[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　tan

0.1　$e^x \cos x$ と $\tan x$ のマクローリン展開を x^4 の項まで求めよ．

(北海道大 2017)　(m20170101)

0.2　(1)　不定積分 $\displaystyle\int \tan x\,dx$ を計算せよ．　ヒント ： $t = \cos x$ とおくとよい．

(2)　定積分 $\displaystyle\int_1^2 \log x\,dx$ の値を求めよ．

(北見工業大 2009)　(m20090202)

0.3　2 変数関数 $z = \arctan\dfrac{y}{x}$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．（注：$\big(\arctan X\big)' = \dfrac{1}{1+X^2}$ である）

(北見工業大 2012)　(m20120202)

0.4　次の積分を求めよ．

(1)　$\displaystyle\int \tan x dx \quad \left(\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\text{である．}\right)$　　(2)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x\,dx$

(北見工業大 2015)　(m20150204)

0.5　$-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ での $x = \tan y$ の逆関数を $y = \arctan x$ とする．

(1)　$\arctan x$ の導関数を書け．（証明は省略しても良い．）

(2)　関数 $f(x) = \arctan x - \log\sqrt{1+x^2}$ の $0 \leqq x \leqq \sqrt{3}$ での最大値と最小値を求めよ．

(北見工業大 2019)　(m20190203)

0.6　$-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ での $x = \tan y$ の逆関数を $y = \arctan x$ とする．

$$f(x) = \arctan x - \frac{x}{2}$$

の $x \geqq 0$ での最大値を求めよ．

(北見工業大 2022)　(m20220204)

0.7　$\sin\theta + \cos\theta = 1/3$ のとき，次の値を求めよ．

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\tan\theta + 1/\tan\theta$

(岩手大 1994)　(m19940302)

0.8　次の $\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ．注意：log は自然対数で，π は円周率である．

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = \boxed{(\mathrm{p})}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log|\cos x|}{x^2} = \frac{1}{\boxed{(\mathrm{q})}}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log|1-x^2|}{\log|\cos x|} = \boxed{(\mathrm{r})}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{2^{\sin x}-2}{\log|\sin x|} = \log\boxed{(\mathrm{s})}$

(秋田大 2002)　(m20020402)

0.9　次の極限を求め，$\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x} = \boxed{}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x} = \boxed{}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log x^2}{\log|\sin x|} = \boxed{}$

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^{\cos x}-2}{\log|\cos x|} = \boxed{}$　　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log|1-x^2|}{\log|\cos x|} = \boxed{}$

(秋田大 2007)　(m20070403)

0.10　$x = \tan t$ と置き換えて，次の定積分を求めよ．

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

(秋田大 2011)　　(m20110403)

0.11　次の不定形の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x^2-x}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-x-1}{x^2}\right)$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\tan x-\sec x\right)$

(秋田大 2015)　　(m20150402)

0.12　関数 $f(x)$ のマクローリン展開は以下のように与えられる．

$$f(x) \sim f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \cdots$$

ただし，f' と f'' は，それぞれ f の導関数と第 2 次導関数を示す．

(1) 関数　$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$　をマクローリン展開し，x^2 の項まで示せ．

(2) 以下の関係が成り立つことを示せ．

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{Tan}^{-1}x\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

ただし，関数 $y = \mathrm{Tan}^{-1}x$ は，関数 $y = \tan x$ の逆関数であり，原点を通る．

(3) 関数　$F(x) = \mathrm{Tan}^{-1}x$

について，$-\infty < x < \infty$ での増減・極値・グラフの凹凸・変曲点を調べよ．

(4) $y = F(x)$ のグラフの概形を描け．

(東北大 2003)　　(m20030501)

0.13　任意の自然数 n に対する数列を以下の定積分により定義する．

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^{2n-1}x}$$

(1) I_1 を求めよ．

(2) I_2 を求めよ．必要であれば次の関係式を用いよ．

$$\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^3 x}$$

(3) I_n に成立する漸化式を求めよ．

(4) 以下に示す極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nI_n}{2^n}$$

(東北大 2020)　　(m20200502)

0.14　次の各問に答えよ．

(1) $\tan x\left(\dfrac{-\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $\tan^{-1}x(-\infty < x < \infty)$ で表す．$\tan^{-1}x$ の導関数を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-6x+13}dx$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2}+\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}\right) = \frac{\pi}{4}$ となることを示せ．

（お茶の水女子大 1999）　　(m19990606)

0.15　変数変換 $t = \tan(\theta/2)$ を用いて三角関数の積分を計算してみよう．

(1) $\cos\theta$ と $\sin\theta$ は変数 t を用いて，以下のように表せることを示せ．

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

(2) 次の関数式を示せ． $\displaystyle \frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{2}(1+t^2)$

(3) 次の不定積分を求めよ． $\displaystyle \int \frac{d\theta}{\sin\theta}, \quad \int \frac{d\theta}{\cos\theta}$

ただし，もし必要であれば以下の公式を用いて良い．

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

（お茶の水女子大 2001） (m20010604)

0.16 $\mathrm{Arctan}\, x$ は $\tan x$ の逆関数で，$x=0$ のとき値が 0 となるものを表すとする．

(1) $\mathrm{Arctan}\, x$ の原点を中心とする Taylor 展開を 5 次の項まで記せ．

(2) $x\,\mathrm{Arctan}(x^2)$ の原点を中心とする Taylor 展開を 11 次の項まで記せ．

（お茶の水女子大 2001） (m20010605)

0.17 (1) $(-1,1)$ を定義域とする関数 f を，$f(x) = \arctan x + \arctan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ で定める．ただし，$\arctan x$ は，$\tan x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数とする．

(a) $f'(x)$ を求めよ．

(b) $\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$ を示せ．

(2) g を $(-1,1)$ 上で定義された C^2級関数とする ． g のテイラー展開あるいはロピタルの定理を用いて

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h)+g(2h)+g(-3h)-3g(0)}{h^2} = 7g''(0)$$

を示せ（ただし，ロピタルの定理を用いる際は，定理の仮定を満たしていると確認する事）．

(3) h を $(-2,2)$ 上で定義された C^1級関数とする ． $h(0)=0$ であれば，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{h(x)}{x^{3/2}}\,dx$ が存在することを示せ．

(お茶の水女子大 2009) (m20090601)

0.18 次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^2 x^2 \log x\, dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x\, dx$ ただし，$\arctan$ は正接 $\tan$ の逆関数の主値を表すものとする．

(お茶の水女子大 2013) (m20130601)

0.19 逆正接関数について以下の問に答えよ．ただし値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．

(1) $\tan^{-1} x + \tan^{-1}(a-x) = \dfrac{\pi}{4}$ が実数解をもつ a の範囲を求めよ．

(2) $\left(\tan^{-1} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ を示せ．

(3) $\displaystyle\int \tan^{-1} x dx$ を求めよ．

(4) $\tan^{-1} x$ を x^{10} の項までマクローリン展開せよ．

(お茶の水女子大 2016) (m20160609)

0.20 逆正接関数（$\tan x$ の逆関数）Arctan x の Taylor 展開をもとに，以下のようにして $\dfrac{\pi}{4}$ の近似を与えよ．ただし，$\mathrm{Arctan}\,0 = 0$ とする．

(1) $|x| < 1$ のとき
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$
となることをもとに，$x = 0$ における Arctan x の Taylor 展開を求めよ．

(2) 上で求めた Taylor 展開の部分和に $x = 1$ を代入することで $\mathrm{Arctan}\,1 = \dfrac{\pi}{4}$ を近似することを考える．近似の誤差を 0.1 や 0.01 以下にするためには第何項までの和を考える必要があるかを論じよ．また，誤差を 0.1 以下とする場合にはどのような近似値が得られるかを実際に述べよ．

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190604)

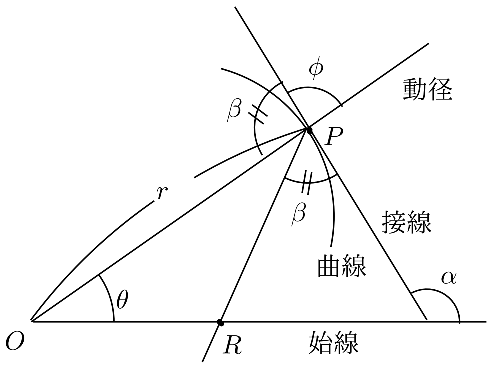
0.21 カージオイドと呼ばれる極座標形式で表された曲線 $r = 1 + \cos\theta$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 曲線の概形を図示せよ．ただし，作図の根拠も示せ．

(2) この曲線の全周囲長を求めよ．ただし，$1 + \cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ という関係を用いても良い．

(3) 下図に示すように，曲線上の点 $P(r, \theta)$ $(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2})$ における接線と原点 O から点 P を結んだ直線（動径）のなす角度を ϕ とする． また，接線と始線のなす角度を α とする． このとき，$\tan\phi = \tan(\alpha - \theta)$ であることを用い，
$$\tan\phi = \frac{r}{r'}$$
となることを示せ．ただし，$r' = dr/d\theta$ である．また，これを用いて ϕ を θ で表せ．

(4) 下図に示すように，動径と接線のなす角度を β とする．曲線上の点 $P(r, \theta)$ $(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2})$ で接線と角度 β をなすもう一つの直線が始線と交わる点を R とする．このとき，三角形 OPR は二等辺三角形となることを示せ．



(東京大 2014)　　(m20140703)

0.22 以下の問いに答えよ．

(1) 次の微分方程式において $y(0) = 1$ を満たす解を求めよ．
$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2+1}y = e^{-\tan^{-1}x}$$

(2) $-\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4}$ で定義された関数 y についての微分方程式
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \frac{1}{\cos 2x} \qquad (*)$$
の一般解を以下の設問の手順にしたがって求めることを考える．

(a) 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4y=0$$

の 2 つの一次独立解 $y_1,\ y_2$ を実関数の形で求め，そのロンスキ行列式 $W(y_1,\ y_2)$ を計算せよ．ここでロンスキ行列式とは

$$W(y_1,\ y_2)=y_1\frac{dy_2}{dx}-y_2\frac{dy_1}{dx}$$

のことである．

(b) 式 $(*)$ の特殊解が,

$$\frac{du}{dx}y_1+\frac{dv}{dx}y_2=0$$

を満たす $u(x),\ v(x)$ を用いて

$$y=u(x)y_1+v(x)y_2$$

という形に書けると仮定したとき，$u(x),\ v(x)$ それぞれが満たす 1 階の微分方程式を導け．

(c) 式 $(*)$ の一般解を求めよ．

(東京大 2015)　　(m20150701)

0.23 i を虚数単位とし，z は複素数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 次の複素数を $x+iy$（x,y は実数）の形ですべて求めよ．ただし，x,y の表式に三角関数を含んではならない．

(a) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^3$　　(b) $i^{1/2}$　　(c) $\dfrac{(1-i)^6}{(1+i)^8}$

(2) 関数 $z=\tan\omega=\dfrac{\sin\omega}{\cos\omega}$ の逆関数を $\omega=\tan^{-1}z$ で表す．

(a) 次の式が成り立つことを示せ．　$\tan^{-1}z=\dfrac{i}{2}\log\left(\dfrac{i+z}{i-z}\right)$

ただし，log は複素対数関数である．

(b) $\tan^{-1}z$ の z に関する微分を求めよ．

(3) 複素平面において，曲線 C を $z=e^{i\theta}$ $(0\le\theta\le\pi)$ とする．

(a) 次の積分 $I(k)$ を求めよ．ここで，k は $0<k<1$ の定数とする．　$I(k)=\displaystyle\int_C\frac{1}{k^2z^2+1}dz$

(b) $k=2-\sqrt{3}$ のとき，I の値を求めよ．

(4) 実積分 J の値を留数定理により求めることを考える．　$J=\displaystyle\int_0^\infty\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx$

(a) J の積分範囲を $[-\infty,\infty]$ と変形して，被積分関数に e^{ix} を用いて J を表せ．

(b) 関数 $f(z)=1/(z^2+1)^2$ とする．複素平面において，図 1 の半径 Γ（円弧 ADB）の半径 R が十分に大きい時，次のことが成り立つことを示せ．　$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz=0$

(c) 図 1 の C に関する周回積分を考えることにより，J の値を求めよ．
このとき，複素平面の上半平面において，

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)e^{iz}dz=0$$

であることを用いてよい．

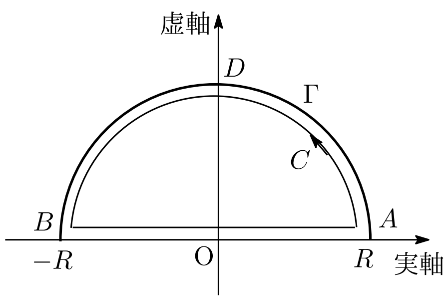


図 1

(東京大 2020)　　(m20200703)

