[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　θ

0.1　円柱座標 (r, θ, z) が直交座標 (x, y, z) によって定義されるとき (1) から (3) の問いに答えよ．

円柱座標 (r, θ, z) と直交座標 (x, y, z) の関係は以下の通りである．

$x = r\cos\theta\,,\ \ y = r\sin\theta\,,\ \ z = z \qquad (r \geq 0\,,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$

(1)　円柱座標 (r, θ, z) が直交曲線座標であることを示せ．

(2)　円柱座標 (r, θ, z) の基本ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ を求めよ．

(3)　曲面 $z = x^2 + y^2$ と $z = 18 - (x^2 + y^2)$ で囲まれた領域を V とするとき，
積分 $\displaystyle\int_V \sqrt{x^2 + y^2}\, dV$ の値を求めよ．

(北海道大 2003)　　(m20030101)

0.2　以下の問いに答えよ．ただし，j は虚数単位とする．

(1)　次の複素数を極形式 $re^{j\theta}$ （r, θ は実数）で表せ．
(a)　$1 + j$　　(b)　j

(2)　次の複素数を $x + jy$ （x, y は実数）の形で表せ．また，複素平面上に図示せよ．
(a)　j の平方根　　(b)　$\frac{1+j}{1-j}$ の 3 乗根

(3)　複素数 $z_R = \cos\theta + j\sin\theta$ を 0 でない複素数 z_1 に乗ずると，答えは z_1 が複素平面上で θ だけ回転したものになることを示せ．

(北海道大 2004)　　(m20040104)

0.3　z, w は複素数であり，$i = \sqrt{-1}$ である．また，x, y, r, θ は実数である．

(1)　複素数 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ が与えられたとき，$w^n = z$（n は正の整数）の根は n 個であり，

$$w_k = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1)$$

と表せることを示せ.

(2)　方程式 $w^5 = 1$ を満たす 1 つの解が，$w = \cos 72^\circ + i\sin 72^\circ$ と表せることを示せ　．また，$\cos 72^\circ$ の値を求めよ.

(3)　複素数 $z = x + iy$ が与えられたとき，関数 $w(z) = e^z$ が正則であることを証明せよ.

(北海道大 2009)　　(m20090101)

0.4　以下の設問に答えよ．途中の計算手順を詳しく記述すること.

(1)　$w = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0,\ z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$
$\alpha_k = a_k + ib_k\ (k = 0, 1, \cdots, n)$　とするとき，w の実部 $Re(w)$ および $Im(w)$ を求めよ.

(2)　$f(z) = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}\ \ (z = x + iy)$　が正則か否かを調べよ.

(3)　次の式を証明せよ.

$$\frac{d}{dz}\sin^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

(北海道大 2011)　　(m20110103)

0.5　デカルト座標系 (x, y) と極座標 (r, θ) の関係が次のように与えられている．このとき，以下の設問に答えよ.

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ r \geq 0,\ ,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

(1)　次の行列 J のすべての成分を $r,\ \theta$ の式で表せ.

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

(2)　次の積分 A を求めよ．ただし $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq 1\}$ とする.

$$A = \int_D x^2\,dxdy$$

(3)　次の行列 G のすべての成分を $r,\ \theta$ の式で表せ．ただし $r > 0$ とする.

$$G = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

(北海道大 2015)　　(m20150101)

0.6　(1)　$\displaystyle\int x\log x dx$ を求めよ.

(2)　$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ を，$x = \sin\theta$ という置換積分によって求めよ.

(北見工業大 2005)　　(m20050208)

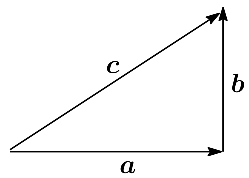
0.7　$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ をベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の内積とし，$||\boldsymbol{a}||$ を $\boldsymbol{a}$ の長さとする．このとき $||\boldsymbol{a}||^2 = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$ であり，また，零ベクトル $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が直交すれば $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0$ であった.

(1)　$\boldsymbol{a} = (-1,\sqrt{3},2)$，$\boldsymbol{b} = (\sqrt{3},1,2)$ のとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めよ.

(2)　$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ とする．$\boldsymbol{0}$ でない $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が直交するとき

$$||\boldsymbol{c}||^2 = ||\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2 \quad \text{（ピタゴラス（三平方）の定理）}$$

を示せ.



(北見工業大 2008)　　(m20080204)

0.8　平面の直交座標 (x,y) と極座標 (r,θ) の間には $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ の関係がある．ただし，$r > 0$ とする．$z = f(x,y)$ を平面上で定義された 1 回連続微分可能関数とするとき，以下の問いに答えよ.

(1)　$\dfrac{\partial z}{\partial r}$ および $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 等を用いて表せ.

(2)　$\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$ を示せ.

(北見工業大 2009)　　(m20090203)

0.9　$\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，$D: 1 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 4$ を求めよ.

$\left(\quad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \text{とおくとよい.} \quad \right)$

(北見工業大 2011)　　(m20110205)

0.10　$\sin\theta + \cos\theta = 1/3$ のとき，次の値を求めよ.

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　　(2) $\tan\theta + 1/\tan\theta$

(岩手大 1994)　　(m19940302)

0.11 関数 $r=f(\theta)$ に関する常微分方程式

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2}+f=a$$

に関し，次の問に答えよ．ただし，a は正の定数である．

(1) 上の常微分方程式の一般解を求めよ．

(2) 一般解の積分定数を次の条件によって決定せよ．

$$\theta=0 \text{ において } \quad f=2a, \quad \frac{df}{d\theta}=0$$

(3) θ の範囲を $-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ とする．(r,θ) を極座標とするとき，方程式 $r=f(\theta)$ で表される図形の概形を描け．

(4) 前問の図形によって囲まれる面積を求めよ．

(岩手大 1996) (m19960302)

0.12 ３つのベクトル $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ の大きさを，それぞれ $|\boldsymbol{u}|,|\boldsymbol{v}|,|\boldsymbol{w}|$ で表す．ベクトルの内積を

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\phi \qquad (a)$$

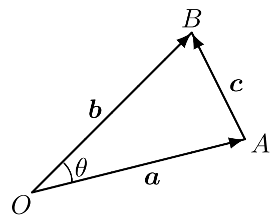
で定義する．ただし，ϕ はベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角である．この定義より，次の内積の基本性質が得られる．

$$|\boldsymbol{u}|^2=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} \qquad (b)$$

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} \qquad (c)$$

$$\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} \qquad (d)$$

$$(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u} \qquad (e)$$



さらに，右の図のような三角形 OAB を考え，

３つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ を

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}, \quad \boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}, \quad \boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}$$

で定義する．ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とする．次の式を証明せよ．

$$|\boldsymbol{c}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

なお，内積の定義 (a) および基本的性質 (b)〜(e) を利用した場所を明示せよ．

(岩手大 1996) (m19960303)

0.13 ３次元空間内の３点 A,B,C の各々の座標を $(a,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,1)$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$ を２辺とする平行四辺形を $ACBD$ とするとき，点 D の座標を求めよ．

(2) $\angle ACB$ を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ．

(3) $\triangle ABC$ の面積を求めよ．

(4) $\triangle ABC$ に垂直な単位ベクトルを求めよ．

(岩手大 1997) (m19970304)

0.14 x-y 平面上の半楕円

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=1 \qquad (x \geqq 0) \cdots\cdots\cdots \text{(i)}$$

と x，y の関数

$$z=2+xy+\frac{1}{2}(x^2+y^2) \qquad \cdots\cdots\cdots \text{(ii)}$$

を考える．ただし，半楕円上の点 (x,y) に対し，原点と点 $\left(\frac{x}{2}\,,\ y\right)$ を結ぶ線分が x 軸となす角を θ とする．次の問に答えよ．

(1) θ を媒介変数とする半楕円 (i) の媒介変数方程式を求めよ．θ のとる範囲も明示せよ．

(2) 条件 (i) のもとでの関数 (ii) の極値を求めるために，関数 (ii) を θ のみの関数として表せ．

(3) 前問で得られた θ の関数 $z = f(\theta)$ が極値をとる $\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ．

(4) $z = f(\theta)$ の極値を求めよ．

(5) $f(0)$，$f\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f\left(\pm\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．

(6) $z = f(\theta)$ のおよそのグラフを描け．

(7) 媒介変数 θ を用いずに，条件 (i) のもとでの関数 (ii) の極値を，ラグランジュの乗数法で求めたい．極値をとる (x, y) の値を求めるための条件式を書け．

(8) 極値をとる (x, y) の値を求めよ．

(岩手大 1998)　　(m19980308)

0.15 次の問いに答えよ．

(1) $f(\theta) = \sin\theta$ を，以下のマクローリンの定理を用いて無限級数へ展開せよ．

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

（ただし $0 < \theta < 1$）

(2) $f(i\theta) = e^{i\theta}$ を無限級数へ展開せよ．ただし，i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ とする．

(3) $f(\theta) = \cos\theta$ を無限級数へ展開し，$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を証明せよ．

(4) $f(t) = 5 + 0.4\sin\omega t + 0.4\sin 2\omega t + 0.3\cos 2\omega t + 0.3\sin 3\omega t$ を，以下の形式に書き直した場合の係数 C_2 と C_{-2} を求めよ．

$$f(t) = \sum_{n=-3}^{3} C_n e^{in\omega t}$$

(5) $f(t) = 0.4\sin 2\omega t + 0.3\cos 2\omega t$ を，以下の形式に書き直した場合の係数 A を求めよ．

$$f(t) = A\sin(2\omega t + \phi)$$

（岩手大 2004）　　(m20040303)

0.16 球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ の内部と円柱 $x^2 + y^2 = ax$ の内部の共通部分を考える．ただし，a は正の定数とする．次の問いに答えなさい．

(1) 球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ と円柱 $x^2 + y^2 = ax$ を図示しなさい．

(2) 極座標 (r, θ) を用い $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ とおいて，球および円柱の方程式を表しなさい．

(3) 共通部分の体積を求めなさい．

(岩手大 2008)　　(m20080304)

0.17 xyz 空間に 3 点 $A(-1,\ 0,\ -3)$, $B(2,\ 2,\ -4)$, $C(-3,\ 1,\ 0)$ がある．次の問いに答えなさい．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角 θ を求めなさい．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(2) 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC の面積を求めなさい．

(3) 3 点 A, B, C を通る平面の方程式を求めなさい．

(4) (3) で求めた平面が，球 $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = r^2 \quad (r > 0)$ に接しているとき，r の値を求めなさい．

(岩手大 2009)　　(m20090302)

0.18 関数 $z = \log\left(x^2 + 2y^2\right)$ について，次の問いに答えなさい．ただし，対数は自然対数である．

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めなさい．

(2) 変数 x, y が変数 r, θ の関数

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta$$

で与えられるとき，$\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めなさい．

(3) (1) および (2) の結果を用いて，次の式が成り立つことを示しなさい．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(岩手大 2009)　　(m20090304)

0.19 xy 平面上の曲線 C が極座標では

$$r = 1 + \sin\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

と表されるとき, 次の問いに答えなさい.

(1) 曲線 C の概形を図示しなさい.

(2) 曲線 C の囲む面積 S を求めなさい.

(岩手大 2010)　　(m20100305)

0.20 球の体積を積分を用いて求めるとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の文中の $\boxed{\text{（ア）}}$〜$\boxed{\text{（カ）}}$ に正しい式を入れなさい．

直交座標 (x, y, z) で原点 O を中心とする半径 a の球の方程式は, $\boxed{\text{（ア）}}$ であり，球の上半分は関数 $z = \boxed{\text{（イ）}}$ で表される．

その定義域 D は $\boxed{\text{（ウ）}}$ であり，球の体積 V は次の重積分で与えられる．

$$V = 2\iint_D \boxed{\text{（イ）}}\,dxdy \cdots\cdots\cdots ①$$

極座標 (r, θ) を用いると，D は $\boxed{\text{（エ）}}$, $\boxed{\text{（オ）}}$ と表され，関数 z は $z = \boxed{\text{（カ）}}$ で表される．

(2) ① 式を極座標に変換して表しなさい．

(3) (2) の結果を用いて，球の体積 V を求めなさい．

(岩手大 2012)　　(m20120303)

0.21 曲面 $\left(\sqrt{x^2+y^2} - a\right)^2 + z^2 = b^2$ $(a > b > 0)$ で囲まれる立体について，次の問いに答えなさい．

(1) 次の文中の $\boxed{\text{（ア）}}$ から $\boxed{\text{（エ）}}$ に正しい式を入れなさい．

この立体の xy 平面上の断面は．立体を囲む曲面の方程式に $z = 0$ を代入した際に，解として得られる 2 つの円 $\boxed{\text{（ア）}}$ 及び $\boxed{\text{（イ）}}$ で囲まれる領域 D_1 である．

この立体の xz 平面上の断面である領域 D_2 は 2 つの円 C_1 及び円 C_2 によって構成される．

円 C_1 及び円 C_2 は方程式 $\boxed{\text{（ウ）}}$ 及び $\boxed{\text{（エ）}}$ で与えられる．

(2) 領域 D_1 及び領域 D_2 を図示しなさい.

(3) 次の文中の $\boxed{\text{（オ）}}$ から $\boxed{\text{（キ）}}$ に正しい式を入れなさい.

この立体は円 C_1 または円 C_2 を z 軸まわりに回転して得られる回転体である.

この立体の体積 V は式 ① で与えられる.

$$V=\pi\int_{-b}^{b}\boxed{\text{（オ）}}\,dx\quad\cdots\cdots①$$

① 式より，この立体の体積は $V=\boxed{\text{（カ）}}$ と求まる.

また，この立体を囲む曲面のうち，$z\geqq 0$ の部分は関数 $z=\boxed{\text{（キ）}}$ で表される.

この立体の体積 V は定義域 D_1 に関する積分として次式で与えられる.

$$V=2\iint_{D_1}\boxed{\text{（キ）}}\,dxdy\quad\cdots\cdots②$$

(4) xy 平面上の極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて ② 式を極座標系の式に変換しなさい.

(岩手大 2015)　　(m20150303)

0.22 原点 O の xyz 空間に点 $A(2,1,3)$，点 $B(3,-2,1)$ が与えられている．このとき，次の問いに答えなさい.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角 θ を求めなさい．ただし，$0\leqq\theta<\pi$ とする.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に垂直な単位ベクトル $\overrightarrow{n}$ を求めなさい.

(3) 3 点 O, A, B を通る平面 α の方程式を求めなさい.

(4) 点 $C(-1,-2,3)$，点 $D(5,6,5)$ の両端を直径とする球 S の方程式を求めなさい.

(5) 平面 α が球 S を 2 つの半球に分割することを示しなさい.

(岩手大 2022)　　(m20220301)

0.23 沖合い 3 km を岸壁に平行に船舶が航行している．岸壁にある観測点に立つ観測者の正面を通過するとき，船舶と観測者を結ぶ直線は角速度 a (rad/秒) で変化した.

(1) 船の進行方向に x 軸を取り，船と観測者を結ぶ直線と，観測点から岸壁に垂直に沖合いに伸びる直線との角度を θ (rad) とする．船の位置 x と θ の関係式を求めよ.

(2) 船舶が観測者の正面を通過したときの航行速度を求める式を与えよ.

(秋田大 2001)　　(m20010402)

0.24 次の問いに答えなさい.

(1) 極座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ (ただし, $r\geqq 0$, $0\leqq\theta<2\pi$) によって，xy 平面上の領域 D が $r\theta$ 平面上の領域 D' に対応しているとする．このとき，関数 f の重積分について，次の式が成り立つことを示しなさい.

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f(r\cos\theta\,,\,r\sin\theta)rdrd\theta$$

(2) xy 平面上の領域 D が $1\leqq x^2+y^2\leqq 9$ で与えられるとき，次の重積分の値を求めなさい.

$$\iint_D\frac{1}{x^2+y^2}dxdy$$

(秋田大 2003)　　(m20030402)

0.25 (1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ のとき, 行列 $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$ と, その行列式 (determinant) を計算せよ.

(2) 積分 $I = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$ を計算せよ. ただし,R は正の定数で,D は領域 $x^2 + y^2 \leqq R^2$ を表す. 必要ならば問題 (1) の変数変換を用いよ.

(3) 半径 R の球の体積 V を, 上の問題 (2) の積分 I を用いて表せ. 理由も簡潔に述べること.

(秋田大 2005) (m20050406)

0.26 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx$

(2) $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} x^2\sqrt{2 - x^2}dx$ について次に答えよ.

(a) $x = \sqrt{2}\sin\theta$ とおくとき $\dfrac{dx}{d\theta}$ を求めよ.

(b) (a) を用いて θ で置換積分をして, I を求めよ.

(秋田大 2021) (m20210401)

0.27 次の問いに答えよ.

(1) $\sin^4\theta\ \cos^2\theta = a_0 + a_2\cos 2\theta + a_4\cos 4\theta + a_6\cos 6\theta$ とおくとき，a_0 , a_2 , a_4 , a_6 を定めよ.

(2) 変数変換 $x = a\sin^2\theta \quad (a > 0)$ を用いて，次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^a x\sqrt{ax - x^2}dx$$

(3) 円柱 $(x-a)^2 + (y-a)^2 \leq a^2$ が，2 平面 $z = ax,\ z = -ax$ により切り取られる部分の体積を求めよ．ただし，$a > 0$ とする.

(東北大 1995) (m19950501)

0.28 点 $X(x, y)$ を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる点を $X'(x', y')$ とする.

(1) OX の長さは r であり，OX の方向は x 軸の正のむきを原点 O のまわりに α だけ回転した方向にあるとする．このとき，x, y, x', y' を r, α, θ により表わせ．ただし，角 θ と角 α の回転の方向は同一であるとする.

(2) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表わすとき，2×2 行列 T は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となることを示せ.

(3) 点 $A(x_1, y_1)$，点 $B(x_2, y_2)$ と原点 O からなる三角形 OAB を考える．三角形 OAB を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる三角形を $OA'B'$ とする．三角形 OAB の面積 S と三角形 $OA'B'$ の面積 S' を与える公式

$$S = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|, \quad S' = \frac{1}{2}|x_1'y_2' - x_2'y_1'|$$

を用いて，$S = S'$ であることを示せ.

(4) 上記 (3) で定義した三角形 $OA'B'$ の辺 $A'B'$ が直線 $y' = 1$ 上に位置し，$S' = \dfrac{1}{2}$ であるとする．この場合に，x_1, y_1, x_2, y_2 が満たすべき条件を示せ.

(5) 上記 (4) において，さらに，$x_1' = 0,\ x_2' > 0,\ \theta = \dfrac{\pi}{4}$ とする．三角形 OAB を図示せよ.

(東北大 2001) (m20010503)

0.29 原点 $\boldsymbol{O}(0,0,0)$ を中心とする半径が 1 の球（単位球）に内接する正四面体を考える． 球の中心から各頂点 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ に至る 4 本のベクトルを $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}},\overrightarrow{\boldsymbol{OB}},\overrightarrow{\boldsymbol{OC}},\overrightarrow{\boldsymbol{OD}}$ とし，$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$ を z 軸に，$\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$ を xz 平面に置き， その 4 本の内, 任意の 2 本のベクトルのなす角度を θ とする． この時, 各ベクトルの成分は

$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}=(0,0,1)$,　$\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}=(-\sin\theta,0,\cos\theta)$,　$\overrightarrow{\boldsymbol{OC}}=(\sin\theta\cdot\cos 60^\circ,-\sin\theta\cdot\sin 60^\circ,\cos\theta)$,

$\overrightarrow{\boldsymbol{OD}}=(\sin\theta\cdot\cos 60^\circ,\sin\theta\cdot\sin 60^\circ,\cos\theta)$　と表せる．

(1) $\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ．

(2) 単位球と頂点 $\boldsymbol{B}$ で接する平面の方程式を求めよ．

(3) 正四面体の 1 辺の長さを求めよ．

(4) 正四面体の体積を求めよ．

（東北大 2004）　(m20040503)

0.30 円柱面 $x^2+y^2=ax$ と球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ で囲まれ, 不等式 $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$z\geqq 0$ を満たす領域を R として, 次の問に答えよ.

(1) 領域 R の概形を描け.

(2) 変数変換 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ のヤコビアン $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ.

(3) 領域 R の体積 V を求めよ.

(東北大 2006)　(m20060501)

0.31 直交座標系 (x,y,z) において，点 O,A,B,C,D の座標がそれぞれ $O(0,0,0)$, $A(2,2,-4)$, $B(3,5,-2)$, $C(5,1,-3)$, $D(0,0,-6)$ で与えられるものとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 線分 OA, OB, OC を隣り合う 3 辺とする平行六面体の体積 V を求めよ．

(2) 3 辺 A, B, C を通る平面 P の方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた平面 P を接平面とし，2 点 O, D を通る球の方程式を求めよ．

(4) 点 A を x 軸の回りに回転した後，平面 Q ： $\sqrt{2}x+y+3z=2$ に直交する方向へ移動することにより，点 O に移すことを考える．この場合の x 軸回りの回転角 θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ と平面 Q に直交する方向の移動量 L を求めよ．

(東北大 2009)　(m20090501)

0.32 数列 $\{a_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ とする．このとき．$b_n=a_{n+1}-\alpha a_n$ によって定められる数列 $\{b_n\}$ が公比 β の等比数列となるような α と β をすべて求めよ．

(2) $(n+2)a_{n+2}-2(n+1)a_{n+1}\cos\theta+na_n=0$ であるとき，a_1 と a_2 を用いて a_n $(n\geqq 3)$ を表せ，ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(3) $a_1=1$, $a_2=i$ (ただし $i=\sqrt{-1}$) とし，複素平面上で原点を O，複素数 a_n を表す点を A_n とする．a_n が (2) の式で表されるとき，三角形 OA_nA_{n+1} $(n\geqq 3)$ の面積を求めよ．

(東北大 2012)　(m20120501)

0.33 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ の関係を用いて，以下の関係が成り立つことを示せ．ただし，　$i=\sqrt{-1}$ である．

(1) $\sin 2\theta=2\sin\theta\sin\theta$

(2) $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$

(東北大 2015)　　(m20150501)

0.34　x を実数とする．$n\times\ n$ 正方行列である $\boldsymbol{A}_n(x)$ と $\boldsymbol{B}_n$ を以下のように与える．

$$\boldsymbol{A}_n(x)=\begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -x & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -x \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}_n=\boldsymbol{A}_n(0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

すなわち，$\boldsymbol{A}_n(x)$ は対角要素がすべて $-x$，その両側の斜めの要素が 1，それ以外の要素がすべて 0 の 3 重対角行列である．$\boldsymbol{B}_n$ は $\boldsymbol{A}_n(x)$ において $x=0$ としたときの行列である．

(1) $\boldsymbol{B}_2$ の固有値をすべて求めよ．

(2) $\boldsymbol{B}_3$ の固有値をすべて求めよ．

(3) $\boldsymbol{B}_n$ の固有値のひとつを λ とする．この λ は $|\boldsymbol{A}_n(\lambda)|=0$ を満たすことを示せ．

(4) λ が $\boldsymbol{B}_n$ の固有値であるとき，$|\boldsymbol{A}_n(\lambda)|$ は漸化式 $|\boldsymbol{A}_n(\lambda)|=-\lambda|\boldsymbol{A}_{n-1}(\lambda)|-|\boldsymbol{A}_{n-2}(\lambda)|$ を満たすことを示せ．ただし，$|\boldsymbol{A}_0(\lambda)|=1$，$|\boldsymbol{A}_1(\lambda)|=-\lambda$ とする．

(5) $\lambda=-2\cos\theta$，$|\boldsymbol{A}_n(\lambda)|=\dfrac{\sin[\,(n+1)\theta\,]}{\sin\theta}$ とおくとき，これらが (4) の漸化式を満たすことを示せ．ただし，$\sin\theta\neq 0$ である．

(6) $\dfrac{\sin[\,(n+1)\theta\,]}{\sin\theta}=0$ を満たす θ を求めよ．これを使って，$\boldsymbol{B}_n$ の固有値 $\lambda=-2\cos\theta$ を求めよ．また，求めた固有値は，$n=2$，$n=3$ の場合，それぞれ (1) および (2) で求めた固有値と一致することを示せ．

(東北大 2015)　　(m20150505)

0.35　次の対称行列 $\boldsymbol{A}$ およびベクトル $\boldsymbol{r}$ について以下の問に答えよ．

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{r}=\begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさを 1 とする．

(2) ベクトル $\boldsymbol{r}$ を回転行列 $\boldsymbol{R}$ によって角度 θ 回転させたものをベクトル $\boldsymbol{s}$ とする．$\theta=30^\circ$とした場合の回転行列 $\boldsymbol{R}$ とベクトル $\boldsymbol{s}$ を求めよ．ただし，θ は反時計回りを正とする．

(3) 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1=[\,1,0\,]^t$，$\boldsymbol{e}_2=[\,0,1\,]^t$ を行列 $\boldsymbol{R}$ によってそれぞれ原点に対して反時計回りに角度 $\theta=30^\circ$回転させたベクトルを　$\boldsymbol{e}_1'$，$\boldsymbol{e}_2'$ とする．(2) で求めたベクトル $\boldsymbol{s}$ を $(\boldsymbol{e}_1'\ \ \boldsymbol{e}_2')$ 座標系により表記したベクトル $\boldsymbol{s}'$ を求めよ．さらに $\boldsymbol{s}'=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{s}$ となる変換行列 $\boldsymbol{Q}$ を求めよ．

(東北大 2016)　　(m20160504)

0.36　(1) 実正方行列が直交行列であることの定義を述べよ．

(2) 2 次の直交行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{または} \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \qquad (\theta:\text{実数})$$

の形であることを示せ．

(3) A を n 次直交行列とする．2 つのベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して， $A\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{w}$ の間の距離は，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ の間の距離に等しいことを示せ． ただし，距離はユークリット空間における標準的な距離とする．

(東北大 2016)　　(m20160506)

0.37 オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いて，次の関係が成り立つことを示せ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ である．

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

(東北大 2018)　　(m20180501)

0.38 極座標変換を用いて次に示す重積分を計算する．以下の問に答えよ．

$$I = \iint_D \frac{x-y}{(x^2+y^2)^2}dxdy, \qquad D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x\right\}$$

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) 次に示す極座標変換のヤコビ行列とその行列式（ヤコビアン）を求めよ．

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

(3) (2) の極座標変換によって，xy 平面内の領域 D は $r\theta$ 平面内の領域 $\overline{D}$ に対応づけられる．下図に示す点 $O(0,0)$ を原点とする r と θ の直交座標を用いて，領域 $\overline{D}$ を図示せよ．

(4) 重積分 I を計算せよ．

(東北大 2022)　　(m20220505)

0.39 図の様に，x, y 平面上の座標が (x,y) で表される点 P を原点 O のまわりに角度 α だけ回転すると，座標が (x', y') の点 P' に移った．以下の問に答えよ．

(1) 点 P の原点 O からの距離を r，O から P に到るベクトルが x 軸の正の方向となす角度を θ とすると，x と y は

$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$

と表される．この時 x' と y' を r，θ，α で表わせ．

(2) x' と y' を x と y と α で表す関係式をもとめよ．

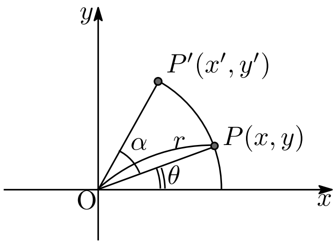
但し，必要があれば，以下の三角関数に関する公式を用いてもよい．

$\sin(\theta+\alpha) = \sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha, \quad \sin(\theta-\alpha) = \sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha$

$\cos(\theta-\alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha, \quad \cos(\theta+\alpha) = \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha$

(3) 複素数 z は，2 乗すると-1 となる i と称する虚数を導入して，実数 x と y を用いて $z = x+iy$ と定義される．この時，x と y は複素数 z の実部と虚部と呼ばれる．今，上記の点 P の座標 x と y とを実部と虚部に持つ複素数を z，点 P' の座標 x' と y' とを実部と虚部に持つ複素数を z' としよう．この時 z' を z で表すとどうなるか，議論せよ．但し，必要ならばオイラーの有名な公式：$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ を用いてもよい．

(4) 上記のオイラーの有名な公式を知っていると，上記の三角関数の公式は導出できるだろうか.「YES , NO , あるいは分からない」で答えよ．



（お茶の水女子大 1999）　(m19990610)

0.40 平均値の定理は次のように書くことができる．

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x+\theta h), \quad 0<\theta<1$$

次の各関数に対して θ を x と h の関数として表せ．

(1) $f(x) = x^2$　(2) $f(x) = x^3$　(3) $f(x) = e^x$　(4) $f(x) = \log x \ (x>0)$

$x \neq 0$ で固定したときに各関数について，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\theta$ を求めよ．
一般に $f(x)$ が C^2 級の関数で $f''(x) \neq 0$ のとき $\displaystyle\lim_{h\to 0}\theta$ の値は定まるかどうか調べよ．

（お茶の水女子大 2000）　(m20000603)

0.41 変数変換 $t = \tan(\theta/2)$ を用いて三角関数の積分を計算してみよう．

(1) $\cos\theta$ と $\sin\theta$ は変数 t を用いて，以下のように表せることを示せ．

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

(2) 次の関数式を示せ．　$\displaystyle\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{2}(1+t^2)$

(3) 次の不定積分を求めよ．　$\displaystyle\int\frac{d\theta}{\sin\theta}, \quad \int\frac{d\theta}{\cos\theta}$
ただし，もし必要であれば以下の公式を用いて良い．

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

（お茶の水女子大 2001）　(m20010604)

0.42 以下に与えられる 3 行 3 列の行列 A を考える．

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

また，xyz 座標系の基底ベクトルを $\overrightarrow{e_x}$，$\overrightarrow{e_y}$，および $\overrightarrow{e_z}$ と表す．

$$\overrightarrow{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) $A\overrightarrow{e_x}$，$A\overrightarrow{e_y}$，および $A\overrightarrow{e_z}$ を計算せよ．

(2) 行列式 $detA$ を計算せよ．

(3) 逆行列 A^{-1} を求めよ．

(4) 基底ベクトル $\overrightarrow{e_x}$，$\overrightarrow{e_y}$，および $\overrightarrow{e_z}$ を三辺とする立方体を考える．変換 A によって，その体積は何倍に変換されるか．

（お茶の水女子大 2001）　(m20010610)

0.43 (1) ２変数関数 $g(x,y)$ が２回連続微分可能であるとき，それと $x=f_1(r,\theta)=r\cos\theta,\ y=f_2(r,\theta)=r\sin\theta$ の合成関数 $h(r,\theta)=g(r\cos\theta,r\sin\theta)$ について次の等式が成立することを示せ．ただし，$r\neq 0,(x,y)\neq(0,0)$ とする．

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

(2) ２変数関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) の近傍 $V=\{(x,y)|\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<r\}$ で２回連続微分可能であるとする．次の条件

$$\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)=\frac{\partial}{\partial y}f(a,b)=0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a,b)>0\,,\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a,b)\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(a,b)-\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(a,b)\right)^2>0$$

を満たすとき，$f(x,y)$ は (a,b) で極小であることを示せ．すなわち，$U=\{(x,y)|\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<r'\}$ $(r'\leq r)$ があって，$(x,y)\in U-\{(a,b)\}$ ならば $f(x,y)>f(a,b)$ が成り立つことを示せ．

(お茶の水女子大 2003)　(m20030607)

0.44 2 次元のベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y)=(A_x(x,y),A_y(x,y))$，に対して，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$ は

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}$$

で与えられる．$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$ を極座標 $(x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta)$ であらわすと

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_r}{\partial r}+\frac{A_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}$$

となることを示せ．ここで，A_r は $\boldsymbol{A}$ の r 方向（動径方向）成分，A_θ はそれに垂直な方向の成分である．

(お茶の水女子大 2009)　(m20090610)

0.45 二次元平面上で x- y座標軸を反時計回りに θ だけ回転させた座標軸を x'- y' とする. ある点 P の位置 (x,y) はこの新しい座標軸では (x',y') と表されるが, 両者の間には次のような関係がある :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\ ,\quad A\equiv\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad ①$$

以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A とその転置行列 A^T の積 AA^T を求めよ.

(2) 行列 B を

$$B=\begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad ②$$

とするとき, BB^T は前問の AA^T に等しいことを示せ. また, A が 2 次元平面上での座標軸の回転を表していたのに対し, B は何を表すかを説明せよ.

(3) A, B のような行列は直交行列と呼ばれる. 前問で見たような行列 A と B の違いは直交行列のどのような性質によるのか、答えよ.

(お茶の水女子大 2010)　(m20100606)

0.46 極座標表示で表された曲線 ： $r=1+\cos\theta$ $(0\leq\theta\leq 2\pi)$ について，以下の各問に答えよ.

(1) 曲線の長さを求めよ.

(2) 曲線によって囲まれた図形の面積を求めよ.

(お茶の水女子大 2011)　(m20110606)

0.47 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ を次式で定義する.

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\ ,\quad \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

ここで e^x は指数関数を表す.

(1) 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ の微分を求めよ.

(2) 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ の無限級数展開の最初の 3 項目までを求めよ.

(3) 次の関係式（加法定理）を示せ.

$$\sinh(\alpha+\beta) = \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta$$

(4) 上の関係式（加法定理）から，正弦関数 $(\sin\theta)$ の加法定理を導け．ただし，次のオイラーの関係式は仮定して良い.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

(お茶の水女子大 2012)　　(m20120603)

0.48 極座標表示で

$$r^2 = \cos 2\theta \quad ただし \qquad -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$$

と表される曲線の概形を描け.

(お茶の水女子大 2012)　　(m20120606)

0.49 次の方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(\boldsymbol{r}) = a\delta(\boldsymbol{r}), \tag{a}$$

に関する以下の問いに答えなさい．ここで右辺の a は正の実数，$\delta(\boldsymbol{r})$ は 3 次元のデルタ関数

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{b}$$

である.

(1) 関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ のフーリエ変換を

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k}) \tag{c}$$

とした時，これが方程式 (a) を満たすということから関数 $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$ を求めなさい.

(2) 積分要素 $d\boldsymbol{k}$ の直交座標系 (k_x, k_y, k_z) から極座標系 (k, θ, ϕ) への変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k} = \int_0^{\infty} dk \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi |J| \tag{d}$$

で与えられる．このときのヤコビアン J を書きなさい．ここで $k = |\boldsymbol{k}|$ である．また (d) の右辺が

$$\int_0^{\infty} k^2 dk \int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \tag{e}$$

と書けることを示しなさい.

(3) 問 (1) で求めた $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$ を使って，(c) から $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めなさい．必要があれば，公式

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2} \tag{f}$$

を用いてもよい.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130606)

0.50 a を正の定数とするとき，極形式 $r = a(1+\cos\theta)$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ で囲まれる領域について，以下の各問いに答えよ.

