$\iint_D \sin(x+y) dx dy, \quad D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq x\}$$

(和歌山大 2010) (m20106509)

0.1430 $f(x) = x \sin x$ ($-\infty < x < \infty$) のマクローリン展開を3次の項まで求めなさい。

(和歌山大 2012) (m20126503)

0.1431 次の各問いに答えなさい。

(1) $\int e^x \cos nx dx$ を求めなさい。ただし n は正の整数とする。

(2) $\int e^x \sin nx dx$ を求めなさい。ただし n は正の整数とする。

(3) 関数 $f(x) = e^x$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) をフーリエ級数展開 $f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$ したとき、係数 $a_n (n \geq 0)$, $b_n (n \geq 1)$ を求めなさい。

(和歌山大 2012) (m20126507)

0.1432 次の微分方程式について、与えられた初期条件を満たす特殊解を求めなさい。

(1) $y \frac{dy}{dx} = 2x^2, \quad y(0) = 1$

(2) $\frac{dy}{dx} = \sin 2x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

(3) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1$

(和歌山大 2013) (m20136505)

0.1433 指数関数と三角関数のマクローリン級数を利用して、次の極限を求めなさい。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x - \sin x}$$

(和歌山大 2014) (m20146504)

0.1434 複素関数について、次の各問いに答えなさい。

(1) 関数 $w = z + \frac{1}{z}$ に対して $z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $w = u + iv$ とおくと、 u, v を r, θ で表しなさい。

(2) 関数 $f(z)$ が領域 D で正則であるとき、 $\operatorname{Re} f(z)$ が定数ならば $f(z)$ も定数であることを証明しなさい。

(3) 積分路 $C: |z| = 2$ の向きは反時計回りとして、次の積分値を求めなさい。

$$\int_C \frac{2z+1}{z(z-3)} dz$$

(和歌山大 2014) (m20146508)

0.1435 (1) 複素関数 $w = \frac{z}{1-z}$ について次の問いに答えなさい。

(a) $w = u + iv, z = x + iy$ とおくと、 u, v を x, y を用いて表しなさい。ただし、 u, v, x, y は実数とする。

(b) コーシー・リーマンの方程式が成り立つことを示しなさい。

- (2) 複素積分 $\int_C \frac{\sin z}{z^2 - \frac{\pi^2}{4}} dz$ を求めなさい。ただし、積分路 C は $|z| = 2$ とし、向きは反時計回りとする。

(和歌山大 2015) (m20156506)

- 0.1436** (1) 正数 L に対し $\omega = \frac{2\pi}{L}$ と置く。整数 k に対し、次式が成り立つことを示しなさい。

$$\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{ik\omega t} dt = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

- (2) (1) の条件のもと、自然数 n に対し、 $D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ik\omega t}$ とおく。このとき、以下の式が成立することを示しなさい。

(a) $\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} D_n(t) dt = 1$

(b) $\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^0 D_n(t) dt = \frac{1}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} D_n(t) dt = \frac{1}{2}$

(c) $D_n(t+L) = D_n(t)$

(d) $D_n(t) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})\omega t)}{\sin(\frac{\omega}{2}t)}$

(和歌山大 2015) (m20156507)

- 0.1437** (1) $f(x) = |\sin x|$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) で定められる周期関数をフーリエ級数に展開しなさい。

- (2) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2(2m+1)^2}$ の値を求めなさい。

(和歌山大 2016) (m20166507)

- 0.1438** 次の関数の $x = \pi$ のまわりのテイラー展開を 3 次の項まで求めなさい。

$$f(x) = \sin x$$

(和歌山大 2018) (m20186502)

- 0.1439** (1) 次の重積分を、極座標 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ によって、 r と θ の積分に変数変換しなさい。

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

- (2) (1) の積分の値を求めなさい。

(和歌山大 2018) (m20186503)

- 0.1440** 次の (1)~(3) に答えなさい。ただし、 i は虚数単位とする。

- (1) 次の関数の組 (A) と (B) のうち、コーシー・リーマンの方程式を満たすものを選びなさい。

(A) $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$

(B) $u = e^x \sin y$, $v = e^x \cos y$

- (2) (1) で選んだ u , v に対して、 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ とおくとき、 $f'(z)$ を求めなさい。

- (3) (2) の関数 $f(z)$ に対して、次の積分の値を求めなさい。ただし、積分路 C は $|z| = 1$ とし、向きは反時計回りとする。

$$\oint_C \frac{f(z)}{z} dz$$

0.1441 関数 $f(x)$ ($-\pi \leq x \leq \pi$)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ x & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

のフーリエ級数展開を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

とするとき、次の (1)~(3) に答えなさい。

- (1) a_0 を求めなさい。
- (2) a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ を求めなさい。
- (3) b_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ を求めなさい。

(和歌山大 2018) (m20186506)

0.1442 関数 $z = \sin(2x - 3y)$ の偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ を求めなさい。

(和歌山大 20221) (m20216503)

0.1443 関数 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ のマクローリン展開を $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とするとき、係数 a_n を求めよ。

(和歌山大 2022) (m20226502)

0.1444 関数 $f_n(x, y) = \sin \sqrt{x^n + y^n}$ (n : 自然数) について、次の問いに答えよ、

- (1) 1 階偏導関数 $\frac{\partial f_n}{\partial x}$ を求めよ。
- (2) 積分 $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{f_1(x, 0)}{\sqrt{x}} dx$ を求めよ。
- (3) 自然数 m に対して $I_m = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{(f_1(x, 0))^m}{\sqrt{x}} dx$ とするとき、 I_m と I_{m-2} の関係式を求めよ。また m は奇数として I_m を求めよ。
- (4) $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{4} \right\}$ とするとき、2 重積分 $\iint_D f_2(x, y) dx dy$ を求めよ。

(京都府立大 2008) (m20086702)

0.1445 関数 $f(x) = e^x \sin x$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(東京工科大 2010) (m20106902)

0.1446 (1) i は虚数単位とする。 $\frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i}$ の実部と虚部を求めよ。

(2) $0 < x < 1$ のとき、方程式 $\log_3 x - 3 \log_x 9 + 1 = 0$ を解け。

(3) 不等式 $\sin 2\theta > \sin \theta$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(富山県立大 2017) (m20177101)