0.24 (1) 次の関数をマクローリン展開し，ゼロでない最初の 3 項を示せ．　$\tan^{-1} x$

(2) 次の級数の収束域を求めよ．　$\dfrac{2}{1\cdot 3}+\dfrac{3x}{2\cdot 4}+\dfrac{4x^2}{3\cdot 5}+\cdots\cdots$

(東京工業大 2002)　　(m20020802)

0.25 次の定積分，二重積分の値を求めなさい．ここで，$\tan^{-1} x$ は，$\tan x$ の逆関数（アークタンジェント）のことである．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \tan^{-1} x\, dx$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{y^2}{(x^2+y^2)^3}\, dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0,\ x^2+y^2\geqq\ 1\}$

(東京農工大 2009)　　(m20090904)

0.26 (1) $u=\tan\dfrac{x}{2}$ とおく．$\sin x$，$\cos x$ を u を用いて表せ．

(2) $I_1=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx\ ,\quad I_2=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$ を求めよ．

(電気通信大 2008)　　(m20081003)

0.27 次の微分方程式を解け．

(1) $\sin x\cos^2 y-\dfrac{dy}{dx}\cos^2 x=0$

(2) $\dfrac{dy}{dx}+y\tan x=\sin 2x$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+5y=\sin 2x$

(電気通信大 2009)　　(m20091004)

0.28 関数

$$f(x,y)=\frac{\pi}{4}-\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{x^2+y^2}$$

に対して，xyz 空間内の曲面 $S\ :\ z=f(x,y)$ を考える．以下の問いに答えよ．

ただし，$y=\mathrm{Tan}^{-1}x$ は $x=\tan y\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を表す

(1) $(x,y)\neq(0,0)$ に対して，偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 曲面 S 上の点 $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ f\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)\right)$ における S の接平面の方程式を求めよ．

(3) 曲面 S と平面 $z=0$ で囲まれる立体の体積 V を求めよ．

(電気通信大 2020)　　(m20201003)

0.29 (1) $z^4+1=0$ となる複素数 z を求めよ．

(2) $x=\sqrt{\tan\theta}\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して，導関数 $\dfrac{dx}{d\theta}$ を x の式で表せ．

(3) 広義積分 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan\theta}\,d\theta$ を求めよ．

(電気通信大 2020)　　(m20201005)

0.30 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan x}$$

(横浜国立大 2016)　　(m20161105)

0.31 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-1}{\tan x}$ (2) $\dfrac{dy}{dx}=x^n-\dfrac{y}{x}$ ただし，n は正の整数である．

(横浜国立大 2020) (m20201102)

0.32 次の問に答えなさい．ただし，$\log x$ の底は，自然対数の底 (e) とする．

(1) (a) 関数 $\log(1+x)$ と $x\cos x$ を，それぞれ 3 次の項までマクローリン展開しなさい．

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x\cos x}\right)$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n+3^n}$ を求めなさい．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\log x+\sqrt{\log x}}-\sqrt{\log x-\sqrt{\log x}}\right)$ を求めなさい．

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}(1-\tanh x)^{\frac{1}{\sin x}}$ を求めなさい．

(千葉大 2017) (m20171201)

0.33 $f(x,y)=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ で $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(筑波大 1998) (m19981302)

0.34 以下の設問 (1),(2) に答えなさい．

(1) $f(x,y)=\tan x+\tan y-\tan(x+y)$ $(0\leq x<\pi,\ 0\leq y<\pi)$ の極値を求めなさい．

(2) 半径 r の円に外接する三角形のうち，最小の面積をもつのはどのような場合か．また，その最小値はいくらか．

(筑波大 2003) (m20031311)

0.35 三角形 ABC において，$\tan A$，$\tan B$，$\tan C$ の値がすべて整数であるときに，これらの値を求めよ．

(筑波大 2007) (m20071323)

0.36 定積分 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$ の値を，以下の 2 通りの方法で計算せよ．

(1) (a) $I=2\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$ を示せ．

(b) 積分変数を $x=\tan\dfrac{\theta}{2}$ に置換せよ $\left(\text{ヒント：}\cos\theta=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\text{である}\right)$．

(c) 積分を実行して I を求めよ．

(2) (a) 複素数 $z=e^{i\theta}$ とおいたとき，$z+\dfrac{1}{z}$ を計算せよ．

(b) その結果を基に I を z に関する複素積分に変換せよ．

(c) 留数定理を用いて I を求めよ．

(筑波大 2008) (m20081311)

0.37 任意の実数 x について $y=\tan^{-1}(x)+\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ の値を，$\tan^{-1}(x)$ の微分を用いて求めなさい．

(筑波大 2013) (m20131319)

0.38 逆正接関数 $f(x)=\mathrm{Tan}^{-1}x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<f(x)<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に関する以下の問いに答えよ．

(1) $y=\mathrm{Tan}^{-1}x$ とおき，$x=\tan y$ とすることで，$\dfrac{dy}{dx}$ を y の関数として求めよ．

(2) $(1+x^2)f'(x)=1$ が成り立つことを示せ．

(3) $f^{(n)}(x)$ に関する漸化式 $(1+x^2)f^{(n+1)}(x)+2nxf^{(n)}(x)+n(n-1)f^{(n-1)}(x)=0$ が成り立つことを示せ．ただし，n は 1 以上の整数である．

(4) $f^{(n)}(0)$ に関する漸化式を解き，m を 0 以上の整数として $f^{(2m)}(0)$ および $f^{(2m+1)}(0)$ を求めよ．

(筑波大 2014)　　(m20141309)

0.39 デカルトの葉形と呼ばれる平面曲線 $C: x^3-3xy+y^3=0$ について，次の問いに答えよ．

(1) C の特異点をすべて求めよ．

(2) C 上の点 (x,y) に関する xy の極値をすべて求めよ．

(3) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とおき，C の極方程式を求めよ．

(4) C は第 1 象限で，ある図形を囲むがその図形の面積 S を求めよ．
(ヒント：極方程式を用いて，$t=\tan\theta$ とおけ)

(筑波大 2015)　　(m20151303)

0.40 $y=\tan x$ の逆関数を $y=\arctan x$ と書く．ある y の値に対して $y=\tan x$ を満たす x は多数存在するが，定義域を $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ に限る場合，$y=\tan x$ は単射となり一意に逆関数を定義することができる．この定義域における $y=\tan x$ の逆関数を $y=\mathrm{Arctan}\,x$ と書くこととする．
上記の定義域において，次の問に答えよ

① $y=\mathrm{Arctan}\,x$ について，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2}$ を証明せよ．

② 次の無限級数 S の値を求めよ．ただし，その導出過程を示すこと．

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

(筑波大 2020)　　(m20201305)

0.41 次の関数 $f(x)$ の $x=0$ における微分可能性を調べよ (a は定数)．ただし，逆三角関数は主値をとるものとする．

$$f(x)=\begin{cases} a|x|-x\tan^{-1}\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

(筑波大 2021)　　(m20211315)

0.42 2 つの 2 変数関数

$$F(x,y)=x^2+2xy-y^2$$
$$G(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\frac{y}{x}$$

について，以下の各問に答えよ．ただし，$y=\arctan x$ は $y=\tan x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数である．また，$\dfrac{d}{dx}\arctan x=\dfrac{1}{1+x^2}$ である．

(1) $G(x,y)$ の x,y に関する偏導関数 $G_x(x,y),\ G_y(x,y)$ をそれぞれ求めよ．

(2) ラグランジュの未定乗数法を用いて，$F(x,y)$ が条件 $G(x,y)=0$ のもとで極値をとる点の候補を求めよ．

(3) $G(x,y)=0$ の陰関数 $y=g(x)$ について，その 1 次導関数 $g'(x)$ を x および $g(x)$ で表せ，また，2 次導関数 $g''(x)$ を $x, g(x)$ および $g'(x)$ で表せ．

(4) (3) を用いて，条件 $G(x,y)=0$ のもとでの $F(x,y)$ の極小値を求めよ．

(筑波大 2022)　　(m20221308)

0.43　$F(x,y) = xy\tan y + \pi\tan y - x$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\tan x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)\quad (x \to 0)$ を満たす実数 a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ．ただし，$o(\cdot)$ はランダウの記号（スモール・オー）を表す．

(2) 1 以上の整数 n に対し，開区間 $\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi,\ \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)$ を I_n とおく．各 I_n における方程式

$$\tan x = \frac{1}{x} \qquad (x \in I_n)$$

の解を x_n とする．$d_n = x_n - n\pi$ とおくとき $F\left(\frac{1}{n},\ d_n\right) = 0$ を示せ．

(3) $x = 0$ を含む開区間 I と，I において定義された微分可能な関数 $\varphi(x)$ であって

$$F(x,\ \varphi(x)) = 0 \qquad (x \in I), \qquad \varphi(0) = 0$$

を満たすものが存在することを示せ．

(4) (2) の x_n を

$$x_n = n\pi + b_1\frac{1}{n} + b_2\frac{1}{n^2} + b_3\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad (n \to \infty)$$

と表示したときの実数 b_1, b_2, b_3 を求めよ．

(筑波大 2022)　　(m20221316)

0.44　$y = \tan^{-1} x^2$ について，次の問に答えよ．

(1) グラフの概形を描け．

(2) $x = 0$ における 2 次の微分係数 $y''(0)$ を求めよ．

（埼玉大 2001）　　(m20011403)

0.45　$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ とし, Ω で定義された実数値関数 f を

$$f(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

とする．ただし，$\tan^{-1}$ は正接関数 tan の定義域を $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ に制限したものの逆関数である．
また, $D = \{(x,y) \in \Omega \mid 2 \leqq x^2 + y^2 \leqq 3,\ 0 \leqq y \leqq x\}$ とおく. 次の問に答えよ．

(1) f の 1 階の偏導関数をすべて求めよ．

(2) f の 2 階の偏導関数をすべて求めよ．

(3) D を図示せよ．

(4) 重積分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ．

(埼玉大 2005)　　(m20051406)

0.46　(1) $t = \tan\frac{x}{2}$ とするとき，$\sin x$, $\cos x$ および $\frac{dt}{dx}$ を t の式で表せ．

(2) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$ を求めよ．

(埼玉大 2006)　　(m20061402)

0.47　次の微分方程式を解け．

(1) $2x^2\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ (2) $\dfrac{dy}{dx} + y\tan x + \cot^2 x = 0$

(埼玉大 2007) (m20071406)

0.48 以下の関数を微分せよ.

(1) $y = \tan^{-1}\dfrac{x}{a}$ （a は 0 ではない定数） (2) $y = x^x$

(埼玉大 2008) (m20081401)

0.49 (1) つぎの関数を微分せよ.

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)$$

(2) つぎの関数の第 n 次導関数を求めよ.

$$y = (x+1)^2\log(x+1)$$

(埼玉大 2010) (m20101405)

0.50 (1) 以下の微分方程式を解け.

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \tan x \cdot \tan y$

(b) $\cos x\dfrac{dy}{dx} - y\sin x = 2\cos x\,\sin x$

(c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 6y = e^x$

(2) $y(t)$ が時刻 t における物体の位置を表すとすると, $f'(t)$ は速度, $f''(t)$ は加速度を表す.

(a) 下記の運動方程式を満たすこの物体の位置 $y(t)$ を求めよ.
$y''(t) + k^2y(t) = 0$ ($k > 0$ の定数)

(b) 初期条件 $y(0) = A_0\,,\ y'(0) = 0$ を満たす解を求めよ.

(埼玉大 2010) (m20101408)

0.51 次の不定積分を求めよ.

$$\int \left(2x^2\tan^{-1}2x\right)dx$$

(埼玉大 2011) (m20111402)

0.52 次の関数を微分せよ.

$y = \tan(\log x)$ $(x > 0)$

(埼玉大 2013) (m20131401)

0.53 次の関数を x について微分せよ.

(1) $y = \tan\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$ (2) $y = x^{(e^{3x})}$

(埼玉大 2016) (m20161401)

0.54 以下の微分方程式を解け.