(1) 囲まれる領域の周の長さを求めよ．

(2) 囲まれる領域の面積を求めよ．

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200611)

0.51 極座標に関する以下の各問に答えよ．

(1) 極座標を用いて $r = 1 + \cos\theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$ で表される曲線の長さを求めよ．

(2) 次の広義積分 I について，極座標の考え方を用いることで I^2 を求めよ．また，I を求めよ．

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210607)

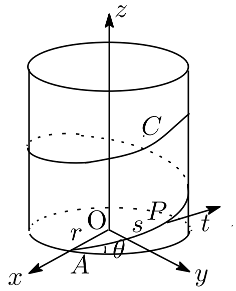
0.52 半径 r の円柱の表面に底面と一定の角度 θ をなすらせん（螺旋）曲線 C がある．直交座標系 O–xyz を図に示すようにとる．また，円柱の表面と x 軸との交点 A を曲線 C が通るとする．以下の各問に答えよ．

(1) 点 A からのらせん曲線の長さを s とするとき，らせん上の任意の点 P の直交座標系 O–xyz での位置 $\mathbf{r}_p$ を s の関数として表せ．

(2) $\mathbf{t}$ を点 P において曲線 C に接する長さ 1 の接線ベクトルとする．$\mathbf{t}$ を s の関数として表せ．ただし，$\mathbf{t}$ の方向は s が増加する向きを正ととることとする．

(3) $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$ と $\mathbf{t}$ とは直交することを示せ．

(4) 点 P における曲線 C の曲率 k は，$k = \left|\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}\right|$ によって表される．k を θ の関数としてグラフに表せ．ただし，$0 \leq \theta \leq \pi$ とする．



(東京大 1998)　　(m19980703)

0.53 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!} \sin\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi$ を求めたい．

$\displaystyle f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} \sin\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $f'(\theta)$ を無限級数の形を用いて表せ．

(2) $f''(\theta)$ を $f(\theta)$ を用いて表せ．

(3) $f(\theta)$ を求め，$\displaystyle f(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!} \sin\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi$ を計算せよ．

(東京大 1999)　　(m19990702)

0.54 曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ を S とする．S に $(\pm\ 1, \pm\ 1, \pm\ 1)$ で内接する立方体を U とする．ただし，符号はすべての組み合わせをとる．曲面 S で囲まれた領域から立方体 U を除いた領域を V とする．領域 V に対する積分

$$I = \int_V (x^2 + 2y^2 + 3z^2) dx\, dy\, dz$$

を求めたい．以下の問いに答えよ．

(1) 立方体 U に対する積分

$$J = \int_U (x^2 + 2y^2 + 3z^2) dx\, dy\, dz$$

を求めよ．

(2) 球 $W : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ に対する積分

$$K = \int_W (x^2 + y^2 + z^2) dx\, dy\, dz$$

を極座標 $(x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta)$ を用いて求めよ．体積素片に対して，$dxdydz = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ が成立することを利用してよい．

(3) 上の (1) と (2) を利用して，積分 I を求めよ．

(東京大 2000)　　(m20000702)

0.55 極座標 (r, θ) で表せる 2 次元領域 $r > 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$ で

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \qquad \text{(i)}$$

を満たし，境界条件

$$u(1, \theta) = \cos 3\theta \quad 0 \leq \theta < 2\pi \qquad \text{(ii)}$$

$$\lim_{r \to \infty} u(r, \theta) = 0 \quad 0 \leq \theta < 2\pi \qquad \text{(iii)}$$

を満たす解 $u(r, \theta)$ を以下の手順で求めよ．

(1) (i) の解として $u(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ と表せるものを考える．これを (i) に代入し，左辺が r のみの関数，右辺が θ のみの関数であるような式を導け．

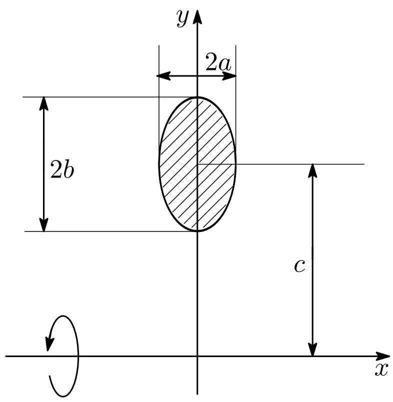
(2) この式が上記の 2 次元領域に対応する任意の (r, θ) に対して成立するためにはその両辺は r , θ によらない定数でなくてはならない．そこで，この定数を c として f の r に関する微分方程式と g の θ に関する微分方程式を導け．

(3) m を整数として $f(r) = r^m$ とおき，定数 c を m で表せ．次に，これを g の θ に関する微分方程式に代入し，(i) の解で，$u_m(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ の形のものを求めよ．

(4) d_m を定数として，(i) の解で $u(r, \theta) = \sum_m d_m u_m(r, \theta)$ の形の解を考え，それが境界条件 (ii),(iii) をみたすようにして求める解 $u(r, \theta)$ 定めよ．

(東京大 2000)　　(m20000705)

0.56 図のような xy 平面上の楕円（図中の斜線の部分）を x 軸の周りに回転させてできたドーナツ状の立体の体積を考える．楕円の短軸（x 軸方向）の長さを $2a$，長軸（y 軸方向）の長さを $2b$，楕円の中心と x 軸との距離を c $(c > a,\ c > b)$ とするとき，以下の問いに答えよ．



(1) y を x の関数として表現し，楕円の表す方程式を求めよ．

(2) $x = a\cos\theta$ と置換し，楕円を x 軸の周りに 1 回転させてできた立体の体積を求めよ．

(3) このドーナツ状の立体をさらに y 軸の周りに 1 回転させてできた立体の体積を求めよ．

(東京大 2004)　　(m20040701)

0.57 以下の設問に答えよ．ただし，$a > 0$ である．

(1) 次の定積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-ax^2}dx$

(2) 次の定積分の値を求めよ．必要ならば，直交座標系 (x, y) を極座標系 (r, θ) に変換せよ．
$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}e^{-ay^2}dxdy$

(3) 次の等式を証明せよ． $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

(4) 次の定積分の値を求めよ．ただし，n は 2 以上の整数である． $\displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2}dx$

(東京大 2004)　　(m20040702)

0.58 空間において, xz 平面上の単位ベクトル $(u, 0, w)$ を考える.

(1) y 軸まわりの回転を表す行列のうち, ベクトル $(0, 0, 1)$ をベクトル $(u, 0, w)$ に変換するものを求めよ.

(2) (1) で求めた行列を利用して, ベクトル $(u, 0, w)$ を軸とする角度 θ の回転を表す行列を求めよ.

(3) (2) で求めた行列の実数の固有値とその固有ベクトルを求めよ.

(東京大 2005)　　(m20050705)

0.59 2 つの媒介変数 s, θ によって表される曲面 S

$$S \,:\, x(s,\theta) = (s\cos\theta\,,\ s\sin\theta\,,\ \alpha\theta)\,,\ (0 \leq s \leq 1)\,,\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

について，以下の設問に答えよ．α は 0 以上の定数とする．

(1) $x(s, \theta)$ の媒介変数 s を 1 と固定する事により，曲線 C

$$C \,:\, y(\theta) = x(1,\theta) = (\cos\theta\,,\ \sin\theta\,,\ \alpha\theta)\,,\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

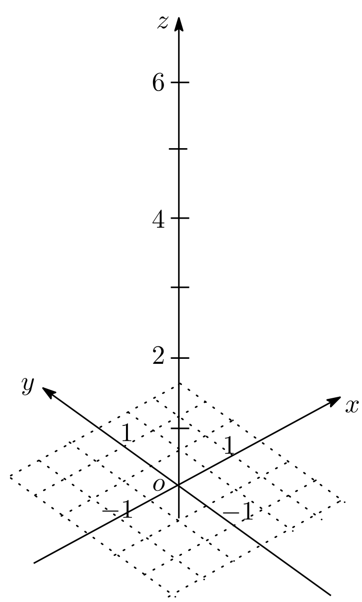
を得る．$\alpha = 1$ の場合について，下図の座標軸を参考にして曲線の概略を解答用紙に手描きせよ．

(2) C 上の点を $P(= y(\theta))$ とする．P における接線の方程式を導出せよ．

(3) (2) で求めた接線と xy 平面の交点を Q とする．θ が 0 から 2π まで連続的に変化するとき，Q が描く曲線の長さ ℓ を求めよ．

(4) $\alpha = 0$ のとき，曲面 S は xy 平面上の単位円盤に一致する．$\alpha = 1$ としたとき，曲面 S の面積は，単位円盤の面積の何倍になるかを求めよ．ただし，次の不定積分の公式を使ってよい．

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2} + \log_e\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right\} + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$



(東京大 2009)　　(m20090703)

0.60 点 O を原点とする xyz 空間に, 点 P および x 軸上の点 Q があり, この 2 つの点が $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{PQ}| = 1/2$ を満たしながら動くとき, 線分 $\overline{PQ}$ が通過し得る領域を V とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 点 P の集合を表す曲面の方程式を x, y, z で表せ.

(2) 点 P が xy 平面上の第 1 象限 $(x > 0\,,\ y > 0)$ に存在し, かつ点 Q が点 O 以外に存在する場合を考える.

(a) このとき, $\angle POQ = \theta$ として, 線分 $\overline{PQ}$ を表す方程式を x, y, θ で表せ.

(b) 線分 $\overline{PQ}$ が通過し得る領域 S を表す式を求め, 領域 S の概形を図示せよ.

(3) 領域 V の体積を求めよ.

(東京大 2010)　　(m20100703)

0.61 (1) 閉曲面 S で囲まれた領域の体積 V は

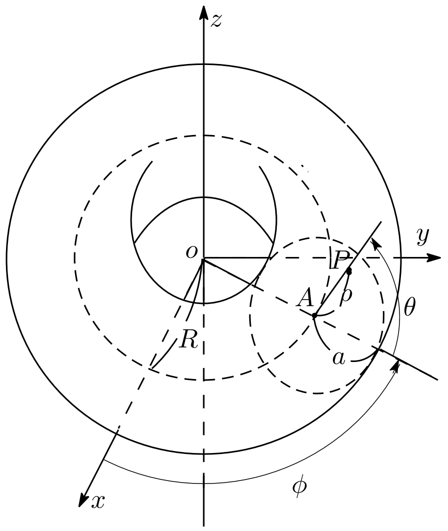
$$V = \frac{1}{3}\iint_S \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (*)$$

と与えられることをガウスの定理を用いて証明せよ. ただし, $\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル, $d\boldsymbol{S}$ はベクトル面積素である.

(2) 下図のように, あるトーラスの回転対称軸を z 軸にとり, z 軸に垂直でトーラスを 2 等分するような平面内に x 軸と y 軸をとる. このトーラスは z 軸を含んだ平面で切断すると, その断面は半径 a の円となり, この円の中心は z 軸から距離 R の円周上（トーラス中心軸と呼ぶことにする）にある $(R > a)$. トーラス表面および内部の任意の点を P とする. 点 P と z 軸とを含んだ平面と, トーラス中心軸との交点を A とする. 線分 AP の長さを ρ, x 軸と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のなす角を ϕ, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のなす角を θ とする. 点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の成分を R, ρ, ϕ, θ を用いて書き表せ.

(3) 同図のトーラスの表面 $(\rho = a)$ においてベクトル面積素 $d\boldsymbol{S}$ を, 前問 (2) の結果を用いて, ϕ と θ を媒介変数にして表示せよ. この結果を用い, 変数の範囲に注意して, このトーラスの表面積を求めよ. なお円周率を π とする.

(4) 式 $(*)$ と前問の結果からこのトーラスの体積を求めよ.



(東京大 2012)　　(m20120703)

0.62 以下の問いに答えよ. i は虚数単位とする.

(1) 複素数の範囲で -4 の 4 乗根をすべて求めよ.

(2) 複素関数 $f(z) = z^2$ を複素平面上の点 $1+i$ から点 $2+2i$ にいたる線分に沿って積分した結果を示せ.

(3) 実関数の定積分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} \qquad (a>1)$$

を求めたい. $z = \exp(i\theta)$ とし, I を複素積分の形で表せ. 積分路も示すこと.

(4) 留数定理を用いて (3) の I の値を計算せよ.

(5) 複素関数 $f(z) = f(x+iy) = \left(x^2-y^2\right) + ibxy$ が正則となるように係数 b を定めよ. また, そのときの $f(z)$ の導関数を求めよ.

(東京大 2013)　　(m20130704)

0.63 カージオイドと呼ばれる極座標形式で表された曲線 $r = 1+\cos\theta$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 曲線の概形を図示せよ. ただし, 作図の根拠も示せ.

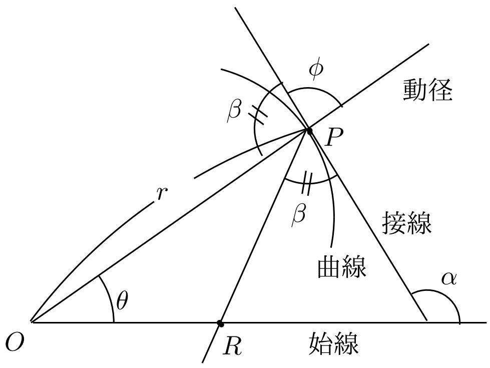
(2) この曲線の全周囲長を求めよ. ただし, $1+\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ という関係を用いても良い.

(3) 下図に示すように, 曲線上の点 $P(r,\theta)$ $(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$ における接線と原点 O から点 P を結んだ直線（動径）のなす角度を ϕ とする. また, 接線と始線のなす角度を α とする. このとき, $\tan\phi = \tan(\alpha-\theta)$ であることを用い,

$$\tan\phi = \frac{r}{r'}$$

となることを示せ. ただし, $r' = dr/d\theta$ である. また, これを用いて ϕ を θ で表せ.

(4) 下図に示すように, 動径と接線のなす角度を β とする. 曲線上の点 $P(r,\theta)$ $(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$ で接線と角度 β をなすもう一つの直線が始線と交わる点を R とする. このとき, 三角形 OPR は二等辺三角形となることを示せ.



(東京大 2014)　　(m20140703)

0.64 xy 平面上において. 媒介変数 θ を用いて次式で表されるサイクロイド曲線 C を考える.

$$\begin{cases} x(\theta) - \theta - \sin\theta & (1) \\ y(\theta) = 1-\cos\theta & (2) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ. ただし, 必要に応じて次の関係式を用いてよい.

$$\begin{cases} \sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} & (3) \\ 1-\cos\theta = 2\sin^2\dfrac{\theta}{2} & (4) \end{cases}$$

(1) $0 \leq \theta \leq 2\pi$ における曲線 C の概形を, 根拠とともに示せ.

(2) 曲線 C 上の任意の点に対して，x 方向に 2π だけ平行移動させた点を考える．その点もまた曲線 C 上にあることを示せ．

(3) 原点 $O(0,0)$ から，曲線 C 上の点 $P(x(\varphi), y(\varphi))$ (ただし $0 \leq \varphi \leq \pi$) までの曲線の長さを $\ell(\varphi)$ とする．

(a) $\ell(\varphi)$ を求めよ．

(b) 図 3.1 に示すように，点 P における曲線 C の接線上の点 Q を考える．
ただし，$\overline{PQ} = \ell(\pi) - \ell(\varphi)$ であり，また，$\overline{OQ} > \overline{OP}$ とする． 点 P を $0 < \varphi < \pi$ の間で動かしたときの点 Q の軌跡を求め，その概形を示せ．

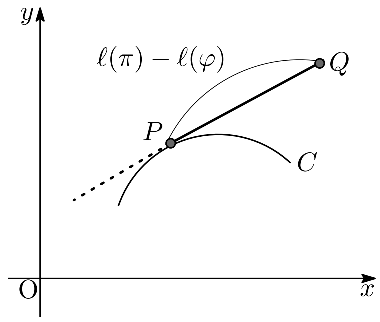


図 3.1

(東京大 2015) (m20150703)

0.65 複素積分を利用して実数積分を求めることを考える．以下の問いに答えよ．

(1) まず，ガウス積分と呼ばれる実数積分 $I(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ を考える．α は正の定数であり; x は実数である．y を実数とするとき，$\{I(\alpha)\}^2$ は以下の式で表される．

$$\begin{aligned}\{I(\alpha)\}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx dy\end{aligned}$$

この式を極座標 (r, θ) 表示に変換せよ．

(2) $I(\alpha) = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$ となることを導出過程とともに示せ．

(3) 図 4.1 に示すように x 軸を実軸，y 軸を虚軸とする複素平面上において半径 R の扇形で C_1，C_2，C_3 からなる経路 C を反時計回りに一周することを考える．i を虚数単位とし，z を複素数とするとき，以下の積分を求めよ．

$$\oint_C e^{iz^2} dz$$

(4) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} e^{iz^2} dz = 0$ となることを示せ．ただし，$0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$ において，$\sin\varphi \geq \dfrac{2\varphi}{\pi}$ を用いてよい．

(5) 上記のガウス積分と複素積分を用いて，実数積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$ の値を求めよ．

(6) 実数積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ の値を求めよ．

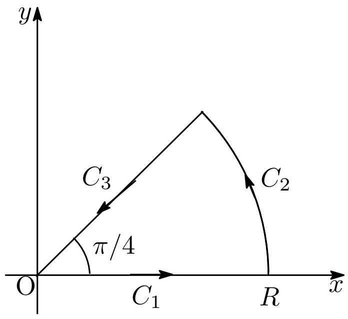
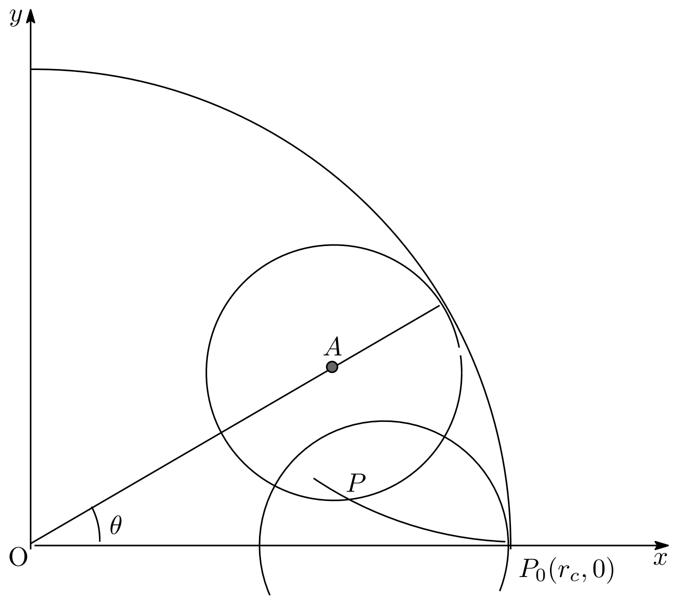


図 4.1

(東京大 2015)　　(m20150704)

0.66　図のように，原点 O を中心とする半径 r_c の定円に内接しながら半径 r_m の円 A が滑らずに回転する．円 A の円周上の定点 P の軌跡である内サイクロイド曲線 C について考える．なお，$r_c \geqq 2r_m > 0$ とする．



(1)　点 P は，図中の点 $P_0(r_c, 0)$ から移動を開始したとする．このとき，回転後の円 A の中心 A と原点を結ぶ線分 OA の x 軸からの回転角を θ とするとき，r_c, r_m, θ を用いて点 P の座標を表せ．

(2)　$ar_m = r_c$ と表すこととする．また，$r_c = 1$ とする．

(a) a が正の整数であるとき，この曲線 C 上の点を x 軸に関して対称に移動させた点もまた曲線 C 上にあることを示せ．

(b) $a = 2, 3, 4$ のときの軌跡の概形を根拠とともに示せ．

(3)　$r_c = 3$, $r_m = 1$ のとき，この内サイクロイドに囲まれた部分の面積 S と内サイクロイドの長さ L を求めよ．

(東京大 2017)　　(m20170703)

0.67　以下の問いに答えよ．i は虚数単位はとする．

(1)　実数 a は $|a| < 1$ 満たすとする．留数定理を用いて，複素積分

$$\int_C \frac{dz}{(z+ai)(az+i)}$$

を求めよ．ただし，積分路 C は $|z| = 1$ であり，反時計回りに回るものとする．

(2) $0 < \gamma < \pi/2$ として，積分値

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \cos\gamma \sin\theta}$$

を次の手順で求めよ．

(a) $z = e^{i\theta}$ と変数変換を行うことにより複素積分に変形する．このとき，

$$I = \int_C f(z) dz$$

を満たす複素関数 $f(z)$ を求めよ．ただし，積分路 C は $|z| = 1$ であり，反時計回りに回るものとする．

(b) 複素関数 $f(z)$ の極を全て求めよ．

(c) 積分路 C 内に含まれる極を全て求めよ．

(d) 留数定理を用いて，積分値 I を求めよ．

(東京大 2017)　　(m20170704)

0.68 3 つのベクトル場 $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ を考える．各ベクトル場は次のように定義する．

$$\overrightarrow{A} = rf(r,z)\overrightarrow{e}_\theta$$
$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}$$
$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{\nabla}\{zf(r,z)\}$$

ただし，$f(r,z)$ は

$$f(r,z) = (r^2 + z^2)^{-3/2}$$

とする．円柱座標系 (r, θ, z) における基底ベクトルを $(\overrightarrow{e}_r,\ \overrightarrow{e}_\theta,\ \overrightarrow{e}_z)$ とし，以下の問いに答えよ．必要であればスカラー場 ϕ およびベクトル場 $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r V_r + \overrightarrow{e}_\theta V_\theta + \overrightarrow{e}_z V_z$ に対する以下の勾配，発散，回転の式を用いてよい．

$$\overrightarrow{\nabla}\phi = \overrightarrow{e}_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \overrightarrow{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \overrightarrow{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$
$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$
$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right) + \overrightarrow{e}_\theta \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \overrightarrow{e}_z \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)$$

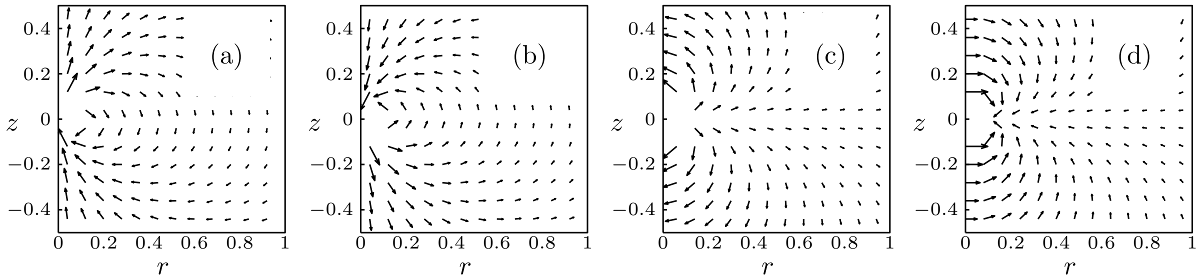
(1) $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B}$ を求めよ．

(2) $r \le r_0$ および $z = z_0$ により定義される円板面 S_0 を考える $(z_0 > 0)$．面の法線方向を $\overrightarrow{e}_z$ とするとき，この円板面における次の面積分 Φ を，必要があれば r_0, z_0 用いて，表わせ．

$$\Phi = \int_{S_0} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S}$$

(3) $\overrightarrow{B}$ および $\overrightarrow{C}$ を求めよ．

(4) ベクトル場 $\overrightarrow{B}$ および $\overrightarrow{C}$ の分布の概略として正しい図を下の (a)-(d) からそれぞれ選べ．



(5) $r \leq r_0$ および $z_1 \leq z \leq z_2$ により定義される円柱 $(z_1 > 0)$ に対し，側面と両底面からなる閉曲面 S_1 を考える．面の法線方向を円柱外向きとする．この閉曲面における次の面積分 Q を，必要であれば r_0, z_1, z_2 を用いて，表わせ.

$$Q = \int_{S_1} \overrightarrow{C} \cdot d\overrightarrow{S}$$

(東京大 2018)　　(m20180703)

0.69 i を虚数単位とし，z は複素数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 次の複素数を $x+iy$（x, y は実数）の形ですべて求めよ．ただし，x, y の表式に三角関数を含んではならない．

(a) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^3$　　(b) $i^{1/2}$　　(c) $\dfrac{(1-i)^6}{(1+i)^8}$

(2) 関数 $z = \tan\omega = \dfrac{\sin\omega}{\cos\omega}$ の逆関数を $\omega = \tan^{-1} z$ で表す．

(a) 次の式が成り立つことを示せ．　$\tan^{-1} z = \dfrac{i}{2}\log\left(\dfrac{i+z}{i-z}\right)$

ただし，log は複素対数関数である．

(b) $\tan^{-1} z$ の z に関する微分を求めよ．

(3) 複素平面において，曲線 C を $z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とする．

(a) 次の積分 $I(k)$ を求めよ．ここで，k は $0 < k < 1$ の定数とする．　$I(k) = \displaystyle\int_C \frac{1}{k^2z^2+1}dz$

(b) $k = 2-\sqrt{3}$ のとき，I の値を求めよ．

(4) 実積分 J の値を留数定理により求めることを考える．　$J = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx$

(a) J の積分範囲を $[-\infty, \infty]$ と変形して，被積分関数に e^{ix} を用いて J を表せ．

(b) 関数 $f(z) = 1/(z^2+1)^2$ とする．複素平面において，図 1 の半径 Γ（円弧 ADB）の半径 R が十分に大きい時，次のことが成り立つことを示せ．　$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz = 0$

(c) 図 1 の C に関する周回積分を考えることにより，J の値を求めよ．

このとき，複素平面の上半平面において，

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)e^{iz}dz = 0$$

であることを用いてよい．

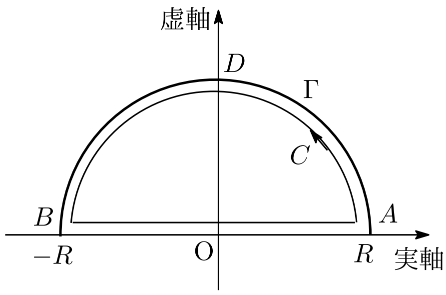


図 1

(東京大 2020)　　(m20200703)

0.70 $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$,　$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) $S_\theta = \cos\theta A + \sin\theta B$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする．θ を固定するとき，2 次形式 ${}^t v S_\theta v = c$ (c は 0 でない定数，${}^t v$ は v の転置) の表わす図形は何か？

(東京工業大 1997)　　(m19970804)

0.71 極座標系で表された半直線

$\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ $(0 \leqq \alpha < \beta < 2\pi)$

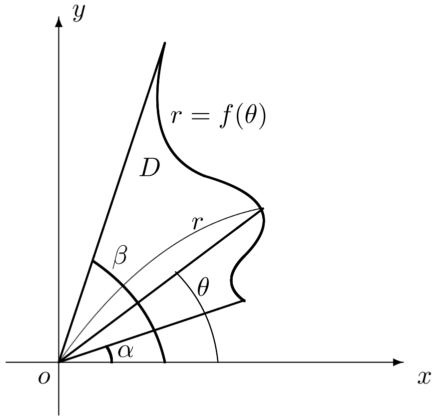
および，連続曲線

$r = f(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$

で囲まれた閉領域 D の面積は

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 d\theta$$

で与えられることを示せ．



(東京工業大 2000) (m20000802)

0.72 極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を考える．$(x, y) = (0, 0)$ 以外で定義された C^2 級関数 $f(x, y)$ について $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を r, θ に関する偏微分を用いて表わせ．

(東京工業大 2002) (m20020803)

0.73 $f(x, y)$ を $\boldsymbol{R}^2 - \{0\}$ 上の C^2- 級関数， $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 - \{0\}$ の極座標とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) 次の等式を示せ． $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$

(2) $f(x, y)$ は $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ のみの関数で，θ にはよらないとする．さらに f は条件
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ ， および $r = 1$ のとき $f = 0$, $r = 2$ のとき $f = 1$
を満たすとする．このような f を求めよ．

(東京工業大 2006) (m20060801)

0.74 C_r は円 $z = re^{i\theta}$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ を正の向きに一周するものとする．次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z(z-\pi)} dz$ (2) $\displaystyle\int_{C_4} \frac{1}{z(z-\pi)} dz$

(3) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{\cos z}{z(z-\pi)} dz$ (4) $\displaystyle\int_{C_4} \frac{\cos z}{z(z-\pi)} dz$

(電気通信大 1998) (m19981005)

0.75 次の実定積分について考える（ただし $a > 1$ とする）．

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\cos^2\theta + a - 1} \qquad (*)$$

以下の設問 (1)〜(4) に従って答えよ．

(1) $z = e^{2i\theta}$ とおくとき, $\cos 2\theta$ を z を用いて表せ.

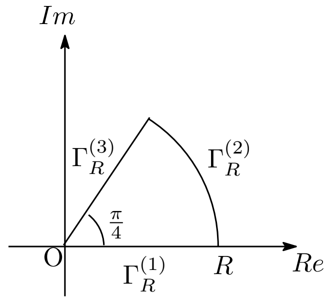
(2) 設問 (1) で示した変数変換 $(z = e^{2i\theta})$ によって, 式 $(*)$ の右辺を変数 z による複素積分にせよ. その際, 積分経路はどうなるかを説明せよ.

(3) 設問 (2) で示した複素積分において, 積分経路内での被積分関数の極と位数ならびに留数を求めよ.

(4) 留数定理を用いて, 実定積分 I の値を求めよ.

(電気通信大 2005) (m20051007)

0.76 右図に示すように，複素平面上にある中心角 $\pi/4$，半径 $R(>0)$ の領域の周囲を反時計回りに 1 周する経路 Γ_R を考える．また，図にあるように経路 Γ_R の各部分を $\Gamma_R^{(1)}, \Gamma_R^{(2)}, \Gamma_R^{(3)}$, と名付ける．



以下の 3 つの問いに順に答えよ．

(1) 経路 Γ_R では式 ① が成立する．

$$\int_{\Gamma_R} e^{-z^2} dz = 0 \qquad ①$$

次式のように G_R, P_R, C_R, S_R を定義するとき，式 ① をこれらを用いて表せ．

$$G_R = \int_0^R e^{-x^2} dx \ , \qquad P_R = \int_{\Gamma_R^{(2)}} e^{-z^2} dz \ ,$$

$$C_R = \int_0^R \cos r^2 dr \ , \qquad S_R = \int_0^R \sin r^2 dr \ ,$$

(2) P_R について次の不等式 ② が成立することを示すとともに，

$$|P_R| \leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2\theta} R d\theta \qquad ②$$

$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$ では $0 \leq 1 - \dfrac{4}{\pi}\theta \leq \cos 2\theta$ となることを使って，$\displaystyle\lim_{R\to\infty} P_R = 0$ を示せ．

(3) 小問 (1), (2) で求めた結果を使って，定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^2 dx$ と $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2 dx$ を計算せよ．ただし、$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明なしに用いてよい．

(電気通信大 2006) (m20061008)

0.77 $f(z) = \dfrac{z^4}{z^6+1}$ について次の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ の極を極形式 $(re^{i\theta})$ の形で表せ．

(2) $z = \alpha$ を $f(z)$ の極とするとき，$f(z)$ の $z = \alpha$ における留数が $\dfrac{1}{6\alpha}$ であることを示せ．

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ を求めよ．

(電気通信大 2008) (m20081005)

0.78 定積分

$$I = \int_o^{2\pi} \frac{1}{5 - 4\sin\theta} d\theta$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $z = e^{i\theta}$ とおくとき，$\sin\theta$ を z で表せ．ただし，i は虚数単位である．

(2) $I = \displaystyle\int_C f(z) dz$ の形に表せ．ここで，積分路 C は円 $|z| = 1$ を正の向きに一周するものとする．

(3) I の値を求めよ．

(電気通信大 2011) (m20111005)

0.79 全微分可能な関数 $z = f(x, y)$ に対して，極座標による変数変換

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \quad (r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$$

を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\left[\dfrac{\partial z}{\partial r}, \ \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right] = \left[\dfrac{\partial z}{\partial x}, \ \dfrac{\partial z}{\partial y}\right] A$ を満たす行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ を求めよ．

(2) x, y の r, θ に関するヤコビアン（ヤコビの行列式）$\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を計算せよ．

(3) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ を r，$\dfrac{\partial z}{\partial r}$，$\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を使って表せ．

(電気通信大 2012)　　(m20121003)

0.80 複素関数 $f(z) = \dfrac{z^2}{z^4 + 1}$ について以下の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ のすべての極を極形式 $\left(re^{i\theta}\text{の形}\right)$ で表せ．

(2) α を $f(z)$ の極とするとき，$f(z)$ の α における留数が $\dfrac{1}{4\alpha}$ であることを示せ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ を求めよ．

(電気通信大 2012)　　(m20121005)

0.81 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を平面 $x + z = 0$ に関する対称移動とし，$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を平面 $y - z = 0$ に関する対称移動とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 平面 $x + z = 0$ の原点を通る法線に点 (x, y, z) からおろした垂線の足を P とするとき，点 P の座標を求めよ．

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる 3 次正方行列 A を求めよ．

(3) 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ を解け．

(4) 平面 $x + z = 0$ と平面 $y - z = 0$ のなす角 θ を求めよ，ただし，$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(5) $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は原点を通る直線を軸とする回転移動となる．軸となる直線の方向ベクトルと回転する角度を答えよ．

(電気通信大 2013)　　(m20131002)

0.82 関数 $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x, y)$ の極値を求めよ．

(2) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とするとき，$f(x, y) = 0$ を $r,\ \theta$ の式で表せ．

(3) 領域 $D = \{(x, y) : f(x, y) \leqq 0,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ の面積 S を求めよ．

(電気通信大 2015)　　(m20151003)

0.83 以下の問いの答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする．

(1) $z = e^{i\theta}$ とおくとき，$\sin\theta$ を z の式で表せ．

(2) 複素関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 4iz - 1}$ の極をすべて求め，各極における留数を計算せよ．

(3) 定積分 $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta}$ の値を求めよ．

(電気通信大 2015)　　(m20151005)

0.84 複素関数 $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$ に対して，以下の各問いに答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ で，e は自然対数の底とする．

(1) $f(z)$ のすべての極を求め，各極における留数を求めよ．

(2) $z = Re^{i\theta}$ $(R > 1,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi)$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$|f(z)| \leqq \frac{1}{R^2-1}$$

(3) 広義積分 $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$ を求めよ．

(電気通信大 2016)　　(m20161005)

0.85 $0 < a < 1$ を満たす実数 a に対して，以下の問いに答えよ．

(1) 次の複素関数 $f(z)$ の特異点をすべて求め，$f(z)$ の各特異点における留数を求めよ．
ただし，i は虚数単位とする．　$f(z) = \frac{1}{az^2 - i(a^2+1)z - a}$

(2) 次の定積分 $I(a)$ を求めよ．　$I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 - 2a\sin\theta + 1}$

(電気通信大 2019)　　(m20191005)

0.86 (1) $z^4 + 1 = 0$ となる複素数 z を求めよ．

(2) $x = \sqrt{\tan\theta}$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ に対して，導関数 $\frac{dx}{d\theta}$ を x の式で表せ．

(3) 広義積分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta$ を求めよ．

(電気通信大 2020)　　(m20201005)

0.87 (1) $z = e^{i\theta}$ とおくとき，$\cos\theta$ を z の有理式で表せ．ただし，i は虚数単位で，e は自然対数の底とする．

(2) 複素関数 $f(z) = \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}$ の極をすべて求めよ．更に，絶対値が 1 より小さい極における留数を計算せよ．

(3) 定積分 $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2}$ の値を求めよ．

(電気通信大 2021)　　(m20211006)

0.88 3 次元空間において，点 $A(3,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(0,0,1)$ を含む平面を α とする．次の問に答えよ．

(1) 平面 α と xy 平面のなす角を θ ($0 < \theta < \pi/2$) とするとき，$\cos\theta$ を求めよ．

(2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ．

(3) 平面 α と原点を中心とする半径 1 の球との交わりを xy 平面に正射影して出来る図形の面積を求めよ．

(横浜国立大 1993)　　(m19931102)

0.89 行列 $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ および，$B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ に関して以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値とその固有ベクトルを求めよ．

(2) A^n を $\sin(n\theta)$, $\cos(n\theta)$ で表わせ．また，その求め方を説明せよ．

(3) B^n を $\sin(n\theta)$, $\cos(n\theta)$ で表わせ．また，その求め方を説明せよ．

(横浜国立大 2017)　(m20171103)

0.90 極座標による曲線 $r = r(\theta)$ を x, y 座標に変換したとき，次の関係が成り立つことを示せ．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta} \quad , \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{r^2 - rr'' + 2r'^2}{(r'\cos\theta - r\sin\theta)^3}$$

ただし，　$r' = \dfrac{d}{d\theta}r(\theta)$　,　$r'' = \dfrac{d^2}{d\theta^2}r(\theta)$

(千葉大 1996)　(m19961201)

0.91 2 次元平面上の直交座標系を x, y とする．原点から点 (a, b) までの距離を r ，原点と点 (a, b) を結ぶ直線と， x 軸の正の方向とがなす角度を反時計回りの弧度法で計った角度を θ とする．このとき，曲線 $r = a(1 + \cos\theta)$ ， $a > 0$ によって囲まれる有限の領域の重心の x 座標を求めなさい．

(千葉大 2000)　(m20001203)

0.92 ３次元空間中に球 $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ と円柱 $x^2 + y^2 = 2ax$ がある．球が円柱によって切り取られる立体の体積 V を以下の設問に答えることによって求めなさい．

(1) V が次のような重積分になることを図を書いて示しなさい．

$$V = 2\iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy \;,\; D = \{(x, y) \mid (x - a)^2 + y^2 \leq a^2\}$$

(2) x-y 座標系の原点を中心とする極座標 (r, θ) を用いると，領域 D が次のように表されることを示しなさい．

$$D = \left\{(r, \theta) \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \;,\; 0 \leq r \leq 2a\cos\theta\right\}$$

(3) 設問 (1) の重積分を極座標に変換して体積 V を求めなさい．

(千葉大 2001)　(m20011201)

0.93 三次元空間中に，球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ と円柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ がある．球面に囲まれる領域が円柱により切り取られる立体の上半分 $(z \geq 0)$ の体積 V を求めたい．

(1) V が次のような重積分になることを図で示しなさい．

$$V = \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy, \quad D = \{(x, y) \mid (x - a)^2 + y^2 \leq a^2\}$$

(2) 極座標を用いると，領域 D は次のように表されることを示しなさい．

$$D = \left\{(r, \theta) \mid -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\; 0 \leq r \leq 2a\cos\theta\right\}$$

(3) 極座標に変換して体積 V を求めなさい．

(千葉大 2008)　(m20081203)

0.94 三次元空間中に，球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ と円柱面 $x^2 + y^2 = ax$ がある．ただし，$a > 0$．球面に囲まれる領域が円柱により切り取られる立体の上半分 $z \geq 0$ の体積 V を求めたい．

(1) V が次のような重積分になることを図で示しなさい．

$$v = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy\;, \qquad D = \left\{(x, y) \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq ax\right\}$$

(2) 極座標を用いると，領域 D が次のように表されることを示しなさい．
$D = \left\{(r, \theta) \,\middle|\, -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leq r \leq a\cos\theta\right\}$

(3) 極座標に変換して体積 V を求めなさい．

(千葉大 2013)　　(m20131203)

0.95 三次元空間 $O - xyz$ 座標系で，円柱 $x^2 + y^2 = 2ax$ $(a > 0)$ が 2 つの平面 $z = bx$ $(b > 0)$ と $z = 0$ とで切り取られる立体について，以下の問に答えなさい．

(1) 立体を図示しなさい．

(2) xy 平面上に極座標系 $(r,\ \theta)$ をとって，$O - r\theta z$ 円柱座標系で見た場合，z 軸を通る θ 平面と $\theta + d\theta$ 平面とで立体が切り取られる体積 dV を求めなさい．

(3) 立体の体積 V を求めなさい．

(千葉大 2014)　　(m20141203)

0.96 三次元空間の中にデカルト直交座標系 $O - XYZ$ 座標系が定義されている．

$y = 0$ 平面（$z - x$ 平面）上の点 $A = (x_0, 0, z_0)$ を始点とし，一定方向で $y = 0$ 平面から遠ざかる点 B がある．線分 AB の長さは λ で，線分 AB の方向ベクトルは，球座標系にならって，水平角（緯度）θ，方位角（経度）φ とする．ただし，$-90^\circ < \theta < 90^\circ$，$0^\circ < \varphi < 180^\circ$．点 B の座標は，$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ から，

$$B = (\lambda\cos\theta\cos\varphi + x_0\ ,\ \lambda\cos\theta\sin\varphi\ ,\ \lambda\sin\theta + z_0)$$

で与えられる．定点 E を $E = (0, -a, h)$, $a > 0$ として，点 E と点 B を結ぶ直線が $y = 0$ 平面（$z - x$ 平面）と交わる点を P とする．$\lambda \to \infty$ の時の P の座標を求めなさい．

（ヒント ： $\lambda \to \infty$ の時の点 P を透視画法では消点 (Vanishing Point) と呼んでいる）

(千葉大 2015)　　(m20151205)

0.97 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ （ただし，$a,\ b > 0$）が下に図示されている．点 A の座標は $(a, 0)$，点 B の座標は $(0, b)$ であり，点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ は楕円の弧 AB（第一象限）上の点（ただし，点 A と点 B を除く）である．次の設問に答えなさい．

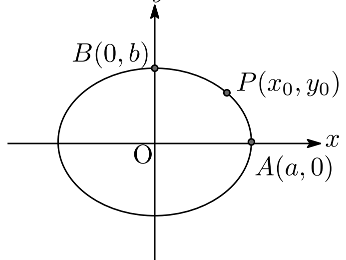
(1) 点 P で楕円に接する接線の方程式を $x,\ y,\ a,\ b,\ x_0,\ y_0$ を用いて表しなさい．

(2) $x_0 = a\cos\theta,\ y_0 = b\sin\theta$ （ただし，$0 < \theta < \pi/2$ ）とおいたとき，設問 (1) で求めた接線の方程式を $x,\ y,\ a,\ b,\ \theta$ を用いて表しなさい．

(3) 設問 (2) で求めた接線の方程式と x 軸および y 軸との交点をそれぞれ点 C および点 D とするとき，線分 CD の長さを $a,\ b,\ \theta$ を用いて表しなさい．

(4) 線分 CD の長さが最小となる θ の値を $a,\ b$ を用いて表しなさい．

(5) 線分 CD の最小値を $a,\ b$ を用いて表しなさい．



図

(千葉大 2017)　　(m20171207)

0.98 $f(x,y)=r^n$ とするとき， $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を次の手順に従って求めよ．

ただし， $r=\sqrt{x^2+y^2}$ ， n は整数とする．

変数の組 (x,y) を $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ により， (r,θ) の組に変数変換することを考える．

(1) $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=-\dfrac{\sin\theta}{r}$ および $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\cos\theta$ であることを示せ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial\theta}=0$ であることに注意し，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{\sin^2\theta}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r}$$

であることを示せ．

同様に， $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ についても求め，整理することにより，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial f}{\partial r}\Big)$$

となる．

(3) $f(x,y)=r^n$ のとき， $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を具体的に計算せよ．

(筑波大 2000） (m20001303)

0.99 $z=f(x,y)$ が全微分可能で，$x=r\cdot\cos\theta$, $y=r\cdot\sin\theta$ であるとする．このとき，次式が成立することを証明せよ．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2$$

(筑波大 2006) (m20061309)

0.100 0 でない n 個の複素数 $\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_n$ をとり，Θ をその (i,j) 成分が $(\theta_i)^{j-1}$ で与えられる n 次正方行列とする．さらに $p_k=(\theta_1)^k+(\theta_2)^k+\cdots+(\theta_n)^k \quad (k\geq 0)$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) 行列 ${}^t\Theta\Theta$ は次の行列に等しいことを示せ．ただし，${}^t\Theta$ は行列 Θ の転置行列である．

$$A=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \\ p_2 & p_3 & p_4 & \cdots & p_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n-1} & p_n & p_{n+1} & \cdots & p_{2n-2} \end{pmatrix}$$

(2) Vandermonde の行列式 $\det\Theta=(-1)^{n(n-1)/2}\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n}(\theta_i-\theta_j)$

を用いて次の等式を示せ． $\det\left({}^t\Theta\Theta\right)=\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n}(\theta_i-\theta_j)^2$

(3) $\theta_1,\cdots,\theta_n$ が n 次正方行列 A の固有値であるとき $\mathrm{tr}\,(A^k)=p_k \quad (k\geq 0)$
となることを示せ．ただし，tr は行列のトレースである．

(筑波大 2007) (m20071307)

0.101 定積分 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$ の値を，以下の 2 通りの方法で計算せよ．

(1) (a) $I=2\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$ を示せ．

(b) 積分変数を $x = \tan\dfrac{\theta}{2}$ に置換せよ $\left(\text{ヒント：}\cos\theta = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}\text{である}\right)$.

(c) 積分を実行して I を求めよ.

(2) (a) 複素数 $z = e^{i\theta}$ とおいたとき，$z + \dfrac{1}{z}$ を計算せよ.

(b) その結果を基に I を z に関する複素積分に変換せよ.

(c) 留数定理を用いて I を求めよ.

(筑波大 2008)　　(m20081311)

0.102 いろいろな関数を，多項式で表現してみよう．ある関数 $f(x)$ が,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

のように，定数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ を用いて x の多項式であらわされるとしよう．このとき,

(1) $f(0) = a_0$，$f'(0) = a_1$，$f''(0) = 2a_2$ であることを示せ.

(2) 0 以上の任意の整数 n について，$f^{(n)}(0) = n!\,a_n$ であることを示せ．ここで，$f^{(n)}(x)$ は，$f(x)$ を n 回，微分したものである（$f(x)$ の n 階導関数）．ゼロの階乗は 1 とする.

(3) $f(x) = \dfrac{f(0)}{0!} + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ とできることを示せ.

(4) 関数 $\sin x$ は，このような多項式で表現できることがわかっている．具体的に $\sin x$ をこのような多項式で表現せよ.

(5) 関数 $\cos x$ や関数 e^x も，このような多項式で表現できることがわかっている．具体的に $\cos x$ と e^x をそれぞれ，このような多項式で表現せよ.

(6) 任意の実数 θ について，$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ となることを示せ，ただし，i は虚数単位とする.

(筑波大 2008)　　(m20081319)

0.103 $\sin 3\theta = \sin\theta$ となる正の θ で最小のものを求めよ．（解答は度，ラジアンのいずれで書いてもよい.）

(筑波大 2008)　　(m20081330)

0.104 変数 x, y の関数 $z = f(x, y)$ を変数変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ により新しい変数 r, θ で表す．このとき，関数 $z = f\left(x(r,\theta),\ y(r,\theta)\right)$ について以下の設問に答えよ.

(1) 1 階偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を r, θ, $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を用いて表せ.

(2) 2 階偏導関数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ は

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\theta} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}$$

であることを示せ.

(筑波大 2009)　　(m20091308)

0.105 領域 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$ 上での重積分 $I = \displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)dxdy$ を以下の設問に従って求めよ．ただし，$a > 0$, $b > 0$ とする.

(1) $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ により変数変換を行う．積分領域 D を変数 r, θ で表せ.

(2) 前問 (1) の変数変換を行ったときのヤコビアンを求めよ.

(3) 以上の結果を用い重積分 I を求めよ.

(筑波大 2009)　　(m20091309)

0.106 3 次元ユークリット空間 $\boldsymbol{R}^3$ における平面 $W_1 : x+y+z=0$ および $W_2 : x+y-z=0$ について以下の設問に答えよ.

(1) W_1, W_2 に垂直な直線を l_1, l_2 とする. これらの直線が原点を通るとき, l_1, l_2 を表す方程式を求めよ.

(2) l_1, l_2 の両者と直交する直線 l_3 を表す方程式を求めよ.

(3) W_1 と W_2 の交線を表す方程式を求めよ.
また, この交線と前問で求めた直線 l_3 のなす角 θ $(0 \leq \theta \leq \pi/2$ とする) を求めよ.

(筑波大 2010)　　(m20101310)

0.107 複素数 z についての方程式 $\sin z = 3i$ を考える. i は虚数単位である. 以下の問いに答えよ.

(1) $\omega = e^{iz}$ とする. $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ の関係を使い, この方程式を ω に関する 2 次方程式に書き換えよ.

(2) (1) で求めた ω に関する 2 次方程式を解き, その解を極表示 $re^{i\theta}$ の形で表せ.

(3) $\sin z = 3i$ の解を $x+iy$ $(x, y$ は実数) の形で求めよ.

(筑波大 2013)　　(m20131310)

0.108 半径 a の球体の領域 $D = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq a^2\right\}$ を積分領域とする定積分 $\displaystyle\iiint_D z^2\sqrt{x^+y^2}dxdydz$ の値を以下の問いに従って求めよ.

(1) x, y, z を極座標 r, θ, φ の関数として表せ. r, θ, φ の定義を図示すること.

(2) x, y, z の r, θ, φ の関するヤコビアンを計算せよ.

(3) 極座標を用いて定積分の値を求めよ.

(筑波大 2014)　　(m20141310)

0.109 デカルトの葉形と呼ばれる平面曲線 $C : x^3-3xy+y^3=0$ について, 次の問いに答えよ.

(1) C の特異点をすべて求めよ.

(2) C 上の点 (x,y) に関する xy の極値をすべて求めよ.

(3) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおき, C の極方程式を求めよ.

(4) C は第 1 象限で, ある図形を囲むがその図形の面積 S を求めよ.
(ヒント : 極方程式を用いて, $t = \tan\theta$ とおけ)

(筑波大 2015)　　(m20151303)

0.110 2 変数関数 $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ について以下の問いに答えよ.

(1) 積分 $I = \displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy,\ \ D = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$ を求めたい. そこで,
$D_a = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq a^2,\ x \geq o,\ y \geq 0\right\}$, $a > 0$ として, $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\iint_{D_a} f(x,y)dxdy$ を極座標 r, θ を用いて計算することにより, I の値を求めよ.

(2) (7) の結果を用いて積分 $J = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2dt}$ の値を求めよ.

(筑波大 2015)　　(m20151307)

0.111 関数 $f(x)$ が，$X=a$ の近傍で C^2 級の関数であり，$f''(a)\neq 0$ を満たすとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $f(a+h)$ に，Taylor の定理を適用して展開しなさい．条件下において，できるだけ高い次数の項まで展開すること．また，剰余項の表記には θ_1 $(0<\theta_1<1)$ を用いること．

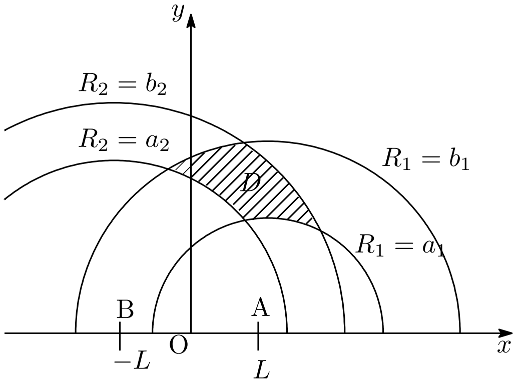
(2) $f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)\quad(0<\theta<1)$ において，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$ となることを示しなさい．

(筑波大 2016)　　(m20161306)

0.112 xy 平面の $y>0$ なる領域（上半面）の点 $P(x,y)$ に対して，点 $A(L,0)$ および点 $B(-L,0)$ からの距離の二乗

$$R_1=(x-L)^2+y^2\ ,\qquad R_2=(x+L)^2+y^2$$

を考える．ここで $L>0$ とする．また，$f(x,y)=\dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)$ とする．



(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) c をゼロでない定数とし，xy 平面の上半面において $f(x,y)=c$ で表される曲線を考える．この曲線上の任意の点 (x_0,y_0) における法線の方程式を求めよ．そして，その法線と x 軸との交点が c と L だけで決まることを示せ．

(3) a_1,a_2,b_1,b_2 を正の定数とし，$R_1=a_1$ と $R_1=b_1$ で指定される円がそれぞれ $R_2=a_2$ と $R_2=b_2$ で指定される円と交わる場合を考える（図を参照）．ここで $a_1<b_1$，$a_2<b_2$ とし，xy 平面の上半面において $a_1\leq R_1\leq b_1$，$a_2\leq R_2\leq b_2$ で指定される領域を D とするとき，D を x 軸の周りに回転して出来る回転体の体積は

$$V=2\pi\int_D y\,dxdy$$

で与えられる．x,y に関する積分を R_1，R_2 に関する積分に変換することにより V を求めよ．

(4) xy 平面を複素平面と考え，点 $P(x,y)$ を複素数 $z=x+iy$ に対応させ，
複素関数 $g(z)=\log\left(\dfrac{z-L}{z+L}\right)$ を考える．$z-L=r_1e^{i\theta_1}$，$z+L=r_2e^{i\theta_2}$ とおくことにより，$g(z)$ の実部は $f(x,y)$ に一致することを示せ．ただし，$0<r_1$，$0<r_2$，$0<\theta_1<\pi$，および $0<\theta_2<\pi$ とする．さらに $g(z)$ の虚部は三角形 PAB のどの内角に対応するか答えよ．

(筑波大 2016)　　(m20161315)

0.113 領域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ (x+y)^2+4(x-y)^2\leq 1\right\}$ における重積分

$I=\displaystyle\iint_D\frac{\left|x^2-y^2\right|}{(x+y)^2+4(x-y)^2}dxdy$ の値を求めたい．以下の問いに答えよ．

(1) $x+y=r\cos\theta$，$x-y=\dfrac{r}{2}\sin\theta$ とするとき，x，y の r，θ に関するヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算せよ．

(2) I を (1) で与えられた変数変換を用いて求めよ．

(筑波大 2017)　　(m20171301)

0.114 複素数 $z = x + iy$ の関数 $f(z) = \sinh 2z$ 　について，以下の問いに答えよ．ただし，x, y は実数とする．　なお，$\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$，$\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ と定義し，オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いてよい．

(1) $f(z) = u + iv$ とするとき，u, v を x, y を用いて表せ．　ただし，u, v は x, y の実関数とする．

(2) $f(z) = 0$ となる z を求めよ．

(3) $w = f(z)$ により z 平面上の直線 $x = \dfrac{1}{2}$ を w 平面上に移したとき，w 平面上の図形は楕円になる．w 平面上にその楕円を図示せよ．

(筑波大 2017)　　(m20171302)

0.115 ある工場の製品 A が大量生産されているとき，製品 A の不良率 θ を推定することを考える．生産現場からランダムに大きさ n の標本を選び，不良品の数を調べる. X を不良品のとき 1，良品のとき 0 となる確率変数とする．このとき, 以下の問いに答えよ．

(1) パラメータ θ が与えられたとき，X が値 x をとる確率 $f(x;\theta)$ を求めよ．

(2) x_1, $\cdots$, x_n を確率分布 $f(x;\theta)$ をもつ母集団からの無作為標本とするとき，この標本の同時確率を最大にするような θ を $\hat{\theta}$ と書く，$\hat{\theta}$ を求めよ．

(3) $\hat{\theta}$ が θ の不偏推定量になっていることを示せ.

(筑波大 2017)　　(m20171311)

0.116 図のような円柱座標系での微積分に関する以下の問いに答えよ．

(1) 直交座標 (x, y, z) を円柱座標 (r, θ, z) に変換する，x, y, $\dfrac{\partial x}{\partial r}$, $\dfrac{\partial x}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial x}{\partial z}$ を r, θ, z の関数として示せ.

(2) $$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} & \dfrac{\partial r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} & \dfrac{\partial \theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = E$$ が成り立つことに留意し，$\dfrac{\partial r}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を r, θ, z を用いて示せ．なお，E は単位行列である．

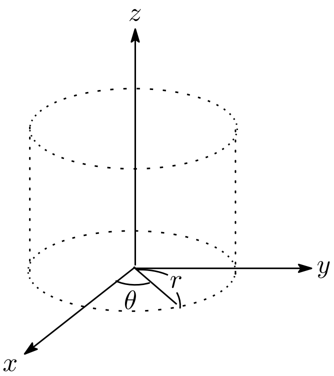
(3) (2) の結果を用いると円柱座標系のラプラシアンは $\triangle = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ で表される．　関数 $f(r,\ \theta,\ z) = rz\cos\theta$ に対して $\triangle f$ を計算せよ．

(4) 円柱座標系で r だけを変数 $(r > 0)$ とする関数 $g(r)$ が $\triangle g(r) = 0$, $g(1) = 0$, $g(e) = 2$ の条件を満たす．この $g(r)$ を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

(5) x, y, z の r, θ, z に対するヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算せよ．

(6) K を積分領域とする以下の三重積分を，円柱座標系への変数変換を用いて計算せよ．ただし，a は正の定数である．

$$\iiint_k y^2\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz, \qquad K = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq a\right\}$$



(筑波大 2018)　　(m20181301)

0.117 $E_1, \cdots, E_n$ を互いに排反で網羅的な事象とし，各事象 E_k が生起する確率を θ_k とする．今，実験を m 回独立に試みたとき，事象 E_k が観測される度数を x_k とすると，$(x_1, \cdots, x_n)$ が実現する確率 $P(x_1, \cdots, x_n)$ は多項分布により求められる．ここで，$m = x_1 + \cdots + x_n$ である．$\theta_1, \cdots, \theta_n$ が既知であるとき，サンプル $(x_1, \cdots, x_n)$ が多項分布に従う母集団からとられたという帰無仮説は次の統計量

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - m\theta_k)^2}{m\theta_k}$$

で検定できる．m が十分大きいときは，統計量 S は自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布に従う．自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布の $100\alpha\%$ 有意水準点を $X^2(n-1,\ \alpha)$ により表すとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 上記の問題において，5% 有意水準で帰無仮説が棄却される条件を式で示せ．

(2) サイコロを 120 回投げ，出た目の度数を数えたとき，下記のようになったとする．

出た目	1	2	3	4	5	6	計
度　数	15	19	23	20	21	22	120

このとき，サイコロが偏っていないという帰無仮説が 5% 有意水準で棄却されないという条件を式で示せ．

(3) ランダムに選ばれた 800 個の材料のうち 400 個に処理 1（事象 A）を，残りの 400 個に処理 2（事象 $\overline{A}$）を行った．さらに，これらの材料の強度試験を行ったところ，もろい（事象 B）ともろくない（事象 $\overline{B}$）という 2 種類に下表のように分離された;

	もろい	もろくない
処理 1	77	323
処理 2	177	223

この問題では，$n = 4$，$m = 800$ となるが，各事象が生起する確率 $P(A)$，$P(B)$ は未知である．そこで，観測された度数の割合で求められる値を $P(A)$，$P(B)$ の推定量として置き換えて計算する．このとき，統計量 S は m が十分に大きいならば，自由度 1 のカイ 2 乗分布に従う．材料の処理と強度とは独立であるという帰無仮説が 5% 有意水準で棄却されるという条件を式で示せ．

(筑波大 2018)　　(m20181313)

0.118 関数 $f(x, y)$ は，x および y について偏微分可能で $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ なる関係を満足する．

関数 $f(x, y)$ を $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ $(r > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$ で変数変換したときの $f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ は，変数 r を含まない関数となることを証明しなさい．

(筑波大 2018)　　(m20181315)

0.119 2 つの実数 $a,\ \theta$ に対して, 3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

で定める.

(1) A^2 の行列式を求めよ.

(2) A^2 の階数を求めよ.

(3) $\mathbb{R}^3$ の部分集合 V を

$$V = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; A^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \right\}$$

で定める. このとき, V の次元を求めよ.

(筑波大 2019)　　(m20191314)

0.120 複素変数 z の三角関数 $f(z) = \cos z$ に対し, $z = x + iy$, $f(z) = re^{i\theta}$ （i は虚数単位）とおくとき, 以下の空欄 (a) にあてはまる y の関数を求めよ.

$$r^2 = \cos^2 x + \boxed{\quad (\mathrm{a}) \quad}$$

(筑波大 2022)　　(m20221301)

0.121 閉区間 $[0, 2\pi]$ 上の関数

$$f(x) = \sqrt{1 + a^2 + b^2 - 2a\cos x - 2b\sin x}$$

を考える. ただし, a, b は正の定数とする.

(1) $f(x)$ の最大値 M と最小値 m を求めよ.

(2) 関係式

$$\begin{cases} a = 1 + \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2}} \\[2ex] b = 1 + \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

があるとき, 積 Mm の最大値を求めよ.

(埼玉大 2000)　　(m20001401)

0.122 実数 θ に対して　$f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} x^n$　とおく.

(1) 右辺の級数は　$|x| < 1$　で収束することを示せ.

(2) $f'(x) = \dfrac{\sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$ を示せ.　　$\left[\text{ヒント：} \sin t = \dfrac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right) \right]$

(埼玉大 2002)　　(m20021401)

0.123 (1) 次の行列 A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(2) 行列 A を $P^{-1}AP$ により対角化せよ. 解答では, まず, 行列 P を求めてから A を対角化せよ.

(埼玉大 2005)　　(m20051402)

0.124 $\boldsymbol{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ で表す．$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^2$ を長さ 1 のベクトルとして，直線

$$l = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0\}$$

に関する折り返し写像を T とする．すなわち，$T(\boldsymbol{x})$ は直線 l に関して $\boldsymbol{x}$ と線対称の位置にあるベクトルである．

(1) $T(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ を用いて表せ．

(2) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ とするとき，$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる行列 A を求めよ．

(埼玉大 2008)　　(m20081406)

0.125 (1) $\boldsymbol{R}^2$ における一次変換 f は，点 $(1, 2)$ を点 $(0, 3)$ に，点 $(2, 0)$ を点 $(4, 2)$ に移す．このとき，以下の問いに答えなさい．

(a) 一次変換 f を表す行列を求めなさい．

(b) 一次変換 f によって，$y = x - 1$ は，どのような図形に移されるか．

(2) 次の 2 つのベクトルについて考える．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(a) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は，一次従属か一次独立か調べなさい．

(b) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ とするとき，$\cos\theta$ を求めなさい．

(3) 次の行列 $\boldsymbol{A}$ について考える．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) 固有値をすべて求めなさい．

(b) 固有ベクトルをすべて求めなさい．

(埼玉大 2009)　　(m20091402)

0.126 (1) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とする．ただし，θ は $0 < \theta < 2\pi$, $\theta \neq \pi$ を満たす実数とする．

次の条件 (a),(b),(c) をすべて満たすような α_1 , α_2 , $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ の組を 1 つ求めよ．

(a) α_1 , α_2 は相異なる複素数である．

(b) $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ は複素数を成分とする 2 次元ベクトルで，どちらも零ベクトルではなく，さらに $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)$ と $\dfrac{i}{2}(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)$ はともに実数を成分とするベクトルになる．

(c) $A\boldsymbol{p}_1 = \alpha_1\boldsymbol{p}_1$ かつ $A\boldsymbol{p}_2 = \alpha_2\boldsymbol{p}_2$ を満たす．

(2) B を 2 次の実正方行列とし，B のどの固有値も実数でないと仮定する．

(i) 次の (d),(e),(f) をすべて満たすような β_1 , β_2 , $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ の組が存在することを示せ．

(d) 正の実数 r と，$0 < \theta < 2\pi$, $\theta \neq \pi$ を満たす実数 θ を用いて，$\beta_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\beta_2 = r(\cos\theta - i\sin\theta)$ と表される．

(e) $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ は複素数を成分とする 2 次元ベクトルで，どちらも零ベクトルでなく，さらに $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2)$ と $\dfrac{i}{2}(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2)$ はともに実数を成分とするベクトルになる．

(f) $B\boldsymbol{q}_1 = \beta_1 \boldsymbol{q}_1$ かつ $B\boldsymbol{q}_2 = \beta_2 \boldsymbol{q}_2$ を満たす.

(ii) 2次の実正則行列 M が存在して,

$$M^{-1}BM = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

となることを示せ.

(埼玉大 2009)　　(m20091405)

0.127 xyz 空間のベクトル $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対する線形変換について，以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{A}$ を y 軸に対して対称移動させるような $3\times\ 3$ 行列を導出せよ.

(2) $\boldsymbol{A}$ を z 軸のまわりに角 θ だけ回転させるような $3\times\ 3$ 行列を導出せよ.

(埼玉大 2016)　　(m20161404)

0.128 次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ について考える.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} x \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ とするとき $\cos\theta$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一次従属となるように x を求めよ.

(埼玉大 2019)　　(m20191405)

0.129 $\tan\dfrac{\theta}{2} = x$ のとき，　以下の問いに答えよ.

(1) $\sin\theta = \dfrac{2x}{1+x^2}$ を証明せよ.　　(2) $\cos\theta = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ を証明せよ.

(群馬大 2007)　　(m20071504)

0.130 以下の式を簡単にせよ.

(1) $(\sin 25^\circ - 3\sin 65^\circ)^2 + (3\cos 115^\circ + \cos 155^\circ)^2$

(2) $\tan(45^\circ + \theta)\tan(45^\circ - \theta) + \tan(135^\circ + \theta)\tan(135^\circ - \theta)$

(3) $(\sin x + \cos x)^2 + \dfrac{(1-\tan x)^2}{1+\tan^2 x} + \tan^2 x + \cos^2 x\,(1 - \tan^4 x)$

(群馬大 2013)　　(m20131501)

0.131 2つの曲線

$$C_1 : z = e^{i\theta} \qquad (\,0 \leqq \theta \leqq \pi\,)$$

$$C_2 : z = \frac{3}{2}e^{i\theta} - \frac{1}{2} \qquad (\,0 \leqq \theta \leqq \pi\,)$$

が与えられているとする．次の各問に答えよ.

(1) C_1, C_2 を図示せよ.

(2) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z}dz$ を求めよ.

(3) コーシーの積分定理を使って，$\displaystyle\int_{C_2} \frac{1}{z}dz$ を求めよ.

ただし，(2) と (3) における積分路の向きは，$\theta = 0$ のときの点から $\theta = \pi$ のときの点にむかう向きを正の向きとする．

(茨城大 2000） (m20001704)

0.132 $t > 0$ とする．xy 平面内の領域 $D(t) : t^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4t^2$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ 上の二重積分 $F(t) = \displaystyle\iint_{D(t)} \frac{xy}{1+x^2+y^2} dxdy$ について，次の問に答えよ．

(1) 極座標変換 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ のヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算し，$F(t)$ を $r\theta$ 平面内の領域上の二重積分に変換せよ．

(2) $F'(t)$ を計算せよ．

(茨城大 2006) (m20061702)

0.133 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(e^{i\theta} - 1\right) d\theta$　　(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|e^{i\theta} - 1\right| d\theta$

(茨城大 2006) (m20061704)

0.134 (x, y) を平面上の直交座標，(r, θ) を極座標とする．以下の問に答えよ．

$\rho > 0$ とする．関数 $f(x, y) = r\sin 2\theta$ の正方形 $A = \{(x, y) \mid 0 < x < \rho,\ 0 < y < \rho\}$ 上の積分

$$I(\rho) = \iint_A f(x, y) dxdy$$

と扇形 $B = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid 0 < r < \rho,\ 0 < \theta < \pi/2\}$ 上の積分

$$J(\rho) = \iint_B f(x, y) dxdy$$

の大小関係を積分計算によらずに論ぜよ．次に積分計算を行って $I(\rho)$ と $J(\rho)$ を ρ の式で表し，大小関係を比較せよ．

(茨城大 2007) (m20071705)

0.135 (x, y) を平面上の直交座標，(r, θ) を極座標とする．以下の各問に答えよ．

関数 $f(x, y)$ の定義域内の点 $\boldsymbol{p}$ およびベクトル $\boldsymbol{u} = (a, b)$ に対し，極限 $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{p})}{t}$ を点 $\boldsymbol{p}$ での $\boldsymbol{u}$ 方向の微分係数と呼び，$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{p})$ で表す．

(1) 関数 $f(x, y) = r\sin 3\theta$ の原点 $\boldsymbol{o}$ での $\boldsymbol{u} = (\cos\phi,\ \sin\phi)$ 方向の微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{o})$ を求めよ．また，偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{o})$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{o})$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x, y)$ が点 $\boldsymbol{p}$ の近傍で偏微分可能，かつ，偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ が点 $\boldsymbol{p}$ で連続ならば等式

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{p}) = a\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p}) + b\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p})$$

が成立することを示せ．次に (1) の関数 f は原点 $\boldsymbol{o}$ でこの等式を満たさない理由を説明せよ．

(茨城大 2007) (m20071706)

0.136 $f(t)$ を $[0, \infty)$ 上で連続かつ広義積分可能な関数とする． また a, b は $a, b > 0$ を満たす実数とし，$g(x, y) = f(a^2x^2 + b^2y^2)$ とおく．以下の各問いに答えよ．

(1) $f(t)$ が $[0, \infty)$ 上で広義積分可能であることの定義を記述せよ．

(2) 変数変換

$$\begin{cases} x = \dfrac{r}{a}\cos\theta \\ y = \dfrac{r}{b}\sin\theta \end{cases}$$

によって，$r\theta$ 平面内の集合 $[0,\ 1] \times \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ は xy 平面内のどのような集合に写るか図示せよ．

(3) 等式

$$\iint_{[0,\infty)\ \times\ [0.\infty)} g(x,y)dxdy = \frac{\pi}{4ab}\int_0^{\infty} f(t)dt$$

が成り立つことを示せ．

(4)

$$I(a,b) = \iint_{[0,\infty)\ \times\ [0.\infty)} e^{-a^2(x^2+1)-b^2(y^2+1)}dxdy$$

とする．(3) の結果を用いて，条件 $a^2+b^2=1$ の下での $I(a,b)$ の最小値を求めよ．

(茨城大 2009)　　(m20091706)

0.137 次の連立不等式の表す領域を D とする．

$$y \geqq\ x\,,\ y \geqq\ -x\,,\ 4 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 9$$

以下の各問に答えよ．

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) 極座標変換 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ に対して，$J = \dfrac{\partial x}{\partial r}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} - \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\dfrac{\partial y}{\partial r}$ とおく．J を計算せよ．

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$ を計算せよ．

(茨城大 2012)　　(m20121704)

0.138 i を虚数単位とし，$z = \dfrac{\sqrt{3}(i-1)-(1+i)}{1+i}$ とおくとき，以下の各問に答えよ．

(1) $z = a+ib$ を満たす実数 a, b を求め，絶対値 $|z|$ を答えよ．

(2) $z = re^{i\theta}$ となる r と θ を求めよ．ただし，$r>0$ かつ $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(3) z^n が実数となるような最小の自然数 n を求めよ．

(茨城大 2014)　　(m20141702)

0.139 次の関数を考える．

$$f(x,y) = x^2+y^2-(x^2+y^2)^2$$

$0 \leqq t$ に対して $D(t) = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqq 1,\ f(x,y) \geqq t\right\}$ とするとき，次の小問 (1), (2) および (3) に答えよ．

(1) 極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta (r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ を用いて，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_{D(0)} f(x,y)dxdy$$

(2) 平面上の集合 $D(t)$ が表す領域の面積を $F(t)$ とするとき，$F(t)$ を求めよ．
ただし，平面上の集合 $D(t)$ が表す領域が空集合である場合や正の面積を持たない場合の t では $F(t) = 0$ とする．

(3) 次の等式を示せ.

$$\int_0^\infty F(t)dt = \iint_{D(0)} f(x,y)dxdy$$

(茨城大 2018)　　(m20181703)

0.140 i を虚数単位とするとき，以下の各問に答えよ.

(1) $x = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，複素数 $1 - e^{i2x}$ を $a + ib$ $(a, b$ は実数$)$ の形で答え，その絶対値を求めよ.

(2) 前問 (1) で得られた複素数 $a + ib$ を $re^{i\theta}$ の形で表せ．ただし，$r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi$ とする.

(3) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，$1 - e^{i2x}$ の絶対値が $\sqrt{2}$ になるときの x を求めよ.

(茨城大 2020)　　(m20201707)

0.141 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} -\sin\dfrac{\theta}{2} \\ \cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ とを考える.

ただし，θ は任意の実数とする.

(1) A の固有値をすべて求めなさい.

(2) $\boldsymbol{V}$ は A の一つの固有ベクトルであることを示し，固有ベクトル $\boldsymbol{V}$ に対する A の固有値を求めなさい.

(山梨大 2009)　　(m20091802)

0.142 (1) 関数 $f(x)$ が $x = 0$ を含む区間で n 回微分可能であるとき，下式を満たす点 $\theta(0 < \theta < 1)$ が存在する．ただし，$f^{(n)}(x)$ は第 n 次導関数とする.

$$f(x) = f(0) + xf^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)$$

上式の最終項を除いた n 項までの和の部分を関数 $f(x)$ の近似式と呼ぶ.

$f(x) = (1+x)^k$　(k は任意の実数) を 2 次式で近似し，$\sqrt{1.1}$ の近似値を求めなさい.

(2) n 回微分可能な関数 $f(x),\ g(x)$ の積 $f(x) \cdot g(x)$ の第 n 次導関数 $\Big(f(x) \cdot g(x)\Big)^{(n)}$ が次の式で与えられることを数学的帰納法によって証明しなさい.

$$\Big(f(x) \cdot g(x)\Big)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i f^{(n-i)}(x) \cdot g^{(i)}(x)$$

(山梨大 2016)　　(m20161804)

0.143 θ と ϕ を実数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix}$ を考える．以下の小問に答えよ.

(1) 行列の積 AB を計算し，その結果を行列 $A,\ B$ と同じ形に変形せよ.

(2) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．なお，固有ベクトルは規格化しなくてもよい.

(3) 行列 A により xy 平面上の 4 点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が変換される点を求め，θ を正として図示せよ．また変換後の点が囲む面積を求めよ.

(山梨大 2018)　　(m20181802)

0.144 $xy-$ 平面上の連続関数 $f(x,y)$ を考える. f の 1 階偏導関数 $f_x(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ および $f_y(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ はともに $xy-$ 平面上で連続であるとする．このとき，ある $\theta_0 \in (0, 2\pi)$ が存在し，
$-f_x(\cos\theta_0, \sin\theta_0)\sin\theta_0 + f_y(\cos\theta_0, \sin\theta_0)\cos\theta_0 = 0$ 　　となることを示せ.

(信州大 2008)　　(m20081903)

0.145 (1) $t = \tan\theta$ のとき，$\sin 2\theta$ を t を用いて表せ.

(2) $t = \tan\theta$ と置換して，不定積分 $\displaystyle\int \frac{d\theta}{1+\sin 2\theta}$ を求めよ.

(信州大 2015)　　(m20151902)

0.146 平面内の領域 $D = \{(x,y) \mid (x,y) \neq (0,0)\}$ で定義される 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して，
$\triangle f(x,y) = f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)$ と定める．また，$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ \ (r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とし，
$z = f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，領域 D で $f(x,y)$ の 2 階までのすべての偏導関数が存在して，それらはすべて連続である.

(1) $z_r,\ z_\theta$ を $r,\ \theta,\ f_x,\ f_y$ を用いて表せ.

(2) $z_{rr} + \dfrac{1}{r}z_r + \dfrac{1}{r^2}z_{\theta\theta} = \triangle f$ を示せ.