(1) $2\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{\tan x}$ (2) $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = x^3e^x$ (3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x$

(4) $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 8\dfrac{d^2y}{dx^2} + 16y = x^2$

(埼玉大 2016) (m20161407)

0.55 次の関数を x について微分せよ．

(1) $y=\dfrac{\sin 3x}{1+\cos 3x}$ (2) $y=e^{\frac{x}{\tan x}}$

(埼玉大 2017) (m20171401)

0.56 $\tan\dfrac{\theta}{2}=x$ のとき， 以下の問いに答えよ．

(1) $\sin\theta=\dfrac{2x}{1+x^2}$ を証明せよ． (2) $\cos\theta=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ を証明せよ．

(群馬大 2007) (m20071504)

0.57 以下の式を簡単にせよ．

(1) $(\sin 25^\circ-3\sin 65^\circ)^2+(3\cos 115^\circ+\cos 155^\circ)^2$

(2) $\tan(45^\circ+\theta)\tan(45^\circ-\theta)+\tan(135^\circ+\theta)\tan(135^\circ-\theta)$

(3) $(\sin x+\cos x)^2+\dfrac{(1-\tan x)^2}{1+\tan^2 x}+\tan^2 x+\cos^2 x\,(1-\tan^4 x)$

(群馬大 2013) (m20131501)

0.58 次の微分方程式を解け． $y'+y\tan x=\dfrac{1}{\cos x}$ ， $y(0)=1$

(茨城大 2001) (m20011704)

0.59 関数 $y=\tan x$ の定義域を $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ に制限すると, その逆関数 $y=\mathrm{Arctan}\,x$ を考えることができる. 次の各問に答えよ.

(1) $y=\mathrm{Arctan}\,x$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ は $\dfrac{1}{1+x^2}$ となることを示せ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\mathrm{Arctan}\,x\,dx$ を求めよ.

(茨城大 2005) (m20051702)

0.60 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x\tan^{-1}x\,dx$ を計算せよ．ただし，関数 $y=\tan^{-1}x$ は，$y=\tan x$ の定義域を $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ に制限するときに定義される $y=\tan x$ の逆関数を表す．

(茨城大 2013) (m20131702)

0.61 $-\infty<x<\infty$ である x に対して，$\tan y=x$ 満たす y で $-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす唯一のものを $y=\mathrm{Arctan}\ x$ と表わす．以下の各問に答えよ．

(1) $\cos(\mathrm{Arctan}\ x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ を示せ．

(2) 曲面 $z=\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 上の点 $P=\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$ での接平面を求めよ．

(3) 関数 $y=x\sqrt{x^2+1}+\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ の微分を求めよ．

(4) 曲面 $z=\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ の，xy 平面上の有界閉領域 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqq 1\right\}$ の真上にある部分の曲面積を求めよ．

(茨城大 2022) (m20221702)

0.62 $\tan^{-1}x$ は $\tan x$ の逆関数で区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2}\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ に値をとるとする．このとき

(1) $(\tan^{-1}x)'$ を求めよ．

(2) $\dfrac{d}{dt}\tan^{-1}(\cos t)$ を求めよ．

(3) $\tan^{-1}(\cos t)$ の導関数の $t=\dfrac{\pi}{2}$ における値を求めよ．

(信州大 1999) (m19991901)

0.63 (1) $t=\tan\theta$ のとき，$\sin 2\theta$ を t を用いて表せ.

(2) $t=\tan\theta$ と置換して，不定積分 $\displaystyle\int \frac{d\theta}{1+\sin 2\theta}$ を求めよ.

(信州大 2015) (m20151902)

0.64 (1) 次の不定積分を求めよ.

$$\int \tan^{-1}\sqrt{x}\,dx$$

(2) $\mathbb{R}^2$ 内の領域 D を $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\le x+y\le 1,\ 0\le x-2y\le 1\right\}$ で定めるとき，2 重積分

$$\iint_D (3x+2y)dxdy$$

の値を求めよ.

(3) f は $[0,1]$ 上の実数値連続関数で，$\displaystyle\int_0^1 |xf(x)|dx<\infty$ であるとする．このとき，次の関数が $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを示せ.

$$g(x):=\int_0^1 \cos(xy)f(y)dy$$

(信州大 2020) (m20201906)

0.65 次の問いに答えよ．

(1) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とすると，$\sin x,\ \cos x,\ dx$ は，それぞれ次のように t で表されることを示せ．

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\ ,\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{3\sin x+4\cos x}dx$ を求めよ．

(新潟大 2000) (m20002002)

0.66 自然数 n に対して, $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$ とおく. 次の問に答えよ.

(1) 任意の実数 x に対して, $1+x\leqq e^x$ を示せ.

(2) $(1-x^2)^n\leqq e^{-nx^2}$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ および $e^{-nx^2}\leqq (1+x^2)^{-n}$ $(-\infty<x<\infty)$ を示せ.

(3) $x=\cos t$ とおくことにより, $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n dx=I_{2n+1}$ を示せ.

(4) $x=\tan t$ とおくことにより, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n}dx=I_{2n-2}$ $(n\geqq 2)$ を示せ.

(5) $\sqrt{n}\,I_{2n+1}\leqq \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx\leqq \sqrt{n}\,I_{2n-2}$ $(n\geqq 2)$ を示せ.

(新潟大 2005) (m20052003)

0.67 次の関数を微分せよ．ただし，log は自然対数で表す.

(1) $\tan(x^2-3x)$ (2) $x^2\log x$ (3) $x^3(x^2+5x+1)^{-1}$

(新潟大 2012) (m20122001)

0.68 以下の問に答えよ.

(1) $F(\omega) = \displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-j\omega t}dt$ を求め，$F(\omega)$ のグラフを描け.

(2) $F'(\omega) = \dfrac{dF(\omega)}{d\omega}$ を $\omega = 0$ 以外で求めよ.

(3) $y = \tan(a\omega)$ のグラフを，横軸を $a\omega$ 軸，縦軸を y 軸とする座標平面に，$-\dfrac{\pi}{2} \leq a\omega \leq \dfrac{5\pi}{2}$ の範囲で描け.

(4) $F(\omega) = 0$ となる $a\omega$ の値の位置を，問 (3) で描いた座標平面に $\bullet$ 印で示せ.

(5) $F'(\omega) = 0$ となる $a\omega$ の値の位置を，問 (3) で描いた座標平面に $\odot$ 印で示せ.

(新潟大 2014)　　(m20142004)

0.69　等式 $\tan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ で成り立つような定数 a_n のうち a_0 から a_5 までを求めよ.

(新潟大 2015)　　(m20152017)

0.70　実数 θ に対して $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，　$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とおく．以下の問いに答えなさい.

(1) $R(\theta)K = KR(-\theta)$ を示しなさい.

(2) 原点を通る傾き $\tan\theta$ の直線に関する対称移動を表す行列を $A(\theta)$ とするとき，$A(\theta) = R(2\theta)K$ を示しなさい.

(3) $A\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)A(\theta) = R\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ となる $A(\theta)$ を求めなさい.

(長岡技研大 2007)　　(m20072102)

0.71　xy 平面において，領域 S, T を

$$S \ : \ x^2 + y^2 \leqq 1$$

$$T \ : \ 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4,\ 0 \leqq y \leqq x$$

と定義する．下の問いに答えなさい.

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_S (x^2 + y^2)dxdy$ を求めなさい.

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_T \tan^{-1}\frac{y}{x}dxdy$ を求めなさい.

(長岡技科大 2020)　　(m20202103)

0.72　実数 x と正の整数 n に対して，$R_n(x)$ を

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} + R_n(x)$$

によって定める．ただし，$\arctan x$ は $y = \tan x \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数である．このとき，次に答えよ.

(1) $1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-t^2)^{n-1} = \dfrac{1 - (-t^2)^n}{1 + t^2}$ を用いて，$R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-t^2)^n}{1 + t^2}dt$ となることを示せ.

(2) $|x| \leq 1$ のとき $R_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ となることを示せ.

(金沢大 2008)　　(m20082208)

0.73　関数 $\tan x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) 公式 $\dfrac{d}{dy}\tan y = \tan^2 y + 1 \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を利用して

$$(x^2+1)f'(x) = 1 \quad (-\infty < x < \infty)$$

となることを示せ.

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$(x^2+1)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$$

が成立することを示せ.

(3) $m = 1, 2, 3, \cdots$ に対して, 微分係数 $f^{(2m+1)}(0)$ の値を求めよ.

(金沢大 2010)　　(m20102202)

0.74 $0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2}$ とし,

$$D_\varepsilon = \left\{(x, y) \,\middle|\, x \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq 1,\ y \geqq (\tan\varepsilon)x\right\},$$
$$I_\varepsilon = \iint_{D_\varepsilon} xy^2 dxdy$$

とおく．次の問いに答えよ.

(1) D_ε を図示せよ.

(2) I_ε を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{-3}(I_\varepsilon - a) = b$ となる定数 a, b を求めよ.

(金沢大 2013)　　(m20132208)

0.75 被積分関数に自然対数を含んでいる定積分

$$I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$$

の値が $0.18 < I < 0.28$ となることを確かめる．次の問いに答えよ.

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，不等式

$$\frac{\log(1+x)}{1+x^2} \geqq \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)(1 - x^2)$$

が成り立つことを示し，これを用いて $I \geqq \dfrac{11}{60}$ であることを導け.

(2) 2 つの等式

$$1 + \tan\theta = \frac{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \theta)}{\cos\theta} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

および

$$\int_0^{\pi/4} \log\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right\} d\theta = \int_0^{\pi/4} \log(\cos\theta) d\theta$$

がそれぞれ成り立つことを示し，これらを用いて定積分 I を計算せよ.

(3) $\pi < 3.2$ および $\log 2 < 0.7$ であることと問題 (1)(2) の結果を合わせて,
$0.18 < I < 0.28$ であることを確かめよ.

(金沢大 2019)　　(m20192202)

0.76 正接関数 $\tan x$ の逆関数を $\tan^{-1} x$ とし，$x \neq 0$ となる (x, y) に対して関数 $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ を定める．次の問いに答えよ.

(1) 偏導関数を計算して，$f_y(x,y)-f_x(x,y)$ と $f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)$ を求めよ．

(2) $0<a<1$ に対し

$$D_a=\left\{(x,y)\ \middle|\ a^2 \leqq x^2+y^2,\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x\right\}$$

とするとき，重積分

$$I_a=\iint_{D_a}\{f_y(x,y)-f_x(x,y)\}\,dxdy$$

を計算し，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to+0} I_a$ を求めよ．

(金沢大 2019)　　(m20192203)

0.77 $x \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$f(x)=x\Big(\log\Big(x^2+\frac{1}{2}\Big)-2\Big)+\sqrt{2}\tan^{-1}\big(\sqrt{2}x\big)$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x\log(x)}$ を求めよ．

(2) f の導関数を求めよ．

(3) f の極値を求めよ．

(金沢大 2020)　　(m20202207)

0.78 次の関数 $f(x)$ の導関数を求めなさい．

(1) $f(x)=\tan^{-1}x$

(2) $f(x)=\log(\log x)$

(金沢大 2022)　　(m20222211)

0.79 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}x^{\frac{2}{3}}\quad (x>0)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}e^{x^2}$　　(3) $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}(2x)$

（富山大 2004）　　(m20042301)

0.80 次の関数の導関数を求めよ．

(1) $x\cos x$　　(2) $\sqrt{1+x^2}$　　(3) $\dfrac{1}{1+\sin^2 x}$　　(4) $\mathrm{Tan}^{-1}x$

(富山大 2005)　　(m20052301)

0.81 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}(2x)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}xe^{-x^2}$

(富山大 2006)　　(m20062301)

0.82 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}x^2e^{-2x}$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\log(\tan x)\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$　　(3) $\dfrac{d}{dx}(\cos x)^x\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

(富山大 2010)　　(m20102301)

0.83 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{\log_e(1-x)^2}$　　(2) $\dfrac{d}{dx}(\cos 2x)^{-2}$　　(3) $\dfrac{d}{dx}\tan\left(\dfrac{e^{x^2}}{2}\right)$

(富山大 2013)　　(m20132301)

0.84 次の計算をせよ．計算の概略も示すこと．

(1) $\dfrac{d}{dx}\log_e\left\{(x-1)e^{x^2}\right\}$ $(x>0)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{(x-2)^x}{\tan x}\right\}$ $(x>2)$

(富山大 2015)　　(m20152305)

0.85 次の計算をせよ．計算の概略も示すこと．

(1) $\displaystyle\int \arctan\frac{x}{2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^4 x-6cos^6 x)\,dx$

(富山大 2015)　　(m20152306)

0.86 θ が 0 付近では $\tan\theta \fallingdotseq \theta$ と近似されることがある． この近似が成り立つ理由についてテイラー展開（マクローリン展開）を用いて説明せよ．

(富山大 2021)　　(m20212303)

0.87 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\log(1+\tan\theta)d\theta$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cos x^2 dx$

(福井大 2001)　　(m20012406)

0.88 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-1}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$

（福井大 2004）　　(m20042402)

0.89 次の計算を行え（途中経過も書くこと）．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{e^{2x^2}-1}=$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)=$

(福井大 2007)　　(m20072401)

0.90 次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$　　(2) $\dfrac{1-x}{x^2}$　　(3) $\tan x$　　(4) $e^x\cos x$

(福井大 2008)　　(m20082416)

0.91 次の関数を微分せよ．

(1) $y=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$　　(2) $y=x^{1/x}$　　(3) $y=\log_a x$

(4) $y=\tan^{-1}x$　　(5) $y=e^{-a^2x^2}$

(福井大 2009)　　(m20092408)

0.92 次の関数を微分せよ．

(1) $y=\log_e\left(\cos^2 x\right)$　　(2) $y=x^{\tan^{-1}x}$

(福井大 2011)　　(m20112402)

0.93 $z=\arctan\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$ のとき，$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ となることを示せ．

(福井大 2011)　　(m20112405)

0.94 次の関数を微分せよ．

(1) $y=\sqrt{4\sin x+6}$

(2) $y = \log \sqrt[5]{\dfrac{x+5}{x-5}}$

(3) $y = -\tan^5 x$

(4) $y = \sin^5 x + \cos^5 x$

(福井大 2012)　　(m20122417)

0.95 不定積分を求めよ.