(3) $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}\log(x^2+y^2)$ のとき，$\triangle f(x,y)$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする;

(信州大 2016)　　(m20161901)

0.147 (1) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$$

(2) 次の極限が存在しないことを示せ.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

(3) 2 変数関数 $z = f(x,y)$ と $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ の合成関数 $f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ に対し，関係式

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}$$

が成り立つことを示せ.

(信州大 2020)　　(m20201905)

0.148 楕円 C : $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ について，次の問いに答えよ.

(1) 点 $F(\sqrt{3}, 0)$ と C 上の点 $P(x,y)$ を結ぶ線分 FP の長さを r，線分 FP と x 軸の正の方向とのなす角を θ とするとき

$$r = \frac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}$$

が成り立つことを示せ.

(2) 点 F を通る C の任意の弦 PQ に対して，線分 FP, FQ の長さをそれぞれ p, q とするとき，$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ の値は一定であることを示せ.

(3) 点 F において互いに直交する C の二つの弦の長さの逆数の和は一定であることを示せ.

ここで楕円 C の弦とは C 上の異なる 2 点を結ぶ線分のことである.

(新潟大 1998)　　(m19982001)

0.149 $A=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$， $P=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (θ は実数) とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 行列 P の逆行列 P^{-1} 及び，行列 A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように θ $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$ の値を定めよ．

(3) 曲線 $x^2+2\sqrt{3}xy-y^2=2$ の概形を描け．

(新潟大 2000)　(m20002004)

0.150 行列 $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (θは実数) について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるように $\theta\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の値を求めよ.

(3) 曲線 $5x^2+2xy+5y^2-12=0$ の概形を描け.

(新潟大 2004)　(m20042005)

0.151 次の複素数を極形式 $(re^{i\theta})$ であらわし，複素数平面上に図示せよ.

(1) $2i$

(2) $-1+\sqrt{3}i$

(3) $2+2i$

(新潟大 2009)　(m20092001)

0.152 極座標表示の曲線 $C\ :\ r=1+\cos\theta\quad(-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$ について，次の各問に答えよ.

(1) xy 座標で表したとき，x と y の最大値，最小値を求めよ．また，C の概形を描け.

(2) C で囲まれる図形の面積を求めよ.

(3) C の長さを求めよ.

(新潟大 2009)　(m20092009)

0.153 $\begin{cases} x=3\cos\theta \\ y=5\sin\theta \end{cases}$ で表される点 $P(x,y)$ はどのような曲線を描くか求めなさい.

また，概略形も示すこと．（フリーハンドでよい）

(新潟大 2011)　(m20112011)

0.154 座標平面において，曲線 $C: x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ で囲まれた図形を F とする．このとき，次の各問いに答えよ.

(1) F の概形をかけ.

(2) 媒介変数表示 $x=\cos^3\theta$，$y=\sin^3\theta\quad(0 \leqq \theta < 2\pi)$ を用いて，F の面積を求めよ.

(3) 媒介変数表示 $x=\cos^3\theta$，$y=\sin^3\theta\quad(0 \leqq \theta < 2\pi)$ を用いて，F の周りの長さを求めよ.

(新潟大 2012)　(m20122016)

0.155 3 次元空間上のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ を x 軸のまわりで角度 θ だけ回転するとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{V}}'$ へ変換される．この関係を 3 × 3 行列 $U(\theta)$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{V}}'=U(\theta)\overrightarrow{\mathrm{V}}$$

と書く．ここで，$U(\theta)$ は

$$
U(\theta)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}
$$

で与えられる．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $U(\theta)$ の行列式 $\det U(\theta)$ を求めよ．

(2) 行列 $U(\theta)$ の逆行列 $U(\theta)^{-1}$ を求めよ．

(3) 行列 K を

$$
K=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

としたとき，K^2，K^3，および K^4 を求めよ．さらに，正の整数 m に対して，K^{2m} と K^{2m-1} を求めよ．

(4) 一般に，正方行列 X の指数関数は無限級数

$$
e^X=E+X+\frac{1}{2!}X^2+\cdots+\frac{1}{n!}X^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}X^n
$$

で定義される．ここで，E は単位行列を表し，$X^0=E$ である．問 (3) の結果を利用して，

$$
e^{\theta K}=U(\theta)
$$

となることを示せ．

(新潟大 2014)　　(m20142017)

0.156 次の一次変換 f，g について答えよ．

(1) 原点を中心として左回りに角度 θ だけ回転させる変換 f を表す行列を求めよ．

(2) 原点を中心とする相似比 k の相似変換 g を表す行列を求めよ．

(3) f と g の合成変換 $f\circ g$ を表す行列を求めよ．

(新潟大 2015)　　(m20152011)

0.157 行列 $\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値を求め，各固有値に対応する 2 つの固有ベクトルの交角 θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ を示せ

(新潟大 2016)　　(m20162007)

0.158 三角関数に関する以下の問いに答えよ．

(1) e^x, $\cos x$, $\sin x$ を $x=0$ のまわりでテイラー展開せよ．

(2) オイラーの関係式，

$$
e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta
$$

が成り立つことを，問 (1) のテイラー展開の結果を用いて示せ．

(3) 任意の正の整数 n について，次の恒等式が成り立つことを示せ．

$$
\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^n
$$

(4) 問 (3) の恒等式を用いて，以下の式を証明せよ．

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta$$
$$\sin(3\theta) = 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta$$

(新潟大 2016)　　(m20162010)

0.159 座標平面上の 3 点 $A(-2,\ 0)$, $B(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$, $C(2\cos 2\theta,\ 2\sin 2\theta)$ の線分 AC の長さ $\overline{AC}$ と線分 BC の長さ $\overline{BC}$ の和 $\overline{AC}+\overline{BC}$ の最大値を $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ の範囲で求めよ．

(新潟大 2017)　　(m20172015)

0.160 2 つの行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ．

(1) A の行列式 $\det A$ と逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 2 つの行列の積 AB を求めよ．

(3) 4 つの行列 A, B, A^{-1} および AB は，いずれも二次元 XY 座標平面上における任意の点 $P(x,y)$ をそれぞれ異なる $P'(x',y')$ に移動させる．A, B, A^{-1} および AB が，それぞれどのように点 P を点 P' に移動させるか，幾何学的意味を述べよ．

(新潟大 2020)　　(m20202007)

0.161 虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ を含む指数関数 $e^{i\theta}$ を三角関数で表す公式はオイラーの公式と呼ばれる．物理の問題を扱うには，よく似た行列の関係式を用いると便利なことが多い．このことに関連した以下の問いに答えよ．

(1) オイラーの公式を書け．つまり，実数 θ に対して $e^{i\theta}$ を三角関数を用いて表せ．

(2) 二次正方行列 I および J を

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する．J^2 を計算し，J^2 と I の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3) 一般に二次正方行列 X に対し，そのゼロ乗 X^0 および指数関数 e^X は次式で定義される：

$$X^0 = I, \qquad e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}X^n = I + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \cdots$$

(2) の関係式に着目すると，行列 $e^{\theta J}$ は I に比例する部分と J に比例する部分の和

$$e^{\theta J} = f(\theta)I + g(\theta)J$$

で表すことができる．このとき，関数 $f(\theta)$ および $g(\theta)$ を求めよ．

　なお，必要ならば，三角関数のベキ展開（テイラー・マクローリン展開）が次式で与えられることを用いてもよい．

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n} \qquad = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \cdots$$
$$\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1} = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots$$

(4) (3) で求めた行列 $e^{\theta J}$ に対して，その行列式の値を答えよ．

次に，これまでの結果の応用として，調和振動子の運動を表す微分方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

の解 $x(t)$ を求めたい．ここで ω は正の定数である．以下の問いに答えよ．

(5) 変数 $p(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ および $q(t) = \omega x(t)$ を用いると，この微分方程式は,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$$

の形に表すことができる．ここで K は t に依らない二次正方行列である．行列 K を答えよ．

(6) (5) の微分方程式の解は次式で与えられる：

$$\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = e^{Kt} \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$$

以上のことから，初期条件 $p(0) = p_0$，$q(0) = q_0$ に対応する解 $x(t)$ を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222006)

0.162 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1，λ_2 を求めよ．

(2) $\boldsymbol{A}$ を対角化する行列 $\boldsymbol{P}$ のうち，$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となるものを求めよ．
ただし，$0 \leq \theta \leq \pi/2$ とする．また，θ を求めよ．さらに，$\boldsymbol{P}$ を用いて $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ．

(3) 前問 (2) の条件において，$\mathbf{P}^6$ を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222009)

0.163 次の定積分 I_n　($n = 0, 1, 2, 3, \cdots$) について，以下の問に答えよ．

$$I_n = \int_0^{\pi} \cos^{2n}\theta \, d\theta$$

(1) I_0 および I_1 を求めよ．

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，I_n を I_{n-1} で表せ（部分積分法を利用せよ）．

(3) I_n を n の式で表せ．

(長岡技科大 1992)　　(m19922101)

0.164 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の $z \leqq 0$ の部分でできる容器について以下の問いに答えよ．

(1) 水深 $h\,(0 < h \leqq 1)$ まで水を入れたとき，水の量を求めよ．

(2) 水をいっぱいに満たしてから静かに角度 $\theta\,(0 < \theta \leqq 90^\circ)$ 傾けるとき，こぼれる水の量を求めよ．

(長岡技科大 2001)　　(m20012104)

0.165 (1) 1 周期が T である関数 $f(t)$ は, 以下のようにフーリエ級数展開される．
$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ として C_n および θ_n を, a_n および b_n で表せ. 但し, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ とする．

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t\Big) \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\big(n\omega_0 t - \theta_n\big) \end{aligned}$$

(2) 上式におけるフーリエ係数 a_n および b_n は, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ として,

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt \quad , \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により計算できる. 1 周期において, 次式で定義される関数 $f(t)$ をフーリエ級数展開せよ.

$$f(t) = \begin{cases} -1 & , \quad -\dfrac{T}{2} \leq t < 0 \\ 1 & , \quad 0 \leq t \leq \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

(3) $\sin^2 t$ および $\sin^3 t$ を, それぞれフーリエ級数展開せよ.

(4) $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$ となることを証明せよ.

(長岡技科大 2005)　　(m20052106)

0.166 実数 θ に対して $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とおく. 以下の問いに答えなさい.

(1) $R(\theta)K = KR(-\theta)$ を示しなさい.

(2) 原点を通る傾き $\tan\theta$ の直線に関する対称移動を表す行列を $A(\theta)$ とするとき, $A(\theta) = R(2\theta)K$ を示しなさい.

(3) $A\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)A(\theta) = R\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ となる $A(\theta)$ を求めなさい.

(長岡技研大 2007)　　(m20072102)

0.167 (1) 極座標変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ に対して，ヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ．

(2) 重積分

$$\iint_{x^2+y^2 \leqq 1} \sqrt{x^2+y^2}\,\exp\Big(-\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^3\Big)dxdy$$

を求めよ．ただし， $\exp(t) = e^t$ である．

(金沢大 1999)　　(m19992204)

0.168 (1) マクローリンの展開

$$\sqrt{1-x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

の係数 a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ.

(2) $\sqrt{1-x} \fallingdotseq a_0 + a_1 x$ を用いて，積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - c\sin^2\theta}\,d\theta \quad (0 < c < 1)$$

の値がおよそ $\dfrac{\pi}{2}\left(1 - \dfrac{c}{4}\right)$ であることを示せ.

(金沢大 2000)　　(m20002201)

0.169 変数変換 $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ (a, b は正定数) に対して，次の問いに答えよ.

(1) $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，(x, y) の動く領域 D を図示せよ.

(2) ヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$ を求めよ.

(金沢大 2000) (m20002202)

0.170 重積分 $I=\displaystyle\iint_D \frac{x}{y\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dxdy$ について次の問に答えよ．

ここに $D=\left\{(x,y)\ :\ y\geq x\geq 0\ ,\ \dfrac{1}{2}\leq x^2+y^2\leq 1\right\}$ とする．

(1) D の形を図示せよ．

(2) 極座標変換 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ を用いて重積分 I の値を求めよ．

(金沢大 2001) (m20012202)

0.171 a,b は正の実数とする．

(1) $\dfrac{x}{a}=r\cos\theta\,,\ \dfrac{y}{b}=r\sin\theta\quad(0<r\,,\ 0<\theta<2\pi)$ とおくとき, ヤコビアン

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}\quad \text{を求めよ．}$$

(2) 積分 $\displaystyle\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy$ を計算せよ. ただし, $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ y\geqq\ 0\,,\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq\ 1\right\}$ とする.

(金沢大 2005) (m20052207)

0.172 次の問に答えよ.

(1) 変数変換 $x=ar\cos\theta\,,\ y=br\sin\theta$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ． ただし，$a,\ b$ は正の定数とする.

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D\frac{1}{(1+2x^2+y^2)^2}\,dxdy\,,\quad D=\{(x,y)\ :\ x\geqq\ 0\,,\ y\geqq\ 0\}$ を求めよ.

(金沢大 2009) (m20092203)

0.173 (1) 変換 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ $(r\geqq\ 0)$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ.

(2) 重積分

$$\iint_{x^2+y^2\leqq\ 2}\log(1+x^2+y^2)\,dxdy$$

を計算せよ.

(金沢大 2012) (m20122203)

0.174 実数 ℓ に対して，連続関数 $f_\ell\ :\ (-\pi,\ \pi)\to\boldsymbol{R}$ を

$$f_\ell(\theta)=\begin{cases}\dfrac{\sin\ell\theta}{\sin\theta} & (\theta\neq 0),\\ a & (\theta=0)\end{cases}$$

と定める．次の問いに答えよ.

(1) a を求めよ.

(2) f_ℓ は $\theta=0$ で微分可能であることを示せ.

(3) 積分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f_\ell(\theta)d\theta$ の値を $\ell=2,3$ の場合に求めよ.

(金沢大 2014) (m20142208)

0.175 (1) $(\sin^{-1}x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$ を示せ．ここで，$\sin^{-1}x$ は逆正弦関数を表す．

(2) 座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi)$$

に対するやコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ．

(3) 重積分

$$\iint_D \frac{y}{(x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy$$

を求めよ．ただし，$D = \left\{(x,y) \;\middle|\; \dfrac{1}{4} \leqq\ x^2+y^2 \leqq \dfrac{3}{4},\ 0 \leqq\ y \leqq\ x\right\}$ とする．

(金沢大 2015) (m20152203)

0.176 有界閉領域 D, E を

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 \;\middle|\; \frac{1}{2} \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ x\right\} \ ,$$

$$E = \left\{(r,\theta) \in R^2 \;\middle|\; -\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4},\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq\ r \leqq\ \cos\theta\right\}$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) D を図示せよ．

(2) 写像 $T : R^2 \to R^2$ を

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

とする．$(r,\theta) \in E$ のとき $T(r,\theta) \in D$ であることを示せ．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$ の値を求めよ．

(金沢大 2015) (m20152208)

0.177 行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値と規格化された固有ベクトルを求めなさい．

(2) ある行列 P を用いて，行列 $A' = P^{-1}AP$ を対角行列にすることができる．P と A' を求めなさい．

(金沢大 2015) (m20152211)

0.178 a, b, c は正の定数とし，x, y は次で定義される R^2 の領域 D の点とする．

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 \middle| 0 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq c^2\right\}$$

(1) 変数 r, θ を用いて $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$ と変数変換を行う．この時，
関数行列式（ヤコビアン）$\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|$ を求めよ．

(2) (1) の変数変換を用いて重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy$ を求めよ．

(金沢大 2016) (m20162223)

0.179 $f(x,y)$ を C^2 級の実数値関数とする．極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を行ったとき $f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ が r だけの関数（$g(r)$ とする）になるならば，以下が成り立つことを示せ．

(1) $f_x y = f_y x$.

(2) $f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \dfrac{1}{r} g_r$.

(金沢大 2017) (m20172204)

0.180 被積分関数に自然対数を含んでいる定積分

$$I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$$

の値が $0.18 < I < 0.28$ となることを確かめる．次の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，不等式

$$\frac{\log(1+x)}{1+x^2} \geqq \left(x - \frac{1}{2}x^2 \right)(1-x^2)$$

が成り立つことを示し，これを用いて $I \geqq \dfrac{11}{60}$ であることを導け．

(2) 2 つの等式

$$1 + \tan\theta = \frac{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \theta)}{\cos\theta} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

および

$$\int_0^{\pi/4} \log\left\{ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) \right\} d\theta = \int_0^{\pi/4} \log(\cos\theta) d\theta$$

がそれぞれ成り立つことを示し，これらを用いて定積分 I を計算せよ．

(3) $\pi < 3.2$ および $\log 2 < 0.7$ であることと問題 (1)(2) の結果を合わせて，$0.18 < I < 0.28$ であることを確かめよ．

(金沢大 2019) (m20192202)

0.181 (1) $A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ を座標平面上の 3 点とする．線分 AB, BC, CA 上にそれぞれ点 P, Q, R を，三角形 PQR における $\angle Q$ が直角になるようにとる．ただし，P, Q, R は A, B, C のいずれとも異なるとする．$Q(t, 0)$, $\angle CQR = \theta$ とおくとき，直角三角形 PQR の面積 S を t と θ を用いて表せ．

(2) (1) で求めた S を，集合

$$D = \left\{ (t,\ \theta) \in \boldsymbol{R}^2 \ \middle|\ -1 < t < 1,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}$$

を定義域とする関数と考える．このとき，$\dfrac{\partial S}{\partial t} = \dfrac{\partial S}{\partial \theta} = 0$ を満たす $(t,\ \theta)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた $(t,\ \theta)$ において，関数 S が極値をとるかどうか調べよ．

(金沢大 2019) (m20192207)

0.182 C^1 級関数 $z = f(x, y)$ に対して，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とするとき

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 \qquad (r \neq 0)$$

が成り立つことを示せ．

(金沢大 2022) (m20222208)

0.183 $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ ($0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, a, b は正の定数）によって描かれる $x - y$ 平面上の図形 S について，以下の問いに答えよ．

(1) θ を消去して x, y のみたす関係式を導け．

(2) S の概形を描け．

(3) S 上の点 P $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ における S の接線 l の方程式を求めよ．

(4) l が x 軸，y 軸の両方に交わるとき，その交点をそれぞれ A, B とする．線分 AB の長さを求めよ．

(5) 線分 AB の長さの最小値を求めよ．

(富山大 2001)　　(m20012302)

0.184 $x = a\cos\theta$, $y = b(1+\sin\theta)$ $(\pi \leq \theta \leq 2\pi$, a, b は正の定数) によって描かれる $x-y$ 平面上の曲線 S について，次の問いに答えよ．

(1) θ を消去して，x, y の関係式を導け．

(2) S のおおよその形を描け．

(3) y 軸（鉛直方向）を回転軸としてできる曲線 S の回転面を内壁とする容器 A に水を注ぐ，水位が $b/2$ のときの水量 V を求めよ．ここで，水位とは x 軸からの水面の高さをいう．

(4) 関数 $y = cx^2$ $(c > 0)$ の y 軸を回転軸としてできる回転体 B を，容器 A 内に入れたとき，(3) で注がれた水があふれないための c の条件を求めよ．

(富山大 2003)　　(m20032303)

0.185 3 次元空間 $O-xyz$ に 3 点 $A(1,2,3)$, $B(2,2,1)$, $C(1,3,1)$ がある. ベクトル $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{CB}$ として, 以下の問いに答えよ.

(1) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のそれぞれの長さを求めよ.

(2) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角を θ とするとき, $\cos\theta$ を求めよ.

(3) 三角形 ABC の面積 S を求めよ.

(4) 点 B は原点 O から平面 ABC への垂線の足であることを示せ.

(5) 三角錐 $OABC$ の体積 V を求めよ.

（富山大 2004）　　(m20042306)

0.186 以下の問に答えよ.

(1) 変数変換

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \qquad (r \geq 0)$$

により, $(x, y) = (2, 2)$ に対応付けられる (r, θ) 平面の点の座標を求めよ. また, この変数変換のヤコビ行列式を求めよ.

(2) xy 平面の領域 D を

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

と定める. 定積分

$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dxdy$$

を求めよ.

(富山大 2005)　　(m20052305)

0.187 (1) $f(\theta(t)) = \sqrt{1+\sin^2\theta(t)} + 3\cos\theta(t) + 2$ において，$\dfrac{df}{dt}$ を求めよ.

(2) $f(\theta_1(t), \theta_2(t)) = 5 + \cos\theta_1(t) + 2\sin(\theta_1(t) + \theta_2(t))$ において，$\dfrac{df}{dt}$ を求めよ.

(富山大 2007)　　(m20072305)

0.188 θ を任意の実数, I を単位行列, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ として, 行列 A が $A = (\cos\theta)I + (i\sin\theta)\sigma_1$ で与えられるとき, 以下の問いに答えよ. ここで i は虚数単位とする.

(1) ${\sigma_1}^2$ を計算せよ.

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) σ_2 の固有値 λ と固有ベクトル ν を求めよ.

(4) $A\sigma_2 A^{-1}$ を計算して σ_2 を対角化するように θ を決定せよ. ただし, θ の範囲を $0 < \theta < \pi/2$ とする. また, このときの θ の値を用いた行列 A により, σ_2 の固有ベクトル ν を変換したベクトル $u = A\nu$ を求めよ.

(富山大 2008) (m20082303)

0.189 半径 a の球の体積 V を求める. 以下の問いに答えよ.

(1) 直交座標 (x, y, z) を用いて, V を積分表示せよ.

(2) (x, y, z) の極座標 (r, θ, φ) への変換

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$$

を用いて, $\dfrac{\partial x}{\partial r}$, $\dfrac{\partial x}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}$, $\dfrac{\partial y}{\partial r}$, $\dfrac{\partial y}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}$, $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}$ を求めよ.

(3) $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(4) (1) および (3) の結果を用いて, V を (r, θ, φ) で積分表示せよ.

(5) (4) の積分を実行し, V を求めよ.

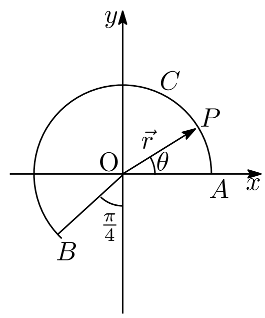
(富山大 2009) (m20092304)

0.190 図のように円 $x^2 + y^2 = 25$, $z = 0$ の x 軸上の点 A から B までの円弧を C, C 上の点 P の位置ベクトルを $\vec{r}$, $\vec{r}$ と x 軸とのなす角を θ とする.

(1) $\displaystyle\int_C \vec{r}\cdot d\vec{r}$ の値を求めよ.

(2) $\left|\displaystyle\int_C d\vec{r}\right|$ の値を求めよ.

(3) $\left|\displaystyle\int_C \vec{r}\times d\vec{r}\right|$ の値を求めよ.



(富山大 2010) (m20102303)

0.191 (1) 直交座標の二重積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ を変数変換

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

によって, 極座標 $(r,\ \theta)$ の二重積分に変換せよ.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ の値を求めよ.

(富山大 2010) (m20102305)

0.192 θ の範囲が $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，次の式で定義される xy 平面上の曲線に囲まれる領域の面積を求めよ．

$$\begin{cases} x = 2\sin\theta \\ y = 2\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

(富山大 2020)　　(m20202303)

0.193 θ が 0 付近では $\tan\theta \fallingdotseq \theta$ と近似されることがある．この近似が成り立つ理由についてテイラー展開（マクローリン展開）を用いて説明せよ．

(富山大 2021)　　(m20212303)

0.194 直線が $y = x - 1$ ある．

(1) この直線を原点のまわりに角 θ $(0° \leqq \theta \leqq 180°)$ だけ回転して得られる直線を求めなさい．

(2) この回転した直線が曲線 $x^2 - y^2 = 1$ と交わらないための角 θ の範囲を求めなさい．

(福井大 2000)　　(m20002414)

0.195 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan\theta)d\theta$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cos x^2 dx$

(福井大 2001)　　(m20012406)

0.196 ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の長さおよび $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めなさい．

(福井大 2001)　　(m20012413)

0.197 (1) 関数 x のマクローリン展開は次式で表される．

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

これをもとに, 次の関係式を示せ．（注意： $f^{(n+1)}(\theta x)$ は 'θx' の $(n+1)$ 階導関数である）

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}\ ,$$

$$R_{n+1} = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^{n+1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

(2) (1) の関係式で $n = 1$ とした関数 x のマクローリン展開は次式で表される．

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+\theta x)^2} \qquad (0 < \theta < 1)$$

これを用いて, $\log 1.01$ の近似値として 0.01 を採用したときの誤差は 0.00005 より小であることを示せ．

(福井大 2005)　　(m20052402)

0.198 2 行 2 列の行列

$$\boldsymbol{A}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

に対して, 次の等式が成り立つことを示せ．

(1) $\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{A}(y) = \boldsymbol{A}(x+y)$

(2) $\boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{B}(y) = \boldsymbol{A}(x-y)$

(3) $\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}(y) = \boldsymbol{B}(x+y)$

(4) $\big(\boldsymbol{A}(x)\big)^n = \boldsymbol{A}(nx)$

(福井大 2005)　　(m20052411)

0.199 $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \cot\dfrac{\theta}{2}$ が成り立つ．
この式の両辺を微分し，微分した左辺と右辺が等しくなることを示せ．
ただし，必要に応じて三角関数の 2 倍角の公式“ $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ ”を使え．

(福井大 2006)　　(m20062401)

0.200 以下の問に答えよ．なお，i は虚数単位である．

(1) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ を極形式（$\cos\theta + i\sin\theta$ の形式）で表せ．

(2) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ の 3 乗根を複素平面上に図示せよ．

(福井大 2006)　　(m20062411)

0.201 $y = a\sin x + b\cos x$ について次の問いに答えよ．

(1) 上の関数が，$y = A\sin(x+\theta)$ の形に変換できることを示しなさい．

(2) $a = 1,\ b = \sqrt{3}$ の時，A および θ の値を求めよ．

(3) $0 \leq x \leq \pi$ とする時，関数の最大値と最小値，ならびにその時の x の値を示せ．

(福井大 2006)　　(m20062415)

0.202 二次元直交座標 (x, y) を，以下の式に従い極座標 (r, θ) に変換するものとする．
$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$　　ただし，$r \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi$ として，以下の設問に答えよ．

(1) r および θ を，x および y を用いて表せ（答のみでよい）．

(2) $\dfrac{\partial r}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$ を計算せよ（途中経過も書くこと）．

(3) (2) の結果を用いて，$\dfrac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}$ を計算せよ（途中経過も書くこと）．

(福井大 2007)　　(m20072403)

0.203 (1) 次の関数を積分せよ．　（途中の計算式も書くこと）

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} \qquad\qquad \text{ヒント : } \sqrt{x^2+a} = t - x \text{ とおく．}$$

(2) 次の定積分を求めよ．　（途中の計算式も書くこと)}

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \qquad\qquad (a > 0)$$

なお，必要に応じて三角関数の二倍角の公式 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ を用いよ．

(福井大 2008)　　(m20082403)

0.204 (1) 次の関数を微分せよ．

(a) $y = \sin^3 4x$

(b) $y = a^x$

(2) 極座標系 (r, θ) についての方程式 $r = 2a\cos\theta$ の $\theta = \alpha$ における接線の方程式を求める．以下の各問に従って解答せよ．

なお，必要に応じて右下の公式を利用せよ．

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 2A = 2\sin A\cos A \\ \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A \\ \cos(A \pm B) = \cos A\cos A \mp \sin A\sin B \end{array} \right\}$$

(a) 極座標系 (r, θ) と直交座標系 (x, y) との関係を求めよ．

$x =$

$y =$

(b) $\theta = \alpha$ における接線の傾き dy/dx を求めよ．

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\theta=\alpha)} =$$

(c) $\theta = \alpha$ における接線の方程式を求めよ．ただし，解答は途中の計算を示すとともに，$\boxed{}$ 内に記号または数字を入れて方程式を完成せよ．

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos\left(\boxed{}\boxed{} - \boxed{}\right)}{\boxed{}\, a\cos^2 \boxed{}}$$

(福井大 2009)　　(m20092401)

0.205 (1) 内径が a，外径が b である球殻の体積を，極座標系での 3 重積分を使って表し，その値を求めよ．ただし，極座標 (r, θ, ϕ) は，直角座標 (x, y, z) を使って，

$$x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\theta \quad (0 \le r \le \infty,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \phi \le 2\pi)$$

で定義される．

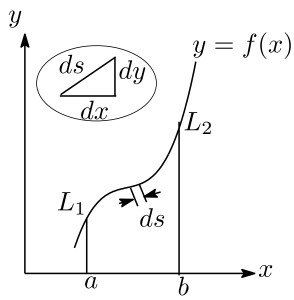
(2) 楕円 $x^2 - xy + y^2 = 4$ の面積を求めよ．

(福井大 2009)　　(m20092402)

0.206 次の関数 $r = a(1 + \cos\theta)$，$(a > 0)$ で囲まれた部分の面積 A を求めよ．

(福井大 2010)　　(m20102417)

0.207 次の各問にしたがって，半径 R の円の円周の長さを求めよ．



(1) 右の図のように，関数 $f(x)$ の L_1 から L_2 の長さは $\int_{L_1}^{L_2} ds$ で求めることができる．

$$\int_{L_1}^{L_2} ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

となることを導け．

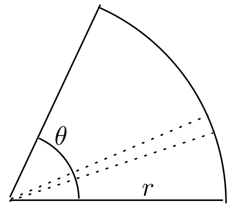
(2) 点 (x, y) と x 軸との間の角度を θ とすると，x および y を θ の関数で表せ．また，dy/dx を求めよ．

(3) $\int_{L_1}^{L_2} ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ の積分の式を用いて，半径 R の円の円周の長さが $2\pi R$ となることを示せ．ただし，計算の途中過程も必ず示すこと．

(福井大 2011)　　(m20112404)

0.208 右の扇形の半径 r と角度 θ を 3 回ずつ計測して表の結果を得た．

ただし，角度の単位の 1 分 ($'$) は 1 度 ($^\circ$) の 1/60，1 秒 ($''$) は



1 分 (′) の 1/60 を表すものとする.

r	$10.52m$	$10.54m$	$10.56m$
θ	$48^\circ\ 27'\ 21''$	$48^\circ\ 27'\ 28''$	$48^\circ\ 27'\ 23''$

(1) ある量の i 回目の観測値を x_i, n 回計測したときの最確値を $\overline{x}$ とするとき,
$\overline{x}$ は関数 $f(\overline{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ を最少化する値として算出されるとする. 最確値 $\overline{x}$ を求める式を誘導しなさい.

(2) (1) の結果を用いて半径と角度の最確値を求めよ.

(3) 角度の最確値を度 (°) の単位で小数第 4 位までの小数で示せ. また, 同じ角度をラジアン単位で示せ. だたし, 円周率は π とする.

(4) (3) で求めた度の単位の角度の値から, もとの度分秒の単位で角度を表す方法の手順を説明しなさい.

(5) この扇形の面積を, 図に点線で示す微小な中心角を持つ扇形の集まりと考えた積分によって求めなさい.

(福井大 2013)　　(m20132418)

0.209 行列 A, B, C に関して, 行列式を計算しなさい. また, 逆行列を, それぞれ求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(福井大 2015)　　(m20152423)

0.210 曲率 $\rho^{(注)}$ に関する以下の微分方程式について答えなさい.

$$y'' = \rho(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

ただし, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする.

(1) $\dfrac{d\rho}{dx}$ を求めなさい.

(2) 円の方程式 $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ のとき, (1) の曲率 ρ に関する x の微分 $\dfrac{d\rho}{dx}$ が 0 となり, 曲率 ρ は一定であることを示しなさい.

(3) ρ を定数として, 微分方程式 ① を解きなさい. 必要であれば, 以下の置換法
$y' = \nu = \tan\theta \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いること.

（注）曲線上の各点において, その曲線の曲がりの程度を示す値.

(福井大 2015)　　(m20152425)

0.211 関数 $f(t)$ のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

について, 以下の問に答えなさい. ただし, $\theta(t-\alpha)$ は単位階段関数で

$$\theta(t-\alpha) = \begin{cases} 1 & (t \geq \alpha) \\ 0 & (t < \alpha) \end{cases}$$

によって定義される.

(1) 単位階段関数 $\theta(t)$ および $\theta(t-1)$ のラプラス変換を求めなさい.

(2) $\mathcal{L}[e^{-(t-1)}\theta(t-1)]$ について，変数 s を用いて表しなさい．必要であれば以下の関係を用いてもよい．

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha)\theta(t-\alpha)] = e^{-s\alpha}F(s)$$

(福井大 2018)　　(m20182410)

0.212 (1) 積分方程式

$$f(t) + \int_0^t f(\tau)d\tau = \theta(t-1)$$

を満たす関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ を求めなさい．

(2) (1) の積分方程式を解きなさい．

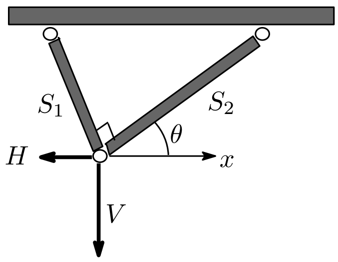
(福井大 2018)　　(m20182411)

0.213 $\dfrac{\partial}{\partial t}\cos(kx-\omega t+\theta)$ を計算せよ．

(福井大 2018)　　(m20182416)

0.214 図のように水平で剛な天井にピン支持されたトラスが荷重を支えている．

ただし θ は水平方向 (x 軸) からの角度



(1) 部材力 S_1, S_2 と外力 H, V との間のつり合式を行列とベクトルを用いた形で示せ．

(2) $H = 10\text{kN}$, $V = 20\text{kN}$, $\theta = 30°$の時 ，部材力を求めよ．

(福井大 2018)　　(m20182433)

0.215 非負の整数 n，および $-1 \leqq x \leqq 1$ を満たす任意の実数 x に対して，

$$T_n(x) = \cos nz,\quad ただし，\cos z = x \tag{1}$$

と定義する．式 (1) において，$n = 0$ とおくと

$$T_0(x) = \cos 0 = 1 \tag{2}$$

となり，$n = 1$ とおくと

$$T_1(x) = \cos z = x \tag{3}$$

となる．以下の問いに答えよ．

(a) 加法定理

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{4}$$

を利用し，$T_2(x)$ を x の多項式として表せ．

(b) $T_n(x)$ は，$T_{n+1}(x)$ と $T_{n-1}(x)$ によって

$$T_n(x) = \frac{T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)}{2x} \tag{5}$$

と表される．これを次のようにして証明したい．以下の下線部 (A)〜(C) を適当に埋めよ．

【証明】式 (1) の定義と式 (4) の加法定理を用いると

$$T_{n+1}(x) = \cos(nz+z) = \cos nz\cos z - \underline{\qquad\qquad}(\mathrm{A}) \tag{6}$$

$$T_{n-1}(x) = \cos(nz-z) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}(\mathrm{B}) \tag{7}$$

と書ける．式 (6) と式 (7) の各辺を加えると

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = \underline{\hspace{4cm}}\text{(C)} \tag{8}$$

が得られる．式 (8) の右辺を変形すると

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \tag{9}$$

となり，これより式 (5) が導きられる．

(c) 式 (5) に基づいて，$T_3(x)$ を x の多項式として表せ.

(d) $T_3(x)$ を用いて，$\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ の多項式として表せ.

(e) (d) の結果を利用して，次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta \tag{10}$$

ちなみに，$T_n(x)$ は第一種チェビシェフ多項式と呼ばれ，cos の n 倍角の公式の導出やチェビシェフ展開に基づく関数の近似表現等に利用される有名な多項式である.

(福井大 2020)　　(m20202422)

0.216 非負の実数 θ[rad] を媒介変数とする曲線

$$\begin{cases} x &= \theta\cos\theta \\ y &= \theta\sin\theta \end{cases} \tag{1}$$

は「アルキメデスのらせん」と呼ばれ，その概形は図 1 に示す「蚊取り線香」に近い，図 2 のような渦巻状の曲線となる.

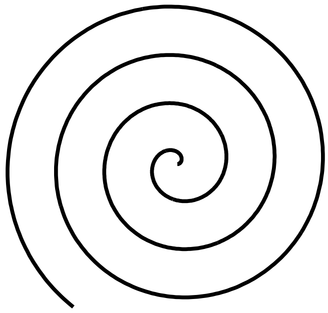


図 1 ：蚊取り線香

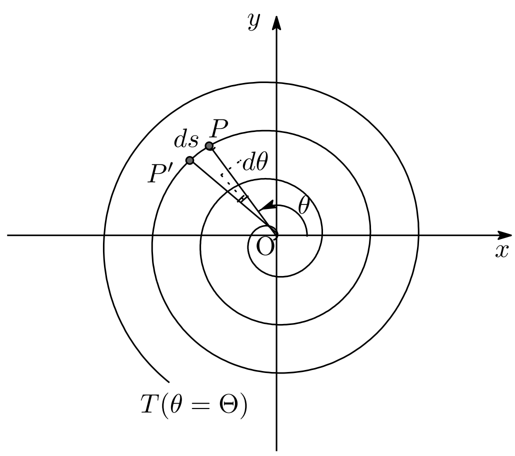


図 2 :「アルキメデスのらせん」

図 2 に示すように，曲線上の点 P に対して θ を微小角度 $d\theta$ だけ増加させ，点 P が P' に移動したとする．このときの $P - P'$ 間の微小な長さを ds と表すと，$\dfrac{ds}{d\theta}$ は,

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \tag{2}$$

で与えられる．以下の問いに答えよ.

(1) 式 (1) の x, y に対し，$\dfrac{dx}{d\theta}$, $\dfrac{dy}{d\theta}$ を各々求めよ.

(2) 式 (2) を利用して，$\dfrac{d\theta}{ds}$ を θ によって表せ，$\dfrac{ds}{d\theta}$ ではなく $\dfrac{d\theta}{ds}$ を求めることに注意.

(3) (2) で求めた θ の関数 $\dfrac{d\theta}{ds}$ について，グラフの概形を描きたい．$\dfrac{d\theta}{ds}$ の θ に関する 1 階導関数を用いて増減を調べ，$\dfrac{d\theta}{ds}$ を縦軸に，θ を横軸に取ったグラフの概形を示せ.

(4) 図 2 に示すように，「らせん」の内側の端点は原点 O に一致し，外側の端点 T に対する θ を $\theta = \Theta$ とおく．このとき，O から T までの曲線の長さ L を Θ によって表せ．【ヒント】L の計算過程で現れる定積分には複数の計算方法が知られており，そのひとつに $\theta = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ と置換する方法がある $\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \text{ は双曲正弦関数 } \sinh t \text{ であるので，双曲線関数を用いてもよい} \right)$.

(福井大 2021)　　(m20212419)

0.217 (1) 次の不定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int \frac{e^{2x} - 16}{e^x - 4} dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x}} dx$

(2) 次の定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_6^{10} x(x-6)^2 dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} (\cos\theta + 1)^2 d\theta$

(福井大 2021)　　(m20212421)

0.218 以下の行列 $\mathbf{S}$ に関する問いに答えよ．ただし，θ は実数である．

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\mathbf{S}$ を対角化せよ．

(2) n を自然数とし，$\mathbf{S}^n$ を求めよ．

(3) 行列 $\mathbf{S}$ 及び実数 x を用いた指数関数はそれぞれ以下の式で定義される．
$\exp(\mathbf{S})$ を計算せよ．

$$\exp(\mathbf{S}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{S}^n}{n!} \qquad\qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(福井大 2022)　　(m20222418)

0.219 (1) 点 $P(x, y)$ を点 $A(a, b)$ を中心として反時計回りに角 θ だけ回転したとき，移動後の点 $Q(x', y')$ を行列で表せ．また，点 P が $(2, 1)$，点 A が $(3, 2)$ であったときに 30°回転したときの点　Q を求めよ．

(2) 3 次元直交座標系（原点を O）において，任意の点 (x, y, z) を x 軸周りに角 θ だけ回転させる行列 $\boldsymbol{R}$ を表せ．また，固有値を求めよ．

(福井大 2022)　　(m20222426)

0.220 半径 a の球面の xyz 座標を媒介変数 $(\theta,\ \phi)$ で

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (a\sin\theta\cos\phi,\ a\sin\theta\sin\phi,\ a\cos\theta)$$

と表す．ただし，$0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$ である．以下の問いに答えよ．

(1) 以下のベクトル積

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}$$

を求めよ．また，これは何を表すか答えよ．

(2) 次の積分を求め，何を表すか答えよ．

$$\iint_D \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} \right\| d\theta d\phi$$

ただし，$||\cdot||$ はベクトルの長さを表し，領域 D は $\theta,\ \phi$ の動く範囲，すなわち $D = \{(\theta,\ \phi \mid 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi)\}$ である．

(3) 球面の x 座標 $x = a\sin\theta\cos\phi$ に対して，次の積分を求めよ．

$$\iint_D x \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} \right\| d\theta d\phi$$

(福井大 2022)　　(m20222427)

0.221 (1) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2+4z+1}dz$ を求めよ．ここで，C は複素数平面の原点を中心とする半径 1 の円周を正の向きに 1 周する積分路とする．

(2) 実定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta}d\theta$ を (1) を利用して求めよ．

(静岡大 2004)　　(m20042507)

0.222 空間のベクトル $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (3, -1, -2)$, $\vec{c} = (-1, 2, -2)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を求めよ．

(2) $\vec{a}$ とも $\vec{b}$ とも直交する長さ 1 のベクトルを求めよ．

(3) $\vec{a},\ \vec{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ．

(4) $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ を 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ．

(静岡大 2012)　　(m20122505)

0.223 変数 (r, θ) $(r \geq 0\ ,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ から変数 (x, y) への変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

を考える．また領域 D を

$$D = \{(x, y) \quad ;\ -x \leq y \leq x\}$$

によって定義する．

(1) (x, y) が領域 D を動くとき (r, θ) が動く範囲を求めよ．また，その対応が 1 対 1 であることを示せ．

(2) 次の積分の値を上記の変数変換を用いて求めよ．

$$\iint_D \exp(-x^2 - y^2 - xy)dxdy$$

ここで積分の範囲は領域 D である．

(岐阜大 1997)　　(m19972601)

0.224 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ によって極座標 (r, θ) を導入するとき，x, y の関数 $f(x, y)$ の x についての偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ を r および θ についての偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial r}, \dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ を用いて表せ．

(岐阜大 2003)　　(m20032603)

0.225 コンピュータのグラフィックディスプレイに (x,y) 座標系の原点を中心とする半径 r の円を描くことを考える．このとき，半径 r の円は，x 軸となす角 θ（反時計回りを正方向とする）をパラメータとして

$$\begin{cases} x = \boxed{\quad（ア）\quad} \\ y = \boxed{\quad（イ）\quad} \end{cases}$$

と表現できるから，円を n 等分して，$\Delta\theta = 2\pi/n$ より $\Delta\theta$ を求め，

$\theta_0 = 0,\ x_0 = r,\ y_0 = 0$

$\theta_{i+1} = \theta_i + \Delta\theta \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$

として，

$$\begin{cases} x_{i+1} = \boxed{\quad（ウ）\quad} \\ y_{i+1} = \boxed{\quad（エ）\quad} \end{cases}$$

より，次々と点の座標 $(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ \cdots, (x_n, y_n)$ を求め，これらの 2 点間を順次，直線で結んでいけば円を描くことができる．上記の（ア）〜（エ）に入る式を答えよ．ただし,（ウ）,（エ）については，$r, \theta_i, \theta_{i+1}$ は<u>使わない</u>形で答えよ．

(岐阜大 2006)　　(m20062622)

0.226 次の式の値を求めよ.

(1) $\tan\theta = 1/3$ のとき．$(\sin\theta + \cos\theta)^2$ の値を求めよ.

(2) $(1 + \tan\alpha)/(1 - \tan\alpha) = 2 + \sqrt{3}$ のとき，$\cos\alpha$ の値を求めよ.

(岐阜大 2009)　　(m20092614)

0.227 次のパラメータ表示で与えられる xyz 空間内の曲線 C と直線 ℓ について, 以下の問いに答えよ. ただし, 空間内の二点 P, Q に対して, 二点間の距離を $\overline{PQ}$ で表す.

$$C\ :\ \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = \cos\theta + \sin\theta \end{cases} \quad (0 \leqq \theta \leqq\ 2\pi) \qquad \ell\ :\ \begin{cases} x = t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

(1) P を曲線 C 上の点, Q を直線 ℓ 上の点とするとき, $\overline{PQ}^2$ を θ と t の式で表せ.

(2) P を曲線 C 上の点, Q を直線 ℓ 上の点とするとき, $\overline{PQ}$ の最小値, および, そのときの P と Q の座標を求めよ.

(岐阜大 2010)　　(m20102604)

0.228 以下の式でガンマ関数 $\Gamma(t)$ を定義する.

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx\,,\ t > 0.$$

次の問に答えよ．ただし，$t > 0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^t = 0$ となることは証明しなくても使ってよい.

(1) $t > 0$ に対して $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ となることを示せ.

(2) 自然数 n に対して $\Gamma(n+1) = n!$ となることを示せ.

(3) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$，すなわち

$$\left(\int_o^{\infty} e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx\right)\left(\int_o^{\infty} e^{-y} y^{-\frac{1}{2}} dy\right)$$

を x, y の 2 変数関数の重積分で表せ.

(4) 変数 (x, y) から (r, θ) への変数変換

$$\begin{cases} \sqrt{x} = r\cos\theta, \\ \sqrt{y} = r\sin\theta \end{cases}$$

に対してヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

(5) 前問 (4) の変数変換を用いて (3) の重積分を計算し $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ.

(岐阜大 2014)　　(m20142601)

0.229 ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のなす角 θ が $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{3\pi}{2}$ を満たすとき，点 (x, y) の存在する領域を x , y に関する不等式で表せ.

(豊橋技科大 1996)　　(m19962706)

0.230 以下の問いに答えよ.

(1) $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\, d\theta$ とする．この式の右辺に部分積分の公式を適用することにより，n が 2 以上の整数ならば $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ なる関係が成立することを示せ.

(2) 解答用紙中に記したア～エのうち，次の媒介変数表示で与えられる曲線
$x = a\cos^3\theta$,　$y = a\sin^3\theta$ （ただし，$a > 0$ ）の概略を描いた図として最も適当なものを選び，図の記号ア，イ，ウ，エのいずれかに○を付けよ．(図略)

(3) また，この曲線によって囲まれる図形の面積 S を求めよ．なお，問 (1) で求めた関係を利用すると計算が容易になる.

(豊橋技科大 1998)　　(m19982707)

0.231 2 次曲線 $y = x^2 + (m+2)x + (m^2+4)$ の接線のうち, 原点を通る傾き k_1, k_2 の 2 本の直線のなす角を θ とする. θ が最大となるときの m の値を求めたい. ただし, m は実数, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ とする.

(1) $\tan(\alpha - \beta)$ を $\tan\alpha$, $\tan\beta$ を用いて表せ.

(2) k_1 , k_2 を m を用いて表せ.

(3) $\tan\theta$ を m を用いて表せ.

(4) θ が最大となるときの m の値と $\tan\theta$ の値を求めよ.

（豊橋技科大 2004)　　(m20042705)

0.232 3 次元直交座標系における点 A, B , C の位置ベクトルをそれぞれ

$\boldsymbol{a} = (1, 4, 3)$, $\boldsymbol{b} = (2, 3, 1)$, $\boldsymbol{c} = (3, p, q)$

とする. $\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}$ および $\boldsymbol{b}$ と直交している. 以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a}$ とが直交していることから p, q の関係式を求めよ.

(2) $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{b}$ とが直交していることから, もう一つの p, q の関係式を求めよ.

(3) 以上の関係式から p, q の値を求めよ.

(4) $\boldsymbol{c}$ の大きさを求めよ.

(5) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の外積（ベクトル積）$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を求めよ.

(6) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積 S を求めよ.

(7) $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ とのなす角 θ を求めよ.

(8) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が作る平行六面体の体積 V を求めよ．

(豊橋技科大 2005)　　(m20052704)

0.233 xy 直交座標系の点列 (x_i, y_i)，$i = 1, \cdots, N$ に対し，各点からの垂直距離の 2 乗和が最小となるような直線を求めたい．次の各問いに答えよ．

(1) 次の文章中の空欄 $\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{コ}}$ に適当な数式を入れよ．
各点に単位質量を置いたときの重心を G とすると，その座標は

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} \\ \boxed{\text{イ}} \end{pmatrix} \tag{1}$$

となる．xy 座標系に対し，この重心 G を原点として，角度 θ で回転させた uv 座標系を考える．このとき

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \tag{2}$$

とおけば，(x_i, y_i) と (u_i, v_i) との関係は θ を用いて

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}} \\ -\boxed{\text{エ}} & \boxed{\text{ウ}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} \tag{3}$$

で与えられる．もし求めたい直線を u 軸にとれば，問題は

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^{N} v_i^2 \tag{4}$$

で定義される $J(\theta)$ を最小にする角度 θ を求めることに等しい．
式 (3) の v_i を θ で微分し，u_i を用いて表すと

$$\frac{\partial v_i}{\partial \theta} = \boxed{\text{オ}} \tag{5}$$

となるから，式 (4) を θ で微分して 0 とおけば

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = -2 \sum_{i=1}^{N} u_i v_i = 0 \tag{6}$$

を得る．この式 (6) に，式 (3) を代入することにより，

$$\boxed{\text{カ}} \sum_{i=1}^{N} x'_i y'_i = \boxed{\text{キ}} \sum_{i=1}^{N} ({x'_i}^2 - {y'_i}^2) \tag{7}$$

となり，次式を得る．

$$\frac{2\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}} = \frac{2 \sum_{i=1}^{N} x'_i y'_i}{\sum_{i=1}^{N} ({x'_i}^2 - {y'_i}^2)} \tag{8}$$

式 (8) の左辺は，倍角の公式により

$$\frac{2\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}} = \boxed{\text{ク}} \tag{9}$$

と書けるから，式 (8) は

$$\boxed{\text{ク}} = \frac{2 \sum_{i=1}^{N} x'_i y'_i}{\sum_{i=1}^{N} ({x'_i}^2 - {y'_i}^2)} \tag{10}$$

となる．よって，式 (10) の右辺を計算して，式 (4) を最小化する θ を求めればよい．
式 (4) を最小化する θ を $\hat{\theta}$ とし，求めたい直線が重心 G を通ることを用いれば，直線の式は

$$y = \tan \hat{\theta} \left(x - \boxed{\text{ケ}} \right) + \boxed{\text{コ}} \tag{11}$$

として与えられる．

(2) 4 点 $(-1,0)$, $(3,1)$, $(4,3)$, $(6,2)$ があるとする．

(a) これらの 4 点に単位質量を置いたときの重心 G の座標を求めよ．

(b) これらの 4 点に関し，$\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i'$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} {x_i'}^2$ および $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} {y_i'}^2$ を求めよ．

(c) これらの 4 点からの垂直距離の 2 乗和が最小となる直線の傾き θ を求めよ．ただし，分数は既約分数とし，三角関数およびその逆関数はそのままでよい（例：$\cos\dfrac{7}{4}\pi$ や　$\sin^{-1}\dfrac{1}{3}$ など）．

(豊橋技科大 2006)　　　(m20062710)

0.234 (1) 次の不定積分を解け.

$$\int \frac{3x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$$

(2) $x = 2(\theta - \sin\theta),\ y = 1 - 2\cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq\ 2\pi)$ で表される曲線について以下の問いに答えよ.

(a) $y \geqq\ 0$ となる θ の範囲を求めよ.

(b) $y \geqq\ 0$ の範囲の曲線と x 軸とで囲まれた部分の面積 S を求めよ.

(豊橋技科大 2011)　　　(m20112706)

0.235 円 $x^2 + y^2 = 4$ 上の直交座標系の点 $P(x, y)$ は，つぎの 1 次変換 f によって，円 $u^2 + v^2 = 16$ 上の点 $Q(u, v)$ に移される．以下の問いに答えよ.

$$f : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(1) 点 $P(x, y)$ の座標を，偏角 θ を用いて表せ．ただし，偏角とは原点 O を円の中心として，半直線 OP と x 軸の正方向とのなす角である.

(2) $a\ (> 0)$ の値を求めよ.

(3) 点 $P(x, y)$ が上記の 1 次変換 f によって点 $Q(0, 4)$ へ移されたとき，点 $P(x, y)$ の座標を求めよ.

(豊橋技科大 2013)　　　(m20132704)

0.236 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満足するベクトル $\boldsymbol{x}$ の大きさ（長さ）$|\boldsymbol{x}|$ を求めよ.

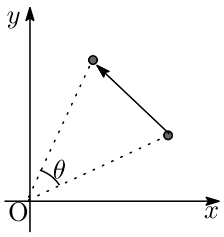
(3) A の固有値 λ_1 と λ_2 を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leqq \lambda_2$ とする.

(4) n を正の整数 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とするとき，A^n を求めよ.

(豊橋技科大 2013)　　　(m20132705)

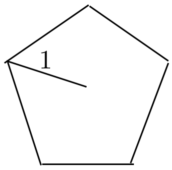
0.237 xy 平面上において，原点 O を中心に反時計回りに θ の回転を行う一次変換は下図の行列 A_θ で表される．この行列を利用して三角関数の計算を行うとともに，図形の面積の値を求めたい．以下の問いに答えよ.

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



(1) ${A_\theta}^2,\ {A_\theta}^3$ を計算し，$\cos\theta,\ \sin\theta$ で表せ．また，$A_{n\theta} = (A_\theta)^n$ であることを利用して $\cos 2\theta,\ \sin 2\theta,\ \cos 3\theta, \sin 3\theta$ を $\cos\theta,\ \sin\theta$ で表せ．

(2) $\sin\dfrac{2\pi}{5}$ の値を α とおく．半径 1 の円に内接する正五角形の面積を α を用いて表せ．

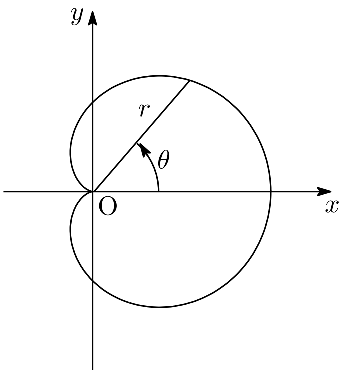


(3) (1) の結果を用いて $\sin\dfrac{\pi}{10},\ \cos\dfrac{\pi}{10}$ の値をそれぞれ求めよ．

(4) 半径 1 の円に内接する正五角形の面積の値を求めよ．

(豊橋技科大 2019)　　(m20192703)

0.238 極方程式 $r = 1 + \cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ で表される曲線について，以下の問いに答えよ．



(1) 曲線上の点の座標 (x, y) を，θ を用いて表せ．

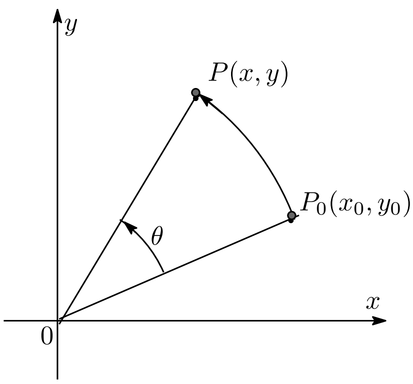
(2) 曲線上の $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ における点を P とする．点 P における曲線の接線の方程式を，x と y を用いて表せ．

(3) 曲線に囲まれた領域の面積を求めよ．

(4) 曲線の全長を求めよ．

(豊橋技科大 2020)　　(m20202703)

0.239 図のように，xy 平面上の点 $P_0(x_0, y_0)$ を原点 O のまわりに θ だけ回転した点 $P(x, y)$ に移す座標変換は次の線形変換により表される．また，このときの変換行列を $A(\theta)$ と定義する．以下の設問に答えよ．



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) xy 平面上の点を x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍する変換行列 B を a と b を用いて表せ.

(2) xy 平面上の点を原点 O のまわりに $(-\theta)$ 回転し，その後 x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍し，最後に原点 O のまわりに θ 回転する線形変換を考える．このときの変換行列 C を a, b, $\cos\theta$ および $\sin\theta$ を用いて表せ.

(3) 次に示す変換行列 D の固有値を求め，それぞれの固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルをすべて求めよ.

$$D = \begin{pmatrix} \dfrac{11}{4} & \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{4} & \dfrac{9}{4} \end{pmatrix}$$

(4) 変換行列 C が変換行列 D に等しいとき，a, b および θ の値を求めよ．ただし，θ は $0 \leq \theta \leq \pi/2$ の範囲にあるとする.

(豊橋技科大 2021)　　(m20212701)

0.240 次のサイクロイド曲線に対して，以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases} \qquad (a > 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

(1) 曲線の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(2) $\theta = \pi$ における接線の方程式を求めよ.

(3) 曲線を x 軸のまわりに回転させるときにできる立体の体積を求めよ．なお，次の公式を用いてもよい.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\,\dfrac{\pi}{2} & (n : \text{偶数}) \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n : \text{奇数}) \end{cases}$$

$$\text{ただし，} n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots 2 & (n : \text{偶数}) \\ n(n-2)(n-4)\cdots 1 & (n : \text{奇数}) \end{cases}$$

(名古屋大 2008)　　(m20082802)

0.241 以下の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\,dx$ （m, n は負でない整数）

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$ （ヒント：$x = \tan\theta$とおけ. また，$\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right)$ である.）

(名古屋大 2011)　　(m20112803)

0.242 (1) 二次元平面上の第一象限において $0 \leq x^2 + y^2 \leq R$ によって定められる部分を A とする．次の A 上での重積分を求めよ．$a > 0$ とする.

$$\iint_A e^{-(ax)^2-(ay)^2} dx\,dy$$

ただし，次の変数変換を用いて計算を行うこと.

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

(2) (1) で求めたことを用いて次の積分を求めよ.

$$\int_0^{+\infty} e^{-(ax)^2} dx$$

(名古屋工業大 1999)　　(m19992904)

0.243 $\{(x,y)\ ;\ x^2+y^2-ax=0,\ y>0\}$ $(a>0)$ 上の 1 点を P とし，原点を O とする．

(1) 直線 OP と x 軸のなす角を θ とした時，OP の長さを求めよ．

(2) 領域 $D=\{(x,y)\ ;\ x^2+y^2-ax\leq 0,\ y\geq 0\}$ を極座標で表せ．

(3) D を (2) の領域とした時，次の定積分を求めよ． $I=\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$

(名古屋工業大 2008) (m20082904)

0.244 2 回偏微分可能な関数 $f(x,y)$ に対して，$g(r,\theta)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ と定義する．

(1) $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ 及び $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ 及び $\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ を求めよ．

(3) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ が成り立つことを示せ．

尚，導出の過程で次の公式を用いて良い．

【公式】$z=f(x,y)$ として，関数 $x=x(u,v), y=y(u,v)$ がいずれも偏微分可能ならば，

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\quad,\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

が成り立つ． （愛知県立大 2000） (m20003001)

0.245 空間ベクトル $\boldsymbol{a}=(3,2,-1)$, $\boldsymbol{b}=(4,1,2)$ について，以下の値を求めよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$

(2) ベクトル積 $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を隣りあう 2 辺とする平行四辺形の面積 S

(三重大 2003) (m20033109)

0.246 以下の (1)〜(3) の設問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log_e x}{x^2}dx$ の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$ の値を求めよ．

(3) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

$f(x)=2\cdot x-\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cdot\cos t\cdot dt$

(三重大 2005) (m20053112)

0.247 (1) 3 次元空間において, 直線

$$l_1\ :\ \frac{x-1}{2}=y=\frac{z-2}{3}$$

および点 $P(0,1,2)$ を含む平面の式を求めよ．

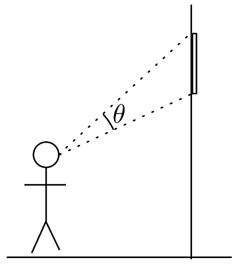
(2) l_1 および原点 $O(0,0,0)$ を含む平面の式を求めよ．

(3) この二つの平面が成す角を θ とするとき, $\cos\theta$ の値を求めよ. ただし, $\theta\leq 90$とする ．

(三重大 2005) (m20053116)

0.248 (1) 関数 $y=\dfrac{x}{x^2+2}$ のグラフの概形を書きなさい．

(2) 美術館の壁にかけてある絵は, その上端と下端が, 観覧者の目の高さの上方 $2m$ および $1m$ のところにある. 絵画を最も観やすくするためには, 観覧者と壁との距離を何 m にすれば良いか？
（ここでは, 最も観やすいとは, 観覧者の縦方向の視角 θ が最大になれば良いとする.）



(三重大 2005) (m20053118)

0.249 次の不定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \left(x^2 + 2x + 3 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right) dx$

(2) $\displaystyle\int \{\sin(\omega t + a) + \cos(\omega t + b)\}\, dt$ ただし，ω，a，b は定数である.

(3) $\displaystyle\int \sin^3\theta\, d\theta$

(三重大 2006) (m20063101)

0.250 平面極座標系 (r, θ) において $r = \dfrac{1}{1 + \varepsilon\cos\theta}$ （ただし, ε は 0 または正の整数）と表される曲線がある．以下の問いに答えよ.

(1) この曲線の式をデカルト直交座標系 (x, y) で表せ.

(2) 定数 ε が以下の値のときの曲線の名称を答えよ.

(a) $\varepsilon = 0$ (b) $0 < \varepsilon < 1$ (c) $\varepsilon = 1$ (d) $\varepsilon > 1$

(三重大 2006) (m20063102)

0.251 空間ベクトル $\boldsymbol{m} = (1, -3, 1)$ と $\boldsymbol{n} = (3, 2, -2)$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) $\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$ の値を求めなさい.

(2) $\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の面積を求めなさい.

(3) 点 $A = (1, 4, 0)$ を通り，$\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ に平行な平面の方程式を求めなさい.

(三重大 2006) (m20063110)

0.252 (1) 位置ベクトル $\boldsymbol{a} = (1, 0, 1)$ と $\boldsymbol{b} = (1, \sqrt{6}, 1)$ がなす角 θ を求めなさい.

(2) (1) の $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に直交する単位ベクトルの一つ求めなさい.

(3) (1) の $\boldsymbol{a}$ の終点と $\boldsymbol{b}$ の終点を通る直線を考える．この直線上の任意の点を終点とする位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を用いて求めなさい.（パラメータを一つ使ってもよい）.

(三重大 2006) (m20063112)

0.253 近似式について，以下の問いに答えよ.

(1) $\alpha << 1$ が成り立つ場合，$(1+\alpha)^3 \approx 1 + 3\alpha$ と近似できる理由を述べよ.

(2) $\cos(\theta + \triangle\theta)$ を θ の周りで，$\triangle\theta^5$ までテーラー展開せよ.

(3) 上記の展開式の 1 次 $(\triangle\theta)$ までを利用して，$\cos(61^\circ)$ の近似値を求めよ．ただし，テーラー展開内の θ はラジアン表記であることに留意せよ.

(三重大 2009) (m20093109)

0.254 以下の文章の $\boxed{\quad\quad}$ に適切な語句または数式を入れ, 解答欄に記入しなさい.

大きさがで 0 ない 3 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ がある. いま, 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の大きさをそれぞれ $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ と表し, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \boxed{\quad ① \quad}$$

と表すことができる. ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が直交するための必要十分条件は,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \boxed{\quad ② \quad}$$

である.

内積については, 次が成り立つ.

交換法則： $\vec{a}\cdot\vec{b} = \boxed{\quad ③ \quad}$

分配法則： $\vec{a}\cdot(\,\vec{b}+\vec{c}\,) = \boxed{\quad ④ \quad}$

ここで, $\vec{a} = (\,a_1,\ a_2,\ a_3\,)$, $\vec{b} = (\,b_1,\ b_2,\ b_3\,)$ とすると,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \boxed{\quad ⑤ \quad}$$

である.

一方, 外積については, 次が成り立つ.

歪対称： $\vec{a}\times\vec{b} = \boxed{\quad ⑥ \quad}$

分配法則： $\vec{a}\times(\,\vec{b}+\vec{c}\,) = \boxed{\quad ⑦ \quad}$

$\vec{a}\times\vec{a} = \boxed{\quad ⑧ \quad}$

ここで, $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ であるとき,

$$\vec{a}\times\vec{b} = \boxed{\quad ⑨ \quad}$$

である. ただし, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ は基本ベクトルである.

(三重大 2010) (m20103104)

0.255 ベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x\,,\ A_y\,,\ A_z)$ とベクトル $\boldsymbol{B} = (B_x\,,\ B_y\,,\ B_z)$ が与えられている. 以下の問に答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ によって構成される平行四辺形の面積を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ がなす角度を θ とした場合に, $\cos\theta$ の値を求めよ.

(三重大 2012) (m20123103)

0.256 xy 平面上の曲線 $r = (1+\cos\theta)$ の概形を描け. またこの曲線の全長を求めよ. ただし r は動径, θ は r が x 軸となす角で $-\pi \leq \theta \leq \pi$ とする. (三重大 2012) (m20123110)

0.257 原点を O とする 3 次元直交座標系上に, 点 $A(0,1,2)$ と点 $B(3,3,0)$ がある. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\angle AOB = \theta$ として, $\cos\theta$ を求めよ.

(2) 線分 $\overline{AB}$ の長さを求めよ.

(3) 3 点 O, A, B を通る平面の法線ベクトルを求めよ. ただし, 正規化しなくて良い.

(4) $\triangle AOB$ の面積を求めよ.

(三重大 2013) (m20133101)

0.258 xyz 空間に 3 点 $O(0,0,0)$, $A(1,1,2)$, $B(3,4,3)$ がある. このとき, 以下の問いに答えなさい.

(1) $\angle AOB = \theta$ としたとき, $\cos\theta$ を求めなさい.

(2) $\triangle OAB$ の面積を求めなさい．

(3) 平面 OAB の方程式を求めなさい．

(三重大 2014)　　(m20143103)

0.259 3 次元直交座標系の xyz 空間に点 A(0, 1, 1)，点 B($-a$, 0, 1)，点 C($a\cos t$, $a\sin t$, 0) がある．ただし，a は正の実数で，$0 \leqq t < 2\pi$ である．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $\angle ACB = \theta$, $t = \pi$ とした場合，$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ となる a を求めなさい．

(2) (1) の条件において，$\triangle ABC$ の面積を求めなさい．

(3) $\triangle ABC$ の重心を G とする．点 C について t を変化させたとすると，$\overrightarrow{AG}$ と $\overrightarrow{AC}$ が垂直となるような a がただ一つ決まる場合の $\cos t$ と $\sin t$ を求めよ．

(三重大 2016)　　(m20163102)

0.260 xy 平面上のサイクロイドは，θ をパラメータとして

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

で与えられる．ただし，a は正の定数である．この曲線の $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ 部分の長さを求めよ．

(三重大 2016)　　(m20163114)

0.261 ベクトル $\overrightarrow{a} = (4, -3)$, $\overrightarrow{b} = (1, -7)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角 $\theta(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ を求めよ．

(2) 点 $P_0(3, 4)$ を通り，$\overrightarrow{a}$ に垂直な直線の方程式を求めよ．

(三重大 2017)　　(m20173111)

0.262 三角関数について，以下の問いに答えよ．ただし，n は自然数である．
この際，オイラーの公式 ($e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$) を用いても良い．ただし，$i$ は虚数単位である．

(1) $\sin(2\theta)$ および $\cos(2\theta)$ を $\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いて表現せよ．

(2) $\sin(3\theta)$ および $\cos(3\theta)$ を $\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いて表現せよ．

(3) $\sin(4\theta)$ および $\cos(4\theta)$ を $\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いて表現せよ．

(4) $\cos(10\theta)$ を $\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いて表現せよ．

(5) $\cos(n\theta)$ は，$\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いてどのように表現されるか推定せよ．

(三重大 2018)　　(m20183102)

0.263 (1) 次の行列 A の行列式 $|A|$ を求めよ．また行列 A と次のベクトル $\overrightarrow{v}$ の積 $A\overrightarrow{v}$ を計算し，$A\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$ となることを示せ．　ただし θ, ϕ は実数，i は虚数単位とする．

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)e^{-i\phi} \\ \sin(\theta)e^{i\phi} & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

(2) (1) の行列 A について，$\phi = 0$ としたときの 2 つの固有値および固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさは 1 とせよ．

(3) 次の行列 B の 2 つの固有値を求めよ．ただし k は実数とする．また $|k| \leq 1$ として，大きさ 1 とした 2 つの固有ベクトルを求めよ．また 2 つの固有値を k の関数として，$|k| \leq 1$ の範囲でグラフに描け．

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$$

(三重大 2018)　　(m20183112)

0.264 関数 $g(\varepsilon) = \cos^2(\theta+\varepsilon)$ を ε についてマクローリン展開

$$g(\varepsilon) = a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 + \cdots$$

を行い，係数 a, b, c を求めなさい．ただし，θ は定数とする．

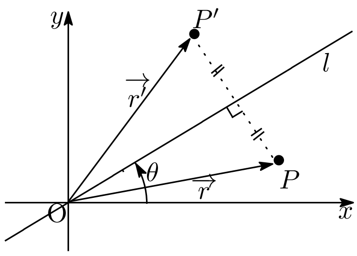
(三重大 2022) (m20223102)

0.265 原点 O を通る角度 θ 方向の直線 l に関して，空間の点 P（位置ベクトルを $\overrightarrow{r}$）を点 P'（位置ベクトルを $\overrightarrow{r'}$）へ反転させる作用（R_θ と記す）を考える．

$$\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \overrightarrow{r'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\theta \overrightarrow{r}$$

このとき，反転の作用は次のように表わせることを示せ．

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$



(奈良女子大 2002) (m20023208)

0.266 m と n が整数のとき，次の式を証明せよ．

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta(m-n)} d\theta = \delta_{m,n}$$

ただし，$i = \sqrt{-1}$ である．また，$\delta_{m,n}$ はクロネッカーのデルタで，

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$ と定義されている．

また，必要なら公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用いよ．

(奈良女子大 2003) (m20033210)

0.267 次の 2 行 2 列の行列 $F(\theta)$ について以下の問に答えよ．

$$F(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) $F(\theta)$ について次の関係が成立することを示せ．

$$F(\theta_1)F(\theta_2) = F(\theta_1 + \theta_2)$$

(2) 行列 A を次の 2 行 2 列の行列であるとする．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき, $F(-\theta)AF(\theta)$ が対角行列 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ の形になる θ の値と, そのときの対角要素 λ_1 , λ_2 を求めよ．

(奈良女子大 2005)　　(m20053204)

0.268 実数 θ に対して $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とおく．また，2 次の単位行列を E とおく．次の問に答えよ．

(1) ${}^tA(\theta)A(\theta) = E$ となることを示せ．ただしここで，${}^tA(\theta)$ は $A(\theta)$ の転置行列である．

(2) $A(-\theta)$ が $A(\theta)$ の逆行列であることを示せ．

(3) 実数 θ, θ' に対し，$A(\theta)A(\theta') = A(\theta+\theta')$ が成り立つことを示せ．

(奈良女子大 2006)　　(m20063204)

0.269 2 次元平面の直交座標を (x, y)，また，極座標を (r, θ) とする．このとき，

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

の関係が成り立つ．x, y および r, θ が時間 t の関数であるとき，$\dfrac{dx}{dt}$ と $\dfrac{dy}{dt}$ を $\dfrac{dr}{dt}$ と $\dfrac{d\theta}{dt}$ を用いて表せ．

(奈良女子大 2007)　　(m20073206)

0.270 次の不定積分と定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int xe^{-ax}dx$ 　（a は定数）

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{1-2a\cos\theta+a^2}}$ 　$(a > 0)$

(奈良女子大 2009)　　(m20093205)

0.271 次ののような 2 つの行列 A と B があるとき，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

(1) 積 AB を求めよ．

(2) 行列 A の逆行列を求めよ．

(3) 2 次元ベクトル $\boldsymbol{X}$ に行列 A をかけて，$\boldsymbol{Y} = A\boldsymbol{X}$ を作った．このとき，2 つのベクトル $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ はどのような関係になるか述べよ．

(奈良女子大 2009)　　(m20093207)

0.272 次の定積分 I に関する以下の問いに答えよ．

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$$

(1) 次の定積分を求めよ．

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx$$

(2) 変数を変えることで, I^2 は次のように書けることを示せ．

$$I^2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$$

(3) この 2 次元積分は直交座標 (x, y) から極座標 (r, θ) に変換することで求めることができる. 積分を実行して I^2 を求め, $I = \sqrt{\pi}$ であることを示せ．

ただし, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ であり, $dxdy = rdrd\theta$ である．

(奈良女子大 2010)　　(m20103204)

0.273　次の行列 $A(\theta)$ について以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) $A(\theta_1+\theta_2) = A(\theta_1)A(\theta_2)$ であることを示せ.

(3) $A(\theta)A(-\theta) = I$ を示せ. ここで I は単位行列である.

(4) 行列 $A\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ の固有値をすべて求めよ.

(奈良女子大 2013)　　(m20133208)

0.274　行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ として, $\boldsymbol{r}' = A\boldsymbol{r}$ を求めよ.

(2) 行列式 A を求めよ.