< 公式 > 必要に応じて次の公式を使ってもよい.

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (\,a, C \text{ は定数}\,)$$

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos x \, dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(2+x^2)}$

(福井大 2013)　　(m20132407)

0.96 次の微分方程式の一般項を導出して，初期条件を満たす解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} + x^2 y = x^2$　（初期条件：$x = 0$ のとき $y = 2$ ）

(2) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 + y$　（初期条件：$x = 0$ のとき $y = 1$ ）

なお，必要であれば，$\dfrac{1}{y^2+y} = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y+1}$ の関係を用いること.

(3) $\dfrac{dy}{dx} + 2y\tan x = \sin x$　（初期条件：$x = 0$ のとき $y = 0$ ）

(福井大 2013)　　(m20132414)

0.97 以下の (1) および (2) の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$

(福井大 2014)　　(m20142417)

0.98 曲率 ρ(注) に関する以下の微分方程式について答えなさい.

$$y'' = \rho(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする.

(1) $\dfrac{d\rho}{dx}$ を求めなさい.

(2) 円の方程式 $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ のとき，(1) の曲率 ρ に関する x の微分 $\dfrac{d\rho}{dx}$ が 0 となり，曲率 ρ は一定であることを示しなさい.

(3) ρ を定数として，微分方程式 ① を解きなさい. 必要であれば，以下の置換法 $y' = \nu = \tan\theta \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いること.

（注）曲線上の各点において，その曲線の曲がりの程度を示す値.

(福井大 2015)　　(m20152425)

0.99 (1) $F(x, y) = 0$ のとき，$F_y \neq 0$ ならば $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y}$ となることを示せ.

(2) $f(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$ のとき，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ となることを示せ.

(福井大 2018)　　(m20182401)

0.100 次の微分方程式 ① について以下の問に答えよ．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

$$xy'' + 2y' + xy = 0 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

(1) 関数 $y_1 = \dfrac{\cos x}{x}$ は，微分方程式 ① の解であることを示せ．

(2) x の関数 u について，$y = uy_1$ が微分方程式 ① の解であるとき，u は次の微分方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 2(\tan x)\frac{du}{dx} = 0$$

を満たすことを示せ．

(3) $\dfrac{du}{dx} = v$ とおくとき v を求めよ．

(4) u を求めよ．

(5) 微分方程式 ① の一般解を求めよ．

(静岡大 2011)　　(m20112509)

0.101 次の関数の偏導関数を求めよ．

(1) $f(x,y) = \mathrm{arctan}\dfrac{y^2}{x} - \mathrm{arctan}\dfrac{x+y^2}{x-y^2}$　　(2) $f(x,y) = x\sqrt{y^2-x^2} + y^2\mathrm{arcsin}\dfrac{x}{y}$

(静岡大 2013)　　(m20132503)

0.102 次の式の値を求めよ．

(1) $\tan\theta = 1/3$ のとき．$(\sin\theta + \cos\theta)^2$ の値を求めよ．

(2) $(1+\tan\alpha)/(1-\tan\alpha) = 2+\sqrt{3}$ のとき，$\cos\alpha$ の値を求めよ．

(岐阜大 2009)　　(m20092614)

0.103 $y(x)$ を未知関数とする, 次の常微分方程式 (A) について, 以下の問いに答えよ．

$$y'(x) - \tan(x)\ y(x) = 2e^{2\sin(x)}\ , \qquad -\pi/2 < x < \pi/2 \qquad (A)$$

(1) $y(x;y_0)$ を初期条件 $y(0) = y_0$ を満たす微分方程式 (A) の解とするとき, $y(x;y_0)$ を求めよ. ただし, y_0 は実数とする．

(2) (1) の解 $y(x;y_0)$ について, 極限 $\displaystyle\lim_{x\to-\pi/2} y(x;y_0)$ が有限な値となるような初期値 y_0 はあるか. もしもあるなら, そのときの初期値 y_0 と $\displaystyle\lim_{x\to-\pi/2} y(x;y_0)$ を求めよ. また, もしもないのであれば, その理由を述べよ．

(岐阜大 2010)　　(m20102605)

0.104 a を 1 より大きい定数とする．方程式

$$\tan^{-1} x = \frac{ax}{1+x^2}$$

の区間 $(0,\infty)$ における実数解の個数を求めよ．ただし，$\tan^{-1} x$ は x の逆正接関数で，$\tan^{-1} 0 = 0$ とする．

(岐阜大 2011)　　(m20112601)

0.105 $z = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ とおく．偏導関数 z_x，z_{xy} を求めよ．
（ なお記号 $\tan^{-1}$ は逆三角関数を表す．）

(岐阜大 2017)　　(m20172602)

0.106 $\alpha,\ \beta$ が共に鋭角であり，$\sin\alpha = \dfrac{1}{3},\ \sin\beta = \dfrac{2}{3}$ のとき，$\tan(\alpha+\beta)$ を求めよ．

(豊橋技科大 2001) (m20012705)

0.107 関数 $f(t) = ae^{-bt}\sin(\omega t + c)$ について，次の問いに答えよ．ただし，a, b, c, ω は正の定数とする．

(1) $t \geq 0$ での関数 $f(t)$ の概略図を描け．

(2) 関数 $f(t)$ の極大，極小が $\tan(\omega t + c) = \dfrac{\omega}{b}$ を満たす t のときに生ずることを示せ．

(豊橋技科大 2003) (m20032705)

0.108 2 次曲線 $y = x^2 + (m+2)x + (m^2+4)$ の接線のうち, 原点を通る傾き k_1, k_2 の 2 本の直線のなす角を θ とする. θ が最大となるときの m の値を求めたい. ただし, m は実数, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ とする.

(1) $\tan(\alpha - \beta)$ を $\tan\alpha,\ \tan\beta$ を用いて表せ.

(2) k_1 , k_2 を m を用いて表せ.

(3) $\tan\theta$ を m を用いて表せ.

(4) θ が最大となるときの m の値と $\tan\theta$ の値を求めよ.

（豊橋技科大 2004） (m20042705)

0.109 xy 直交座標系の点列 (x_i, y_i) , $i = 1, \cdots, N$ に対し，各点からの垂直距離の 2 乗和が最小となるような直線を求めたい．次の各問いに答えよ．

(1) 次の文章中の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{コ}}$ に適当な数式を入れよ．
各点に単位質量を置いたときの重心を G とすると，その座標は

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} \\ \boxed{\text{イ}} \end{pmatrix} \tag{1}$$

となる．xy 座標系に対し，この重心 G を原点として，角度 θ で回転させた uv 座標系を考える．このとき

$$\begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \tag{2}$$

とおけば，(x_i, y_i) と (u_i, v_i) との関係は θ を用いて

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}} \\ -\boxed{\text{エ}} & \boxed{\text{ウ}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \end{pmatrix} \tag{3}$$

で与えられる．もし求めたい直線を u 軸にとれば，問題は

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^{N} v_i^2 \tag{4}$$

で定義される $J(\theta)$ を最小にする角度 θ を求めることに等しい．
式 (3) の v_i を θ で微分し，u_i を用いて表すと

$$\frac{\partial v_i}{\partial \theta} = \boxed{\text{オ}} \tag{5}$$

となるから，式 (4) を θ で微分して 0 とおけば

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = -2\sum_{i=1}^{N} u_i v_i = 0 \tag{6}$$

を得る．この式 (6) に，式 (3) を代入することにより，

$$\boxed{\text{カ}} \sum_{i=1}^{N} x_i' y_i' = \boxed{\text{キ}} \sum_{i=1}^{N} ({x_i'}^2 - {y_i'}^2) \tag{7}$$

となり，次式を得る．

$$\frac{2\boxed{\quad キ \quad}}{\boxed{\quad カ \quad}} = \frac{2\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i'}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} ({x_i'}^2 - {y_i'}^2)} \tag{8}$$

式 (8) の左辺は，倍角の公式により

$$\frac{2\boxed{\quad キ \quad}}{\boxed{\quad カ \quad}} = \boxed{\quad ク \quad} \tag{9}$$

と書けるから，式 (8) は

$$\boxed{\quad ク \quad} = \frac{2\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i'}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} ({x_i'}^2 - {y_i'}^2)} \tag{10}$$

となる．よって，式 (10) の右辺を計算して，式 (4) を最小化する θ を求めればよい．

式 (4) を最小化する θ を $\hat{\theta}$ とし，求めたい直線が重心 G を通ることを用いれば，直線の式は

$$y = \tan\hat{\theta}\left(x - \boxed{\quad ケ \quad}\right) + \boxed{\quad コ \quad} \tag{11}$$

として与えられる．

(2) 4 点 $(-1,0)$, $(3,1)$, $(4,3)$, $(6,2)$ があるとする．

(a) これらの 4 点に単位質量を置いたときの重心 G の座標を求めよ．

(b) これらの 4 点に関し，$\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i'$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} {x_i'}^2$ および $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} {y_i'}^2$ を求めよ．

(c) これらの 4 点からの垂直距離の 2 乗和が最小となる直線の傾き θ を求めよ．ただし，分数は既約分数とし，三角関数およびその逆関数はそのままでよい（例：$\cos\frac{7}{4}\pi$ や　$\sin^{-1}\frac{1}{3}$ など）．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062710)

0.110　次の関数を微分せよ.

$$f(x) = \frac{1}{\tan x} \quad (x \neq n\pi,\ n \text{ は整数})$$

(豊橋技科大 2012)　　(m20122704)

0.111　$\tan x = t$ とするとき，$\sin 2x$, $\cos 2x$ を t で表わせ．次に，dx を t 及び dt で表わせ．

(名古屋大 2000）　　(m20002801)

0.112　以下の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx$　（m, n は負でない整数）

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\, dx$　（ヒント：$x = \tan\theta$とおけ. また，$\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$ である.）

(名古屋大 2011)　　(m20112803)

0.113　以下の問いに答えよ.

(1) 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 x} dx$ の値を求めよ.

(2) 関数 $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ の導関数を求めよ.

(3) $y = \frac{1}{2}x^2$ によって表される曲線の $0 \leq x \leq 1$ の部分の長さを求めよ.