(3) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(奈良女子大 2017)　　(m20173208)

0.275　a を正の定数として, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)dx$ の値を以下の手順で求めよう.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ay^2)dy$$

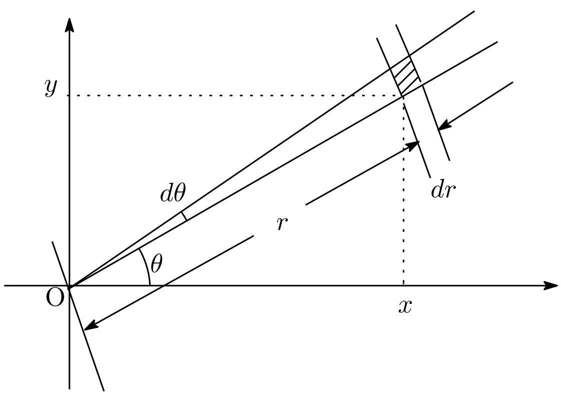
であるから,

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ay^2)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-a(x^2+y^2)\right] dxdy$$

という面積分を実行し, その結果の平方根をとればよい. このとき, 点 (x, y) の位置ベクトルを $\vec{r}$ として, $r = |\vec{r}|$, $\vec{r}$ と x 軸のなす角を θ とおく.

(1) x および y を r と θ の式で表せ.

(2) 下図の斜線部の微小面積を, r, dr, θ, $d\theta$ のうち必要なものを用いて表せ.

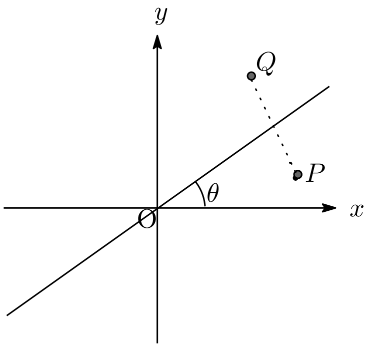


(3) I^2 を xy 直交座標による面積分から r と θ で表される極座標での面積分に変換せよ.

(4) 前問の面積分を実行し，それにより I の値を求めよ.

(奈良女子大 2018) (m20183205)

0.276 下図のように，点 P を直線 $y = (\tan\theta)x$ に関して対称な点 Q に移す変換行列を求めよ.



(奈良女子大 2019) (m20193209)

0.277 2 次元の xy 平面内の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ に関する以下の問いに答えよ.

ただし，$a > b > 0$ であり，また楕円の離心率を

$$\tilde{e} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

とする.

(1) 楕円の周囲の長さ L は

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \tilde{e}^2 \cos^2\theta}\ d\theta$$

で与えられることを示せ.

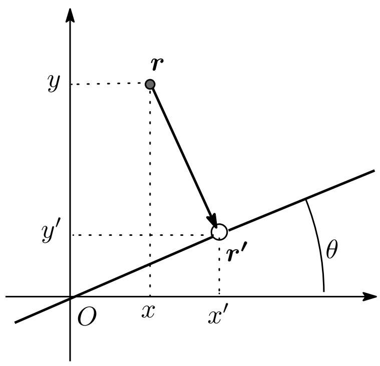
(2) 離心率 $\tilde{e}$ が 1 より十分小さいとき，長さ L は近似的に

$$L = 2\pi a \left(1 - \frac{1}{4}\tilde{e}^2\right)$$

となることを示せ.

(奈良女子大 2022) (m20223207)

0.278 下図のように xy 平面上の任意の点 $\boldsymbol{r} = (x, y)$ を，x 軸から角度 θ 傾いた直線に垂直に射影した点 $\boldsymbol{r}' = (x', y')$ を求める変換を考える．以下の問いに答えよ.



(1) ベクトル $\boldsymbol{r}$ と単位ベクトル $\boldsymbol{e} = (\cos\theta, \sin\theta)$ を使って，ベクトル $\boldsymbol{r}'$ を表せ.

(2) (x, y) と (x', y') の関係は 2×2 行列 A を使って一次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

として表すことができる．行列 A を求めよ.

(3) 行列 A の 2 つの固有値を計算し，それぞれの固有値に属する固有ベクトルの方向を求めよ．

(奈良女子大 2022)　　(m20223209)

0.279 関数 $r = a(1+\cos\theta)$ が領域 $A\{-\pi \leq \theta \leq \pi\}$ で定義されている．以下の問いに答えよ．

(1) この閉曲線の長さ L を求めよ．

(2) この閉曲線に囲まれた面積 S を求めよ．

(京都大 1998)　　(m19983302)

0.280 次のラプラスの積分を考える． $I(a) = \displaystyle\int_0^\infty \exp[-x^2]\cos 2ax\, dx$ 以下の問に答えよ．

(1) 平面の直角座標 (x, y) から極座標 (r, θ) への変換公式を用いて，$x^2 + y^2$ および $dxdy$ を極座標で表せ．

(2) 積分 $I(0)$ の値は $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ と求められることを，$I(0)^2$ を計算して示せ．

(3) 積分 $I(a)$ の値を求めよ．例えば，$I(a)$ を a に関して微分してみる．

(京都大 2006)　　(m20063304)

0.281 $f(z)$ が $z = a$ を中心とする単位円 C の内部および周上で正則であるとき，以下を証明せよ．

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(a + e^{i\theta})d\theta\,, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

(京都大 2008)　　(m20083306)

0.282 ２次元ユークリッド空間の直交座標系を一つ定め，その x 軸および y 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$ とする．また，x 軸および y 軸をそれぞれ反時計方向に θ だけ回転して得られる座標軸を x' 軸，y' 軸とし，x' 軸と y' 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e'}_x$ および $\boldsymbol{e'}_y$ とする．このとき，以下の (1)～(5) に答えよ．

(1) 条件 $(\boldsymbol{e'}_x\ \ \boldsymbol{e'}_y) = (\boldsymbol{e}_x\ \ \boldsymbol{e}_y)P$ を満足する２次の正方行列 P を θ を用いて表せ．

(2) 行列 P に対して $P^T P = P P^T = I$ が成り立つことを示し，この等式の幾何的な意味を，４つのベクトル $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e'}_x$，$\boldsymbol{e'}_y$ を用いて説明せよ．なお，P^T は P の転置行列を，また，I は２次の単位行列をそれぞれ表す．

(3) このユークリッド空間における任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y = x'\boldsymbol{e'}_x + y'\boldsymbol{e'}_y$ のように，２通りの座標を用いて表すことができる．これら２通りの座標間の関係を行列 P を用いて表せ．さらに，$x^2 + y^2 = \left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2$ が成り立つことを示せ．

(4) このユークリッド空間におけるベクトル全体をそれ自身に写す変換 f が

$$f(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{u}) + \beta f(\boldsymbol{v})$$

なる関係を満たすとき，f を一次変換という．ここに α と β は任意の実数，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は任意のベクトルである．一次変換 f と $\boldsymbol{e}_x$ $\boldsymbol{e}_y$ に対して，

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e}_x) = a_{xx}\boldsymbol{e}_x + a_{yx}\boldsymbol{e}_y \\ f(\boldsymbol{e}_y) = a_{xy}\boldsymbol{e}_x + a_{yy}\boldsymbol{e}_y \end{cases} \qquad ④$$

が成り立つとし，ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $f(\boldsymbol{u})$ をそれぞれ $\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y$，$f(\boldsymbol{u}) = X\boldsymbol{e}_x + Y\boldsymbol{e}_y$ と表すとき，これら２組の座標間の関係を

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の形で表現する行列 A を求めよ．

(5) 一次変換 f に対して，(4) の条件④に加えて．

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e'}_x) = a'_{xx}\boldsymbol{e'}_x + a'_{yx}\boldsymbol{e'}_y \\ f(\boldsymbol{e'}_y) = a'_{xy}\boldsymbol{e'}_x + a'_{yy}\boldsymbol{e'}_y \end{cases}$$

が成り立つとする．ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $f(\boldsymbol{u})$ をそれぞれ $\boldsymbol{u} = x'\boldsymbol{e'}_x + y'\boldsymbol{e'}_y$, $f(\boldsymbol{u}) = X'\boldsymbol{e'}_x + Y'\boldsymbol{e'}_y$ と表せば，２組の座標間の関係は (4) と同様に

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

と表現される．このとき，行列 A と A' の関係を P を用いて表せ.

(京都大 2009)　　(m20093303)

0.283 3 次元ユークリッド空間の直交座標系を一つ定め，その x 軸，y 軸および z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ とする．２つのベクトル $\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{e}_x + u_y\boldsymbol{e}_y + u_z\boldsymbol{e}_z$ および $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{e}_x + v_y\boldsymbol{e}_y + v_z\boldsymbol{e}_z$ について，以下の (1)〜(4) に答えよ．ただし，$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は零ベクトルではないものとする．

(1) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$ を u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z を用いて表せ.

(2) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積 S を u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z を用いて表せ．ただし，平行四辺形の表裏や向きは考えないものとする.

(3) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ に対して，ベクトル $\boldsymbol{w}$ を，行列式を形式的に用いて

$$\boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

と定義する．ベクトル $\boldsymbol{w}$ は，$\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ に直交することを示せ.

(4) ベクトル $\boldsymbol{w}$ の長さは (2) の面積 S に等しいことを示せ.

(京都大 2009)　　(m20093304)

0.284 x, y をデカルト座標とする R^2 において, 原点以外の点 P を原点 O のまわりに角度 θ だけ反時計回りに回転させた点を P_θ で表す. いま, P を x軸に関して線対称の位置に移した点を　P' とする. さらに, P' を直線 $ax + by = 0$ に関して線対称の位置に移した点を P'' とする. ただし, a, b は定数で, 同時にゼロとはならない. 位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OP_\theta}$, $\overrightarrow{OP'}$, $\overrightarrow{OP''}$ をそれぞれ $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}_\theta$, $\boldsymbol{p}'$, $\boldsymbol{p}''$ で表す. 以下の (1)〜(4) に答えよ.

(1) $\boldsymbol{p}_\theta = R\boldsymbol{p}$ をみたす行列 R を見出せ.

(2) $\boldsymbol{p}' = M\boldsymbol{p}$ をみたす行列 M を見出せ.

(3) $\boldsymbol{p}'' = N\boldsymbol{p}$ をみたす行列 N を見出せ.

(4) $\boldsymbol{p}'' = \boldsymbol{p}_\theta$ が成り立つように, 直線 $ax + by = 0$ を定めよ.

(京都大 2010)　　(m20103301)

0.285 R^2 に直交座標系 $O - xy$ をとり，次式で定義される曲線 C を考える．

$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta + b\cos 2\theta \\ y &= a\sin\theta + b\sin 2\theta \end{aligned} \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

ここに，a, b は正の数であり，$a \neq b$ を満たすものとする．このとき問 (1)〜(3) に答えよ.

(1) $\Phi(\theta)$ は，次式を満たす連続関数であるとする．

$$(a\cos\theta + b\cos 2\theta)\tan\Phi(\theta) = a\sin\theta + b\sin 2\theta \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

このとき，$\dfrac{d\Phi}{d\theta}$ を θ の関数として求めよ．

(2) $a=2,\ b=1$ のとき，C の概形を描け．また $\Phi(0)=0$ であるとき，$\Phi(2\pi)$ を求めよ．

(3) $a=2,\ b=1$ のとき，次の積分を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2+b^2+2ab\cos\theta}$$

(京都大 2014) (m20143306)

0.286 実数のパラメータ θ に依存する行列 $A(\theta)$ が

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{2}{3}\cos^2\theta & -\dfrac{2}{3}\cos\theta\sin\theta \\ -\dfrac{2}{3}\cos\theta\sin\theta & 1-\dfrac{2}{3}\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

で与えられている．$\mathbb{R}^2$ の点 $\boldsymbol{x}$ をデカルト座標系 $O-x_1x_2$ を用いて $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2)$ と表す．これらを用いて，集合 $\Omega(\theta)$ を

$$\Omega(\theta) = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x}\cdot A(\theta)\}\boldsymbol{x} \leq 1\}$$

と定義する．ここに，$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{2} x_i y_i$$

である．このとき，次の (1)〜(4) に答えよ．

(1) $A(\theta)$ のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化して単位ベクトルとせよ．

(2) $\Omega(\theta)$ の概形を描け．

(3) $\Omega(0)\cap\Omega(\pi/2)$ の面積を求めよ．

(4) $\displaystyle\bigcup_{0\leq\theta\leq\pi/2}\Omega(\theta)$ を図示し，その面積を求めよ．ここに，$\boldsymbol{x} \in \displaystyle\bigcup_{0\leq\theta\leq\pi/2}\Omega(\theta)$ とは，$0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$ なる θ_0 があって，$\boldsymbol{x} \in \Omega(\theta_0)$ となることである．

(京都大 2015) (m20153305)

0.287 $e_1,\ e_2$ を，n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の単位ベクトルとし，両者がなす角 θ は $0<\theta<\pi/2$ をみたすものとする．e_1 によって張られる $\mathbb{R}^n$ の 1 次元部分空間を L_1，e_2 によって張られる $\mathbb{R}^n$ の 1 次元部分空間を L_2 とし，$\mathbb{R}^n$ から $L_1,\ L_2$ への正射影をあらわす線形変換をそれぞれ $P_1,\ P_2$ とする．問 1 〜問 4 に答えよ．

問 1 P_1 の固有値を，重複度を含めてすべて答えよ．また，0 でない固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

問 2 P_1+P_2 の固有値を，重複度を含めてすべて答えよ．また，0 でない固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

問 3 P_1-P_2 は，$\pm\sin\theta$ を固有値としてもつことを示せ．

問 4 P_1-P_2 の固有値 $\sin\theta$ に対応する固有ベクトルを，e_1 とのなす角 α が $\pi/2$ より小さくなるようにとったとき，$\alpha=\pi/4-\theta/2$ であることを示せ．

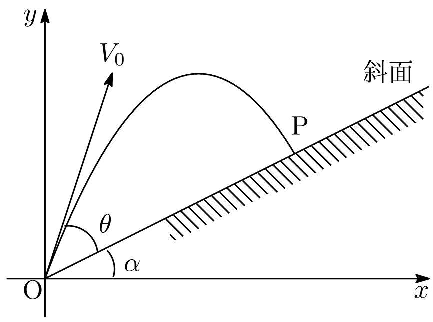
(京都大 2018)　　(m20183303)

0.288　xy 平面上の図形 D : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$　$(0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq\ r \leqq\ e^{\theta})$ に対して,

重積分 $\displaystyle\iint_D 1dxdy$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2013)　　(m20133404)

0.289　右図のように水平面と $\alpha\ (0 < \alpha < \pi/2)$ の角をなす斜面において，初速度 V_0 で斜面に対して $\theta\ (\theta > 0,\ 0 < \alpha + \theta < \pi/2)$ の方向に物体を投げる．以下の問いに答えよ．



(1)　物体の軌跡の x および y 座標は時間 t を媒介変数とするとき，

$$x = V_0 t\cos(\alpha + \theta)$$
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t\sin(\alpha + \theta)$$

で与えられる．ただし，g は重力加速度である．斜面上の到達距離 OP を求めよ．

(2)　到達距離が最大となる投射角度 θ およびその時の到達距離 OP を求めよ．

(大阪大 2004)　　(m20043503)

0.290　xy 平面上で，曲線 C は媒介変数 θ を用いて，

$$x = 2a\cos\theta + a\cos 2\theta$$
$$y = 2a\sin\theta - a\sin 2\theta$$

で表される．ただし, $a > 0$ とする.

この曲線 C によって表される図形について，次の問いに答えよ.

(1)　曲線 C の概略図を示せ.　　(2)　曲線 C に囲まれる図形の面積を求めよ.

(大阪大 2005)　　(m20053502)

0.291　(1)　空間上の直交座標 (x, y, z) を極座標 (r, θ, φ) ：

$x = r\sin\theta\cos\varphi,\quad y = r\sin\theta\sin\varphi,\quad z = r\cos\theta\quad (r > 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi < 2\pi)$

に変換するとき，そのヤコビアン（関数行列式）を計算しなさい.

(2)　広義積分　$\displaystyle I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}} dx\,dy\,dz$

について，$\alpha = \dfrac{1}{2}$ のときの値 $I\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めなさい.

(3)　$I(\alpha)$ が収束する α の範囲を求めなさい.

(4)　広義積分　$\displaystyle J(\alpha,\ \beta) = \iiint_B \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha} \mid \log(x^2+y^2+z^2) \mid^{\beta}} dx\,dy\,dz$

が収束するような $\alpha,\ \beta$ の満たすべき条件を求めなさい.

ただし，$B = \left\{(x, y, z)\ :\ x^2 + y^2 + z^2 < \dfrac{1}{4}\right\}$.

(大阪大 2007)　　(m20073506)

0.292　次の値を留数定理を用いて計算し，四捨五入で小数点以下第 1 位まで求めよ．ただし，$e = 2.718\cdots$ である.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2\cos\theta} d\theta$$

(大阪大 2008)　　(m20083505)

0.293 原点を $(0,0)$ として，$\overrightarrow{a}=(1,1)$，$\overrightarrow{b}=(-2,0)$，$\overrightarrow{c}=t\overrightarrow{a}+(1-t)\overrightarrow{b}$ とする．ただし，t は実数である．

(1) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の作る角 θ を求めよ．

(2) $|\overrightarrow{c}|$ が最小となるような t の値とその最小値を求めよ．また，そのとき $\overrightarrow{c}$ と $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$ は互いに直交することを示せ．

(大阪大 2008)　　(m20083511)

0.294 関数 f を, 実軸上で定義された周期 1 の連続微分可能な実数値関数とする. この f に対して $\hat{f}(k)$ を

$$\hat{f}(k)=\int_0^1 e^{-2\pi ikt}f(t)\,dt$$

と定義する. このとき, 複素数 z に対して

$$u(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\hat{f}(k)z^k+\sum_{k=-\infty}^{-1}\hat{f}(k)\bar{z}^{|k|}$$

とおく.

(1) 任意の $r\in(0,1)$ に対して, $u(z)$ は $|z|\le r$ で絶対かつ一様収束することを示せ.

(2) $u=u(z)$ は実数値関数で, $z=x+iy$ とするとき,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

となることを示せ.

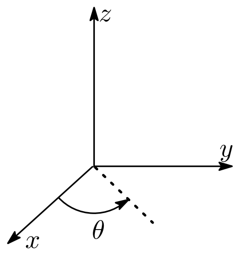
(3) 任意の $r\in(0,1)$ に対して, $z=re^{2\pi i\theta}$ とするとき,

$$u(z)=\int_0^1 f(t)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi(\theta-t))+r^2}\,dt$$

となることを示せ.

(大阪大 2010)　　(m20103509)

0.295 下図に示すように，3 次元実ベクトル空間における直交座標系を考える．z 軸回りの回転については，回転角 θ の正の方向を，下図の矢印の方向とする．また，$0\le\theta\le 2\pi$ とする．このとき，以下の問に答えよ．



(1) 点 (x,y,z) を点 (x',y',z') へと移す xy平面に平行な移動　$x'=x+az$，$y'=y+bz$，$z'=z$ を考える．このとき，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

なる 3 次正方行列 A を求めよ．

(2) 点 (x,y,z) を点 (x',y',z') へと移す z 軸周り角 θ の回転を考える．このとき，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

なる 3 次正方行列 B を求めよ．

(3) 問い (1),(2) における行列 A, B に関して，行列式 $|AB|$ を求め，$(AB)^{-1}$ が存在することを示せ．

(4) 問い (1),(2) における行列 A, B に関して，$(AB)^{-1}$ を求めよ．

(5) 問い (1),(2) における行列 A, B に関して，$AB = BA$ となるための必要十分条件を示せ．

(大阪大 2012)　　(m20123504)

0.296 (1) 以下を示せ．

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{z}{z^2+1}e^{iz}dz = \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{z}{z^2-1}e^{iz}dz = 0$$

ただし，正の実数 R に対し

$$\Gamma_R = \{Re^{i\theta}\,\Big|\,0 \leq \theta \leq \pi\}$$

であり，積分の向きは反時計回りにとるものとする．

(2) 積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+1}\sin x\,dx$$

の値を求めよ．

(3) 積分

$$J = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2-1}\sin x\,dx$$

の値を求めよ．

(大阪大 2013)　　(m20133506)

0.297 関数 $x(t)$, $y(t)$ に関する次の連立微分方程式について，以下の問いに答えよ．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 2y + \cos 2t \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

(1) $x(t)$ および $y(t)$ の一般解を求めよ．

(2) 初期条件 $x(0) = y(0) = 0$ として $x(t)$ と $y(t)$ を求めよ．

(3) $t \to \infty$ において $x(t)$ が $A\cos(\omega t + \theta)$ なる関数形に漸近することを示し，その時の A, ω, θ の値を求めよ．ただし，A, ω, θ は実数であり，$A > 0$, $\omega > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ とする．また，θ は逆三角関数を用いて表しても構わない．

(大阪大 2016)　　(m20163509)

0.298 θ が $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で変化するとき，$x = 2\cos\theta$,　$y = 2\sin 2\theta$ で表される点 (x,y) は 1 つの曲線を描く． この曲線の方程式を $y = f(x)$ とする． $y = f(x)$ の 1 点 (a,b) における接線の方程式が $y = -2(x-c)$ となるとき，以下の問いに答えよ．

(1) a, b, c の値をそれぞれ求めよ．

(2) 区間 $0 \leq x \leq a$ における曲線 $y = f(x)$ と区間 $a \leq x \leq c$ における直線 $y = -2(x-c)$ と x 軸で囲まれる領域を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(大阪大 2017)　　(m20173501)

0.299　(1)　実 2 変数の実数値関数 $u(x,y)$ と $v(x,y)$ に対して，複素変数 z の関数 f を

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \qquad (z = x + iy)$$

で定める．$f(0) = 0$ かつ

$$v(x,y) = ye^x \cos y + (x+1)e^x \sin y$$

であるとき，f が複素平面上で正則となる $u(x,y)$ を求めよ．

(2)　$0 < a < 1$ とする．積分　$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1 - a\cos\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} d\theta$　の値を求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193509)

0.300　複素数 z に関する以下の複素関数 $f(z)$ を考える．

$$f(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{(3z^2 - 10z + 3)(2z^2 + 5z + 2)}$$

(1)　$f(z)$ の孤立特異点を全て求めよ．

(2)　(1) で求めた孤立特異点のうち，$|z| < 1$ を満たすそれぞれの点における $f(z)$ の留数を求めよ．

(3)　$|z| = 1$ のとき，実数 θ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ を用いて $z = e^{i\theta}$ とおける．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位を表す．このとき，$\cos\theta$ を z を用いて表せ．

(4)　以下の積分を複素積分に置き換えることにより，その値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta + 1}{(5 - 3\cos\theta)(5 + 4\cos\theta)}\, d\theta$$

(大阪大 2021)　　(m20213504)

0.301　2 変数関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

で定める．ここで，関数 $\theta = \tan^{-1} s$ は，関数

$$s = \tan\theta \quad \left\{-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$$

の逆関数である．2 変数関数 $g(x,y)$ を

$$g(x,y) = h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)e^{f(x,y)}$$

で定める．ここで，関数 $h(r)$ は区間 $(0,\infty)$ を定義域とし，区間 $(0,\infty)$ において 1 回微分可能とする．以下の問いに答えよ．

(1)　2 変数関数 $p(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ の x についての偏導関数 $p_x(x,y)$ を求めよ．

(2)　2 変数関数 $q(x,y) = e^{f(x,y)}$ の x についての偏導関数 $q_x(x,y)$ と y についての偏導関数 $q_y(x,y)$ を求めよ．

(3)　$g(x,y)$ の定義域において，等式

$$-yg_x(x,y) + xg_y(x,y) - h'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)e^{f(x,y)} = 0$$

が成り立っているとする． ここで，$g_x(x,y)$ は $g(x,y)$ の x についての偏導関数，$g_y(x,y)$ は $g(x,y)$ の y についての偏導関数，$h'(r)$ は $h(r)$ の導関数を表す．$h(1) = 1$ を満たす $h(r)$ を求めよ．

(大阪大 2021)　　(m20213506)

0.302 $0 \leqq \theta < 2\pi,\ 0 \leqq \phi < 2\pi$ とする．3 次の正方行列 $A,\ B$ を次式で定義し，$C = AB$ とする．

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}$$

なお，虚数単位は $i\ (=\sqrt{-1})$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 行列 C の行列式の値を求めよ．

(2) 行列 C のすべての固有値およびそれらの絶対値を求めよ．

(大阪大 2022)　　(m20223506)

0.303 (1) 次の値をそれぞれ $re^{i\theta}$ の形で表せ．

(a) $\dfrac{5 - i\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + i3}$　　(b) $\sqrt[3]{1 - i}$

(2) 次の積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{2}{5 + 4\cos\theta} d\theta$

(大阪府立大 2003)　　(m20033603)

0.304 (1) $8i$ の 3 乗根をすべて求めよ．ただし，i は虚数単位である．

(2) 複素積分を用いて，次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - \cos\theta}$$

(大阪府立大 2008)　　(m20083603)

0.305 n を 0 以上の整数とし，

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2)^{n/2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．ただし．任意の自然数 ℓ に対して，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} t^\ell e^{-t^2} = 0$ となることは証明なしに用いてもよい．

(1) 極座標への変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を用いて，J_n を r に関する積分のみで表示せよ．

(2) J_0 の値を求めよ．

(3) n を 2 以上の自然数とするとき，J_n と J_{n-2} の関係式を求め，さらに J_{10} の値を求めよ．

(大阪府立大 2010)　　(m20103602)

0.306 $x,\ y$ は次のような変数 θ の関数である．

$$x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1 - \cos\theta) \qquad (a > 0,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

2 次元直交座標系 $(x,\ y)$ において，$x,\ y$ が表す曲線（サイクロイド）と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めなさい．

(大阪府立大 2010)　　(m20103613)

0.307 関数 $X(r,\theta) = r\cos\theta$，$Y(r,\theta) = r\sin\theta$ の定義域はいずれも $D = (0,\infty) \times (-\pi,\pi)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 2 つの集合

$$A = \left\{ \left(X(r,\theta_0), Y(r,\theta_0) \right) \mid r \in (0,\infty) \right\},\ B = \left\{ \left(X(r_0,\theta), Y(r_0,\theta) \right) \mid \theta \in (-\pi,\pi) \right\}$$

を 1 つの座標平面上に図示せよ．ただし，$\theta_0 \in (-\pi,\pi)$，$r_0 \in (0,\infty)$ は定数である．

(2) 行列 $J(r,\theta) = \begin{pmatrix} X_r(r,\theta) & Y_r(r,\theta) \\ X_\theta(r,\theta) & Y_\theta(r,\theta) \end{pmatrix}$ とその行列式 $|J(r,\theta)|$ を求めよ．ただし，

$$X_r = \frac{\partial X}{\partial r},\ Y_r = \frac{\partial Y}{\partial r},\ X_\theta = \frac{\partial X}{\partial \theta},\ Y_\theta = \frac{\partial X}{\partial \theta}$$

である．

(3) 2つのベクトル $\big(X_r(r,\theta), Y_r(r,\theta)\big)$，$\big(X_\theta(r,\theta), Y_\theta(r,\theta)\big)$ が直交することを示せ．

(大阪府立大 2011)　　(m20113602)

0.308 (1) $\omega = \exp z$ により，z 平面の直線 $x = A$（定数）が ω 平面で描く図形を説明せよ．

(2) 次の定積分の値を求めよ．ただし，$|a| \neq 1$ とする．

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a\,\cos\theta + a^2}\,d\theta$$

(大阪府立大 2011)　　(m20113609)

0.309 以下の問いに答えよ．

(1) $z = x + iy$ とするとき，実部が $u(x,y) = x^2 - y^2$ で与えられる正則関数 $f(z)$ の虚部を求めよ．また，$f(z)$ を z の関数として表せ．

(2) 次の定積分値を求めよ．

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\cos\theta + 5} d\theta$$

(大阪府立大 2013)　　(m20133609)

0.310 (1) z を複素数とする．複素平面上において，原点を中心として半径 a の円 L を積分路とするとき，

$$\int_L \frac{dz}{z}$$

を計算せよ．

(2) 複素積分を用いて，次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} \frac{3}{4 - \sin\theta} d\theta$$

(大阪府立大 2017)　　(m20173603)

0.311 留数を用いて，次の定積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 3\sin\theta} d\theta$

(大阪府立大 2019)　　(m20193603)

0.312 3次元空間内の単位球を B とおく．すなわち，

$$B = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1\right\}$$

とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $x = r\sin\theta\cos\varphi$，$y = r\sin\theta\sin\varphi$，$z = r\cos\theta$ とおく．この変数変換のヤコビ行列式を計算せよ．

(2) 定積分

$$\iiint_B (x^2 + y^2) e^{-(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} dxdydz$$

の値を求めよ．

(大阪府立大 2019)　　(m20193607)

0.313 $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=0$ という関係がある．$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ として，$(x,y)\to(r,\theta)$ に変数変換せよ．ただし，$f(x,y)=g(r,\theta)$

(神戸大 1994)　　(m19943801)

0.314 $f(x,y)$ は何回でも微分できる関数とする．$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ g(r,\theta)=f(x,y)$ とするとき，以下の等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

（神戸大 2001）　　(m20013805)

0.315 正の整数 n, および実数 x に対し

$$e^x=1+x+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta_{x,n}x}$$

と表し, 数列 $\{\theta_{x,n}\}$ を定義する．ここで，$0<\theta_{x,n}<1\ \ (n=1,2,\cdots)$ である. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) 次の式が成り立つことを示せ.

$$e^{\theta_{x,n}x}=1+\frac{x}{n+2}e^{\theta_{x,n+1}x}$$

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to0}\theta_{x,n}$ を求めよ.

（神戸大 2004）　　(m20043803)

0.316 次の各問に答えよ.

(1) 積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta d\theta$ の値を求めよ.

(2) 次の D 上の重積分を, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ と変数変換することにより求めよ.

$$\iint_D x^2dxdy\,,\ \ D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq x\}$$

(神戸大 2004)　　(m20043805)

0.317 $r:[a,b]\ \longrightarrow \boldsymbol{R}^+$ を連続微分可能な関数とし，$(x,y)-$ 平面上の曲線 $x=r(\theta)\cos\theta$, $y=r(\theta)\sin\theta$, $a\leq\theta\leq b$ を α とする．ここで $0\leq a\leq b\leq\pi/2$. 曲線 α 上の各点と原点を結ぶ線分から出来る扇形領域の面積を $\mathcal{A}$, α の長さを $\mathcal{L}$ とするとき

$$\mathcal{A}=\int_a^b f(r)d\theta\ ,\qquad \mathcal{L}=\int_a^b g(r,r')d\theta$$

となる $f(r)$ と $g(r,r')$ を与えよ．さらに $r(\theta)=1/\cos\theta$ の場合の $\mathcal{A}$ または $\mathcal{L}$ の上記公式を用いて

$$\int_0^{\pi/3}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\sqrt{3}$$

を説明せよ.

(神戸大 2006)　　(m20063804)

0.318 (1) $x=\sin^2\theta$ と変数変換して，次の積分の値を求めよ．$\displaystyle\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$

(2) 次の xy 平面上の領域 D を図示せよ．　$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1\leqq\ x+y\leqq\ 4,\ 0\leqq\ x,\ 0\leqq\ y\right\}$

(3) 変数変換 $x=st,\ y=s(1-t)$ により，次の st 平面上の領域 E が (2) の領域 D に 1 対 1 に写されることを示せ.　$E=\left\{(s,t)\ \middle|\ 1\leqq\ s\leqq\ 4,\ 0\leqq\ t\leqq\ 1\right\}$

(4) 次の重積分の値を求めよ．ただし，D は (2) で定義した領域とする． $\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{x}{y(x+y)}}\,dxdy$

(神戸大 2016)　　(m20163809)

0.319 関係式 $y = x\tan\theta$ の定める陰関数 $\theta = \theta(x,y)$ について　$\Delta\theta = \dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$　を計算せよ．

(神戸大 2017)　　(m20173803)

0.320 (1) $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $g(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy$ の臨界点を全て求め，それぞれの点で関数が極値をとるかどうか判定せよ．

(2) $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ が回転対称であるとき，$x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ を満たすことを示せ．ただし，$f(x,y)$ が回転対称であるとは，任意の $x,y,\theta \in \mathbb{R}$ に対し

$$f(x,y) = f(x\cos\theta + y\sin\theta,\ -x\sin\theta + y\cos\theta)$$

を満たすことをいう．

(神戸大 2018)　　(m20183803)

0.321 (1) xy 平面上の領域

$$D = \left\{(x,y) \mid x^2 + (y-1)^2 \le 1\right\}$$

が極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \quad (0 \le \theta < 2\pi)$ によって対応する θr 平面上の領域を E とする．D と E を図示せよ．

(2) xyz 空間内の領域 $A,\ B$ を次のように定める．

$$A = \left\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 4, \quad 0 \le z\right\}$$

$$B = \left\{(x,y,z) \mid x^2 + (y-1)^2 \le 1\right\}$$

A と B の共通部分の体積を求めよ．

(神戸大 2020)　　(m20203804)

0.322 $z = f(x,y)$, $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ f$　は C^1 級なるとき，次式を証明せよ．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(鳥取大 2000)　　(m20003904)

0.323 半径 r の円形の紙から扇形を切り取って直円錐形の容器を作り，その容積を最大にしたい．切り取る扇形の中心角 θ はいくらにすればよいか求めよ．ただし，容器の接合部は無視する．

(鳥取大 2007)　　(m20073903)

0.324 位置ベクトル，$\overrightarrow{OA} = 3\vec{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{k}}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{\boldsymbol{i}} + 4\vec{\boldsymbol{j}} + \vec{\boldsymbol{k}}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{\boldsymbol{j}} + 3\vec{\boldsymbol{k}}$ が与えられている．以下の問いに答えなさい．なお，$\vec{\boldsymbol{i}}$, $\vec{\boldsymbol{j}}$ および $\vec{\boldsymbol{k}}$ はそれぞれ x,y および z 方向における単位ベクトルを，O は原点を表す．

(1) 外積 $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ を求めよ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ の内積を計算し，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ とのなす角 θ に対する $\cos\theta$ を求めよ．

(3) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ で作られる三角形 OAC の面積を求めよ．

(4) ベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ および $\overrightarrow{OC}$ で作られる平行六面体の体積を求めよ．

(鳥取大 2007)　　(m20073913)

0.325 $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ とおくとき，次の式が成り立つことを示せ.

(1) $R(\alpha)R(\beta) = R(\beta)R(\alpha) = R(\alpha+\beta)$ (2) $R(-\alpha) = R(\alpha)^{-1}$

(鳥取大 2007) (m20073914)

0.326 2 次元において直交座標 (x, y) と極座標 (r, θ) には,

$$x = r\cos\theta\ , \quad y = r\sin\theta$$

の関係式がある $(r > 0,\ 0 < \theta \leq 2\pi)$; これについて，以下の問に答えよ.

(1) r を x, y のみの関数として表せ. また, θ を x, y のみの関数として表せ.

(2) 以下の偏微分をそれぞれ計算せよ.

(2a) $\dfrac{\partial x}{\partial r}$ (2b) $\dfrac{\partial r}{\partial x}$ (2c) $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$

(鳥取大 2010) (m20103902)

0.327 次の問に答えよ.

(1) サイクロイド：$x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ.

(2) 曲線 $y = 2x^2$ と直線 $y = x$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに回転したときに得られる立体の体積を求めよ.

(鳥取大 2011) (m20113904)

0.328 $n = 1, 2$ に対して，極座標で与えられた曲線 $C_n : r^n = \cos n\theta$ を考える。次の問に答えよ。

(1) 曲線 C_1 を xy 平面に描き，x 軸のまわりに回転してできる図形の表面積を求めよ.

(2) 曲線 $C_2 (0 \leq \theta \leq \pi/4)$ の長さ l は，$l = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ で与えられることを示せ.

(岡山大 2006) (m20064002)

0.329 (1) 座標平面上の点を直線 $y = ax$（a は実数）に関して対称な点に移す一次変換を考える.
$a = \tan\dfrac{\theta}{2}\ (-\pi < \theta < \pi)$ とおくとき, この一次変換を表す行列 A を θ を用いて表せ.

(2) 2 次直交行列 B の行列式が -1 であるとき, B の表す一次変換はある直線に関して対称な点を対応させる変換であることを示せ.

(岡山大 2010) (m20104004)

0.330 (1) 実数 t に対して， $t = \tan\theta$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$
を満たす θ として，関数 $\theta = \arctan t$ を定める．このとき，$\dfrac{d}{dt}(\arctan t)$ を求めよ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^n dx$ を $x = \sinh t$ と変数変換することにより求めよ.
ただし，n は 2 以上の自然数とし，$\sinh t$ は $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ とする.

(3) α と R を実数とし，$R \geqq 1$ と仮定する． 領域 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq R^2\}$ における重積分 $\displaystyle\iint_D x^2(x^2+y^2)^\alpha dxdy$ の値を求めよ.