(名古屋大 2014)　　(m20142803)

0.114 次の定積分を求めよ．ただし，$y=\tan^{-1}x$ とした場合，$x=\tan y$ であることを意味する．

$$\int_0^1 x\tan^{-1}x\ dx$$

(名古屋大 2017)　　(m20172802)

0.115 次の積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\ dx$

(名古屋工業大 1999)　　(m19992901)

0.116 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{1+x+x^2})$

(名古屋工業大 2000)　　(m20002901)

0.117 (1) 次の 2 つの逆三角関数の導関数を求めよ．

(i) $\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$　　(ii) $\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(2) (1) を参考にして，原点以外で定義される関数　$f(x)=\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$ を簡単な形にせよ．

(名古屋工業大 2006)　　(m20062903)

0.118 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ とし，次の計算結果を最も簡明な形で示せ．　$\Delta\left(\tan^{-1}\dfrac{y}{x}\right)$

(名古屋工業大 2008)　　(m20082903)

0.119 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{x}\right)$ を求めよ．

(名古屋工業大 2012)　　(m20122906)

0.120 (1) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ と置くとき，t を用いて $\cos x$ を表せ．また $\dfrac{dx}{dt}$ を t で表せ．

(2) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ と置換して定積分 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi/3}\frac{1}{5+4\cos x}dx$ の値を求めよ．

(名古屋工業大 2018)　　(m20182902)

0.121 以下の関数を微分せよ．

(1) $y=\dfrac{3x-2}{x^2+1}$　(2) $y=\sqrt{2x^2-3}$　(3) $y=e^x\sin x$

(4) $y=\dfrac{1}{\tan x}$　(5) $y=\log(x^2+1)$

(三重大 2012)　　(m20123116)

0.122 $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x}dx=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$ (C は定数) を証明せよ．

(三重大 2016)　　(m20163104)

0.123 次の関数を微分せよ．

(1) $y=x^{2x}\quad(x>0)$　(2) $y=e^{-2x}\sin 3x$

(3) $y=\left(\tan x+\dfrac{1}{\tan x}\right)^2$　(4) $y=(3x-1)\sqrt{x^3+1}$

(三重大 2022)　　(m20223109)

0.124 次の関数の導関数を求めよ．

(1) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$　　(2) $y = \tan^{-1}(1+x)$

(奈良女子大 2002)　(m20023201)

0.125 以下の関数を微分せよ．

(1) $y = \cosh\left(\sqrt{x^2+1}\right)$　　(2) $y = \tan^{-1} x$

(奈良女子大 2011)　(m20113204)

0.126 次の関数を微分せよ．ただし，a は $a > 0$，かつ $a \neq 1$ の実定数である．

(1) $y = a^{-x}$　　(2) $y = \sin(\tan x)$

(奈良女子大 2013)　(m20133204)

0.127 次の微分を求めよ．ただし，a は実定数である．

(1) $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}(ax)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\left(x^2 e^{-ax}\right)$　　$\dfrac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(奈良女子大 2014)　(m20143201)

0.128 以下の関数を微分せよ．ただし，m，σ は正の定数である．

(1) $y = \exp\left[-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$　　(2) $y = \tan^{-1} x^2$

(奈良女子大 2015)　(m20153201)

0.129 (1) 関数 $f(x) = \arctan\left(\dfrac{2}{x}\right)$ を x で微分せよ．

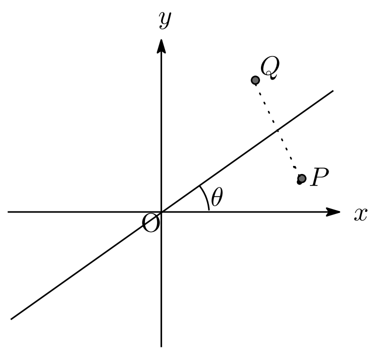
(2) 関数 $f(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$ を考える．ここで，ω_0，γ は正の実定数とする．以下の問いに答えよ;

(a) 極限値 $\displaystyle\lim_{\omega\to\infty} f(\omega)$ を求めよ．

(b) $\omega > 0$ の範囲で，$f(\omega)$ が極大をもつために満たすべき ω_0 と γ に対する条件式を求めよ．またその時の ω を求めよ．

(奈良女子大 2017)　(m20173204)

0.130 下図のように，点 P を直線 $y = (\tan\theta)x$ に関して対称な点 Q に移す変換行列を求めよ．



(奈良女子大 2019)　(m20193209)

0.131 (1) 関数 $f(x)$ および $g(x)$ は $x = a$ において，$f(a) = g(a) = 0$ であり，$f'(a)$ および $g'(a)$ が存在する．このとき，$g'(a) \neq 0$ であれば，次の式が成り立つことを示せ．

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

(2) 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\tan x}$

(京都大 2002)　(m20023301)

0.132 次の微分方程式について，(　　) 内の初期条件を満たす解を求めよ.

(1) $2y\dfrac{dy}{dx} = x^2 + 2x \qquad (x = 1\ のとき\ y = 0)$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = ay + \dfrac{b}{y} \qquad (x = 0\ のとき\ y = 1) \qquad$ ただし，a, b は定数で $a \neq 0$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = (1 - y^2)\tan x \qquad (x = 0\ のとき\ y = 2)$

(京都大 2014)　　(m20143301)

0.133 R^2 に直交座標系 $O - xy$ をとり，次式で定義される曲線 C を考える.

$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta + b\cos 2\theta \\ y &= a\sin\theta + b\sin 2\theta \end{aligned} \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

ここに，a, b は正の数であり，$a \neq b$ を満たすものとする．このとき問 (1)〜(3) に答えよ.

(1) $\Phi(\theta)$ は，次式を満たす連続関数であるとする.

$$(a\cos\theta + b\cos 2\theta)\tan\Phi(\theta) = a\sin\theta + b\sin 2\theta \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

このとき，$\dfrac{d\Phi}{d\theta}$ を θ の関数として求めよ.

(2) $a = 2$, $b = 1$ のとき，C の概形を描け．また $\Phi(0) = 0$ であるとき，$\Phi(2\pi)$ を求めよ.

(3) $a = 2$, $b = 1$ のとき，次の積分を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$$

(京都大 2014)　　(m20143306)

0.134 次の三角関数を含む微分方程式の一般解を，定数 C を用いて求めよ.

（イ）$x\tan\dfrac{y}{x} - y + x\dfrac{dy}{dx} = 0$　　（ロ）$\left(\tan y - 6x^2\right)dx + \dfrac{x}{\cos^2 y}dy = 0$

(京都大 2018)　　(m20183304)

0.135 $f(x) = \tan^{-1} x - \tan^{-1}\dfrac{x}{3}$ の最大値を求めよ．ただし，$\tan^{-1}$ は正接関数 tan の逆関数の主値である.

(京都工芸繊維大 1998)　　(m19983401)

0.136 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^2 \tan^{-1} x dx$ の値を求めよ．ただし $\tan^{-1}$ は tan の逆関数の主値である.

(京都工芸繊維大 2001)　　(m20013402)

0.137 $x > 0$ のとき，不等式

$$\tan^{-1} x > x - \frac{x^3}{3}$$

が成り立つことを示せ．ただし $\tan^{-1}$ は tan の逆関数の主値である.

(京都工芸繊維大 2004)　　(m20043407)

0.138 (1) $\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおく．$\sin x$ と $\dfrac{dx}{dt}$ を t を用いて表せ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + \sin x}$ を求めよ.

(京都工芸繊維大 2004)　　(m20043409)

0.139 実数 x が $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする．行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin x & \cos x & \tan x \\ -\sin x & 0 & 0 & \cos x \\ -\cos x & 0 & 0 & \sin x \\ -\tan x & -\cos x & -\sin x & 0 \end{vmatrix}$$

の値が $\dfrac{1}{4}$ となるような x をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2009)　　(m20093401)

0.140 xy 平面上で定義された関数

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

がある．ここで，$\mathrm{Tan}^{-1}x$ は逆正接関数の主値を表す．

(1) $x \neq 0$ のとき，偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y)$ を定義に基づいて求めよ．

(3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ および $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2010)　　(m20103403)

0.141 極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{Tan}^{-1}(x^3 + x) - x}{x^3}$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2020)　　(m20203402)

0.142 x の関数 $f(x) = 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\ \ (x \geqq 0)$ を考える．

(1) $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x)$ を求めよ．

(3) 関数 $y = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)\ \ (x \geqq 0)$ の値域を求めよ．

(京都工芸繊維大 2022)　　(m20223402)

0.143 2 変数関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

で定める．ここで，関数 $\theta = \tan^{-1} s$ は，関数

$$s = \tan\theta \quad \left\{-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$$

の逆関数である．2 変数関数 $g(x,y)$ を

$$g(x,y) = h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) e^{f(x,y)}$$

で定める．ここで，関数 $h(r)$ は区間 $(0,\infty)$ を定義域とし，区間 $(0,\infty)$ において 1 回微分可能とする．以下の問いに答えよ．

(1) 2 変数関数 $p(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ の x についての偏導関数 $p_x(x,y)$ を求めよ．

(2) 2 変数関数 $q(x,y) = e^{f(x,y)}$ の x についての偏導関数 $q_x(x,y)$ と y についての偏導関数 $q_y(x,y)$ を求めよ．

(3) $g(x,y)$ の定義域において，等式

$$-yg_x(x,y)+xg_y(x,y)-h'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)e^{f(x,y)}=0$$

が成り立っているとする． ここで，$g_x(x,y)$ は $g(x,y)$ の x についての偏導関数，$g_y(x,y)$ は $g(x,y)$ の y についての偏導関数，$h'(r)$ は $h(r)$ の導関数を表す． $h(1)=1$ を満たす $h(r)$ を求めよ．

(大阪大 2021) (m20213506)

0.144 次の関数の導関数を求めなさい．

(1) $\tanh x$ (2) $\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ $(-1<x<1)$ (3) $\log_e(\cos x)$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

(大阪府立大 2010) (m20103611)

0.145 次の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}}$ $(D=\{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3|x^2+y^2+z^2\leq 1\})$

(2) $\displaystyle\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tan^{-1}\frac{y}{x}$

(神戸大 2008) (m20083808)

0.146 x,y 実数とし，

$$f(x,y)=\mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}\quad(x\neq 0)$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ を求めよ.

(2) 曲線 $z=f(x,y)$ の, 点 $(1,1,\pi/4)$ における接平面と法線の方程式を求めよ.

(3) $f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)$ を求めよ.

(神戸大 2010) (m20103804)

0.147

$$f(x)=\tan x-\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\quad\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

とおく． 以下の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f(x)>0$ を示せ.

(3) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x<\tanh(\tan x)$ を証明せよ.

（ただし，任意の実数 t に対して，$\tanh t=\dfrac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$ である．）

(神戸大 2011) (m20113807)

0.148 関係式 $y=x\tan\theta$ の定める陰関数 $\theta=\theta(x,y)$ について $\Delta\theta=\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$ を計算せよ.

(神戸大 2017) (m20173803)

0.149 $y=\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ の微分係数 $\dfrac{dy}{dx}$ が次式で与えられることを証明せよ．ただし，a は定数で $a>0$ である．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{a^2+x^2}$$

(鳥取大 1997) (m19973901)

0.150 次の不定積分を計算せよ.（積分定数は省略してよい）

(1) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x(x^2-1)}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx$

なお，必要であれば，公式 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$ $(a \neq 0)$ を用いてもよい.

(鳥取大 2000) (m20003901)

0.151 (1) $x = \tan y$ のとき，逆関数 $y = \tan^{-1} x$ が定義できる．このとき，逆関数の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(2) $y = x^4 e^{-1/x}$ を微分せよ.

(3) 次の関数を微分せよ．ただし，$x > 0$ とし，また log の底は e とする.

$$y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$$

(鳥取大 2008) (m20083901)

0.152 次の各積分を求めよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \tan x\, dx$

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \log x\, dx$

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_{|x|\leq y\leq 1} \sqrt{y^2-x^2}\, dxdy$

(鳥取大 2009) (m20093913)

0.153 次の問に答えよ.

(1) 次の関数の導関数を求めよ．ただし，a は定数である． $\dfrac{1}{\tan(ax)}$

(2) 次の関数の第 n 次導関数を求めよ．ただし，log は自然対数である． $\log(1+x)$

(3) 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^x$

(鳥取大 2011) (m20113901)

0.154 (1) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\tan^{-1} x}{x^2}dx$ を求めよ.

(2) 2 つの関数 $\dfrac{\tan^{-1} x}{x}$ と $\dfrac{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x}{x}$ は各々区間 $[1, \infty)$ で広義積分可能かどうかを答えよ.

(岡山大 2005) (m20054002)

0.155 (1) 座標平面上の点を直線 $y = ax$（a は実数）に関して対称な点に移す一次変換を考える.
$a = \tan\dfrac{\theta}{2}$ $(-\pi < \theta < \pi)$ とおくとき, この一次変換を表す行列 A を θ を用いて表せ.

(2) 2 次直交行列 B の行列式が -1 であるとき, B の表す一次変換はある直線に関して対称な点を対応させる変換であることを示せ.

(岡山大 2010) (m20104004)

0.156 次の問に答えよ. ただし, 被積分関数が連続になる範囲のみを考えればよい.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$（$C$ は積分定数）を示せ.

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} x + C$（$C$ は積分定数）を示せ.
ただし, $y = \tan^{-1} x$ $\left(|y| < \dfrac{\pi}{2}\right)$ は $x = \tan y$ の逆関数を表す.