(広島大 2008) (m20084101)

0.331　2 次の実正方行列全体のなすベクトル空間を V とし，その任意の元 A, B に対して

$$(A, B) = \mathrm{tr}\,({}^t\!AB)\,,$$

とおく．ただし，${}^t\!A$ は A の転置行列とし，$\mathrm{tr}\,C$ は行列 C のトレースとする．このとき以下の問いに答えよ．

(1)　(A, B) は内積であることを示せ．

(2)　A と B が

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\ ,\quad B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

で与えられているとき，(A, B) を求め，さらに A と B のなす角 θ を求めよ．
ただし，$0 \leqq \alpha - \beta \leqq \pi$ とする．

(3)　(2) で定義した A に対して，線形写像 $f\ :\ V \to \mathbb{R}$ を $f(X) = (A, X)\ \ (X \in V)$ で定義する．このとき $\mathrm{Ker}\,f$ の次元を求め，$\mathrm{Ker}\,f$ の正規直交基底を 1 組求めよ．

(広島大 2009)　　(m20094104)

0.332　実数列 $\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体のなす実ベクトル空間を V とし，級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} {a_i}^2$ が収束するような実数列 $\{a_n\}$ 全体の集合を W とする．以下の問いに答えよ．

(1)　W が V の部分ベクトル空間をなすことを示せ．

(2)　$\{a_n\}, \{b_n\} \in W$ に対して，級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ が絶対収束することを示せ．

(3)　$\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ は W 上の内積であることを示せ．

(4)　$a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, $b_n = \left(\dfrac{5}{7}\right)^n$ のとき，$\{a_n\}, \{b_n\}$ の交角 θ を求めよ．ただし，内積空間の元 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対してノルムを $||\boldsymbol{a}|| := \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$ と書くとき，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の交角とは $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ||\boldsymbol{a}||\ ||\boldsymbol{b}|| \cos\theta$ を満たす実数 $\theta(0 \leq \theta \leq \pi)$ のことである．

(広島大 2014)　　(m20144109)

0.333　実数 ℓ に対して $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x, y)$ を次で定める．

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^4 + y^4)}{(x^2 + y^2)^{\ell}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．

(1)　f が原点 $(0, 0)$ において連続であるための ℓ の条件を求めよ．

(2)　f が原点 $(0, 0)$ で x について偏微分可能であるための ℓ の条件を求めよ．

(3)　$\ell = 1$ のとき，極限

$$J = \lim_{R\to\infty} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} f(x, y)\,dxdy$$

を考える．変数変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ により，J は

$$J = \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \frac{\sin\left(r^4 \varphi(\theta)\right)}{r} dr \right) d\theta$$

となることを示せ．ここで，$\varphi(\theta) = \cos^4\theta + \sin^4\theta$ である．

(4) $\ell = 1$ のとき (3) の極限 J が存在することを示し，その値を求めよ．
その際，広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ は収束し，その値が $\dfrac{\pi}{2}$ であることを用いても良い．

(広島大 2014)　　(m20144110)

0.334 (1) 2 以上の自然数 n に対して，

$$\int \cos^n \frac{x}{3} dx = \frac{3}{n} \cos^{n-1} \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} \frac{x}{3} dx$$

が成り立つことを示せ．

(2) $f(\theta) = \cos^3 \dfrac{\theta}{3}$ とし，xy平面上の曲線

$$C \ : \ \begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\sin\theta \end{cases} \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

を考える．次の (i)，(ii)，(iii) に答えよ．

(i) C の概形を図示せよ（x 軸，y 軸との交点の座標も記すこと）．

(ii) C の長さを求めよ．

(iii) C で囲まれた部分の面積を求めよ．

(広島大 2016)　　(m20164102)

0.335 xy 平面上において，θ を変数として，座標 x, y が，$x = a(\theta - \sin\theta)$，$y = a(1 - \cos\theta)$ で与えられる曲線を，サイクロイドと呼ぶ．ここで，a は定数である．$\theta \geq 0$ におけるこの曲線上で，x 軸に対する曲線の傾きが 0 となる点 $(x,\ y)$ のうち，原点 $(x = 0,\ y = 0)$ に最も近い点を $(x_1,\ y_1)$，2 番目に近い点を $(x_2,\ y_2)$，$\cdots$，n 番目に近い点を $(x_n,\ y_n)$ とする．x_n, y_n を求めよ．

(広島大 2018)　　(m20184109)

0.336 2 重積分 . $S = \displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy$,　$D = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$ を求めることによって，

$I = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$　　を求めたい．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $S = I^2$ を示せ．

(2) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と変数変換して S を求めよ．また，I を求めよ．

(広島市立大 2008)　　(m20084201)

0.337 変数変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を用いて, 2 重積分

$$S = \iint_D e^{x^2+y^2}\, dxdy\ ,\quad D = \left\{(x, y) \,|\, 1 \leqq\ x^2 + y^2 \leqq\ 4\right\}$$

の値を求めよ．

(広島市立大 2010)　　(m20104203)

0.338 極座標 (r, θ) で表示して $r = 1 + \cos\theta$ で表わされる曲線を考える．極座標で $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ と表わせるこの曲線上の点 A での接線の方程式を求めよ．

(広島市立大 2012)　　(m20124203)

0.339 $D=\left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, x^2+y^2\leq 1\,,\ x\leq\sqrt{3}y\right\}$ とおく．
変数変換 $x=r\cos\theta\,,\ y=r\sin\theta$ を用いて，

$$\iint_D xy^2dxdy$$

を求めよ．

(広島市立大 2013)　　(m20134202)

0.340 次の方程式を解きなさい．　$\cos 3\theta+\cos\theta=0\quad(0\leqq\theta<2\pi)$

(山口大 2001)　　(m20014304)

0.341 行列 $A(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ について

(1) 逆行列 $A(\theta)^{-1}$ を求めなさい．

(2) $A(\theta_1+\theta_2)=A(\theta_1)A(\theta_2)$ を示しなさい．

(3) $A(\theta)A(-\theta)=I$（I は単位行列）を示しなさい．

(山口大 2002)　　(m20024303)

0.342 θ の範囲が $0\leq\theta<2\pi$ のとき，θ の関数　$y=2\cos 2\theta+4\sin\theta+1$
の最大値と最小値を求めなさい．また，そのときの θ の値を求めなさい．

(山口大 2003)　　(m20034301)

0.343 ド・モアブルの法則 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ を数学的帰納法で証明しなさい．

(山口大 2003)　　(m20034304)

0.344 $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ の逆行列を求めなさい．

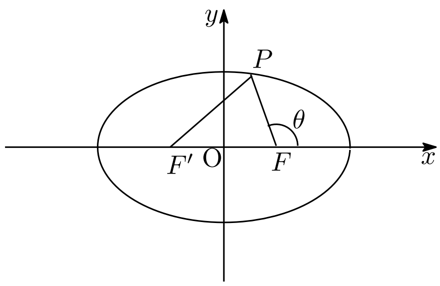
（山口大 2004）　　(m20044308)

0.345 焦点を F,F' とする楕円は，二つの線分 PF と PF' の長さの和が一定である点 P が作る曲線と定義される．今，$PF+PF'=2a$ とし，点 $F,\ F'$ の座標を $(ae,0),\ (-ae,0)$ として以下の問いに答えなさい．(e はいわゆる離心率)．

(1) この楕円の方程式を直交座標 x,y を用いて表しなさい．

(2) 線分 PF が x 軸となす角を θ，PF 間の距離を r として，この楕円の方程式を極座標で表しなさい．

(3) 楕円上の点で，点 F と最も近い点 P の座標を求めなさい．



(山口大 2006)　　(m20064308)

0.346 θ の範囲が $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の θ の関数

$$y=\frac{1}{4}(\cos 2\theta)^2-\frac{7}{3}(\sin\theta)^3+\frac{3}{4}$$

の増減表を作成し，グラフの概形を描きなさい．

(山口大 2014)　　(m20144304)

0.347 下に示す関数 y の最大値および最小値を求めなさい．また，そのときの θ の値を求めなさい．

$$y = \cos^2\theta + \sin\theta \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

(山口大 2015) (m20154303)

0.348 一辺の長さが 3 の正四面体 $ABCD$ において，辺 BC の中点を M とする．
さらに辺 CD 上で $CN = 2ND$ を満たす点を N とする，

(1) 線分 AM, AN, MN の長さを求めなさい．

(2) $\angle MAN = \theta$ とおくとき，$\cos\theta$ の値を求めなさい．

(3) $\triangle AMN$ の面積を求めなさい．

(山口大 2021) (m20214303)

0.349 次の問に答えよ．

(1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とする．このとき，行列式 $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を r, θ で表せ．

(2) (1) で求めた J に対して，$I = \displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty f(r\cos\theta, r\sin\theta)Jdr$ であることを用いて，$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ のとき I の値を求めよ．

(徳島大 1999) (m19994402)

0.350 $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 1-\cos\theta & 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$ とする．

(1) $A(\theta)$ が正則であることを示せ．

(2) 1 が $A(\theta)$ の固有値であることを示せ．

(3) $A^2(\theta)(= A(\theta)A(\theta))$ に対して，$A^2(\theta) = A(m\theta)$ となる自然数 m を求めよ．

(徳島大 2003) (m20034404)

0.351 $y = y(x)$ が微分方程式 $y'' + 2y' + 5y = 0$ を満たす. 次の問に答えよ.

(1) 微分方程式の一般解を求めよ. ただし, 最終結果に複素数が現れてはならない.（必要ならオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いてもよい.）

(2) 初期条件 $y(0) = y'(0) = -e^{\frac{3}{4}\pi}$ を満たす微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた $y(x)$ に対し, $y\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)$ と $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x)$ を求めよ.

(徳島大 2005) (m20054404)

0.352 変数変換 $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ を利用して, $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{1+\sin\theta}\,d\theta$ を求めよ.

(徳島大 2010) (m20104403)

0.353 $0 < a < 1,\ D_a = \left\{(x,y)\ ;\ a^2 \leqq\ x^2 + y^2 \leqq \dfrac{1}{a^2}\right\}$ とする.

(1) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とする. 行列式 $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を $r,\ \theta$ で表せ.

(2) $I(a) = \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$ を求めよ.

(3) $\lim_{a \to 0} I(a)$ を求めよ.

(徳島大 2010)　　(m20104404)

0.354　xy 平面上の領域を $D = \left\{(x,\ y)\ ;\ x^2+y^2 \leqq 2x,\ y \geqq \dfrac{x}{\sqrt{3}}\right\}$ とする.

(1) D の概形を図示せよ.

(2) 変数変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ (r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ により，D に対応する $r\theta$ 平面上の領域を E とする．E は，定数 $\alpha,\ \beta$ および関数 $f(\theta)$ を用いて $\{(r,\ \theta)\ ;\ \alpha \leqq \theta \leqq \beta,\ 0 \leqq r \leqq f(\theta)\}$ と表される．$\alpha,\ \beta,\ f(\theta)$ を求めよ.

(3) $\iint_D xydxdy$ を求めよ.

(徳島大 2018)　　(m20184403)

0.355　不定積分　$\int \sin^3\theta d\theta$　を求めよ.

(高知大 2015)　　(m20154505)

0.356　$f(x)$ を $(0, \infty)$ 上で 2 回微分可能な関数とする. $0 < a < b$ とし,

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{K}{2}(b-a)^2$$

を満たす定数を K とする.

(1) $F(x) = f(b) - \{f(x) + f'(x)(b-x) + \dfrac{K}{2}(b-x)^2\}$ とおくとき，$F'(x)$ を求めよ.

(2) $K = f''(a + \theta(b-a))$ を満たす $0 < \theta < 1$ が存在することを示せ.

(3) すべての $x > 0$ に対して $f''(x) \geqq \delta$ を満たす定数 $\delta > 0$ が存在するとき,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

であることを示せ.

(愛媛大 2005)　　(m20054608)

0.357　C^2 級の 2 変数関数 $z = f(x,y)$ と 2 次元の極座標変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ の合成は，r と θ の関数 $z = f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ になる.

(1) 次の等式を示せ.　$\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を z の r と θ についての偏導関数および r と θ のみを用いて表せ.

(愛媛大 2006)　　(m20064615)

0.358　次の定積分を計算せよ.　$\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\, d\theta$

(愛媛大 2007)　　(m20074616)

0.359　平面中の点 $P_1,\ P_2$ のデカルト座標（直交座標）をそれぞれ $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ とする．これら 2 つの点 P_1, P_2 と原点 O とで作られる角を $\angle P_1OP_2 = \theta$ とする場合，$\cos\theta$ を 2 つの点の座標で表すとどのようになるか.

(愛媛大 2007)　　(m20074618)

0.360 関数 $z = f(x,y)$ は偏微分可能であるとする. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と極座標変換するとき, 次の 2 つの式が成立することを示せ.

$$(a)\ \ x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = r\cos 2\theta\frac{\partial z}{\partial r} - \sin 2\theta\frac{\partial z}{\partial \theta} \qquad (b)\ \ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(愛媛大 2010) (m20104603)

0.361 (1) C^1 級の関数 $z = f(x,y)$ と $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ の合成関数 $z = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ に対して

$$z_x{}^2 + z_y{}^2 = z_r{}^2 + \frac{1}{r^2}z_\theta{}^2$$

が成り立つことを示せ.

(2) $f(x,y) = 2x^4 - 8xy^3 + y^4 + 5$ とする. 関数 $f(x,y) = 0$ で定まる陰関数 y の極値を求めよ.

(愛媛大 2015) (m20154606)

0.362 (1) 次で定義される関数 $f(x,y)$ の原点 $(0,0)$ での連続性を調べよ.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(2) C^1 級の関数 $f(x,y)$ は

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

を満たすとする. このとき, $z = f(x,y)$ と $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ の合成関数 $z = f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ は r だけの関数であることを示せ.

(3) 連続関数 $f(x)$ について, 次の等式を示せ.

$$\int_0^x dy\int_0^y dz\int_0^z f(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt$$

(愛媛大 2016) (m20164603)

0.363 $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ $\quad (0 \le \theta \le \pi\ ,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\ ,\ r \ge 0)$ とする.

(1) ヤコビヤンが $r^2\sin\theta$ になることを示せ.

(2) $D\ :\ \{x^2+y^2+z^2 \leqq R^2 \quad x \geqq 0\ ,\ y \geqq 0\ ,\ z \geqq 0\ \}$
D は半径 R の球の $\dfrac{1}{8}$ である. このときの

$$\iiint_D xy\,dx\,dy\,dz$$

を求めよ. (九州大 1999) (m19994703)

0.364 次の積分の値を求めたい.

$$I(p) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2p\cos\theta + p^2}d\theta, \quad 0 < p < 1$$

(1) 関係式

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad \text{および} \quad \frac{d}{d\theta}e^{i\theta} = ie^{i\theta}$$

を利用して，$I(p)$ を複素平面内の単位円周 C に沿っての線積分

$$I(p) = \int_C F(z)dz$$

と書き換えるには，$F(z)$ をどう定めたらよいか．

(2) 積分 $I(p)$ の値を求めよ．

(九州大 2001) (m20014708)

0.365 $f = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{4}z^2 - 1$ とする. 座標系の原点を O, x, y, z 軸上で正の向きをもつ単位ベクトルをそれぞれ i, j, k とし, 以下の問に答えよ.

(1) スカラー場 f の勾配を計算せよ.

(2) 曲面 $f = 0$ 上の点 $P(x_0, y_0, z_0)$ における勾配ベクトル a とベクトル $\overrightarrow{OP}$ とのなす角を, z_0 を用いて表せ．

(3) $x = \sin\theta\cos\varphi$, $y = \sin\theta\sin\varphi$, $z = 2\cos\theta$ とおく. ただし, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ である. 曲面 $f = 0$ 上の点 $Q(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ 2\cos\theta)$ における接平面を張る二つのベクトルの組を示し, 法線ベクトルを計算せよ.

(4) (3) と同じ表記の下で, $0 \le \theta \le \theta_0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ により囲まれる曲面の面積を $S(\theta_0)$ とする. $\dfrac{dS}{d\theta_0}$ を求めよ. ただし, $0 \le \theta_0 \le \pi$ である.

（九州大 2004） (m20044707)

0.366 複素平面上の中心 a, 半径 r の半円 $C_r(a)$ を $C_r(a) = \{z = a + re^{i\theta}\ ;\ 0 \le \theta \le \pi\}$ で定める. ただし, $i = \sqrt{-1}$ である.

(1) 正則関数 $f(z)$ に対して次式を示せ. $z = a + \varepsilon e^{i\theta}$ とおいて考えよ.

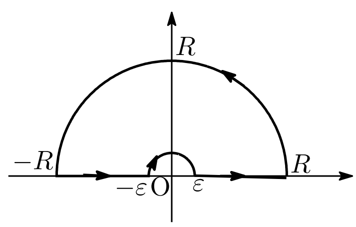
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{z-a}dz = i\pi f(a)$$

(2) 不等式 $\dfrac{2}{\pi}\theta \le \sin\theta \left(0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\right)$ が成立つことを示せ.

(3) (2) の結果を用いて次式を証明せよ.

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R(0)} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$

(4) 関数 $\dfrac{e^{iz}}{z}$ の積分を図の矢印に示す道に沿って考えること により, 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ の値を計算せよ.



（九州大 2004） (m20044708)

0.367 複素変数の関数 $f(z) = \dfrac{1}{2z^2 - 5z + 2}$ について次の問いに答えよ. ただし, 積分路 C は, 単位円周 $|z| = 1$ を反時計回りに一周する閉曲線とする.

(1) $f(z)$ の各極における留数を求めよ.

(2) 積分 $I = \displaystyle\int_C f(z)dz$ の値を求めよ.

(3) $z = e^{i\theta}$（θ : 実数, i : 虚数単位）のとき， $\cos\theta = \alpha z + \beta z^{-1}$ を満たす実数 α, β を求めよ.

(4) 積分路 C のパラメータ表示 $C\ :\ z=e^{i\theta},\ 0 \leqq \theta \leqq\ 2\pi$ を用いることにより, (2) の積分 I は, 次のように変換できる.

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{a}{b\cos\theta+c}d\theta \quad (a,b,c\ :\ \text{定数})$$

a,b,c を求めよ.

(九州大 2005)　　(m20054703)

0.368 $A=(a_{ij})\quad (i,j=1,2)$ を $2\times\ 2$ 実行列とする． A^T で A の転置行列を表すとする． ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ に対して内積を $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=x_1y_1+x_2y_2$ で定める.

(1) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$(A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ が成立する時，$A^TA=AA^T=E$ が成り立つことを示せ．ただし，E は単位行列とする.

(2) (1) の行列 A の行列式は 1 もしくは -1 であることを示せ．さらに行列 A の固有値は絶対値が 1 であることを示せ.

(3) (2) において A の行列式が -1 であるとき，ある実数 θ が存在して
$A=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ 　と書けることを示せ.

(九州大 2007)　　(m20074708)

0.369 積分 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+a\cos\theta}\,d\theta$ を複素平面の積分に変換して計算する．ただし，a は $0<a<1$ の実数である.

(1) 単位円上の任意の点，$z=e^{i\theta}$ に対して，$d\theta=\dfrac{dz}{iz}$ であることを示せ.

(2) $\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ であることから，I を積分経路を単位円 $|z|=1$ とする複素積分へ変換せよ.

(3) (2) で得られた複素積分の被積分関数の特異点のうち，単位円内部に含まれる点を書け.

(4) 留数計算によって，$I=\dfrac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$ となることを示せ.

(九州大 2008)　　(m20084703)

0.370 (1) n が整数であるとき，複素数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ について以下の式が成り立つことを示せ.

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) \quad \cdots\cdots\text{(i)}$$

(2) (i) 式を用い，$\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ を用いて表せ.

(3) (i) 式を用い，複素数 $1-i$ の三乗根をすべて求めよ.

(4) (i) 式を用い，1 の N 乗根をすべて求めよ．ただし，N は正の整数とする．また，$N=4$ の場合の解を複素平面上に図示せよ.

(九州大 2009)　　(m20094704)

0.371 3 次元空間内で

$V=\{(x,y,z)\ ;\ x=t\cos\theta\ ,\ y=t\sin\theta\ ,\ z=r\ ,\ 0\le t\le r\ ,\ 0\le r\le 3\ ,\ 0\le\theta<2\pi\}$

で表される集合 V を考える.

(1) V の体積を求めよ.

(2) L を平面

$$z = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + 1$$

とし, $S = V \cap L$ とおく.

$$\min\{z\ ;\ (x, y, z) \in S\} \qquad \max\{z\ ;\ (x, y, z) \in S\}$$

を求めよ.

(九州大 2010)　　(m20104705)

0.372 直交座標を (x, y), 極座標を (r, θ) とするとき, 曲線 $C\ :\ r = 2(1 + \cos\theta)$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 曲線 C と x 軸, y 軸との交点の直交座標を求めて, 曲線 C の概形を xy 平面上に描け.

(2) $r \leqq\ 2(1 + \cos\theta)$, $y \geqq\ 0$, $y \leqq\ -\dfrac{1}{2}x + 2$ で表される領域の面積を求めよ.

(3) 上の (2) で考えた領域の外周の長さを求めよ.

(九州大 2012)　　(m20124703)

0.373 (1) $u = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r > 0)$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(a) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ を r, θ および, u の r, θ に関する偏導関数を用いて表せ.

(b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を r, θ および, u の r, θ に関する偏導関数を用いて表せ.

(2) 領域 $D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq\ 1\right\}$ において, 関数 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ を考える. 以下の問いに答えよ.

(a) 領域 $\left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\right\}$ における $f(x, y)$ の極値とそれを与える (x, y) を求めよ. 極大か極小かも述べよ.

(b) 単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上での $f(x, y)$ の最大値, 最小値とそれらを与える (x, y) を求めよ.

(c) 領域 D における $f(x, y)$ の最大値, 最小値とそれらを与える (x, y) を求めよ.

(九州大 2014)　　(m20144704)

0.374 直交座標系の x, y, z 軸の基本ベクトルを $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とし, 位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とする. 閉曲線 $C : \boldsymbol{r} = 2\cos\theta\boldsymbol{i} + 2\sin\theta\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ $(0 \leqq \theta \leqq\ 2\pi)$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 閉曲線 C 上の点における大きさ 1 の接ベクトルを求めよ.

(2) スカラー場 $\varphi = \dfrac{1}{4}x^2 y$ の 閉曲線 C に沿う線積分を求めよ.

(3) 閉曲線 C で囲まれた円板を S とし, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{A} = -\frac{1+z}{x^2}\boldsymbol{i} + \frac{z^2}{xy}\boldsymbol{j} + (x^2 z - y)\boldsymbol{k}$$

とする. $(\triangledown\varphi) \times\ \boldsymbol{A} + \varphi(\triangledown \times\ \boldsymbol{A})$ の S 上の面積分を求めよ.

(九州大 2016)　　(m20164704)

0.375 表が出る確率が θ のコインを繰り返し投げ, 表を 1, 裏を 0 として結果を $0110\cdots$ のように順に記録していく. ここで, $0 < \theta < 1$ である. 初めてパターン“ 01 ”が現れるまでの待ち時間を T で表す. 例えば $1001\cdots$ ならば $T = 4$, また, $000001\cdots$ ならば $T = 6$ である. 以下の問いに答えよ.

(1) $T = 3$ となる確率 $p(3)$ を θ の多項式で表せ.

(2) $T=5$ となる確率 $p(5)$ を θ の多項式で表せ.

(3) $T=t \quad (t \geqq 2)$ となる確率 $p(t)$ を求めよ.

(九州大 2017) (m20174707)

0.376 確率変数 X が次の形の確率密度関数を持つ.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2} & (|x| \leqq 2) \\ 0 & (|x|>2) \end{cases}$$

(1) 確率 $P(-1 \leqq X \leqq 1)$ を求めよ.

(2) $I_n=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$ は次の漸化式 $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2} \quad (n \geqq 2)$ を満たすことを示せ.

(3) 期待値 $E[X^4]$ を求めよ.

(九州大 2018) (m20184703)

0.377 z を複素数とし，$a>2$ とする．次の問いに答えよ.

(1)

$$\int_C \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2-az+1)}dz$$

を求めよ．ただし，C は原点を中心とする半径 1 の円周を反時計回りに進む積分路とする.

(2)

$$\int_0^{2\pi} \frac{4\sin^2\theta}{a-2\cos\theta}d\theta$$

を求めよ.

(九州大 2018) (m20184704)

0.378 $a \in \mathbb{R},\ r>0$ とする． 点 $\boldsymbol{x}_1=(x_1,y_1)$ は円 $C_1=\left\{(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; {x_1}^2+{y_1}^2=1\right\}$ 上を動き，点 $\boldsymbol{x}_2=(x_2,y_2)$ は円 $C_2=\left\{(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x_2-a)^2+{y_2}^2=r^2\right\}$ 上を動くものとする.

2 点 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ 間のユークリッド距離に関する極値問題について，以下の問いに答えよ．ただし，$\mathbb{R}$ は実数全体を表すとする.

(1) 関数

$$f(\theta_1,\theta_2)=(r\cos\theta_2+a-\cos\theta_1)^2+(r\sin\theta_2-\sin\theta_1)^2, \quad (\theta_1,\theta_2 \in \mathbb{R})$$

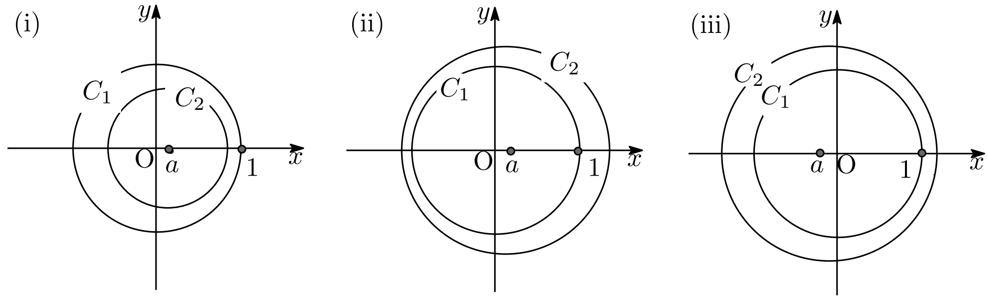
の $(\theta_1,\theta_2)=(0,0)$ におけるヘッセ行列

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} f_{\theta_1\theta_1}(0,0) & f_{\theta_1\theta_2}(0,0) \\ f_{\theta_2\theta_1}(0,0) & f_{\theta_2\theta_2}(0,0) \end{pmatrix}$$

を求めよ.

(2) (1) で求めたヘッセ行列が正定値になるための条件を a と r で表せ.

(3) 図 (i)(ii)(iii) それぞれについて，点 $\boldsymbol{x}_1^*=(1,0),\ \boldsymbol{x}_2^*=(a+r,0)$ が極値問題の極小解であるかどうか判定せよ.



(九州大 2021)　　(m20214712)

0.379 以下のように XY 平面上の点 $(x_1,\ y_1)$ を点 $(x_2,\ y_2)$ へうつす線形変換 $(*)$ を考える.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdots (*)$$

(1) ア) 行列 M の行列式の値 $(\det M)$ を求めよ.

イ) x_2, y_2 を用いて, x_1, y_1 をそれぞれ書き表せ.

(2) 原点を中心とした単位円 C : $x^2+y^2=1$ を, 線形変換 $(*)$ を用いて変形した閉曲線 D を考える. D を表す x, y の方程式を求めよ.

(3) 原点を中心とし, x 軸と y 軸に長短径をもつ楕円 E は以下の方程式で表される.

$$E\ :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

E を原点まわりに反時計方向に角度 θ だけ回転した楕円 E' を表す式を求め, 以下の空白ア〜ウを埋めよ.

$$E'\ :\ \left(\boxed{\quad ア \quad}\right)x^2+\left(\boxed{\quad イ \quad}\right)xy+\left(\boxed{\quad ウ \quad}\right)y^2=1$$

(4) (3) の結果を用いて閉曲線 D が楕円であることを示し, その面積を求めよ.

(九州大 2022)　　(m20224705)

0.380 極座標 (r, θ, ϕ) における「面積素」および「体積素」を求め, これらの結果を用いて, 半径 a の球の面積 S, および体積 V を計算しなさい.

(佐賀大 2003)　　(m20034933)

0.381 $z=f(x,y)$ は全微分可能とし, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とするとき, $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ ならば, $f(x,y)$ は θ だけの関数であることを示せ.

（佐賀大 2004）　　(m20044916)

0.382 平面上の直線 l を $l\ :\ y=(\tan\theta)x\ \ (-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$ とし, f を平面上の与えられたベクトル $\boldsymbol{a}$ を l と線対称な位置に移すという線形写像とする. このとき以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするとき, $f(\boldsymbol{e}_1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)$ を求めよ.

(2) 線形写像 f を表す行列を求めよ.

(佐賀大 2005)　　(m20054919)

0.383 次の問に答えよ.

(1) r を中心からの距離, θ を x 軸とのなす角とする.　いま曲線が極座標 $r=f(\theta)$ で与えられる場合, 曲線と直線 $\theta=\theta_1$ および $\theta=\theta_2$ とで囲まれる図形の面積 S が次式で与えられることを証明せよ.

$$S=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\{f(\theta)\}^2\,d\theta$$

(2) 曲線 $r=a(1+\cos\theta)$, $a>0$ の囲む面積を求めよ. ただし $0 \leqq \theta \leqq\ 2\pi$ とする.

(3) 極座標 r の直交座標の微分量（変分）について, その二乗和の平方根を考慮することにより $r=a(1+\cos\theta)$, $a>0$ の境界線の全長を求めよ. ただし $0 \leqq \theta \leqq\ 2\pi$ とする.

(佐賀大 2005)　　(m20054925)

0.384 (1) $f(x) = \exp(x)$ のとき，$f'(x)$ と $f''(x)$ はどのように表されますか.

(2) $f(x) = \exp(x)$ のとき，$f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ はどうなりますか.

(3) マクローリンの定理は次式で表される.

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\,x^2/2! + \cdots$$
$$\cdots + f^{(n-1)}(0)\,x^{n-1}/(n-1)! + f^{(n)}(\theta x)\,x^n/n! \quad (0 < \theta < 1)$$

$f(x) = \exp(x)$ をマクローリンの定理を用いて第 4 項まで示しなさい.
（マクローリン展開）ただし，$\exp(x) = e^x$ である.

(4) 上記のマクローリン展開を第 4 項まで計算して，$\exp(1)$ を小数点以下 2 桁まで求めなさい.

(佐賀大 2007) (m20074902)

0.385 $x-y$ 平面において，y 軸上を等速運動する点 P があり，その座標を $(0, y)$ とする．x 軸上の定点を A とし，その座標を $(a, 0)$ とすると，x 軸と直線 AP とのなす角 θ の角速度は直線 AP の長さの 2 乗に反比例することを次の手順により示せ．ただし，各変数の時間微分を $y' = \dfrac{dy}{dt}$, $\theta' = \dfrac{d\theta}{dt}$ とする.

(1) 問題の関係を図で示せ.

(2) 点 P が等速運動する関係式を示せ．ただしその速度を v_0（一定値）とする.

(3) $\tan\theta$ がどのように表されるかを示し，その両辺を時間 t で微分し，題意を示せ.

(佐賀大 2008) (m20084904)

0.386 全微分可能な 2 変数関数 $z = f(x, y)$ が，$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を満たすとする.

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のとき，$\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めよ.

(佐賀大 2009) (m20094906)

0.387 (1) 次の極限を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

(2) (1) の結果を利用して次の極限を求めよ.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(\theta + h) - \cos(\theta)}{h}$$

(佐賀大 2010) (m20104913)

0.388 行列 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

(1) $|A|$（A の行列式）を求めよ.

(2) A^{-1}（A の逆行列）を求めよ.

(3) $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_3$ の内積を求めよ.

(4) $\boldsymbol{a}_2$ と $\boldsymbol{a}_3$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$ を求めよ.

(5) $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ を $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ を用いて表せ.

(佐賀大 2010) (m20104922)

0.389 $\boldsymbol{A}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ のとき，次の等式が成り立つことを示しなさい.

(1) $\boldsymbol{A}(\theta)^{-1} = \boldsymbol{A}(-\theta)$ (2) $\boldsymbol{A}(\alpha + \beta) = \boldsymbol{A}(\alpha)\boldsymbol{A}(\beta)$

(佐賀大 2012) (m20124915)

0.390 次の問いに答えよ．

(1) 平面上の点の x 軸への正射影となる線形変換 f_A を定める行列 A を示せ．

(2) 原点の周りに $\theta = 45^\circ$ 回転する線形変換　f_B を定める行列 B を示せ．

(3) f_A，f_B の順番で変換する合成変換を求め，その変換により直線 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ が移された後の直線を求めよ．

(佐賀大 2013)　　(m20134903)

0.391 $f(t) = Ae^{-\lambda t}\sin(\omega t + \theta)$ が解となるような，t を独立変数とする f の 2 階微分方程式を一つ書け．ここで $A, \lambda,\ \omega,\ \theta$ は定数とする．

(佐賀大 2014)　　(m20144902)

0.392 全微分可能な 2 変数関数 $z = f(x, y)$ が $\dfrac{\partial z}{\partial x} = x\sqrt{x^2+y^2}$ ，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = y\sqrt{x^2+y^2}$ を満たすとする．$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ のとき，$\dfrac{\partial z}{\partial r}, \dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めよ．

(佐賀大 2014)　　(m20144913)

0.393 2 次元 xy 平面を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 点 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ を原点の回りに角 ϕ だけ回転して $(x', y') = \big(r\cos(\theta+\phi),\ r\sin(\theta+\phi)\big)$ に移すときの回転行列 $R(\phi)$ を求めよ．

(2) $\Delta\phi$ が十分小さいとき，$R(\phi)$ が次のように表されることを示せ．

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\phi \\ \Delta\phi & 1 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2015)　　(m20154913)

0.394 大気中に置かれた物体が冷却する速さは，その物体の温度と周囲の温度の差に比例する．次の設問に答えなさい．

(1) 周囲温度（一定）を θ_{at}，比例定数を k とおき，時刻 t における物体の温度 θ を表す微分方程式を答えなさい．

(2) θ の一般解を答えなさい．

(3) 初期条件 $t = 0$ のとき $\theta = \theta_0$ として, θ の特殊解を答えなさい．

(4) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \theta$ を答えなさい．

(佐賀大 2016)　　(m20164934)

0.395 半径 1 の円板が x 軸上をすべることなくころがったとき，円周上にある一点 P の軌跡に着目する．円板の回転角を θ とし，$\theta = 0$ のとき，点 P は原点に位置したとする．

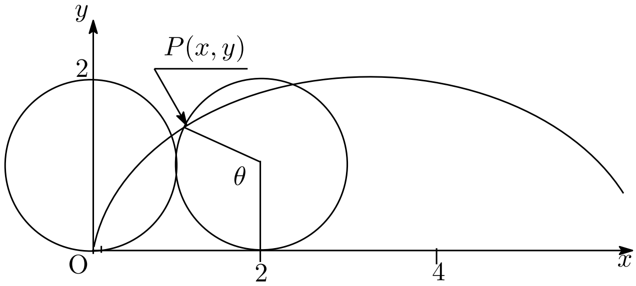
(1) 回転角が θ で与えられるとき，点 P の x 座標と y 座標を求めよ．

(2) さらに微小な角 $\Delta\theta$ 回転したときの，x 座標と y 座標の変化量を求めよ．

(3) また，このときの，点 P が移動した弧の長さを求めよ．

(4) 回転角が 0 から 2π まで変化したときの，点 P が移動した弧の長さを求めよ．

(5) 回転角が 0 から 2π まで変化したときの，点 P の軌跡と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．



(佐賀大 2017)　　(m20174908)

0.396　次のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ について以下の問いに答えよ.

(1)　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を求めよ.

(2)　ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めよ.

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}5\\1\\4\end{pmatrix}$$

(佐賀大 2018)　　(m20184913)

0.397　重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)^2\,dxdy$　　$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq 4\right\}$ について　$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ として計算せよ.

(佐賀大 2021)　　(m20214926)

0.398　一辺の長さが 1 であるような正方形の折り紙があり (fig.1), これを図のように折る場合を考える.

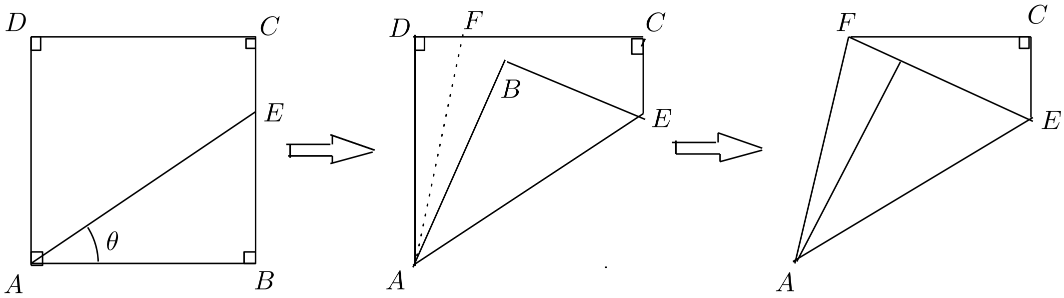


fig.1　　fig.2　　fig.3

(1)　fig.1 の状態から $\angle BAE$ が θ であるような折り目 AE に沿って折ると fig.2 のようになった. 三角形 ABE の面積を求めよ.