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2}$ を求めよ．

(4) $\alpha < \beta$ のとき $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ を求めよ．

(5) $a > 0$，$D = b^2 - 4ac < 0$ のとき $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ を求めよ．

(広島大 2005)　　(m20054101)

0.157 (1) 実数 t に対して，　$t = \tan\theta$　かつ　$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

を満たす θ として，関数 $\theta = \arctan t$ を定める．このとき，$\dfrac{d}{dt}(\arctan t)$ を求めよ．

(2) 不定積分　$\displaystyle\int \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^n dx$　を $x = \sinh t$ と変数変換することにより求めよ．

ただし，n は 2 以上の自然数とし，$\sinh t$ は　$\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$　とする．

(3) α と R を実数とし，$R \geqq 1$ と仮定する．　領域 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqq x^2+y^2 \leqq R^2\}$ における重積分　$\displaystyle\iint_D x^2(x^2+y^2)^\alpha dxdy$　の値を求めよ．

(広島大 2008)　　(m20084101)

0.158 関数 $f(x) = \tanh x$ を考える．ただし，$\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ である．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の増減表とグラフを書き，定義域と値域を求めよ．

(2) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ．また，その定義域と値域も書け．

(広島大 2009)　　(m20094103)

0.159 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x} dx$ について，$t = \tan\dfrac{x}{2}$ と置換することによって計算せよ．

(広島大 2016)　　(m20164110)

0.160 実数 x に対し，

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

と定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = \tanh x$ のグラフを描け．増減表を書き，変曲点があればすべて求めること．

(2) $|f(x)| \leq \dfrac{4}{5}$ を満たす x からなる区間を求めよ．

(3) $f''(x) + 2f(x)\Big(1 - f(x)^2\Big) = 0$ が成り立つことを示せ．

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)^2 dx$ を求めよ．

(広島大 2017)　　(m20174102)

0.161 次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \tan x \cot y$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 8\dfrac{dy}{dx} + 15y = 0$

(広島大 2021)　　(m20214107)

0.162 双曲線関数 $\sinh(x), \cosh(x)$ および $\tanh(x)$ は次のように定義される．

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

(1) $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$ を証明しなさい.

(2) $y = \tanh(x)$ のグラフを描きなさい.

(山口大 2001)　　(m20014308)

0.163 (1) 不定積分 $\int \tan x dx$ を求めなさい.

(2) 不定積分 $\int x \cos ax dx$ を求めなさい.

(3) 不定積分 $\int dx/(x^2(1-x))$ を求めなさい.

(山口大 2003)　　(m20034306)

0.164 $f(x) = \tan^{-1} x$ のとき, 次の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の導関数を求めよ.

(2) 次の等式を数学的帰納法により証明せよ. ただし, $y = f(x)$ とする.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (n-1)!\cos^n y \sin\left(ny + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(3) $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ とすると, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$f^{(2m)}(0) = 0\,, \quad f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m (2m)! \qquad (m = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

(4) 関数 $f(x)$ をマクローリン展開せよ.

(5) 次の等式を証明せよ.

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1}$$

(山口大 2005)　　(m20054311)

0.165 $y = \tan x \ \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $x = \arctan y$ または $\tan^{-1} y$ と書く. $x = \arctan y$ の導関数を求めよ.

(山口大 2006)　　(m20064305)

0.166 次の定積分を計算しなさい. ただし, $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ とする.

$$\int_0^a \tan x \, dx$$

(山口大 2009)　　(m20094313)

0.167 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(\tan x)\frac{dy}{dx} = 2y$$

(山口大 2012)　　(m20124301)

0.168 次の初期値問題について答えなさい.

(1) 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

$$\frac{dy}{dx} = -y \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

(2) さらに, 次の式を満足する上記 (1) で求めた一般解の特殊解を求めなさい.

$$y(0) = \frac{1}{2}$$

(山口大 2017)　　(m20174301)

0.169　変数変換 $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ を利用して，$\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin\theta}\,d\theta$ を求めよ．

(徳島大 2010)　　(m20104403)

0.170　次の問いに答えよ．

(1)　微分可能な関数 $f(x)$ が微分可能な逆関数 $f^{-1}(x)$ を持つとする．このとき，次の式を示せ，

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

(2)　$f(x) = \tan x$ とし，$\tan x = t$ とおく．(1) を用いて次の式を示せ．

$$(f^{-1})'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

(3)　(2) を用いて次の式を示せ．

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{3}$$

(4)　次の値を求めよ．

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

(高知大 2013)　　(m20134501)

0.171　次の極限値　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)$　を求めよ．

(高知大 2016)　　(m20164505)

0.172　$\tan^{-1} x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．

(1)　$y = \tan^{-1} x$ のグラフをかけ．

(2)　$x > 0$ のとき，$\tan^{-1} x > x - \dfrac{1}{3}x^3$ が成り立つことを示せ．

（愛媛大 2004）　　(m20044601)

0.173　(1)　次の関数を微分せよ．

(a) $\log(1+x^4)$　　(b) $\sin^{-1} x^2$

(2)　α, β を定数とし，

$$f(x) = \begin{cases} \tan^{-1} x & (x > 1) \\ \beta & (x = 1) \\ \alpha x - \alpha + \beta & (x < 1) \end{cases}$$

とおく．ただし $\tan^{-1} x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．次の問いに答えよ．

(a)　$f(x)$ が $x = 1$ で連続になるように β を定めよ．

(b)　$\displaystyle\lim_{x\to+0} f'(x) = \lim_{x\to 1-0} f'(x)$ となるように α を定めよ．

(愛媛大 2005)　　(m20054601)

0.174　関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}\tan^{-1} x$ について，次の各問に答えよ．

(1)　$f(x)$ は区間 $(0, \infty)$ 上単調減少であることを示せ．

(2)　次の定積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} x^3 f\left(\frac{1}{2}x^2\right) dx$

(愛媛大 2006)　　(m20064606)

0.175 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{(x+a)(x+b)}-\sqrt{(x-a)(x-b)}\right\}$ （a,b は定数） (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x \tan(t^2)dt$

(愛媛大 2006) (m20064611)

0.176 (1) 次の広義積分を求めよ. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)\tan^{-1}x}$

(2) 次の不定積分を求めよ. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)(x-1)^2}$

(愛媛大 2008) (m20084609)

0.177 (1) $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ が偏微分可能であるとき，$J(u,v)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\psi}{\partial v}-\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial\psi}{\partial u}$ とおく．次の φ, ψ に対して $J(u,v)$ を求めよ.

(a) $\varphi(u,v)=e^u\cos v$, $\psi(u,v)=e^u\sin v$

(b) $\varphi(u,v)=\sqrt{u^2+v^2}$, $\psi(u,v)=\tan^{-1}\dfrac{v}{u}$

(2) $D=\{(x,y)\ ;\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0,\ x^2+y^2\leqq\ 1\}$ とするとき，次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D x\sqrt{y}\,dxdy$$

(愛媛大 2008) (m20084610)

0.178 (1) 次の関数の導関数を求めよ.

(a) $x\tan^{-1}2x$ (b) $\dfrac{x}{\sqrt{1+9x^2}}$

(2) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$， $g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ について，次の問いに答えよ.

(a) $\{g(x)\}^2-\{f(x)\}^2=1$ を示せ.

(b) 関数 $y=f(x)$ が単調増加であることを示せ.

(c) 関数 $y=f(x)$ の逆関数を $h(x)$ とおくとき，導関数 $h'(x)$ を求めよ.

(愛媛大 2009) (m20094601)

0.179 (1) 次の曲線上の与えられた点 (a,b) における接線の方程式を求めよ.

(a) $y=x\log x$, $(a,b)=(e,e)$ (b) $y=\dfrac{e^{2x}-e^{-x}}{e^{3x}+e^{-2x}}$, $(a,b)=(0,0)$

(2) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x}-2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x-x}{x^3}$ ただし, $\tan^{-1}x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする.

(3) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義を述べよ. さらに, $f(x)=c$（定数関数）ならば $f'(x)=0$ であることを定義に従って示せ.

(愛媛大 2010) (m20104601)

0.180 (1) $f(x)=\tan^{-1}x+\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ とおく．ただし，$\tan^{-1}x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする.

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ. (b) $f(2)$ の値を求めよ.

(2) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{-4x}}{\sin 5x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{\log x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right)$

(愛媛大 2011) (m20114607)

0.181 (1) 次の不定積分を求めよ．

$$\int e^{2x}\cos x\,dx$$

(2) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおいて，次の定積分を求めよ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2+\cos x}\,dx$$

(愛媛大 2011)　　(m20114608)

0.182 $f(x,y)=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ とする．$y\dfrac{\partial f}{\partial x}-x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ と $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(愛媛大 2015)　　(m20154603)

0.183 (1) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log\sin x$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to+0}(\sin x)^x$

(2) 次の関数の導関数を求めよ．

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$　　(b) $\tan^{-1}(2x+3)$

(愛媛大 2017)　　(m20174601)

0.184 (1) $\tan^{-1}x=\sin^{-1}\dfrac{3}{5}$ を満たす x の値を求めよ． ただし，$\tan^{-1}x$ は逆正接関数とし $\sin^{-1}x$ は逆正弦関数とする．

(2) $y=(x^2+1)e^{-3x}$ の n 次導関数をライプニッツの公式を用いて求めよ．

(3) 自然数 n に対して $I_n=\displaystyle\int\sin^n x dx$ と定める．このとき次の漸化式を示せ．

$$I_n=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}\qquad(n\geq 3)$$

(愛媛大 2017)　　(m20174614)

0.185 (1) 次の関数の導関数を求めよ．ただし，a は正の定数とする．

(a) $\sin^{-1}(x^2)$　　(b) $x^{\sin x}\quad(x>0)$　　(c) $\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$

(2) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x}$

(愛媛大 2018)　　(m20184601)

0.186 (1) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2x\tan x-\frac{\pi}{2}}{\sin x-\cos x}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\log\left(\frac{x+2}{x+4}\right)$

(2) $f(x)=\sqrt{x+2}$ とする．

(a) 3 階までの導関数 $f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$ を求めよ．

(b) 次の式

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-a_0-a_1x-a_2x^2}{x^2}=0$$

が成り立つように定数 a_0，a_1，a_2 を定めよ．

(愛媛大 2021)　　(m20214601)

0.187 次の不定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int\frac{1}{(1+\sin^2 x)\tan x}dx$　　(b) $\displaystyle\int x^9e^{-x^{10}}dx$

0.188 次の広義積分が収束するように定数 a を定め，そのときの広義積分の値を求めよ．

$$\int_1^{\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}-\frac{a}{\sqrt{x}}\right)dx$$

(愛媛大 2021)　　(m20214602)

0.189 (1) 実数 $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq 1$ に対して，等式 $\dfrac{1+t^2}{t(1+t-t^2)}=\dfrac{a}{t}+\dfrac{b+ct}{1+t-t^2}$ が成り立つように a,b,c を定めよ．

(2) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくとき， $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$ ， $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ と表せることを示せ．

(3) 変数変換 $t=\tan\dfrac{x}{2}$ を行い，次の定積分 $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{(\sin x+2\cos x)\sin x}$ の値を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084718)

0.190 $x \neq 0$ に対して，

$$f(x)=-\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{x}$$

とおく. ただし, $\mathrm{Tan}^{-1}y \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ は, $y=\tan x$ の逆関数である.

(1) $x \neq 0$ で

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

であることを示せ.

(2) 次の計算には誤りがある. 誤りの原因を指摘し, 正しい積分値を求めよ.

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\Big[f(x)\Big]_{-1}^{1}=f(1)-f(-1)=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$$

(九州大 2010)　　(m20104707)

0.191 (1) a を $a \neq 0$ なる実数とするとき，次の定積分を求めよ．ただし，逆正接関数 : $\mathrm{Arctan}\,x$ が $\dfrac{1}{x^2+1}$ の原始関数であることは既知として用いてよい． $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+a}dx$

(2) 次の積分を求めよ． $\displaystyle\int_2^4\frac{2x-1}{x^2-2x+4}$

(九州大 2019)　　(m20194711)

0.192 $f(x,y)=\mathrm{arctan}\dfrac{x}{y}$ について考える．

(1) $f(x,y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ．

(2) 以下の条件下のもとで $f(x,y)$ の曲面積を求めよ．

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1$$

(九州大 2020)　　(m20204703)

0.193 $0<A<B \leq 1$ とするとき，領域 D を $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ A \leq x \leq B,\ x^2 \leq y \leq x\right\}$ とし，
$f(x,y)=\dfrac{y+y^2}{x^2+y^2}$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

ただし，逆正接関数 $\mathrm{arctan}(x)$ が $\dfrac{1}{x^2+1}$ の原始関数であることは既知として用いてよい．

(1) 関数 $g(x,y)=y-x\ \mathrm{arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ を y で偏微分した偏導関数を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x,y)dx$ を求めよ．ただし，$x>0,\ y>0$ とする．

(3) 関数 $h(x) = 2\ \arctan(x) - 2x + x\log(x^2+1)$ の微分を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_D f(x,y)dxdy = H(B) - H(A)$ を満たす関数 $H(x)$ を求めよ.

(九州大 2021)　　(m20214708)

0.194 $y = \tan x$ $(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ の逆関数（逆正接関数）を $y = \tan^{-1} x$ と書く．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $y = \tan^{-1} x$ の導関数を求めよ．

(2) $y = \tan^{-1} x$ の不定積分を部分積分法を用いて求めよ．

(九州芸術工科大 2001)　　(m20014802)

0.195 以下の関数の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\tan x}{x}$

（佐賀大 2001）　　(m20014901)

0.196 置換積分法を用いて，次の定積分を計算せよ．ただし，逆三角関数 $\tan^{-1} x = \arctan x$ について，$(\tan^{-1} x)' = 1/(1+x^2)$ となることに注意する．

(1) $\displaystyle\int_{2/\pi}^{6/\pi} \frac{\cos(1/x)}{x^2}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{1+x^4}dx$

(佐賀大 2003)　　(m20034913)

0.197 次の問に答えよ.

(1) $\sqrt{1+2\log x}$ を x について微分せよ.

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \left(\tan x - \frac{1}{\cos x}\right)$ を求めよ.

（佐賀大 2004）　　(m20044902)

0.198 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$　$\left(\text{ヒント ： } \tan\frac{x}{2} = t \text{ とおく}\right)$

(2) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$　$(a>0)$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx$　(m, n ： 0 以上の整数)

（佐賀大 2004）　　(m20044911)

0.199 関数 $f(x,y) = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ を x と y でそれぞれ偏微分せよ.

（佐賀大 2004）　　(m20044918)

0.200 平面上の直線 l を l ： $y = (\tan\theta)x$ $(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ とし，f を平面上の与えられたベクトル $\boldsymbol{a}$ を l と線対称な位置に移すという線形写像とする．このとき以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするとき, $f(\boldsymbol{e}_1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)$ を求めよ.

(2) 線形写像 f を表す行列を求めよ.

(佐賀大 2005)　　(m20054919)

0.201 $\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおく. 以下の問に答えよ.

(1) $\dfrac{dx}{dt}$ を求めよ. ただし, 答えは t の関数として表せ.

(2) $\cos x$ を t で表せ.

(3) 変数変換 $\tan\dfrac{x}{2}=t$ を行って, 積分 $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}\,dx$ を求めよ.

(4) 曲線 $y=-\log|\cos x|$, $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}\right)$ の長さを求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054932)

0.202 次の関数を微分せよ.

(1) $\tan x$ (2) x^x

(佐賀大 2006) (m20064905)

0.203 $z=\tan^{-1}(u+v)$, $u=2x^2-y^2$, $v=x^2y$ とするとき，偏導関数 z_x, z_y を求めよ.
ただし，必ず答えは x, y の関数として書くこと.

(佐賀大 2006) (m20064916)

0.204 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int x^{-3/7}\,dx$ (2) $\displaystyle\int\cos(3x)\,dx$ (3) $\displaystyle\int\tan x\,dx$

(4) $\displaystyle\int 2x\cdot\log x\,dx$ (5) $\displaystyle\int\frac{1}{1-4x^2}\,dx$

(佐賀大 2007) (m20074903)

0.205 $x-y$ 平面において，y 軸上を等速運動する点 P があり，その座標を $(0, y)$ とする．x 軸上の定点を A とし，その座標を $(a, 0)$ とすると，x 軸と直線 AP とのなす角 θ の角速度は直線 AP の長さの 2 乗に反比例することを次の手順により示せ．ただし，各変数の時間微分を $y'=\dfrac{dy}{dt}$, $\theta'=\dfrac{d\theta}{dt}$ とする.

(1) 問題の関係を図で示せ.

(2) 点 P が等速運動する関係式を示せ．ただしその速度を v_0（一定値）とする.

(3) $\tan\theta$ がどのように表されるかを示し，その両辺を時間 t で微分し，題意を示せ.

(佐賀大 2008) (m20084904)

0.206 $f(x)=-\dfrac{2\tan^{-1}x}{x^3}$ とおく．ただし，$\tan^{-1}x$ は $\tan x$ の逆関数である.

(1) $\displaystyle\int f(x)dx=\frac{\tan^{-1}x}{x^2}+\frac{1}{x}+\tan^{-1}x+C$ を示せ．ただし，C は積分定数である.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty}f(x)dx$ を求めよ.

(佐賀大 2009) (m20094907)

0.207 (1) 次の関数を積分しなさい.

(a) $\dfrac{1}{16x^2-9}$

(b) $\dfrac{1}{(5x+7)^5}$

(2) 次の関数を置換積分法で積分しなさい.

$-\tan x$

(3) 次の定積分を求めなさい．

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$$

(佐賀大 2009)　　(m20094931)

0.208 次の関数を微分せよ．

(1) $\dfrac{1}{\tan x}$　　(2) $e^{\sqrt{x}}$

(佐賀大 2010)　　(m20104901)

0.209 次の関数 y の導関数 dy/dx を求めなさい．

(1) $y=(ax+b)/(cx+d)$　　(2) $y=x^{-n}$　　(3) $y=(x^2+1)^{1/2}$　　(4) $y=\tan x$

(佐賀大 2010)　　(m20104923)

0.210 次の関数 y の導関数 dy/dx を求めなさい．

(1) $y=x\log_e x-x$　　(2) $y=\dfrac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}$　　(3) $y=\dfrac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}$

(4) $y=3^{-x}$　　(5) $y=\log_e\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|$

(佐賀大 2013)　　(m20134924)

0.211 次の関数 y の導関数 dy/dx を求めなさい．

(1) $y=\sqrt[3]{x^2+1}$　　(2) $y=\left\{1-(1-x^2)^2\right\}^2$　　(3) $y=\tan 4x$　　(4) $y=x^{\sin x}$

(佐賀大 2016)　　(m20164930)

0.212 次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{dy}{dx}+y\tan x=\sin 2x$　　(2) $\dfrac{dy}{dx}=x\left(1+y^2\right)$

(佐賀大 2017)　　(m20174910)

0.213 次の関数 y の導関数 dy/dx を求めよ．

(1) $y=x^2e^{-x}$　　(2) $y=\tan x$　　(3) $y=\dfrac{x^2}{\log x}$　　(4) $y=\sqrt{\dfrac{(1-x)(x^2+3)}{(x-1)^2}}$

(佐賀大 2018)　　(m20184921)

0.214 次の問いに答えよ．ただし，log は自然対数であり，e は自然対数の底である．

(1) 次の極限を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-7x^2+2x+3}{2x^3-7x^2+7x-2}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

(2) 次の微分を求めよ．

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$　　(b) $\tan^2(x)$

(佐賀大 2021)　　(m20214915)

0.215 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x+\tan^{-1}(2x)}{x}$ を求めよ．

ただし，$\sin^{-1}x$ および $\tan^{-1}x$ は，それぞれ $\sin x$ および $\tan x$ の逆関数である．

(佐賀大 2022)　　(m20224913)

0.216 次の導関数を示せ．

(1) x^n　　(2) e^x　　(3) $\log x$　　(4) $\sin x$　　(5) $\tan x$

（長崎大 2004）　　(m20045003)

0.217 x を $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$ の実数とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ を用いて, 次の公式

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

を導きなさい.

(2) $y = \tan^{-1} x$ に対して, 逆関数の微分の公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)}$$

を用いて, $\dfrac{dy}{dx}$ を x を用いて表しなさい.

(3) n を自然数とし,

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$$

とおく. この I_n に対して, $n=1$ のときの I_1 を求めなさい.

(4) (3) で与えられた I_n を

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = \int 1 \times \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$$

と考え, 部分積分法を用いて

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) I_n$$

が成り立つことを示しなさい.

(5) (3) で与えられた I_n に対して, $n=3$ のときの I_3 を求めなさい.

(長崎大 2005) (m20055001)

0.218 一辺の長さが 1 であるような正方形の折り紙があり (fig.1), これを図のように折る場合を考える.

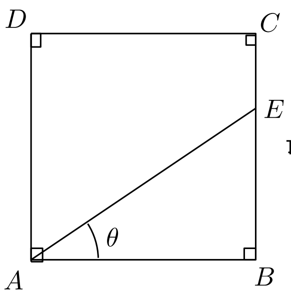


fig.1

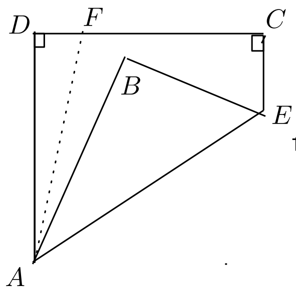


fig.2

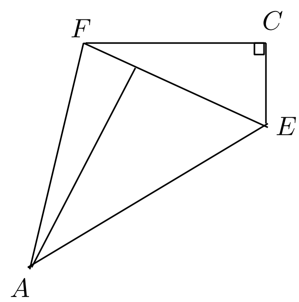


fig.3

(1) fig.1 の状態から $\angle BAE$ が θ であるような折り目 AE に沿って折ると fig.2 のようになった. 三角形 ABE の面積を求めよ.

(2) fig.2 の状態で三角形 ABE の面積が五角形 $ABECD$ の面積と等しいとき $\tan\theta$ の値はいくらか.

(3) 次に fig.2 の状態から $\angle BAD$ の二等分線 AF に沿って折ると fig.3 のようになった. 四角形 $AECF$ の面積を求めよ.

(長崎大 2005) (m20055002)

0.219 次の微分方程式を解け.

(1) $y' = \tan x \cot y$ (2) $x(x-y)y' + y^2 = 0$

(長崎大 2007) (m20075010)

0.220 以下の問いに答えなさい．ただし，y は $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1) $x = \tan y$ に対して，$\dfrac{dx}{dy}$ を求めなさい．

(2) $y = \tan^{-1} x$ に対して，逆関数の微分の公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

を利用して，$\dfrac{dy}{dx}$ を x で表しなさい．

(長崎大 2009) (m20095001)

0.221 以下の問いに答えよ．ただし，a は正の定数とする．

(1) a^x の微分を求めよ．

(2) $\tan^{-1} x$ の微分を求めよ．

(3) $f(x, y) = \dfrac{\tan^{-1} x}{a^y}$ の x 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と y 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ求めよ．

(4) $\cos x$ をマクローリン展開せよ．

(長崎大 2009) (m20095007)

0.222 (1) 次の関数を微分せよ．

(a) $\sin^{-1} \dfrac{x}{3}$

(b) $e^{-x^2} + \tan x$

(2) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}}{x^4}$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x^x$

(長崎大 2009) (m20095011)

0.223 次の関数の $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(1) $y = \tan(2x - 3)$ (2) $x^3 y^3 + y - x = 0$

(長崎大 2010) (m20105003)

0.224 (1) $\arctan x$ の $x = 0$ における Taylor 展開を，5次の項まで求めよ．

(2) $BC = 10$, $AC = 1$, $\angle C = \dfrac{\pi}{2}$ である直角三角形 ABC において，$\angle B$ の値（ラジアン）を小数第4位まで求めよ．

(熊本大 2004) (m20045201)

0.225 次の問いに答えなさい．ただし，$|x| < 1$ とする．

(1) $\left(\tan^{-1} x\right)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$ を用いて，$\tan^{-1} x$ の Maclaurin 展開を求めなさい．なお，

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

である．

(2) $\theta = \tan^{-1}\dfrac{1}{5}$ とするとき，

$$\tan 2\theta = \frac{5}{12},\ \tan 4\theta = \frac{120}{119},\ \tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239}$$

であることを示して，$\dfrac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\dfrac{1}{5} - \tan^{-1}\dfrac{1}{239}$ を導きなさい．

(3) (1),(2) を用いて，π の近似値を小数第 5 位まで求めなさい．必要であれば，以下の補助表を用いてもよい．

補助表

x	x	$\dfrac{x^2}{2}$	$\dfrac{x^3}{3}$	$\dfrac{x^4}{4}$	$\dfrac{x^5}{5}$	$\dfrac{x^6}{6}$	$\dfrac{x^7}{7}$	$\cdots$
$\dfrac{1}{5}$	0.2	0.02	0.00267	0.0004	0.00006	0.00001	0	$\cdots$
$\dfrac{1}{239}$	0.00418	0.00001	0	0	0	0	0	$\cdots$

(熊本大 2013)　　(m20135203)

0.226 次の微分方程式の一般解 $y = y(x)$ を求めよ．

$$x\tan\frac{y}{x} - y + x\frac{dy}{dx} = 0$$

(宮崎大 2012)　　(m20125305)

0.227 $y = y(x)$ に関する微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{3x-y} \qquad \cdots\cdots(*)$$