(2)　fig.2 の状態で三角形 ABE の面積が五角形 $ABECD$ の面積と等しいとき $\tan\theta$ の値はいくらか.

(3)　次に fig.2 の状態から $\angle BAD$ の二等分線 AF に沿って折ると fig.3 のようになった. 四角形 $AECF$ の面積を求めよ.

(長崎大 2005)　　(m20055002)

0.399　図 1 に示すように, xy 平面上に原点 $O(0,0)$ および点 $A(1,1)$, 点 $B(x,y)$ を考える. また, 2 × 2 行列を $M=\begin{bmatrix}1&1\\x&y\end{bmatrix}$ とする. また, ベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ の長さを $|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{OB}|$ で表し, ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積を $<\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}>$ で表す.

(1)　$<\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}>$ を $|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{OB}|$ および図中の θ を用いて表しなさい.

(2)　$|\overrightarrow{OB}|$ と $<\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}>$ を x,y で表しなさい。

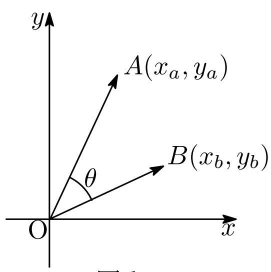


図 1

(3) $\triangle OAB$ の面積を S とすると, $S = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta$ で表される.
このことを用いて,

$$4S^2 = |M|^2$$

が成り立つことを示しなさい. ただし $|M|$ は, 行列 M の行列式の値を表す.

(4) $\triangle OAB$ が正三角形となるとき, 点 B の座標を求めよ.

(長崎大 2005)　　(m20055004)

0.400 次の行列 $\boldsymbol{A}$ について以下の問に答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ.

(2) 固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) 大きさを 1 に規格化した固有ベクトルを列ベクトルとして並べてできる行列 $\boldsymbol{P}$ の逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ を求めよ.

(4) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ を計算せよ.

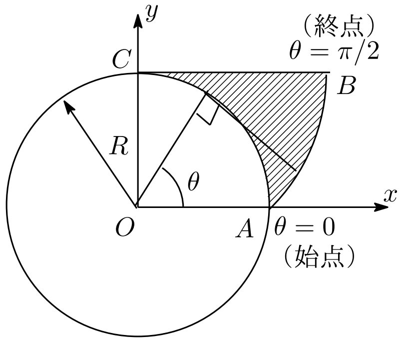
(長崎大 2005)　　(m20055013)

0.401 次の式 Ψ についてその偏導関数 $\partial\Psi/\partial r$ および $\partial\Psi/\partial\theta$ を計算しなさい.

$$\Psi = \cos\theta\exp(-r)$$

(長崎大 2005)　　(m20055018)

0.402 太さを無視できる糸を巻き付けた半径 R の円柱がある. 糸を張りながら円柱から外すとき以下の問いに答えよ.



(1) 図のように $\theta = 0$ の位置からはじめて $\theta = \pi/2$ まで糸が外れた. 円柱から外れた糸の長さ BC はいくらか.

(2) θ の位置まで糸が外れたとき, 糸の先端の x および y 座標を R と θ を用いて表せ.

(3) $\theta = \pi/2$ まで糸を外す間に, 糸の先端が描く曲線の長さ AB は次式で計算できる.

$$AB = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

上式を計算して曲線 AB の長さを求めよ.

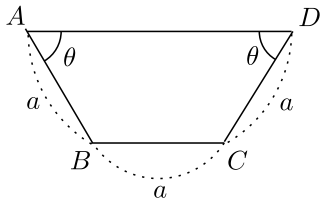
(4) 図中の斜線部分の面積 $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = R^2\left\{\int_0^{\pi/2}\left(\theta\sin\theta\cos\theta + \theta^2\sin^2\theta\right)d\theta - \frac{\pi}{4}\right\}$$

で与えられる. 右辺に含まれる定積分 $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\theta\sin\theta\cos\theta\, d\theta$ の値を求めよ.

(長崎大 2007)　　(m20075002)

0.403 図のような 3 辺 AB, BC, CD の長さが a の台形がある．この 3 辺の長さは変わらないとして，台形の面積が最大となるような角度 θ を求めなさい．



(大分大 2013)　　(m20135101)

0.404 n 次の実正方行列 A について，${}^tAA = E$ が成り立つとき，A は n 次の直交行列であるという．ここで，${}^tA$ は A の転置行列，E は n 次の単位行列だある．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A, B が共に n 次の直交行列であれば，AB, A^{-1} も n 次の直交行列であることを示せ．

(2) 2 次の直交行列 A は次の 2 つの行列のいずれかの形をしていることを示せ．
$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

(熊本大 2004)　　(m20045203)

0.405 $x = r\cos\theta$, $y = 2r\sin\theta$ のとき，行列式 $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を求めよ．

(熊本大 2006)　　(m20065201)

0.406 次の問いに答えなさい．ただし，$|x| < 1$ とする．

(1) $\left(\tan^{-1} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ を用いて，$\tan^{-1} x$ の Maclaurin 展開を求めなさい．なお，

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

である．

(2) $\theta = \tan^{-1}\dfrac{1}{5}$ とするとき，

$$\tan 2\theta = \frac{5}{12},\ \tan 4\theta = \frac{120}{119},\ \tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239}$$

であることを示して，$\dfrac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\dfrac{1}{5} - \tan^{-1}\dfrac{1}{239}$ を導きなさい．

(3) (1),(2) を用いて，π の近似値を小数第 5 位まで求めなさい．必要であれば，以下の補助表を用いてもよい．

補助表

x	x	$\dfrac{x^2}{2}$	$\dfrac{x^3}{3}$	$\dfrac{x^4}{4}$	$\dfrac{x^5}{5}$	$\dfrac{x^6}{6}$	$\dfrac{x^7}{7}$	$\cdots$
$\dfrac{1}{5}$	0.2	0.02	0.00267	0.0004	0.00006	0.00001	0	$\cdots$
$\dfrac{1}{239}$	0.00418	0.00001	0	0	0	0	0	$\cdots$

(熊本大 2013)　　(m20135203)

0.407 3 次元空間内に原点 O を一つの頂点とする三角形 OAB がある．点 A と点 B の直交座標をそれぞれ (x_1, y_1, z_1) および (x_2, y_2, z_2) とし，線分 OA と線分 OB のなす角を θ として，以下の問に答えなさい．

(1) 線分 OA および OB の長さを $\overline{OA}$ および $\overline{OB}$ のように書くことにする．このとき，線分 AB の長さの 2 乗 $\overline{AB}^2$ を $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, および θ を用いて表しなさい．

(2) $\cos^2\theta \leq 1$ であることを利用して，次の不等式

$$(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2) \geq (x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2 \qquad ①$$

が成り立つことを示しなさい．

(3) 不等式 ① で等号が成立する条件を示し，そのとき三点 O, A および B はどのような位置関係にあるか述べなさい．

(熊本大 2014)　　(m20145202)

0.408 次の重積分の値を求めるために，以下の小問 (1) と (2) について答えなさい．

$$\iint_{4\leq x^2+y^2\leq 9} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \qquad ①$$

(1) 変数 x, y を $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ のように変数 r, θ を用いて変数変換をする，この変数変換のヤコビアン $J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$ を求めなさい．

(2) 変数 r, θ とヤコビアン J を用いて，式 ① の重積分の値を求めなさい．

(熊本大 2014)　　(m20145203)

0.409 xy 平面上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を同じ平面上の点 $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ に移す写像

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) この写像の表す固有値 λ_1, λ_2 と固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ の組を求めなさい．なお，固有ベクトルの大きさは $\sqrt{2}$ とすること．

(2) xy 平面上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ により以下のように表せる．

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$$

α, β を x, y を用いて表しなさい．

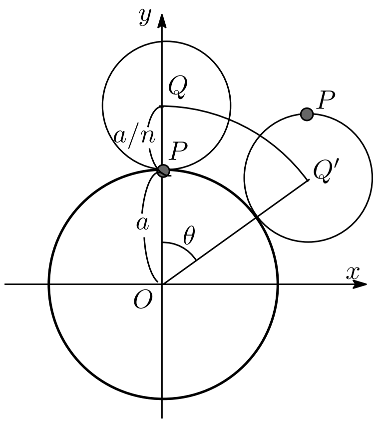
(3) $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ を α, β, $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を用いて表しなさい．

(熊本大 2019)　　(m20195203)

0.410 下図で示すように，固定された原点 O を中心とする半径 a の円の外側を半径 a/n の円が転がっていくとき，以下の問いに答えなさい．ただし n は自然数である．

(1) Q から Q' へ半径 a/n の円が転がった．$\angle QOQ'$ を θ とするとき，θ を用いて点 P の軌跡 $(x,\ y)$ を表しなさい．

(2) $0 \leq \theta \leq 2\pi$ だけ回転したとき，点 P の軌跡の全長を求めなさい．



(熊本大 2022)　　(m20225204)

0.411　重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}$,　$D\ :\ 1 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 2$　の値を，次の指示に従って求めよ．

(1)　積分領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2)　(x,y) を極座標 (r,θ) で表し，積分領域 D に対する (r,θ) の範囲を求めよ．

(3)　ヤコビアン $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|$ を求めよ．

(4)　(3) で求めたヤコビアンを用いて，重積分の値を求めよ．

(宮崎大 2004)　　(m20045303)

0.412　2 変数関数 $f(x,y)=\log(1+x^2+2y^2)$ について，次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x,y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2)　$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\ (r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくとき，関数 f の r, θ に関する偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial r}$, $\dfrac{\partial f}{\partial\theta}$ を x, y のみを用いて表せ．

(宮崎大 2007)　　(m20075302)

0.413　(1)　平面内の領域　$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq\ 1,\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0\right\}$
を xy 平面上に図示せよ．ただし，a,b は正の定数とする．

(2)　$x=ar\cos\theta,\ y=br\sin\theta\ \ (r\geqq\ 0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ と変換したとき，領域 D に対応する $r\theta$ 平面上の領域 E を不等式で表し，またそれを図示せよ．

(3)　ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ．

(4)　(3) で求めたヤコビアンを用いて，重積分 $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ の値を求めよ．

(宮崎大 2008)　　(m20085303)

0.414　次の各問いに答えよ．ただし，i を虚数単位とする．

(1)　次の複素数を計算せよ．

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$$

(2)　次の式を満足する A および θ の値を求めよ．ただし，$A>0,\ 0\leqq\theta<2\pi$ とする．

$$1+\sqrt{3}\,i=Ae^{i\theta}$$

(宮崎大 2008)　　(m20085305)

0.415　次の各問に答えよ．ただし，i を虚数単位とする．

(1) 複素数 $-1+\sqrt{3}i$ を極形式 $re^{i\theta}$ で表せ．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とせよ．

(2) 複素数 z についての方程式

$$e^{2z}+(1-\sqrt{3}i)e^{z}=0$$

の解 z を求めよ．答えは，$z=x+iy$ の形で表せ．

(宮崎大 2009)　　(m20095302)

0.416　次の各問に答えよ. ただし, i を虚数単位とする.

(1) 複素数 $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ を極形式 $re^{i\theta}$ で表せ. ただし, $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする.

(2) 複素数

$$\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}$$

を計算せよ. ただし, $x+iy$（x, y は実数）という形で答えよ.

(宮崎大 2010)　　(m20105302)

0.417　重積分

$$I=\iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dxdy\ , \quad D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqq 1\}$$

について，次の各問いに答えよ．

(1) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とおいたときのヤコビアン $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を求めよ．

(2) 重積分 I の値を求めよ．

(宮崎大 2011)　　(m20115304)

0.418　変数 t の関数 $x=x(t),\ y=y(t)$ が次の連立微分方程式の初期値問題を満たしているとする．

$$(*)\cdots\cdots\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x-y \\ \dfrac{dy}{dt}=x+2y \\ x(0)=1\ , \qquad y(0)=0 \end{cases}$$

このとき，次の各問に答えよ．

(1) 新しい関数 $r=r(t)$ と $\theta=\theta(t)$ を用いて，関数 x, y を $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, とおく（ただし，$r>0$）．このとき，r, θ はそれぞれ

$$\frac{dr}{dt}=2r\ , \quad \frac{d\theta}{dt}=1$$

を満たすことを示せ．

(2) 連立微分方程式の初期値問題 $(*)$ を解け．

(宮崎大 2011)　　(m20115305)

0.419　次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) オイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を用いて，$\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ を導け．

(2) (1) の結果を用いて，以下の等式がすべての実数 θ に対して成立するように，定数 a と b を定めよ．

$$\sin^3\theta = a\sin\theta + b\sin 3\theta$$

(宮崎大 2012)　　(m20125301)

0.420 複素数 $z_1 = 1+i$, $z_2 = -1+\sqrt{3}i$ について，次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．以下では，$z = re^{i\theta}$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ を複素数 z の極形式という．

(1) z_1, z_2 を極形式で表せ．

(2) z_1z_2, $\dfrac{z_1}{z_2}$ を極形式で表せ．

(宮崎大 2013)　　(m20135304)

0.421 座標空間において，原点を中心とした半径 a の球 B の体積 V を，以下の手順で求める．

球 B を xy 平面で切ったときの断面のうち，$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ を満たす部分を D と表す．

また，球 B の表面（球面）のうち $z \geqq 0$ を満たす部分を表す方程式を $z = f(x,\ y)$ とする．

さらに，D を xy 平面内の領域とみなし，重積分 $I = \displaystyle\iint_D f(x,\ y)dxdy$ を考える．

このとき，次の各問に答えよ．

(1) 方程式 $z = f(x,\ y)$ を具体的に書き下せ．

(2) 領域 D を xy 平面に図示せよ．

(3) 領域 D を極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて表すと，I は

$$I = \int_{\boxed{ア}}^{\boxed{イ}} \left(\int_{\boxed{ウ}}^{\boxed{エ}} \boxed{\quad オ \quad}\, d\theta \right) dr$$

と書き直せる．空欄 $\boxed{ア}$〜$\boxed{オ}$ に当てはまる数または式を答えよ．

(4) I を計算することによって，$V = \dfrac{4}{3}\pi a^3$ であることを示せ．

(宮崎大 2018)　　(m20185305)

0.422 置換積分法を用いて，次の不定積分を求めよ．ただし，$a \neq 0$

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$　　$(x = a\sin\theta$とおく$)$　　(2) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}dx$　　$(x = a\sin\theta$とおく$)$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}dx$　　$(t = \tan\dfrac{x}{2}$とおく$)$

（鹿児島大 2001）　　(m20015407)

0.423 ベクトル $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \boldsymbol{A_3}$ は互いに直交していることを示せ．

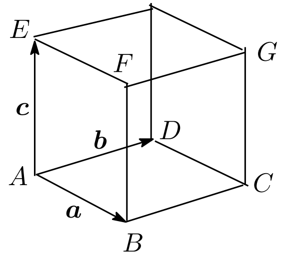
$$\boldsymbol{A_1} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A_2} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2006)　　(m20065415)

0.424 右図の立方体 $ABCD-EFGH$ において，ベクトル $\overrightarrow{ED}$ と $\overrightarrow{EC}$ のなす角 θ の余弦を求めよ．

ただし，ベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AD}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AE}$ は，互いに直交

しており，その長さはともに l である．



(鹿児島大 2007)　　(m20075403)

0.425　次の関数を微分せよ．

(1) $y = \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)$　　(2) $y = \tan(x) \cdot \log(x)$

(鹿児島大 2007)　　(m20075409)

0.426　次の関数を積分せよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{3(x+2)^3}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin^2(\theta)\,d\theta$

(鹿児島大 2007)　　(m20075410)

0.427　次の関数のグラフを図示せよ．特徴的な点は値とともに図示せよ．範囲は $\{-\pi \leqq \theta \leqq \pi\}$ とする．グラフは可能な範囲で丁寧に描くこと．

$y = 3\sin 2(\theta + \pi/3)$

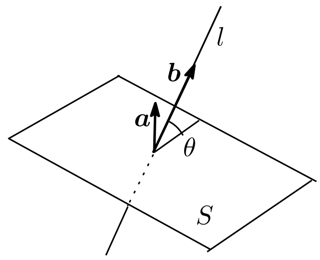
(鹿児島大 2007)　　(m20075412)

0.428　次のベクトルに関する問いに答えよ．

(1) 右図のように，$\boldsymbol{a}$ は平面 S と直交する法線ベクトルであり，$\boldsymbol{b}$ は平面 S と角 θ $(\leq 90^\circ)$ で交わる直線 l の上に存在するベクトルである．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を用いて $\sin\theta$ を表せ．

(2) 次の式で表される二つの平面 S_1 と S_2 の交角 α を求めよ．

S_1 : $x + 2y + 2z = 3$　　S_2 : $3x + 3y = 1$



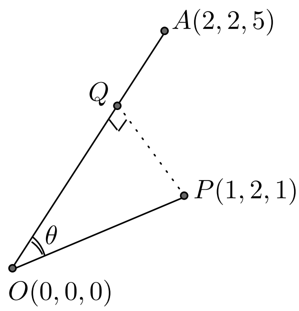
(鹿児島大 2008)　　(m20085403)

0.429　図の様に点 O を原点として，点 $A(2,2,5)$，点 $P(1,2,1)$ がある．点 P から直線 OA におろした垂線の足を点 Q とする．この時，以下の問いに答えなさい．

(1) 図の様に直線 OA と直線 OP の成す角度を θ とする時，$\cos\theta$ を求めなさい．

(2) 直線 OQ の長さを求めなさい．求めた長さを用いて，ベクトル $\overrightarrow{OQ}$ を求めなさい．

(3) ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ を求めなさい．



(鹿児島大 2009)　　(m20095407)

0.430　(1) $\displaystyle\int (2x^2 - 1/x)^2 dx$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle\int \cos^3 x dx$ を求めなさい．

(3) 楕円（長軸 a, 短軸 b, $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$）の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2009)　　(m20095412)

0.431 原点 $O(0,0)$, 点 $A(4,-1)$, 点 $B(2,2)$ がある時, 以下の問いに答えなさい.

(1) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の長さと内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ を求めなさい.

(2) 角 AOB を θ とする時, $\cos\theta$ と $\sin\theta$ を求めなさい.

(3) 三角形 OAB の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2009)　　(m20095419)

0.432 原点 $O(0,0)$, 点 $A(2,1)$ がある時, 以下の問いに答えなさい.

(1) 点 A に対して x 軸に関して線対称な点 B を求めなさい.

(2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$, $\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|$ を求めなさい. それらを使い $\angle AOB = \theta$ とした時の $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めなさい.

(3) 点 A を原点の周りに反時計回りに 45°回転させた点　C の座標を求めなさい.

(鹿児島大 2010)　　(m20105409)

0.433 直交座標系 $O-XYZ$ におけるベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ と $\boldsymbol{c} = (c_1,\ c_2,\ c_3)$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ により作られる三角形に余弦定理を適用して, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積について, $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ が成り立つことを示せ. ただし, θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角であり, また $|\boldsymbol{a}|$ と $|\boldsymbol{b}|$ はそれぞれ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の大きさを表し, $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$, $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2}$ である.

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積は $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$ と定義される. これより, $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\ \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\ \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b})$ が成り立つことを示せ.

(鹿児島大 2011)　　(m20115403)

0.434 行列 $A = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, 行列 $B = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ がある. このとき, 以下の各問に答えよ.

(1) AB ならびに BA を求めよ.

(2) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = 2BA - C$ とするとき, D を求めよ.

(3) n を正の整数, $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$ とするとき, $D^n\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \cos(-n\pi/2 + 2n\theta + \phi) \\ \sin(-n\pi/2 + 2n\theta + \phi) \end{pmatrix}$ であることを証明せよ.

(4) $R = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ とするとき $D^n = R$ の形に書けることを示し, β を求めよ. また, このことを利用して逆行列 $(D^n)^{-1}$ を求めよ.

(鹿児島大 2012)　　(m20125404)

0.435 ベクトルに関する以下の各問に答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ について, $2\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = 0$, $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = \dfrac{|\boldsymbol{c}|}{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})} \neq 0$ が成り立つ. ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めよ. ただし, 求める θ の範囲は $-\pi \leq \theta \leq \pi$ とする.

(2) $\overrightarrow{OA}=(1,2,3)$, $\overrightarrow{OB}=(1,1,-1)$, $\overrightarrow{OC}=(1,0,1)$ であり，原点 O から $\triangle ABC$ に垂線を下ろしたときの交点を D とする．$\overrightarrow{OD}$ ならびに $\triangle ABC$ の面積 S，四面体 $OABC$ の体積 V を求めよ．

(鹿児島大 2012)　　(m20125405)

0.436 直交座標系 $O-XYZ$ におけるベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$，$\boldsymbol{c}=(c_1,\ c_2,\ c_3)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは互いに直交になり，$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$ であるとき，$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\ (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$ を求めよ．ただし，“×”はベクトルの外積を表し，$\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\ \boldsymbol{a}$，$|\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta$ である．$|\boldsymbol{a}|$ と $|\boldsymbol{b}|$ はそれぞれ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の大きさを表す．また，θ は $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へのなす角である．

(2) $\boldsymbol{a}=(2,\ -3,\ 1)$，$\boldsymbol{b}=(1,\ -2,\ 3)$，$\boldsymbol{c}=(1,\ 2,\ -7)$ であるとき，$\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{c}=10$ を満たすベクトル $\boldsymbol{A}$ を求めよ．ただし，“·”はベクトルの内積を表し，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ である．また，外積について $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$ にもなる．

(鹿児島大 2012)　　(m20125409)

0.437 x 軸と y 軸からなる直交座標平面上に点 $A(2,1)$ と点 $B(2,-1)$ があるとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 点 A の y 軸に関して対称な点 P の座標を求めなさい．

(2) 座標平面の原点を O としたとき，$OA\perp OQ$ かつ $OA=OQ$ となるような，第 2 象限にある点 Q の座標を求めなさい．

(3) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積を求めなさい．また，$\angle AOB$ を θ としたとき，$\cos\theta$ の値を求めなさい．

(鹿児島大 2012)　　(m20125419)

0.438 直交座標系 $O-xyz$ において，点 $A(1,2,1)$，点 $B(-1,1,2)$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) 線分 OA と OB のなす角 θ を求めよ．

(2) 三角形 OAB の面積 S を求めよ．

(3) 点 A，点 B を通る直線 ℓ の方程式を求めよ．

(鹿児島大 2014)　　(m20145409)

0.439 xyz 直交座標系の原点を O とする．この空間内に 2 点 $A(1,2,0)$，点 $P(a,b,0)$ がある．以下の問いに答えなさい． ただし，点 P は 2 点 O，A を通る直線上にはないものとする．

(1) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OP}$ のなす角度を θ としたとき，$\cos\theta$ を求めなさい．

(2) 2 点 A，P を通る直線の方程式を求めなさい．

(3) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OP}$ の外積を求めなさい．

(4) 三角形 OAP の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2014)　　(m20145413)

0.440 直交座標系で $\overrightarrow{OP}=\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}$，$\overrightarrow{OQ}=\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix}$ とする．ただし，$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ は互いに平行ではない．$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ はいずれも零ベクトルではない．

(1) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めなさい．

(2) $\triangle OPQ$ の面積 S を求めなさい．

(鹿児島大 2015)　　(m20155408)

0.441 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が，逆行列と転置行列の等しい直交行列（$A^T = A^{-1}$）であることを示せ．

(鹿児島大 2015)　　(m20155415)

0.442 三角形の加法定理を用いて，

$$\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin(\theta - a)$$

の式における a を決定したい．どのように決定するか解法の過程を説明せよ．また a の値を答えよ．

(鹿児島大 2016)　　(m20165411)

0.443 原点 $O(0,0,0)$ を有する直交座標系 xyz において，点 $A(1,0,1)$，点 $B(1,1,0)$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) 線分 OA と線分 OB のなす角 θ を求めよ．

(2) 原点 O を中心とし，表面が線分 AB に接する球の方程式を求めよ．

(3) 点 O，A，B を含む平面に平行で，点 $C(1,1,1)$ を含む平面の方程式を求めよ．

(鹿児島大 2018)　　(m20185404)

0.444 2 つのベクトル $\boldsymbol{A} = (\sqrt{3}, 1)$，$\boldsymbol{B} = (\sqrt{3}, -1)$ のなす角 θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ を求めなさい．(鹿児島大 2018) (m20185417)

0.445 $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ を求めたい．解法の指針を最初に述べた後に解答せよ．

(鹿児島大 2021)　　(m20215417)

0.446 $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ を求めたい．解法の指針を最初に述べた後に解答せよ．

(鹿児島大 2022)　　(m20225411)

0.447 オイラーの公式：$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ に関する以下の問に答えよ．

(1) オイラーの公式を用いて，つぎの公式を証明せよ．

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

(2) $e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}e^{i\varphi}$ という式に，オイラーの公式を適用し，両辺の実部と虚部を比較して，余弦関数および正弦関数の加法公式

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$
$$\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$$

を導出せよ．

(室蘭工業大 2006)　　(m20065508)

0.448 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が直交行列であることを示しなさい．

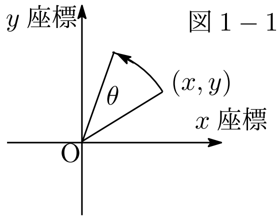
(室蘭工業大 2007)　　(m20075506)

0.449 (1) $\cos^2\theta\sin(2\theta) - \cos\theta\sin(3\theta) = A\sin(4\theta)$ と表したとき，係数 A を求めよ．

(2) $\cos^5\theta = B\cos\theta + C\cos(3\theta) + D\cos(5\theta)$ と表したとき，係数 B，C，D を求めよ．

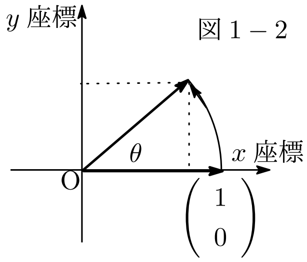
(室蘭工業大 2007)　　(m20075511)

0.450 括弧の中を埋めよ．全部で 8 箇所ある．



2 次元平面上の任意の点を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で表す（図 1-1 を参照する事）．

点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を原点 O の周りに角度 θ だけ回転（反時計回りを正とする，図 1-2 を参照）した点は $\begin{pmatrix} [\text{ア}\quad] \\ [\text{イ}\quad] \end{pmatrix}$ となる．



同様に考えると，点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ はは $\begin{pmatrix} [\text{ウ}\quad] \\ [\text{エ}\quad] \end{pmatrix}$ に移る．

よって任意の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を原点の周りに角度 θ だけ回転した点は,

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ なので,

$\begin{pmatrix} [\text{オ}\quad] & [\text{キ}\quad] \\ [\text{カ}\quad] & [\text{ク}\quad] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で与えられる．

(室蘭工業大 2008)　　(m20085511)

0.451 行列 A を $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ としたとき, 次の問いに答えよ.

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(2) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) 行列 A の 2 乗 A^2 を求めよ.

(4) 行列 A の N 乗 A^N を求めよ.

(室蘭工業大 2010)　　(m20105502)

0.452 2 変数関数 $z = z(x, y)$, $x(r, \theta) = r\cos\theta$, $y(r, \theta) = r\sin\theta$ の偏微分に関する以下の問いに答えよ. ただし，以下では，$r = 0$ の場合は除いて考える.

(1) 偏微分 $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を用いて表せ.

(2) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$ となることを示せ.

(室蘭工業大 2015)　　(m20155512)

0.453 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に関する以下の問いに答えよ.

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ.

(2) 行列式 $|A|$ を計算せよ.

(室蘭工業大 2018)　　(m20185509)

0.454 $f(x, y)$ を C^2 級の関数とし，θ を定数として　$x = u\cos\theta - v\sin\theta$, $y = u\sin\theta + v\cos\theta$　とする.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ を求めよ.　　(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ を $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ と $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を用いて表せ.

(島根大 2006)　　(m20065810)

0.455 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ がある．以下の設問に答えよ．ただし．互いに直交する x 軸, y 軸, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とする.

(1) 内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}-m\boldsymbol{a}$ が垂直となる m の値を求めよ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{b}$ のベクトル $\boldsymbol{a}$ への射影を求めよ.

(4) 外積 $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ を求めよ.

(5) ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ の正弦, すなわち $\sin\theta$ を求めよ.

(6) ベクトル $\boldsymbol{c}$, ベクトル $\boldsymbol{d}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を S とすると,

$$S^2=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})^2$$

となることを示せ．次に, ベクトル $\boldsymbol{a}$, ベクトル $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ.

(島根大 2008)　　(m20085810)

0.456 デカルト座標系 (x,y) で，$(x^2+y^2)^3=4x^2y^2$ と表現される曲線について以下の問に答えよ.

(1) 極座標系 (r,θ) での関係式に変換せよ ($r=\sqrt{x^2+y^2},\tan\theta=y/x$).

(2) グラフの概形を図示せよ.

(3) 曲線が囲む図形の面積（複数の図形がある場合はすべての合計）を求めよ.

(首都大 2004)　　(m20045905)

0.457 直交座標系 (x,y,z) における二つのベクトルを $\boldsymbol{a}=(-1,2,3)$, $\boldsymbol{b}=(3,1,-2)$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求めよ.

(首都大 2010)　　(m20105901)

0.458 行列 A を $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えなさい.

(1) A の行列式 $|A|$ を求めなさい.

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}$ には $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ の関係があった．このときの，x_1 と x_2 を求めなさい.

(首都大 2013)　　(m20135901)

0.459 直交座標系 (x,y,z) における 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}=(2,-2,1)$ と $\boldsymbol{b}=(1,1,2)$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めなさい.

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に垂直な単位ベクトルをすべて求めなさい.

(3) $(0,0,0)$, $(2,-2,1)$, $(1,1,2)$ の 3 点を通る平面の方程式を示しなさい.

(首都大 2013) (m20135902)

0.460 ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ について,

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} u \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

で定める. 下記の (1), (2), (3) に答えなさい. ただし, u は正の実数である.

(1) 内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ とベクトルの長さ $||\boldsymbol{a}||$, $||\boldsymbol{b}||$ をそれぞれ求めなさい.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ としたときの $\cos\theta$ を求めなさい.

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するための u を求めなさい.

(首都大 2016) (m20165903)

0.461 (1) 次の関数について $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ. $x = \dfrac{a}{\cos\theta}$, $y = b\tan\theta$ (a, b は定数, ただし, $a \neq 0$)

(2) 次の関数について $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ. $y = \dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x\right)$

(3) 次の極限値を求めよ. $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^x$

(東京都立大 2020) (m20205910)

0.462 D を $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1$ (a, b は正の実数) で与えられる領域とするとき, $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$ とおくことにより, $\displaystyle\iint_D x^2 dxdy$ を求めよ.

(滋賀県立大 2015) (m20156004)

0.463 以下の問に答えよ.

(1) $x > 0$ における次の関数の極値とそのときの x の値を求めよ.

$$f(x) = e^{-ax} - e^{-bx} \qquad \text{ただし}, b > a > 0 \text{ とする}.$$

(2) 次の定積分の大きさを求めよ。

$$\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta$$

(宇都宮大 2004) (m20046103)

0.464 関数 $z = f(x,y)$ の x と y が r と θ の関数で $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ の関係にあるとき, $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めよ.

(宇都宮大 2014) (m20146107)

0.465 図 1 のように, 点 A, B, C, D が xy 軸平面上にある. 原点 O とし, 各座標を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と示すとき, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である.
また, $\overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OA}$ を原点を中心として, 反時計方向に角度 θ 回転させたものである. $\overrightarrow{OD}$ は $\overrightarrow{OC}$ を同様に角度 θ 回転させた点である.
以下の問に答えよ.

(1) 点 B, D の座標を求めよ.

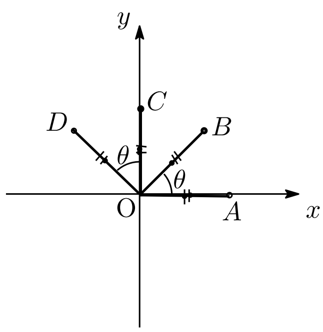


図 1:xy 軸平面

(2) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$ を計算せよ．

(3) 原点を中心とした長さ 1 である任意のベクトル $\overrightarrow{OE}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ は，

$\overrightarrow{OA}$ を角度 α 回転させることによって得られる．角度 α 回転させる一次変換を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \text{ ①}$$

と表すとき，a,b,c,d を求めよ．

(4) $\cos(\alpha+\beta)$ を $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta$ を用いて表せ．

(工学院大 2003)　　(m20036206)

0.466 (1) 行列 $A=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ の固有値が実数となることを証明せよ．

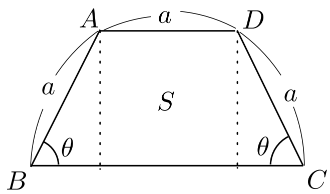
(2) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求め，$AA^{-1}=E$ となることを証明せよ．ただし，E は単位行列である．

(工学院大 2004)　　(m20046205)

0.467 2つのベクトル $\vec{a}=(1,1),\ \vec{b}=(-1+\sqrt{3},\ -1-\sqrt{3})$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．また，$\vec{a},\ \vec{b}$ が成す角 θ を求めよ．

(工学院大 2004)　　(m20046207)

0.468 図のように辺 $AB=AD=DC=a,\ \angle ABC=\angle DCB=\theta$ の等脚台形がある．台形 $ABCD$ の面積 S を $a,\ \theta$ を用いて表せ．さらに面積 S を最大にするような θ の値を求めよ．



(工学院大 2004)　　(m20046211)

0.469 $y=\sin^2\theta+\sin 2\theta+3\cos^2\theta\ (0^\circ \leqq \theta < 90^\circ)$ の最大値とそのときの θ の値を求めよ．

(工学院大 2005)　　(m20056202)

0.470 以下の関数を x で微分しなさい.

(1) $y=2x^3-5x^2$　　(2) $y=\sin^2 x$

(3) $y=\left\{\log\left(\sqrt{x}+1\right)\right\}^2$　　(4) $y=\displaystyle\int_x^{2x}\sin\theta d\theta$

(東京海洋大 2013)　　(m20136401)

0.471 複素関数について，次の各問いに答えなさい.

(1) 関数 $w=z+\dfrac{1}{z}$ に対して $z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta),\ w=u+iv$ とおくとき， $u,\ v$ を $r,\ \theta$ で表しなさい.

(2) 関数 $f(z)$ が領域 D で正則であるとき，$\mathrm{Re}f(z)$ が定数ならば $f(z)$ も定数であることを証明しなさい.

(3) 積分路 $C:|z|=2$ の向きは反時計回りとして，次の積分値を求めなさい.

$$\int_C \frac{2z+1}{z(z-3)}dz$$

(和歌山大 2014)　　(m20146508)

0.472　(1) 次の重積分を，極座標 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ によって，r と θ の積分に変数変換しなさい．

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy, \qquad D = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 1\right\}$$

(2) (1) の積分の値を求めなさい．

(和歌山大 2018)　　(m20186503)

0.473　xy 平面上において, 原点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と, 放物線 $C_2 : y = \dfrac{2}{3}x^2 - a\ (a > 1)$ を考える. C_2 の接線のうち, 傾きが $\tan\theta$ となるものを l とし, C_2 との接点を P とする. ただし, θ は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする. また, 原点 O を通り, l と直交する直線を m とし, m と円 C_1 との交点のうち第 4 象限の点を Q とする.

(1) 直線 l の傾きが $\sqrt{3}$ であるとき, θ の値を求めよ. また, このときの点 P の座標が $\left(\dfrac{3}{4}\sqrt{3},\ \dfrac{9}{8} - a\right)$ となることを示せ.

(2) 直線 l の傾きが $\sqrt{3}$ であるとき, 直線 m を表わす方程式を求めよ. また, 点 Q の座標を求めよ.

(3) 3 点 $O,\ P,\ Q$ が同一直線上に並ぶための必要十分条件は $\tan\theta = \sqrt{\dfrac{8}{3}a - 2}$ であることを示せ.

(4) $a = \dfrac{9}{8}$ のとき, C_1 上の点と C_2 上の点を結ぶ線分の長さの最小値を求めよ.

(東京工科大 2010)　　(m20106907)

0.474　(1) i は虚数単位とする．$\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$ の実部と虚部を求めよ．

(2) $0 < x < 1$ のとき，方程式 $\log_3 x - 3\log_x 9 + 1 = 0$ を解け．

(3) 不等式 $\sin 2\theta > \sin\theta$ を満たす θ の値の範囲を求めよ．

(富山県立大 2017)　　(m20177101)