について，次の各問に答えよ．

(1) $y = xu$ とおいて，$(*)$ を $u = u(x)$ についての微分方程式に書き直せ．

(2) $(*)$ の一般解を求めよ．ただし，$\displaystyle\int \frac{1}{1+u^2}du = \tan^{-1}u + C$ （C は積分定数）を用いてもよい．

(宮崎大 2015)　　(m20155305)

0.228 置換積分法を用いて，次の不定積分を求めよ．ただし，$a \neq 0$

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$　　($x = a\sin\theta$とおく)　　(2) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}dx$　　($x = a\sin\theta$とおく)

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}dx$　　($t = \tan\dfrac{x}{2}$とおく)

（鹿児島大 2001）　　(m20015407)

0.229 $\tan\dfrac{x}{2} = t$ と置くとき，積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx$ を求めよ．

（鹿児島大 2001）　　(m20015411)

0.230 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \cos(\theta)\cdot\sin(\theta)$　　(2) $y = \tan(x)\cdot\log(x)$

(鹿児島大 2007)　　(m20075409)

0.231 微積分に関する以下の問に答えよ．

(1) 次の微分を計算し，簡単な式で表せ．

(a) $\dfrac{d}{dx}\sin(\tan(x))$　　(b) $\dfrac{d}{dx}(\sin 2x \cdot \tan 2x)$

(2) 次の不定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2-x-3}\,dx$　　(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1}$

(鹿児島大 2009)　(m20095401)

0.232 次の微分・積分を求めなさい．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\tan\dfrac{1}{x}\right)$　　(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx$

(鹿児島大 2009)　(m20095405)

0.233 微積分に関する以下の問に答えよ．

(1) 次の微分を計算し，簡単な式で表せ．

(a) $\dfrac{d}{dx}\sin(\tan x)$　　(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\log 2x \cdot \tan x^2\right)$

(2) 次の不定積分を求めよ．ただし，a, b は任意定数とする．

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+(a-b)x-ab}\,dx$　　(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2}$

(鹿児島大 2009)　(m20095413)

0.234 以下の問に答えよ．

(1) x の関数 $f(x)$, $g(x)$ について，以下の部分積分法の公式

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

が成り立つことを示せ．

(2) 上記の公式を利用して，不定積分 $\displaystyle\int \log x\,dx$ を求めよ．

(3) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とする．このとき，$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$ であることを示せ．

(4) 前問の結果を利用して，不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$ を求めよ．

(鹿児島大 2011)　(m20115401)

0.235 以下の微分を計算せよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left\{\log\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)\right\}$　(ただし，$0 < x < \pi$)

(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right)$　(ただし，$-1 < x < 1$)

(鹿児島大 2013)　(m20135401)

0.236 次の微分を求めなさい．

$\dfrac{d}{dx}\left[\,\tan^{-1}\sqrt{x}\,\right]$　(ただし，$\tan^{-1}$ は arctan とする.)

(鹿児島大 2013)　(m20135406)

0.237 以下の微分を計算せよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\}$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x}{x^2+1}\right)$

(鹿児島大 2014)　(m20145406)

0.238 次の関数を x で微分しなさい．

$y=(\tan(x))^x$

(鹿児島大 2018)　　(m20185416)

0.239 次の微分を計算せよ．　$\dfrac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2-3x}\right)\right]$

(室蘭工業大 2006)　　(m20065510)

0.240 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)$ を求めよ．　(2) $f(x)=e^{\sin^{-1}x}$ を微分せよ．

(3) $\displaystyle\int \log(1+x^2)dx$ を求めよ．

(岡山県立大 2006)　　(m20065601)

0.241 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $y=f(x)$ のグラフを xy 平面上に描け．

(2) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれる面積を求めよ．ただし，$x=\tan t$ なる変数変換を用いて，積分計算の過程も示せ．

(3) x^4 までの項で表した $f(x)$ のマクローリン展開式は　$f(x)\cong 1-x^2+x^4$　であることを導け．

(4) 設問 (3) の結果を利用して，次の近似式を導け．

$$\tan^{-1}x \cong x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5 \quad (\text{ ただし，} |x|<1\ )$$

(島根大 2008)　　(m20085809)

0.242 (1) 次の極限値は存在するかどうか調べよ．

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin xy}{x^2+y^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(2) $f(x,y)=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(a) f の 2 次偏導関数をすべて求めよ．

(b) $x=\sin(u+v)$，$y=\cos(u-v)$ とするとき，偏導関数 f_u と f_v を求めよ．

(島根大 2009)　　(m20095803)

0.243 以下の各設問に答えよ．ただし，x は実数とする．

(1) 関数 $f(x)$, $g(x)$ を $f(x)=x-\tan^{-1}x$，$g(x)=x-x\sin x$ と定義する．以下の問いに答えよ．

(a) 導関数 $f'(x)$，第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(b) 導関数 $g'(x)$，第 2 次導関数 $g''(x)$ を求めよ．

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ の値を求めよ．

(2) 関数 $y(x)$ を $y(x)=(x^2+1)e^{-x}$ と定義する．以下の問いに答えよ．

(a) 導関数 $y'(x)$，第 2 次導関数 $y''(x)$ を求めよ．

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x)=0$ であることを示せ．

(c) $y'(x)$，および $y''(x)$ の符号を用いて，関数 $y(x)$ の増減表を作成せよ．また，関数 $y(x)$ のグラフの概形をかけ．

(島根大 2012)　　(m20125801)

0.244 次の問いに答えよ．ただし，$\mathrm{Arctan}\,x$ は $\tan x$ $(-\pi/2 < x < \pi/2)$ の逆関数とする．

(1) $\mathrm{Arctan}\,x$ の導関数と不定積分を求めよ．

(2) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$I(n) = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx$$

とおくとき，$I(n+1)$ を $I(n)$ を用いて表し，さらに $I(3)$ を計算せよ．

(3) $\displaystyle\int_0^1 x^5 \mathrm{Arctan}\,x\,dx$ を計算せよ．

(4) $\displaystyle\int_0^1 x(\mathrm{Arctan}\,x)^2\,dx$ を計算せよ．

(島根大 2012)　　(m20125807)

0.245 デカルト座標系 (x, y) で，$(x^2+y^2)^3 = 4x^2y^2$ と表現される曲線について以下の問に答えよ．

(1) 極座標系 (r, θ) での関係式に変換せよ $(r = \sqrt{x^2+y^2}, \tan\theta = y/x)$.

(2) グラフの概形を図示せよ．

(3) 曲線が囲む図形の面積（複数の図形がある場合はすべての合計）を求めよ．

(首都大 2004)　　(m20045905)

0.246 次の文章中の $\boxed{\text{①}}$ ～ $\boxed{\text{⑤}}$ に入れるのに最も適当な分数を答えなさい．

(1) $\dfrac{1}{\cos x}$ のマクローリン展開を x^4 の項まで求めると，$1 + \boxed{\text{①}}x^2 + \boxed{\text{②}}x^4$ が得られる．

(2) $\tan x$ のマクローリン展開を x^5 の項まで求めると，$x + \boxed{\text{③}}x^3 + \boxed{\text{④}}x^5$ が得られる．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{x^3}$ の極限値は，$\boxed{\text{⑤}}$ である．

(首都大 2014)　　(m20145906)

0.247 次の関数を微分しなさい．

(1) $f(x) = \sqrt{3-2x^2}$　　(2) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$　　(3) $f(x) = \tan^{-1}(1-x)$

(首都大 2016)　　(m20165904)

0.248 (1) 次の関数について $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．　$x = \dfrac{a}{\cos\theta}$,　$y = b\tan\theta$　（ a, b は定数，ただし，$a \neq 0$ ）

(2) 次の関数について $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．　$y = \dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x\right)$

(3) 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to +0} x^x$

(東京都立大 2020)　　(m20205910)

0.249 不定積分

$$I = \int \frac{1}{4\sin x + 3\cos x} dx$$

について 以下の問いに答えよ．

(1) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ として置換し，上記の不定積分を $I = \displaystyle\int g(t)dt$ の形で表せ．

(2) 前問 (1) で得られた式を用いて不定積分 I を求めよ．なお，解は $\tan\dfrac{x}{2}$ を含む式でよい．

(東京都立大 2022)　　(m20225905)

0.250 (1) $y = e^{x^x}$ $(= \exp(x^x))$ の導関数を求めよ．

(2) $f(x) = \tan x$ の逆関数 $f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$ の導関数を求めよ．

(滋賀県立大 2007)　　(m20076001)

0.251 極限 $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x \left(\tan^{-1}(3x) - \frac{\pi}{2} \right)$ を求めよ．ただし，$\tan^{-1}$ の値域は $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} \right)$ とする．

(滋賀県立大 2021)　　(m20216001)

0.252 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to +0} x^{\tan x}$ を求めよ．

(滋賀県立大 2022)　　(m20226001)

0.253 $y \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} \right)$ に対する正接関数 $\tan y$ の逆関数を $\mathrm{Tan}^{-1} x$ とする．すなわち，

$$y = \mathrm{Tan}^{-1} x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \tan y \qquad \left(x \in (-\infty,\ \infty),\ y \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Tan}^{-1} 1$ の値を求めよ．

(2) $\mathrm{Tan}^{-1} \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \mathrm{Tan}^{-1} \dfrac{3\sqrt{3}}{7}$ の値を求めよ．
ただし，必要であれば，次の正接関数に対する加法定理は既知として用いてよい．

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

(はこだて未来大 2009)　　(m20096303)

0.254 $y \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} \right)$ に対する正接関数 $\tan y$ の逆関数を $\mathrm{Tan}^{-1} x$ とする．すなわち，

$$y = \mathrm{Tan}^{-1} x \iff x = \tan y \qquad \left(x \in (-\infty, \infty),\ y \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) $y = \mathrm{Tan}^{-1} x$ のグラフの概形を描け．

(2) $\mathrm{Tan}^{-1} \dfrac{2}{3} + \mathrm{Tan}^{-1} \dfrac{1}{5}$ の値を求めよ．ただし，必要であれば，次の正接関数に対する加法定理は既知として用いてよい．

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

(はこだて未来大 2013)　　(m20136305)

0.255 (1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} x \left(\frac{e^{1/x} - 1}{e^{1/x} + 1} \right)$ を求めよ．

(2) $0 < x < \pi$ のおいて，$\dfrac{d}{dx} \log \left(\tan \dfrac{x}{2} \right)$ を求めよ．

(3) $\mathrm{Sin}^{-1} \dfrac{3}{5} + \mathrm{Sin}^{-1} \dfrac{4}{5}$ を求めよ．
ただし．$\sin x$ の逆関数 $\mathrm{Sin}^{-1} x$ の値域は，$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} \right]$ とする．

(はこだて未来大 2015)　　(m20156302)

0.256 $f(x) = \arctan x$，つまり $f(x)$ を $\tan x$ の逆関数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の第 3 次導関数 $f^{(3)}(x)$ を求めよ．

(2) 以下の等式を満たす 4 つの定数 a_0，a_1，a_2，a_3 をすべて求めよ．

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3) \qquad (x \to 0)$$

ただし，記号 o はランダウのスモールオーである．

(3) $f\left(\sqrt{3}\right)$ の値を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} f(x)dx$ の値を求めよ.

(はこだて未来大 2017)　　(m20176302)

0.257 $\displaystyle\int_0^1 x\tanh(1-x^2)dx$ を求めよ.

(はこだて未来大 2022)　　(m20226303)

0.258 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{3x^2+x}{x^3+x^2-x-1}dx$　　(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x\sin x}$　$(\tan x = t$ とおく$)$

(東京海洋大 2007)　　(m20076404)

0.259 xy 平面上において, 原点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と, 放物線 $C_2 : y = \dfrac{2}{3}x^2 - a\ (a > 1)$ を考える. C_2 の接線のうち, 傾きが $\tan\theta$ となるものを l とし, C_2 との接点を P とする. ただし, θ は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする. また, 原点 O を通り, l と直交する直線を m とし, m と円 C_1 との交点のうち第 4 象限の点を Q とする.

(1) 直線 l の傾きが $\sqrt{3}$ であるとき, θ の値を求めよ. また, このときの点 P の座標が $\left(\dfrac{3}{4}\sqrt{3},\ \dfrac{9}{8}-a\right)$ となることを示せ.

(2) 直線 l の傾きが $\sqrt{3}$ であるとき, 直線 m を表わす方程式を求めよ. また, 点 Q の座標を求めよ.

(3) 3 点 $O,\ P,\ Q$ が同一直線上に並ぶための必要十分条件は $\tan\theta = \sqrt{\dfrac{8}{3}a-2}$ であることを示せ.

(4) $a = \dfrac{9}{8}$ のとき, C_1 上の点と C_2 上の点を結ぶ線分の長さの最小値を求めよ.

(東京工科大 2010)　　(m20106907)